

**Universidad de Nariño**  
Facultad de ciencias exactas y naturales  
Departamento de Física



**UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CUERDAS: PARTÍCULAS  
PUNTUALES, CUERDAS ABIERTAS Y CERRADAS.**

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:  
Físico

*María Alejandra González Velásquez*

**San Juan de Pasto, Colombia**

**2018**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO**

**Programa de Física**

**UNA INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CUERDAS: PARTÍCULAS  
PUNTUALES, CUERDAS ABIERTAS Y CERRADAS.**

*Maria Alejandra Gonzalez Velasquez*

Director:

JONATHAN BOLAÑOS CORAL

Doctor en Física

Codirector:

SANDRA SÁNCHEZ SIERRA

Magister en Geofísica

**San Juan de Pasto**

**2018**

### **Nota de responsabilidad**

”Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación:

---

---

---

---

---

Director: Jonathan Bolaños Coral

---

Jurado: Yithsbey Giraldo Usuga

---

Jurado: German Enrique Ramos Zambrano

San Juan de Pasto, 24 de abril del 2019.

*Dedicada*  
*A mis abuelitos Luis y Gloria*

## Agradecimientos

A Dios, porque su amor y bondad me permitieron cumplir todas mis metas.

A mis abuelitos Luis y Gloria, quienes son las personas más importantes en mi vida y me han dado su apoyo siempre.

A mi familia por haber sido mi apoyo a lo largo de toda mi carrera universitaria y a lo largo de mi vida.

Al departamento de física de la universidad de nariño por la formación que me brindó a lo largo de toda la carrera.

A mi asesor de tesis, el profesor Jonathan Bolaños quien de manera desinteresada me guío para poder culminar este trabajo de grado, por compartirme sus grandes conocimientos y por tenerme mucha paciencia.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Elementos de relatividad especial</b>	<b>5</b>
2.1. Postulados de la relatividad especial . . . . .	5
2.2. Transformaciones de Lorentz . . . . .	5
2.2.1. Transformaciones de velocidades . . . . .	8
2.2.2. Consecuencias de las transformaciones de Lorentz . . . . .	9
2.3. Elementos de teoría de oscilaciones de una cuerda . . . . .	11
2.3.1. Ecuación de movimiento para oscilaciones transversales en una cuerda	11
2.3.2. Condiciones de frontera y condiciones iniciales . . . . .	13
2.3.3. El Lagrangiano de la cuerda no relativista . . . . .	15
<b>3. Cuerdas relativistas</b>	<b>16</b>
3.1. Aspectos matemáticos: el funcional de área en superficies espaciales y su re-	
parametrización . . . . .	16
3.1.1. Definición de funcional de área de una superficie espacial: parametrización	16
3.1.2. Reparametrización funcional de área de una superficie espacial . . . . .	19
3.2. Parametrización de curvas . . . . .	19
3.2.1. Reparametrización . . . . .	20
3.2.2. Longitud de arco . . . . .	20
3.3. Intervalos en relatividad especial . . . . .	20
3.3.1. Acción de una partícula relativista . . . . .	22
3.3.2. Invarianza ante reparametrización: línea de mundo . . . . .	24
3.3.3. Invarianza ante reparametrización: área de mundo . . . . .	25
3.3.4. Funcional de área para una superficie espacio-tiempo: parametrización	
$\tau$ - $\sigma$ . . . . .	27
3.4. Dinámica relativista de una partícula libre . . . . .	28

3.4.1.	Descripción de la partícula puntual relativista . . . . .	28
3.4.2.	La acción de Nambu Goto . . . . .	29
3.5.	Parametrización de una cuerda y movimiento clásico . . . . .	30
3.5.1.	Ecuaciones de movimiento . . . . .	30
3.5.2.	Acción en términos de velocidad transversal . . . . .	31
3.6.	Elección de una parametrización $\sigma$ . . . . .	34
3.7.	Ligaduras y ecuación de onda . . . . .	36
3.8.	Movimiento general de una cuerda abierta . . . . .	38
3.9.	Movimiento de una cuerda cerrada y cuspides . . . . .	43
<b>4.</b>	<b>Cono de luz en cuerdas relativistas</b>	<b>46</b>
4.0.1.	Coordenadas cono de luz . . . . .	47
4.1.	Gauge estático . . . . .	47
4.2.	Una clase de opciones para $\tau$ . . . . .	48
4.3.	La $\sigma$ parametrización asociada . . . . .	49
4.4.	Ligaduras . . . . .	51
4.5.	Ecuación de onda y modos de expansión . . . . .	52
4.6.	Cono de luz en cuerdas relativistas . . . . .	54
4.7.	Solución de ecuaciones de movimiento, cono de luz . . . . .	54
4.7.1.	Modos de vibración transversal . . . . .	56
4.8.	Cono de luz, partícula puntual . . . . .	57
<b>5.</b>	<b>Imágenes de Heisenberg y Schrödinger</b>	<b>61</b>
5.1.	Imagen de Schrödinger . . . . .	61
5.2.	Imagen de Heisenberg . . . . .	62
5.3.	Quantización de una partícula puntual . . . . .	63
<b>6.</b>	<b>Cuerdas cuantico - relativistas abiertas y cerradas</b>	<b>65</b>
6.1.	Cuerdas abiertas cuantico-relativistas . . . . .	65
6.1.1.	Construyendo el espacio de estado . . . . .	73
6.1.2.	Ecuaciones de movimiento . . . . .	74
6.2.	Cuerdas cerradas cuantico-relativistas . . . . .	75
<b>7.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>80</b>



**RESUMEN**

Actualmente son reconocidas cuatro interacciones fundamentales, gravitacional, electromagnética, débil y fuerte. Aunque existen algunas teorías, hasta el momento la unificación de tales interacciones no ha podido ser desarrollada. Una posibilidad altamente relevante es la teoría de cuerdas, en esta teoría de unificación las partículas elementales corresponden a diferentes modos de vibración de elementos fundamentales llamados cuerdas. Para estudiar esto, en este trabajo de grado, primero se estudiaron algunos aspectos de la teoría de la relatividad especial y teoría de cuerdas en mecánica clásica, luego a partir de estos conceptos llegamos a una expresión para la masa en mecánica clásica. Finalmente, en este trabajo se estudiaron los aspectos más importantes sobre la cuantificación de las cuerdas abiertas y cerradas, lo anterior con el objetivo de que las futuras generaciones sigan realizando estudios en teoría de cuerdas.

**Abstract**

Currently, four fundamental interactions are recognized: gravitational, electromagnetic, weak and strong interaction. Although there are some theories, until now the unification of strong interactions has not been able to be developed. One highly relevant possibility is string theory, in this unification theory the elementary particles correspond to different modes of vibration of fundamental elements in the strings. To study this, in this degree work, we first study some aspects of the theory of special relativity and string theory in classical mechanics, and then from these concepts in an expression for mass in classical mechanics. Finally, in this work we will study the most important aspects about the quantification of open and closed strings, the above with the objective of future generations.

# Capítulo 1

## Introducción

La teoría de cuerdas es un modelo fundamental de física teórica que asume que las partículas que conforman la materia, son en realidad estados vibracionales de un objeto más pequeño llamado cuerda. Estas cuerdas vibran como las cuerdas de guitarra, las diferentes formas de vibración generarían las diferentes partículas que existen. De acuerdo con esta teoría, a nivel subatómico se percibiría que el electrón es en realidad una cuerda en forma de lazo[1]. Si la cuerda oscila de cierta manera, entonces, obtendremos un electrón; pero si oscila de otra manera, entonces veríamos un fotón, o un quark, o cualquier otra partícula del Modelo Estándar. En general esta teoría pretende alejarse de la concepción de la partícula puntual. La Teoría de cuerdas es la última candidata a unificar de forma razonable la controversia entre las leyes Físicas tradicionales y el extraño mundo cuántico, y supone un cambio radical porque, con ella, se establece un límite mínimo necesario para cada componente último de la materia, la longitud de las cuerdas.

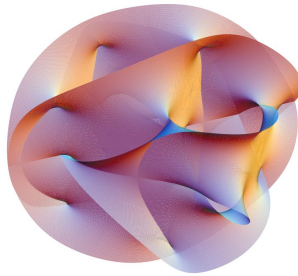


Figura 1.1: Representación de una cuerda en varias dimensiones proyectada en 3 dimensiones. Neo Fronteras. (2009). Mas allá de las cuerdas [Figura]. Recuperado de <https://neofronteras.com/?p=2614>

La formulación de una teoría de cuerdas se debe a Joel Scherk y John Henry Schwarz, que en 1974 publicaron un artículo en el que se mostraba que una teoría basada en cuerdas o filamentos en lugar de partículas puntuales podía describir la gravedad. Aunque en ese momento estas ideas no recibieron la atención necesaria fue en 1984 que se dio la primera revolución de supercuerdas cuando Schwarz colaboró y publicó sobre esta teoría junto con Michael Green. Los dos lograron demostrar cómo se podían eliminar ciertas anomalías de la teoría de cuerdas planteada en un inicio.

La teoría de cuerdas fue la primera teoría matemáticamente consistente, que permitía la coexistencia de la mecánica cuántica y la relatividad general, esto sería posible al unir las cuatro fuerzas fundamentales: el electromagnetismo, nuclear fuerte, nuclear débil y la gravedad.

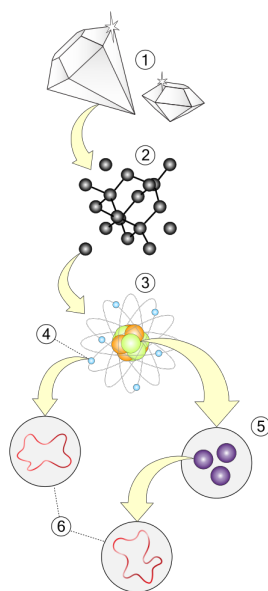


Figura 1.2: Composición de la materia: 1.Materia, 2.Estructura molecular, 3.Átomos, 4.Protones y neutrones, 5.Quarks, 6.Cuerdas.

Wikipedia la enciclopedia libre. (2019). Teoría de cuerdas [Figura]. Recuperado de <https://es.wikipedia.org/wiki/Teor>

Esta teoría tiene la mala reputación de ser extremadamente difícil de entender. En cierta medida esto es así porque, la teoría es muy nueva y en su mayoría de casos mal entendida.

No obstante, recientemente los conceptos básicos de la teoría de cuerdas han intentado ser llevados a los estudiantes de física en su formación de pregrado. Además, posee otros graves problemas, que hasta ahora no se ha logrado resolver, siendo el principal problema la imposibilidad de demostrar que la teoría es errónea, puesto que para observar las cuerdas se necesitarían grandes cantidades de energía que están muy lejos de las producidas por la tecnología actual, no obstante en el ámbito científico y social tiene mucha relevancia y se muestra como la solución a muchos problemas.

Aunque la teoría de cuerdas, según sus defensores, pudiera llegar a convertirse en una de las teorías físicas más predictivas, capaz de explicar algunas de las propiedades más fundamentales de la naturaleza en términos geométricos, los físicos que han trabajado en ese campo hasta la fecha no han podido hacer predicciones concretas con la precisión necesaria para confrontarlas con datos experimentales. .<sup>El</sup> único problema es que sus matemáticas son tan nuevas y tan difíciles que durante varias décadas no sabremos cuáles son”, dicho esto en 1990. D. Gross, premio Nobel de física por su trabajo en el Modelo Estándar, se convirtió en un formidable luchador de la teoría de cuerdas, pero recientemente ha dicho: ”No sabemos de qué estamos hablando” [1].

Dado que la teoría de cuerdas ahora ya nos resulta familiar, podríamos sentirnos tentados de aventurar un pronóstico sobre cómo sucede esto [4].

## Glosario

**Hoja de mundo:** En teoría de cuerdas, una hoja de mundo es una superficie bidimensional que describe el movimiento de una cuerda en el espacio-tiempo.

**Cono de luz:** Es un modelo gráfico que puede utilizarse para explicar cómo viaja la luz a través del espacio y el tiempo. Este modelo está conformado de cuatro dimensiones, tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal.

**Acción:** Es la magnitud que expresa el producto de la energía implicada en un proceso por el tiempo que dura este proceso. Se puede diferenciar según el lapso de tiempo considerado en acción instantánea, acción promedio, etc.

**Funcional:** El significado inicial es una función que toma funciones como su argumento; es decir, una función cuyo dominio es un conjunto de funciones.

**Parametrización:** Un sistema de ecuaciones paramétricas permite representar una curva o superficie en el plano o en el espacio, mediante valores que recorren un intervalo de números reales, mediante una variable, llamada parámetro, considerando cada coordenada de un punto como una función dependiente del parámetro.

# Capítulo 2

## Elementos de relatividad especial

### 2.1. Postulados de la relatividad especial

La relatividad especial es una teoría física, basada en los dos siguientes postulados.

- **Postulado 1:** Las leyes de la física son las mismas en cualquier marco de referencia inercial.
- **Postulado 2:** La rapidez de la luz en el vacío es la misma en cualquier marco de referencia inercial, ésta es independiente del movimiento de su fuente.

### 2.2. Transformaciones de Lorentz

Una consecuencia de los postulados de la relatividad especial son las transformaciones de Lorentz. Éstas son transformaciones de coordenadas entre sistemas de referencia inerciales. Para determinar las transformaciones de Lorentz, consideremos un evento  $P$ , visto desde dos marcos de referencia,  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ , donde  $\Sigma'$  se mueve a velocidad  $v$  constante con respecto a  $\Sigma$ . Las coordenadas de este punto en los marcos de referencia mencionados son  $(t, x)$  y  $(t', x')$ , respectivamente[9].

El desplazamiento del sistema  $\Sigma'$  respecto a  $\Sigma$  a través de los ejes colineales  $x$  y  $x'$  sugiere que las coordenadas  $t'$  y  $x'$  deben ser, en principio, coordenadas de  $t$  y  $x$

$$t' = f_1(t, x) \tag{2.1}$$

$$x' = f_2(t, x) \tag{2.2}$$

con la condición de que estas funciones sean invertibles. Las anteriores relaciones de transformación deben ser lineales, visto que un acontecimiento en  $\Sigma$  le tiene que corresponder un solo acontecimiento en  $\Sigma'$  y viceversa.

A continuación consideremos que un rayo de luz parte del origen como se indica en la siguiente figura, después de un tiempo  $t$  el observador  $\Sigma$  notará que la luz ha llegado al punto A, de esto se tiene que  $r = ct$ , es decir

$$(ct)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.3)$$

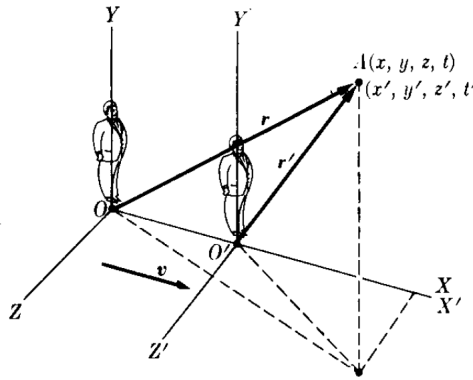


Figura 2.1: Sistemas de referencia  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ . se ilustra la velocidad relativa en ambos sistemas y las coordenadas para el evento P en los dos sistemas. Alonso M. y Finn E. (1970). FÍSICA volumen 1 mecánica [Figura]. Departamento de física Georgetown Washington

Por otro lado un observador que se encuentre en  $\Sigma'$ , notará que la luz llega al mismo punto A en un tiempo  $t'$  con igual rapidez  $c$ , por lo que para este observador

$$(ct')^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (2.4)$$

De la figura 2.1 se observa que  $OO' = vt$ , puesto que la transformación de la coordenada es lineal y teniendo en cuenta que la coordenada del origen del sistema  $\Sigma'$  medido desde  $\Sigma$  está dada por:  $x = vt$ , podemos suponer que  $x'$  debe ser de la forma:

$$x' = \gamma(x - vt) \quad (2.5)$$

donde  $\gamma$  es una constante a determinar, similarmente para la coordenada temporal se obtiene

$$t' = a(t - bx) \quad (2.6)$$



donde  $a$  y  $b$  son constantes que aún deben ser determinadas. Sustituyendo (2.5) y (2.6) en (2.4) obtenemos:

$$(\gamma^2 - b^2 a^2 c^2)x^2 - 2(\gamma^2 v - b a^2 c^2)xt + y^2 + z^2 = (a^2 - \gamma^2 v^2 / c^2)c^2 t^2 \quad (2.7)$$

Esta última expresión debe ser idéntica a (2.3), de modo que:

$$\gamma^2 - b^2 a^2 c^2 = 1, \quad \gamma^2 v - b a^2 c^2 = 0, \quad a^2 - \gamma^2 v^2 / c^2 = 1. \quad (2.8)$$

Lo anterior implica que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.9)$$

Este factor se denomina *factor gamma de Lorentz*. De esta manera las transformaciones de Lorentz para el caso analizado son:

$$t' = \frac{(t - xv/c^2)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.10)$$

$$x' = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.11)$$

Adicionalmente, en el marco de referencia  $\Sigma'$ , el marco  $\Sigma$  se aleja en la dirección  $-x$  con una velocidad  $-v$ .  $\Sigma'$  puede usar la misma transformación de Lorentz para obtener los valores de  $x$  y  $t$  medidos por  $\Sigma$  en función de los valores  $x'$  y  $t'$  medidos por  $\Sigma'$ . Según lo anterior se debe cambiar  $v$  por  $-v$  y  $(x, t)$  por  $(x', t')$  como se muestra a continuación

$$x = \gamma'(x' + vt'), \quad (2.12)$$

$$t = \gamma'(t' + bx'), \quad (2.13)$$

donde  $\gamma = \gamma'$ . Estas dos últimas expresiones son conocidas como las transformaciones inversas de Lorentz.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Supongamos que tenemos una barra que se encuentra en reposo en  $\Sigma'$  y tiene una longitud  $l$  en este sistema, los puntos final e inicial de la barra están dados por  $x'_2$  y  $x'_1$  respectivamente

$$x'_2 - x'_1 = l \quad (2.14)$$

### 2.2.1. Transformaciones de velocidades

A continuación vamos a analizar la velocidad de una partícula vista desde los sistemas mencionados anteriormente.

En  $\Sigma'$  la velocidad esta definida por:

$$u' = \frac{dx'}{dt'}, \quad (2.22)$$

los diferenciales  $dx'$  y  $dt'$  pueden ser obtenidos a partir de las ecuaciones (2.10) y (2.11), por tanto

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{\gamma(dx - vdt)}{\gamma\left(dt - \frac{vdx}{c^2}\right)} = \frac{\frac{dx}{dt} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{dx}{dt}}, \quad (2.23)$$

es decir,

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \quad (2.24)$$

---

juntando (2.5) y (2.14) tenemos

$$x'_2 - x'_1 = \gamma(x_2 - vt) - \gamma(x_1 - vt) = l \quad (2.15)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{l}{\gamma} \quad (2.16)$$

A continuación consideremos la misma barra, pero esta vez se encuentra en reposo en el sistema  $\Sigma$ , en este marco la longitud está dada por

$$x_2 - x_1 = l \quad (2.17)$$

sustituyendo (2.12) en (2.17) tenemos

$$x_2 - x_1 = \gamma'(x'_2 + vt) - \gamma'(x'_1 + vt) = l \quad (2.18)$$

$$x'_2 - x'_1 = \frac{l}{\gamma'} \quad (2.19)$$

Por el primer postulado tenemos que las longitudes de los sistemas en movimiento para cada uno de los casos deben ser iguales, por ende

$$\frac{l}{\gamma} = \frac{l}{\gamma'} \quad (2.20)$$

finalmente

$$\gamma = \gamma' \quad (2.21)$$

Si en esta última expresión reemplazamos  $v$  por  $-v$  tenemos

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \quad (2.25)$$

(2.25) representa la transformación inversa para la velocidad.

## 2.2.2. Consecuencias de las transformaciones de Lorentz

### Dilatación del tiempo

En seguida, analizaremos un primer fenómeno no esperado hasta antes del desarrollo de la teoría de la relatividad especial, consideremos nuevamente los sistemas de referencia mencionados. El intervalo de tiempo medido en el marco de referencia inercial  $\Sigma$  será siempre más corto que el intervalo de tiempo medido en el marco de referencia inercial  $\Sigma'$ .

Para analizar este fenómeno, suponga que tenemos un reloj que se encuentra en reposo en el punto  $x = x_o$  respecto al sistema  $\Sigma$  y consideremos dos mediciones tomadas por el reloj:

$$\text{evento1}(x_o, t_1) \quad (2.26)$$

$$\text{evento2}(x_o, t_2) \quad (2.27)$$

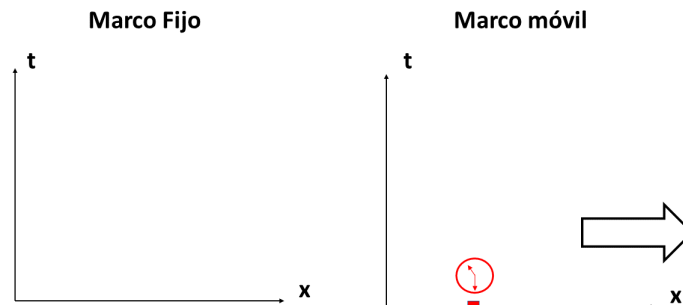


Figura 2.2: Tiempo medido desde un marco de referencia inercial en movimiento, respecto a un marco en reposo

Sea  $T_o = t'_2 - t'_1$  el intervalo de tiempo medido en el marco de referencia en movimiento. Calculemos  $T = t_2 - t_1$  usando (2.13), con lo cual obtenemos

$$T = \frac{T_o}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma T_o. \quad (2.28)$$

En ésta última expresión se ve claramente que el intervalo de tiempo medido en el sistema de referencia inercial  $\Sigma$  es más largo que el intervalo de tiempo medido en  $\Sigma'$ .

### Contracción de longitudes

La longitud de cualquier objeto en un marco móvil estará contraída en la dirección del movimiento. Para ver esto consideremos de nuevo los dos sistemas de referencia anteriormente mencionados  $\Sigma$  y  $\Sigma'$ . La longitud de un objeto es máxima cuando se encuentra en el marco de referencia inercial  $\Sigma$ .

Consideremos que la longitud de un objeto medido en el marco móvil  $\Sigma'$  está dada por:

$$L_o = x'_2 - x'_1 \quad (2.29)$$

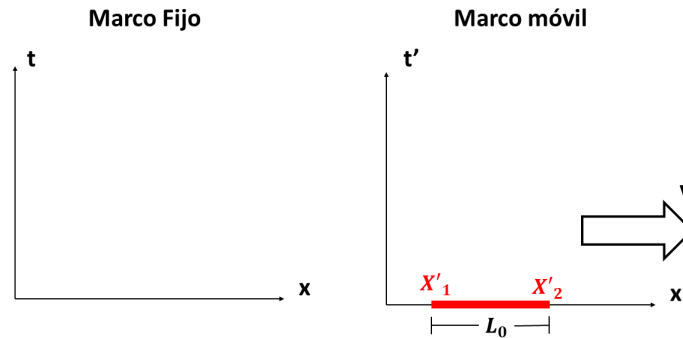


Figura 2.3: Longitud medida desde un marco de referencia inercial en movimiento, respecto a un marco en reposo

Podemos calcular la longitud de éste objeto en  $\Sigma$  como  $L = x_2 - x_1$  usando las transformaciones de Lorentz (2.12), las dos medidas se realizan en el marco fijo de manera simultánea,  $t_2 = t_1$ , por tanto:

$$L = L_o \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{L_o}{\gamma}. \quad (2.30)$$

En (2.30) se puede evidenciar que la longitud de un objeto medida en  $\Sigma$  es mayor que la longitud del mismo objeto medida en  $\Sigma'$ .

## 2.3. Elementos de teoría de oscilaciones de una cuerda

### 2.3.1. Ecuación de movimiento para oscilaciones transversales en una cuerda

A continuación consideraremos una cuerda en la cual se presentan oscilaciones transversales. Por simplicidad consideraremos el caso en el que únicamente hay dirección transversal en el movimiento de la cuerda.

Imaginemos una pequeña porción de cuerda que se extiende desde  $x$  hasta  $x + dx$  y desde  $y$  hasta  $y + dy$ , en este caso asumiremos que las oscilaciones son pequeñas de modo que:

$$\left| \frac{\partial y}{\partial x} \right| \ll 1, \quad (2.31)$$

ésto implica que el desplazamiento transversal de la cuerda sea pequeño en comparación con el diferencial de la longitud de la misma. La porción de cuerda mencionada presenta una masa  $\Delta m = \mu \Delta x$ , donde  $\mu$  representa la densidad lineal de masa. Este trozo de cuerda puede tratarse como una partícula que se mueve exclusivamente en la dirección vertical, de forma que la velocidad y aceleración de la misma está dada por

$$\vec{v} = \frac{\partial y}{\partial t} \hat{j}, \quad \vec{a} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \hat{j}. \quad (2.32)$$

El uso de la derivada parcial, en vez de la total, se debe a que  $y$  depende de dos variables,  $x$  y  $t$ . Este trozo infinitesimal de cuerda se mueve sometida a la acción de las fuerzas ejercidas por los trozos de cuerda adyacentes, a través de la tensión  $\mathbf{F}_T$  con que tiran de ella. De esta forma, la segunda ley de Newton para esta masa está dada por

$$\Delta m \mathbf{a} = \mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \hat{j} = \mathbf{F}_{T_y}(x + \Delta x) - \mathbf{F}_{T_y}(x) \quad (2.33)$$

Veamos cada componente de esta ecuación vectorial por separado.

Si consideramos la dirección longitudinal, paralela a la cuerda, tenemos que en ésta la aceleración es nula (pues la onda es transversal), así que la segunda ley de Newton se reduce

a

$$F_{Tx}(x + \Delta x) - F_{Tx}(x) = 0 \quad (2.34)$$

siendo  $F_{Tx}$  las componentes de la tensión en la dirección longitudinal. Podemos relacionar dichas componentes con el módulo de la tensión,  $F_T = |\mathbf{F}_T|$ , y el ángulo  $\theta$  que forma con la dirección longitudinal

$$F_{Tx} = |\mathbf{F}_T| \cos(\theta) \quad (2.35)$$

con lo cual

$$F_{Tx}(x + \Delta x) \cos[\theta(x + \Delta x)] - F_{Tx}(x) \cos[\theta(x)] = 0, \quad (2.36)$$

Ahora bien, debido a que la amplitud de las oscilaciones es pequeña, podemos aplicar la siguiente aproximación

$$\cos(\theta) \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2} \simeq 1 \quad (2.37)$$

de forma que la ecuación de movimiento en la dirección longitudinal se reduce a

$$F_{Tx}(x + \Delta x) = F_{Tx}(x) \quad (2.38)$$

es decir, el módulo de la tensión es el mismo para todos los puntos de la cuerda. Por ello se puede hablar de la 'tensión de la cuerda' sin especificar a qué punto nos referimos. Hay que recordar, no obstante, que este resultado es aproximado, consecuencia de haber supuesto pequeñas amplitudes.

Para el caso transversal considerando la aceleración transversal del elemento de masa

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_{Ty}(x + \Delta x) - F_{Ty}(x). \quad (2.39)$$

Relacionando de nuevo las componentes con el módulo (del cual ya sabemos que es constante) y el ángulo tenemos

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_T \sin(\theta(x + \Delta x)) - F_T \sin(\theta(x)) \quad (2.40)$$

considerando nuevamente la pequeñez del ángulo

$$\theta \ll 1 \Rightarrow \sin(\theta) \simeq \theta \simeq \operatorname{tg} \theta, \quad (2.41)$$

por lo tanto

$$\mu \Delta x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_T (\operatorname{tg}(\theta(x + \Delta x)) - \operatorname{tg}(\theta(x))) \quad (2.42)$$

la tangente del ángulo  $\theta$  es justamente la pendiente de la recta tangente a la curva, ésto es, la derivada con respecto a  $x$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (2.43)$$

así, la ecuación anterior puede ser escrita como

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_T \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{\partial y}{\partial x}(x + \Delta x) - \frac{\partial y}{\partial x}(x) \right). \quad (2.44)$$

Considerando que en un instante dado, si  $\Delta x$  es infinitesimal

$$\frac{1}{\Delta x} (f(x + \Delta x) - f(x)) \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \quad (2.45)$$

finalmente

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F_T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \quad (2.46)$$

esta última expresión es una ecuación de onda. Por lo tanto, la fuerza vertical neta  $dF_v$  es

$$dF_v = T_o \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x+dx} - T_o \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_x \simeq T_o \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx. \quad (2.47)$$

Ahora bien, aplicando la segunda ley de Newton

$$T_o \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \mu_o dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2.48)$$

donde  $\mu_o dx = dm$ . Reorganizando términos tenemos

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu_o}{T_o} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (2.49)$$

Esta última expresión es una ecuación de onda unidimensional.

### 2.3.2. Condiciones de frontera y condiciones iniciales

En teoría de cuerdas es importante considerar dos tipos de condiciones de frontera, la condición de frontera de *Dirichlet*, se impone en una ecuación diferencial ordinaria o parcial y especifica los valores que una solución debe tomar en el límite del dominio. Para nuestra

cuerda las posiciones de los puntos inicial y final son especificados. Para el caso en el que las cuerdas sean atadas a una pared las siguientes condiciones son válidas

$$y(t, x = 0) = y(t, x = a) = 0 \quad (2.50)$$

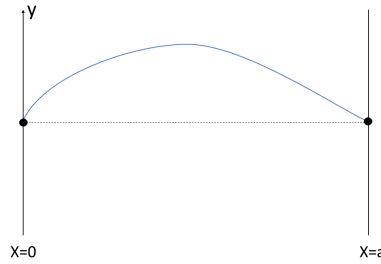


Figura 2.4: Condición de frontera de Dirichlet, cuerda fija de dos paredes situadas en  $x = 0$  y  $x = a$ .

Adicionalmente, la condición de frontera de *Neumann*, se impone en una ecuación diferencial ordinaria o parcial y especifica los valores en los cuales se aplica la derivada de una solución dentro del dominio. Consideremos un anillo de masa despreciable que está atado a cada extremo la cuerda (sin fricción), en este caso especificaremos los valores de  $\partial y / \partial x$  en los extremos, dado que no hay fricción  $\partial y / \partial x$  debe desaparecer en  $x = 0$  y  $x = a$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(t, x = 0) = \frac{\partial y}{\partial x}(t, x = a) = 0 \quad (2.51)$$

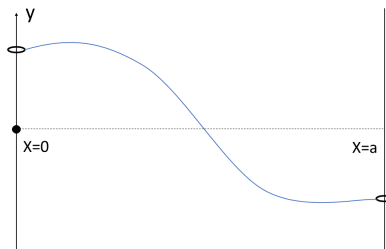


Figura 2.5: Condición de frontera de Neumann, cuerda libre en sus dos extremos.

estas condiciones de Newman se aplican para cuerdas cuyos extremos estén libres de moverse en la dirección  $y$ .



### 2.3.3. El Lagrangiano de la cuerda no relativista

En el caso de una cuerda, la energía cinética es la suma de las energías de los segmentos infinitesimales que componen la cuerda

$$T = \int_0^a \frac{1}{2}(\mu_o dx) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2. \quad (2.52)$$

Complementariamente una cuerda deformada presenta energía potencial elástica. Dicho tipo de energía almacenada entre los puntos  $x$  y  $x + dx$  debe ser igual al trabajo realizado al aumentar la longitud de un trozo una distancia  $\Delta l$

$$\Delta l = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} - dx = dx \left( \sqrt{1 + \frac{\partial y^2}{\partial x^2}} - 1 \right) \simeq dx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2, \quad (2.53)$$

donde se usó la expansión  $(1 + x)^n = 1 + nx$ , solamente hasta primer orden debido a la ecuación (2.31). Con esto

$$V = \int_0^a \frac{1}{2} T_o \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (2.54)$$

De lo anterior el Lagrangiano de este sistema está dado por

$$L(t) = \int_0^a \left[ \frac{1}{2}(\mu_o dx) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_o \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] dx \equiv \int_0^a \mathcal{L} dx, \quad (2.55)$$

donde  $\mathcal{L}$  es llamada densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} \left( \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial x} \right) = \frac{1}{2}(\mu_o) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_o \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2. \quad (2.56)$$

Finalmente para completar la dinámica de nuestra cuerda, la acción se expresa de la siguiente forma

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(t) dt = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[ \frac{1}{2}(\mu_o) \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} T_o \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.57)$$

$S$  es la magnitud que expresa el producto de la energía implicada en un proceso por el tiempo que dura el mismo.

# Capítulo 3

## Cuerdas relativistas

### 3.1. Aspectos matemáticos: el funcional de área en superficies espaciales y su reparametrización

#### 3.1.1. Definición de funcional de área de una superficie espacial: parametrización

Centraremos nuestro estudio de las cuerdas relativistas como la superficie que traza la cuerda en el espacio-tiempo, usaremos el área de esta superficie como acción, esta es la *acción de Nambu - Goto*. La acción de una cuerda relativista debe ser un funcional del área[6].

Del mismo modo que una partícula traza una línea en el espacio-tiempo llamada línea de mundo, el movimiento una cuerda describe una superficie que será llamada la hoja de mundo.

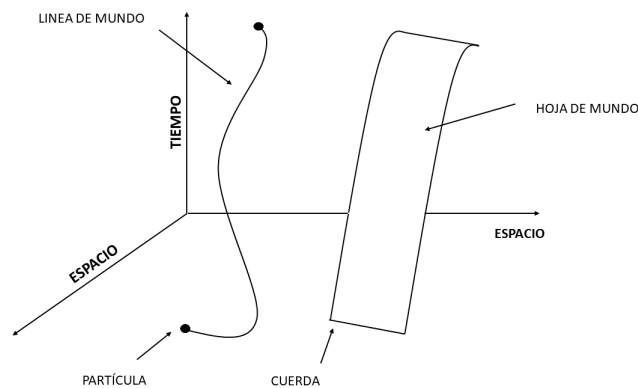
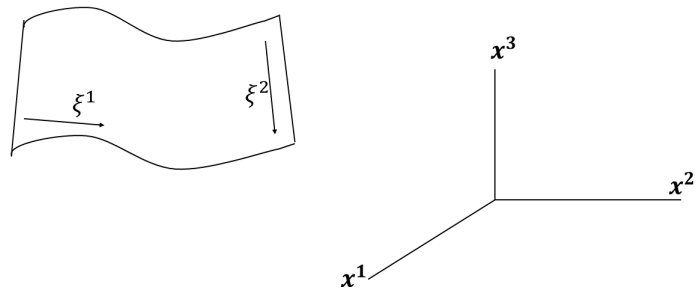


Figura 3.1: Representación del movimiento de una partícula y una cuerda espacio-tiempo.

Las hojas de mundo son superficies bidimensionales, así que hacen falta dos parámetros para especificar un punto en la misma, estos parámetros serán llamados  $\xi_1$  y  $\xi_2$ . De modo que la superficie parametrizada está descrita de la siguiente forma

$$\vec{x}(\xi_1, \xi_2) = (x^1(\xi_1, \xi_2), x^2(\xi_1, \xi_2), x^3(\xi_1, \xi_2)). \quad (3.1)$$



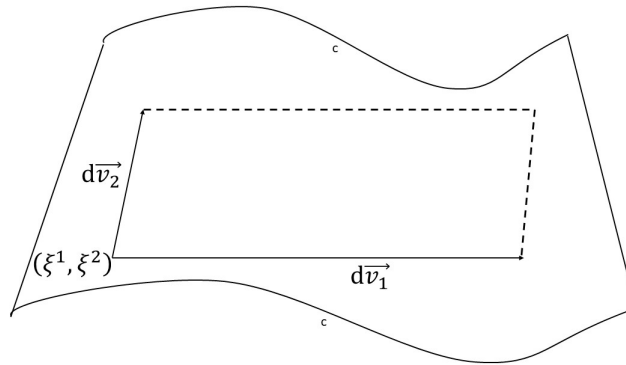
2d en espacio en 3d.png

Figura 3.2: Superficie de dos dimensiones en un espacio de 3 dimensiones.

A continuación calculemos el área de un pequeño elemento de la superficie del espacio, para ello tomemos un rectángulo infinitesimal en el espacio de los parámetros  $\xi_1$  y  $\xi_2$  que de ahora en adelante será llamado espacio de parámetros. Llamaremos a los lados del rectángulo  $d\xi^1$  y  $d\xi^2$  y  $dA$  será el área de este pequeño rectángulo en este espacio[6]. El área infinitesimal en el espacio no es necesariamente un rectángulo. En general, es un paralelogramo. Llamemos a los lados de este paralelogramo  $dv_1$  y  $dv_2$  definidos como se muestra a continuación

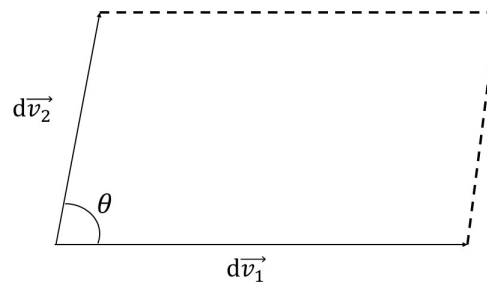
$$dv_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1, \quad dv_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 \quad (3.2)$$

los vectores  $dv_1$  y  $dv_2$  representan los lados de este paralelogramo en el espacio. Ahora vamos a calcular el área  $dA$ . Utilizando la fórmula para el área de un paralelogramo



y dv2.jpg

Figura 3.3: Definición de los lados del paralelogramo.



tetha.jpg

Figura 3.4: Definición ángulo Tetha.

$$dA = |d\vec{v}_1||d\vec{v}_2|\sin\theta = |d\vec{v}_1||d\vec{v}_2|\sqrt{1 - \cos^2\theta} \quad (3.3)$$

donde  $\theta$  es el ángulo entre los vectores  $d\vec{v}_1$  y  $d\vec{v}_2$

$$dA = \sqrt{|dv_1|^2|dv_2|^2(1 - \cos\theta)} = \sqrt{|d\vec{v}_1|^2|d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1|^2|d\vec{v}_2|^2\cos^2\theta} \quad (3.4)$$

en el segundo término dentro de la raíz tenemos un producto punto que puede ser expresado como se muestra a continuación

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2} \quad (3.5)$$

usando (3.2) la expresión anterior

$$dA = d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2} \quad (3.6)$$

Esta expresión representa un elemento infinitesimal de área. Integrando, obtenemos

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2}\right)^2} \quad (3.7)$$

Relación que determina el área total.

### 3.1.2. Reparametrización funcional de área de una superficie espacial

## 3.2. Parametrización de curvas

Una función vectorial es aquella que está definida en un intervalo de  $\mathbb{R}$  y cuyas imágenes son vectores en el plano o en el espacio. Siendo  $C$  una curva en el espacio o en el plano, una parametrización de  $C$  consiste en la función vectorial[11].

$$\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n \quad (3.8)$$

donde  $n = 2$  o  $3$  (en el plano o en el espacio), de forma que al variar el parámetro  $t$  en el intervalo  $I = [a, b]$ , le asigna un y solamente un punto del plano o del espacio.  $C(t)$  debe ser una función continua y diferenciable[11].

### 3.2.1. Reparametrización

Estudiaremos lo relacionado al parentesco existente entre los diversos caminos que describen una misma curva. Tal parentesco se llama parametrización.

Una curva parametrizada diferenciable  $\vec{\alpha}$  es una función vectorial diferenciable:

$$\vec{\alpha} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.9)$$

$$t \longrightarrow \vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (3.10)$$

donde  $I$  es un intervalo y  $t$  es el parámetro de la curva.

*Definición:* Sea

$$\vec{\alpha} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad (3.11)$$

una curva parametrizada diferenciable[11]. Una reparametrización o cambio admisible de parámetro de  $\vec{\alpha}$  es una función

$$g : J \longrightarrow I \quad (3.12)$$

tal que  $g$  es biyectiva, diferenciable (con  $g'(r) \neq 0$ ) y con inversa diferenciable.

*Propiedad:*  $\vec{\beta} = \vec{\alpha} \circ g : J \longrightarrow \mathbb{R}^3$  es una curva parametrizada diferenciable.

Es importante mencionar que la reparametrización no varía la forma geométrica de la curva.

### 3.2.2. Longitud de arco

La longitud del arco de la curva parametrizada diferenciable  $\vec{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$  desde  $\vec{\alpha}(a)$  hasta  $\vec{\alpha}(b)$  es:

$$L(\vec{\alpha}) = \int_a^b |\vec{\alpha}'(t)| dt, \quad (3.13)$$

esta longitud de arco no varía al reparametrizar la curva[11].

## 3.3. Intervalos en relatividad especial

En relatividad especial, los eventos se caracterizan por los valores de cuatro coordenadas. Utilizamos índices para etiquetar las coordenadas de tiempo y espacio de la siguiente manera

$$X^\mu = (X^0, X^1, X^2, X^3) \equiv (ct, x, y, z). \quad (3.14)$$

Considere un marco de referencia inercial  $s$  en el que dos eventos están representados por las coordenadas  $X^\mu$  y  $X^\mu + \Delta X^\mu$ . Ahora, consideremos un segundo marco de referencia inercial  $s'$ , en el que los mismos dos eventos son descritos por las coordenadas  $X'^\mu$  y  $X'^\mu + \Delta X'^\mu$ , respectivamente. El intervalo espacio-tiempo  $\Delta s^2$  entre los dos eventos se define por

$$-\Delta s^2 \equiv -(\Delta X^0)^2 + (\Delta X^1)^2 + (\Delta X^2)^2 + (\Delta X^3)^2, \quad (3.15)$$

donde el signo menos junto a la coordenada temporal codifica la diferencia fundamental entre las coordenadas de tiempo y espacio.

Utilizando las transformaciones de Lorentz ya mencionadas al inicio del texto expresemos el intervalo medido por  $s$ , en términos de las coordenadas del observador  $s'$ :

$$-(\Delta X^0)^2 + (\Delta X^1)^2 + (\Delta X^2)^2 + (\Delta X^3)^2 = -(\Delta X'^0)^2 + (\Delta X'^1)^2 + (\Delta X'^2)^2 + (\Delta X'^3)^2 \quad (3.16)$$

en ésta, reagrupando términos en base a (3.15) obtenemos

$$\Delta s^2 = \Delta s'^2. \quad (3.17)$$

Esta última expresión significa que el intervalo espacio-tiempo entre dos eventos es una cantidad independiente del observador, es decir, un invariante físico.

En el caso de eventos que están infinitesimalmente cerca el uno del otro. Las diferencias infinitesimales de coordenadas pueden escribirse como:

$$-ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 \quad (3.18)$$

y la igualdad de intervalos

$$ds^2 = ds'^2 \quad (3.19)$$

para simplificar la expresión de la invariante  $ds^2$ , introducimos los símbolos que llevan los subíndices en lugar de superíndices. Definamos la siguiente expresión

$$dX_0 \equiv -dX^0, \quad dX_1 \equiv dX^1, \quad dX_2 \equiv dX^2, \quad dX_3 \equiv dX^3. \quad (3.20)$$

El único cambio significativo es la inclusión de un signo para la componente cero esto para denotar la diferencia fundamental entre las coordenadas de espacio y tiempo. Todo junto, puede escribirse

$$dX_\mu = (dX_0, dX_1, dX_2, dX_3) \equiv (-dX^0, dX^1, dX^2, dX^3) \quad (3.21)$$

Ahora podemos reescribir el intervalo  $ds^2$  en términos de  $dX^\mu$  y  $dX_\mu$

$$-ds^2 = -(dX^0)^2 + (dX^1)^2 + (dX^2)^2 + (dX^3)^2 = dX_0 dX^0 + dX_1 dX^1 + dX_2 dX^2 + dX_3 dX^3, \quad (3.22)$$

de modo que el intervalo invariante toma la forma

$$-ds^2 = dX_\mu dX^\mu. \quad (3.23)$$

Este puede ser reescrito de la siguiente forma

$$-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (3.24)$$

en donde  $\eta_{\mu\nu}$  es la métrica de Minkowski que está definida por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{cases} -1 & \text{si } \mu = \nu = 0 \\ 1 & \text{si } \mu = \nu = 1, 2, 3 \\ 0 & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

La expresión (3.24) es el intervalo relativista invariante, el cual será usado en el tratamiento de la dinámica de una partícula libre.

### 3.3.1. Acción de una partícula relativista

En esta sección estudiaremos cómo se determina el movimiento de una partícula libre relativista.

El Principio de mínima acción enuncia que para todo sistema mecánico existe una cantidad llamada la acción  $S$  cuya variación  $\delta S$  mínima, implica el cumplimiento de la condición:

$$\delta S = 0. \quad (3.25)$$

Entonces para ser de utilidad, en nuestro caso la acción  $S$  de un sistema relativista dentro del marco de la teoría de la relatividad especial debe ser tal que ésta sea una magnitud que permanezca invariante bajo transformaciones de Lorentz[6]. La única invariante que cumple



con este requisito es el intervalo invariante relativista  $dS$  entre dos eventos. La acción  $S$  debe ser entonces proporcional a esta cantidad

$$S = -\alpha \int_{s_1}^{s_2} ds, \quad (3.26)$$

donde  $\alpha$  es una constante de proporcionalidad que se determinará posteriormente,  $s_1$  y  $s_2$  son dos eventos entre los cuales da lugar el intervalo  $ds$ . A continuación determinaremos el valor de la constante  $\alpha$ , de la ecuación (3.24)

$$ds = \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \left(\frac{d\tau}{d\tau}\right)^2 dX^\mu dX^\nu}, \quad (3.27)$$

donde  $\tau$  es un parámetro relacionado con el tiempo. Reorganizando términos

$$ds = d\tau \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau}} \quad (3.28)$$

usando (3.3) tenemos

$$ds = d\tau \sqrt{\frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\mu}{d\tau}} \quad (3.29)$$

con lo cual

$$ds = d\tau c, \quad (3.30)$$

en donde expresamos el intervalo diferencial relativista en términos de la velocidad de la luz y el tiempo propio. En esta última usando la relación para la dilatación del tiempo en relatividad especial  $d\tau = \gamma dt$  y la definición de  $\gamma$  tenemos

$$ds = c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (3.31)$$

por lo tanto, la acción se puede escribir como

$$S = -\alpha c \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt, \quad (3.32)$$

comparando con la definición de la acción  $S = \int_{t_1}^{t_2} L dt$  tenemos que el Lagrangiano es

$$L = -\alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (3.33)$$

Expandiendo el Lagrangiano hasta orden 2 tenemos:

$$L \simeq -\alpha c + \frac{1}{2} \frac{\alpha}{c} v^2. \quad (3.34)$$

Como de la mecánica clásica tenemos que el Lagrangiano de una partícula libre es

$$L = \frac{1}{2} m v^2 \quad (3.35)$$

comparando los Lagrangianos se puede observar que la constante  $-\alpha c$  no afecta las ecuaciones de movimiento, esto debido al orden de la velocidad  $v$  en estas expresiones. De lo anterior obtenemos

$$\alpha = mc \quad (3.36)$$

de lo cual, la ecuación (2.1) toma la forma

$$S = -mc \int_{s_1}^{s_2} ds, \quad (3.37)$$

que es llamada la acción relativista.

### 3.3.2. Invarianza ante reparametrización: línea de mundo

En esta sección vamos a tratar el concepto de invarianza ante reparametrización, es decir el valor de la acción es independiente de la parametrization elegida para calcularla. Las líneas de mundo son descritas por funciones parametrizadas y esta parametrización se utiliza para calcular la acción.

Supongamos que tenemos una partícula puntual que describe una línea de mundo en el espacio-tiempo entre dos puntos  $x_i^\mu$  y  $x_f^\mu$ , donde  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Podemos parametrizar esta trayectoria mediante un parámetro que llamaremos  $\tau$ . Con lo cual

$$x^\mu = x^\mu(\tau). \quad (3.38)$$

Ahora, expresando el integrando  $ds$  en la acción mediante la relación  $ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$  tenemos

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2 \quad (3.39)$$

también, se cumple que  $ds^2 = (ds)^2$  y, por lo tanto, la acción toma la forma

$$S = -mc \int_a^b ds = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau, \quad (3.40)$$

esta tiene la forma explícita de la acción cuando la trayectoria se ha parametrizado mediante el parámetro  $\tau$ . Sustituyendo el parámetro  $\tau$  por  $\tau'$ , obtenemos

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'} d\tau'} d\tau \quad (3.41)$$

con esto la ecuación (3.40), toma la forma

$$S = -mc \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau'} \frac{dx^\nu}{d\tau'}} d\tau'. \quad (3.42)$$

Esta presenta la misma forma que (3.40) con lo cual podemos concluir que el valor de la acción no depende de la elección de parámetro, es decir la acción es invariante ante reparametrización.

### 3.3.3. Invarianza ante reparametrización: área de mundo

En esta sección realicemos un procedimiento análogo al que se realizó para llegar a  $S = -mc \int ds$ , para esto se partió de un intervalo  $ds$  definido como  $ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ , aquí realizaremos una extensión de este procedimiento.

Imaginemos un espacio en el que una superficie está descrita por la función  $\vec{x}(\xi^1, \xi^2)$ , donde  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son los parámetros definidos al inicio de este capítulo, los cuales están definidos en el espacio de parámetros anteriormente definido. Sea  $d\vec{x}$  un vector tangente a la superficie, donde  $ds$  denota su longitud. De lo anterior

$$ds^2 \equiv (ds)^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x}. \quad (3.43)$$

El vector  $d\vec{x}$  en esta última expresión puede ser escrito como

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} d\xi^1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} d\xi^2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i \quad (3.44)$$

de modo que

$$ds^2 = \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} d\xi^i \right) \cdot \left( \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^j \right) = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j. \quad (3.45)$$

Esta última expresión es análoga a  $-ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ . Hecho que puede ser más notorio mediante la definición

$$g_{ij} \equiv \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^j}. \quad (3.46)$$

En donde la cantidad  $g_{ij}(\xi)$  es conocida como la métrica inducida sobre  $S$  (acción). La matriz completa  $g_{ij}$  es de la forma:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi^2} \end{pmatrix}$$

El determinante de  $g_{ij}$  es precisamente la cantidad que aparece dentro de la raíz cuadrada en (3.7)

$$A = \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g}, \quad (3.47)$$

donde  $g \equiv \det(g_{ij})$ . La última expresión representa el área en términos de la métrica inducida. La clave está en la ecuación  $ds^2 = g_{ij}(\xi)d\xi^i d\xi^j$ , que al igual que en la invarianza de reparametrización de una línea de mundo  $ds^2 = -\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ ,  $ds^2$  es una propiedad geométrica del vector  $d\vec{x}$ , que no debe depender de la parametrización utilizada para calcularla, para mostrar esto, tomemos otro conjunto de parámetros  $\tilde{\xi}$  y métricas  $\tilde{g}(\tilde{\xi})$ , de tal manera supongamos que se cumple

$$g_{ij}(\xi)d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi})d\tilde{\xi}^p d\tilde{\xi}^q, \quad (3.48)$$

usando la regla de la cadena

$$g_{ij}(\xi)d\xi^i d\xi^j = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j} d\xi^i d\xi^j, \quad (3.49)$$

introduciendo la notación  $\tilde{M}_{pi} = \frac{\partial \tilde{\xi}^p}{\partial \xi^i}$  y  $\tilde{M}_{qj} = \frac{\partial \tilde{\xi}^q}{\partial \xi^j}$  obtenemos

$$g_{ij}(\xi) = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) \tilde{M}_{pi} \tilde{M}_{qj}, \quad (3.50)$$

aplicando la definición de matriz transpuesta tenemos

$$g_{ij}(\xi) = (\tilde{M}^T)(\tilde{g}_{pq})(\tilde{M}_{qj}), \quad (3.51)$$

tomando el determinante de la anterior expresión y usando  $g = \det(g_{ij})$  obtenemos

$$g = (\det \tilde{M}^T) \tilde{g} (\det \tilde{M}) = \tilde{g} (\det \tilde{M})^2 \quad (3.52)$$

aplicando raíz tenemos

$$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} | \det(\tilde{M}) | \quad (3.53)$$

y como  $| \det(M) || \det(\tilde{M}) | = 1$  obtenemos la propiedad de transformación para la raíz cuadrada del determinante de la métrica. Reemplazando esta expresión en (3.47) tenemos que

$$\int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{g} = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 | \det(M) | \sqrt{\tilde{g}} | \det(\tilde{M}) | = \int d\tilde{\xi}^1 d\tilde{\xi}^2 \sqrt{\tilde{g}} \quad (3.54)$$

donde  $| \det M || \det \tilde{M} | = 1$ , lo que demuestra invarianza de la reparametrización del área funcional.

### 3.3.4. Funcional de área para una superficie espacio-tiempo: parametrización $\tau$ - $\sigma$

Las hojas de mundo son superficies bidimensionales, así que hacen falta dos parámetros para especificar un punto en la misma. En la sección anterior, la cual fue discutida en términos matemáticos y sin aplicación alguna, llamamos a estos parámetros como  $\xi_1$  y  $\xi_2$ . Realizando la aplicación de estos conceptos, los mencionados parámetros serán llamados  $\tau$  y  $\sigma$  y su significado será tratado posteriormente[6].

La teoría de cuerdas implica un número mayor de dimensiones que el espacio tridimensional habitual. Siendo  $d$  el número de dimensiones espaciales, podemos representar un punto mediante la siguiente relación

$$x^\mu = (x^0, x^1, \dots, x^d). \quad (3.55)$$

En teoría de cuerdas es usual utilizar letras mayúsculas para denotar las funciones. De esta manera para el caso de teoría de cuerdas obtendríamos la siguiente relación

$$X(\tau, \sigma) = (X^0(\tau, \sigma), X^1(\tau, \sigma), X^2(\tau, \sigma), \dots, X^d(\tau, \sigma)), \quad (3.56)$$

donde  $X^\mu(\tau, \sigma)$  las definiremos como las coordenadas de la cuerda. Esta relación sugiere que los parámetros  $\tau$  y  $\sigma$  están relacionados con cierto tipo de tiempo y posición, respectivamente. De hecho en teoría de cuerdas ésta es la interpretación usualmente dada. El parámetro  $\sigma$  cubre un rango finito y el parámetro  $\tau$  se extiende desde  $-\infty$  a  $\infty$ .

Para encontrar el elemento área en una superficie, procedemos como en el caso de la superficie espacial, esta vez utilizando la notación relativista. Un pequeño rectángulo de lados  $d\tau$  y  $d\sigma$

en el espacio de parámetros se convierte en un elemento área en el espacio-tiempo. Este paralelogramo es atravesado por los vectores  $dv_1^\mu$  y  $dv_2^\mu$ , donde

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau, \quad dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma \quad (3.57)$$

Ahora podemos usar la ecuación análoga (3.5) para encontrar el elemento area  $dA$ :

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2} \quad (3.58)$$

utilizando (3.57) tenemos

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \frac{\partial X_\mu}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X^\nu}{\partial \sigma} \frac{\partial X_\nu}{\partial \sigma}\right)} \quad (3.59)$$

usando la notación del producto punto relativista

$$A = \int d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)} \quad (3.60)$$

para comprender por qué el signo anterior es correcto, vamos a suponer que la expresión bajo la raíz cuadrada es mayor o igual a cero en cualquier punto de la hoja de mundo de una cuerda.

## 3.4. Dinámica relativista de una partícula libre

### 3.4.1. Descripción de la partícula puntual relativista

Estudiaremos el movimiento de una partícula puntual que se mueve a velocidades comparables a la velocidad de la luz. Para ello emplearemos las coordenadas espacio-tiempo:

$$X^\mu = (X^0, X^i), \quad (3.61)$$

donde  $X^0$  es la coordenada temporal,  $X^i$  son las coordenadas espaciales. En tres dimensiones  $i$  toma los valores 1,2,3 donde:  $X^1 = x$ ,  $X^2 = y$ ,  $X^3 = z$ .

La trayectoria de la partícula en general es una línea, de esta manera las coordenadas espacio-tiempo de cada punto de la trayectoria, serán función de un único parámetro  $\tau$ . [6]

$$X^\mu = X^\mu(\tau). \quad (3.62)$$

Este parámetro es conocido como el tiempo propio de la partícula.

### 3.4.2. La acción de Nambu Goto

A continuación vamos a construir la acción de una cuerda usando un procedimiento análogo al realizado para el caso de la acción de una partícula puntual. Es de esperarse que la acción de una cuerda sea de la forma

$$S = -T \int dA. \quad (3.63)$$

donde  $T$  es un parámetro que se denomina tensión de la cuerda y  $dA$  es un elemento diferencial de área. Sea el intervalo relativista en nuestro espacio-tiempo:

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu. \quad (3.64)$$

Dado que las coordenadas espacio-temporales son funciones de las coordenadas de la hoja de mundo  $X^\mu(\xi^\alpha)$  la expresión anterior la podemos escribir como:

$$ds^2 = -\eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (3.65)$$

En esta última definiremos la métrica como

$$\gamma_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}. \quad (3.66)$$

Esta métrica es la que determina las distancias en la hoja de mundo y es claramente inducida por la métrica del espacio-tiempo que contiene a la cuerda, la métrica de Minkowski en  $d$  dimensiones.

Ahora, en la hoja de mundo podemos calcular  $ds^2$  como:

$$ds^2 = \gamma_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (3.67)$$

Calculemos ahora las componentes de  $\gamma_{\alpha\beta}$  para ello usaremos la siguiente notación:

$$\dot{X}^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}, \quad X'^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \quad (3.68)$$

en forma matricial

$$\gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \dot{X}^2 & \dot{X} \cdot X' \\ X' \cdot \dot{X} & X'^2 \end{pmatrix} \quad (3.69)$$

y el determinante

$$\gamma = \det \gamma_{\alpha\beta} = \dot{X}^2 X'^2 - (\dot{X} \cdot X')^2 \quad (3.70)$$

Ahora, por geometría diferencial se sabe que el elemento de área de una superficie con coordenadas  $\xi$  y métrica  $G_{\alpha\beta}$  viene dada por

$$dA = \sqrt{-\det G_{\alpha\beta}} d^2\xi \quad (3.71)$$

Así que en nuestro caso tendremos:

$$dA = \sqrt{\gamma} d\tau d\sigma \quad (3.72)$$

La acción por tanto será la integral entre un instante inicial y final de tiempo y el punto final e inicial de la cuerda:

$$S = -T \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{-\gamma}, \quad (3.73)$$

donde  $T$  representa la tensión de la cuerda. En forma explícita:

$$S = -T \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^l d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2} \quad (3.74)$$

esta expresión es conocida como la acción de Nambu-Goto.

## 3.5. Parametrización de una cuerda y movimiento clásico

### 3.5.1. Ecuaciones de movimiento

Para determinar las ecuaciones de movimiento de una cuerda, partiremos de la acción  $S$  anteriormente mencionada

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} L d\tau = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \int_0^{\sigma_1} \mathcal{L}(\dot{x}^\mu, x') d\sigma \quad (3.75)$$

donde  $\mathcal{L}$  es la densidad lagrangiana dada por

$$\mathcal{L}(\dot{x}^\mu, x') = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{x} \cdot x')^2 - (\dot{x})^2 (x')^2} \quad (3.76)$$

podemos aplicar la relación  $\delta S = 0$ , donde  $S$  es la acción de Nambu - Goto y  $\mathcal{L}$  es la densidad Lagrangiana



$$\delta S = \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial(\delta \dot{X}^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu} \frac{\partial(\delta X'^\mu)}{\partial \sigma} \right] d\sigma. \quad (3.77)$$

Con el objetivo de simplificar  $\delta S = 0$ , introducimos la notación

$$\mathcal{P}_\mu^\tau \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \quad \mathcal{P}_\mu^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X'^\mu}, \quad (3.78)$$

con esta nueva notación  $\delta S$

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \mathcal{P}_\mu^\tau \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \mathcal{P}_\mu^\sigma \frac{\partial(\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right] \quad (3.79)$$

usando la derivada de un producto en ésta tenemos

$$\delta S = \int_{t_0}^{t_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) \right]. \quad (3.80)$$

Sabemos que las variaciones de las coordenadas  $\delta X^\mu$  en los puntos inicial y final se anulan.

De lo anterior

$$\delta S = T \int_{\tau_0}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \delta X^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad (3.81)$$

relación que implica

$$\left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) = 0, \quad (3.82)$$

la cual expresa las ecuaciones de movimiento.

### 3.5.2. Acción en términos de velocidad transversal

Podemos definir algún tipo de velocidad en la cuerda puesto que las componentes  $X(t, \sigma)$  son las coordenadas de cuerda, de modo que  $\frac{\partial X}{\partial \tau}$  es lo más cercano a una velocidad. Su dirección, por ejemplo, va a lo largo de las líneas de constante  $\sigma$  [6].

A fin de definir la velocidad  $v_\perp$  transversal, es conveniente disponer de un vector unitario tangente a la cuerda. Con esto, ahora podemos introducir un parámetro  $s$  que mide la longitud a lo largo de la cuerda.

Trabajemos con la cadena en un lugar fijo y definamos  $s(\sigma)$  para que sea la longitud de la cuerda en el intervalo  $[0, \sigma]$ . Así, por ejemplo, si  $s(0) = 0$ , y  $s(\sigma_1)$  es la longitud de una cuerda abierta. Dado que  $ds$  es la longitud del vector infinitesimal  $dX$  que surge de un intervalo  $d\sigma$  a lo largo de la cuerda, tenemos:

$$ds = |d\vec{X}| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| d\sigma, \quad (3.83)$$

Ahora considere la cantidad  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ , que es la tasa de cambio de  $\vec{X}$  con respecto a la longitud de la cuerda. En primer lugar tenga en cuenta que es un vector de unitario:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|^2 \left( \frac{d\sigma}{ds} \right)^2 = 1. \quad (3.84)$$

La derivada  $\partial \vec{X} / \partial \sigma$  se toma con  $\tau$  fijo, por lo que se encuentra a lo largo de una línea de  $\tau$  constante. Adicionalmente

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{ds} \quad (3.85)$$

y así,  $\partial \vec{X} / \partial \sigma$  también es tangente a la cuerda porque tiene unidades de longitud, de modo que  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ , es un vector unitario tangente a la cuerda

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}, \quad (3.86)$$

calculando  $\vec{v}_\perp^2$  tenemos

$$\vec{v}_\perp^2 = \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2. \quad (3.87)$$

Esta última expresión será usada mas adelante en un cálculo. Nuestro objetivo ahora es escribir la acción de la cuerda en términos de  $\vec{v}_\perp$  y otras cantidades, si es necesario. Encontramos

$$(\dot{X})^2 = -c^2 + \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2, \quad (X')^2 = \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2, \quad \dot{X} \cdot X' = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}. \quad (3.88)$$

Con estas relaciones simplificamos el argumento de la raíz cuadrada en la acción de la cuerda:

$$(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 = \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \left[ c^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \quad (3.89)$$

$$= \left( \frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 + c^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau} \right)^2 \right]. \quad (3.90)$$

Los términos en el lado derecho se pueden expresar claramente en términos de  $v_{\perp}^2$  el cuál ya fue calculado con anterioridad

$$(\dot{X} \cdot X') - (\dot{X})^2(X')^2 = \left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2(c^2 - v_{\perp}^2), \quad (3.91)$$

ésta también puede expresarse

$$\sqrt{(\dot{X} \cdot X') - (\dot{X})^2(X')^2} = c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}. \quad (3.92)$$

De modo que la acción de la cuerda puede expresarse como

$$S = -T_0 \int d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left(\frac{ds}{d\sigma}\right) \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}, \quad (3.93)$$

y el lagrangiano asociado estará dado por la siguiente expresión

$$L = -T_0 \int ds \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \quad (3.94)$$

Concluimos esta sección simplificando nuestras expresiones para  $\mathcal{P}_{\mu}^{\tau}$  y  $\mathcal{P}_{\mu}^{\sigma}$ , que de ahora en adelante serán llamados  $\mathcal{P}^{\tau\mu}$  y  $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$  en todo el resto del texto. Comencemos con  $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$  [6]

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau}\right) \dot{X}^{\mu} - \left(-c^2 + \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau}\right)^2\right) X^{\mu'}}{c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}. \quad (3.95)$$

Al llevar el  $ds/d\sigma$  desde el denominador hasta el numerador, podemos convertir las derivadas con respecto a  $\sigma$  en derivadas con respecto a  $s$ :

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c^2} \frac{\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau}\right) \dot{X}^{\mu} + \left(c^2 - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau}\right)^2\right) \frac{\partial X^{\mu'}}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \quad (3.96)$$

de una forma similar calculamos  $\mathcal{P}^{\tau\mu}$ , el cual está dado por

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{ds}{d\sigma} \frac{\dot{X}^{\mu} - \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \tau}\right) \frac{\partial X^{\mu}}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}. \quad (3.97)$$

Estas dos últimas expresiones nos serán de mucha utilidad en el resto del texto.

### 3.6. Elección de una parametrización $\sigma$

El movimiento de una cuerda está descrito por la función  $X^\mu(\sigma, \tau)$ , en la cual, si variamos  $\sigma$  y  $\tau$  describe la superficie de la cuerda. A continuación encontraremos una parametrización  $\sigma$  para la superficie de la cuerda y con esto una parametrización de la hoja de mundo[6].

La parametrización  $\sigma$  de una cuerda dada se puede obtener construyendo líneas de  $\sigma$  constante. En esta parametrización de la superficie de las cuerdas, la tangente  $\partial\vec{X}/\partial\sigma$  a las cuerdas y la tangente  $\partial\vec{X}/\partial\tau$  a las líneas con  $\sigma$  constante son perpendiculares en cualquier punto, por tanto se cumple que

$$\frac{\partial\vec{X}}{\partial\sigma} \cdot \frac{\partial\vec{X}}{\partial\tau} = 0, \quad (3.98)$$

lo cual puede escribirse como

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad (3.99)$$

además puesto que  $\partial\vec{X}/\partial\tau$  es perpendicular a la cuerda, usaremos la siguiente notación

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial\vec{X}}{\partial\tau}. \quad (3.100)$$

Como  $\sigma$  es el parámetro de longitud a lo largo de la cuerda, la ecuación (3.98) implica que  $\frac{\partial\vec{X}}{\partial s} \frac{\partial\vec{X}}{\partial\tau} = 0$ , lo que nos permite hacer mas sencillas las expresiones para  $\mathcal{P}^{\tau\mu}$  y  $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ , de modo que

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_o}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial X^\mu}{\partial\tau} \quad (3.101)$$

similarmemente

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -T_o \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial X^\mu}{\partial s}. \quad (3.102)$$

Lo anterior permite dar una interpretación física del movimiento de una cuerda. Inicialmente consideremos que  $t = \tau$  en la ecuación (3.82)

$$\frac{\partial\mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial t} = -\frac{\partial\mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial\sigma} \quad (3.103)$$

consideremos la primera componente  $\mu = 0$  de modo que (3.101) toma la forma

$$\mathcal{P}^{\sigma 0} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}, \quad (3.104)$$

donde en (3.101) desapareció la derivada ya que la componente 0 de  $X^\mu$  es el tiempo, esto en la ecuación (3.103) tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma 0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{T_0 \frac{ds}{d\sigma}}{c \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \right) = 0. \quad (3.105)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \right) = 0 \quad (3.106)$$

reemplazando la anterior expresión en (3.82) tenemos

$$\frac{T_0}{c} \frac{ds/d\sigma}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial}{\partial \sigma} \left( \frac{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}{ds/d\sigma} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) = 0. \quad (3.107)$$

Si el término  $\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}$  fuera omitido en la anterior, entonces se reducirá a una ecuación de onda. Fijando la magnitud de  $\sigma$

$$\frac{ds/d\sigma}{\sqrt{1 - v_{\perp}^2/c^2}} = 1 \quad (3.108)$$

con lo cual

$$d\sigma = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}. \quad (3.109)$$

La expresión anterior presenta unidades de energía y corresponde a la energía relativista asociada a la cuerda. Por otro lado la expresión (3.105) establece que la energía asociada a  $d\sigma$  se conserva.

De la relación (3.109) obtenemos

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \quad (3.110)$$

y reorganizando términos, tenemos que

$$\left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^2 = 1. \quad (3.111)$$

y junto con las relaciones

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0, \quad (3.112)$$

son llamadas condiciones de parametrización.

### 3.7. Ligaduras y ecuación de onda

Vamos a parametrizar la cuerda en forma tal que cada segmento de la misma de igual parámetro de longitud  $\sigma$  lleve la misma cantidad de energía. En otras palabras, vamos a parametrizar la cuerda utilizando la energía. Esta parametrización dará como resultado ecuaciones simples de movimiento. Con esta parametrización determinaremos las ecuaciones de movimiento, para ver esto observamos que (3.107) puede ser reescrita como

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}{ds/d\sigma} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}{ds/d\sigma} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right]. \quad (3.113)$$

Sea

$$A(\sigma) = \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}, \quad (3.114)$$

en la cual podemos elegir  $\sigma$  de manera que  $A = 1$ . Con esto la expresión (3.113) toma la siguiente forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}, \quad (3.115)$$

que puede ser identificada como una ecuación de onda. Para encontrar  $\sigma$  de manera que  $A = 1$  podemos definir  $\sigma = 0$  en uno de los extremos de la cuerda y asignamos a cada pieza  $ds$  el intervalo  $d\sigma$  dado por

$$d\sigma = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} = \frac{1}{T_0} dE, \quad (3.116)$$

donde  $E$  es la energía total de la cuerda y  $dE$  es la energía de un pequeño trozo de la misma. Aquí, tanto la densidad de energía como la tensión son constantes. La condición de parametrización (3.116) es equivalente a un diferencial de ligadura en las coordenadas  $X$ . En primer lugar debemos reescribir la primera igualdad en (3.116) como

$$\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} v_{\perp}^2 = 1 \quad (3.117)$$

recordando la definición de  $v_{\perp}$ , tenemos que

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1. \quad (3.118)$$

Con lo anterior podemos determinar el movimiento de la cuerda relativista mediante las siguientes cuatro ecuaciones

1. la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.119)$$

2. la condición de parametrización

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0 \quad (3.120)$$

3. la condición de parametrización

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1 \quad (3.121)$$

4. y la condición de frontera

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=\sigma_1} = 0 \quad (3.122)$$

con el fin de encontrar el movimiento de la cuerda relativista.

### 3.8. Movimiento general de una cuerda abierta

En primer lugar, consideremos la ecuación (3.119) que representa la ecuación de onda para  $\vec{X}$ . Esta ecuación puede ser resuelta, usando un vector que sea función de  $(ct \pm \sigma)$ , donde  $\sigma$  representa la coordenada espacial de la cuerda.

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}[\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{G}(ct - \sigma)]. \quad (3.123)$$

Como primera condición de frontera apliquemos

$$\left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = 0. \quad (3.124)$$

De las dos relaciones anteriores tenemos

$$\left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = \frac{1}{2}[\vec{F}'(ct) - \vec{G}'(ct)], \quad (3.125)$$

las primas indican las derivadas con respecto a  $\sigma$ . Ahora cuando  $\sigma = 0$  en la última expresión tenemos

$$\vec{F}'(ct) - \vec{G}'(ct) = 0 \implies \vec{F}'(u) - \vec{G}'(u) = 0 \implies \vec{F}(u) = \vec{G}(u) + \vec{a}_0 \quad (3.126)$$

donde se realizó el cambio de variable  $u = ct$  y  $\vec{a}_0$  representa un vector constante. De modo que (3.123) toma la forma

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}[\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma) + \vec{a}_0]. \quad (3.127)$$

podemos absorber el vector constante  $\vec{a}_0$  llamando a  $\vec{F}(u) + \vec{a}_0/2$  el nuevo  $\vec{F}$ , por tanto tenemos

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}[\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma)]. \quad (3.128)$$

$\vec{X}(t, 0) = \vec{F}(ct)$ , nos indica el movimiento de los extremos de la cuerda. Como segunda condición de frontera a analizar en la solución es la siguiente, pero esta vez sujeta a la condición  $\sigma = \sigma_1$ ; donde  $\sigma_1$  corresponde al otro extremo de la cuerda

$$\left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_1} = 0 \quad (3.129)$$

aplicando ésta en (3.123) obtenemos

$$\vec{F}'(ct + \sigma_1) - \vec{F}'(ct - \sigma_1) = 0. \quad (3.130)$$



Analogamente al procedimiento anterior, introduciendo el cambio de variable  $U = ct - \sigma_1$ , esta última toma la forma

$$\vec{F}'(U + 2\sigma_1) = \vec{F}'(U) \implies \vec{F}(U + 2\sigma_1) = \vec{F}(U) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c} \quad (3.131)$$

el segundo término del lado derecho en la última expresión es elegido a conveniencia, donde  $\vec{v}_0$  es un vector constante con unidades de velocidad. Ya realizamos un análisis sobre las condiciones de frontera debido a que analizamos que ocurre en los extremos de la cuerda, ahora realizaremos un estudio correspondiente a las restricciones en la parametrización que las condiciones (3.120) y (3.121) imponen a la función  $\vec{F}$ .

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \frac{c}{2} [\vec{F}'(ct + \sigma) + \vec{F}'(ct - \sigma)] \quad (3.132)$$

realizando el cambio de variable  $t \longrightarrow t + \frac{2\sigma_1}{c}$  tenemos

$$X(t + \frac{2\sigma_1}{c}, \sigma) = \frac{1}{2} [\vec{F}(ct + 2\sigma_1 + \sigma) + \vec{F}(ct + 2\sigma_1 - \sigma)] = \vec{X}(t, \sigma) + \frac{2\sigma_1}{c} \vec{v}_0 \quad (3.133)$$

Entonces,  $\vec{v}_0$  es la velocidad promedio de cualquier punto donde  $\sigma$  es fijo, en la cuerda. Ahora vamos a fijar el valor de  $F(u)$ , para ello realizemos las siguientes definiciones

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{F}'(ct + \sigma) \quad (3.134)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = -\vec{F}'(ct - \sigma) \quad (3.135)$$

juntando las dos últimas expresiones tenemos

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \pm \vec{F}'(ct \pm \sigma) \quad (3.136)$$

con esto llegamos a la conclusión de que la anterior expresión requiere que  $\vec{F}$  sea un vector unitario ya que  $\vec{F} \cdot \vec{F} = 1$ , esto ya que si tomamos las siguientes condiciones tratadas anteriormente

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0 \quad \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1 \quad (3.137)$$

y con ellas formamos un binomio, tomando la segunda expresión y en esta sumando y restando  $2 \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$  tenemos

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}\right)^2 \pm 2 \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1 \quad (3.138)$$

factorizando

$$\left(\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}\right)^2 = 1 \quad (3.139)$$

lo cual implica que  $\vec{F} \cdot \vec{F} = 1$ ; de modo que

$$\left| \frac{d\vec{F}(u)}{du} \right|^2 = 1. \quad (3.140)$$

con lo cual

$$|d\vec{F}| = du \quad (3.141)$$

en ésta última expresión  $u$  es un parámetro de longitud a lo largo de la curva  $\vec{F}(u)$ , esto se explica como se muestra a continuación. Consideremos dos puntos cercanos  $\vec{F}(u + du)$  y  $\vec{F}(u)$  de la curva, como se muestra en la figura 3.2, la separación entre ellos está dada por el vector  $d\vec{F} = \vec{F}(u + du) - \vec{F}(u)$ , el cual tiene una longitud  $|d\vec{F}|$ .

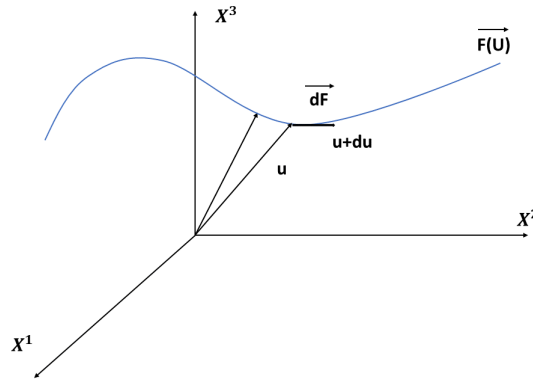


Figura 3.5: Parámetro de longitud  $u$  a lo largo de una curva.

Por lo anterior nuestro problema se reduce a encontrar un vector función  $\vec{F}$  que cumpla las ecuaciones (3.120) y (3.121). La segunda de estas ecuaciones nos dice que basta para

encontrar  $\vec{F}(u)$  para  $u \in [0, 2\sigma_1]$ . Esto determina  $\vec{F}(u)$  para todos los  $u$ , y por lo tanto determina  $\vec{X}(t, \sigma)$  completamente.

Para describir el movimiento de una cuerda abierta de energía  $E$ , consideremos el siguiente ejemplo, una cuerda que gira sobre el punto medio  $(x, y)$  en el plano, como se muestra en la figura 3.3

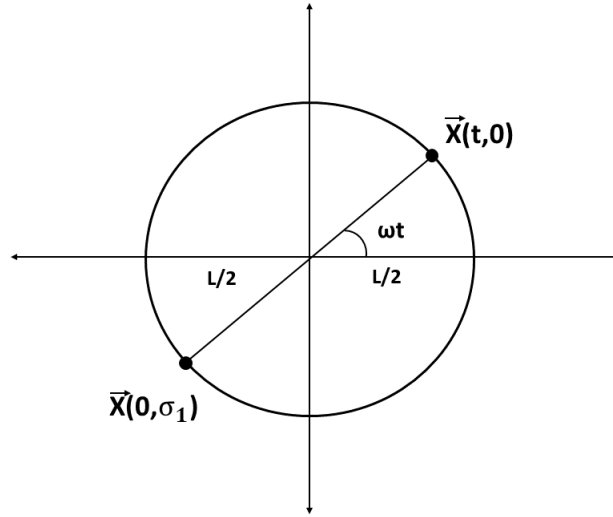


Figura 3.6: Cuerda abierta, rotando en el eje  $(x, y)$ .

Suponiendo que la cuerda es de longitud  $l$  y gira con frecuencia angular  $w$ , describimos el movimiento de uno de los extremos de la cuerda por

$$\vec{X}(t, 0) = \frac{l}{2}(\cos(\omega t), \sin(\omega t)), \quad (3.142)$$

dado que  $\vec{F}(ct) = \vec{X}(t, 0)$  tenemos

$$\vec{X}(t, 0) = \vec{F}(ct) = \vec{F}(u) = \frac{l}{2} \left( \cos\left(\frac{\omega u}{c}\right), \sin\left(\frac{\omega u}{c}\right) \right), \quad (3.143)$$

también tenemos que su derivada

$$\vec{F}'(u) = \frac{l}{2} \frac{\omega}{c} \left( -\sin\left(\frac{\omega u}{c}\right), \cos\left(\frac{\omega u}{c}\right) \right). \quad (3.144)$$

A continuación consideremos  $\vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(u) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}$ , aplicando en ésta (3.143) tenemos

$$\frac{l}{2} \left( \cos \left( \frac{w(U + 2\sigma_1)}{c} \right), \sin \left( \frac{w(U + 2\sigma_1)}{c} \right) \right) = \frac{l}{2} \left( \cos \left( \frac{wU}{c} \right), \sin \left( \frac{wU}{c} \right) \right) \quad (3.145)$$

esta última implica

$$\frac{w}{c} 2\sigma_1 = 2\pi m \implies \frac{w}{c} = \frac{\pi}{\sigma_1} m \quad (3.146)$$

donde  $m$  es un entero, que por conveniencia lo tomaremos como 1. Lo anterior nos indica que los extremos de la cuerda se mueven a la velocidad de la luz.

Ahora  $\vec{X}(0, \sigma)$  nos muestra la cuerda en un tiempo igual a cero:

$$\vec{X}(0, \sigma) = \frac{1}{2} (\vec{F}(\sigma) + \vec{F}(-\sigma)) = \frac{l}{2} \left( \cos \left( \frac{\pi \sigma}{m \sigma_1} \right), 0 \right) \quad (3.147)$$

Ahora, para un  $m$  arbitrario, la función  $\vec{X}(0, \sigma)$  describe la cuerda  $m$  veces cuando  $\sigma \in [0, \sigma_1]$ . Elijamos  $m = 1$ , y encontramos

$$\frac{w}{c} = \frac{\pi}{\sigma_1} = \frac{\pi T_0}{E} \quad (3.148)$$

da la frecuencia angular del movimiento en términos de la energía. En la condición (3.140) determina la longitud  $l$ . De hecho,

$$\frac{d\vec{F}}{du} = \frac{wl}{2c} \left( -\sin \left( \frac{wu}{c} \right), \cos \left( \frac{wu}{c} \right) \right) \quad (3.149)$$

y, como resultado,

$$\left| \frac{d\vec{F}}{du} \right|^2 = \left( \frac{wl}{2c} \right)^2 = 1, \quad l = \frac{2c}{w} = \frac{2\sigma_1}{\pi} = \frac{2E}{\pi T_0} \quad (3.150)$$

esta longitud es menor por un factor de  $2/\pi$ , que la longitud de una cuerda estática con energía  $E$ . Alternativamente,

$$E = \frac{\pi}{2} T_0 l \quad (3.151)$$

ésta última expresión nos dice que la energía de rotación de la cuerda es un factor de  $\pi/2$  mayor que la energía de una cuerda estática con la misma longitud.

### 3.9. Movimiento de una cuerda cerrada y cuspides

Estudiemos ahora el movimiento general de una cuerda libre cerrada. de la misma manera como se realizó en el estudio de cuerdas abiertas. Partamos de la ecuación de onda como en la sección anterior

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}(\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{G}(ct - \sigma)). \quad (3.152)$$

en esta última expresión realizemos el siguiente cambio de variable

$$u \equiv ct + \sigma, \quad \nu \equiv ct - \sigma \quad (3.153)$$

con ésto

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2}(\vec{F}(u) + \vec{F}(\nu)) \quad (3.154)$$

realizando las derivadas para  $\vec{X}$  tenemos

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \frac{1}{2}(\vec{F}'(u) + \vec{G}'(\nu)) \quad (3.155)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}(\vec{F}'(u) - \vec{G}'(\nu)), \quad (3.156)$$

donde, al igual que en la sección anterior las primas indican las derivadas con respecto a  $t$  y  $\sigma$  combinando estas dos últimas expresiones en forma lineal tenemos

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \vec{F}'(u) \quad y \quad \frac{\partial X}{\partial \sigma} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = -\vec{G}'(u) \quad (3.157)$$

,  
para este caso

$$|\vec{F}'(u)|^2 = |\vec{G}'(\nu)|^2 = 1. \quad (3.158)$$

Para las cuerdas cerradas no tenemos condiciones de frontera sino una condición de periodicidad. como  $d\sigma = dE/T_0$ , tenemos

$$\sigma \sim \sigma + \sigma_1 \quad \text{donde} \quad \sigma = E/T_0 \quad (3.159)$$

y  $E$  es la energía de la cuerda. Como  $\sigma$  es aumentada en  $\sigma_1$  estamos dando la vuelta al mismo punto en la cuerda cerrada, por lo que,

$$\vec{X}(t, \sigma + \sigma_1) = \vec{X}(t, \sigma), \quad (3.160)$$

esta ecuación representa la condición de periodicidad. Haciendo uso de (3.158), tenemos

$$\vec{F}(u + \sigma_1) + \vec{G}(\nu + \sigma_1) = \vec{F}(u) + \vec{G}(\nu) \quad (3.161)$$

y reorganizando términos tenemos que

$$\vec{F}(u + \sigma_1) - \vec{F}(u) = \vec{G}(\nu) - \vec{G}(\nu + \sigma_1) \quad (3.162)$$

donde las funciones  $F(u)$  y  $G(\nu)$  no necesitan ser periódicas con periodo  $\sigma_1$ , pero se debe cambiar por el mismo vector cuando sus argumentos son aumentados por  $\sigma_1$ .  $u$  y  $\nu$  son variables independientes, de modo que las derivadas parciales de esta última expresión con respecto a  $u$  y  $\nu$  son

$$\vec{F}'(u + \sigma_1) = \vec{F}'(u) \quad y \quad \vec{G}'(\nu) = \vec{G}'(\nu + \sigma_1) \quad (3.163)$$

las ecuaciones (3.158) y (3.163) implican que  $\vec{F}(u)$  y  $\vec{G}(\nu)$  son vectores unitarios periódicos; pueden ser descritos como dos parámetros independientes de curvas cerradas en la superficie de una bi-esfera. El movimiento de una cuerda cerrada está completamente especificado.

De lo anterior surge una situación interesante. Las dos curvas parametrizadas  $\vec{F}(u)$  y  $\vec{G}(\nu)$  pueden cruzarse para algunos valores que llamaremos  $u_0$  y  $\nu_0$  de los parámetros  $u$  y  $\nu$ :

$$\vec{F}'(u_0) = \vec{G}'(\nu_0). \quad (3.164)$$

Donde  $t_0$  y  $\sigma_0$  serán los valores de  $t$  y  $\sigma$  definidos por  $u_0$  y  $\nu_0$ . Con esto tenemos que (3.155) toma la forma

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}(t_0, \sigma_0) = \frac{1}{2}(\vec{F}'(u_0) + \vec{G}'(\nu_0)) = \vec{F}'(u_0). \quad (3.165)$$

Además, el movimiento del punto se encuentra en la dirección de  $\vec{F}'(u_0)$ . A continuación se incluye información adicional de (3.156)

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}(t_0, \sigma_0) = \frac{1}{2}(\vec{F}'(u_0) - \vec{G}'(\nu_0)) = \vec{0} \quad (3.166)$$

Esto significa que la parametrización de  $t = t_0$  la cuerda se convierte en singular en  $\sigma = \sigma_0$ . Para examinar la forma de la cuerda cerca de  $\sigma = \sigma_0$  con  $t = t_0$  y utilicemos una expansión de Taylor alrededor de  $\sigma = \sigma_0$ :

$$\vec{X}(t_0, \sigma) = \vec{X}(t_0, \sigma_0) + (\sigma - \sigma_0) \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}(t_0, \sigma_0) + \frac{1}{2} (\sigma - \sigma_0)^2 \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}(t_0, \sigma_0) + \frac{1}{3!} (\sigma - \sigma_0)^3 \frac{\partial^3 \vec{X}}{\partial \sigma^3}(t_0, \sigma_0) + \dots \quad (3.167)$$

Usando (3.166) y las definiciones

$$\vec{X}_0 = \vec{X}(t_0, \sigma_0), \quad \vec{T} \equiv \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2}(t_0, \sigma_0), \quad \vec{R} \equiv \frac{\partial^3 \vec{X}}{\partial \sigma^3}(t_0, \sigma_0) \quad (3.168)$$

encontramos que la expansión (3.167) pierde el término lineal en  $\sigma - \sigma_0$  y se convierte en

$$\vec{X}(t_0, \sigma) = \vec{X}_0 + \frac{1}{2} (\sigma - \sigma_0)^2 \vec{T} + \frac{1}{3!} (\sigma - \sigma_0)^3 \vec{R} + \dots \quad (3.169)$$

Ello implica que para  $\sigma = \sigma_0$  tenemos una cúspide. Una cúspide en una cuerda es un punto donde los dos salientes de la cuerda forman el ángulo cero. La ecuación (3.169) describe una cúspide en  $\vec{X}_0$  a valores justo encima de  $\sigma_0$ .

# Capítulo 4

## Cono de luz en cuerdas relativistas

En este capítulo el objetivo es encontrar la solución completa de la ecuación de onda con condiciones de frontera de Neumann. Además, calcularemos la expresión para la masa de una cuerda con movimiento arbitrario y discutiremos la condición gauge cono de luz.

El cono de luz es un modelo gráfico que generalmente se usa para explicar cómo viaja la luz a través del espacio-tiempo. Se puede ilustrar este cono a través de un gráfico en el que en los dos ejes horizontales representan dos de las dimensiones espaciales, y el eje vertical representa la dimensión temporal[7].

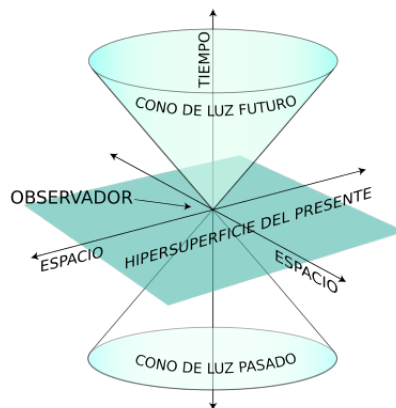


Figura 4.1: Conos de luz futuro y pasado de un evento cualquiera. Wikipedia la enciclopedia libre. (2018). Cono de luz [Figura]. Recuperado de [https://es.wikipedia.org/wiki/Cono\\_de\\_luz](https://es.wikipedia.org/wiki/Cono_de_luz)

Como se puede observar el cono de luz se divide en tres zonas. El cono de luz del pasado que está formado por todos los eventos que ya ocurrieron, el plano del vértice que es el presente y el cono de luz futuro formado por todos los eventos que podrían a ocurrir.[8].



### 4.0.1. Coordenadas cono de luz

Las coordenadas cono de luz, son una parametrización del espacio-tiempo, se las denomina  $x^+$  y  $x^-$  y se definen mediante las relaciones

$$x^+ \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 + x^1) \quad x^- \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 - x^1), \quad (4.1)$$

las coordenadas  $x^2$  y  $x^3$  no desempeñan ningun papel en ésta definición. Con ésto tenemos que el conjunto completo de coordenadas cono de luz está dado por  $(x^+, x^-, x^2, x^3)$ .

Expresemos el intervalo invariante relativista  $-ds^2 = -(dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$ , en términos de las nuevas coordenadas. Observando que

$$dx^+ dx^- = \frac{1}{2}(dx^0 + dx^1)(dx^0 - dx^1) = \frac{1}{2}[(dx^0)^2 - (dx^1)^2] \quad (4.2)$$

$$2dx^+ dx^- = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 \quad (4.3)$$

podemos escribir el intervalo invariante en términos de las coordenadas cono de luz como

$$-ds^2 = -2dx^+ dx^- + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (4.4)$$

## 4.1. Gauge estático

Como se vió anteriormente la hoja de mundo es una superficie bidimensional, por lo que son necesarias dos coordenadas para su parametrización. En el tratamiento ya presentado una de las coordenadas hace alusión al tiempo, definimos como gauge estático el hecho mismo de considerar líneas donde la coordenada mencionada es constante.

Consideremos un plano referente a  $t$  constante que intercepta a una hoja de mundo formando una curva, en ésta  $\tau = t_0$ . Generalizando lo anterior obtenemos la parametrización  $\tau(Q) = t(Q)$ , donde  $Q$  es un punto cualquiera. El realizar una parametrización a través de  $\tau$  es llamado *Gauge estático*[6].

A continuación consideremos una cuerda abierta, cuyos extremos están en  $\sigma = 0$  y  $\sigma = \sigma_1$ , denotaremos este intervalo como

$$\sigma \in [0, \sigma_1]. \quad (4.5)$$

Para las cuerdas cerradas hay que tener especial cuidado al especificar las coordenadas  $\tau$  y  $\sigma$  en el espacio de parametros. En este caso  $\sigma$  debe ser expresado sobre un círculo de tal manera que el espacio de parámetros  $(\tau, \sigma)$  está sobre un cilindro.

$$\sigma \in [0, \sigma_c], \quad (4.6)$$

donde  $\sigma_c$  representa la circunferencia que encierra un círculo  $\sigma$ . Podemos escribir  $\tau(Q) = t(Q)$  como

$$X^0(\tau, \sigma) = ct(\tau, \sigma) = c\tau \quad (4.7)$$

finalmente

$$\tau = t \quad (4.8)$$

Con lo anterior podemos describir el conjunto de coordenadas  $X^\mu$  como

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(t, \sigma) = [ct, \vec{X}(t, \sigma)]. \quad (4.9)$$

## 4.2. Una clase de opciones para $\tau$

En esta sección estamos interesados en el estudio de gauges mas generales que el gauge estático. Los gauges que vamos a considerar son de la siguiente forma

$$n_\mu x^\mu = \lambda\tau. \quad (4.10)$$

Si en la anterior  $n_\mu = (1, \vec{0})$  y  $\lambda = c$ , la misma será reducida a el gauge estático. Ahora consideremos dos puntos  $x_1^\mu$  y  $x_2^\mu$  que satisfagan la última expresión, por tanto

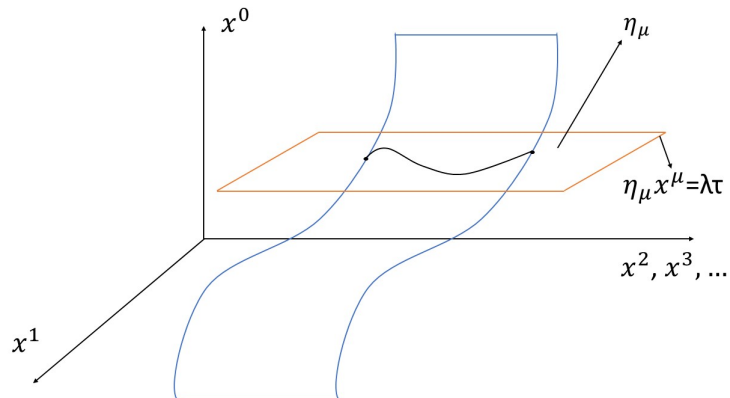
$$n_\mu x_1^\mu = \lambda\tau_0 \quad y \quad n_\mu x_2^\mu = \lambda\tau_0 \quad (4.11)$$

donde  $\tau_0$  es el parámetro  $\tau$  evaluado en un punto cualquiera. Restando las 2 últimas expresiones

$$n_\mu \cdot (x_1^\mu - x_2^\mu) = 0, \quad (4.12)$$

esta última expresión muestra que cualquier vector que una puntos del espacio es ortogonal a  $n_\mu$ . Los puntos  $x^\mu$  que satisfacen (4.2) son puntos que están tanto en la hoja de mundo como en el plano que la intersepta.

Figura 4.2: Hoja de mundo en el espacio, interceptada por un plano



hoja de mundo.jpg

Con la figura anterior se puede aclarar el significado de la ecuación  $\eta_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda\tau$ . Los puntos que satisfacen esta ecuación, son puntos que se encuentran tanto en la hoja de mundo como en el plano. Esta ecuación indica que a todos esos puntos se les debe asignar el mismo valor de  $\tau$ . A continuación realizemos un cambio de variable en  $\tau$  y obtenemos

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \lambda'(n \cdot p)\tau \quad (4.13)$$

en donde asumiremos que  $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$  en los extremos de la cuerda abierta, esta condición garantiza que  $n \cdot p$  se conserve.

### 4.3. La $\sigma$ parametrización asociada

En el gauge estático la  $\sigma$  parametrización será fijada por el estado de densidad de energía tratada en un capítulo anterior

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} \quad (4.14)$$

y como  $\mu = 0$  se tiene

$$\mathcal{P}^{\tau 0} = \frac{T_0}{c} \frac{ds/d\sigma}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \quad (4.15)$$

Primero comprobemos que  $n \cdot \mathcal{P}^\tau$  es constante a lo largo de la cuerda, ¿si se cambia el parámetro  $\sigma$  como se transforma?. Imaginemos que tenemos un parámetro  $\tilde{\sigma}$ , tal que se cumpla la siguiente regla de transformación

$$\mathcal{P}^{\tau,\sigma} = \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} \tilde{\mathcal{P}}^{\tau\mu}(\tau, \tilde{\sigma}) \quad (4.16)$$

multiplicando por  $n$

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} n \cdot \tilde{\mathcal{P}}^{\tau\mu}(\tau, \tilde{\sigma}) \quad (4.17)$$

en esta última expresión sea  $A(\tau) = \frac{d\tilde{\sigma}}{d\sigma} n \cdot \tilde{\mathcal{P}}(\tau, \tilde{\sigma})$ , de modo que

$$\int_0^{\sigma_1} A(\tau) d\sigma = d\tilde{\sigma} n \cdot \tilde{\mathcal{P}}(\tau, \tilde{\sigma}) = \sigma_1 A(\tau) \quad (4.18)$$

por tanto (4.17) se transforma

$$\int_0^{\sigma_1} n \cdot \mathcal{P}(\tau, \sigma) = \sigma_1 A(\tau), \quad (4.19)$$

de modo que  $A(\tau) = n \cdot p / \sigma$ . Con ésto

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma) = \frac{n \cdot p}{\sigma_1} \quad (4.20)$$

para cuerdas abiertas el intervalo está dado por  $\sigma \in [0, \pi]$ , por tanto

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma) = \frac{n \cdot p}{\pi}. \quad (4.21)$$

Recordemos la ecuación de movimiento para una cuerda ya tratada anteriormente

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma} = 0, \quad (4.22)$$

ésta puede expresarse como

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(n \cdot \mathcal{P}^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0 \quad (4.23)$$

usando (4.21) tenemos que  $n \cdot \mathcal{P}^\tau$  no depende de  $\tau$ , pero  $\mathcal{P}^\sigma$  si depende de  $\sigma$ , según ésto

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0 \quad (4.24)$$

de modo que para cuerdas abiertas

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0. \quad (4.25)$$

Las cuerdas cerradas son tratadas de una manera similar a como trabajamos las cuerdas abiertas. En este caso  $\sigma \in [0, 2\pi]$ , por tanto (4.20) toma la forma

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma) = \frac{n \cdot p}{2\pi}. \quad (4.26)$$

De modo que la descripción de las parametrizaciones para las cuerdas abiertas y cerradas es

$$n \cdot p = \frac{2\pi}{\beta}(n \cdot p)\tau \quad (4.27)$$

donde  $\beta = 2$  para cuerdas abiertas y  $\beta = 1$  para cuerdas cerradas.

## 4.4. Ligaduras

En ésta sección estudiaremos las limitaciones que tienen los parámetros  $\dot{X}$  y  $X'$ . En la sección anterior llegamos a que  $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ , lo cual nos conduce a

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad (4.28)$$

usaremos ésto para simplificar la siguiente expresión

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X')X'_\mu - X'^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - \dot{X}^2 X'^2}}. \quad (4.29)$$

Donde  $\mathcal{L}$  representa la densidad lagrangiana, la anterior expresión ya fue definida en el capítulo anterior. Por ende

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = -\frac{T_0}{c} \left( \frac{-X'^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \right) \quad (4.30)$$

de modo que

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left( \frac{X'^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \right), \quad (4.31)$$

donde se ha incluido la constante  $\alpha' = \frac{c}{2\pi T_0}$ , ésto en la ecuación (4.27) para cuerdas cerradas

$$n \cdot \mathcal{P}^\tau = \frac{1}{2\pi\alpha'} \left( \frac{X'^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}} \right) \beta \alpha' (n \cdot p) = \frac{(n \cdot p)\beta}{2\pi} \quad (4.32)$$

cancelando términos semejantes en la última expresión tenemos

$$1 = \frac{X'^2}{-\dot{X}^2 X'^2} \quad (4.33)$$

operando llegamos a la siguiente relación

$$\dot{X}^2 + X'^2 = 0 \quad (4.34)$$

usando  $\dot{X}X' = 0$  tenemos

$$(\dot{X}^2 \pm X'^2)^2 = 0. \quad (4.35)$$

De modo que las expresiones se simplifican de la siguiente manera

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \quad (4.36)$$

también

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}, \quad (4.37)$$

la última expresión será llamada densidad de momento, la cual nos será de mucha utilidad en la sección anterior. De modo que la ecuación de movimiento  $\partial_\tau \mathcal{P}^{\tau\mu} + \partial_\sigma \mathcal{P}^{\sigma\mu}$  toma la forma

$$\ddot{X}^\mu - X''^\mu = 0. \quad (4.38)$$

Ésta última expresión representa una ecuación de movimiento.

## 4.5. Ecuación de onda y modos de expansión

En esta sección vamos a resolver explícitamente la ecuación de movimiento que se planteó en la sección anterior, para el caso de cuerdas abiertas. Para ello, introduciremos la notación básica que se utiliza en la teoría de cuerdas. Como (4.38) es una ecuación de onda, su solución mas general estará dada por

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)), \quad (4.39)$$

donde  $f^\mu$  y  $g^\mu$  son dos funciones arbitrarias que tienen el mismo argumento. Vamos a suponer que todas las coordenadas  $X^\mu$  satisfacen las condiciones de frontera de extremos libres, dicho de otra manera se cumplen las condiciones de frontera de Neumann, donde las primas ''' significan derivadas con respecto a  $\sigma$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau + \sigma) + g^{\mu'}(\tau - \sigma)) = 0 \quad \text{si} \quad \sigma = 0, \pi, \quad (4.40)$$

Cuando  $\sigma = 0$  se obtiene

$$\frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau) - g^{\mu'}(\tau)) = 0 \quad (4.41)$$

vemos que las derivadas difieren por una constante. Ahora analicemos el caso cuando  $\sigma = \pi$

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} = \frac{1}{2}(f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi)) = 0 \quad (4.42)$$

de esta ecuación podemos concluir que  $f^{\mu'}$  es periodico, y tiene un periodo de  $2\pi$ . Escribamos en series de Fourier la función periódica  $X^\mu(\tau, \sigma)$

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau)) \cos(n\sigma) \quad (4.43)$$

A continuación se definirán constantes  $a_n^\mu$  mediante las relaciones

$$A_n^\mu \cos(n\tau) + B_n^\mu \sin(n\tau) = -\frac{i}{2} ((B_n^\mu + iA_n^\mu)e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu)e^{-in\tau}) \quad (4.44)$$

en ésta sea

$$a_n^{\mu*} = B_n^\mu + iA_n^\mu \quad y \quad a_n^\mu = B_n^\mu - iA_n^\mu \quad (4.45)$$

con lo cual

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}} \quad (4.46)$$

en ésta expresión \* denota complejo conjugado. El propósito del factor  $\sqrt{2\alpha'}$  es hacer las constantes  $a_n^\mu$  adimensionales. Estas constantes y sus complejos conjugados, se convertirán en los operadores de aniquilación y creación cuando estemos la teoría cuántica. A continuación, encontraremos las constantes  $f_0^\mu$  y  $f_1^\mu$ , para ello usemos la densidad de momento dada por

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^\mu + \dots \quad (4.47)$$

Para encontrar el momentum total de  $p^\mu$ , integramos  $\mathcal{P}^{\tau\mu}$  sobre  $\sigma \in [0, \pi]$

$$p^\mu = \int_0^\pi \mathcal{P}^{\tau\mu} d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \pi f_1^\mu \longrightarrow f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu. \quad (4.48)$$

Declarando  $f_0^\mu = x_0^\mu$  (4.46) se convierte en

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos(n\sigma)}{\sqrt{n}}. \quad (4.49)$$

Finalmente escribamos una notación que se usará en el resto del texto

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu \quad \alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n} \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad (4.50)$$

con esta nueva notación, podemos reescribir  $X^\mu$  como

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (4.51)$$

donde es conveniente expresar la suma para todos los valores excepto para 0. Ésta es la solución completa de las ecuaciones de onda con condiciones de frontera de Neumann.

## 4.6. Cono de luz en cuerdas relativistas

## 4.7. Solución de ecuaciones de movimiento, cono de luz

Partamos de la última ecuación de la sección anterior que representa la solución completa de las ecuaciones de onda

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma), \quad (4.52)$$

de ésta, calculemos  $\dot{X}^\mu$  y  $X'^\mu$  para reemplazarlos en  $(\dot{X}^\mu \pm X'^\mu) = 0$

$$\dot{X}^\mu(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} a_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (4.53)$$

incluyendo el primer término en la sumatoria

$$\dot{X}^\mu(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \cos(n\sigma) \quad (4.54)$$

por otro lado

$$X'^\mu(\tau, \sigma) = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in\tau} \sin(n\sigma) \quad (4.55)$$

juntando todo lo anterior y usando  $e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$  tenemos

$$\dot{X}^\mu \pm X'^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (4.56)$$



A continuación calculemos  $(\dot{X} \pm X')^2 = 0$ , ésto lo realizaremos con ayuda de la definición de producto punto tratada en relatividad  $a.b = -a^-b^+ - a^+b^- + a^2b^2 + a^3b^3$ , de ahora en adelante las coordenadas  $X^2, X^3, X^4, \dots, X^d$  serán denotadas como  $X^I$ , donde el índice  $I$  va desde 2 hasta  $d$ , esto con el objetivo de simplificar los calculos. Por tanto

$$(\dot{X} \pm X')^2 = (\dot{X} \pm X')(\dot{X} \pm X') = -2(\dot{X}^+ \pm X'^+)(\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0, \quad (4.57)$$

de modo que

$$-2(\dot{X}^+ \pm X'^+)(\dot{X}^- \pm X'^-) + (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 = 0 \quad (4.58)$$

resolviendo para  $(\dot{X}^- \pm X'^-)$  tenemos

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \frac{(\dot{X}^I \pm X'^I)^2}{2(\dot{X}^+ \pm X'^+)}. \quad (4.59)$$

Anteriormente se había definido que

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta\alpha'(n.p)\tau, \quad (4.60)$$

donde  $\beta = 1$  para cuerdas cerradas y  $\beta = 2$  para cuerdas abiertas. Para este caso se tiene que  $X^+(\tau, \sigma) = \beta\alpha'p^+\tau$ , de modo que

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \frac{(\dot{X}^I \pm X'^I)^2}{2\beta\alpha'p^+}. \quad (4.61)$$

Vamos a calcular por separado los términos que aparecen en la última expresión.

$$(\dot{X}^- \pm X'^-) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (4.62)$$

también

$$(\dot{X}^I \pm X'^I) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (4.63)$$

reemplazando (4.62) y (4.63) en (4.61) obtenemos

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2\beta\alpha'p^+} [\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}]^2 \quad (4.64)$$

operando en ésta última expresión y teniendo en cuenta que para cuerdas abiertas  $\beta = 2$ , tenemos

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (4.65)$$

cancelando términos

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \quad (4.66)$$

explicaremos la importancia de ésta última expresión en la siguiente sección.

### 4.7.1. Modos de vibración transversal

La combinación en el lado derecho de (4.66) es muy útil, por lo que se le ha dado un nombre. Éste es llamado *modo de vibración transversal*  $L_n^\perp$  como se muestra a continuación

$$L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \quad (4.67)$$

de modo que (4.66) toma la forma

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp. \quad (4.68)$$

A continuación vamos a calcular la masa de una cuerda que está realizando un movimiento arbitrario. La masa se puede calcular mediante la ecuación relativista ya que la masa es una constante del movimiento. Para calcular la masa usemos la siguiente ecuación relativista

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I \quad (4.69)$$

de ésta, calculemos  $2p^+ p^-$ . Sabemos que  $\sqrt{2\alpha'} p^- = \alpha_0^-$

$$2p^+ p^- = 2p^+ \frac{\alpha_0^-}{\sqrt{2\alpha'}} = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp, \quad (4.70)$$

de modo que  $M^2$  toma la forma

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - p^I p^I \quad (4.71)$$

tomando la componente cero de (4.67) tenemos

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left( \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \right) - p^I p^I \quad (4.72)$$

separando las componentes en la última expresión

$$M^2 = \frac{1}{2\alpha'}(\alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I) - p^I p^I \quad (4.73)$$

y como  $\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I$

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I \quad (4.74)$$

esta expresión nos dice que si no hay constantes de oscilación, entonces  $M = 0$ , por ende la cuerda colapsa a un punto. Preparemonos ahora para la cuantificación de las cuerdas.

## 4.8. Cono de luz, partícula puntual

En esta sección estudiaremos una partícula puntual clásica relativista utilizando el gauge cono de luz. Muchas de las ideas necesarias para cuantizar la cuerda son también necesarias para cuantificar la partícula puntual.

Partamos de la expresión dada en la ecuación (3.42), la cual fue utilizada para estudiar la acción relativista, esta expresión depende de un parámetro arbitrario  $\tau$  se utiliza para parametrizar el movimiento de la partícula:

$$S = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau \quad (4.75)$$

en ésta el parámetro  $\tau$  se utiliza para parametrizar el movimiento de la partícula. De ahora en adelante establecemos que  $c = 1$ , también que  $\hbar = 1$ . Recordemos que la acción se define como

$$S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} L d\tau, \quad (4.76)$$

comparando (4.75) con la última expresión tenemos que el Lagrangiano  $L$  está dado por

$$L = -m \sqrt{-\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}. \quad (4.77)$$

Simplifiquemos esta última expresión escribiendo las derivadas de la siguiente forma  $\eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \dot{x}^2$

$$L = -m \sqrt{-\dot{x}^2}. \quad (4.78)$$

Una vez calculado el lagrangiano, podemos calcular las ecuaciones de movimiento por medio de las ecuaciones de Euler Lagrange, dadas por la siguiente expresión

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad (4.79)$$

para nuestro caso las ecuaciones toman la forma

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^\mu} = 0, \quad (4.80)$$

el segundo término del lado izquierdo en la última expresión es nulo, debido a que en nuestro lagrangiano, no aparecen términos que contengan  $x^\mu$ , con esto

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = 0 \quad (4.81)$$

en esta expresión sea

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{-\dot{x}^2}}, \quad (4.82)$$

esta cantidad representa el momentum. De modo que las ecuaciones de Euler Lagrange, que surgen del lagrangiano son

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0 \quad (4.83)$$

ésta última expresión significa que todas las componentes del momentum son constantes del movimiento. De (4.82) podemos llegar a la siguiente ligadura

$$p^2 + m^2 = 0. \quad (4.84)$$

Para definir el gauge cono de luz para las partículas, establecemos la coordenada  $x^+$  de la partícula proporcional a  $\tau$ :

$$x^+ = \frac{1}{m^2} p^+ \tau, \quad (4.85)$$

ésta última expresión es llamada condición de gauge cono de luz. El factor de  $m^2$  en el lado derecho es necesario para obtener las unidades de trabajo. Ahora consideremos la componente + de la ecuación (4.82) y en ella introduzcamos la condición (4.85):

$$p^+ = \frac{m}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \dot{x}^+ = \frac{1}{\sqrt{-\dot{x}^2}} \frac{p^+}{m} \quad (4.86)$$

cancelando el factor común de  $p^+$ , y el cuadrado, encontramos

$$x^2 = -\frac{1}{m^2}, \quad (4.87)$$

éste resultado nos ayuda a simplificar la expresión (4.82) para el momentum:

$$p_\mu = \frac{m\dot{x}_\mu}{\sqrt{1/m^2}} = m^2\dot{x}_\mu. \quad (4.88)$$

La ecuación del movimiento (4.83), toma la forma

$$\ddot{x}_\mu = 0 \quad (4.89)$$

expandiendo la ligadura (4.84) en las componentes del cono de luz tenemos

$$-2p^+p^- + p^I p^I + m^2 = 0 \quad (4.90)$$

despejando  $p^-$  tenemos

$$p^- = \frac{1}{2p^+}(p^I p^I + m^2) \quad (4.91)$$

se concluye que el valor de  $p^-$  está determinado por las componentes  $p^+$  y  $p^I$  del momentum transversal  $\vec{p}_T$ . Habiendo resuelto para  $p^-$ , la ecuación (4.88) toma la forma

$$\frac{dx^-}{d\tau} = \frac{1}{m^2} p^- \quad (4.92)$$

integrado

$$x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau \quad (4.93)$$

donde  $x_0^-$  es una constante de integración. De la misma forma la ecuación (4.88) para la coordenada  $x^I$  toma la forma  $dx^I/d\tau = p^I/m^2$ , integrando tenemos

$$x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2} \tau \quad (4.94)$$

donde  $x_0^I$  es una constante de integración.

Con lo anterior ya está especificado el movimiento de las partículas puntuales. Las ecuaciones (4.90) y (4.91) nos dicen que el momentum está completamente determinado una vez fijamos  $p^+$  y las componentes  $p^I$  del momento transversal  $\vec{p}_T$ .

El movimiento en la dirección  $x^-$  está determinado por (4.93), una vez que se fije el valor de  $x_0^-$ . El movimiento transversal se determina por  $x^I(\tau)$ , o  $x_0^I$ , ya que suponemos que conoce

$p^I$ . Nuestras variables dinámicas independientes para las partículas puntuales son, por lo tanto,

$$(x^I, x_0^-, p^I, p^+). \quad (4.95)$$

# Capítulo 5

## Imágenes de Heisenberg y Schrödinger

Existen dos enfoques principales para entender la evolución temporal de la mecánica cuántica. En la imagen de Schrödinger la evolución temporal afecta al estado cuántico que lo representa. Por el contrario, en la imagen de Heisenberg dicha evolución afecta únicamente a los operadores que representan las cantidades observables. Mediante esta imagen se pueden analizar las similitudes entre las ecuaciones de movimiento clásicas y cuánticas[6].

Tanto la imagen de Heisenberg y Schrödinger hacen uso del mismo espacio de estado. Aunque generalmente pensamos en los operadores de la imagen de Schrödinger independientes del tiempo, existen aquellos que dependen explícitamente en el tiempo. Por ejemplo, la posición  $q$  y el momentum  $p$  son independientes del tiempo. Pero el operador  $O = q + pt$  es un operador que depende explícitamente del tiempo. Si se ha declarado la dependencia del tiempo, incluso el Hamiltoniano es dependiente del tiempo.

### 5.1. Imagen de Schrödinger

La imagen de Schrödinger es una formulación estándar de la ecuación de *Schrödinger*. Esta dice que el estado de un sistema, es representado por un ket  $|\psi\rangle$ , el cual cambia a medida que transcurre el tiempo y que su evolución está dada por la ecuación:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle, \quad (5.1)$$

donde  $H(t)$  es el operador Hamiltoniano, relacionado con la energía de dicho sistema, y cuya forma puede depender explícitamente del tiempo. La ecuación de Schrödinger es lineal, por lo que la evolución temporal se corresponde con la acción de un cierto operador de evolución temporal  $U(t, t_0)$ :

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle, \quad (5.2)$$

el cual obedece una versión de la ecuación de Schrödinger para operadores:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0) \quad (5.3)$$

## 5.2. Imagen de Heisenberg

La imagen de Heisenberg es una manera distinta de presentar la evolución de un sistema cuántico, la cual usa únicamente operadores. Una cantidad observable está representada por un operador que puede depender explícitamente del tiempo,  $O(t)$ . Su valor esperado en un cierto instante es:

$$\langle O \rangle(t) = \langle \psi^S(t) | O^S(t) | \psi^S(t) \rangle = \langle \psi(t_0) | U(t, t_0)^{-1} O^S(t) U(t, t_0) | \psi(t_0) \rangle = \langle \psi^H | O^H(t) | \psi^H \rangle \quad (5.4)$$

Los superíndices  $S$  y  $H$  indican que se trata de la imagen de Schrödinger o de Heisenberg. La última expresión muestra que el valor esperado de un observable en el instante  $t$  es idéntico al que se obtendría utilizando un estado que no cambia con el tiempo,  $|\psi^H\rangle = |\psi^S(t_0)\rangle$ ; y un operador  $O^H(t)$  que recoja la evolución del sistema:

$$O^H(t) = U(t, t_0)^{-1} \cdot O^S(t) \cdot U(t, t_0) O^H(t) = U(t, t_0)^{-1} \cdot O^S(t) \cdot U(t, t_0) \quad (5.5)$$

En la imagen de Heisenberg el estado del sistema es una condición inicial  $|\psi^H\rangle$ , que basta para analizarlo en cualquier otro instante. Cambiar de la representación de Schrödinger a la de Heisenberg requiere una elección del instante  $t_0$  en el que se especifican estas condiciones iniciales.

La imagen de Heisenberg guarda cierta similitud con la mecánica clásica. La dependencia con el tiempo de los operadores está descrita por la ecuación de Heisenberg, que es la contrapartida de la ecuación de *Schrödinger*:

$$\frac{d}{dt} O^H(t) = \frac{i}{\hbar} [H^H(t), O^H(t)] \frac{d}{dt} O^H(t) = \frac{i}{\hbar} [H^H(t), O^H(t)] \quad (5.6)$$

Esta ecuación es completamente análoga a la ecuación hamiltoniana de un observable clásico  $f$  expresada mediante corchetes de Poisson:

$$\frac{df}{dt} = \{\mathcal{H}(t), f\} + \frac{\partial f}{\partial t} = \{\mathcal{H}(t), f\} + \frac{\partial f}{\partial t} \quad (5.7)$$



### 5.3. Quantización de una partícula puntual

En esta sección desarrollaremos una teoría cuántica a partir de la teoría clásica de la partícula puntual relativista. Primero definamos una serie de operadores de Schrödinger independientes del tiempo, esto se hará con la ayuda de las variables dinámicas a las que llegamos en el capítulo anterior (4.95).

$$(x^I, x_0^-, p^I, p^+). \quad (5.8)$$

También podemos parametrizar la trayectoria de una partícula puntual utilizando  $\tau$ , que es el tiempo propio, por lo que los operadores asociados de Heisenberg son

$$(x^I(\tau), x_0^-(\tau), p^I(\tau), p^+(\tau)). \quad (5.9)$$

Hemos hablado de los operadores que corresponden a observables independientes de la teoría clásica. Pero al igual que hay observables independientes clásicas, también hay operadores cuánticos que se construyen a partir del conjunto de operadores de Schrödinger independientes, en el tiempo. Estos operadores se definen usando las ecuaciones cuánticas análogas (4.85), (4.91), (4.93):

$$x^+(\tau) \equiv \frac{p^+}{m^2} \tau \quad (5.10)$$

$$x^-(\tau) \equiv x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau \quad (5.11)$$

$$p^- \equiv \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2) \quad (5.12)$$

Note que  $p^-$  es independiente del tiempo ya que en esta expresión no aparece explícitamente. Tanto  $x^+(\tau)$  y  $x^-(\tau)$  dependen del tiempo ya que podemos notar que  $\tau$  aparece explícitamente. La decisión de escoger los operadores (5.8) como operadores independientes de nuestra teoría cuántica fue muy significativo. Por ejemplo, si hubiéramos elegido  $x^+$  y  $\mathcal{P}^-$  a los operadores independientes, que podría haber sido llevado a escribir una relación de conmutación  $[x^+, p^-] = -i$ . En nuestro marco actual, sin embargo, esta cantidad desaparece, de modo que  $[x^+, p^I] = 0$ .

Aún no se ha determinado el Hamiltoniano  $H$ . Desde  $p^-$  es el cono de luz de energía, esperamos generar evolución  $x^+$ :

$$\frac{\partial}{\partial x^+} \longleftrightarrow p^-, \quad (5.13)$$

Dado que  $x^+ = p^+\tau/m^2$ , podemos esperar que la  $\tau$  evolución será generado por

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{p^+}{m^2} \frac{\partial}{\partial x^+} \longleftrightarrow \frac{p^+}{m^2} p^- \quad (5.14)$$

por lo tanto, podemos postular que el Hamiltoniano de Heisenberg tenga la forma

$$H(\tau) = \frac{p^+(\tau)}{m^2} p^-(\tau) = \frac{1}{2m^2} (p^I(\tau)). \quad (5.15)$$

Note que  $H(\tau)$  no tiene ninguna dependencia del tiempo explícito.

# Capítulo 6

## Cuerdas cuantico - relativistas abiertas y cerradas

### 6.1. Cuerdas abiertas cuantico-relativistas

A continuación vamos a estudiar las implicaciones que tiene la teoría cuántica en las cuerdas abiertas. En esta parte nuestro objetivo será llegar a el Hamiltoniano que describa el movimiento de una cuerda abierta y definir algunas relaciones de conmutación importantes. Para empezar, recordemos los operadores de Schrödinger vistos en la sección anterior

$$(X^I(\sigma), X_0^-, \mathcal{P}, P^+), \quad (6.1)$$

y que los operadores de Heisenberg asociados están dados por

$$(X^I(\tau, \sigma), x_o^-(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), p^+(\tau)), \quad (6.2)$$

en los operadores de Heisenberg vistos en la sección anterior, una cantidad observable está representada por un operador que puede depender explícitamente del tiempo. Cualquier operador de Heisenberg  $\xi(\tau, \sigma)$  que surge de un operador de Schrödinger  $\xi(\sigma)$  cumple que

$$i\dot{\xi}(\tau, \sigma) = [\xi(\tau, \sigma), H(\tau)], \quad (6.3)$$

donde  $\tau$  es el parámetro que especifica la evolución temporal. A continuación vamos a definir las relaciones de conmutación correspondientes.  $X^I(\sigma)$  y  $\mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)$  conmutan solo si están en el mismo punto a lo largo de la cuerda, ya que ambos dependen de  $\sigma$ , por esta razón su conmutador debe llevar una delta de Dirac

$$[X^I(\sigma), \mathcal{P}^{\tau, J}(\sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad (6.4)$$

también  $x_0$  y  $p^+$  conmutan entre si de la siguiente forma

$$[x_0^-, p^+] = -i, \quad (6.5)$$

los anteriores resultados son establecidos ya que el resto de conmutaciones desaparecen. Los operadores  $x_0^-$  y  $p^+$  conmutan con todos los demás operadores de Schrödinger

$$[x_0^-, X^I(\sigma)] = [x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)] = [P^+, X^I(\sigma)] = [P^+, \mathcal{P}^{\tau I}(\sigma)] = 0 \quad (6.6)$$

y para los operadores de Heisenberg asociados, las únicas relaciones de conmutación que no desaparecen son

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\eta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma') \quad (6.7)$$

Una vez definida esta parte vamos a construir el Hamiltoniano. Para ello recordemos la ecuación de Schrödinger

$$i\frac{\partial}{\partial\tau} |\psi, \tau\rangle = H |\psi, \tau\rangle \quad (6.8)$$

en ésta

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = \frac{\partial X^+}{\partial\tau} \frac{\partial}{\partial X^+} \quad (6.9)$$

y como en el gauge cono de luz  $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$  la última expresión toma la forma

$$\frac{\partial}{\partial\tau} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+} \quad (6.10)$$

y como en el capítulo anterior llegamos a  $\frac{\partial}{\partial X^+} \longleftrightarrow p^-$  tenemos

$$H = \frac{\partial}{\partial\tau} = 2\alpha' p^+ p^- \quad (6.11)$$

con lo cual

$$H = 2\alpha' p^+ p^- = L_0^\perp, \quad (6.12)$$

ésto del análisis de una cuerda clásica. A continuación estudiemos la ecuación de movimiento de Heisenberg, lo cual dara paso a encontrar otras relaciones de conmutación importantes. Sujeto a la condición (6.3),  $\dot{X}^I(\tau, \sigma)$  está dado por

$$i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = [X^I(\tau, \sigma), H(\tau)], \quad (6.13)$$

de modo que

$$i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = [X^I(\tau, \sigma), 2\alpha' p^+ p^-], \quad (6.14)$$

en donde  $p^-$  puede calcularse a partir de la siguiente expresión

$$p^- = \int d\sigma \mathcal{P}^{-\tau}. \quad (6.15)$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{P}^{\tau-} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^- \quad (6.16)$$

y como

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2\alpha'} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'}) \quad (6.17)$$

entonces

$$\mathcal{P}^{\tau-} = \frac{\pi}{2p^+} (\mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2}). \quad (6.18)$$

Con lo anterior (6.14) toma la forma

$$i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = [X^I(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma)], \quad (6.19)$$

en la última expresión existe un conmutador, el cual ya está definido en (6.4), por ende

$$iX^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma). \quad (6.20)$$

A continuación definamos los modos de expansión en la teoría cuántica, para ello partamos de la ecuación de movimiento a la cual se llegó en el capítulo 4

$$X(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \neq 0} \frac{1}{n} \alpha_n^I \cos(n\sigma) e^{-in\tau}. \quad (6.21)$$

donde  $X$  es la solución completa de las ecuaciones de onda con condiciones de frontera de Newmann, es de importancia mencionar también la siguiente ligadura

$$(\dot{X}^I \pm X'^I)(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad \sigma \in [0, \pi]. \quad (6.22)$$

A continuación vamos a construir una función de  $\sigma$  con series de fourier, con periodo  $2\pi$ , para ello de la última expresión tomemos la segunda ecuación y en ésta evaluemos  $-\sigma$ . Más tarde, se realizará ésto también para cuerdas cerradas mediante un procedimiento muy similar (aunque no igual)

$$(\dot{X}^I - X'^I)(\tau, -\sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau + \sigma)} \quad (6.23)$$

esta ultima expresión tiene sentido cuando  $\sigma \in [-\pi, 0]$ . Segun ésto definamos el siguiente operador:

$$A^I(\tau, \sigma) = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau + \sigma)} \quad (6.24)$$

de modo que

$$A^I(\tau, \sigma + 2\pi) = A^I(\tau, \sigma) \quad (6.25)$$

siempre y cuando  $\sigma$  esté en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Por lo tanto

$$A^I(\tau, \sigma) = \begin{cases} (\dot{X}^I + X'^I)(\tau, \sigma) & \text{si } \sigma \in [0, \pi] \\ (\dot{X}^I - X'^I)(\tau, \sigma) & \text{si } \sigma \in [-\pi, 0] \end{cases} \quad (6.26)$$

este operador será util para definir las relaciones de conmutación para los modos  $\alpha_n^I$ . Para ello vamos a calcular el operador  $[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma)]$ , como la última expresión está evaluada en el intervalo  $[-\pi, \pi]$  realizaremos los siguientes cálculos

$$[(\dot{X}^I + X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J + X'^J)(\tau, \sigma')], \sigma, \sigma' \in [0, \pi], \quad (6.27)$$

$$[(\dot{X}^I + X'^I)(\tau, \sigma), (\dot{X}^J - X'^J)(\tau, -\sigma')], \sigma \in [0, \pi], \sigma' \in [-\pi, 0], \quad (6.28)$$

$$[(\dot{X}^I - X'^I)(\tau, -\sigma), (\dot{X}^J + X'^J)(\tau, \sigma')], \sigma \in [-\pi, 0], \sigma' \in [0, \pi], \quad (6.29)$$

$$[(\dot{X}^I - X'^I)(\tau, -\sigma), (\dot{X}^J - X'^J)(\tau, -\sigma')], \sigma, \sigma' \in [-\pi, 0], \quad (6.30)$$

el primer conmutador lo simplificaremos usando

$$[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \pm X^{J'}) (\tau, \sigma')] = \pm 4\pi\alpha' i\eta^{JI} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.31)$$

de modo que obtenemos

$$[(\dot{X}^I + X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J + X^{J'}) (\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i\eta^{JI} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.32)$$

para el segundo y tercer conmutador usaremos  $[(\dot{X}^I \pm X^{I'}) (\tau, \sigma), (\dot{X}^J \mp X^{J'}) (\tau, \sigma')] = 0$  para concluir que ambos desaparecen, de modo que se concluye que

$$[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')] = 4\pi\alpha' i\eta^{JI} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma'), \quad \sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi] \quad (6.33)$$

usando la definición del operador  $A$  dada en (6.24)

$$[A^I(\tau, \sigma), A^J(\tau, \sigma')] = 2\alpha' \sum_{m', n'} e^{-im'(\tau+\sigma)} e^{-in'(\tau+\sigma')} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] \quad (6.34)$$

cancelando el factor comun  $2\alpha$  tenemos

$$\sum_{m', n'} e^{-im'(\tau+\sigma)} e^{-in'(\tau+\sigma')} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] = 2\pi i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad (6.35)$$

$$\sum_{m', n'} e^{-im'(\tau+\sigma)} e^{-in'(\tau+\sigma')} [\alpha_{m'}^I, \alpha_{n'}^J] = 2\pi i\eta^{IJ} \frac{d}{d\sigma} \delta(\sigma - \sigma') \quad \sigma, \sigma' \in [-\pi, \pi] \quad (6.36)$$

Esta última expresión es el pilar fundamental de la relación de conmutación entre los modos de  $\alpha$ . Es importante tener en cuenta que  $\alpha_0^I$  es proporcional al momentum de la cuerda

$$\alpha_0^I = \sqrt{2\alpha'} p^I. \quad (6.37)$$

Como se verá a continuación, los modos  $\alpha_n^I$  son equivalentes a los operadores de creación y aniquilación. Para ver esto, recordemos las variables clásicas introducidas en el capítulo 3

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n} \quad \alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n} \quad (6.38)$$

en esta última expresión las variables son clásicas, para volver estas variables operadores usaremos la siguiente notación

$$\alpha_n^I = a_n^I \sqrt{n} \quad y \quad \alpha_{-n}^I = a_n^{I\dagger} \sqrt{n}, \quad (6.39)$$

de esta definición tenemos que

$$(\alpha_n^I)^\dagger = \alpha_{-n}^I. \quad (6.40)$$

Ahora podemos reformular la relación de conmutación para modos  $\alpha$  en términos de los osciladores

$$[\alpha_m^I, \alpha_{-n}^J] = m\delta_{m,n}\eta^{IJ} \quad (6.41)$$

si  $m$  y  $n$  son de signos opuestos

$$[\alpha_m^I, \alpha_n^J] = 0 \quad (6.42)$$

también se cumple que

$$[\alpha_m^{I\dagger}, \alpha_n^{J\dagger}] = 0 \quad (6.43)$$

y si  $m > 0$ ,  $n > 0$  tenemos

$$[\alpha_m^I\sqrt{m}, \alpha_n^J\sqrt{n}] = m\eta^{IJ}\delta_{m,n} \quad (6.44)$$

operando las raíces del lado izquierdo de la última expresión y tomando la condición de que  $m = n$  tenemos

$$[\alpha_m^{I+}, \alpha_n^{J+}] = \eta^{IJ}\delta_{m,n}. \quad (6.45)$$

A continuación estudiaremos los modos de vibración transversal, en el capítulo 3 fueron llamados  $L_n^\perp$ . Como nos encontramos en la teoría cuántica serán ahora llamados operadores de vibración transversal. Los pasos que llevaron a encontrar  $L_n^\perp$  siguen siendo válidos en la teoría cuántica, excepto por el hecho de que los modos de  $\alpha$  fueron tratados como variables clásicas.

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_n^- = \frac{1}{p^+}L_n^\perp \quad (6.46)$$

donde

$$L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (6.47)$$

Ha llegado el momento de definir el operador cuántico  $L_0^\perp$ . Por lo tanto, debemos mirar a  $L_0^\perp$  en más detalle, recordemos la siguiente relación en donde  $M$  representaba la masa



$$M^2 = -p^2 = 2p^+p^- - p^I p^I = \frac{1}{\alpha'} L_0^\perp - p^I p^I, \quad (6.48)$$

como

$$L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I \quad (6.49)$$

por ende

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{0-p}^I \alpha_p^I \quad (6.50)$$

con lo cual

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p^I \alpha_{-p}^I \quad (6.51)$$

el último término en esta última expresión puede escribirse como

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I + [\alpha_p^I, \alpha_{-p}^I]), \quad (6.52)$$

de modo que

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} (\alpha_{-p}^I \alpha_p^I) + \frac{1}{2} \sum P \eta^{IJ}, \quad (6.53)$$

por ende

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p. \quad (6.54)$$

De ahora en adelante denotaremos a  $\alpha_{-p}$  como el operador de creación. Análogamente  $\alpha_p$  será el operador de aniquilación. De modo que el operador cuántico  $L_0^\perp$  tiene la forma

$$L_0^\perp = \alpha' p^I p^I + \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I. \quad (6.55)$$

Con esta definición la masa puede expresarse como

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{p=1}^{\infty} p a_p^{I\dagger} a_p^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p \right) \quad (6.56)$$

En la teoría clásica, teníamos

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left( \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I+} a_n^I + \frac{1}{2} (D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p \right) \quad (6.57)$$

donde no se pudo obtener nada interesante sin masa. Sería interesante aquí si  $\frac{1}{2}(D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p = -1$ , entonces

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left( \sum n a_n^{I+} a_n^I - 1 \right) \quad (6.58)$$

Ahora miremos los estados de oscilación sin masa, pero antes recordemos la siguiente serie

$$\sum_{p=1}^{\infty} p = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -\frac{1}{12} \quad (6.59)$$

Como queremos:

$$\frac{1}{2}(D-2) \sum_{p=1}^{\infty} p = -1 \quad (6.60)$$

usando (6.59) en la última expresión tenemos

$$\frac{1}{2}(D-2)\left(-\frac{1}{12}\right) = -1 \implies D = 26(\text{dimensiones de cuerda}). \quad (6.61)$$

Recordemos la función Zeta de Riemann

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (6.62)$$

evaluandola para  $s = -1$  tenemos

$$\zeta(s=1) = \frac{1}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} n \quad (6.63)$$

$\zeta(s)$  está bien definida y convergente para  $s \geq 2$ . No converge para  $s = 1$  (polo).  $\zeta$  está definida en un plano complejo.

$$2p^+ p^- = \frac{1}{\alpha'} (L_0^\perp + a) \quad a = \text{constante} \quad (6.64)$$

por tanto podemos definir

$$L_0^\perp = \frac{1}{2} \alpha_0^I \alpha_0^I + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_{-p}^I \alpha_p^I \quad (6.65)$$

### 6.1.1. Construyendo el espacio de estado

Empecemos introduciendo los estados bases de la cuerda cuántica, ésta comparte con la partícula puntual cuántica el mismo conjunto de modos cero. Recordemos los siguientes operadores  $X_0^I, p^I, X_0^-, p^+, a_n^I, a_n^+$ . Con esto, introduzcamos los estados base para todos los valores del momentum, los cuales tienen la misma forma que para una partícula puntual

$$|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (6.66)$$

por definición estos estados base pueden aniquilarse de la siguiente forma

$$a_n^I |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \quad n \geq 1, \quad I = 2, \dots, 25. \quad (6.67)$$

y para crear estados  $|p^+, \vec{p}_T\rangle$ , actuamos sobre ellos con los operadores de creación  $a_n^{I\dagger}$ , hay infinitos estados, la lista la mostramos a continuación

$$\begin{pmatrix} a_1^{(2)\dagger} & a_1^{(3)\dagger} & \cdots & a_1^{(25)\dagger} \\ a_2^{(2)\dagger} & a_2^{(3)\dagger} & \cdots & a_2^{(25)\dagger} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^{(2)\dagger} & a_n^{(3)\dagger} & \cdots & a_n^{(25)\dagger} \end{pmatrix}$$

donde el índice  $I$  se encuentra entre parentesis. El estado base general  $|\lambda\rangle$  de el espacio de estado puede ser escrito como

$$|\lambda\rangle = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{I=2}^{25} (a_n^{I\dagger})^{\lambda_{n,I}} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (6.68)$$

Donde  $\lambda_{n,I}$  indica el numero de veces que aparece el operador  $a_n^{I\dagger}$  de creación. Vamos a estudiar el significado fisico de los estados mencionados, para ello estudiemos primero la masa al cuadrado, la cual en la sección anterior estaba dada por la siguiente expresión

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \left( -1 + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I \right) \quad (6.69)$$

el último término en  $M^2$  es llamado operador  $N^\perp$ ,

$$N^\perp \equiv \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I\dagger} a_n^I, \quad (6.70)$$

con ésto la masa toma la forma

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'}(-1 + N^\perp). \quad (6.71)$$

¿Cuál es la masa de esta partícula? Para averiguarlo, actuamos sobre los estados con  $M^2$

$$M^2|p^+, \vec{p}_T\rangle = \frac{1}{\alpha'}(-1 + N^\perp)|p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (6.72)$$

el operador  $N^\perp$  aniquila a los estados base  $N^\perp |p^+, \vec{p}_T\rangle = 0$ , por ende

$$M^2|p^+, \vec{p}_T\rangle = -\frac{1}{\alpha'}|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad (6.73)$$

si la constante  $\frac{-1}{\alpha'}$  hubiese desaparecido, la masa hubiese sido cero. Consideremos ahora los estados excitados con  $M^2$  más bajo. Aquellos que surgen cuando  $N^\perp$  toma el menor valor de cero posible,  $N^\perp = 1$ . Ya que si  $N^\perp = 1$ ,  $M^2 = 0$ . Cuando actuamos con cualquiera de los  $a_1^{I\dagger}$  en los estados base  $|p^+, \vec{p}_T\rangle$

$$a_1^{I\dagger}|p^+, \vec{p}_T\rangle, \quad M^2 a_1^{I\dagger}|p^+, \vec{p}_T\rangle = 0, \quad (6.74)$$

esto significa que tenemos  $D - 2 = 24$  estados sin masa. El estado general sin masa es una combinación lineal de los estados de base anteriores

$$\sum_{I=2}^{25} \xi_I a_1^{I\dagger}|p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (6.75)$$

### 6.1.2. Ecuaciones de movimiento

Para elaborar una correspondencia entre los estados de la cuerda y los campos cuánticos, consideremos las ecuaciones de Schrodinger y que satisfagan las funciones de onda. Para construir los estados dependientes del tiempo de la cuerda, los estados base necesitan funciones de onda. Consideremos por ejemplo el siguiente estado

$$a_{n_1}^{I_1\dagger} \dots a_{n_k}^{I_k\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle \quad (6.76)$$

el estado general dependiente del tiempo que está construido por una superposición es

$$|\Psi, \tau\rangle = \int dp^+ d\vec{p}_T \Psi_{I_1 \dots I_k}(\tau, p^+, \vec{p}_T) a_{n_1}^{I_1\dagger} \dots a_{n_k}^{I_k\dagger} |p^+, \vec{p}_T\rangle. \quad (6.77)$$

los índices  $I$  coinciden con los índices de la función de onda. Esta ecuación es análoga, a la que da el estado general dependiente del tiempo de una partícula puntual.

La ecuación de schrödinger que satisface la última expresión debe ser

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} | \Psi, \tau \rangle = H | \Psi, \tau \rangle \quad (6.78)$$

Donde el Hamiltoniano está dado por

$$H = (L_0^\perp - 1) = \alpha' p^I p^I + N^\perp - 1 = \alpha' (p^I p^I + M^2) \quad (6.79)$$

usando (6.78) tenemos

$$i \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi_{I_1 \dots I_k} = (\alpha' p^I p^I + N^\perp - 1) \Psi_{I_1 \dots I_k}, \quad (6.80)$$

Donde  $N^\perp$  denota el autovalor para el operador  $N^\perp$  para el estado (6.77).

## 6.2. Cuerdas cerradas cuantico-relativistas

En ésta última sección realizaremos un tratamiento para cuerdas cerradas, partiendo de los principios abordados en cuerdas abiertas.

### Modos de expansiones y relaciones de conmutación

Partamos de la solución general de la ecuación de onda

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X_L^\mu(\tau + \sigma) + X_R^\mu(\tau - \sigma), \quad (6.81)$$

donde  $X_L^\mu$  representa una onda moviéndose en la dirección  $\sigma$  negativa y  $X_R^\mu$  una onda moviéndose en la dirección  $\sigma$  positiva. Con cuerdas cerradas trabajaremos con la siguiente condición

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(\tau, \sigma + 2\pi), \quad (6.82)$$

donde  $\sigma = 0$  y  $\sigma = 2\pi$  representan el mismo punto en una cuerda cerrada. Esta última expresión es llamada condición de periodicidad y nos llevará a una restricción que relaciona el movimiento hacia la izquierda y la derecha de una cuerda. Para relizar ésto, definamos las siguientes dos variables

$$u = \tau + \sigma, \quad v = \tau - \sigma \quad (6.83)$$

reemplazando en (6.81) tenemos

$$X^\mu = X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) \quad (6.84)$$

cuando  $\sigma \rightarrow \sigma + 2\pi$

$$X_L^\mu(u) + X_R^\mu(v) = X_L^\mu(u + 2\pi) + X_R^\mu(v - 2\pi), \quad (6.85)$$

la última expresión se presenta ya que estamos trabajando con una cuerda cerrada, reorganizando términos tenemos

$$X_L^\mu(u + 2\pi) - X_L^\mu(u) = X_R^\mu(v) - X_R^\mu(v - 2\pi) \quad (6.86)$$

esta última expresión establece que el movimiento a la derecha y el movimiento a la izquierda dependen uno del otro. Establecemos que  $X_L^{\mu'}$  y  $X_R^{\mu'}$  son funciones periódicas, de modo que las podemos expresar de la siguiente forma

$$X_L^{\mu'}(u) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^\mu e^{-inu}, \quad X_L^{\mu'}(v) = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-inv}, \quad (6.87)$$

donde  $\alpha$  representa los modos usados en la expansión, integrando las últimas ecuaciones tenemos

$$X_L^\mu(u) = \frac{1}{2}x_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_0^{-\mu}u + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n^{-\mu}}{n} e^{-inu} \quad (6.88)$$

$$X_R^\mu(v) = \frac{1}{2}x_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0^\mu v + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-inv} \quad (6.89)$$

donde las coordenadas de los modos cero  $x_0^{L\mu}$  y  $x_0^{R\mu}$  aparecen como constantes de integración. Esto nos lleva

$$2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_0^{-\mu} = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0^\mu \quad (6.90)$$

y por ende

$$\bar{\alpha}_0^{-\mu} = \alpha_0^\mu. \quad (6.91)$$

Debido a ésta igualdad, la teoría de cuerdas solo tiene un operador momento. Ahora podemos construir el modo expansión para  $X^\mu(\tau, \sigma)$  sustituyendo (6.88) y (6.89) en (6.81)

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}x_0^{L\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\bar{\alpha}_0^{-\mu}(\tau + \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\bar{\alpha}_n^{-\mu}}{n} e^{-in(\tau + \sigma)} + \frac{1}{2}x_0^{R\mu} + \sqrt{\frac{\alpha'}{2}}\alpha_0^\mu(\tau - \sigma) + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{\alpha_n^\mu}{n} e^{-in(\tau - \sigma)} \quad (6.92)$$

con  $\bar{\alpha}_0^{-\mu} = \alpha_0^\mu$  tenemos

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2}(x_0^{L\mu} + x_0^{R\mu}) + \sqrt{2\alpha'}\alpha_0^\mu\tau + i\sqrt{\frac{\alpha'}{2}} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{-in\tau}}{n} (\alpha_n^\mu e^{in\sigma} + \bar{\alpha}_n^{-\mu} e^{-in\sigma}) \quad (6.93)$$

de modo que  $X^\mu$  es una función de  $\sigma$  con periodo  $2\pi$ . Por ende el momentum total

$$p^\mu = \int_0^{2\pi} \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \sigma) d\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int_0^{2\pi} d\sigma \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{2}{\alpha'}} \alpha_0^\mu \quad (6.94)$$

de donde se deduce la siguiente relación

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{\frac{\alpha'}{2}} p^\mu \quad (6.95)$$

la última expresión difiere en el resultado de cuerdas abiertas en un factor de 2, pero la idea es la misma. A continuación pasemos a la cuantificación de cuerdas cerradas. Calculemos  $\dot{X}^\mu$  y  $X'^\mu$  de (6.81) para reemplazarlo en  $\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2$ , donde se ha tomado que  $\beta = 1$  para cuerdas cerradas:

$$\dot{X}^\mu = X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) + X_R^{\mu'}(\tau - \sigma) \quad (6.96)$$

$$X'^\mu = X_L^{\mu'}(\tau + \sigma) - X_R^{\mu'}(\tau - \sigma) \quad (6.97)$$

de modo que

$$\dot{X}^\mu + X'^\mu = 2X_L^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^{-\mu} e^{-in(\tau+\sigma)} \quad (6.98)$$

también

$$\dot{X}^\mu - X'^\mu = 2X_R^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau-\sigma)}. \quad (6.99)$$

Las últimas expresiones son análogas a las expansiones de una cuerda abierta, esto nos permitirá usar algunos conmutadores para la cuerda cerrada sin necesidad de realizar nuevos cálculos. en el capítulo 4 se llegó a que las coordenadas  $-$  y las coordenadas  $I$  se relacionan por medio de la expresión

$$\dot{X}^- \pm X'^- = \frac{1}{4\alpha' p^+} (\dot{X}^I \pm X'^I)^2 \quad (6.100)$$

con esto

$$(\dot{X}^I + X^{I'})^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^+ e^{-in(\tau+\sigma)} \Rightarrow L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p \alpha_p^{-I} \alpha_{n-p}^I \quad (6.101)$$

$$(\dot{X}^I - X^{I'})^2 = 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^+ e^{-in(\tau-\sigma)} \Rightarrow L_n^\perp = \frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} p \alpha_p^{-I} \alpha_{n-p}^I \quad (6.102)$$

de modo que

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{\alpha'} \frac{1}{2p^+} 4\alpha' \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^+ e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (6.103)$$

operando

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{2}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^+ e^{-in(\tau \pm \sigma)} \quad (6.104)$$

por otro lado teniamos que

$$\dot{X}^- + X^{-'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \bar{\alpha}_n^- e^{-in(\tau+\sigma)}, \quad \dot{X}^- - X^{-'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau-\sigma)} \quad (6.105)$$

comparando estas últimas expresiones podemos obtener

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_n^- = \frac{2}{p^+} \bar{L}_n^\perp \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{2}{p^+} L_n^\perp \quad (6.106)$$

si  $n = 0$ , se tiene  $L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp$ , ésta es una restricción en la teoría del espacio de estado. el significado de esta igualdad es que cualquier estado  $|\lambda, \bar{\lambda}\rangle$  de la cuerda cerrada debe satisfacer  $L_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle = \bar{L}_0^\perp |\lambda, \bar{\lambda}\rangle$ . A continuación calculemos la masa al cuadrado, para ello usemos la siguiente expresión

$$M^2 = -p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I \quad (6.107)$$

donde el producto  $p^- p^+$  puede obtenerse partiendo de el hecho de que la expresión  $L_0^\perp = \bar{L}_0^\perp$  nos lleva a las siguientes constantes

$$L_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + N^\perp \quad \bar{L}_0^\perp = \frac{\alpha'}{4} p^I p^I + \bar{N}^\perp \quad (6.108)$$

donde  $\bar{N}^\perp$  y  $N^\perp$  están relacionados con los operadores de creación y aniquilación. De modo que

$$\sqrt{2\alpha'} \bar{\alpha}_0^- = \frac{2}{p^+} (\bar{L}_0^\perp), \quad \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- = \frac{2}{p^+} (L_0^\perp) \quad (6.109)$$



de estas expresiones podemos obtener

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- \equiv \frac{1}{p^+}(L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2) = \alpha'p^- \quad (6.110)$$

con lo anterior (6.107) que representa la expresión para la masa en cuerdas cerradas toma la forma

$$M^2 = \frac{2}{\alpha'}(N^\perp + \bar{N}^\perp - 2). \quad (6.111)$$

Y el Hamiltoniano para las cuerdas cerradas

$$H = \alpha'p^+p^- = L_0^\perp + \bar{L}_0^\perp - 2. \quad (6.112)$$

Donde en esta expresión se encuentra incluido el Hamiltoniano para cuerdas abiertas.

# Capítulo 7

## Conclusiones

- La teoría de cuerdas nace no solo de la necesidad de relacionar las cuatro interacciones fundamentales de nuestro universo, también surge de cambiar el concepto que se tiene de una partícula fundamental, no viéndola como un punto simple sin movimiento, sino como una cuerda vibratoria.
- El análisis que se realizó en este trabajo de grado es bastante limitado, ya que el estudio de la teoría de cuerdas es bastante extenso y cada día avanza más gracias al desarrollo de nuevas tecnologías. Como es una teoría que cada día avanza no podemos afianzarnos a resultados que aun están planteados como hipótesis como es el caso de las muchas mas dimensiones que podrían existir.
- Al analizar la dinámica de una cuerda en mecánica clásica, llegamos a la solución explícita del movimiento de una cuerda, la cual contiene los modos de oscilación transversal de la cuerda, los cuales fueron de vital importancia al momento de realizar la cuantificación de las mismas.
- Dentro de la formulación de la teoría de cuerdas, se evidenció la relación que existe entre la dinámica de una cuerda clásica en relatividad especial y la manera de llegar a la cuantificación de la misma.
- Sin importar el resultado que nos depara la Teoría de Cuerdas, los científicos seguirán adelante. La humanidad siempre se ha guiado por la curiosidad, y explorando lo desconocido, y dentro de cien o mil años el concepto actual del cosmos parecerá absolutamente incompleto. Pero sin duda, lo que llamamos Teoría de Cuerdas es un legado del poder de la creatividad humana. Ha abierto un nuevo espectro de posibles respuestas a

unas preguntas históricas y con ello se ha realizado un intento de llegar a comprender este universo.

# Bibliografía

- [1] Disponible en: <https://es.wikipedia.org/wiki/Teor>
- [2] Neo Fronteras, noticias sobre ciencia y tecnología. Disponible en: <https://neofronteras.com/?p=2614>
- [3] Disponible en <https://es.wikipedia.org/wiki/Teor>
- [4] B. Greene. *El universo elegante*. disponible en: <http://www.librosmaravillosos.com/eluniversoelegante>
- [5] ALONSO M. Y FINN E. 1970. *FÍSICA volumen 1 mecánica*, Departamento de física Georgetown Washington.
- [6] B. Zwiebach. *A First Course in String Theory*, 2<sup>a</sup> Ed.(Cambridge University Press, Cambridge, 2009) Disponible en: [https://cdn.preterhuman.net/texts/science\\_and\\_technology/physics/StringTheory/A](https://cdn.preterhuman.net/texts/science_and_technology/physics/StringTheory/A)
- [7] Disponible en: [https://es.wikipedia.org/wiki/Cono\\_de\\_luz](https://es.wikipedia.org/wiki/Cono_de_luz)
- [8] Disponible en: <https://www.vix.com/es/btg/curiosidades/4985/que-es-un-cono-de-luz>
- [9] TEJEIRO J. 2004. *Sobre la teoría especial de la relatividad*, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia.
- [10] HERNÁNDEZ N. *INTRODUCCION A LA TEORÍA DE CUERDAS BOSONICAS*, Universidad de la Laguna, Departamento de Física.
- [11] PITA C. 1995 *CALCULO VECTORIAL*, Universidad Panamericana, Escuela de Ingeniería.
- [12] N. Hernandez. *Introducción a la teoría de cuerdas bosonicas*.
- [13] Disponible en: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Relativ/tdil.html>

- [14] E. Córdoba Universidad Politécnica Salesiana. Disponible en: <https://es.scribd.com/doc/270646988/Teoria-de-Cuerdas>
- [15] Disponible en: <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/d/d4/Calabi-Yau.png/250px-Calabi-Yau.png>
- [16] Tellez A. La Teoría De La Relatividad. [Blog]. Disponible en: <http://teoria-de-la-relatividad.blogspot.com/2009/03/axiomatizacion-de-la-teoria-de-la.html>
- [17] Departamento de física aplicada 3, Universidad de Sevilla. Ecuación para las ondas en una cuerda tensa. [Blog]. Disponible en: <http://laplace.us.es/wiki/index.php/Ecuac>
- [18] Cuentos cuánticos. Cuerdas Clásicas: Acción de Nambu-Goto. [Blog] Cuentos Cuánticos. Disponible en: <https://cuentos-cuanticos.com/2011/10/11/cuerdas-clasicas-accion-de-nambu-goto/>
- [19] Adrian. Vibraciones en cuerdas relativistas abiertas y cerradas y los operadores transversales de Virasoro. [Blog] Estudiar física. Disponible en: <https://estudiarfisica.com/2015/07/10/vibraciones-en-cuerdas-relativistas-abiertas-y-cerradas-y-los-operadores-trasversales-de-virasoro/>
- [20] Adrian. Fotones y gravitones: coordenadas como luz, transformaciones gauge y grados de libertad de los campos eléctrico y gravitatorio. [Blog] Estudiar física. Disponible en: <https://estudiarfisica.com/2015/07/07/fotones-y-gravitones-coordenadas-cono-luz-transformaciones-gauge-y-grad-de-libertad-de-los-campos-electrico-y-gravitatorio/>
- [21] Teoría de cuerdas. Disponible en: <https://html.rincondelvago.com/teoria-de-las-cuerdas.html>