El proceso de Formación del concepto de Estructura de Grupo

Un enfoque histórico epistemológico

Vicente Erdulfo Ortega Patiño
Segundo Javier Caicedo Zambrano

Editorial
Universidad de **Nariño**

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Editorial
Universidad de **Nariño**

EL PROCESO DE FORMACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE GRUPO

Una Perspectiva Histórico Epistemológica

EL PROCESO DE FORMACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE GRUPO

Una Perspectiva Histórico Epistemológica

Vicente Erdulfo Ortega Patiño

Segundo Javier Caicedo Zambrano

Editorial
Universidad de Nariño

Ortega Patiño, Vicente Erdulfo

El proceso de formación de la estructura de grupo: una perspectiva histórico epistemológica / Vicente Erdulfo Ortega Patiño, Segundo Javier Caicedo Zambrano. -- San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2020

79 p.

Incluye bibliografía

ISBN: 978-9585123-20-5 Digital

1. Teoría de grupos 2. Historia del algebra 3. Teoría de grupos (matemáticas)--Investigaciones 4. Estructuras algebraicas I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier

512.2 O771 – SCDD-Ed. 22 Biblioteca Alberto Quijano Guerrero

EL PROCESO DE FORMACIÓN DE LA ESTRUCTURA DE GRUPO
Una Perspectiva Histórico Epistemológica

ISBN: 978-9585123-20-5 Digital
Diseño y diagramación: Diana Sofía Salas Chalapud

Tabla de contenido

INTRODUCCIÓN

Este libro tiene como base el trabajo de investigación presentado por los autores como requisito parcial para el ascenso a la categoría de asociados en el escalafón de docentes universitarios, según el Decreto 1279 de 2002; trabajo que, por su naturaleza, tocó temas y elementos de la tesis de maestría no publicada de uno de los autores, titulada "Formación de la Noción Abstracta de Estructura Algebraica, a partir del estudio histórico–epistemológico de los aportes de Cantor y Dedekind"[1]. En el Libro se estudia el caso específico de la estructura de grupo, que constituye la primera y emblemática de las estructuras algebraicas; por lo cual, la relación con la mencionada tesis, que aborda un enfoque más amplio del surgimiento del concepto de estructura algebraica y la temática del libro, es indiscutible. Se reestructuró y amplió el trabajo inicial, eso sí, conservando la idea central en el sentido de que, fueron tres los canales tributarios que desembocaron en la estructura de grupo: aritmético, algebraico y geométrico. Se destaca que, con la unificación de la matemática basada en el concepto de estructura, se realiza una significativa economía de pensamiento, al evitar la repetición innecesaria de razonamientos en contextos particulares, lo cual, en correspondencia con el fin esencial de la axiomática, contribuye a suministrar inteligibilidad a las matemáticas mediante el discernimiento y la puesta en escena de ideas comunes, las cuales, en muchos casos, pueden estar refundidas y camufladas. Este hecho es frecuente en teorías que aparentan ser distintas, sin serlo en realidad.

La unidad de la matemática como una característica de la matemática moderna, alcanzó tanta importancia que se constituyó en insignia de la corriente del pensamiento

[1] Ortega, V.E. (2011). Formación de la Noción Abstracta de Estructura Algebraica, a partir del estudio histórico–epistemológico de los aportes de Cantor y Dedekind. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática, Santiago de Cali, Colombia de 2011. Tesis no publicada.

matemático estructuralista, la cual, se desarrolló a partir de la metodología de la generalización y de la abstracción; proceso que llegó a su punto culminante con la consolidación de la noción de estructura de grupo, a finales del siglo XIX.

Es así como el Grupo Bourbaki abordó el estudio de las matemáticas como una jerarquía de estructuras, utilizando esta noción de manera sistemática, con el fin de realizar una exposición unificada de todas las ramas básicas de la misma. Dicho grupo construye la matemática moderna sobre bases axiomáticas rigurosas; codifica y clarifica el lenguaje matemático, en virtud de la lógica formal y a la teoría de conjuntos, y unifica la matemática mediante el establecimiento de estructuras comunes a sus diversas ramas.

Los conceptos de generalización, abstracción deliberada, ampliaciones y extensiones en el campo de los números y, otros conceptos, como libertad de creación en matemáticas, que culminaron en la noción de estructura, ponen en evidencia la pertinencia e importancia de la revisión histórico epistemológica del proceso de formación de la noción abstracta de estructura algebraica, y en particular, de la estructura de grupo, objeto de esta investigación.

En este texto se presentan argumentos, en una perspectiva histórico epistemológica, orientados a esclarecer que el proceso para la formación de la noción abstracta de estructura de grupo, tuvo tres raíces, a saber: la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números, y la geometría; y que, a partir de ellos, surgió la noción de estructura de grupo y de estructura matemática, como resultado de la toma de conciencia de profundos fenómenos de isomorfismos.

El libro se organiza en tres capítulos, donde se muestra evidencia que, antes de llegar al punto de consolidación del concepto de estructura de grupo basado en la axiomática, los matemáticos, sin saberlo, utilizaron el concepto de ley de composición interna, que fue teorizado a través de la metodología de la axiomatización.

En el capítulo 1, *Raíces de la Estructura de Grupo desde una Perspectiva Aritmética*, se refiere el proceso de ampliación y generalización del concepto de número. Se indica que, debido al carácter marcadamente abstracto de este concepto, a pesar de que la aritmética antecedió en el orden histórico a las demás ramas de las matemáticas, desde la época de la civilización babilónica y aún, mucho antes, su desarrollo fue muy intrincado, y se tuvo que esperar hasta el siglo XIX, en la época de Dedekind y Peano, para que llegue a constituirse en un sistema deductivo, tal como lo había logrado la geometría, en los Elementos de Euclides, en el siglo III antes de nuestra era.

En el capítulo 2, *Raíces de la Estructura de Grupo desde una Perspectiva Algebraica*, se evidencia cómo en el siglo XVIII, los problemas que impulsaron el desarrollo del álgebra tenían que ver con el tema de la teoría de ecuaciones algebraicas, la cual, incluía no sólo la formación de la teoría general de las ecuaciones, sino también, la acumulación de procedimientos para su resolución.

El trabajo científico alrededor de la teoría general de las ecuaciones y la acumulación de procedimientos para su resolución, condujo a la reestructuración de los fundamentos del álgebra ligada con la ampliación del concepto de número, con los procedimientos del cálculo aritmético, con la teoría de números y con el perfeccionamiento del aparato algebraico simbólico-literal. El desarrollo de estos aspectos, que en esencia determinaban el contenido y el objeto del álgebra de finales del siglo XVIII, posibilitó avanzar al tratamiento de problemas cualitativamente nuevos, los cuales estarían relacionados con el surgimiento de la teoría de Galois y de la Teoría de Grupos.

En el capítulo 3, *Raíces de la Estructura de Grupo desde una Perspectiva Geométrica*, se muestra que el surgimiento de la Geometría Analítica Cartesiana en el siglo XVII, constituyó una ruptura metodológica con la geometría clásica griega; sin embargo, las primeras etapas fundamentales que se orientaron a abandonar el clásico punto de vista acerca de la naturaleza de la geometría, solamente tuvieron lugar hacia finales del siglo XVIII. Es claro que, el álgebra y el análisis, antes que la geometría, fueron las disciplinas que asumieron el liderazgo en la superación de las visiones clásicas.

Al construir la geometría sobre el álgebra, se contribuyó de manera explícita, a la unificación de la misma, mediante estructuras. Es así como en los años 60 del siglo XX, Desdoné expuso, de manera sistemática, la Geometría Elemental partiendo del Álgebra Lineal. Cabe destacar que, tanto en la geometría elemental como en la geometría proyectiva, se encuentran manifestaciones de los principios de la teoría de grupos.

Finalmente, se puede afirmar que, el surgimiento de la geometría analítica cartesiana en el siglo XVII, constituyó una ruptura metodológica con la geometría clásica griega, por cuanto, el ingenioso ingreso del segmento unidad, que hizo posible la redefinición del producto de segmentos, con la propiedad de cerradura o clausura, dio paso a la estructura algebraica para las operaciones entre magnitudes geométricas. Sin embargo, las primeras etapas, que se orientaron a dejar al margen el antiguo punto de vista sobre la naturaleza de la geometría, tuvieron lugar, apenas, hacia finales del siglo XVIII, con lo cual, se cambió la tradición euclidiana, tanto en contenido como en método. Una vez superada la idea de una única geometría, la investigación se orientó, tanto hacia la posibilidad de generalización como hacia la necesidad de una revisión crítica; opciones que marcaron el inicio de un modo de pensamiento que conduciría al concepto de estructura de grupo.

CAPÍTULO 1.

Raíces de la estructura de grupo desde una perspectiva aritmética

CAPÍTULO I.

RAÍCES DE LA ESTRUCTURA DE GRUPO DESDE UNA PERSPECTIVA ARITMÉTICA

Este capítulo se desarrolla circunscrito en el proceso de ampliación y generalización del concepto de número. Se destaca que, debido al carácter marcadamente abstracto del concepto de número, a pesar de que la aritmética antecedió en el orden histórico a las demás ramas de las matemáticas desde la época de la civilización babilónica y aún, mucho antes, su desarrollo fue muy intrincado, y se tuvo que esperar hasta el siglo XIX, en la época de Dedekind y Peano, para que se constituya en un sistema deductivo tal como se había logrado con la geometría, en *Los Elementos de Euclides*, en el siglo III antes de nuestra era. No obstante, y precisamente en virtud de su naturaleza e importancia, la noción de número ha estado presente en todos los momentos y procesos de evolución de las matemáticas. En realidad, la generalización del concepto de número determinó la generalidad y el campo de las aplicaciones de los métodos algebraico literales.

1.1 Aportes de la generalización del concepto de número

Respecto a la generalización del concepto de número, Bell afirma que:

[…] desde el punto de vista de las matemáticas como un todo, la metodología de la generalización y de la abstracción deliberadas, que culminó en el siglo XX en unas matemáticas de la estructura, que se desarrollaron con rapidez, es sin duda alguna, la aportación más significativa de todas las tentativas sucesivas para ampliar el concepto del número” (Bell, 2002, p. 197).

Por su parte, Boyer señala que “el interés en la idea abstracta de estructura y la aparición de nuevas álgebras, especialmente durante la segunda mitad del siglo XIX, condujo también a amplias generalizaciones en el campo de los números y su aritmética” (Boyer, 1986, p. 732). Es pues, desde esta perspectiva que se analiza el proceso de formación de la noción abstracta de estructura de grupo.

Los sistemas numéricos del análisis, del álgebra, de la física matemática y de la teoría de números del siglo XX, se desarrollaron después de un largo proceso de cuatro siglos de generalización, el cual trajo como resultado los números complejos e hipercomplejos, los enteros algebraicos y el continuo de los números reales (Bell, 2002).

Ahora, siguiendo a Bell, se relacionan varios períodos en los cuales que se presentaron cambios significativos en el desarrollo de la matemática en general, y de la teoría de la estructura de la matemática, en particular.

El primer período, corresponde al momento a 1801, en el cual Gauss introdujo el concepto de congruencia en términos de una relación de equivalencia con el fin de ordenar una clase infinita de enteros en una subclase finita, la cual traía implícito el concepto de homomorfismo; concepto que fue formulado de manera clara e independiente, apenas en el siglo XX, convirtiéndose, desde allí, en la base para el desarrollo del álgebra abstracta, la topología y otras ramas de las matemáticas.

El segundo período, se ubica en la década de 1830 a 1840, intervalo en el cual los algebristas ingleses reconocieron con claridad el carácter puramente abstracto y formal del álgebra elemental. En la década siguiente, surgieron los cuaterniones de Hamilton y las álgebras de Grassmann, mucho más generales, y a partir de las cuales se desarrollaron las álgebras vectoriales de la física matemática. De este período quedó un resultado perdurable, en términos de un concepto muy generalizado de número.

Merece atención indicar el interés de Peacock, Gregory y De Morgan, para trasformar el álgebra en una rama de las matemáticas independiente de las propiedades de los números reales y de los números complejos; en tal sentido, propusieron como postulado que las mismas propiedades fundamentales fueran válidas para cualquier clase de número, lo que constituyó el principio de permanencia de las formas equivalentes.

Peacock dedujo el principio fundamental de la permanencia de las formas a partir de la distinción del álgebra aritmética y el álgebra simbólica, hecho que le permitió elaborar un conjunto de reglas aplicables a los números y otro conjunto de reglas aplicadas a las magnitudes en general, de tal manera que, todos los resultados obtenidos en el álgebra aritmética, cuyas expresiones son generales desde el punto de vista de la forma, pero particulares y específicas al nivel de los valores, son igualmente resultados válidos en el álgebra simbólica, en donde son generales, tanto en la forma como en el valor.

La justificación de Peacock para tal validez, es lo que se conoce como principio de permanencia de la forma, conocido también como principio de permanencia de las leyes formales (Collette, 1986). A pesar que el intento de Peacock no resultó muy eficaz, tuvo el mérito de preparar el camino para desarrollos más abstractos del álgebra; pues, tales leyes formales implicaban trasladar las operaciones que se realizaban con los números, a objetos de naturaleza no determinada. Empero, los desarrollos logrados del álgebra británica con los trabajos de Peacock, quien realmente debe ser considerado como el fundador del álgebra es François Viete, ya que fue él quien retomó una metodología característica del pensamiento griego, y le imprimió una extensión y profundidad que le permitieron, en un nivel muy diferente, reorganizar la obra de Diophanto (Piaget & García, 1982: 138).

Vieta en su obra *Introducción al Arte Analítico* (*In Artem Analyticem Isagoge*), incluyó lo que llamó "una cierta vía de inquisición de la verdad" (p.138). Aquí, el término analítico hace referencia al "análisis", como una forma de investigación, en la cual, siguiendo a Zheon, se trata de "considerar la cosa investigada como establecida y proceder por medio de lo que sigue de ello hasta una verdad que sea incontestada". Por su parte, la "síntesis" es un proceso que comienza con "la suposición de aquello que es aceptado y, por sus consecuencias, se llega a la conclusión y a la comprensión de aquello que se busca" (Piaget & García; 1982:138).

Además, Viete retomó una distinción hecha por los griegos, en dos clases o categorías, como sigue: el análisis *zetético* o teórico y el análisis *porístico* o problemático. El zetético consistía en un arte mediante el cual se encuentra la ecuación o la proporción entre la magnitud que se busca y las que son dadas. El porístico, es un arte por el cual, a partir de la ecuación o de la proporción se busca verificar el teorema que se establezca. Adicionalmente, Viete introdujo un nuevo análisis llamado *rético* o *exegético*, que es el arte mediante, a partir de la proporción o de la ecuación que se establezca, se obtiene la magnitud que se busca (Piaget & García; 1982; p.138).

El término magnitud es utilizado en un sentido general, pues, la magnitud buscada es, o bien un número determinado, o bien una magnitud geométrica específica, medible. Según Klein (1995), de aquí deriva el doble nombre de esta tercera forma de análisis, cuyo objetivo es tanto el cálculo de las magnitudes aritméticas, como la construcción de las magnitudes geométricas, partiendo de las ecuaciones canónicas ordenadas. Esta forma de análisis es llamada rética con respecto a los números a los cuales conduce y que pueden expresarse por los nombres comunes de los números; y es llamada exegética con respecto a las magnitudes geométricas que considera como directamente presentes a nuestra vista (Piaget & García; 1982:.139). Así pues, la "nueva" álgebra de Viete fue a la vez geométrica, como el análisis geométrico de Pappus, y aritmética, como los métodos aritméticos de Diophanto.

En la *Introducción al Arte Analítico*, Viete introduce una nueva distinción aclaratoria: las consideraciones numéricas o logistice numerosa, operan con números; y las consideraciones por especies o *logistice speciosa* operan con especies o formas de las cosas, por ejemplo, con letras del alfabeto. Las especies son en sí mismas, formaciones simbólicas, es decir, formaciones cuya objetividad meramente potencial es entendida como una objetividad actual; por lo tanto, sólo son comprensibles dentro del lenguaje del formalismo simbólico, el cual, por primera vez fue enunciado completamente, por Viete como el único análisis en calidad de zetético.

Posteriormente, Hamilton demostró la posibilidad de construir otras clases de álgebras distintas al álgebra elemental característica del segundo período de evolución que señala Bell. Por ejemplo, surge el álgebra de los números complejos, fundamentada en las propiedades de los números reales. Hacia el año de 1843, al tener que trasgredir la propiedad conmutativa de la multiplicación para alcanzar su objetivo de los cuaterniones, abrió las puertas a nuevas álgebras, cuyo desarrollo se iniciaría en el siglo XIX, como es el caso de las álgebras lineales asociativas de Peirce, resultado correspondiente a un nuevo avance hacía la *estructura general* de las álgebras, donde se establecen los conceptos de elementos *nilpotentes* e *idempotentes*; estudio que inició el autor en 1864, pero que sólo se publicó en 1881, justo un año después de su deceso.

Continuando con los períodos sobre el desarrollo del álgebra, el tercero corresponde a la década de 1870 a 1880, en la cual, se concibió la manera moderna de emprender el estudio del sistema de los números reales, con los trabajos que desarrollaron Cantor, Dedekind, Meray y Weierstrass, con lo cual, al finalizar el siglo XIX, se obtuvo la aritmetización del análisis y se inició el movimiento crítico moderno.

El cuarto período, comprendido entre 1890 y 1910, se caracteriza por la aparición de las paradojas del infinito, a las cuales, "se debió en gran parte el súbito desarrollo de la lógica matemática que ha actuado con mucha fuerza sobre toda la matemática y en particular sobre el concepto de número" (Bell, 2002: 178).

1.2 Contribuciones de la Teoría de las Congruencias

En 1801, Gauss presentó en su obra *Disquisitiones arithmeticae*, la teoría de las congruencias. Es muy conocido que el concepto de congruencia módulo m demostró ser la clasificación más fructífera de los enteros racionales, por cuanto se puede clasificar a los números enteros con base en los restos en la división por *m;* es decir, a es congruente con b módulo m si y solo si, *a* y *b* tienen el mismo resto en la división entera por *m*. Esta clasificación determina un número finito de clases de equivalencia.

Llama la atención que Gauss no haya podido destacar que su invento de ordenar un conjunto finito o infinito de elementos dentro de otro, clasificando los elementos del primero según una relación que posea las propiedades abstractas de reflexividad, simetría y transitividad, compartidas por dicha relación de congruencia, constituyera el principio orientador de la estructuración de las teorías algebraicas (Bell, 2003, 204).

Con la evolución gradual de la idea de congruencia, orientada a la estructuración de las relaciones, las matemáticas alcanzaron un impulso que hizo desbordar los vínculos con los números naturales, llegando a un dominio, en el cual, el número como tal no tiene importancia, puesto que lo que se investiga es cómo se articulan las relaciones en la estructura (Bell, 2003, p. 204).

Es oportuno recordar que la congruencia módulo m es una relación de equivalencia, que se simboliza por $a \equiv b \; mod \; m$, y que el hecho de escribir *x es divisible exactamente por m* en la forma $x \equiv 0 \; mod \; m$, fue lo que probablemente condujo a que Gauss pensara en analogías entre las ecuaciones algebraicas y la divisibilidad aritmética.

Un ejemplo que ilustra estas ideas es *el anillo de las clases residuales módulo* m. En efecto, la congruencia con respecto al módulo *m*, entero positivo, *separa* a todos los enteros racionales en *m clases*. Se incluyen en una misma *clase residual* todos los números de la forma $a + km \; con \; k \; \in \; \mathbb{Z}$. Existen *m* clases, lo que equivale a decir que el conjunto *cociente* $\mathbb{Z}/m$ comprende *m elementos*. En otras palabras, la definición de congruencia *módulo m* clasifica los números enteros $\mathbb{Z}$ por su resto en la división por *m*. En particular, si *m=2*, entonces *m* clasifica a $\mathbb{Z}$ en pares e impares. Además, en virtud de la compatibilidad de la suma y la multiplicación de números enteros con respecto a esta relación de congruencia, es posible "*trasladar*" estas operaciones al conjunto de clases de congruencia, lo cual da lugar a los *anillos de enteros módulo m* y, en consecuencia, a la "*aritmética módulo m*." En particular, para que $\mathbb{Z}/m$ sea un dominio de integridad, es necesario y suficiente que m sea un número primo.

1.3 Aportes a la ampliación del Sistema de Números

Con posterioridad a la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grados por los matemáticos italianos, y luego de la introducción de las letras y del simbolismo en los siglos XVI y XVII, las *ampliaciones del sistema de números* fueron parte de los avances más notables que experimentaron las matemáticas. Pero, a pesar de haberse generalizado, de modo más o menos informal dichas *ampliaciones* en la perspectiva de obtener, a partir de los números naturales, otras extensiones, tales como las de los enteros, los racionales, los reales y los complejos, básicamente, durante el siglo XIX todavía se tenía el concepto de número natural como algo muy simple y trasparente para la mente, lo cual haría creer que sería imposible analizarlo o referirlo a otros conceptos más simples. En realidad, sólo después de la formalización del álgebra y la aritmética por obra de los miembros de la escuela inglesa, Peacock, De Morgan, Hamilton, entre otros, los números naturales se ampliaron a los números algebraicos[2] iniciando con los trabajos de Gauss y de Kummer en las décadas de 1830 a 1850.

Con respecto a tales ampliaciones, Bell señala que en cada fase del avance de los números naturales hacia otros tipos de números, se produjo un enriquecimiento y un ensanchamiento de todos los campos de las matemáticas contiguos a la aritmética; y recíprocamente, las nuevas adquisiciones, hechas en otros campos, generaron modificaciones en la aritmética, tal como sucedió en la década de 1840 a 1850 con la ampliación del álgebra vectorial plana a un espacio de más de dos dimensiones, lo cual constituyó uno de los orígenes de los sistemas de números hipercomplejos del álgebra, y éstos, a su vez, proporcionaron a la aritmética otros tipos de enteros. En este sentido, afirma Bell que:

El desarrollo de la aritmética correspondiente influyó por su lado y particularmente en el siglo XX sobre el álgebra de que procedía [...] El movimiento hacia adelante era universal y cada adelanto importante en una sección inducía al progreso en otras (Bell, 2002, p. 197-198).

Como un ejemplo que confirma e ilustra las afirmaciones anteriores, se puede mencionar el caso de los matemáticos ingleses, Cotes y De Moivre, quienes encontraron fórmulas que relacionan los números complejos con las funciones trigonométricas y logarítmicas. En la misma línea, están las contribuciones hechas por Euler a la teoría de los logaritmos de números complejos. A estos matemáticos, además de Vandermonde, que utilizaron la representación de los números complejos como puntos del plano, se debe la deducción de que las soluciones de la ecuación ciclotómica $x^n - 1 = 0$, representada en términos trigonométricos como $\frac{\cos(2k\pi)}{n} + i\,\frac{sen(2k\pi)}{n}$, corresponda a los vértices de un polígono regular de n lados que se encuentran sobre la circunferencia del círculo de radio unitario.

Durante el siglo XVIII la aplicación de los números complejos se hizo cada vez con mayor seguridad y efectividad, en razón de que, no obstante, la poca claridad que se tenía sobre el concepto de estos números, era inocultable su utilidad en la resolución de problemas concretos. La confianza de los matemáticos en los números complejos se consolidó con el reconocimiento de los mismos en la primera demostración del teorema fundamental del álgebra que realizó Gauss en 1799.

Si bien, las diferentes interpretaciones de los números complejos aún no se habían formulado en términos de una concepción científica única, se aplicaban, a la vez, en distintos planos junto con el desarrollo general del análisis matemático, no obstante, en

---

[2] Números algebraicos son aquellos números complejos y, en particular, números reales que son raíces de polinomios de grado n con coeficientes racionales.

lo fundamental, todos los elementos necesarios de la teoría general, estaban formados. En consecuencia, la llegada del siglo XIX era la ocasión apropiada para la creación de esta teoría.

La etapa que siguió, en lo referente a la historia de las funciones de variable compleja, se caracterizó por la introducción de definiciones precisas de los conceptos fundamentales, referentes, sobre todo, al surgimiento de las interpretaciones geométricas del concepto de número complejo.

Al respecto, Bell señala que:

> […] la teoría de los números complejos necesitaba una revisión radical y una generalización del concepto de divisibilidad aritmética, que a su vez requería de un nuevo enunciado de ciertas partes de la geometría algebraica tales como las intersecciones de variedades. Esta última, a su vez, fue responsable, en parte, de otras generalizaciones tales como los sistemas modulares de la aritmética algebraica o del álgebra aritmética, del siglo XX (Bell, 2002:198).

Por otra parte, vale recordar que desde la época en que se desarrolló el estudio de la resolución algebraica de las ecuaciones polinómicas de segundo grado, se generó un amplio debate y un importante proceso de construcción de significado que llevó a la conceptualización y representación tanto de los números complejos como de las operaciones y propiedades; pero la toma de conciencia plena por parte de los matemáticos, en el sentido que la base fundamental del concepto de número la constituye la caracterización de las operaciones, junto con sus propiedades, que se definen sobre el conjunto numérico, apenas ocurrió a partir del siglo XIX. Evidentemente, allí, a lo que se hacía referencia, es al concepto de estructura matemática, lo cual implica que en la misma se encontraría la base fundamental del concepto de número.

En cada una de las ampliaciones y generalizaciones que tuvieron lugar en la evolución del concepto de número, la aritmética ejerció influencia sobre el álgebra en la cual tuvo su origen. Sin embargo, en ningún caso, el avance que se alcanzó, a partir de 1800, para cambiar de lo particular y detallado hacia lo abstracto y general, se debió a una sola rama de las matemáticas, porque se trató de un movimiento progresivo de carácter universal y, en consecuencia, cuando se obtenía un resultado importante en alguna rama, este inducía el desarrollo en otras.

Un hecho que merece destacar en todo el proceso de abstracción y generalización es el reconocimiento de la libre creación de los sistemas matemáticos, principalmente a raíz del surgimiento de la geometría no euclidiana hiperbólica de Gauss, de Bolyai y Lobachevsky.

A este respecto, Bell afirma que: “parece que [el surgimiento de] la geometría del moderno punto de vista abstracto de las matemáticas, se debe al avance casi simultaneo de la aritmética y del álgebra en una dirección paralela”; por cuanto, efectivamente, haciendo referencia al reconocimiento explícito que, en 1830, hiciera la escuela británica del álgebra simbólica elemental como sistema matemático puramente formal, “condujo en breve a una revolución de la aritmética y del álgebra de importancia comparable a la que precipitó la geometría no euclidiana”(Bell, 2002: 200).

CAPÍTULO 2.

Raíces de la estructura de grupo desde una perspectiva algebraica

CAPÍTULO 2.

RAÍCES DE LA ESTRUCTURA DE GRUPO DESDE UNA PERSPECTIVA ALGEBRAICA

En el siglo XVIII, los problemas que impulsaron el desarrollo del álgebra estaban relacionados con ecuaciones algebraicas, la cual incluía no solo la formación de la teoría general de las ecuaciones, sino también, la acumulación de procedimientos para su resolución.

2.1 Aportes del Álgebra

El trabajo científico alrededor de la teoría general de las ecuaciones y la acumulación de procedimientos para su resolución, condujo, al mismo tiempo, a la reestructuración de los fundamentos del álgebra, ligada con la ampliación del concepto de número, con los procedimientos del cálculo aritmético, con la teoría de números y con el perfeccionamiento del aparato algebraico simbólico - literal. A partir del desarrollo de estos aspectos que, en esencia, determinaban el contenido y el objeto del álgebra de finales del siglo XVIII, se requirió y, a la vez fue posible avanzar al tratamiento de problemas cualitativamente nuevos, los cuales estarían relacionados con el posterior desarrollo de la teoría de Galois y de la teoría de grupos. Bajo la denominación de "aritmética universal o general", tales problemas eran los temas que constituían una ciencia única, que ocupó el centro de atención de destacados matemáticos de la época, principalmente, en el contexto de la *Aritmética Universal* de Newton, publicada en 1707.

Aparecieron, luego, otras producciones cuyo contenido consistía en una construcción sistemática del álgebra; entre ellas, *Aritmética Universal* publicada por Euler en 1767, en la que se matiza el álgebra como ciencia independiente. Fue traducida a varios idiomas y tuvo mucha influencia en la determinación de la problemática científica del álgebra y en la estructuración de los currículos universitarios sobre esta materia. Su contenido era muy variado, desde la teoría general y los métodos de resolución de ecuaciones algebraicas, sistemas de ecuaciones lineales, métodos de búsqueda de soluciones enteras de las ecuaciones de primer grado y de grados superiores, como también, temas de teoría de números. Por ejemplo, contiene una demostración del Teorema de Fermat para los casos $n = 3$, $n = 4$. De este modo, se podía advertir, no sólo el comienzo, sino, de manera muy importante, el resultado y el estado de la formación del álgebra en el siglo XVIII, convirtiéndose en la ciencia de las ecuaciones algebraicas, en la cual estaba inmersa la elaboración del aparato simbólico-literal, necesario para la resolución de ecuaciones.

Igualmente, conservando en su composición los métodos numéricos, por una parte, el álgebra interactuaba con la aritmética de manera muy estrecha; y por otra, había una interpretación de los métodos y problemas algebraicos y la teoría de números, básicamente en el dominio relacionado con el análisis diofántico. Así pues, desde la perspectiva de la evolución del contenido científico del álgebra y del proceso de creación de las premisas para un nuevo período de su evolución histórica, tal como lo afirma Ribnikov, “la generalidad y el campo de aplicaciones de los métodos algebraico-literales” estarían determinados por la “generalidad del concepto de número” (Ríbnikov, 1974: 313).

De este modo, el contenido principal del álgebra del siglo XVIII estaba constituido por la temática relacionada con la resolución de ecuaciones. Los matemáticos realizaron enormes esfuerzos orientados a resolver dicho problema, que era central para el álgebra, de lo cual resultaron trabajos que se conocieron a través de variadas y numerosas publicaciones. Entre las rutas que encauzaron tales esfuerzos, se destaca la que se formó a partir de los intentos de buscar un algoritmo algebraico, tal como el método de Tartaglia - Cardano, para hallar la solución de la ecuación cúbica; y como el de Ferrari, para la ecuación de cuarto grado, que también fuera válido para resolver las ecuaciones de grado mayo que cuatro. Entre los muchos intentos que se realizaron con tal propósito, están los trabajos de Tschirnhaus, Euler y Waring que no produjeron los resultados esperados, puesto que los recursos disponibles para tal fin, eran insuficientes.

En tal sentido, muchos trabajos se orientaron a buscar las raíces de las ecuaciones, en forma aproximada, utilizando métodos numéricos y gráficos, a partir de la geometría analítica. En esa vía, se despejó el horizonte para el desarrollo teórico del álgebra, a través de diversas investigaciones en torno a los problemas de la resolubilidad por radicales de las ecuaciones algebraicas y la demostración del teorema fundamental del álgebra. Vale mencionar en este contexto los trabajos de matemáticos como D'Alembert, Euler, Lagrange y Gauss.

Cuando Lagrange se preguntó por qué funcionaban las fórmulas para resolver las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado por el método de radicales y qué se ocultaba en ellas, encontró una respuesta, que aunque parcial, le permitió encontrar el camino que lo llevaría a determinar que las raíces de tales ecuaciones se podían permutar y que ciertas funciones permanecían invariantes bajo dichas permutaciones. Efectivamente, es en este contexto en el que Lagrange se dio cuenta que el éxito de los métodos de resolución por radicales se debía, entre otras razones, a la existencia de funciones simétricas de las raíces, que se relacionan con los coeficientes de las ecuaciones (Dieudonné, 1989).

Posteriormente, en la teoría de ecuaciones se llegó a establecer que las funciones simétricas de los coeficientes es lo primero que se destaca, luego, las expresiones que permanecen invariantes, si bien no bajo todas, pero sí bajo una gran cantidad de permutaciones de las raíces (Klein, 1995: 360).

Por ejemplo, sea la ecuación de grado n:

$$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots + \cdots = 0$$

Dado que esta ecuación es de grado n, tiene n-raíces, por lo cual, con los coeficientes de la ecuación se forma el sistema de funciones simétricas de las raíces $x_1, x_2, \dots, x_n$, como sigue:

$$a_1 = x_1 + x_2 + \cdots + \ x_3$$

$$a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + \cdots + \ x_1x_{n-1} + \ x_1x_n$$

$$a_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + \ x_1x_2x_{n-1} + \ x_1x_2x_n$$

$$\vdots$$

En el tratado de Edward Waring, *Miscellanea Analytica*, publicado en Cambridge en 1762, se demostró que todas las funciones simétricas racionales de las raíces, se pueden expresar como funciones racionales de los coeficientes de una ecuación. Primero obtuvo expresiones para sumas de potencias, así: $s_m = x_1^m + x_2^m + \cdots + \ x_n^m$ y luego expresiones para polinomios simétricos arbitrarios.

Posteriormente, en su tratado *Meditationes Algebraicae*, publicado en Oxford en 1770, derivó otros métodos para expresiones polinomiales simétricas; que corresponde al que presentan los libros modernos.

Por su parte, Waring también investigó sobre las soluciones de ecuaciones ciclotómicas: $x^n - 1 = 0$; y trató el problema sobre la determinación de ecuaciones que se pueden resolver mediante sumas de la forma:

$$x = \sqrt[m]{\alpha_1} + \sqrt[m]{\alpha_2} + \cdots + \sqrt[m]{\alpha_n}$$

En este sentido, Waring se constituyó en uno de los primeros antecesores de la teoría de Evariste Galois.

Por otra parte, Lagrange junto con otros matemáticos destacados, tales como Carl Gauss, comenzaron a sospechar que no existía una fórmula para la solución de una ecuación polinómica general de quinto grado, debido a que el método de la ecuación auxiliar que funcionaba en los casos de menor grado, aumentaba en uno el grado de tal ecuación (Falk, 2013). En este contexto, fue que el matemático italiano, Paolo Ruffini, discípulo de Lagrange, demostró que no podía existir un polinomio $f(x_1, x_2, \dots, x_5)$ con respecto a las cinco raíces de una ecuación de quinto grado, que solo tomara tres (3) o cuatro (4) valores cuando se permutan las cinco raíces de las $5! = 120$ maneras posibles (Dieudonné, 1989).

Así pues, Ruffini, estudió los sistemas de todas las permutaciones de $x_1, x_2, \dots, x_5$ que dejaban invariante un cierto polinomio $P(x_1, x_2, \dots, x_5)$. Demostró que el número p de permutaciones de un sistema como el mencionado, es un divisor de 120, y que el número de polinomios distintos que se puede formar a partir del polinomio P, aplicando las 120 permutaciones de los x_j, es el cociente $\frac{120}{p}$.

Finalmente, dicho autor, pudo demostrar que $\frac{120}{p}$ siempre es diferente de 3 o de 4. Sin embargo, todavía no quedaba demostrada en forma definitiva, la imposibilidad de resolver por radicales cualquier ecuación polinómica de quinto grado, por cuanto, para llegar a esta conclusión, se tendría que haber conocido nociones relativas de lo que en el futuro se llamarían "Cuerpos Numéricos"; en virtud de los cuales, finalmente, Abel en 1824, sí pudo completar la demostración (Dieudonné, 1989).

En los comienzos del siglo XIX, Evariste Galois estudió ciertas agrupaciones de permutaciones, entendidas como agregados o colecciones; también analizó las propiedades de ciertas subcolecciones "subgrupos" que permanecían invariantes bajo determinadas transformaciones, con lo cual, pudo demostrar la imposibilidad de resolver, por medio de radicales, las ecuaciones de grado mayor que 4. El estudio de tales grupos de permutaciones, en términos de números o símbolos, se llevó a cabo durante el transcurso del siglo XIX; sin embargo, sólo al final de ese siglo, se llegó a formular en abstracto la estructura de tales grupos, con base en los trabajos de Walther von Dyck (Van der Wearden, 1985), Heinrich Weber (Van der Wearden, 1985) y Eugen E. Netto (Wussing, 1984).

Aunque Eugen Netto en su libro *Substitutionentheorie und ibre Anwendung auf die Algebra* (1882), se limitó a tratar grupos de sustituciones, los enunciados de esos conceptos y teoremas permitían reconocer el carácter abstracto de tales conceptos. Asimismo, Netto, además de juntar los resultados de sus antecesores, consiguió tratar los conceptos de isomorfismo y homomorfismo (Kline, 1992).

Heinrich Weber, en el estudio sobre representaciones de grupos, trató el importante concepto de carácter de un grupo, noción que había sido formulada por Dedekind, de manera abstracta para grupos abelianos, en la tercera edición de la obra *Vorlesungen uber Zablentheorie*, publicada en 1879 (Kline, 1992).

Por otra parte, Walther von Dyck, influenciado por Cayley y Klein, incluyó en el concepto de grupo abstracto las tres raíces fundamentales de la teoría de grupos: la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la teoría de grupos de transformaciones (Kline, 1992: 1505). Adoptó su definición de grupo, en los siguientes términos: “un grupo está definido por medio de las leyes de combinación de sus símbolos” (Wussing, 1984). Dyck, consideró todas las influencias y tendencias del desarrollo de la teoría de grupos, y a finales del siglo XIX, proporcionó una fundamentación abstracta a las matemáticas, formulada por medio de axiomas y justificada en términos de la lógica matemática.

2.2 Los Invariantes en la resolución de Ecuaciones Polinómicas

Vale señalar que, Euler siendo uno de los matemáticos brillantes de la época, también intentó determinar fórmulas para la resolución de ecuaciones por radicales, pero sus esfuerzos resultaron infructuosos. Sin embargo, Lagrange con base en la demostración de Euler, introdujo y elaboró la teoría de las funciones invariantes o semejantes, aplicada únicamente para sustituciones de un mismo grupo. En relación a las funciones semejantes, Lagrange demostró que éstas se expresaban en forma racional, unas a través de las otras, por medio de los coeficientes de la ecuación dada.

Dado que el único camino que tenían los matemáticos para resolver las ecuaciones de grado superior al cuarto, era a través de los medios algebraicos elementales disponibles en la época, y considerando que el único motivo que guiaba los innumerables esfuerzos, era una especie garantía intuitiva sobre la posibilidad de lograr un algoritmo similar a los de Ferrari, Tartaglia y Cardano, al menos para el caso de las raíces reales, Lagrange se propuso determinar las razones por las que resultaban eficaces los métodos conocidos para la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado, al igual que los hechos o señales reveladoras y susceptibles de dar luces para la investigación de métodos eficaces para la resolución de ecuaciones de grado mayor que cuatro.

En este sentido, Lagrange analizó a profundidad los métodos mencionados, con lo cual observó que las soluciones de la ecuación original se podía obtener en términos de las soluciones de ciertas ecuaciones auxiliares, llamadas *resolventes*; sin embargo, al parecer, quién inició el estudio de las *resolventes,* fue el matemático francés Alexandre Theaphile Vandermonde, cuando presentó en 1770 a la Academia de París, una memoria con el título de *Sur la résolution des équations*, en la que trató el tema, no sólo de la resolución de las ecuaciones de segundo y tercer grado, sino que presentó también las soluciones para la ecuación de cuarto grado, y avances para ciertas ecuaciones de grado mayor, al incluir la ecuación ciclotómica $x^{11}-1=0$. Vandermonde indicaba que la ecuación ciclotómica: $x^n-1=0$ se podía resolver mediante radicales para n número primo, y en tal sentido, verificó su afirmación para el caso $n \leq 11$ (Van der Waerden, 1985).

Hacia el año 1771, Lagrange presentó, ante la Academia de Berlín, un amplio estudio sobre el mismo problema, titulado *Reflexiones sobre la resolución algebraica de las ecuaciones*, con el cual abrió un nuevo período en el estudio de la teoría de ecuaciones, superando el trabajo de Vandermonde, al examinar, desde diversas direcciones, las soluciones de las ecuaciones de segundo, tercero y cuarto grado, como también de grado mayor.

2.3 Método de Van der Waerden para la resolución de la Ecuación Cúbica General

Para el caso de la ecuación cúbica general: $x^3+bx^2+cx+d=0$ y siguiendo el desarrollo que, sobre el tema, se hace en Van der Waerden y en el libro *Recorriendo el álgebra*, tanto para Lagrange como para Vandermonde, la idea básica era considerar la expresión: $t=x+\alpha y+\alpha^2 z$, donde x, y, z son las soluciones de esta ecuación y α es una raíz cúbica de la unidad ($\alpha \neq 1$).

Lagrange notó que dependiendo del orden en que se tomen las raíces x, y, z, a la variable t le corresponden seis (6) valores que dependían de las seis (6) permutaciones de las raíces x, y, z. Señala también que estos seis valores son soluciones de la ecuación de sexto grado que sigue:

$$f(S)=(S-t_1)(S-t_2)(S-t_3)(S-t_4)(S-t_5)(S-t_6)=0$$

donde los coeficientes, en virtud de que son funciones simétricas de los seis valores de t $(t_{i,} 1 \leq i \leq 6)$, son también funciones simétricas de *x*, *y*, *z*; por lo tanto, pueden ser expresados en términos de los coeficientes de la ecuación cúbica que se dé inicialmente.

Lagrange posiblemente haya denominado *resolvente a la ecuación anterior f(S)=0*, puesto que, a pesar de ser de grado mayor que la original, se puede resolver mediante radicales, porque constituye una ecuación cuadrática en S^3; se aplica en primer lugar, la fórmula para la ecuación cuadrática y, luego, se extrae la raíz cúbica.

Para tal efecto, basta considerar que los seis valores de t se pueden ordenar de la siguiente manera:

$$t_1 = x + \alpha y + \alpha^2 z \qquad t_2 = \alpha t_1 = \alpha x + \alpha^2 y + z$$

$$t_3 = \alpha^2 t_1 = \alpha^2 x + y + \alpha z \qquad t_4 = x + \alpha z + \alpha^2 y$$

$$t_5 = \alpha t_4 = \alpha x + \alpha^2 z + y \qquad t_6 = \alpha^2 t_4 = \alpha^2 x + z + \alpha y$$

Esto implica que, para los primeros tres factores, se tiene la relación siguiente:

$$(S - t_1)(S - t_2)(S - t_3) = (S - t_1)(S - \alpha t_1)(S - \alpha^2 t_1) = S^3 - {t_1}^3$$

Igualmente, para los otros tres factores, se tiene la expresión:

$$(S - t_4)(S - t_5)(S - t_6) = (S - t_4)(S - \alpha t_4)(S - \alpha^2 t_4) = S^3 - {t_4}^3$$

Por lo tanto,

$$f(S) = (S^3 - {t_1}^3)(S^3 - {t_4}^3) = S^6 - ({t_1}^3 + {t_4}^3)S^3 + ({t_1}^3 {t_4}^3)$$

Ahora, basta aplicar la fórmula para la ecuación cuadrática en S^3 y luego extraer la raíz cúbica.

A pesar de que los seis valores de t se obtienen a partir de la solución de la ecuación *resolvente*, las soluciones de la ecuación cúbica son:

$$x = \frac{1}{3}[(x + y + z) + t_1 + t_4]$$

$$y = \frac{1}{3}[x + y + z) + t_3 + t_5] = \frac{1}{3}[(x + y + z) + \alpha^2 t_1 + \alpha t_4]$$

$$z = \frac{1}{3}[(x + y + z) + t_2 + t_6] = \frac{1}{3}[(x + y + z) + \alpha t_1 + \alpha^2 t_4]$$

Luego, el único problema consiste en identificar t_1 y t_4 entre las seis soluciones de la *resolvente* o mejor, después de resolver la ecuación $f(S) = 0$ y una vez conocidos los seis valores de t, hay que identificar t_1 y t_4 entre estas seis soluciones de la ecuación *resolvente*.

Lagrange estudió el problema relacionado con determinar qué t_i $(1 \leq i \leq 6)$ se debía utilizar en las anteriores fórmulas. Para tal efecto, indicó que si t es cualquiera de las seis soluciones de la ecuación resolvente y siendo: $w = (x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z)$ simétrico en x, y, z, y por lo tanto conocido, entonces, las tres raíces de la ecuación cúbica serían:

$$x = \frac{1}{3}[(x + y + z) + t + \frac{w}{t}]$$

$$y = \frac{1}{3}[(x + y + z) + \alpha t + \frac{w}{\alpha t}]$$

$$z = \frac{1}{3}[(x + y + z) + \alpha^2 t + \frac{w}{\alpha^2 t}]$$

2.4 Método de Lagrange para la resolución de una Ecuación Cúbica Particular

A manera de ejemplo, se describe en seguida el método de Lagrange para resolver la ecuación:

$$x^3 + px + q = 0 \quad (1)$$

Sea la transformación:

$$x = y - \frac{p}{3y} \quad (2)$$

Reemplazando la expresión (2) en (1), se obtiene la ecuación resolvente:

$$y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \quad (3)$$

Se observa que la ecuación (3) corresponde a una ecuación cuadrática en y^3.

En efecto, si $S = y^3$ se obtiene la ecuación:

$$S^2 + qS - \frac{P^3}{27} = 0 \quad (4)$$

Las raíces S_1 y S_2 de la ecuación (4) se pueden calcular en términos de los coeficientes de la ecuación inicial:

$$x^3 + px + q = 0$$

Para regresar a la variable y a partir de S, se resuelve la ecuación:

$$y^3 - S = 0 \quad (5)$$

De tal modo que, si α es una raíz cúbica particular de la unidad, esto es:

$\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, los valores de y que satisfacen la ecuación *resolvente* (3) son:

$$\sqrt[3]{S_1} \qquad \alpha\sqrt[3]{S_1} \qquad \alpha^2\sqrt[3]{S_1} \qquad \sqrt[3]{S_2} \qquad \alpha\sqrt[3]{S_2} \qquad \alpha^2\sqrt[3]{S_2}$$

Por lo tanto, las soluciones distintas de la ecuación $x^3 + px + q = 0 \quad (1)$ son:

$$x_1 = \sqrt[3]{S_1} + \sqrt[3]{S_2} \qquad x_2 = \alpha\sqrt[3]{S_1} + \alpha^2\sqrt[3]{S_2} \qquad x_3 = \alpha^2\sqrt[3]{S_1} + \alpha\sqrt[3]{S_2}$$

Se puede notar que estas soluciones están expresadas, en términos de las raíces S_1 y S_2 de la ecuación *resolvente*.

Posteriormente, Lagrange observó que se debía establecer una relación considerando a la variable y como función de x, en tanto que es la ecuación *resolvente* la que permite la resolución de la ecuación inicial.

2.5 Método de Lagrange para la resolución de la Ecuación de Cuarto Grado

Para generalizar el método de Lagrange en la búsqueda de la solución de una ecuación de cuarto grado, eligiendo *i* como una de las dos raíces primitivas de la unidad de orden 4, y si *x*, *y*, *z*, *r*, son las raíces de la ecuación de cuarto grado en mención, entonces, la fórmula análoga para x es:

$$x = \frac{1}{4}[(x+y+z+r) + \sqrt[4]{(x+iy-z-ir)^4} + \sqrt[4]{(x-y+z-r)^4} + \sqrt[4]{(x-iy-z+ir)^4}]$$

De acuerdo con Lagrange y Vandermonde, para que fuera posible la solución de la ecuación de cuarto grado, sería suficiente evaluar sólo una de estas expresiones subradicales.

La identificación de la solución se haría a partir del análisis que sigue.

Sea $t = x - y + z - r$, entonces las 4! = 24 permutaciones de x, y, z, r, originan únicamente seis valores diferentes de t, que son los siguientes:

$$\pm(x-y+z-r) \qquad \pm(x+ y-z-r) \qquad \pm(x-y-z+r)$$

Cada uno de estos valores aparece cuatro veces. Ahora bien, si se denotan estos seis valores por: $\pm t_1$, $\pm t_2$, $\pm t_3$, entonces la ecuación resolvente asociada con los mismos es:

$$f(S) = (S-t_1)^4(S+t_1)^4(S-t_2)^4(S+t_2)^4(S-t_3)^4(S+t_3)^4 = 0$$

$$= [g(S)]^4] = [(S^2-t_1{}^2)(S^2-t_2{}^2)(S^2-t_3{}^2)]^4$$

En este caso $t_1{}^2, t_2{}^2, t_3{}^2$ son las raíces de una ecuación cúbica conocida puesto que los coeficientes de g(S) son funciones simétricas en $t_1{}^2, t_2{}^2, t_3{}^2$ y, por lo tanto, son simétricas en x, y, z, r.

En vista de que se puede resolver la mencionada ecuación cúbica, es posible obtener las raíces $t_1{}^2, t_2{}^2, t_3{}^2$ y al extraer la raíz cuadrada, se tendrían los valores de t identificados como: $\pm t_1, \pm t_{2,}, \pm t_3$.

En consecuencia, las soluciones de la ecuación de cuarto grado son:

$$x = \frac{1}{4}[(x + y + z + r) + t_1 + t_2 + t_3]$$

$$y = \frac{1}{4}[(x + y + z + r) - t_1 + t_2 - t_3]$$

$$z = \frac{1}{4}[(x + y + z + r) + t_1 - t_2 - t_3]$$

$$r = \frac{1}{4}[(x + y + z + r) - t_1 - t_2 + t_3]$$

Analizando el comportamiento de la *ecuación resolvente* para el caso de las ecuaciones de tercero y cuarto grados, se observa que el grado de la ecuación resolvente crece rápidamente, de manera que es mayor que el grado de la ecuación inicial. En efecto, para la ecuación de tercer grado, la *resolvente* tiene grado $3! = 6$ en S; pero este se disminuye por motivos relacionados con los grupos de permutaciones de las raíces, por cuanto dicha *resolvente* se reduce a una ecuación cuadrática en S^3que se resuelve con el método conocido.

Para el caso de la ecuación de cuarto grado, la *resolvente* tiene grado $4! = 24$ en S, pero la misma se reduce a una ecuación de grado $3! = 6$ en S^4, la cual se puede resolver por tratarse de una ecuación cúbica en S^2. Estos hechos obedecen al número de raíces primitivas de la unidad.

En efecto, si: $t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4$ y se elige, $\propto = -1$, entonces la *ecuación resolvente*, $f(S) = [g(S)]^4$ es la cuarta potencia de la ecuación $g(S)$, de grado seis, y para lo que se ha indicado, es resoluble.

2.6 Sobre la Imposibilidad de resolver por radicales la Ecuación de Quinto Grado

En seguida se muestra por qué las consideraciones y los procesos realizados en la resolución de las ecuaciones de tercero y cuarto grado no funcionan al intentar extenderlos para la resolución de la ecuación de quinto grado. En este caso, concretamente, todas las raíces de la unidad, diferentes de 1 (uno) son primitivas; es decir, hay cuatro raíces primitivas y además, por lo que se ha dicho, al pretender resolver la ecuación de quinto grado, la *resolvente* tendría grado $5! = 120$, que se reduce a una ecuación de grado 24 en S^5.

La expresión o función lineal de las raíces x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, de la ecuación, es:

$$t = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \alpha^3 x_4 + \alpha^4 x_5;\ \propto^5 = 1; \propto \neq 1$$

Se tiene que:

$$\alpha t = x_5 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^4 x_4$$

$$\alpha^2 t = x_4 + \alpha x_5 + \alpha^2 x_1 + \alpha^3 x_2 + \alpha^4 x_3$$

$$\alpha^3 t = x_3 + \alpha x_4 + \alpha^2 x_5 + \alpha^3 x_1 + \alpha^4 x_2$$

$$\alpha^4 t = x_2 + \alpha x_3 + \alpha^2 x_4 + \alpha^3 x_5 + \alpha^4 x_1$$

Se pueden observar dos hechos importantes. En primer lugar, que los términos de tales expresiones están ordenados en correspondencia con la aplicación a t de las sucesivas potencias de la permutación cíclica $(x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, x_5)$; en segundo lugar, que, la *resolvente* $f(S)$ consta de 24 factores, lo cual pone en evidencia la imposibilidad de resolver "*por radicales*" la ecuación de quinto grado.

A partir de la solución de la ecuación de cuarto grado, Lagrange formuló la conjetura de que, si fuera posible encontrar un polinomio $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ con respecto a las cinco raíces de la ecuación de quinto grado, y que sólo pudiera tomar 3 o 4 valores al permutar las cinco raíces de las 5! = 120 maneras, entonces sería posible resolver "por radicales" la ecuación de quinto grado.

Sin embargo, a comienzos del siglo XIX Ruffini, discípulo de Lagrange, justificó la imposibilidad de la existencia de un polinomio con tales características. Mediante el estudio de los sistemas de todas las permutaciones de las raíces $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$ logró demostrar que el número p de permutaciones de un sistema de ese tipo es un divisor de 120 y que el número de polinomios distintos que es posible formar partiendo de f y aplicando las 120 permutaciones de las raíces x_i, es $120p$. Finalmente, demostró que en ningún caso, el número $120p$ puede ser igual a 3 o a 4, como Lagrange lo mencionaba en su conjetura.

Todos estos resultados fueron los que condujeron a Lagrange a considerar el problema de la resolución de ecuaciones en términos de permutaciones de las raíces y, con lo cual, el problema se reducía al estudio de los diferentes valores que pueden tomar las combinaciones elegidas de las raíces cuando se las permuta de todas las maneras posibles. De este modo, demostró que las raíces de las ecuaciones resolventes son funciones lineales de las raíces buscadas y de las raíces de la unidad.

La idea fundamental de Lagrange, consistía en que la consideración de los valores que toma una función racional cuando se permutan sus variables, conduce directamente a la teoría de las permutaciones o a los grupos de sustitución. Justamente, la importancia del trabajo con las *resolventes* radica en que trae consigo el hecho de resaltar el tema de las permutaciones de las raíces de una ecuación algebraica. Este tema llegó a ser central para el álgebra abstracta, hasta tal punto que, en sus comienzos, esta rama de las matemáticas se centró en el estudio de los grupos de permutaciones. Igualmente, el tema de las *resolventes* se constituyó en un elemento de conexión entre la teoría de la resolubilidad de ecuaciones - que en el futuro correspondería a la teoría de Galois – y las estructuras algebraicas.

Posteriormente, Cauchy con el propósito de generalizar los resultados que obtuvieron por Ruffini y Abel, sobre el problema de la imposibilidad de la resolución mediante radicales, la ecuación de quinto grado, introdujo la noción de permutación con un nuevo enfoque. Para tal efecto, representó una permutación de un determinado número de objetos, designados por letras, dispuestas en un cierto orden, en una línea o renglón, mediante una regla que hacía corresponder a cada objeto de la primera línea, un objeto de la segunda, que tuviera el mismo rango, que llamó sustitución, así:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

Dado que esta representación sólo era aplicable para un número pequeño de objetos, utilizó la notación abreviada $\binom{A}{B}$ donde A y B son permutaciones arbitrarias de cierto número de objetos. El hecho más novedoso y de mayor importancia, consistió en *componer* dos sustituciones. Para el efecto, al tratar de componer la sustitución $\binom{A}{B}$ con $\binom{C}{D}$ en este orden, la composición de las dos la designó por $\binom{A}{B}\binom{C}{D}$, pero como en el proceso, para cierta permutación E, la segunda se transforma en una sustitución $\binom{B}{E}$; entonces, la composición la representó así: $\binom{A}{B}\binom{B}{E} = \binom{A}{E}$.

De la misma forma, consideró la composición de varias sustituciones:

$$\binom{A}{B}\binom{C}{D}\binom{E}{F}\binom{G}{H}.$$

En forma semejante, la sustitución compuesta o “producto” de K sustituciones iguales a una sustitución $\binom{A}{B}$ la designó por $\binom{A}{B}^k$. Designó también la sustitución idéntica $\binom{A}{A}$ para lo cual, consideró el caso:

$$\binom{A}{B}\binom{B}{A} = \binom{A}{A}.$$

Por su parte, Dieudonné, en este tema, notó que a pesar de que era evidente la analogía con la composición de funciones, “para las matemáticas del siglo XIX, habría demasiadas diferencias entre un conjunto finito y una recta como para que pudiesen pensar en una unificación, que no se producirá hasta Dedekind y Frege” (Dieudonné, 1989: 165). Ahora bien, tal como se ha señalado arriba y confirmado por Dieudonné, fue difícil liberar las matemáticas del siglo XIX de la concepción tradicional de la separación en aritmética, álgebra, geometría, análisis, que se caracterizaban por los objetos matemáticos que se estudia en cada una de ellas.

En cuanto a la formación de la noción abstracta de *estructura algebraica* y, concretamente, sobre la noción de *estructura de grupo*, la teoría de las formas cuadráticas binarias con coeficientes enteros, pertenecía a la aritmética; las ecuaciones y permutaciones al álgebra; las trasformaciones a la geometría; y en tales condiciones, la definición general de grupo sólo apareció para los grupos finitos, hasta el año 1882, y para el caso general, apenas en 1893 (Dieudonné, 1989: 180).

Por otra parte, a principios del siglo XIX, se originó en las matemáticas una tendencia firme hacia una abstracción y una generalidad crecientes, de modo que, a mediados de ese siglo, el cambio en su esencia fue tan profundo que los resultados eran irreconocibles, incluso para los matemáticos más sobresalientes del siglo XVIII. Ahora bien, a pesar de que persistía el antiguo punto de vista, las matemáticas iniciaron su mejor momento hacia la *abstracción* y a la *generalización,* orientadas a la creación de *métodos universales* y *teorías amplias,* que tuvieron como antecedentes muchos aportes, entre los cuales se destacan los trabajos de Lagrange. Así apareció el proceso de *la metodología de la generalización y de la abstracción deliberadas*, que desembocó en la noción de *estructura el cual* constituye mayor contribución que han logrado todos propósitos subsiguientes, encaminados a “ampliar el concepto de número” (Bell, 2002: 197).

2.7 Sobre las Ecuaciones Ciclotómicas

Las raíces de la unidad son de gran importancia en la resolución de las ecuaciones polinómicas, ya que son indispensables tanto para identificar cualquier raíz, o porque se presentan en la resolvente de Lagrange. Es decir, si $\sqrt[n]{c}$ es cualquier raíz n-ésima de c, entonces, la n-ésima raíz general de c es $\alpha\sqrt[n]{c}$ donde $\propto$ es una raíz n-ésima de la unidad (Fraleigh, 1988).

Tal como se conoce, las raíces de la unidad se pueden describir mediante la siguiente expresión:

$$\frac{\cos{(2k\pi)}}{n} + i\frac{sen(2k\pi)}{n}; k = 1{,}23, \cdots, n$$

Esta expresión proviene de la fórmula de Moivre, que posibilita encontrar la n-ésima potencia de un número complejo, cuya representación en forma polar, es como sigue:

$$\left(cos(\theta) + isen(\theta)\right)^n = cos(n\theta) + isen(n\theta)$$

Aplicando esta expresión a la raíz n-ésima de la unidad $\propto$, se obtiene:

$$\alpha^n = \cos(2k\pi) + isen(2k\pi) = 1$$

La interpretación geométrica de este resultado, es que las raíces de la unidad son los vértices de un polígono de n lados, inscrito en el círculo unitario del Plano Complejo Z ($|z| = 1$).

Dado que uno de los vértices de este polígono está en el círculo $|z| = 1$, la ecuación algebraica $x^n = 1$ se la llama ecuación ciclotómica y la solución divide el círculo en n partes iguales. La resolución de esta ecuación constituye uno de los problemas centrales de la teoría de ecuaciones algebraicas.

A continuación se analiza varios casos de ecuaciones ciclotómicas, para los siguientes valores de n:

$$n = 3, n = 4, n = jk\ (j\ y\ k\ primos\ relativos), n = 7\ y\ n = 11$$

2.7.1 Caso n = 3

La solución se obtiene de la resolución de la siguiente ecuación algebraica:

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = \frac{\alpha^3 - 1}{\alpha - 1} = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-3}\right)$$

Esta solución también se puede obtener geométricamente, inscribiendo el triángulo equilátero de lado igual al diámetro del círculo unidad, con un vértice en el punto de coordenadas $(1,0)$ del círculo unidad.

2.7.2 Caso n = 4

La solución se obtiene de la resolución de la siguiente ecuación algebraica:

$$\alpha^2 + 1 = \frac{\alpha^4 - 1}{\alpha^2 - 1} = 0$$

$$\alpha = \sqrt{-1}$$

2.7.3 Caso n = 5

Una raíz primitiva α satisface una ecuación de cuarto grado y es posible dar una solución algebraica. No obstante, más que aplicar el método general para resolver ecuaciones de cuarto grado, es preferible utilizar la simetría de la siguiente ecuación: $\alpha_4 + \alpha_3 + \alpha_2 + \alpha + 1 = 0$ con el fin de transformar esta ecuación en una cuadrática, lo cual se hace dividiendo por α^2 y observando que:

$$(\alpha + \alpha^{-1})^2 = \alpha^2 + 2 + \alpha^{-2}$$

La ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$(\alpha + \alpha^{-1})^2 - 2 + (\alpha + \alpha^{-1}) + 1 = 0$$

Sea $\gamma = \alpha + \alpha^{-1}$, entonces $\gamma = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{5}\right)$ y $\alpha^2 - \alpha\gamma + 1 = 0$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4}\right)$$

De aquí se obtiene que:

$$\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{-2\sqrt{5} - 10}}{4}$$

En forma, equivalente:

$$\alpha = \frac{-\sqrt{5} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{5} - 10}}{4}$$

Estas son las cuatro raíces quintas primitiva de la unidad. Se recuerda que las raíces quintas de la unidad se pueden expresar en términos de las raíces cuadradas, aplicando el hecho que en geometría un pentágono se puede construir con regla y compás.

2.7.4 Caso n = jk (j y k primos relativos)

Ahora bien, si $n = jk, con\ j\ y\ k\ primos\ relativos$; es decir $mcd(j, k) = 1$, entonces el producto de una j-ésima raíz primitiva de la unidad de una n-ésima raíz de la unidad. En efecto, sean x, y tales que $x^j = 1\ \ y\ \ y^k = 1$; es decir, x, y raíces primitivas de la unidad donde $(xy)^{jk} = 1$

Sea m número natural tal que $(xy)^{jm} = 1$, entonces $(xy)^{jm} = 1$ y de esto concluimos que $y^{jm} = 1$ y $k = jm$. Dado que $(j, k) = 1$se tiene que $k|m$ entonces, $m = qk$ para algún $q \in \mathbb{Z}$.

De otra parte, $(xy)^{qk} = x^{qk} = 1$ lo cual implica que $j|qk$, pero, dado que $(j, k) = 1$ entonces $j|q$ por lo cual, $jk|m$.

Se puede afirmar, por ejemplo, que $(-1)\alpha$ es una raíz sexta primitiva de la unidad, si α es una raíz cúbica primitiva de la unidad. Esta afirmación para $n \in \mathbb{N}$, se puede escribir en la forma $n = j_1 j_2 \dots j_n$ donde los factores $j_1 j_2 \dots j_n$ son potencias de primos distintos, por tanto primos relativos, hecho que demuestra que para encontrar las n-ésimas raíces primitivas de la unidad con n un entero arbitrario, es suficiente resolver el problema cuando n es potencia de un número primo, para lo cual, basta analizar el caso n primo, ya que es posible demostrar que la p^{n-1}-ésima raíz primitiva de la unidad de una p-ésima raíz de la unidad, es una p^n -ésima raíz de la unidad.

En efecto: si θ es una p^{n-1}-ésima raíz de α, donde α es raíz p-ésima de la unidad, entonces, $\theta^{pn} = 1$ y si $\theta^k = 1$ entonces $\theta^d = 1$, donde d es el máximo común divisor de k y p^n. Ahora, si $d \neq p^n$, entonces α es una potencia de θ^d, lo cual es imposible. Por lo tanto $p^n|k$.

2.7.5 Caso n=7 y n = 11

Para el caso del número primo $n = 7$, se puede aplicar el artificio que se utilizó para el caso $n = 3$, con lo cual se obtiene:

$$\alpha^6 + \alpha^5 + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = \frac{\alpha^7 - 1}{\alpha - 1} = 0$$

Dividiendo por α^3 se obtiene:

$$\alpha^3 + \alpha^{-3} + \alpha^2 + \alpha^{-2} + \alpha + \alpha^{-1} + 1 = 0$$

$\gamma^3 + \gamma^2 + 2\gamma + 1 = 0$ donde $\gamma = \alpha + \alpha^{-1}$

Se puede resolver la ecuación cúbica para γ y usar el resultado en la ecuación $\alpha^2 + \alpha\gamma + 1 = 0$, con lo cual se obtiene:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4}\right).$$

Se analiza ahora, qué ocurre cuando se intenta aplicar esta técnica para el caso $n = 11$.

$$\frac{\alpha^{11} - 1}{\alpha - 1} = \alpha^{10} + \alpha^9 + \cdots + \alpha + 1 = 0$$

Se obtiene una ecuación de quinto grado y ella no conduce a una solución algebraica por radicales.

Lagrange observó que la solución de la ecuación ciclotómica $x^{11} = 1$ conduce a una ecuación de quinto grado y la abandonó. Sin embargo, Vandermonde dio una solución algebraica a este problema. Su método se puede describir como una aplicación de la Resolvente de Lagrange para la ecuación de quinto grado, que resulta de la reducción anterior.

La esencia del método se puede observar al aplicar su razonamiento a la ecuación original de grado 10:

$$\alpha^{10} + \alpha^9 + \cdots + \alpha + 1 = \frac{\alpha^{11} - 1}{\alpha - 1}$$

Para aplicar el método de la resolvente de Lagrange a la ecuación de grado 10, se necesitan las raíces décimas de la unidad.

Sea β una raíz décima primitiva de la unidad, es decir, β es una raíz opuesta de una de las raíces quintas primitivas de la unidad.

Entonces, las raíces de la ecuación: $x^{10} + x^9 + \cdots + x + 1 = 0$ son $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots, \alpha^{10}$, por lo tanto, la Resolvente de Lagrange es:

$\alpha^j + \beta\alpha^k + \cdots + \beta^9\alpha^m$, donde $(j, k, \ldots, m)$ es alguna permutación de $(1, 2, \ldots, 10)$.

La idea clave es escribir las raíces de la expresión:

$$\frac{x^{11} - 1}{x - 1}$$

en el orden $\alpha, \alpha^2, \alpha^4, \alpha^8, \alpha^5, \alpha^{10}, \alpha^9, \alpha^7, \alpha^3, \alpha^6$ ya que, en él, cada raíz corresponde al cuadrado módulo 11 de la raíz que le antecede.

La Resolvente de Lagrange es:

$$t = \alpha + \beta\alpha^2 + \beta^2\alpha^4 + \beta^3\alpha^8 + \beta^4\alpha^6 + \beta^5\alpha^{10} + \beta^6\alpha^9 + \beta^7\alpha^7 + \beta^8\alpha^3 + \beta^9\alpha^6 \quad (1)$$

La ventaja de escribir las raíces en este orden es que t^{10} es una cantidad que se conoce, tal como se demostrará más adelante.

La expresión para t_i $i = 1, 2, 3, \cdots, 10$ se obtiene de t intercambiando β por β^i.

Por ejemplo, $t_{10} = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \alpha^8 + \cdots + \alpha^6 = -1$

Entonces, t_i^{10} se conoce para todo i; en consecuencia:

$$\alpha = \frac{1}{10}(t_1 + t_2 + \cdots + t_{10}) = \frac{1}{10}\left(\sqrt[10]{t_1^{10}} + \sqrt[10]{t_2^{10}} + \cdots + \sqrt[10]{t_{10}^{10}}\right)$$

Así que, excepto por el problema de escogencia de las raíces décimas, queda determinada una raíz onceava primitiva α.

Realmente, no existe problema en la selección de las raíces décimas, ya que el mismo argumento con el que se demuestra que t_i^{10} es una cantidad conocida, también demuestra que $t_i t_1^{10-i}$ es una cantidad conocida; así que, una vez se seleccione t_i, existen exactamente 10 posibles selecciones, ya que t_i^{10} es conocido. Los valores de $t_2, t_3, \ldots, t_9$ se conocen y por lo tanto:

$$\alpha = \frac{1}{10}(t_1 + t_2 + \cdots + t_{10}).$$

Este proceso produce la raíz onceava de la unidad α, sin mencionar cuál de las raíces décimas de t_i^{10} se utiliza.

El paso más importante en la resolución de $x^n = 1$ depende de la afirmación de que la cantidad t esté definida como en la ecuación (1), ya que así t^{10} es una cantidad conocida y esto implica que t^{10} se pueda expresar en términos de la única cantidad conocida β.

Ahora bien, t^{10} es en primera instancia un polinomio en $\alpha\ y\ \beta$. Así que, un término típico de t^{10} es de la forma $A\beta^j\alpha^k$ donde A, j y k son números enteros no negativos.

Dado que $\beta^{10} = 1$ y $\alpha^{11} = 1$, se puede asumir, $0 \leq j \leq 9$ y $0 \leq k \leq 10$. Luego, se asocia los términos por potencias iguales de α, obteniendo una expresión de la forma:

$$t^{10} = p_0(\beta) + p_1(\beta)\alpha + p_2(\beta)\alpha^2 + p_3(\beta)\alpha^4 + p_4(\beta)\alpha^8 + p_5(\beta)\alpha^5 + p_6(\beta)\alpha^{10} + p_{10}(\beta)\alpha^6 \quad (2)$$

donde $p_i(\beta)$ es un polinomio de grado menor que 10 en β, con coeficientes enteros. Ahora, se trata de demostrar que t^{10} no involucra a α.

La clave es que al cambiar α por α^2 se cambia t por $\beta^{-1}t$ y por lo tanto t^{10} es invariante. Estas afirmaciones son consecuencias de las definiciones de $t\ y\ \beta$; por lo tanto:

$$p_0(\beta) + p_1(\beta)\alpha + p_2(\beta)\alpha^2 + p_3(\beta)\alpha^4 + p_{10}(\beta)\alpha^6$$
$$= p_0(\beta) + p_1(\beta)\alpha^2 + p_2(\beta)\alpha^4 + \cdots + p_{10}(\beta)\alpha\,.$$

De aquí se obtiene que:

$$\big(p_1(\beta) - p_{10}(\beta)\big)\alpha + \big(p_2(\beta) - p_1(\beta)\big)\alpha^2 + \big(p_3(\beta) - p_2(\beta)\big)\alpha^4 + \cdots$$
$$+ \big(p_{10}(\beta) - p_9(\beta)\big)\alpha^6 = 0\,.$$

Una de las ecuaciones es de la forma:

$$q_1(\beta)\alpha + q_2(\beta)\alpha^2 + q_3(\beta)\alpha^4 + \cdots + q_{10}(\beta)\alpha^6 = 0$$

implica que:

$$q_1(\beta) = 0;\;\; q_2(\beta) = 0; \dots;\; q_{10}(\beta) = 0$$

Por lo tanto, en la ecuación (2) se tiene:

$$p_1(\beta) = p_2(\beta) = p_3(\beta) = \cdots = p_{10}(\beta)$$

Simbolizando por $p(\beta)$ el valor común, se obtiene que:

$$t^{10} = p_0(\beta) + p(\beta)(\alpha + \alpha^2 + \alpha^4 + \cdots + \alpha^6) = p_0(\beta) + p(\beta)(-1) = p_0(\beta) - p(\beta)$$

Por lo tanto, t^{10} es independiente de α, tal como se quería demostrar.

La demostración de que $t_i t_1^{10-i}$ es independiente de α se realiza de la misma forma, utilizando el hecho que al cambiar $\alpha\ por\ \alpha^2$ se multiplica $t_i\ por\ \beta^{-i}$ de modo que $t_i t_1^{10-i}$ es multiplicado por:

$$\beta^{-i}(\beta^{-1})^{10-i} = \beta^{-10} = 1.$$

2.8 Sobre los Polinomios Ciclotómicos

Se conoce del álgebra elemental que el caso de la extracción de la raíz *n*-ésima del elemento unitario 1, que para abreviar se denominará simplemente unidad, es de particular importancia. Esta raíz tiene *n* valores, por lo cual se habla de las raíces *n*-ésimas de la unidad.

Todas estas raíces (*n*-ésimas complejas) vienen dadas por la siguiente fórmula:

$$\sqrt[n]{1} = cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2k\pi}{n}\right), k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

Se puede observar que la raíz cuadrada de la unidad tiene dos valores: 1 y −1; la raíz cuartica tiene cuatro valores: $1, -1, i$ y $-i$.

Los valores de la raíz cúbica son: $1, w_1, w_2$, donde:

$$w_1 = cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$w_2 = cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

En una primera generalización, se tiene que todos los valores de la raíz n-ésima de un número complejo se pueden obtener multiplicando uno de estos valores conjugados por todas las raíces n-ésimas de la unidad. En efecto, se sabe que tanto el producto de dos raíces n-ésimas de la unidad, como toda potencia de la raíz n-ésima de la unidad, y también el número recíproco de la raíz n-ésima de la unidad, es una raíz n-ésima de la unidad.

Se puede observar que las raíces *n*-ésimas de la unidad aparecen relacionadas con los polinomios ciclotómicos. Para definir estos polinomios se utiliza el concepto de raíz *n*-ésima primitiva de la unidad, cuya definición, en términos elementales, es la siguiente: la raíz n-ésima de la unidad w es primitiva cuando, sí y sólo si, sus potencias w^{k} son diferentes, donde con $\mathrm{k} = 0, 1, \dots, \mathrm{n} - 1$; es decir, si con ellas se agotan todas las raíces n-ésimas de la unidad.

En general, si w es una raíz primitiva *n*-ésima de la unidad, el número w_k es una raíz primitiva de la unidad, sí y sólo si, k es primo con n.

Así pues, dado un número natural n, una raíz *n*-ésima de la unidad es cualquiera de los *n* números complejos distintos que son raíces del polinomio $p(x) = x^n - 1$.

Ahora bien, la raíz *n*-ésima *primitiva* de la unidad w es una raíz *n*-ésima de la unidad, tal que, cualquier potencia positiva más pequeña que n no es igual a uno; es decir:

$$w^k \neq 1 \; para \; todo \; k, con \; 1 \leq k \leq n.$$

Cada raíz *n*-ésima w de la unidad debe ser *k*-ésima primitiva para algún k único tal que $1 \leq k \leq n$.

El polinomio $\varphi_n(x)$ definido como sigue (Fraleigh, 1988):

$$\varphi_n(x) = \prod_{i=1}^{\varphi(n)} (x - w_i) \, .$$

donde las w_i son las raíces *n*-ésimas de la unidad en $F \;\; y \;\; \varphi$ es la función "fi" de Euler, es el *n*-ésimo *polinomio ciclotómico* sobre el cuerpo *F*.

Se define el campo de descomposición K de $x^n - 1$ sobre un cuerpo F como la *n*-ésima extensión ciclotómica de F.

Según esto, el polinomio $p(x) = x^n - 1$ tiene n ceros diferentes en el campo de descomposición K. Estos *n* ceros forman un grupo cíclico de orden n. Por otra parte, se conoce que un grupo cíclico de orden n tiene $\varphi(n)$ generadores y para el caso de los polinomios ciclotómicos, de acuerdo con su definición, estos $\varphi(n)$ generadores del grupo cíclico de orden n son exactamente las *n*-ésimas raíces primitivas de la unidad.

Considerando la definición del *n*-ésimo polinomio ciclotómico sobre F, dado que un automorfismo del grupo de Galois $G(K/F)$ debe permutar las raíces n-ésimas primitivas de la unidad, se tiene que $\phi_n(x)$ queda fijo bajo todo elemento $G(K/F)$ considerado como extendido de manera natural hasta $K[x]$. Se recuerda que $G(K/F)$ corresponde al grupo de auto morfismos del cuerpo K relativos a un subcuerpo F de K.

De este modo, $\varphi_n(x) \in F[x]$. En particular, para el caso $F = \mathbb{Q}$, $\Phi_n(x) \in \mathbb{Q}[x]$ y se puede demostrar que $\Phi_n(x)$ es irreductible sobre $\mathbb{Q}[x]$. En este contexto, si w es una raíz n-ésima primitiva de la unidad, se puede considerar el caso de las extensiones del cuerpo $\mathbb{Q}$ obtenido mediante la agregación o adjunción a $\mathbb{Q}$ de algunas raíces de la unidad, y de esta manera se obtiene $\mathbb{Q}[w]$ que es el cuerpo de descomposición de $x^n - 1$ sobre $\mathbb{Q}$. En otras palabras, $\mathbb{Q}[w]$ es el cuerpo ciclotómico obtenido por adjunción a los racionales de raíces primitivas de la unidad.

A manera de ejemplo que sintetiza y muestra la articulación de las ecuaciones ciclotómicas con los orígenes de la estructura de grupo, se tiene el siguiente teorema de la teoría de grupos:

El grupo de Galois de la n-ésima extensión ciclotómica de $\mathbb{Q}$ tiene φ(n) elementos y es isomorfo al grupo formado por los enteros positivos menores que n y primos relativos con n bajo la multiplicación módulo n.

Como una consecuencia de ese teorema, se tiene que el grupo de Galois de la p-ésima extensión ciclotómica de $\mathbb{Q}$ para un primo p, es cíclico de orden $p - 1$ (Fraleigh, 1988).

Como se puede observar, las subsecciones 2.6 y 2.7, dan cuenta de los aportes del algebra al surgimiento de la estructura de grupo.

2.9 El rol de las Nuevas Álgebras

Hacia el año de 1843, Hamilton al tener que vulnerar la propiedad conmutativa de la multiplicación para alcanzar su objetivo de los cuaterniones, abrió las puertas a nuevas álgebras, cuyo desarrollo se iniciaría en el siglo XIX, como es el caso de las álgebras lineales asociativas de Peirce, resultado este correspondiente a un nuevo avance hacía la *estructura general* de las álgebras, donde se establecen los conceptos de elementos *nilpotentes* e *idempotentes*; estudio que inició el autor en 1864, pero sólo se publicó en 1881, justo un año después de su muerte.

El desarrollo de las nuevas álgebras, mantuvo durante el siglo XIX un rasgo común con las geometrías no euclidianas y también con el nuevo análisis, el cual hace referencia a la contribución de eliminar de las matemáticas conceptos intuitivos y hábitos mentales que aún permanecían arraigados, incluso, en mentalidades matemáticas, como sucedió con Möbius, de quién se dijo que "pasó al lado de los cuaterniones sin verlos", por el hecho de haber rechazado los números hipercomplejos, al considerar que no satisfacían la propiedad conmutativa de la multiplicación.

Las nuevas maneras de abordar el concepto de número, en el contexto de las congruencias y de los cuaterniones, y la obra de Galois sobre la teoría de las ecuaciones algebraicas, señalaron el rumbo de una concepción general hacia la estructura matemática, la cual reveló y abrió horizontes impensados en el ámbito de las matemáticas.

Cabe destacar que, Galois apoyado en los aportes de Lagrange, Gauss, Cauchy y Abel, entre los más notables, analizó ciertas "agrupaciones" o "grupos" de permutaciones; términos entendidos como "agregados" o "colecciones". En efecto, estudió las propiedades de ciertos "subgrupos" que permanecían invariantes bajo ciertas transformaciones, a partir de lo cual, le fue posible demostrar la imposibilidad de la resolución de ecuaciones de grado mayor que cuatro (4) por medio de radicales (Vasco, 1991), tal como lo había establecido Abel en 1822, quien concluyó, en forma definitiva, que la ecuación algebraica general de quinto grado no es resoluble por radicales; es decir, Abel demostró que no existe una fórmula que permita expresar las soluciones de tales ecuaciones en términos de un número finito de operaciones algebraicas (Blázquez-Sanz, 2008: 84).

De esta forma, Galois marcó el punto de quiebre en la historia del álgebra, a partir del cual, el problema principal de investigación deja de ser la resolución de ecuaciones con los métodos tradicionales, para encaminarse al estudio de *estructuras abstractas.* Por esta razón, Galois es considerado el fundador, tanto de la *teoría de grupos* como del *álgebra abstracta en general*. No obstante, es pertinente precisar que el aporte de Galois a la formación de la noción de grupo, fue absolutamente práctico, que no se parece en nada a una teoría axiomática (Blázquez-Sanz David, 2008: 84).

El estudio de los "grupos" de permutaciones, tanto de números como de símbolos, se desarrolló durante todo el siglo XIX, y "sólo al final, en los trabajos de Van Dyck (1982); Netto (1982) y H. Weber (1982), se llegó a formular en abstracto la estructura de esos grupos, y a proponer los axiomas mínimos que deberían cumplir esos sistemas de transformaciones" (Wüssing, 1984; Van der Waerden, 1985).

No cabe duda que el álgebra es la parte de las matemáticas donde la noción de *estructura* se constituyó en un término familiar desde hace mucho tiempo, y también, que el prototipo de estructura algebraica más simple, es la estructura de grupo.

2.10 Sobre el Álgebra Moderna

Lo que se ha denominado *álgebra moderna*, es más bien el nombre programático con el cual se identifica la nueva tendencia orientada al estudio de estructuras algebraicas de grupo, anillo, módulo, cuerpo e ideal, entre otras, y ha llegado a constituir un enfoque apropiado para el desarrollo del álgebra, a pesar de haber tenido gran resistencia en sus comienzos.

En particular, la teoría de grupos no sólo ha dado fe de la importancia y fecundidad de los resultados obtenidos con la investigación en el álgebra moderna, sino que, desde el punto de vista histórico, ha constituido el primero y más temprano ejemplo del nacimiento y evolución de una estructura algebraica abstracta, hecho que Wussing (1984) lo destaca afirmando que ha sido la *partera del álgebra moderna*, y que es válido considerarla como un ejemplo metodológico del *pensamiento estructural-abstracto moderno*. Además, advierte que, a pesar de que el concepto de grupo surgió como grupo de permutaciones, asociado a los trabajos de Vandermonde, Lagrange, Gauss, Ruffini, Cauchy, Abel y Galois, principalmente, sobre la teoría de ecuaciones algebraicas, la vía de las permutaciones únicamente debe considerarse como una de las raíces históricas de la teoría de grupos, por cuanto existen, dentro de la literatura matemática del siglo XIX, documentos que aclaran ampliamente que la teoría de grupos tuvo tres raíces históricas, igualmente importantes, que son la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría, como se pretende documentar en esta investigación. De tal manera que, la teoría de grupos fue el resultado de un proceso gradual de abstracción de métodos y conceptos, “subyacentes de modo natural”, que implicaban la interacción de lo algebraico, lo aritmético y lo geométrico.

En realidad, el desarrollo de la noción de estructura algebraica y del relacionado enfoque estructural del álgebra, fue un proceso complejo cuyos orígenes pueden ser ubicados, por lo menos, hasta la mitad del siglo XIX, proceso que culminó en la nueva concepción disciplinaria del álgebra que representaba el libro “Moderne Algebra”, publicado en 1930 por el matemático Holandés Bartel Leendert van der Waerden; obra que marcó el comienzo de una nueva era introduciendo un cambio profundo en la concepción, tanto del alcance como de los fines de la investigación algebraica, que se caracterizaba porque, en ella, el foco de la disciplina, lo constituía el dominio del concepto de estructura algebraica (Corry, 1995).

CAPÍTULO 3.

Raíces de la estructura de grupo desde una perspectiva geométrica

CAPÍTULO 3.

RAÍCES DE LA ESTRUCTURA DE GRUPO DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA

No existe duda que en el siglo XVII, el surgimiento de la geometría analítica cartesiana constituyó una ruptura metodológica con la geometría clásica griega; no obstante, las primeras etapas que se orientaron a hacer a un lado el viejo punto de vista acerca de la naturaleza de la geometría, sólo tuvieron lugar a finales del siglo XVIII. También es claro que el álgebra y el análisis, antes que la geometría, fueron las disciplinas líderes en la superación de las visiones clásicas. Se presentaba así, un notable y sorprendente contraste: mientras los cambios fundamentales en geometría quedaron a la zaga, en el álgebra y en el análisis se desarrollaron explosivamente, tanto en extensión como en profundidad, hasta finales del Siglo XIX.

En geometría, la revolución empezó al finalizar el siglo XVIII, llegando a cambiar la milenaria tradición euclidiana, tanto en contenido como en método, y una vez abandonada la idea de una única geometría, el trabajo se orientó hacia la posibilidad de generalización y a la necesidad de una revisión crítica. De esta evolución se destacan ciertos aspectos que fueron origen o punto de partida de un modo de pensamiento implícito en geometría sobre teoría de grupos. Según Wussing (1984: 26-27), los aspectos más importantes, en este sentido, son cuatro:

La eliminación del lazo entre geometría y métrica, y el surgimiento del problema de la conexión entre geometría proyectiva y geometría métrica.

La extensión del concepto de coordenadas, más allá del tradicional: coordenadas cartesianas paralelas.

El desarrollo de las geometrías no euclidianas.

El giro hacia la abstracción por la introducción de un arbitrario, pero finito, número de dimensiones.

3.1 Aportes de la Geometría Proyectiva

Entre los logros obtenidos en el ámbito de la Geometría, en las últimas décadas del siglo XIX, se destaca el desarrollo de la Geometría Proyectiva (Klein, 1995: 331). Desde el punto de vista axiomático, para el estudio de la geometría elemental, en los cursos universitarios, se ha utilizado los Elementos de Euclides; geometría perfeccionada en cuanto a sus fundamentos, siguiendo la concepción de Hilbert y, a la vez, abierta a la posibilidad de muchas geometrías (Campos, 2003).

Justamente en los años 60 del siglo XX, Diudoné expuso de manera sistemática la Geometría Elemental, partiendo del Álgebra Lineal, con el propósito de llegar rápidamente a los teoremas importantes de la geometría (Campos, 2003). Vale mencionar que al construir la geometría sobre el álgebra, de manera explícita se contribuye, mediante estructuras, a la unificación de la misma, (Campos, 1975).

El extraordinario crecimiento de la geometría en el siglo XIX, provino directamente de la Revolución Industrial, al aumentar las exigencias sobre a la preparación matemática de los ingenieros; aspecto que llegó a ser dominante en la Escuela Politécnica de París, fundada de acuerdo con las exigencias de la Gran Revolución Francesa (Wussing, 1984).

La geometría descriptiva, creada por Monge, ejerció una fuerte influencia en las matemáticas de los gimnasios y universidades, y preparó el terreno para el desarrollo de la geometría. Dicho autor, al crear la geometría descriptiva, finalizando el siglo XVIII, introdujo en la Geometría las *consideraciones proyectivas*; ciencia que contiene una forma de representar y analizar objetos tridimensionales por medio de sus proyecciones sobre ciertos planos.

Según Eves, los trabajos de Desargues y de Poncelet, lo mismo que los de sus seguidores, condujeron a los geómetras a clasificar las propiedades geométricas en dos categorías: primera, las propiedades métricas, en las que intervienen las medidas de las distancias y de los ángulos; y la segunda, las propiedades descriptivas, en las que sólo se trata la relación de las posiciones de los elementos geométricos entre sí. Por ejemplo, el Teorema de Pitágoras es una propiedad métrica.

La *Geometría Proyectiva* es el estudio de las propiedades descriptivas de las figuras geométricas. Todas las propiedades de incidencia, exceptuando propiedades métricas especiales, son proyectivas (Eves, 1969: 273-274).

Cabe señalar que, tanto en la geometría elemental como en la geometría proyectiva, se encuentran manifestaciones de los principios de la teoría de grupos, que fueron elaborados por Sophus Lie y Félix Klein. En efecto, hoy se reconoce que una colección de transformaciones proyectivas constituye un grupo (Efimóv, 1978: 365).

Quien impulsó el resurgimiento real de la geometría proyectiva, fue Poncelet discípulo de Monge, especialmente, con la publicación en Paris, en el año de 1822, de su obra *Traité des propriétés proyectives des figures*, con la cual "dio un ímpetu tremendo al estudio del tema e inició el llamado gran período de la historia de la geometría proyectiva", en cuyo campo entraron muchos matemáticos, entre quienes se puede mencionar a Gergone, Brianchon, Chasles, Plücker, Steiner, Von Staudt, Reye y Cremona, figuras destacadas de la historia de la geometría y, en particular, de la historia de la geometría proyectiva (Eves, 1969: 273).

La obra de Poncelet y el desarrollo de la geometría proyectiva fueron realizaciones inmediatas del poderoso impulso impartido por Monge y la Escuela Politécnica. Monge planteaba el uso general de proyecciones ortogonales, en cambio, Poncelet planteaba que la principal herramienta era el concepto más general de una proyección central. Adicionalmente, introdujo la distinción fundamental entre propiedades proyectivas y no proyectivas de figuras; es decir, entre propiedades que son siempre preservadas por proyecciones centrales y propiedades que no se preservan por tales proyecciones.

3.2. La Teoría de los Invariantes en la Geometría

La teoría general de los invariantes, se desarrolló a mediados del siglo XIX como producto de los trabajos de Poncelet, Cayley, Sylvester, Jacobi, Hermite, Klebetz, Gordan, entre otros. Posteriormente, experimentó un renacimiento en algunos de los trabajos de Hilbert. También trabajaron en esta teoría, Nagata, Mumford, Haboush; la cual, en la actualidad, hace parte de la Geometría Algebraica y de la Teoría de grupos algebraicos. El interés permanente hacia la teoría de los invariantes está fundamentada en las amplias posibilidades de sus aplicaciones en distintos campos de la física y, en especial, de la mecánica.

Poncelet pudo anticipar la idea principal de posteriores desarrollos, considerando propiedades invariantes de figuras bajo proyecciones centrales, así como propiedades invariantes bajo otras proyecciones. El cambio de proyecciones sintéticas hacia el estudio analítico de transformaciones de coordenadas, investigando sus invariantes, hizo posible aplicar la teoría de los invariantes, relacionada con otras partes de las matemáticas, hacia la clasificación de objetos geométricos.

Ahora bien, “con la invariancia, íntimamente relacionada con el concepto de grupo, la teoría de los grupos en el siglo XIX transformó y unificó partes muy separadas de las matemáticas, revelando insospechadas analogías de estructura en diferentes teorías” (Bell, 2002: 244). Por éstas y otras razones, el concepto de invariancia ha sido considerado como un notable y elevado aporte del siglo XIX al desarrollo del pensamiento matemático.

La importancia de estas afirmaciones amerita hacer referencia a nociones que permiten mostrar las relaciones de la estructura de grupo con la teoría de los invariantes y que, al mismo tiempo posibilitan, percibir la trascendencia de estas relaciones en el estado actual de evolución de las teorías matemáticas modernas. En particular, Dieudonné, en la clasificación de las teorías matemáticas que hizo en su obra *Panorama de las matemáticas puras - la elección bourbakista*, en la sección correspondiente a los Problemas de clasificación, trata los grupos algebraicos lineales y la teoría de los invariantes como parte de la Geometría Algebraica.

Las mencionadas relaciones se pueden observar, por ejemplo, al estudiar el tema de los invariantes de grupos lineales, como se muestra en seguida:

Si V es un espacio vectorial de dimensión n sobre un cuerpo K, se simboliza $S(V)$ el grupo de todas las transformaciones biyectivas:

$$\varphi: V \to V.$$

El subgrupo de los operadores lineales inversibles en V, o grupo de auto morfismos del espacio V, se denota $GL(V)$. Para cualquier elección de la base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ en V, el grupo $GL(V)$ se convierte en un grupo matricial común $GL(n, K)$, donde $GL(n, K)$ es el conjunto de todas las matrices cuadradas, de orden *n*, con coeficientes en el cuerpo K y con determinantes distintos de cero.

El conjunto $GL(n, K)$ junto con la ley de composición u operación binaria: $(A, B) \to AB$ donde A y B son matrices cuadradas de orden *n*, se llama grupo lineal completo de potencia n sobre K y es uno de los llamados grupos clásicos. En estos términos se escribe:

$$GL(n, K) = \{A \in M_{n,n}(K)/A\ es\ invertible\}$$

Cualquier subgrupo en $GL(n, K)$ se llama habitualmente *grupo lineal de* grado n. Si G es un grupo, todo homomorfismo: $\phi: G \to GL(V)$ se llama representación lineal del grupo G en el espacio V. De la misma manera, $\phi: G \to GL(\mathrm{n}, \mathrm{K})$ es representación lineal del grupo G en el espacio vectorial de todas las matrices cuadradas, de orden n, con coeficientes en el cuerpo *K* y con determinantes distintos de cero.

Para los casos donde $K = \mathbb{Q}, K = \mathbb{R}\ o\ K = \mathbb{C}$, se habla de una representación racional, real o compleja, respectivamente, del grupo G.

La forma o polinomio homogéneo f , de grado m, que pertenece al espacio p_m, de formas de grado m, sobre el cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos y que queda inmóvil con la operación $\widetilde{\Phi}_g$ definida por:

$$(\widetilde{\Phi}_g f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(\Phi_{g^{-1}}(x_1), \Phi_{g^{-1}}(x_2), \dots, \Phi_{g^{-1}}(x_n))$$

es decir, $\widetilde{\Phi}_g f = f, \forall \mathrm{g} \in \mathrm{G}$ se llama *invariante entera* de grado *m* del grupo lineal (G, ϕ). Si *G* es un grupo abstracto y $\phi: G \rightarrow GL(\mathrm{n}, \mathbb{C})$ es su representación lineal, entonces, al par (G, ϕ) se lo denomina también grupo lineal.

Si la forma f es una función racional, entonces, se puede pasar al concepto de *invariante racional*. Se conoce también que cualquier conjunto $\{f_1, f_2, \dots, \}$ de invariantes del grupo lineal (G, ϕ) engendra en $C[x_1, x_2, \dots, x_n]$ el subanillo $C[f_1, fx_2, \dots,]$ de invariantes. Como un ejemplo "elemental" se tiene el caso de la forma cuadrática $x_1{}^2 + x_2{}^2 \dots + x_n{}^2$ y cualesquiera polinomios de ella, los cuales resultan invariantes enteros del grupo ortogonal *O*(*n*)[3].

Si w es una forma arbitraria de n variables independientes $x_1,\ x_2, \dots, x_n$, entonces el grupo finito G con representación lineal (G, ϕ), de grado n, opera como un *grupo de permutaciones* en el conjunto: $\Omega = \{\widetilde{\Phi}_g(W) / g \in \mathrm{G}\}$

La teoría de Galois, en gran medida, se vincula al estudio de invariantes de cuerpos y a sus grupos correspondientes, engendrados por las raíces de ecuaciones algebraicas. Uno de los teoremas importantes de la teoría de los invariantes establece que: un grupo lineal finito de grado n, siempre tiene un sistema de n invariantes algebraicamente independientes.

3.3. Acerca de la Geometría de la Posición

En el desarrollo de la geometría proyectiva, Poncelet y más tarde Möbius, Steiner y otros, utilizaron consideraciones métricas y la razón doble[4] en la definición de coordenadas proyectivas, manteniendo la dependencia métrica. Esta brecha fue cerrada

---

[3] El grupo ortogonal *O*(*n*) se define como: $O(n) = \{A \in \mathrm{Mn,n(R)}\ /\ A^t A = AA^t = E\}$

A^t: es la matriz *transpuesta* de A.

E: es la matriz *unidad.*

[4] Si A, B, C, D son cuatro puntos distintos de una recta ordinaria, se designa la relación de las razones (*AC*/*CB*) /(*AD*/*DB*) por el símbolo (*AB*, *CD*), y se llama *razón cruzada* ("cross ratio") (o *relación anarmónica*, o también *razón doble*) del intervalo de puntos A, B, C, D tomados en este orden. Es decir, *la razón doble* es la razón de dos cocientes y se demuestra que *la razón doble de cuatro puntos es invariante en la proyección*. En otras palabras, si A, B, C, D y *A′*, *B′*, *C′*, *D′* son puntos correspondientes de dos rectas relacionadas por proyección, entonces se verifica (*AC*/*CB*) /(*AD*/*DB*) = (*A′C′*/*C′B′*) /(*A′D′*/*D′B′*). La notación (AB, CD) fue introducida por Möbius en 1827.

con la aparición de las siguientes obras: *Geometría de la posición* (Geometrie der lage) y *Consideraciones sobre la geometría de la posición*, de autoría de Von Staudt, sucesor de Steiner y profesor en Erlängen, quien se interesó por la fundamentación de la geometría.

El autor Von Staud es considerado fundador de la geometría de posición pura, es decir, fundador de una geometría completamente libre de relaciones métricas. Se propuso desarrollar la geometría sin recurrir a los métodos analíticos, pero a diferencia de los anteriores, entendió que debía introducir las nociones proyectivas sin que intervinieran consideraciones métricas, e inició la reconstrucción geométrica con base en axiomas que hacían referencia, únicamente, a la posición o al orden de los elementos fundamentales.

Las investigaciones de Poncelet tenían como propósito constituir una doctrina geométrica general en la que intervendrían principalmente la *relación anarmónica* que se conserva en una trasformación proyectiva, los puntos imaginarios y el principio de continuidad. A su vez, con Charles y Steiner, después de constituida la doctrina proyectiva, surgieron dos ideas de gran relevancia; por una parte, la distinción entre propiedades métricas y propiedades descriptivas; y por otra parte, el papel de las transformaciones.

Poncelet, Chasles, Steiner y Von Staudt conocieron con nitidez la diferencia entre las propiedades proyectivas y las propiedades métricas, pero no llegaron a explicar las relaciones entre ellas. Más tarde, en 1853, Laguerre encaminado a establecer las propiedades métricas de la geometría euclídea, sobre la base de conceptos proyectivos, comenzó a desarrollar investigaciones relacionando la medida de un ángulo con la razón anarmónica de sus lados y de las dos rectas del mismo origen que unen su vértice a los puntos cíclicos. Las ideas de Laguerre fueron desarrolladas de manera independiente por Cayley, por lo cual, sus investigaciones generalizaron las de Laguerre.

Por ejemplo, la medida proyectiva fue definida claramente, en dos dimensiones, mediante la razón anarmónica de los cuatro puntos de una recta, de los cuales, dos son los extremos del segmento medio y los otros dos son los puntos de intersección de la recta con una cónica sometida a la transformación. En este caso, según Cayley, “la geometría métrica aparece como una parte de la geometría proyectiva”.

La base de la geometría de Steiner estaba constituida por la relación proyectiva entre las formas fundamentales en una dimensión. Por su parte, Von Staudt se propuso desarrollar esta relación de una manera puramente descriptiva; esto es, independiente del concepto de distancia. Antes de Von Staudt se utilizó en geometría los llamados elementos imaginarios, de los cuales sólo se sabía que no eran reales, tales como el punto en el infinito. Por su parte, Von Staudt intentó definirlos adecuadamente como elementos esenciales de la geometría proyectiva. Así, en su segunda obra, los definió como elementos dobles de involuciones elípticas y demostró que satisfacían los axiomas fundamentales.

Así pues, con su teoría, Von Staudt llegó a eliminar el concepto de longitud de la geometría proyectiva, y en el mismo sentido, las operaciones usuales de la aritmética se traducían en construcciones geométricas que operaban sobre las coordenadas de acuerdo con las leyes de la aritmética. De este modo construyó una parte importante de la geometría proyectiva clásica y la presentó como un tema independiente del concepto de distancia. Sin embargo, su obra fue objeto de análisis crítico, principalmente debido a que no aparecía en ella el postulado euclidiano de las paralelas y que la formulación del axioma de continuidad tenía imprecisiones.

Finalmente, Von Staudt resolvió excluir los imaginarios de la geometría y los reemplazó por infinidad de puntos reales, pareciéndose, al pensamiento matemático de Dedekind, en el sentido de recurrir a conjuntos infinitos para resolver un problema finito en aritmética, tal como ocurre, en el tema de los ideales.

3.4. Aportes de Félix Klein a la Teoría de Grupos

Hacia 1871, Klein presentó una definición no métrica de coordenadas proyectivas, basándose en la razón doble, que solventó la exigencia debida a consideraciones metodológicas de un desarrollo de esta temática, estrictamente proyectiva. Sería a partir de este punto de vista, o nueva forma de pensamiento, relacionado con la búsqueda e identificación de propiedades que permanecen invariantes bajo trasformaciones proyectivas, que Félix Klein llegaría a plantear su notable *Programa de Erlängen* de 1872, con el cual, se pudo clarificar la conexión entre geometría métrica y geometría proyectiva, lo mismo que hacer uso explícito de la teoría de grupos.

En realidad, Klein logró la unificación de las diversas geometrías por medio de la teoría de grupos. De hecho, en sus trabajos se pone de manifiesto la noción de grupo de transformaciones, tema que ha acompañado de forma implícita a la geometría, a través de su desarrollo histórico (Blázquez-Sanz, 2008: 83). Se destaca también los aportes que ese autor realizó a los trabajos de Von Staudt, entre los años1870 y 1874. Posterior a esto, los esfuerzos de los matemáticos se orientaron básicamente hacia la revisión de los principios y de la estructura en la geometría.

En el programa de Erlängen, Klein demostró cómo el concepto de grupo podía ser aplicado de manera conveniente en la caracterización de las diferentes geometrías elaboradas durante el siglo XIX. Este programa contiene ideas importantes provenientes de diversas fuentes. Tal es el caso de la noción de aplicación de una superficie sobre otra, de correspondencia entre conjuntos geométricos, así como la teoría general de los invariantes.

Retomando las ideas de Cayley acerca de la formulación de nociones métricas como las de ángulo y distancia entre dos puntos, en términos proyectivos, a partir de las relaciones entre las geometrías euclídea y proyectiva, Félix Klein se propuso generalizarlas de modo que incluyeran las geometrías no euclidianas.

El concepto de grupo de transformaciones, permitió a Félix Klein, elaborar una síntesis en la que propuso la definición de geometría como el estudio de las propiedades de un conjunto que permanecen invariantes cuando los elementos del mismo se someten a las transformaciones de un cierto grupo, también de transformaciones. A partir de estas ideas planteó un programa que constituía una concepción orgánica de la geometría con fundamento en una jerarquización de los grupos de transformaciones.

3.5. El surgimiento de las Geometrías no Euclidianas

Una etapa importante en la génesis del Programa de Erlängen corresponde al surgimiento de las geometrías no euclidianas, que no sólo dieron lugar al surgimiento de otras geometrías diferentes a la clásica de Euclides, sino también, en cuanto a las ideas que permitirían llegar a la matemática moderna. Las geometrías no euclidianas fueron el punto de partida de un análisis más profundo, tanto del método axiomático como de la relación de la geometría con el mundo exterior. Al parecer, fue Klein quien puso de manifiesto la naturaleza proyectiva de las geometrías no euclidianas que, por otra parte, en el caso de Lobachevski, hicieron posible la concepción del espacio como concepto a posteriori como resultado del movimiento de los cuerpos físicos, en oposición a la concepción Kantiana del espacio como noción a priori.

Al respecto, Wussing (1984), haciendo referencia al tema de la extensión del concepto de coordenadas, señala que el desarrollo de la geometría proyectiva en profundidad, estuvo estrechamente vinculado a descartar la visión tradicional que limitó el concepto de coordenadas al de coordenadas cartesianas paralelas. En realidad, para el surgimiento del punto de vista sobre la teoría de grupos, fue especialmente significativa la extensión del concepto de coordenadas de puntos más allá de la tradición euclidiana, que consideraba el punto como el elemento fundamental de toda la geometría.

Por su parte, Plücker, considerado el mayor especialista del enfoque algebraico de la geometría, en una memoria titulada *Sobre un nuevo sistema de coordenadas*, publicada en 1829, marcó una nueva etapa de la geometría con el concepto de sistema de coordenadas, el cual lo presentó en los siguientes términos: "Todo procedimiento particular para fijar la posición de un punto con respecto a puntos o líneas considerados como de posición conocida, corresponde a un sistema de coordenadas".

Hasta el momento de la citada publicación, Plücker había utilizado ampliamente las coordenadas cartesianas, pero justamente en dicha memoria, introdujo las nuevas coordenadas homogéneas y posteriormente las aplicó sistemáticamente al estudio de curvas en general. Tomó como referencia un triángulo y consideró como coordenadas de un punto cualquiera P las distancias perpendiculares desde P a los lados del triángulo, pudiendo multiplicar cada distancia por una misma constante arbitraria.

Al respecto, en Wussing (1984) se afirma que las coordenadas triangulares y las tetraedrales son esencialmente idénticas a las coordenadas baricéntricas de Möbius. De modo que, con tal sistema de coordenadas, la ecuación de una recta se escribiría: $ax + by + ct = 0$ donde x, y, t son las coordenadas trilineales de un punto cualquiera. La relación entre este tipo de coordenadas y las coordenadas cartesianas (X, Y) de un punto P está dada por las siguientes ecuaciones:

$$x = Xt \quad y = Yt$$

En particular, la terna $(x, y, 0)$, representa “un punto del infinito”, bajo la condición $x \neq y \neq 0$ y que, además, todos los puntos del infinito en el plano estén situados en la recta dada por la ecuación $t = 0$, llamada también “recta del infinito”.

Mediante la notación abreviada y las coordenadas homogéneas, Plücker pudo llegar analíticamente al *principio geométrico de dualidad*. Los parámetros (a, b, c) de la recta, en coordenadas homogéneas: $ax + by + ct = 0$ determinan una recta única en el plano, de la misma manera que las coordenadas homogéneas (x, y, t) corresponden a un punto único P del plano.

La idea de Plücker consistía en considerar *x*, *y*, *t* como constantes y tomar (a, b, c) como variables, con lo cual, la ecuación original determinaba una clase de rectas o un haz de rectas que pasan por un punto fijo (x, y, t) en lugar de un haz de puntos sobre una recta fija (a, b, c). De esta manera, de acuerdo con la interpretación antigua, la ecuación define una recta como un lugar de puntos; y según la nueva interpretación, define un punto como un lugar de rec*tas*. En consecuencia, la ecuación $pu + qv + rw = 0$, se podía considerar indiferentemente como el conjunto de puntos (u, v, w).

Adicionalmente, Plücker encontró lo que se podría llamar la contraparte analítica del principio geométrico de dualidad, que había sido examinado detalladamente por Poncelet y Gergone; pues, al sustituir en geometría pura, el punto en lugar de la recta y viceversa, se tendría el equivalente a intercambiar en álgebra, las expresiones constante y variable con respecto a la ecuación de una recta en coordenadas homogéneas. Consecuencia lógica de esta idea de Plücker, es que tanto el punto como la recta son elementos fundamentales para la geometría plana. Para el caso del espacio de tres dimensiones, los elementos fundamentales son el punto y el plano[5].

Hacia el año 1831, en el segundo tomo de una de sus obras sobre el desarrollo de la geometría analítica (*Analytisch–geometrische Entwicklungen*), hizo la precisión y generalización de los conceptos de ecuación, de coordenadas tangenciales y de clase de una curva. Observó que una misma curva se puede considerar como una colección de puntos o como una colección de rectas tangentes a la curva, porque según él, las tangentes determinan la forma de una curva tanto como los puntos. La familia de las tangentes es una curva de líneas y posee una ecuación en términos de coordenadas de líneas. La clase de la curva la hacía corresponder al grado de la ecuación, mientras que el grado de la ecuación, expresado en términos de coordenadas de puntos, lo denominó el orden de la curva.

Posteriormente, en sus obras *Sistema de geometría analítica* de 1835 y *Teoría de Las curvas Algebraicas* de 1839, desarrolló ampliamente el estudio y la clasificación de las curvas algebraicas utilizando como nuevo principio la enumeración de las constantes, basado en sus fórmulas duales que relacionan el orden, la clase y los números de los diferentes tipos de singularidades ordinarias de una curva de un género dado. Adicionalmente, Plücker realizó un análisis completo de todos los sistemas lineales posibles de coordenadas de punto en el espacio de tres dimensiones, expresado en términos de que, cada sistema de coordenadas planas está dado mediante ecuaciones lineales.

La notable obra de Plücker, que con la extensión del concepto de coordenadas dio una nueva orientación y contribuyó a la renovación de la geometría analítica, fue proseguida por Hesse, en Alemania, mediante los determinantes e, igualmente, aplicando la teoría de las formas algebraicas y la teoría de los invariantes, a la ordenación de los razonamientos de dicha geometría. De la misma manera, en Inglaterra Cayley y Salmon, continuaron en esta nueva dirección, para lo cual, utilizaron ampliamente los conceptos y procesos del álgebra lineal, y así, además de realizar trabajos sumamente originales, aportaron a la difusión de los nuevos métodos que el matemático italiano Chelini, enriqueció y extendió. Igualmente, Hesse, Cayley, Salmon, Jordan, Klein, Cremona, entre otros, al emprender la utilización de la teoría de las formas algebraicas y de los invariantes, posibilitaron el avance en el estudio de las curvas y de las superficies

---

[5] Por ejemplo, en geometría plana, si dos teoremas siguen siendo válidos cuando en ellos se intercambian las palabras punto y recta, entonces se dice que los dos teoremas son *duales*, es decir, que en ese caso se cumple el principio *geométrico de dualidad*. En particular, el teorema de Brianchon y el teorema del hexágono de Pascal forman un par de teoremas *duales*, en virtud de la transformación que hace corresponder al punto la recta y a la recta el punto (Eves, p. 80, 92).

algebraicas. También, como ya se ha dicho, Laguerre, Cayley y Klein, establecieron las propiedades métricas de la geometría euclídea mediante conceptos proyectivos.

En este orden de ideas, el desarrollo de la geometría después de Plücker comprendería una complejidad de trabajos relacionados con los comienzos de la geometría algebraica, con el surgimiento de la topología, con las geometrías en n dimensiones, así como con la geometría infinitesimal y diferencial, entre otros.

Cabe recordar que la teoría de grupos se desarrolló, en primer lugar, a nivel de teoría de grupos finitos de permutaciones, a raíz de la publicación que hizo Hermite de los manuscritos de Galois.

Por su parte, en el año 1870, Jordan publicó su Tratado de las sustituciones y de las ecuaciones algebraicas, en el que resumió y perfeccionó los trabajos de sus antecesores sobre propiedades especiales de los grupos de permutaciones y estudió también grupos particulares, los grupos lineales y sus subgrupos. Introdujo, además, la noción de representación de un grupo en otro y demostró parcialmente el denominado teorema de Jordan - Hölder.

Entre 1868 y 1869, Jordan emprendió el primer estudio importante de los grupos infinitos en su obra *Memoria sobre los grupos de movimientos*, en la cual estudió las traslaciones y las rotaciones, dando origen, a los estudios de las transformaciones geométricas por medio del concepto de grupo. Pero no se debe olvidar la advertencia que hace Wussing (1984), cuando afirma que el avance logrado por Cayley hacia 1854, orientado a la definición de grupo abstracto resultó históricamente prematuro, ya que no se habían desarrollado plenamente las condiciones para una apreciación favorable de una aproximación abstracta y formal.

Igualmente, mientras los grupos de permutaciones eran los únicos en investigación, no había interés en la generalización de dicho concepto, ni motivos para obrar en tal sentido. De modo que, los artículos de Cayley de 1854 no tuvieron impacto inmediato en la vía hacia la abstracción.

Con respecto a las investigaciones en geometría por el ordenamiento de los principios a través del examen de las relaciones geométricas, Wussing (1984) señala que en el estudio de tales relaciones, la geometría descriptiva y la geometría proyectiva, hicieron énfasis en aquellas relaciones entre figuras geométricas que estaban asociadas con formaciones particulares. Además, afirma, que Carnot en su *Géométrie de position* expresó este punto de vista, el cual se reflejaba en el principio fundamental del método de Carnot, que establecía que dos figuras geométricas, conectadas por una proyección, comparten un cuerpo de propiedades. No obstante, interesaba que tales propiedades compartidas fueran trasladadas a las transformaciones mismas, lo que implicaba especiales relaciones entre figuras. Este principio, que ya había sido aplicado tácitamente por Monge, se transformó en una tendencia que claramente tomó forma reconocible en el principio de continuidad de Poncelet, quien enfocó su uso sobre el problema de las transformaciones continuas, incluyendo, en todo caso, proyecciones centrales y, a partir del mismo, asignó estatus equivalente a dos figuras conectadas por una transformación continua. Así las cosas, el estudio de las relaciones geométricas entre figuras se convirtió en el estudio de las transformaciones asociadas.

Entre los años 1830 y 1870, las transformaciones se convirtieron en objeto de prolíficas investigaciones especializadas e independientes, que dieron origen a las teorías de transformaciones circulares, transformaciones esféricas, inversiones, afinidades, colineaciones, entre otras. Desde luego que, algunas de estas transformaciones no eran enteramente nuevas, por cuanto ya se había hecho uso desde el siglo XVI (Wussing, 1984).

A medida que se obtenían estos avances, el estudio de las relaciones geométricas entró gradualmente a una nueva fase, en la que se investigó las conexiones lógicas entre transformaciones. Esto condujo al problema de la clasificación de las transformaciones y hacia la síntesis "*grupo-teorética*" de la geometría. Es importante considerar, en este caso, los esfuerzos de clasificación de Möbius en geometría. Al respecto, Wussing (1984) observa que a pesar de que Möbius se había mantenido alejado de la comunidad matemática, sus investigaciones en geometría abarcaban todos los desarrollos de su tiempo en este campo, por lo que, en sus comienzos, su trabajo fue ignorado; pero más adelante, alcanzó la más alta consideración, cuando se reconoció que sus ideas, a pesar de haber sido desarrolladas silenciosa y aisladamente, anticiparon la posterior evolución de la geometría y aún del mismo Programa de Erlängen. Precisamente, Wussing (1984) destaca dos elementos del pensamiento geométrico de Möbius que dan testimonio de la lógica interna y la inevitabilidad del desarrollo matemático:

Significativa contribución a la eliminación del concepto tradicional de coordenadas.

Aunque sin tomar consciencia del concepto de grupo, condujo, como guiado por instinto, la organización grupo-teorética de la geometría que más tarde sería resuelta de manera clara en el Programa de Erlängen de 1872.

Según Wussing (1984), estos dos rasgos estaban presentes en su principal trabajo inicial sobre el cálculo baricéntrico. Además, sostiene que la actividad creativa de Möbius, en una segunda fase, estuvo dedicada principalmente a las matemáticas aplicadas en temas que comprendían sistemas de lentes, mecánica celeste, sistemas de cristales y equilibrio de fuerzas. Este último tema constituiría la base de su texto sobre Estática, hacia 1837. El gran interés por los problemas prácticos y las preguntas específicas relacionadas con los mismos, lo impulsaron a continuar en la investigación acerca de relaciones geométricas más amplias. En este sentido, se interesó por la generalización del tradicional concepto de adición.

Es pertinente recordar que a comienzos del siglo XIX, Argand, Wessel y Gauss, de forma independiente, introdujeron la representación geométrica de los números complejos, la cual no sólo hizo posible efectuar las operaciones fundamentales, realizando sencillas construcciones, sino que contribuyó a disipar la desconfianza y a clarificar las ideas sobre los que se consideraban números ficticios o irreales, es decir, imaginarios; y además, anunciaba el principio de una futura teoría científica rigurosa. En particular, la suma de números complejos se construyó, desde entonces, utilizando la llamada regla del paralelogramo para la suma de vectores.

Por su parte, Möbius pudo observar mediante esta regla, que la composición de fuerzas produce una fuerza, la composición de movimientos produce un movimiento. En estos términos, Wussing (1984) señala que la composición de operaciones sucesivas de una clase determinada, involucra el uso de una regla de composición, y la difícil tarea matemática, implícita en los precitados ejemplos físicos[6], consistía en expresar la regla de composición dentro de un cálculo apropiado. Lo difícil de esta tarea, advierte Wussing (1984), está ilustrado por lo esfuerzos extremos de Grassmann para entender la esencia de la adición de segmentos; esfuerzos que eventualmente condujeron al concepto de vector y al cálculo vectorial. Agrega, además, que el interés de Möbius en las matemáticas aplicadas lo condujo a varias reglas de composición, y así, entre los años 1838 y 1850, publicó varios trabajos sobre este tema.

Si bien estos trabajos promovieron el concepto de composición, en el sentido de que ellos ayudaron a crear un completo espectro de leyes de composición para una diversidad de operaciones, ellos hicieron muy poco, en forma directa, para preparar, lo que más tarde sería el concepto general de grupo; y menos aún, para llevar hacia adelante los métodos de la teoría de grupos. En ese tiempo, la composición de operaciones no pudo por sí misma inducir el concepto de grupo. Para Wussing (1984), lo que faltaba en este nivel de desarrollo de la geometría, era el reconocimiento del hecho de que una composición sobre un conjunto determina un subconjunto cerrado relativo a la composición, hecho que posteriormente resultó decisivo en el estudio de las permutaciones.

El problema de las reglas de composición dio origen a un nuevo período creativo de Möbius; quien a comienzos de 1853, publicó trabajos sobre transformaciones geométricas especiales. Dice Wussing, que luego siguieron numerosos artículos que versaban sobre involución de puntos y que, además, se ocupó de algunas transformaciones especiales. En estos trabajos, Möbius se propuso asignar su propio lugar a cada una de las geometrías asociadas con transformaciones particulares de congruencia, semejanza, afinidad y colineación. Adicionalmente, agrega Wussing

[6] Según Babini la *composición de fuerzas y velocidades*, relacionadas con el concepto de magnitud vectorial, era ya utilizada por los tratadistas de la Mecánica desde finales del siglo XVII, pero en aquellos tiempos no tuvo mayores repercusiones entre los matemáticos.

(1984), que por falta de recursos técnicos, tales intentos no llegaron a feliz término; sin embargo, ellos proporcionaron un amplio impulso a la síntesis conceptual del constructo de la geometría. Indica Wussing (1984) que Möbius a partir de 1858, se aventuró en un estudio de las llamadas “relaciones elementales”, más generales que las colineaciones, por lo que tales transformaciones, desde el punto de vista moderno, estarían más o menos cercanas a la topología.

3.6. Sobre las Leyes de Composición

Para definir una estructura en un conjunto se requiere introducir una ley de composición que relacione todos sus elementos; sin embargo, como lo señala Dieudonné (1988), fue muy difícil llegar a pensar en una operación en matemáticas, por tratarse de algo bastante abstracto, por la cual:

> […] los matemáticos tardaron un tiempo inverosímil en concebir esta idea y, a partir de esta concepción de la operación y luego, de la composición e inversión de operaciones, se llegó insensiblemente al concepto de grupo. Fueron todavía necesarios casi un centenar de años para que el concepto adquiera su verdadera naturaleza, es decir, que abandonara el origen fortuito de la operación, de la transformación, para que se convierta en una operación que se realiza sobre los objetos de un conjunto. Y ello fue motivo para una expansión prodigiosa de toda la matemática, porque progresivamente se cayó en la cuenta de que por todas partes existían grupos, desde la aritmética más abstracta hasta la teoría cuántica, la relatividad y todo el análisis, por no hablar de la geometría, etc.” (Dieudonné, 1988: 187).

Esto explica entonces, por qué el “descubrimiento” de un nuevo grupo, en una teoría matemática, constituye un gran avance en la misma y, por lo cual, los matemáticos buscan esta noción en todos los campos. Estas consideraciones se complementan con la multiplicación de segmentos que definió Descartes, las formas cuadráticas de Gauss, el tema de las permutaciones de Cauchy, y en particular, el caso de la Escuela Británica que entre los años 1830 y 1850, inspirada en la “consideración estrictamente formal de las operaciones” logró ampliar no solamente el concepto de dichas operaciones, sino también, hacerlo extensivo a los elementos entre los que podrían realizarse las mismas. Así también, esta Escuela, mediante un proceso de abstracción relacionado con el significado de la notación, pudo establecer el concepto de “*ley de composición*’ entre los elementos de un conjunto arbitrario. De esta manera, se llegó a comprender más tarde que en matemáticas no tiene importancia ni sentido considerar los objetos en sí, sino que lo fundamental son las relaciones que se pueden establecer entre tales objetos como elementos de los conjuntos a los cuales pertenecen y que dichas relaciones estructuran los conjuntos mediante leyes de composición.

Como bien señala Stewart, la tendencia creciente *a la abstracción y a la generalidad*, que siempre marchan juntas, se ha constituido en uno de los aspectos más notables de las matemáticas modernas, por cuanto, a esto se debe la ventaja de la llamada por Bourbaki “*economía de pensamiento*”, ya que, por ejemplo, evita demostrar varias veces un mismo teorema que se puede presentar bajo apariencias diferentes, siendo suficiente “demostrarlo una sola vez dentro de un marco general”. Además, Stewart afirma que cada concepto fundamental de la matemática moderna abarca una multitud de objetos diversos, los cuales poseen una propiedad en común cuyas consecuencias se desarrollan en una teoría abstracta. Por ejemplo, tratándose de la teoría de grupos, el *concepto de grupo* se aplica a los desplazamientos rígidos en el espacio, a las simetrías de figuras geométricas, a la estructura aditiva del conjunto de los números enteros, y a la deformación de curvas en un espacio topológico. La propiedad en común para todos estos casos, es simplemente la posibilidad de combinar dos elementos de un conjunto para obtener otro elemento del mismo conjunto. (Stewart, 1977:12-13).

Como lo sostiene Babini, es claro que la noción abstracta de ley de composición, al ser aplicada a los nuevos objetos de la matemática moderna amplió considerablemente el campo del álgebra; esta noción se originó en el proceso de creación de sucesivas extensiones del concepto de número. Igualmente, la generalidad y el campo de aplicaciones de los métodos algebraico–literales fueron determinados por la generalidad del concepto de número. Esta metodología de la generalización y de la abstracción, tuvo como culminación en el siglo XIX, la noción de estructura que se constituyó en el más significativo aporte “de todas las tentativas sucesivas para ampliar el concepto de número” (Bell, 2002: 197). Asimismo, el interés en la noción abstracta de estructura y el surgimiento de nuevas álgebras que se dio durante la segunda mitad del siglo XIX, hizo posible llegar a “amplias generalizaciones en el campo de los números y su aritmética” (Boyer, 1986: 732).

Finalmente, la estructura de grupo en geometría, ha estado presente en movimientos, formas y colores, números y juegos con palabras, pero sólo cuando se toma conciencia que surgen las mismas estructuras de un juego de movimientos, de otro juego con piezas de diferentes colores y formas, de otro con números y, por último, de otro con lenguajes artificiales, es cuando resultó ser clara la presencia de esta estructura, lo mismo que su naturaleza abstracta (Dienes & Golding, 1973).

En síntesis, los conceptos de *generalización, abstracción, ampliaciones y extensiones en el campo de los números* y, otras, como *libertad de creación en matemáticas*, que culminaron en la *noción de estructura*, ponen en evidencia la pertinencia e importancia de la revisión histórico-epistemológica del proceso de *formación de la noción abstracta de estructura algebraica*, y en particular, de la estructura de grupo, objeto de esta investigación, que tal como se lo ha presentado en este escrito, tiene tres orígenes, a saber: la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría.

3.7. Sobre las Transformaciones Geométricas y la Axiomatización de la Geometría

Cualquier número de transformaciones de un espacio, al componerlas generan nuevamente una transformación; tales transformaciones afectan simultáneamente la totalidad del espacio. Si una cierta colección de transformaciones, tiene la propiedad de que cada transformación que se obtenga de la composición de ellas pertenece nuevamente a tal colección, entonces, dicha colección se llama grupo de transformaciones (Klein, 1995: 333).

Las cuestiones de fundamentos de la Geometría ocuparon el pensamiento de Hilbert durante mucho tiempo. Para entender la concepción axiomática de Hilbert, es necesario explicar el trasfondo histórico de su interés en este tipo de problemas matemáticos. En efecto, en 1882, Moritz Pasch (1843-1930) publicó su libro *Lecciones de Geometría Nueva,* en el cual presentó un tratamiento axiomático de la Geometría proyectiva, que atrajo la atención de muchos matemáticos hacia finales del siglo XIX, entre quienes, se destacan August Ferdinand, Moebius (1790-1868), Jakob Steiner (1796-1863) y Christan von Staudt (1798-1867), que habían intentado elucidar la relación entre la geometría euclídea y la proyectiva (Klein, 1995: 303).

Por su parte, Félix Klein, con base en ideas desarrolladas por Arthur Cayley, y consciente de la condición de independencia del axioma de las paralelas, reformuló el problema básico en términos de independencia axiomática, señalando que la geometría proyectiva debería ser axiomáticamente definida, de manera tal que las distintas geometrías métricas puedan ser derivadas de aquella, por adición de nuevos axiomas.

Ahora bien, a pesar de que Klein no tuvo gran éxito en la implementación de estas ideas, sirvieron de base para trabajos posteriores como el de Pasch, en donde la reconstrucción axiomática es tal que, una vez formulados los axiomas, los demás resultados de la geometría proyectiva deben ser derivados de manera estrictamente lógica, sin recurrir a la intuición espacial, ni a diagramas, ni a las propiedades de las figuras consideradas. Sin embargo, Pasch consideraba que "la Geometría debe ser vista como parte de las Ciencias Naturales, cuyas verdades se refieren al mundo exterior" (Klein, 1995: 303).

De acuerdo con esta concepción, los axiomas expresarían verdades empíricas básicas, derivadas directamente de la experiencia. Además, mientras la derivación de teoremas es puramente lógica, el significado mismo de los axiomas es netamente geométrico y no se puede entender sin ayuda de los diagramas de los que se derivan (Klein, 1995: 304).

Hilbert conoció a fondo la obra Pasch y los consecuentes desarrollos posteriores; sobre la geometría proyectiva estudió con detalle la obra de Pasch, reconoció el inmenso valor de su tratamiento axiomático, pero a la vez, identificó algunas de sus limitaciones. Con claridad percibió que el hecho de establecer un número mínimo en el sistema de suposiciones, del cual se podría derivar toda la geometría, no había sido realizado completamente hasta ese momento. En efecto, el proceso mismo de la axiomatización es el que transforma a la geometría, con su contenido empírico, en una ciencia matemática pura (Klein, 1995: 307).

CONCLUSIONES

La tendencia a la unificación de la matemática, ligada al surgimiento y a la evolución de las estructuras, llegó a constituirse en una de las características de la matemática moderna y ha prevalecido hasta la época actual; tuvo como antecedentes ciertos momentos importantes que podrían interpretarse como intentos de gestación y manifestación de la tendencia de pensamiento que propendía por la unidad de la matemática; tal es el caso de la apuesta de la escuela pitagórica, expresada en su insignia fundamental "todas las cosas son número".

La unidad de la matemática como característica de la matemática moderna, alcanzó mucha importancia que se constituyó en insignia de la corriente del pensamiento matemático estructuralista, que se desarrolló a partir de la metodología de la generalización y de la abstracción, proceso que llegó a su punto prominente a finales del siglo XIX, con la consolidación de la noción de estructura de grupo. Sin duda, el álgebra es la parte de las matemáticas donde la noción de estructura se constituyó en un término familiar desde hace bastante tiempo, y que la estructura de grupo, es el prototipo de estructura algebraica más simple.

En su momento, Descartes consideró que había creado una ciencia única, al enlazar en la geometría analítica, los métodos del álgebra y la geometría euclidiana, partiendo de la idea de elegir los segmentos como forma general de las magnitudes geométricas, con la idea de introducir las operaciones aritméticas en la geometría, con el principio que la multiplicación tendría la propiedad clausurativa. En este sentido, introdujo un segmento unidad y la construcción de la cuarta magnitud proporcional, donde se advierte, muy tempranamente, la operación en términos de lo que hoy se conoce como ley de composición interna; hecho que daría lugar a una prefiguración implícita de estructura algebraica entre los segmentos. Esto es similar a lo que haría Gauss, más de un siglo después, con la composición de formas cuadráticas.

Por otra parte, el surgimiento de la geometría analítica cartesiana en el siglo XVII, constituyó una ruptura metodológica con la geometría clásica griega; sin embargo, las primeras etapas fundamentales que se orientaron a dejar al margen el antiguo punto de vista sobre la naturaleza de la geometría, tuvieron lugar, apenas, hacia finales del siglo XVIII, con lo cual, se cambió la milenaria tradición euclidiana, tanto en contenido como en método. Una vez abandonada la idea de una única geometría, el trabajo se orientó hacia la posibilidad de generalización y hacia la necesidad de una revisión crítica; opciones que marcaron el punto de partida de un modo de pensamiento sobre teoría de grupos, implícito en geometría.

El desarrollo de la noción de estructura algebraica y del concomitante enfoque estructural del álgebra, fue un proceso complejo cuyos orígenes pueden ser ubicados, al menos, hasta la mitad del siglo XIX; proceso que culminó en la nueva concepción disciplinaria del álgebra que representaba el libro *Moderne Algebra*, publicado en 1930 por el matemático Holandés Bartel Leendert van der Waerden. Esta obra marcó el comienzo de una nueva era introduciendo un cambio profundo en la concepción, tanto del alcance como de los fines de la investigación algebraica, caracterizada porque el foco de la disciplina lo constituía el dominio del concepto de estructura algebraica.

El trabajo científico sobre la teoría general de las ecuaciones y la acumulación de procedimientos para su resolución, condujo, al mismo tiempo, a la reestructuración de los fundamentos del álgebra, ligada con la ampliación del concepto de número, con los procedimientos del cálculo aritmético, con la teoría de números y con el perfeccionamiento del aparato algebraico simbólico-literal. A partir del desarrollo de estos aspectos, que en esencia determinaban el contenido y el objeto del álgebra de finales del siglo XVIII, se requirió, y a la vez, fue posible avanzar al tratamiento de problemas cualitativamente nuevos, los cuales estarían relacionados con el surgimiento posterior de la teoría de Galois y de la teoría de grupos. Bajo la denominación de “aritmética universal o general”, tales problemas eran los temas que constituían una ciencia única, que ocupó el centro de atención de sobresalientes matemáticos de la época, principalmente, en el marco de la *Aritmética Universal* de Newton, publicada en 1707.

Luego aparecieron otras producciones que consistían en una construcción sistemática del álgebra, entre ellas está la obra de Euler “Aritmética Universal”, publicada en 1767, donde se destaca el álgebra como ciencia independiente. Esta obra ejerció mucha influencia en la identificación de la problemática científica del álgebra y en la estructuración de los cursos universitarios sobre esta materia; fue traducida a varios idiomas. Su contenido es muy variado, desde la teoría general y los métodos de resolución de ecuaciones algebraicas, sistemas de ecuaciones lineales, métodos de búsqueda de soluciones enteras de las ecuaciones de primer grado y de grados superiores; como también, temas de teoría de números.

El contenido principal del álgebra del siglo XVIII está constituido por temas referidos a la resolución de ecuaciones. Los matemáticos realizaron grandes esfuerzos encaminados a solucionar el problema de resolución de ecuaciones, tema central para el álgebra de esa época, fruto de lo cual surgió una gran cantidad de trabajos que se conocieron a través de numerosas publicaciones. Entre las rutas que guiaron tales esfuerzos, se destaca la de buscar un algoritmo algebraico, tal como el método de Tartaglia - Cardano, para encontrar la solución de la ecuación cúbica; y el de Ferrari, para la ecuación de cuarto grado; que fuera válido para resolver las ecuaciones de grado mayor que tres. Entre los variados muchos intentos que se realizaron esta vía, se encuentran los trabajos de Tschirnhaus, Euler y Waring, que no resultaron efectivos, ya que, en el fondo, los matemáticos no disponían de recursos algebraicos suficientes para resolver el problema.

A principios del siglo XIX, se originó una tendencia firme hacia una abstracción y una generalidad, que a mediados de dicho siglo, el cambio en su esencia era muy profundo que sus resultados eran irreconocibles, incluso para los matemáticos más sobresalientes del siglo XVIII; y a pesar de que, con excepción de las mentalidades creadoras, el antiguo punto de vista se mantenía, las matemáticas tuvieron su mejor momento en vía a la abstracción y la generalización, orientadas hacia la creación de métodos universales, que como antecedentes tuvieron muchos aportes, entre los cuales están los trabajos de Lagrange. Se generó así, el mencionado proceso de la metodología de la generalización y de la abstracción, que finalizaría en la noción de estructura, concepto que se constituye en la contribución de mayor importancia para ampliar el concepto de número.

Como bien lo señala Stewart, la tendencia creciente a la abstracción y a la generalidad, que marchan juntas siempre, se ha constituido en uno de los aspectos más notables de las matemáticas modernas, puesto que, a esto se debe la llamada por Bourbaki "economía de pensamiento"; ya que, por ejemplo, evita demostrar varias veces un mismo teorema que, en apariencia pude parecer diferente, siendo suficiente "demostrarlo una sola vez dentro de un marco general". También afirma Stewart, que cada concepto fundamental de la matemática moderna abarca una multitud de objetos diversos, los cuales poseen una propiedad en común, cuyas consecuencias se desarrollan en una teoría abstracta. Por ejemplo, tratándose de la teoría de grupos, el concepto de grupo se aplica a los desplazamientos rígidos en el espacio, a las simetrías de figuras geométricas, a la estructura aditiva del conjunto de los números enteros, y a la deformación de curvas en un espacio topológico. La propiedad en común, para todos estos casos, es simplemente la posibilidad de combinar dos elementos de un conjunto para obtener otro elemento del mismo conjunto. (Stewart, 1977: 12-13).

Es muy importante destacar que, al construir la geometría sobre el álgebra, se contribuye de manera explícita a la unificación de la misma, mediante estructuras. Justamente en los años 60 del siglo XX, Diudoné expuso de manera sistemática la Geometría Elemental partiendo del Álgebra Lineal. Vale mencionar que, tanto en la geometría elemental como en la geometría proyectiva, se encuentran manifestaciones de los principios de la teoría de grupos.

Hacia 1871, Klein presentó una definición no métrica de coordenadas proyectivas, basándose en la razón doble, que solventó la exigencia debida a consideraciones metodológicas de un desarrollo de esta temática, estrictamente proyectiva. Fue a partir de este punto de vista, o nueva forma de pensamiento, relacionado con la búsqueda e identificación de propiedades que permanecen invariantes bajo trasformaciones proyectivas, que Félix Klein llega a plantear su notable Programa de Erlängen de 1872, con el cual, se pudo clarificar la conexión interna entre geometría métrica y geometría proyectiva, lo mismo que hacer uso explícito de la teoría de grupos. En realidad, *Klein logró la unificación de las diversas geometrías por medio de la teoría de grupos.* De hecho, en sus trabajos, se pone de manifiesto la noción de grupo de transformaciones que ha acompañado de forma implícita a la geometría, a través de su desarrollo histórico (Blázquez-Sanz, 2008: 83).

El concepto de grupo de transformaciones permitió a Félix Klein, elaborar una síntesis en la que propuso la definición de geometría como el estudio de aquellas propiedades de un conjunto que permanecen invariantes cuando los elementos del mismo se someten a las transformaciones de un cierto grupo, también de transformaciones. A partir de estas ideas planteó un programa que constituía una concepción orgánica de la geometría con fundamento en una jerarquización de los grupos de transformaciones.

Merece recordar que la teoría de grupos se desarrolló inicialmente a nivel de teoría de grupos finitos de permutaciones, a raíz de la publicación que hizo Hermite de los manuscritos de Galois. En 1870, Jordan publicó su *Tratado de las sustituciones y de las ecuaciones algebraicas*, en el cual, resumió y perfeccionó los trabajos de sus antecesores sobre propiedades especiales de los grupos de permutaciones, y también estudió otros grupos particulares, los grupos lineales y sus subgrupos.

Por otra parte, hoy se conoce que *estructurar un conjunto* consiste en definir en él una *estructura*, para lo cual se requiere introducir una *ley de composición* que relacione todos sus elementos. No obstante, como lo señala Dieudonné, fue muy difícil llegar a pensar en una operación en matemáticas, por tratarse de algo bastante abstracto, razón por la cual:

[…] los matemáticos tardaron un tiempo inverosímil en concebir esta idea y, a partir de esta concepción de la operación y luego, de la composición e inversión de operaciones, se llegó insensiblemente al concepto de grupo. Fueron todavía necesarios casi un centenar de años para que el concepto adquiera su verdadera naturaleza, es decir, que abandonara el origen fortuito de la operación, de la transformación, para que se convierta en una operación que se realiza sobre los objetos de un conjunto. Y ello fue motivo para una expansión prodigiosa de toda la matemática, porque progresivamente se cayó en la cuenta de que por todas partes existían grupos, desde la aritmética más abstracta hasta la teoría cuántica, la relatividad y todo el análisis, por no hablar de la geometría…" (Dieudonné, 1988: 187).

Entonces, esto explica por qué el "descubrimiento" de un nuevo grupo, en una teoría matemática, constituye un gran avance en la misma y, por consiguiente, por qué los matemáticos buscan esta noción en todos los campos.

Es claro, por lo tanto, tal como sostiene Babini, que la noción abstracta de ley de composición, que al ser aplicada a los nuevos objetos de la matemática moderna amplió considerablemente el campo del álgebra y que se originó en el proceso de creación de sucesivas extensiones del concepto de número. Así mismo, se puede decir que la generalidad y el campo de aplicaciones de los métodos algebraico–literales fueron determinados por la generalidad del concepto de número. La metodología de la generalización y de la abstracción, tuvo como culminación, en el siglo XIX, la noción de estructura que, como se dijo, constituyó el más significativo aporte "de todas las tentativas sucesivas para ampliar el concepto de número" (Bell, 2002: 197). Igualmente, el interés en la noción abstracta de estructura y el surgimiento de nuevas álgebras que se dio durante la segunda mitad del siglo XIX, hizo posible llegar a "amplias generalizaciones en el campo de los números y su aritmética" (Boyer, 1986: 732).

Finalmente, se sostiene que a pesar de que el concepto de grupo surgió como grupo de permutaciones asociado a los trabajos de Vandermonde, Lagrange, Gauss, Ruffini, Cauchy, Abel y Galois, principalmente, relacionados con la teoría de ecuaciones algebraicas, la vía de las permutaciones únicamente debe considerarse una de las raíces históricas de la teoría de grupos, por cuanto existen, dentro de la literatura matemática del siglo XIX, documentos que esclarecen ampliamente que la teoría de grupos tuvo tres raíces históricas, igualmente importantes, a saber: la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números y la geometría. Así pues, la teoría de grupos fue el resultado de un proceso gradual de abstracción de métodos y conceptos, subyacentes de modo natural, que incluían la interacción de lo algebraico, lo aritmético y lo geométrico.

REFERENCIAS

Bell, E. T. (2003). *Historia de las matemáticas*. México, D. F.: Fondo de Cultura Económica.

Blázquez-Sanz, D. (2008). La evolución de la teoría de grupos en las ecuaciones diferenciales. En: *Lecturas Matemáticas*, Vol. 29, No. 2. Bogotá: Universidad de los Andes.

Bourbaki, N. (1962). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

Campos, A. (1994). *Axiomática y geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki*. Bogotá, D.C., Colombia: Universidad Nacional.

Campos, A. (2003). Geometría a partir de Álgebra Lineal: camino real para la geometría. En: *Notas de Clase*, Facultad de Ciencias, Bogotá: Universidad Nacional.

Campos, A. (1975). Geometría. En: *Notas para el V Coloquio colombiano de matemáticas*. Medellín: Universidad Nacional.

Collette, JP. (1986). *Historia de las matemáticas*. Vol. II. México: Editorial Siglo XXI.

Corry, L. (1995). Axiomática y álgebra estructural en la Obra de David Hilbert. En: *Mathesis*, Vol. 11, No. 4, pp.291-329. Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México.

Dienes, Z. & Golding, W. (1973). *La Geometría a través de las transformaciones. Barcelona*: editorial Teide. Segunda edición.

Dieudonné, J. (1988). Matemáticas vacías y matemáticas significativas. En R. Apéry, & otros (Eds.) *Pensar las Matemáticas*, (p. 187). Barcelona: Tusquets Editores.

Dieudonné, J. (1989). *En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy*. Madrid: Alianza Editorial.

Efimóv, N.V. (1978). *Geometría superior*. Moscú: Mir. Trad. 1984)

Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías*. México: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Falk, M. (2013). *Pensamiento Matemático del siglo XX*. Segunda Parte: estructuralismo. Bogotá: Fondo Editorial: Universidad Antonio Nariño.

Fraleigh, J. (1988). Álgebra abstracta. México: Addison-Wesley Iberoamericana

Gauss, C. (1995). *Disquisitiones arithmeticae*. Bogotá: Editora Guadalupe, Ltda.

Klein, F. (1995). *Consideraciones comparativas sobre nuevas investigaciones geométricas.* México: Mathesis, Vol. XI, pp. 331-370.

Kline, M. (1992). *El pensamiento Matemático de la Antigüedad a nuestros días*, vol. III, Madrid: Alianza Universidad.

Ortega, V.E. (2011). Formación de la Noción Abstracta de Estructura Algebraica, a partir del estudio histórico–epistemológico de los aportes de Cantor y Dedekind. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Maestría en Educación, Énfasis en Educación Matemática. Santiago de Cali, Colombia. Tesis no publicada.

Piaget & García (1982). *Psicogénesis e historia de las Ciencias*. México: Editorial Siglo XXI.

Ríbnikov, K. (1974). *Historia de las matemáticas*. Moscú: Editorial Mir.

Sánchez, C. H. (1994). *Los tres famosos problemas de la geometría griega y su historia en Colombia*. Bogotá, D.C., Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Stewart, J. (1977). *Conceptos de matemática moderna*. Madrid: Alianza Editorial.

Van der Waerden, B. (1985). *A History of Algebra*. Berlin: Springer-Verlag.

Vasco, E. (1991). Conjuntos, Estructuras y Sistemas. En *Revista de la academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*. Vol. XVIII. pp. 211- 223.

Wussing, H. (1998). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.

Wussing, H. (1984). *The genesis of the abstract group concept*. Londres: The MIT Press.

ACERCA DE LOS AUTORES

Vicente Erdulfo Ortega Patiño.

Magister en Educación énfasis en Educción Matemática, Universidad del Valle; Especialista en Matemáticas Avanzadas, Universidad Nacional de Colombia; Licenciado en Educación especialidad Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Docente Tiempo Completo en la categoría Asociado, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño.

veortegap@hotmail.com.

Segundo Javier Caicedo-Zambrano.

Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima; Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga; Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana; Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño; Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño; Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Docente Tiempo Completo en la categoría Asociado, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño.

jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co.

Editorial
Universidad de **Nariño**

El proceso de Formación del concepto de Estructura de Grupo

Un enfoque histórico epistemológico

Se presentan argumentos, en una perspectiva histórico epistemológica, orientados a esclarecer que el proceso para la formación de la noción abstracta de estructura de grupo, tuvo tres raíces, a saber: la teoría de ecuaciones algebraicas, la teoría de números, y la geometría; y que, a partir de ellos, surgió la noción de estructura de grupo y de estructura matemática, como resultado de la toma de conciencia de profundos fenómenos de isomorfismos. Se muestra que, antes de llegar al punto de consolidación del concepto de estructura de grupo, basado en la axiomática, los matemáticos, sin saberlo, utilizaron el concepto de ley de composición interna, que fue teorizado a través de la metodología de la axiomatización. La obra está organizada en tres capítulos.

En el capítulo 1, Raíces de la Estructura de Grupo desde una Perspectiva Aritmética, se refiere el proceso de ampliación y generalización del concepto de número.

En el capítulo 2, Raíces de la Estructura de Grupo desde una Perspectiva Algebraica, se evidencia cómo en el siglo XVIII, los problemas que impulsaron el desarrollo del álgebra tenían que ver con el tema de la teoría de ecuaciones algebraicas, la cual, incluía no sólo la formación de la teoría general de las ecuaciones, sino también, la acumulación de procedimientos para su resolución.

En el capítulo 3, Raíces de la Estructura de Grupo desde una Perspectiva Geométrica, se muestra que el surgimiento de la Geometría Analítica Cartesiana en el siglo XVII, constituyó una ruptura metodológica con la geometría clásica griega.

Finalmente, se puede afirmar que, el surgimiento de la geometría analítica cartesiana en el siglo XVII, constituyó una ruptura metodológica con la geometría clásica griega, por cuanto, el ingenioso ingreso del segmento unidad, que hizo posible la redefinición del producto de segmentos, con la propiedad de cerradura o clausura, dio paso a la estructura algebraica para las operaciones entre magnitudes geométricas. Sin embargo, las primeras etapas, que se orientaron a dejar al margen el antiguo punto de vista sobre la naturaleza de la geometría, tuvieron lugar, apenas, hacia finales del siglo XVIII, con lo cual, se cambió la tradición euclidiana, tanto en contenido como en método. Una vez superada la idea de una única geometría, la investigación se orientó, tanto hacia la posibilidad de generalización como hacia la necesidad de una revisión crítica; opciones que marcaron el inicio de un modo de pensamiento que conduciría al concepto de estructura de grupo.

ISBN: 978-9585123-20-5 digital

9 789585 123205

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Editorial
Universidad de Nariño