



Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Anomalías $g - 2$ y los modelos mínimos para el Z'

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:

Físico

Laura Maria Muñoz Martinez

San Juan de Pasto, Colombia

Octubre 2021

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Anomalías $g - 2$ y los modelos mínimos para el Z'

Laura Maria Muñoz Martinez

TRABAJO DE GRADO

Director:

Eduardo Rojas Peña

San Juan de Pasto, Colombia

Octubre 2021

©2021 - Laura Maria Muñoz Martinez

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Octubre 2021

Agradecimientos

Agradezco a la Universidad de Nariño, en especial a las personas que conforman el Programa de Física quienes me brindaron su conocimiento durante todos estos años de carrera. Quiero agradecer a mi asesor, el profesor Eduardo Rojas, quien me inspiró en el maravilloso mundo de la Física, a él le agradezco su tiempo, su dedicación y sus enormes aprendizajes en la parte académica y humana.

A mi familia, por su inmenso amor y por el invaluable apoyo que me han entregado durante toda mi vida. A mis padres, Carlos y Ana, por enseñarme todos sus valores, brindarme su amor y confiar en mí.

A Andrés, por su amor y sus consejos. Quiero agradecerle por ser ese apoyo incondicional para poder seguir adelante con los retos que nos pone la vida.

A Isabel, por llegar a mi vida y enseñarme el amor mas grande.

A mi hija, mi hermosa Isabel, lo mas lindo de mi vida.

Anomalías $g - 2$ y los modelos mínimos para el Z'

Resumen

En este trabajo se presenta parte del formalismo de la electrodinámica cuántica QED (por sus siglas en inglés). En particular se obtiene la ecuación de Dirac para campos de espín $1/2$ y las reglas de Feynman para la QED. Así mismo se estudió con gran detalle las propiedades de covariancia de esta teoría. Como una aplicación de este formalismo se muestra el cálculo explícito del momento magnético anómalo del electrón a nivel de un loop, y se presenta una discusión acerca de las correcciones cuánticas que se requieren en el modelo estándar para calcular de forma adecuada el momento magnético anómalo del muón $g - 2$. Finalmente se usó este formalismo para obtener una solución de la anomalía experimental en $g - 2$ usando modelos de extensión. En este caso se encontró una solución para las cargas del Z' permitidas por las ecuaciones de anomalías y las ligaduras provenientes de los términos de Yukawa. El Z' que se consideró tiene un contenido mínimo de fermiones en el sentido que nuestro modelo sólo contiene los fermiones del modelo estándar y adicionalmente 3 neutrinos derechos y un leptón exótico cargado. Se consideraron las restricciones experimentales reportadas por experimentos en colisionadores obteniendo así el espacio de parámetros permitidos para $g - 2$ con un nivel de confianza de 1σ , la región permitida por producción de tridente de neutrinos $m_{Z'}, g_{Z'} > 0,75$ TeV, asumiendo que la masa de la partícula exótica tiene un valor de 80 GeV.

$g - 2$ anomaly and minimal models for the Z'

Abstract

In this work, part of the formalism of quantum electrodynamics (QED) is presented. In particular, the Dirac equation for spin 1/2 fields and the Feynman rules for QED are obtained. The covariance properties of this theory were also studied in great detail. As an application of this formalism, the explicit calculation of the anomalous magnetic moment of the electron at the one-loop level is shown, and a discussion of the quantum corrections required in the standard model to calculate properly the anomalous magnetic moment of the $g - 2$ muon is presented. Finally, this formalism was used to obtain a solution of the experimental anomaly in $g - 2$ using extension models. In this case a solution was found for the Z' charges allowed by the anomaly equations and the constraints coming from the Yukawa terms. The Z' considered have minimal fermion content in the sense that our models contain only the standard model fermions, 3 right-handed neutrinos and one charged exotic lepton. The experimental restrictions reported by experiments at the collider level were considered, thus obtaining the space of parameters allowed for $g - 2$ with a confidence 1σ the region allowed by production of neutrino trident $m_{Z'} g_{Z'} > 0,75$ TeV assuming that the mass of the exotic particle has a value of 80 GeV.

Contenido

Título	I
Título	II
Aceptación	IV
Agradecimientos	V
Dedicatoria	VI
Resumen	VII
Abstract	VIII
Lista de tablas	X
Lista de figuras	XI
1. Introducción	1
2. Electrodinámica cuántica (QED)	3
2.1. Ecuación de Dirac	4
2.1.1. Deducción de la ecuación de Klein-Gordon	4
2.1.2. Deducción de la ecuación de Dirac	8
2.1.3. Solución de la ecuación de Dirac	12
2.1.4. Covariantes bilineales	21
2.2. El Fotón	31
2.3. Reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica	40
2.3.1. Reglas de Feynman	41
3. Momento magnético anómalo del muón	43
3.1. El muón	43
3.2. Cálculo a nivel de un loop: corrección de vértice de electrones.	44
3.2.1. Parámetros de Feynman	48
3.2.2. Evaluación de los factores de forma	49
3.2.3. Rotación de Wick	63
3.3. Momento magnético anómalo del muón	73
4. Modelos libres de anomalías	77
4.1. Cancelación de Anomalías para el Z'	84
4.1.1. La simetría de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)'$	84
4.1.2. Cancelación de anomalías de gauge	86
4.1.3. $L_\mu - L_\tau$	88
5. Conclusiones	92

Lista de tablas

2.1.	Cantidades que representan distintas combinaciones lineales y sus respectivas componentes.	31
2.2.	Factores que contribuyen las líneas externas en los diagramas de Feynman.	41
3.1.	Propiedades fundamentales del Muón	44
4.1.	Contenido de partículas. El subíndice $i = 1, 2, 3$ representa el número de familia en la base de interacción. En nuestra solución $\phi_2 = \phi_3$ de tal manera que solo se necesitan dos dobletes de Higgs. Sin embargo, a veces mantenemos la notación ϕ_i , que es bastante conveniente para fines de notación. El leptón vectorial $E_{L,R}$ es exótico y se introduce para generar una contribución suficientemente grande al $g - 2$	87
4.2.	Los acoplamientos Z' para los dobletes de Higgs Φ_i y Φ_j son $\phi_i = n_i + 3q_i$ y $\phi_j = \phi_k = \frac{1}{2}[n_j + n_k + 3(q_j + q_k)]$, respectivamente. El campo de Higgs ϕ_i se acopla a los fermiones de la i -th familia. Los enteros ijk son una permutación 123.	88

Lista de figuras

2.1.	Representación del vértice en un diagrama de Feynman con dos líneas fermiónicas y una fotónica.	41
3.1.	Diagrama de Feynman de un loop correspondiente a la evaluación de la función de vértice del electrón.	45
3.2.	Ubicación de los polos l^{0+} y l^{0-} . El contorno de integración de l^0 se rota 90° en el sentido contrario a las agujas del reloj.	66
3.3.	Diagramas representativos que contribuyen a a_μ^{SM} . De izquierda a derecha: QED de primer orden (término de Schwinger), débil de orden más bajo, hadrónico de orden más bajo	74
3.4.	De arriba a abajo: valores experimentales de a_μ de BNL E821, primer resultado de Fermilab y el promedio combinado. Las marcas de verificación internas indican la contribución estadística a las incertidumbres totales. También se muestra el valor recomendado [1] de la iniciativa de la teoría de Muon g-2 para el modelo estándar.	76
4.1.	Diagramas importantes para la anomalía. El izquierdo difiere del derecho por el intercambio de los dos fotones.	77
4.2.	La región en rojo corresponde al espacio de parámetros permitido para $g - 2$ con un nivel de confianza de 1σ . La región púrpura es la región permitida por producción tridente del neutrino $m_{Z'}/g_{Z'} > 0,75$ TeV. Se asume para la masa de la partícula exótica un valor de 80 GeV.	90

Capítulo 1

Introducción

La física de partículas o también conocida como física de altas energías es el área de la física que tiene por objetivo determinar cuáles son los constituyentes elementales de la materia y las propiedades de las fuerzas que intervienen en sus interacciones [2]. En el último cuarto del siglo XX el progreso del conocimiento sobre las propiedades de las partículas que componen la materia y cómo éstas interactúan para formar el universo, dio lugar al Modelo Estándar (ME) de la física de partículas. Esta teoría estudia tres de las cuatro fuerzas fundamentales de la naturaleza: las interacciones nucleares, electromagnéticas, débiles y fuertes, las cuales median la dinámica de las partículas subatómicas conocidas. El ME clasifica a las partículas en dos grandes grupos según el espín de cada una. Los bosones presentan un espín entero y los fermiones espín semientero. Dentro del grupo de los fermiones se encuentra el muón (μ), una partícula fundamental perteneciente a los leptones cargados. En esta partícula se centra el interés del presente trabajo. El ME ha tenido gran éxito ya que permite la explicación de una amplia variedad de resultados experimentales.

El ME le permite a la comunidad científica abordar los retos de la física contemporánea como los que se derivan del funcionamiento del Gran Colisionador de Hadrones LHC *Large hadron collider* por sus siglas en inglés, en el CERN. Los experimentos desarrollados en el LHC permiten explorar escenarios de nueva física a partir de la interpretación de las señales generadas por la interacción entre partículas. Los haces dentro del LHC chocan en cuatro lugares alrededor del anillo del acelerador, correspondientes a las posiciones de cuatro detectores de partículas: ATLAS, CMS, ALICE y LHCb [3].

Las anomalías recientes en el LHCb tienen como explicación natural modelos con un sector electrodébil no universal. Para los modelos no universales, tal como está presente en la literatura [4, 5, 6, 7], el número total de parámetros aumenta, dando lugar a una gran variedad

de soluciones. La motivación teórica para estudiar los modelos no universales proviene de consideraciones muy generales, especialmente en construcciones derivadas de la teoría de cuerdas, donde las cargas del $U(1)'$ suelen ser diferentes para cada familia [8]. Los modelos no universales también se han utilizado para explicar el número de familias y las jerarquías en el espectro de fermiones observado en la naturaleza [9, 10, 11].

La literatura sobre modelos mínimos [4, 5, 12, 13, 8, 6, 7, 14, 15, 16], desde un punto de vista fenomenológico son útiles para explicar las anomalías aisladas en los experimentos de baja energía debido a la ausencia de fermiones exóticos a bajas energías. Los modelos cercanos al mínimo no universales es limitada, la razón de este vacío en la literatura se debe a que el paradigma de universalidad ha dominado la construcción de modelos en las últimas décadas. El LHC representa una oportunidad única en la historia de la física para explorar el espacio de parámetros de los modelos mínimos no universales. Este programa es de gran interés para los análisis fenomenológicos de los experimentos existentes y los que están en fase de diseño.

El área de interés son las extensiones electrodébiles que permiten ajustar las anomalías experimentales que regularmente se presentan en el área. Estas anomalías experimentales hace referencia a que los valores obtenidos experimentalmente contradicen lo postulado en la teoría como es el ME. En este caso se trata de una anomalía experimental del momento magnético anómalo del muón conocida como $g - 2$, la cual se ha apartado de la predicción del modelo estándar a un nivel de $3,6\sigma$ durante muchos años [17]. Se han propuesto muchas soluciones teóricas para este problema [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24]. De acuerdo a estas propuestas a soluciones teóricas, con el presente trabajo de grado se estudia la anomalía del momento magnético anómalo del muón por medio de un modelo mínimo no reportado en la literatura, en el cual se encuentra una solución para las cargas del Z' con un contenido mínimo de fermiones, considerando así los fermiones del ME, 3 neutrinos derechos y un leptón exótico cargado. El presente trabajo de grado refuerza la línea de investigación del grupo de Altas Energías de la Universidad de Nariño debido al contacto con los proyectos y desarrollos teóricos y experimentales mas importantes de la física de altas energías en el LHC.

Capítulo 2

Electrodinámica cuántica (QED)

La electrodinámica cuántica o QED por sus siglas en inglés, Quantum Electrodynamics, es la teoría de partículas subatómicas, que estudia la interacción de la luz con la materia, es decir, es la teoría del campo cuántico de electrones y positrones (el campo electrón-positrón) y fotones (el campo electromagnético o de radiación). La teoría también se aplica a los leptones pesados conocidos (μ y τ) y, en general, se puede utilizar para describir la interacción electromagnética de otras partículas elementales cargadas [25].

Max Planck (1858-1947), propuso que la luz y las otras formas de radiación electromagnética, que hasta entonces habían sido consideradas como ondas, se comportaban paradójicamente como minúsculos paquetes de energía, o “cuantos”, cuando interaccionaban con la materia. Estos cuantos particulares llegaron a conocerse como fotones [26]. A comienzos de los años treinta los arquitectos de la nueva mecánica cuántica habían elaborado un esquema matemático para describir la emisión y absorción de fotones por partículas eléctricamente cargadas tales como electrones. Aunque esta primera formulación de la QED disfrutó de cierto éxito limitado, la teoría tenía fallos evidentes. En muchos casos los cálculos daban respuestas inconsistentes e incluso infinitas a preguntas físicas bien planteadas. Fue el problema de construir una teoría consistente de la QED lo que orientó su atención el físico Richard Feynman a finales de los años cuarenta.

Para colocar la QED sobre una base sólida era necesario hacer la teoría consistente no sólo con los principios de la mecánica cuántica sino también con los de la teoría de la relatividad especial. Estas dos teorías traían sus propias herramientas matemáticas características, complicados sistemas de ecuaciones que de hecho pueden combinarse y reconciliarse para dar una descripción satisfactoria de la QED [26].

2.1. Ecuación de Dirac

La ecuación de Dirac fue publicada por primera vez en el artículo “*The quantum theory of the electron*” desarrollado por Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984), en el año 1928 [27]. Históricamente, el descubrimiento de la ecuación de Dirac fue un acontecimiento muy importante para la física en las décadas de los 1920 y los 1930, ya que proporcionó una descripción relativista de las partículas de espín $1/2$ y, en particular, del electrón. Por consiguiente abrió el camino para la aplicación de la teoría de grupos a la descripción de partículas de espín arbitrario.

La electrodinámica cuántica resultante de las partículas de espín, refinada por dos generaciones de trabajo teórico, es la mejor teoría que se tiene hasta el momento. Aunque es una aproximación ya que no incluye los efectos de interacciones débiles y fuertes, ha superado muchas pruebas experimentales rigurosas cuando se aplica a electrones y muones. Ver con mas detalle en [28].

2.1.1. Deducción de la ecuación de Klein-Gordon

La ecuación de Klein-Gordon propuesta en 1926, fue el primer intento en combinar la mecánica cuántica con la relatividad especial para obtener una ecuación de Schrödinger relativista. Según Dirac [29, 30] inicialmente fue descubierta por Erwin Schrödinger, quien primero derivó la ecuación relativista y luego la abandonó porque daba la estructura fina incorrecta para el hidrógeno (no reproduce los niveles de energía de Bohr para el hidrógeno). Posterior a esto, se dio cuenta que la aproximación no relativista era de valor incluso si la ecuación relativista en sí fuera incorrecta, es por ello que decidió publicar su ecuación de onda relativista, sin embargo ya había sido redescubierta independientemente por Oskar Klein y Walter Gordon, por lo que como se dijo anteriormente es reconocida como la ecuación de Klein-Gordon (K-G) [31].

En este sentido, se trabajará matemáticamente funciones de onda con sus respectivas soluciones. Inicialmente, para deducir la ecuación de Schrödinger se parte de la relación clásica

de energía-momento, dada por:

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V = E \quad . \quad (2.1)$$

Formalmente, la transición de la mecánica clásica a la mecánica cuántica se puede lograr sustituyendo las cantidades clásicas por operadores apropiados:

$$\mathbf{p} \longrightarrow -i\hbar\nabla, \quad E \longrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad . \quad (2.2)$$

Reemplazando las expresiones (2.2) en (2.1) y operando sobre una función de onda ψ se obtiene:

$$\left(\frac{-\hbar^2\nabla^2}{2m} + V \right) \psi = i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad , \quad \text{Ecuación de Schrödinger} \quad , \quad (2.3)$$

si V no depende explícitamente del tiempo, su solución puede ser encontrada a partir de separación de variables, obteniendo de esta manera:

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \psi(\mathbf{r})e^{-iEt/\hbar} \quad . \quad (2.4)$$

Análogamente, la ecuación de Klein-Gordon puede ser obtenida a partir de la ecuación relativista de momento-energía.

$$E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 \quad , \quad (2.5)$$

la cual puede ser escrita, como:

$$p_\mu p^\mu - m^2c^2 = 0 \quad . \quad (2.6)$$

Usando el operador:

$$p_\mu \longrightarrow i\hbar\partial_\mu \quad . \quad (2.7)$$

Dada la cuantización en (2.7), se sustituye en (2.6) y operando sobre una función de onda ψ , se obtiene:

$$\begin{aligned} [(i\hbar\partial_\mu)(i\hbar\partial^\mu)]\psi - m^2c^2\psi &= 0 \\ i^2\hbar^2\partial_\mu\partial^\mu\psi - m^2c^2\psi &= 0 \end{aligned}$$

$$-\hbar^2 \partial_\mu \bar{\partial}^\mu \psi - m^2 c^2 \psi = 0 \quad , \quad (2.8)$$

donde

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (\text{con } \mu = 0, 1, 2, 3) \quad . \quad (2.9)$$

Lo cual se expresa matemáticamente como:

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z} \quad . \quad (2.10)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \partial_\mu &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad , \end{aligned} \quad (2.11)$$

∂_μ y ∂^μ se relacionan a través de la métrica de Minkowski:

$$\partial^\mu = g^{\mu\nu} \partial_\nu \quad , \quad (2.12)$$

donde la métrica de Minkowski es dada por la expresión:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.13)$$

Para la parte temporal, según el valor de la componente $g^{00} = 1$ y la expresión en (2.10) se obtiene la siguiente relación:

$$\partial^0 = g^{00} \partial_0 = (+1) \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \quad . \quad (2.14)$$

Análogamente, se obtiene para la parte espacial:

$$\partial^i = g^{ii} \partial_i = (-1) \frac{\partial}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i} \quad . \quad (2.15)$$

Por lo tanto:

$$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right), \quad \partial^\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \quad . \quad (2.16)$$

Reemplazando (2.16) en (2.8):

$$-\hbar^2 \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right) \psi - m^2 c^2 \psi = 0 \quad .$$

Operando el producto entre los paréntesis se tiene que:

$$-\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi - m^2 c^2 \psi = 0 \quad .$$

Pasando a sumar el término $-m^2 c^2 \psi$ al lado derecho de la igualdad se obtiene:

$$-\hbar^2 \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi = m^2 c^2 \psi \quad .$$

Pasando a dividir \hbar^2 al lado derecho de la igualdad conduce a:

$$-\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \psi = \frac{1}{\hbar^2} m^2 c^2 \psi \quad .$$

Finalmente se opera el signo menos de el lado izquierdo de la ecuación y se agrupa el término $\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$, dando como resultado:

$$\left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 \right) \psi = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi \quad .$$

Así, se deduce la ecuación de Klein-Gordan:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \nabla^2 \psi = \left(\frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi \quad . \quad (\text{Ecuación de Klein-Gordon}) \quad (2.17)$$

La ecuación de K-G (2.17) planteaba tres problemas principales: presenta soluciones de energía negativa, es incompatible con la estadística de la densidad de probabilidad, permitiendo así probabilidades negativas¹ y finalmente tiene un rango de aplicación muy limitado, ya que solamente puede ser utilizado para partículas con espín cero, por ejemplo partículas compuestas como los piones y el Boson de Higgs como partícula fundamental con espín cero, el cual en su momento no había sido descubierto. Para ver con mas detalle los problemas y consecuencias de la ecuación de K-G ver en [28].

¹La interpretación estadística de Born, la cual expresa que con $|\psi(r)|^2$ se obtiene la probabilidad de encontrar la partícula en el punto r .

2.1.2. Deducción de la ecuación de Dirac

Se puede expresar matemáticamente que Dirac resolvió dicho problema al factorizar la relación de energía-momento (2.6), con $\mathbf{p} = 0$, por lo tanto se tiene como resultado:

$$(p^0)^2 - m^2c^2 = 0 \quad . \quad (2.18)$$

Desarrollando esta diferencia de cuadrados, es posible obtener:

$$(p^0 + mc)(p^0 - mc) = 0 \quad , \quad (2.19)$$

de donde se llega a dos posibles soluciones representadas por las dos siguientes ecuaciones de primer orden:

$$p^0 + mc = 0; \quad p^0 - mc = 0 \quad . \quad (2.20)$$

Las cuales satisfacen (2.6), sin embargo, cuando se requiere incluir las componentes espaciales, se llega a expresiones matemáticas de la forma:

$$(p^\mu p_\mu - m^2c^2) = (\beta^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0 \quad .$$

Desarrollando el producto entre paréntesis:

$$(p^\mu p_\mu - m^2c^2) = \beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc\beta^\kappa p_\kappa + mc\gamma^\lambda p_\lambda - m^2c^2 = 0 \quad .$$

Factorizando el término en común mc conduce a:

$$(p^\mu p_\mu - m^2c^2) = \beta^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc[\beta^\kappa - \gamma^\kappa]p_\kappa - m^2c^2 = 0 \quad . \quad (2.21)$$

De acuerdo a lo obtenido en (2.21), para que se cumpla dicha igualdad se requiere que no aparezca el término lineal en p_κ , lo cual conduce a que $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$. Con esta consideración la ecuación (2.21) resulta:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - m^2c^2 \quad .$$

Cancelando los términos m^2c^2 a ambos lados de la igualdad se tiene que:

$$p^\mu p_\mu = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda \quad .$$

A partir de esto, se realiza un cambio de índices de $p^\mu p_\mu \rightarrow p^\lambda p_\lambda$. Además se introduce la métrica de Minkowski con índices contravariantes $g^{\kappa\lambda}$ con el fin de obtener $p_\kappa p_\lambda$ en ambos lados de la igualdad:

$$g^{\kappa\lambda} p_\kappa p_\lambda = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda \quad . \quad (2.22)$$

Desarrollando los índices de la ecuación (2.22) resulta explícitamente:

$$\begin{aligned} (p^0)^2 - (p^1)^2 - (p^2)^2 - (p^3)^2 &= (\gamma^0)^2 (p^0)^2 + (\gamma^1)^2 (p^1)^2 + (\gamma^2)^2 (p^2)^2 + (\gamma^3)^2 (p^3)^2 \\ &+ (\gamma^0 \gamma^1 + \gamma^1 \gamma^0) p_0 p_1 + (\gamma^0 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^0) p_0 p_2 + (\gamma^0 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^0) p_0 p_3 \\ &+ (\gamma^1 \gamma^2 + \gamma^2 \gamma^1) p_1 p_2 + (\gamma^1 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^1) p_1 p_3 + (\gamma^2 \gamma^3 + \gamma^3 \gamma^2) p_2 p_3 \quad . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Así, para que se cumpla la igualdad (2.23) se puede proponer que los valores de $\gamma^0 = 1$ y $\gamma^1 = \gamma^2 = \gamma^3 = i$ ya que $i^2 = -1$, obteniendo de esta manera, que los cuatro primeros términos del lado derecho de la ecuación resulten iguales a los del lado izquierdo de dicha ecuación. Ahora, para los seis términos siguientes del lado derecho de la ecuación (2.23) que representan los términos cruzados, no se puede encontrar alguna forma en eliminarlos. Sin embargo Dirac introdujo la idea que solucionaría tal objetivo, en el cual se consideraban las γ como matrices y no como números. Debido a que las matrices, en general no conmutan, entonces es posible expresar un conjunto de soluciones dado por:

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^1)^2 = (\gamma^2)^2 = (\gamma^3)^2 = -1 \quad . \quad (2.24)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 0 \quad \forall \quad \mu \neq \nu \quad . \quad (2.25)$$

Partiendo de la ecuación (2.22):

$$g^{\kappa\lambda} p_\kappa p_\lambda = \gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda \quad ,$$

se pasa a restar el término $g^{\kappa\lambda} p_\kappa p_\lambda$ al otro lado de la igualdad y así:

$$\gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - g^{\kappa\lambda} p_\kappa p_\lambda = 0 \quad ,$$

$$\frac{\gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda}{2} + \frac{\gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda}{2} - g^{\kappa\lambda} p_\kappa p_\lambda = 0 \quad . \quad (2.26)$$

Para el segundo término en (2.26) se redefine $\kappa \Rightarrow \lambda$, por lo que resulta:

$$\frac{\gamma^\kappa \gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda}{2} + \frac{\gamma^\lambda \gamma^\kappa p_\kappa p_\lambda}{2} - g^{\kappa\lambda} p_\kappa p_\lambda = 0 \quad .$$

Factorizando $p_\kappa p_\lambda$,

$$\left[\frac{1}{2}(\gamma^\kappa \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\kappa) - g^{\kappa\lambda} \right] p_\kappa p_\lambda = 0 \quad .$$

Esto conduce a que el término

$$\frac{1}{2}(\gamma^\kappa \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\kappa) - g^{\kappa\lambda} = 0 \quad .$$

Despejando $(\gamma^\kappa \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\kappa)$, resulta:

$$\begin{aligned} (\gamma^\kappa \gamma^\lambda + \gamma^\lambda \gamma^\kappa) &= 2g^{\kappa\lambda} \\ \{\gamma^\kappa, \gamma^\lambda\} &= 2g^{\kappa\lambda} \quad , \end{aligned} \quad (2.27)$$

donde (2.27) es la relación de anticonmutación que deben satisfacer las γ , con $g^{\kappa\lambda}$, siendo la Métrica de Minkowski y los corchetes representan el anticonmutador:

$$\{A, B\} \equiv AB + BA \quad . \quad (2.28)$$

El conjunto de matrices que satisfacen la relación (2.27) son:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{con } i = 1, 2, 3) \quad , \quad (2.29)$$

donde σ son las matrices de Pauli, que matemáticamente se representan como:

$$\sigma = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z] \quad (2.30)$$

$$\sigma = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \quad . \quad (2.31)$$

El elemento 1 de las matrices de Pauli denotan una matriz unitaria de 2×2 y el elemento 0 de las matrices representa una matriz de ceros de 2×2 .

De acuerdo con estos resultados para las γ , es posible resolver la relación relativista de energía-momento:

$$(p^\mu p_\mu - m^2 c^2) = (\gamma^\kappa p_\kappa + mc)(\gamma^\lambda p_\lambda - mc) = 0 \quad . \quad (2.32)$$

Para obtener la ecuación de Dirac, se utiliza la opción convencional de eliminar el término $(\gamma^\lambda p_\lambda + mc)$. Por lo tanto:

$$\gamma^\lambda p_\lambda - mc = 0 \quad .$$

Realizando el cambio de índices $\lambda \rightarrow \mu$

$$\gamma^\mu p_\mu - mc = 0 \quad . \quad (2.33)$$

Finalmente, si se sustituye $p_\mu \rightarrow i\hbar\partial_\mu$ y el operador resultante actúe sobre la función de onda ψ , se obtiene:

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0 \quad , \text{Ecuación de Dirac} \quad (2.34)$$

donde ψ es una matriz columna de cuatro elementos, denominado espinor de Dirac²:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.35)$$

Según Bernd Thaller [32] reconoce a dicha ecuación de Dirac (2.34) como un paso más hacia la descripción de la realidad de una teoría de Schrödinger de una partícula. Al ser utilizada como una descripción de electrones, la ecuación de Dirac es compatible con la teoría de la relatividad y además describe el espín del electrón y su momento magnético de forma completamente natural.

²Aunque se presenta matemáticamente como un una matriz de cuatro elementos, no es un cuádrimomento, y su transformación a sistemas inerciales se desarrollan en la sección 2.1.4.

2.1.3. Solución de la ecuación de Dirac

Para encontrar una solución a la ecuación de Dirac, se realizó una restricción sobre la función de onda ψ , la cual impone que ψ sea independiente de la posición, es decir, que las derivadas espaciales sean iguales a cero.

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0 \quad . \quad (2.36)$$

Lo que es equivalente a decir que:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}\psi = p_i\psi = 0 \implies \mathbf{p} = 0 \quad , \quad (2.37)$$

de esta manera, la partícula está en reposo y la ecuación de Dirac (2.34), resulta:

$$i\hbar\gamma^0\partial_0\psi - mc\psi = 0 \quad . \quad (2.38)$$

Recordando de (2.10), la parte temporal es $\partial_0 = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$, por lo que (2.38) se reduce a:

$$i\hbar\gamma^0\frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} - mc\psi = 0 \quad .$$

Pasando a sumar el término $mc\psi$ y a dividir $i\hbar$ se obtiene:

$$\gamma^0\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{imc^2}{\hbar}\psi \quad , \quad (2.39)$$

donde

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad \text{con:} \quad \psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.40)$$

De tal forma que la ecuación (2.39), se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial\psi_A}{\partial t} \\ \frac{\partial\psi_B}{\partial t} \end{pmatrix} = -\frac{imc^2}{\hbar} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} \quad . \quad (2.41)$$

Por lo tanto, se obtienen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{\partial \psi_A}{\partial t} = -i \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right) \psi_A, \quad \frac{\partial \psi_B}{\partial t} = -i \left(\frac{mc^2}{\hbar} \right) \psi_B, \quad (2.42)$$

las cuales son ecuaciones diferenciales de primer orden y respectivamente presentan como soluciones particulares:

$$\psi_A(t) = e^{-i(mc^2/\hbar)t} \psi_A(0), \quad \psi_B(t) = e^{+i(mc^2/\hbar)t} \psi_B(0). \quad (2.43)$$

Al hacer una analogía con la expresión obtenida en (2.4), se nota que los valores de energía para $\psi_A(t)$ son los esperados para una partícula en reposo, es decir con $\mathbf{p} = 0$, el valor de la energía es $E = mc^2$. No obstante, para los valores de energía de $\psi_B(t)$ se identifica un estado con energía negativa ($E = -mc^2$), que Dirac intento resolver en primer lugar usando el principio de Pauli para argumentar que “todos los estados de energía negativa están ocupados excepto quizás algunos de pequeña velocidad”. En segundo lugar, afirmó que estos estados no serían observables por sí mismos. Aunque habría un “número infinito por unidad de volumen en todo el espacio ... si su distribución es exactamente uniforme, deberíamos esperar que sean completamente inobservables. Sólo la pequeña desviación de la uniformidad exacta, provocada por algunos estados de energía negativa estando desocupados, esperamos observar”. Solo las desviaciones de la densidad de carga volumétrica uniformemente infinita del vacío son observables y se utilizan en la ecuación de Maxwell, $\nabla \cdot \mathbf{E} = -4\pi\rho$. Y en tercer lugar Dirac reconoció que los estados negativos desocupados, o huecos, se moverían como partículas cargadas positivamente con energías cinéticas positivas y argumentó: “Por lo tanto, nos llevan a la suposición de que los huecos ... son los protones”.

En las expresiones (2.43), ψ_A , representa la ecuación de onda para una partícula, y ψ_B se la interpreta como una ecuación de onda para su antipartícula. Por ejemplo ψ_A describe a los electrones, mientras que ψ_B para los positrones. Así, obtenemos espinores de dos componentes, concordado para un sistema de spin $\frac{1}{2}$. A partir de las ecuaciones de onda expresadas en (2.43), se encuentran cuatro soluciones, que por el momento no tienen en cuenta los factores de normalización:

Para ψ_A , se obtiene $\psi^{(1)}$ y $\psi^{(2)}$ que describen un electrón con spin hacia arriba y spin hacia

abajo respectivamente:

$$\psi^{(1)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(2)} = e^{-i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Así mismo, para ψ_B , se obtienen $\psi^{(3)}$ y $\psi^{(4)}$ que describen un positrón con spin hacia abajo y spin hacia arriba respectivamente:

$$\psi^{(3)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \psi^{(4)} = e^{+i(mc^2/\hbar)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.45)$$

De esta manera, las ecuaciones (2.44) y (2.45) representan la solución a la ecuación de Dirac para una partícula en reposo.

Ahora, se trabajará una solución de la ecuación de Dirac para una partícula en movimiento, es decir se obtendrán soluciones para ondas planas, de tal forma que ψ será expresada matemáticamente como:

$$\psi(x) = ae^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}u(k), \quad (2.46)$$

donde a representa un coeficiente de normalización, el cual, por el momento, es independiente para tal propósito y $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}$ representa el producto Minkowskiano: $\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} = k_\mu x^\mu = k^0 ct - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}$. Por lo tanto, para que la solución dada en (2.46) satisfaga la ecuación de Dirac (2.34), se procede a calcular la derivada $\partial_\mu\psi$, donde, para la componente espacial se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_0\psi(x) &= \partial_0(ae^{-ik^0 ct - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}u(k)) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}(e^{-ik^0 ct - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) \\ &= \frac{1}{c}(-ik^0 c)e^{-ik^0 ct - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \\ &= -ik^0 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Para las componentes espaciales, por ejemplo para x se obtiene:

$$\partial_1\psi(x) = \partial_1(ae^{-ik^0 ct - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}u(k)) = \partial_1 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} = ik^1 e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (2.48)$$

Análogamente para las componentes en y y z , se obtienen:

$$\partial_2 \psi(x) = ik^2 e^{-ik \cdot x} \quad . \quad (2.49)$$

$$\partial_3 \psi(x) = ik^3 e^{-ik \cdot x} \quad . \quad (2.50)$$

Los resultados encontrados en las ecuaciones (2.47),(2.48),(2.49) y (2.50), se pueden generalizar de modo que:

$$\partial_\mu \psi = -ik_\mu \psi \quad . \quad (2.51)$$

Ya que: $k^0 = k_0$ y $k^i = -k_i$, con $i = 1, 2, 3$.

Consecuente a esto, se reemplaza (2.51) en (2.34) obteniendo así:

$$i\hbar \gamma^\mu (-ik_\mu \psi(x)) - mc\psi(x) = 0 \quad .$$

Desarrollando el paréntesis:

$$\hbar \gamma^\mu k_\mu \psi(x) - mc\psi(x) = 0 \quad .$$

Factorizando $\psi(x)$, la igualdad se reduce a:

$$(\hbar \gamma^\mu k_\mu - mc)\psi(x) = 0 \quad , \quad (2.52)$$

donde:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu k_\mu &= \gamma^0 k^0 - \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} k^0 - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{k} \\ &= \begin{pmatrix} k^0 & 0 \\ 0 & -k^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ -\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^0 & -\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -k^0 \end{pmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (2.53)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.52) resulta en:

$$\left[\begin{pmatrix} \hbar k^0 & -\hbar \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \hbar \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -\hbar k^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mc & 0 \\ 0 & mc \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Operando la resta de las matrices se llega a la expresión:

$$\begin{pmatrix} \hbar k^0 - mc & -\hbar \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ \hbar \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} & -\hbar k^0 - mc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0 \quad .$$

Así, operando el producto de matrices se tiene que:

$$\begin{pmatrix} (\hbar k^0 - mc)u_A - \hbar(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})u_B \\ \hbar(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})u_A - (\hbar k^0 + mc)u_B \end{pmatrix} = 0 \quad . \quad (2.54)$$

De la expresión (2.54) se encuentra el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\hbar k^0 - mc)u_A = \hbar \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} u_B \implies u_A = \frac{\hbar \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\hbar k^0 - mc} u_B \quad . \quad (2.55)$$

$$\hbar \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} u_A = (\hbar k^0 + mc)u_B \implies u_B = \frac{\hbar \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\hbar k^0 + mc} u_A \quad . \quad (2.56)$$

Reemplazando (2.56) en (2.55), se obtiene:

$$u_A = \left(\frac{\hbar \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\hbar k^0 - mc} \right) \left(\frac{\hbar \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{\hbar k^0 + mc} u_A \right) \quad .$$

Operando el producto entre los dos términos, se reduce a:

$$u_A = \frac{\hbar^2 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2}{(\hbar k^0)^2 - (mc)^2} u_A \quad .$$

Factorizando \hbar^2 en el denominador, se cancela con su respectivo \hbar^2 en el numerador, así se tiene que:

$$u_A = \frac{(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2}{(k^0)^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2} u_A \quad , \quad (2.57)$$

donde:

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} = k_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + k_y \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + k_z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix} \quad , \quad (2.58)$$

por lo tanto, su cuadrado será:

$$(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_z & k_x - ik_y \\ k_x + ik_y & -k_z \end{pmatrix} \quad .$$

Realizando el producto entre las dos matrices:

$$(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \begin{pmatrix} k_z^2 + (k_x - ik_y)(k_x + ik_y) & k_z(k_x - ik_y) + (k_x - ik_y)(-k_z) \\ (k_x + ik_y)k_z + (-k_z)(k_x + ik_y) & (k_x + ik_y)(k_x - ik_y) + (-k_z)(-k_z) \end{pmatrix} .$$

De esta manera se efectúan las respectivas operaciones en cada término de la matriz resultante, de lo cual se obtiene:

$$(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = \begin{pmatrix} k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 & 0 \\ 0 & k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 \end{pmatrix} .$$

De este modo

$$(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma})^2 = |\mathbf{k}^2| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \quad (2.59)$$

De acuerdo a lo obtenido en (2.59), la relación (2.57) da como resultado:

$$u_A = \frac{|\mathbf{k}|^2}{(k^0)^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2} u_A , \quad (2.60)$$

de esta manera:

$$\begin{aligned} \frac{|\mathbf{k}|^2}{(k^0)^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2} = 1 &\implies |\mathbf{k}|^2 = (k^0)^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 \\ \implies (k^0)^2 - |\mathbf{k}|^2 - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 = 0 &\implies k^\mu k_\mu - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 = 0 \\ \implies k^\mu k_\mu = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 . & \end{aligned} \quad (2.61)$$

De tal forma que para que (2.46) satisfaga la ecuación de Dirac (2.34), k^μ tiene que ser el cuádrimomento con momento al cuadrado igual a $\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2$, entonces:

$$k^\mu = \pm \frac{p^\mu}{\hbar} . \quad (2.62)$$

Si se elige $u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces:

$$u_B = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{p^0 + mc} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{p^0 + mc} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Aplicando el producto de las matrices, se encuentra la expresión:

$$u_B = \frac{1}{p^0 + mc} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} = \frac{1}{\frac{E}{c} + mc} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} .$$

Factorizando el factor c , se obtiene:

$$u_B = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} . \quad (2.63)$$

Análogamente para $u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, se obtiene respectivamente:

$$u_B = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

$$u_A = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

$$u_A = \frac{c}{E + mc^2} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix} . \quad (2.66)$$

Como un resultado, las expresiones (2.63) y (2.64) son soluciones de la ecuación de Dirac, que contienen los respectivos estados para partículas, mientras que las expresiones (2.65) y (2.66) representan las soluciones de la ecuación de Dirac con estados para antipartículas.

Para dichos espinores, se utilizará convenientemente la normalización Helzen y Martin³:

$$u^\dagger u = \frac{2E}{c} . \quad (2.67)$$

donde,

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \implies u^\dagger = (\alpha^* \beta^* \gamma^* \delta^*) . \quad (2.68)$$

³De acuerdo a la literatura [33], existen al menos tres convenciones diferentes, que, además de la reportada de Helzen y Martin, se tiene la de Bjorken y Drell dada por: $u^\dagger u = \frac{E}{mc^2}$, o el de Bogoliubov y Shirkov dada por: $u^\dagger u = 1$.

En consecuencia:

$$u^\dagger u = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 \quad . \quad (2.69)$$

Es así que las soluciones se convierten en:

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{c}{E+mc^2} p_z \\ \frac{c}{E+mc^2} (p_x + ip_y) \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{c}{E+mc^2} (p_x - ip_y) \\ \frac{c}{E+mc^2} (-p_z) \end{pmatrix} \quad . \quad (2.70)$$

$$v^{(1)} = N \begin{pmatrix} \frac{c}{E+mc^2} (p_x - ip_y) \\ \frac{c}{E+mc^2} (-p_z) \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = -N \begin{pmatrix} \frac{c}{E+mc^2} p_z \\ \frac{c}{E+mc^2} (p_x + ip_y) \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.71)$$

Al calcular:

$$u^{(1)\dagger} u^{(1)} = N^* \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{cp_z}{(E+mc^2)} & \frac{c(p_x - ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{cp_z}{(E+mc^2)} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E+mc^2} \end{pmatrix} \quad .$$

Se opera la matriz columna y la matriz fila obteniendo de esta manera:

$$u^{(1)\dagger} u^{(1)} = |N|^2 \left\{ 1 + 0 + \frac{c^2 p_z^2}{(E + mc^2)^2} + \frac{c^2 (p_x - ip_y)(p_x + ip_y)}{(E + mc^2)^2} \right\} \quad .$$

Factorizando el factor $(E + mc^2)^2$, resulta que:

$$u^{(1)\dagger} u^{(1)} = \frac{|N|^2}{(E + mc^2)^2} \left\{ (E + mc^2)^2 + c^2 p_z^2 + c^2 (p_x^2 + p_y^2) \right\} \quad .$$

Ahora, se factoriza c^2 dentro de los corchetes, de lo cual se obtiene:

$$u^{(1)\dagger} u^{(1)} = \frac{|N|^2}{(E + mc^2)^2} \left\{ (E + mc^2)^2 + c^2 (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \right\} \quad .$$

De esta manera, se obtiene que $p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = p$, por lo tanto:

$$u^{(1)\dagger}u^{(1)} = \frac{|N|^2}{(E + mc^2)^2} \{(E + mc^2)^2 + c^2p\} \quad . \quad (2.72)$$

Dado que $cp = E^2 - m^2c^4 = (E - mc^2)(E + mc^2)$, la ecuación (2.72) da que:

$$u^{(1)\dagger}u^{(1)} = \frac{|N|^2}{(E + mc^2)^2} \{(E + mc^2)^2 + (E - mc^2)(E + mc^2)\} \quad .$$

Factorizando un termino $(E + mc^2)$, se obtiene:

$$u^{(1)\dagger}u^{(1)} = \frac{|N|^2}{(E + mc^2)} \{(E + mc^2) + (E - mc^2)\} \quad .$$

Desarrollando las operaciones dentro de los corchetes, se produce la siguiente expresión:

$$u^{(1)\dagger}u^{(1)} = \frac{2E|N|^2}{(E + mc^2)} \quad . \quad (2.73)$$

Reemplazando la expresión (2.67) en (2.73) implica que:

$$\frac{2E}{c} = \frac{|N|^2}{(E + mc^2)}(2E) \quad .$$

Despejando $|N|^2$

$$|N|^2 = \frac{2E(E + mc^2)}{2Ec} \quad .$$

Cancelando el término $2E$ y aplicando raíz cuadrada a ambos lados, implica que

$$|N| = \sqrt{\frac{(E + mc^2)}{c}} \quad . \quad (2.74)$$

Se obtiene un resultado análogo para $u^{(2)\dagger}u^{(2)}$. Ahora, para las expresiones (2.71), el procedimiento es similar:

$$v^{(2)\dagger}v^{(2)} = N^* \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{(E+mc^2)} & \frac{c(p_x - ip_y)}{E+mc^2} & 1 & 0 \end{pmatrix} N \begin{pmatrix} \frac{cp_z}{(E+mc^2)} \\ \frac{c(p_x + ip_y)}{E+mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= |N|^2 \left\{ \frac{c^2 p_z^2}{(E + mc^2)^2} + \frac{c^2 (p_x - ip_y)(p_x + ip_y)}{(E + mc^2)^2} + 1 + 0 \right\} .$$

Factorizando $(E + mc^2)^2$ y c^2 resulta que:

$$\begin{aligned} v^{(2)\dagger} v^{(2)} &= \frac{|N|^2}{(E + mc^2)^2} \{c^2(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + (E + mc^2)^2\} . \\ &= \frac{|N|^2}{(E + mc^2)^2} \{c^2 p + (E + mc^2)^2\} . \end{aligned} \quad (2.75)$$

Obteniendo así la misma expresión de (2.72), por lo que la constante de normalización es la representada en la ecuación (2.74). Las soluciones $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ representan las soluciones de la ecuación de Dirac para las partículas $\psi = ae^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}u$, describiendo de esta manera a un electrón con espín hacia arriba y abajo respectivamente, la nueva notación $v^{(1)}$ y $v^{(2)}$ para las soluciones de la ecuación de Dirac para las antipartículas $\psi = ae^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}/\hbar}v$, las cuales representan a un positrón con espín hacia arriba y abajo respectivamente. Así, los estados de las partículas y antipartículas que satisfacen la ecuación de Dirac en el espacio momento (2.52), quedan de la forma:

$$(\gamma^\mu p_\mu - mc)u = 0 \quad . \quad \text{Para partículas} \quad (2.76)$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + mc)v = 0 \quad . \quad \text{Para antipartículas} \quad (2.77)$$

2.1.4. Covariantes bilineales

La transformación que realiza el espinor de Dirac (2.35) cuando se pasa a un sistema inercial con una velocidad v en la dirección x a otro sistema, es dada por la siguiente expresión:

$$\psi \longrightarrow \psi' = S\psi \quad , \quad (2.78)$$

donde S es una matriz de 4×4 , denominada matriz S representada por la ecuación (2.79):

$$S = a_+ + a_- \gamma^0 \gamma^1 = \begin{pmatrix} a_+ & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_1 & a_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_+ & 0 & 0 & a_- \\ 0 & a_+ & a_- & 0 \\ 0 & a_- & a_+ & 0 \\ a_- & 0 & 0 & a_+ \end{pmatrix} , \quad (2.79)$$

donde,

$$a_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)} \quad , \quad (2.80)$$

y el factor gamma γ , o factor de Lorentz es:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \left(\beta = \frac{v}{c} \right) \quad . \quad (2.81)$$

Para comprobar la regla de transformación dada en (2.78), se lleva la ecuación de Dirac (2.34) a la expresión (2.78), por lo cual se obtiene:

$$i\hbar\gamma^{\mu}\partial'_{\mu}\psi' - mc\psi' = 0 \quad . \quad (2.82)$$

Dado que:

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu} \quad , \quad (2.83)$$

se reemplaza la (2.83) en (2.82) se obtiene:

$$i\hbar\gamma^{\mu} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu}(S\psi) - mc(S\psi) = 0 \quad . \quad (2.84)$$

Multiplicando por S^{-1} a ambos lados de (2.84) se consigue la expresión:

$$i\hbar(S^{-1}\gamma^{\mu}S) \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} \partial_{\nu}\psi - mc \underbrace{(S^{-1}S)}_1 \psi = 0 \quad , \quad (2.85)$$

donde:

$$(S^{-1}\gamma^{\mu}S) \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}} = \gamma^{\nu} \quad . \quad (2.86)$$

Por lo tanto, la ecuación (2.85) resulta:

$$i\hbar\gamma^{\nu}\partial_{\nu}\psi - mc\psi = 0 \quad . \quad (2.87)$$

De acuerdo con (2.86) se requiere calcular $\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2$ y γ^3 . Para esto, son útiles las siguientes transformaciones:

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^0} = \gamma, \quad \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} = \gamma\beta, \quad \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} = \gamma\beta, \quad \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} = \gamma, \quad \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} = 1, \quad \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} = 1 \quad . \quad (2.88)$$

Entonces, para γ^0 , se calcula:

$$\gamma^0 = (S^{-1}\gamma^0 S) \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} + (S^{-1}\gamma^1 S) \frac{\partial x^0}{\partial x'^1} = (S^{-1}\gamma^0 S)\gamma + (S^{-1}\gamma^1 S)\gamma\beta \quad . \quad (2.89)$$

Por lo tanto, el producto de la matriz S con γ^0 se obtiene que:

$$S\gamma^0 = (SS^{-1}\gamma^0 S)\gamma + (SS^{-1}\gamma^1 S)\gamma\beta = (\gamma^0 S)\gamma + (\gamma^1 S)\gamma\beta \quad . \quad (2.90)$$

Ahora, para γ^1 se calcula que:

$$\gamma^1 = (S^{-1}\gamma^0 S) \frac{\partial x^1}{\partial x'^0} + (S^{-1}\gamma^1 S) \frac{\partial x^1}{\partial x'^1} = (S^{-1}\gamma^0 S)\gamma\beta + (S^{-1}\gamma^1 S)\gamma \quad . \quad (2.91)$$

Así, al multiplicar la matriz S con γ^1 se obtiene:

$$S\gamma^1 = (SS^{-1}\gamma^0 S)\gamma\beta + (SS^{-1}\gamma^1 S)\gamma = (\gamma^0 S)\gamma\beta + (\gamma^1 S)\gamma \quad . \quad (2.92)$$

Resultados análogos se obtienen para $S\gamma^2$ y $S\gamma^3$:

$$S\gamma^2 = S(S^{-1}\gamma^2 S) \frac{\partial x^2}{\partial x'^2} = S(S^{-1}\gamma^2 S) = \underbrace{SS^{-1}}_1 \gamma^2 S = \gamma^2 S \quad . \quad (2.93)$$

$$S\gamma^3 = S(S^{-1}\gamma^3 S) \frac{\partial x^3}{\partial x'^3} = S(S^{-1}\gamma^3 S) = \underbrace{SS^{-1}}_1 \gamma^3 S = \gamma^3 S \quad . \quad (2.94)$$

Ahora, se procede a verificar si las relaciones (2.90), (2.92), (2.93) y (2.94) satisfacen la ecuación (2.79).

De esta manera, para la ecuación (2.90), se reemplaza la expresión (2.79), de lo cual se obtiene:

$$S\gamma^0 = (\gamma^0(a_+ + a_-\gamma^0\gamma^1))\gamma + (\gamma^1(a_+ + a_-\gamma^0\gamma^1))\gamma\beta \quad .$$

Desarrollando los paréntesis conduce a:

$$S\gamma^0 = a_+\gamma^0\gamma + a_-\gamma^1\gamma + a_+\gamma^1\gamma\beta + a_-\gamma^0\gamma\beta \quad .$$

Factorizando términos:

$$S\gamma^0 = \gamma(a_+ + \beta a_-)\gamma^0 + \gamma(a_- + \beta a_+)\gamma^1 \quad . \quad (2.95)$$

Ahora, trabajando el lado izquierdo de la ecuación (2.95), se reemplaza el valor de S expresado en la ecuación (2.79), por lo que resulta:

$$S\gamma^0 = (a_+ + a_-\gamma^0\gamma^1)\gamma^0 = a_+\gamma^0 + a_-\gamma^0\gamma^1\gamma^0 \quad . \quad (2.96)$$

De las relaciones encontradas (2.89) y (2.91) se encuentra que γ^1 y γ^0 anticonmutan, es decir, $\gamma^1\gamma^0 = -\gamma^0\gamma^1$, por lo tanto la ecuación (2.96) implica que:

$$S\gamma^0 = a_+\gamma^0 - a_-\underbrace{\gamma^0\gamma^0}_1\gamma^1 = a_+\gamma^0 - a_-\gamma^1 \quad . \quad (2.97)$$

Igualando las ecuaciones (2.95) y (2.97),

$$a_+\gamma^0 - a_-\gamma^1 = \gamma(a_+ + \beta a_+)\gamma^0 + \gamma(a_- + \beta a_+)\gamma^1 \quad . \quad (2.98)$$

Al analizar el término $\gamma(a_+ + \beta a_-)$ en (2.98), se encuentra que:

$$a_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma \pm 1)} \quad . \quad (2.99)$$

Considerando el factor gamma γ definido en (2.81), se despeja la velocidad relativa a la velocidad de la luz β , lo cual conduce que:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \implies \beta^2 = \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2} \implies \beta = \frac{\sqrt{(\gamma-1)(\gamma+1)}}{\gamma} \quad . \quad (2.100)$$

Por lo que el término para analizar, es el siguiente:

$$\gamma(a_+ + \beta a_-) = \gamma \left[\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma+1)} + \frac{\sqrt{(\gamma-1)(\gamma+1)}}{\gamma} \left(-\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-1)} \right) \right] \quad .$$

Operando el factor γ en cada termino y desarrollando el paréntesis, se tiene que:

$$\gamma(a_+ + \beta a_-) = \gamma\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma+1)} - \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-1)(\gamma+1)(\gamma-1)} \quad .$$

Separando el término $\sqrt{(\gamma-1)^2}$, resulta:

$$\gamma(a_+ + \beta a_-) = \gamma\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma+1)} - \sqrt{(\gamma-1)^2}\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma+1)} \quad .$$

Considerando que $\sqrt{(\gamma - 1)^2} = (\gamma - 1)$ y factorizando $\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma + 1)}$, implica que:

$$\gamma(a_+ + \beta a_-) = \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma + 1)}[\gamma - (\gamma - 1)] \quad .$$

Desarrollando los términos en corchetes se obtiene:

$$\gamma(a_+ + \beta a_-) = \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma + 1)} \quad .$$

Por lo tanto, se obtiene

$$\gamma(a_+ + \beta a_-) = a_+ \quad . \quad (2.101)$$

Análogamente se calcula el término $\gamma(a_- + \beta a_+)$ de (2.98) reemplazando las expresiones a_{\pm} y β encontradas en (2.99) y (2.100) respectivamente, en este sentido se expresa:

$$\gamma(a_- + \beta a_+) = \gamma \left[-\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma - 1)} + \frac{\sqrt{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}}{\gamma} \left(\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma + 1)} \right) \right] \quad .$$

Realizando la multiplicación del segundo término y repartiendo el factor γ en cada término, se llega a la siguiente expresión:

$$\gamma(a_- + \beta a_+) = -\gamma\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma - 1)} + \sqrt{(\gamma + 1)^2}\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma - 1)} \quad .$$

Factorizando el término en común $\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma - 1)}$, la expresión se reduce a:

$$\gamma(a_- + \beta a_+) = \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma - 1)}[(\gamma + 1) - \gamma] \quad .$$

Y operando los términos entre corchetes, lo que conduce a:

$$\gamma(a_- + \beta a_+) = \sqrt{\frac{1}{2}(\gamma - 1)} \quad .$$

Así entonces se demuestra que:

$$\gamma(a_- + \beta a_+) = a_- \quad . \quad (2.102)$$

En efecto, al reemplazar las expresiones (2.101) y (2.102) en (2.98), se satisface dicha igualdad.

Así mismo se realiza un procedimiento análogo en (2.92) y se tiene que:

$$S\gamma^1 = (\gamma^0 S)\gamma\beta + (\gamma^1 S)\gamma \quad .$$

Al reemplazar S dada por expresión (2.79) conduce a:

$$S\gamma^1 = (\gamma^0(a_+ + a_-\gamma^0\gamma^1))\gamma\beta + (\gamma^1(a_+ + a_-\gamma^0\gamma^1))\gamma \quad .$$

Repartiendo γ^0 y γ^1 en cada uno de los términos entre paréntesis se logra obtener:

$$S\gamma^1 = (a_+\gamma^0 + a_-\gamma^0\gamma^0\gamma^1)\gamma\beta + (a_+\gamma^1 + a_-\gamma^0\gamma^1\gamma^1)\gamma \quad .$$

Considerando $\gamma^0\gamma^0 = 1$ y $\gamma^1\gamma^1 = 1$, entonces:

$$S\gamma^1 = (a_+\gamma^0 + a_-\gamma^1)\gamma\beta + (a_+\gamma^1 + a_-\gamma^0)\gamma \quad . \quad (2.103)$$

Por otra parte, al realizar el reemplazo de la expresión de S indicada en la ecuación (2.79) en el lado izquierdo de (2.103) resulta:

$$S\gamma^1 = (a_+ + a_-\gamma^0\gamma^1)\gamma^1 = a_+\gamma^1 + a_-\gamma^0\gamma^1\gamma^1 = a_+\gamma^1 + a_-\gamma^0 \quad . \quad (2.104)$$

Por lo tanto las ecuaciones (2.103) y (2.104) deben ser iguales, entonces:

$$a_+\gamma^1 + a_-\gamma^0 = (a_+\gamma^0 + a_-\gamma^1)\gamma\beta + (a_+\gamma^1 + a_-\gamma^0)\gamma \quad .$$

Al realizar el producto de los factores $\gamma\beta$ y γ con los respectivos término de los paréntesis se tiene:

$$a_+\gamma^1 + a_-\gamma^0 = a_+\gamma^0\gamma\beta + a_-\gamma^1\gamma\beta + a_+\gamma^1\gamma + a_-\gamma^0\gamma \quad .$$

$$a_+\gamma^1 + a_-\gamma^0 = \underbrace{\gamma(a_- + \beta a_+)}_{a_+} \gamma^0 + \underbrace{\gamma(a_+ + \beta a_-)}_{a_-} \gamma^1 \quad .$$

De modo que

$$a_+\gamma^1 + a_-\gamma^0 = a_+\gamma^0 + a_-\gamma^1 \quad . \quad (2.105)$$

De esta manera se verificó que (2.90) y (2.92) sí satisfacen (2.79), al igual que (2.93) y (2.94), las cuales satisfacen a (2.79) directamente.

Ahora bien, si se requiere construir una cantidad escalar a partir de un espinor ψ (2.35), se realizaría inicialmente el siguiente cálculo:

$$\psi^\dagger\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2 \quad . \quad (2.106)$$

Sin embargo, al aplicar la regla de transformación (2.78), se obtiene:

$$(\psi^\dagger\psi)' = (\psi')^\dagger(\psi') = (S\psi)^\dagger(S\psi) = \psi^\dagger S^\dagger S\psi \quad , \quad (2.107)$$

por lo cual se procede a calcular el factor $S^\dagger S$, entonces, partiendo de la expresión (2.79), se obtiene:

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} a_+ & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_+ & a_-\sigma_1 \\ a_-\sigma_1 & a_+ \end{pmatrix} \quad .$$

Desarrollando la multiplicación de las dos matrices se calcula:

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} a_+^2 + (a_-\sigma_1)^2 & (a_+a_-\sigma_1) + (a_+a_-\sigma_1) \\ (a_-\sigma_1)a_+ + a_+(a_-\sigma_1) & (a_-\sigma_1) + a_+^2 \end{pmatrix} \quad .$$

Realizando las operaciones de cada componente de la matriz resultante se obtiene:

$$S^\dagger S = \begin{pmatrix} a_+^2 + a_-^2\sigma_1^2 & 2(a_+a_-\sigma_1) \\ 2(a_+a_-\sigma_1) & a_+^2 + a_-^2\sigma_1^2 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.108)$$

Teniendo en cuenta que las expresiones para cada término de la matriz (2.108) son:

$$\sigma_1^2 = 1, a_+^2 + a_-^2 = \frac{1}{2}(\gamma + 1) + \frac{1}{2}(\gamma - 1) = \gamma \quad . \quad (2.109)$$

Y el término $2a_+a_-$ es:

$$2a_+a_- = 2 \left(-\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma-1)} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{2}(\gamma+1)} \right)$$

Multiplicando los factores de entre paréntesis resulta:

$$2a_+a_- = -2 \left(-\sqrt{\frac{1}{4}(\gamma-1)(\gamma+1)} \right)$$

Se reparte la raíz para el factor de $\sqrt{\frac{1}{4}}$, lo que resulta $\frac{1}{2}$ y se expresa el término $\sqrt{(\gamma-1)(\gamma+1)}$ como una diferencia de cuadrados de la forma $\sqrt{\gamma^2-1}$, es por esto que:

$$2a_+a_- = -2 \frac{1}{2} \sqrt{\gamma^2-1} = -\sqrt{\gamma^2-1} \quad .$$

Factorizando γ implica que:

$$2a_+a_- = -\gamma \sqrt{1 - \frac{1}{\gamma^2}} \quad .$$

De acuerdo con (2.100), $\frac{1}{\gamma^2} = (1 - \beta^2)$, es por esto que:

$$2a_+a_- = -\gamma \sqrt{1 - (1 - \beta^2)} \quad .$$

Lo que conduce a:

$$2a_+a_- = -\gamma\beta \quad . \quad (2.110)$$

Reemplazando (2.110) en (2.108) resulta que:

$$S^\dagger S = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta\sigma_1 \\ -\beta\sigma_1 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.111)$$

Evidentemente $S^\dagger S \neq 1$, por consiguiente:

$$\psi^\dagger \psi \neq (\psi^\dagger \psi)' \quad , \quad (2.112)$$

que no es invariante.

El espinor adjunto corresponde a la siguiente expresión, en donde se requieren signos negativos para la tercera y cuarta componente:

$$\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0 = (\psi_1^* \psi_2^* - \psi_3^* - \psi_4^*) \quad . \quad (2.113)$$

La siguiente cantidad es un invariante relativista:

$$\bar{\psi}\psi = \psi^\dagger \gamma^0 \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2 \quad . \quad (2.114)$$

De acuerdo con la regla de transformación

$$\psi \longrightarrow \psi' = \gamma^0 \psi \quad . \quad (2.115)$$

De lo cual se calcula:

$$(\bar{\psi}\psi)' = \bar{\psi}'\psi' = (\gamma^0 \psi)^\dagger \gamma^0 (\gamma^0 \psi) = \underbrace{\psi^\dagger \gamma^0}_{\bar{\psi}} \gamma^0 \gamma^0 \psi = \bar{\psi} \underbrace{(\gamma^0)^2}_1 \psi = \bar{\psi}\psi \quad . \quad (2.116)$$

En este sentido, $\bar{\psi}\psi$ es invariante bajo paridad, por lo cual es un escalar.

Puede ser posible construir un pseudo escalar de ψ :

$$\bar{\psi}\gamma^5\psi \implies \bar{\psi}'\gamma^5\psi' \quad , \quad (2.117)$$

donde,

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (2.118)$$

El factor i presente en la expresión para γ^5 es utilizado para compensar la unidad imaginaria que aparece en γ^2 , la cual esta en términos de σ^2 definida con componentes imaginarias. Además γ^5 presenta la propiedad de anticonmutar con todas las matrices γ y conmuta consigo misma, es decir:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = 0 \quad . \quad (2.119)$$

Expresado de otro modo:

$$\gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0 \quad . \quad (2.120)$$

Esto se tiene de que:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 0 \quad (\nu \neq \mu) \quad . \quad (2.121)$$

Ahora, bajo paridad, $\psi' = \gamma^0 \psi$

$$\bar{\psi}' \gamma^5 \psi' = (\gamma^0 \bar{\psi}) \gamma^5 (\gamma^0 \psi) \quad ,$$

donde $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, de esta manera:

$$\bar{\psi}' \gamma^5 \psi' = \psi^\dagger \underbrace{\gamma^0 \gamma^0}_1 \gamma^5 \gamma^0 \psi \quad ,$$

por tanto la igualdad se reduce a:

$$\bar{\psi}' \gamma^5 \psi' = \psi^\dagger \gamma^5 \gamma^0 \psi \quad .$$

De (2.120), $\gamma^5 \gamma^0 = -\gamma^0 \gamma^5$, así pues:

$$\bar{\psi}' \gamma^5 \psi' = -\psi^\dagger \gamma^0 \gamma^5 \psi \quad ,$$

y teniendo en cuenta nuevamente que $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$, entonces:

$$\bar{\psi}' \gamma^5 \psi' = -\bar{\psi} \gamma^5 \psi \quad . \quad (2.122)$$

Dado que ha cambiado un signo bajo paridad, entonces se obtiene un pseudoescalar. Se concluye de esta manera que $\psi \bar{\psi} \gamma^5 \psi$ y $\bar{\psi} \psi$ transforman de la misma manera bajo una transformación de Lorentz, pero bajo la reflexión espacial, paridad, transforman de manera opuesta, es decir, mientras que $\bar{\psi} \psi$ transforma como un escalar, $\bar{\psi} \gamma^5 \psi$ se transforma como un pseudoescalar.

Existen varias combinaciones lineales para construir cantidades con distintas reglas de transformación, éstas se muestran en la Tabla (2.1).

Donde,

$$\sigma^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.123)$$

El conjunto de matrices $\{1, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^\mu \gamma^5 \text{ y } \sigma^{\mu\nu}\}$ constituyen una base completa para el espacio de todas las matrices de 4×4 , es decir, que una matriz con estas dimensiones puede ser escrita como una combinación lineal de las 16 componentes indicadas en la Tabla (2.1).

Tabla 2.1: Cantidades que representan distintas combinaciones lineales y sus respectivas componentes.

$\bar{\psi}\psi$	Escalar	1 componente
$\bar{\psi}\gamma^5\psi$	Pseudoescalar	1 componente
$\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$	Vector	4 componentes
$\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$	Pseudovector	4 componentes
$\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$	Tensor antisimétrico	6 componentes

Fuente: Adaptada de [33].

2.2. El Fotón

En electrodinámica clásica, las ecuaciones de Maxwell, describen el comportamiento de los campos eléctricos \mathbf{E} y magnéticos \mathbf{B} producidos por una densidad de carga ρ y una densidad de corriente \mathbf{J} . En unidades cgs estas ecuaciones se representan como:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad . \quad (2.124)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad . \quad (2.125)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad . \quad (2.126)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad . \quad (2.127)$$

El tensor de intensidad de campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ se define como:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} F^{00} & F^{01} & F^{02} & F^{03} \\ F^{10} & F^{11} & F^{12} & F^{13} \\ F^{20} & F^{21} & F^{22} & F^{23} \\ F^{30} & F^{31} & F^{32} & F^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2.128)$$

Las ecuaciones de Maxwell no homogéneas expresadas en (2.124) y (2.127), pueden ser escritas de manera tensorial de la forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad , \quad (2.129)$$

donde, el cuadrivector de densidad de corriente J es expresado matemáticamente como:

$$J^\nu = (\rho c, \rho v_x, \rho v_y, \rho v_z) = (c\rho, \mathbf{J}) \quad . \quad (2.130)$$

Con el propósito de verificar la ecuación (2.129), se tomarán los casos para $\nu = 0, 1, 2, 3$ y se observarán si los resultados expresados coinciden con las ecuaciones de Maxwell no homogéneas, entonces:

Para el caso de $\nu = 0$ en (2.129), se obtiene:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{\partial}{\partial x^0} F^{00} + \frac{\partial}{\partial x^1} F^{10} + \frac{\partial}{\partial x^2} F^{20} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{30} \quad ,$$

donde F^{00} , F^{10} , F^{20} y F^{30} en (2.128) son 0, E_x , E_y y E_z respectivamente, así la expresión queda:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \quad .$$

Lo cual puede ser expresado como el producto vectorial del operador diferencial ∇ (nabla) y el campo eléctrico \mathbf{E} , de modo que:

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \nabla \cdot \mathbf{E} \quad . \quad (2.131)$$

Donde, $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)$ y $\mathbf{E} = E_x + E_y + E_z$. Por lo tanto, reemplazando (2.131) en (2.129) conduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} J^0 \quad .$$

De (2.130), la componente temporal de $J^0 = c\rho$, así:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} c\rho \quad .$$

Por consiguiente se tiene que:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad . \quad (2.132)$$

Ahora, para el caso de $\nu = 1$, se obtiene:

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \frac{\partial}{\partial x^0} F^{01} + \frac{\partial}{\partial x^1} F^{11} + \frac{\partial}{\partial x^2} F^{21} + \frac{\partial}{\partial x^3} F^{31} \quad .$$

De (2.130) se tiene que F^{01} , F^{11} , F^{21} y F^{31} son $-E_x$, 0, B_z y $-B_y$ respectivamente, por ende

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = \frac{\partial(-E_x)}{\partial(ct)} + \frac{\partial(0)}{\partial x} + \frac{\partial(B_z)}{\partial y} + \frac{\partial(-B_y)}{\partial z} \quad .$$

En este sentido,

$$\partial_\mu F^{\mu 1} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad . \quad (2.133)$$

Por otra parte, al calcular:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \right) - \hat{j} \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) + \hat{k} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad . \end{aligned} \quad (2.134)$$

De (2.134) se determina que la componente x de $\nabla \times \mathbf{B}$ es:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \quad . \quad (2.135)$$

Por lo tanto al reemplazar (2.135) en (2.133) se obtiene:

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 1} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_x \right) \\ &= \left[-\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B}) \right]_x \quad . \end{aligned} \quad (2.136)$$

Ahora, reemplazando (2.136) en (2.129)

$$\left[-\frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B}) \right]_x = \frac{4\pi}{c} J^1 = \frac{4\pi}{c} J^x \quad . \quad (2.137)$$

Como resultado, para la componente x se obtiene la cuarta ecuación de Maxwell expresada inicialmente en (2.127)

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad . \quad (2.138)$$

Ahora, se calcula $\partial_\mu F^{\mu\nu}$ con $\nu = 2$.

$$\partial_\mu F^{\mu 2} = \frac{\partial F^{02}}{\partial x^0} + \frac{\partial F^{12}}{\partial x^1} + \frac{\partial F^{32}}{\partial x^3} \quad .$$

De acuerdo a (2.128) $F^{02} = -E_y$, $F^{12} = -B_z$, $F^{22} = 0$ y $F^{32} = B_x$, de lo cual se obtiene:

$$\partial_\mu F^{\mu 2} = \frac{\partial(-E_y)}{\partial(ct)} + \frac{\partial(-B_z)}{\partial(x)} + \frac{\partial(0)}{\partial(y)} + \frac{\partial(B_x)}{\partial(z)} \quad .$$

Obteniendo de esta manera:

$$F^{\mu 2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + \left(-\frac{\partial B_z}{\partial x} + \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \quad . \quad (2.139)$$

De acuerdo a (2.134) la componente y de $\nabla \times \mathbf{B}$ es:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_y = -\left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \quad . \quad (2.140)$$

En consecuencia, si reemplazamos (2.140) en (2.139):

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 2} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} - \left(\frac{\partial B_z}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_y \quad . \end{aligned} \quad (2.141)$$

Lo que conduce a que la expresión (2.129) para $\nu = 2$ resulte:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_y = \frac{4\pi}{c} J_y \quad . \quad (2.142)$$

Para la componente y se tiene:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad . \quad (2.143)$$

Lo cual representa la cuarta ecuación de Maxwell (2.127).

Finalmente para la componente z , $\nu = 3$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu 3} = \frac{\partial F^{03}}{\partial(ct)} + \frac{\partial F^{13}}{\partial(x^1)} + \frac{\partial F^{123}}{\partial(x^2)} + \frac{\partial F^{33}}{\partial(x^3)} \quad .$$

De (2.128) F^{03} , F^{03} , F^{03} F^{03} son $-E_x$, B_y , $-B_x$ y 0 respectivamente, por lo que:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad . \quad (2.144)$$

La componente z de (2.130) es:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \quad , \quad (2.145)$$

entonces, al reemplazar (2.145) en (2.144) resulta:

$$\partial_\mu F^{\mu 3} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_z \quad , \quad (2.146)$$

por lo que la expresión (2.129) para $\nu = 3$ resulta:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} + (\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{4\pi}{c} J_z \quad . \quad (2.147)$$

Lo que conduce a:

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad . \quad (2.148)$$

Por lo tanto, se comprueba que la relación (2.129) expresa las ecuaciones de Maxwell no homogéneas.

Por otra parte, trabajando con la densidad de corriente J^ν , se despeja de la expresión (2.129):

$$J^\nu = \frac{c}{4\pi} \partial_\mu F^{\mu\nu} \quad . \quad (2.149)$$

Aplicando ∂_ν en (2.149):

$$\begin{aligned} \partial_\nu J^\nu &= \partial_\nu (\partial_\mu F^{\mu\nu}) = \frac{c}{4\pi} \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{c}{4\pi} \left[\frac{\partial_\nu \partial_\mu}{2} F^{\mu\nu} + \underbrace{\frac{\partial_\nu \partial_\mu}{2} F^{\mu\nu}}_{\mu \leftrightarrow \nu} \right] \\ &= \frac{c}{4\pi} \partial_\nu \partial_\mu [F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu}] \quad . \quad (2.150) \end{aligned}$$

Dado que $F^{\mu\nu}$ presenta la característica de ser un tensor antisimétrico, esto quiere decir que $F^{\nu\mu} = -F^{\mu\nu}$, entonces:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{c}{4\pi} \partial_\nu \partial_\mu [F^{\mu\nu} - F^{\mu\nu}] \quad ,$$

de modo que

$$\partial_\mu J^\mu = 0 \quad , \quad (2.151)$$

es decir, que J^μ no presenta divergencia. Ahora, expresando (2.151) en sus componentes temporal y espacial resulta:

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = \frac{\partial(c\rho)}{\partial(ct)} + \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = 0 \quad . \quad (2.152)$$

Lo cual conduce a:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad , \quad \text{Ecuación de continuidad} \quad (2.153)$$

La segunda ecuación de Maxwell (2.126), implica que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad . \quad (2.154)$$

Por lo tanto, reemplazando en (2.125), se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} &= 0 \\ \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (2.155)$$

para lo cual se debe cumplir que:

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla V \quad , \quad (2.156)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad . \quad (2.157)$$

Las relaciones (2.154) y (2.157) en notación relativista pueden ser escritas como:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad , \quad (2.158)$$

donde:

$$A^\mu = (V, \mathbf{A}) \quad . \quad (2.159)$$

El potencial V en electrodinámica clásica es una construcción matemática útil, debido a que, a partir de su formulación, éste se encarga de las ecuaciones homogéneas de Maxwell, (2.154) y (2.157). Reemplazando (2.158) en (2.129):

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad .$$

Aplicando ∂_μ en cada término del paréntesis se obtiene:

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad .$$

En consecuencia:

$$\square A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad , \quad (2.160)$$

donde se denota $\partial_\mu \partial^\mu = \square$. Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo una transformación gauge, es decir, al sumar un cuadrigradiante al cuadripotencial A_μ ,

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda \quad , \quad (2.161)$$

(con λ una función de la posición y del tiempo). Por lo que la invariancia bajo la transformación de gauge de la ecuación (2.158), resulta:

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu(A^\nu + \partial^\nu \lambda) - \partial^\nu(A^\mu + \partial^\mu \lambda) \\ &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu \lambda - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu \lambda = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad , \end{aligned} \quad (2.162)$$

lo cual conduce al resultado en (2.158). Se puede imponer una restricción adicional al potencial, por ejemplo:

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad , \quad (2.163)$$

Esta condición es invariante de gauge, debido a que:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A'^\mu &= \partial_\mu(A^\mu + \partial^\mu \lambda) = \cancel{\partial_\mu A^\mu} + \partial_\mu \partial^\mu \lambda \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \lambda \\ &\neq 0 \quad . \end{aligned} \quad (2.164)$$

Sin embargo con la condición (2.163), llamada la condición de Lorentz, en la ecuación (2.160) para el potencial⁴, resulta:

$$\begin{aligned}\square A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) &= \frac{4\pi}{c} J^\nu \\ \square A^\nu &= \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad .\end{aligned}\quad (2.165)$$

La condición de Lorentz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) en una ecuación de onda para el potencial vector, resulta:

$$\square A^\nu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A^\nu = 0 \quad , \quad (2.166)$$

por lo que $\square \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right)$. Al igual que para la ecuación de Dirac anteriormente trabajada, se requiere encontrar soluciones para una onda plana:

$$A^\mu(x) = a e^{\frac{-i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \epsilon^\mu(p) \quad , \quad (2.167)$$

donde a es un factor de normalización y ϵ^μ representa el vector de polarización, el cual caracteriza el spin del fotón. De forma genérica, reemplazando (2.167) en (2.166), se obtiene:

$$\square A^\nu = \partial_\mu \partial^\mu a e^{\frac{-i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \epsilon^\nu(p) \quad .$$

Aplicando derivada contravariante ∂^μ :

$$\square A^\nu = \partial_\mu \left(a \left(\frac{-i}{\hbar} p^\mu \right) e^{\frac{-i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \epsilon^\nu(p) \right) \quad .$$

Ahora, aplicando la derivada covariante ∂_μ , implica que:

$$\square A^\nu = a \left(\frac{-i p_\mu}{\hbar} \right) \left(\frac{-i p^\mu}{\hbar} \right) e^{\frac{-i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \epsilon^\nu(p) \quad .$$

Operando los términos entre paréntesis:

$$\square A^\nu = \frac{-a}{\hbar^2} p_\mu p^\mu e^{\frac{-i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \epsilon^\nu(p) \quad , \quad (2.168)$$

⁴Existen otras posibles elecciones de las condiciones de gauge, por ejemplo $A^0 = 0, \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$

La expresión (2.168) es igual a cero, sí y sólo sí, $p_\mu p^\mu = 0$, es decir:

$$p_\mu p^\mu = \left(\frac{E}{c}\right)^2 - |\mathbf{p}|^2 = 0 \quad , \quad (2.169)$$

por lo tanto:

$$E = \pm c|\mathbf{p}| \quad , \quad \text{Relación de dispersión para el fotón.} \quad (2.170)$$

La condición de Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, implica:

$$\partial \left(a e^{\frac{-i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \epsilon^\mu(p) \right) = \left(\frac{-i}{\hbar} p_\mu \right) e^{\frac{-i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \epsilon^\mu(p) = a e^{\frac{-i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \frac{-i}{\hbar} p_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad , \quad (2.171)$$

lo cual conduce a:

$$p_\mu \epsilon^\mu = 0 \quad . \quad (2.172)$$

El gauge de Coulomb implica $\epsilon^0 = 0$ y $\epsilon \cdot \mathbf{p} = 0$, es decir, el vector ϵ de polarización es perpendicular a la dirección de propagación, entonces un fotón libre esta polarizado transversalmente, dado que las ondas electromagnéticas son transversales. Si \mathbf{p} apunta en la dirección z , es decir, $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$ se obtienen dos vectores⁵ linealmente independientes a \mathbf{p} , el espacio de posibles ϵ vive en el plano perpendicular, que tiene como base:

$$\epsilon^{(1)} = (1, 0, 0) \quad , \quad (2.173)$$

$$\epsilon^{(2)} = (0, 1, 0) \quad , \quad (2.174)$$

son vectores unitarios con dirección x y y , satisfacen

$$\epsilon^{(i)} \cdot \mathbf{p} = 0 \quad . \quad (2.175)$$

La onda se mueve en la dirección z , así finaliza con dos grados de libertad.

⁵Una partícula con masa, de espín S admite $2S + 1$ orientaciones diferentes de espín. Una partícula sin masa solo tiene dos orientaciones de espín, independientemente de su espín, excepto para $S = 0$, la cual sólo tiene una orientación.

2.3. Reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica

Las reglas de Feynman son un conjunto consistente de reglas que fueron creadas por el físico teórico estadounidense Richard Feynman (1918-1988). Su objetivo, es el cálculo del elemento de matriz de dispersión reducida \mathcal{M} . Según [34] la amplitud para la dispersión de electrones es:

$$i\mathcal{M} = ie^2 \left(\bar{u}(p') \Gamma^\mu(p', p) u(p) \right) \frac{1}{q^2} \left(\bar{u}(k') \gamma_\mu u(k) \right) \quad , \quad (2.176)$$

donde $\Gamma^\mu(p', p)$ aparece en el elemento de la matriz S para la dispersión de un electrón de un campo electromagnético externo. Se puede usar argumentos generales para restringir la forma de $\Gamma^\mu(p', p)$. Al orden más bajo, $\Gamma^\mu = \gamma^\mu$. En general, Γ^μ es una expresión que involucra p, p', γ^μ , y constantes como la masa y carga m y e . Esta lista es exhaustiva, ya que no aparecen otros objetos en las reglas de feynman para evaluar los diagramas que contribuyen a Γ^μ . De acuerdo a la invariancia de Lorentz se puede reducir la forma de Γ^μ , ya que transforma como un vector, en el mismo sentido que lo hace γ^μ . Así Γ^μ puede ser expresado como:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu \quad . \quad (2.177)$$

El valor $\delta\Gamma^\mu$ será utilizado en el capítulo (3) para el cálculo de la corrección de vértice de electrones a un loop.

Dichas reglas dependen de las cantidades como masas y espines de las partículas involucradas en el proceso de dispersión. Esta dispersión puede ser descrita por unos gráficos llamados diagramas de Feynman que representan las trayectorias de las partículas en las fases intermedias de un proceso de colisión. Feynman introdujo por primera vez dichos diagramas en 1948, publicando su caracterización en el artículo de 1949 [35]. Los diagramas de Feynman constan de tres partes: líneas externas que representan las funciones de onda de las partículas entrantes y salientes, las líneas internas descritas por los propagadores y finalmente los vértices que representan las interacciones entre las partículas [36].

2.3.1. Reglas de Feynman

De acuerdo con Griffiths, 2008 [33], las reglas de Feynman para los procesos de electrodinámica cuántica, son:

1. Realizar la respectiva notación para las líneas externas e internas del diagrama de Feynman. A cada línea externa se le asocia un momento p_1, p_2, \dots, p_n , y a cada línea interna se le asocia un momento q_1, q_2, \dots ; para los dos casos se dibuja una flecha junto a la línea, la cual debe indicar la dirección positiva que será hacia adelante en el tiempo para las líneas externas⁶ y en una dirección arbitraria para las líneas internas.
2. Las líneas externas contribuyen con un factor de la siguiente manera:

Tabla 2.2: Factores que contribuyen las líneas externas en los diagramas de Feynman.

Partículas	Electrones	Positrones	Fotones
Entrando	 (u)	 (\bar{v})	 (ϵ_μ)
Saliendo	 (\bar{u})	 (v)	 (ϵ_μ^*)

Fuente: Adaptada de [33].

3. Un vértice de un diagrama de Feynman puede ser expresado por la Figura (2.1).

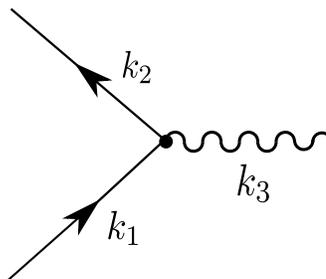


Figura 2.1: Representación del vértice en un diagrama de Feynman con dos líneas fermiónicas y una fotónica.

Fuente: Adaptada de [36].

⁶Para el caso de fermiones, se tendrá una flecha en la línea que identifique si la partícula es el electrón o el positrón.

Cada vértice contribuye con un factor de la forma:

$$ig_e \gamma^\mu \quad , \quad (2.178)$$

donde g_e representa la constante de acoplamiento (adimensional), la cual está relacionada con la carga del electrón: $g_e = e\sqrt{4\pi/\hbar c} = \sqrt{4\pi\alpha}$, con $\alpha = 1/\hbar c$.

4. Cada línea interna aporta con un factor de la forma:

$$\frac{i(\gamma^\mu q_\mu + mc)}{q^2 - m^2 c^2} \quad , \quad \text{Electrones y positrones} \quad (2.179)$$

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{q^2} \quad , \quad \text{Fotones} \quad (2.180)$$

5. Por cada vertice, se escribe la conservación de energía y momento representado por una función delta, dada por:

$$(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 + k_3) \quad , \quad (2.181)$$

donde las k_1, k_2 y k_3 se identifican como los tres cuadrimomentos que entran o salen del vértice, identificando así el signo positivo para los cuadrimomentos que entran y el signo negativo para los cuadrimomentos que salen del vértice.

6. Para cada momento interno q , se debe escribir un factor:

$$\frac{d^4 q}{(2\pi)^4} \quad , \quad (2.182)$$

y posteriormente integrar.

7. Cancelar la función delta expresada de la forma:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + \dots - p_n) \quad , \quad (2.183)$$

la cual corresponde a la conservación total de energía y momento y finalmente multiplicar por i , con lo cual se obtendrá \mathcal{M} .

8. Los diagramas de Feynman que presenten antisimetrización en el intercambio de dos electrones o positrones ya sean salientes o entrantes, o de un electrón entrante con un positrón saliente (o viceversa), se debe incluir un signo menos.

Capítulo 3

Momento magnético anómalo del muón

3.1. El muón

El muón es una partícula elemental masiva e inestable que lleva su nombre de la letra griega μ . Su descubrimiento se dio en el año 1936 por los físicos estadounidenses Carl David Anderson (1905-1991) y Seth Henry Neddermeyer (1907-1988), cuando realizaban el estudio de la radiación cósmica mediante campos electromagnéticos [37]. El muón tiene dos tipos de carga, la negativa μ^- (muón) y positiva μ^+ (antimuón), tiene espín de $1/2$, por ende es un fermión y presenta una masa inusual intermedia entre la masa del protón y la masa del electrón ($1/9 m_p$, $207 m_e$), lo que equivale a $105.65 MeV/c^2$. Esta masa intermedia hizo que en un principio al muón se lo llamara mesotróon, del griego meso, que significa intermedio. Sin embargo, con el tiempo fueron apareciendo nuevas partículas intermedias, las cuales fueron adoptando el nombre genérico de mesones. De esta manera se le asignó el nombre de muón con el fin de diferenciar a dicha partícula. De acuerdo con su vida media de $2.2 \mu s$, el muón tiene la segunda vida más larga entre todas las partículas inestables fundamentales (es decir, omitiendo las partículas estables, como el protón, el electrón y el neutrino) después del neutrón, y tiene la segunda masa más pequeña entre todas las partículas fundamentales después del electrón [38]. En la Tabla (3.1) se resumen algunas propiedades fundamentales de los muones.

De acuerdo con la clasificación suministrada por el Modelo Estándar, el muón, pertenece a la segunda generación de leptones (donde el electrón e pertenece a la primera y el tau τ a la tercera) y satisface también, como los demás leptones, la simetría CPT (Conjugación de carga, inversión de paridad e inversión temporal) con su respectiva antipartícula [39].

Tabla 3.1: Propiedades fundamentales del Muón

	μ^+	μ^-
Carga	+1	-1
Masa	206.768 277 (24)(m_e)	105.659 (1) (MeV/c^2)
Espín	1/2	1/2
Momento magnético (μ_μ/μ_p)	3.183 345 13 (39)	
Relación Giromagnética ($\mu_\mu/2\pi I$ en kHz/G , $I = 1/2$)	13.553 42	
Factor giromagnético ($g/2$) ($\mu_\mu = g(e\hbar/2m_\mu)I$, $I = 1/2$)	1.001 165 920 3 (15)	1.001 165 936 (12)
Tiempo de vida media en el vacío ($10^{-6}s$)	2.196 95 (6)	2.194 8 (10)
	2.197 078 (73)	(in flight)
Modo de decaimiento	$e^+ + \bar{\nu}_\mu + \nu_e$	(100 %)
	$e^+ + \gamma$	(1.7×10^{-10})
	$e^+ + e^- + e^+$	(1.9×10^{-9})
	$e^+ + \gamma + \gamma$	(1.125×10^{-8})

Fuente: Tomada de [38].

3.2. Cálculo a nivel de un loop: corrección de vértice de electrones.

A continuación se presenta el cálculo del momento magnético anómalo del electrón a nivel de un loop. Para esto se describirán las Reglas de Feynman para el diagrama de un loop de la Figura (3.1), teniendo como referencia [34].

1. A cada línea externa de la Figura (3.1) se asocia un momento p_1 , p_2 y p_3 , y a cada línea interna se asigna momentos q_1 , q_2 y q_3 .
2. De la segunda Regla de Feynman, las líneas externas contribuyen con $u(p_1)$ y $\bar{u}(p_2)$.

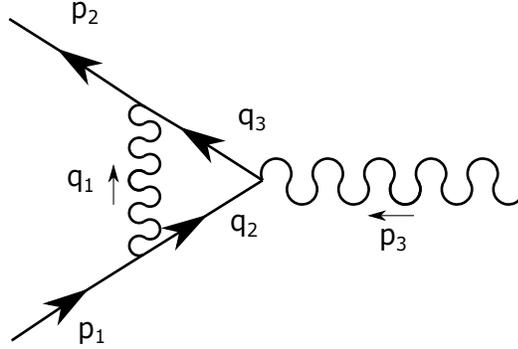


Figura 3.1: Diagrama de Feynman de un loop correspondiente a la evaluación de la función de vértice del electrón.

Fuente: Tomada de [34].

3. El diagrama presenta tres vértices que contribuyen con los factores:

$$(-ie\gamma^\mu), (-ie\gamma^\nu), (-ie\gamma^\rho).$$

4. El diagrama presenta tres líneas fermiónicas internas que contribuyen con los propagadores

$$\left(\frac{i(q_2 + m)}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{i(q_3 + m)}{q_3^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q_1^2 + i\epsilon} \right) .$$

5. Las funciones delta para cada vértice son:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 - q_2 - q_1), (2\pi)^4 \delta^4(q_2 + p_3 - q_3) \text{ y } (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_3 - p_2) .$$

6. Para cada momento se escriben los factores:

$$\frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} ,$$

y se integra.

Trabajando en unidades naturales $c = 1$, así pues, se obtiene parcialmente:

$$\begin{aligned} (-ie)\delta\Gamma^\mu(p', p) &= \iiint [\bar{u}(2)(-ie)\gamma^\mu u(1)](-ie\gamma^\nu)(-ie\gamma^\rho) \\ &\times \left(\frac{i(q_2 + m)}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{i(q_3 + m)}{q_3^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q_1^2 + i\epsilon} \right) \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - q_2 - q_1)(2\pi)^4 \delta^4(q_2 + p_3 - q_3)(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_3 - p_2) \\ &\times \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} . \end{aligned}$$

donde $\gamma^\mu q_2 = \not{q}_2$, $\gamma^\nu q_3 = \not{q}_3$. Cancelando un factor $(-ie)$ a cada lado de la ecuación:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) &= \iiint [\bar{u}(2)\gamma^\mu u(1)](-ie\gamma^\nu)(-ie\gamma^\rho) \\ &\quad \times \left(\frac{i(\not{q}_2 + m)}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{i(\not{q}_3 + m)}{q_3^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q_1^2 + i\epsilon} \right) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - q_2 - q_1) (2\pi)^4 \delta^4(q_2 + p_3 - q_3) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_3 - p_2) \\ &\quad \times \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} . \end{aligned}$$

Realizando el cálculo de la primera integral, donde la función delta es:

$$\delta^4(p_1 - q_2 - q_1) \Rightarrow p_1 - q_2 - q_1 = 0 \Rightarrow q_2 = p_1 - q_1 ,$$

entonces, reemplazando el valor de q_2 en la segunda función delta resulta:

$$\delta^4(q_2 + p_3 - q_3) = \delta^4(p_1 - q_1 + p_3 - q_3) .$$

Ahora se evalúa:

$$\delta^4(p_1 - q_1 + p_3 - q_3) \Rightarrow p_1 - q_1 + p_3 - q_3 = 0 \Rightarrow p_1 + p_3 = q_1 + q_3 .$$

Entonces la función delta $\delta^4(q_1 + q_3 - p_2)$ resulta $\delta^4(p_1 + p_3 - p_2)$, así se tiene:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) &= \int [\bar{u}(2)\gamma^\mu u(1)](-ie\gamma^\nu)(-ie\gamma^\rho) \\ &\quad \times \left(\frac{i(\not{q}_2 + m)}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{i(\not{q}_3 + m)}{q_3^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q_1^2 + i\epsilon} \right) \\ &\quad \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_3 - p_2) \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} . \end{aligned} \quad (3.1)$$

7. Luego, se cancela el factor global δ y se multiplica por i :

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) &= i \int \bar{u}(2)\gamma^\mu u(1)(-ie\gamma^\nu)(-ie\gamma^\rho) \\ &\quad \times \left(\frac{i(\not{q}_2 + m)}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{i(\not{q}_3 + m)}{q_3^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q_1^2 + i\epsilon} \right) \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} . \end{aligned}$$

Ordenando términos:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) = & \int \frac{d^4q_2}{(2\pi)^4} (-ie^2) \bar{u}(2) \gamma^\mu u(1) \gamma^\nu \gamma^\rho \\ & \times \left(\frac{(\not{q}_2 + m)}{q_2^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{(\not{q}_3 + m)}{q_3^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \left(\frac{-ig_{\mu\nu}}{q_1^2 + i\epsilon} \right) . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Cambiando notación al texto guía se obtiene:

$$p_1 \rightarrow p$$

$$p_2 \rightarrow p'$$

Dado que $q_1 = p_1 - q_2$, entonces:

$$q_1 \rightarrow p - k$$

$$q_2 \rightarrow k$$

$$q_3 \rightarrow k' .$$

De esta manera, reemplazando dicha notación en la expresión obtenida en (3.2) resulta:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) = & \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} (-ie^2) \left(\frac{g_{\nu\rho}}{(k-p)^2 + i\epsilon} \right) \bar{u}(p') \gamma^\nu \\ & \times \left(\frac{(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \gamma^\mu \left(\frac{(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \gamma^\rho u(p) . \end{aligned} \quad (3.3)$$

Usando la identidad de contracción $g_{\nu\rho} \gamma^\rho = \gamma_\nu$, se obtiene: $\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu = -2\gamma^\mu$. De esta manera (3.3) resulta:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p, p') = & (-ie^2)(-2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p') (\not{k}' + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) u(p)}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \\ \\ \delta\Gamma^\mu(p, p') = & 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p') [\not{k}' \gamma^\mu \not{k} + \not{k}' \gamma^\mu m + m \gamma^\mu \not{k} + m^2 \gamma^\mu] u(p)}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} . \end{aligned} \quad (3.4)$$

Trabajando con el término de la expresión (3.4), se calcula:

$$[\not{k}' \gamma^\mu \not{k} + \not{k}' \gamma^\mu m + m \gamma^\mu \not{k} + m^2 \gamma^\mu] = \not{k}' \gamma^\mu \not{k} + m^2 \gamma^\mu + 2\gamma^\mu \gamma^\mu m(k' + k)$$

donde $\gamma^\mu \gamma^\mu = (\gamma)^2 = -1$, lo que implica que:

$$[k' \gamma^\mu k + k' \gamma^\mu m + m \gamma^\mu k + m^2 \gamma^\mu] = k' \gamma^\mu k + m^2 \gamma^\mu - 2m(k' + k)$$

De esta manera, la expresión (3.4) resulta:

$$\delta\Gamma^\mu(p', p) = 2ie^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u}(p')[k \gamma^\mu k' + m^2 \gamma^\mu - 2m(k + k')]u(p)}{((k - p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} \quad (3.5)$$

De la ecuación (3.5) se debe tener en cuenta que los términos $+i\epsilon$ en los denominadores no se pueden descartar, ya que son necesarios para una adecuada evaluación de la integral de momento para un loop.

3.2.1. Parámetros de Feynman

Con respecto a la integral presente en la ecuación (3.5), se procede a realizar su respectivo cálculo a través de un método conocido como los parámetros de Feynman. El objetivo de este método es “exprimir” los tres factores del denominador de (3.5) en un sólo polinomio cuadrático en k , elevado a la tercera potencia. Luego se puede realizar el cambio de k por una constante para completar el cuadrado en este polinomio y evaluar la integral restante con simetría esférica sin dificultad. Para esto, se debe introducir parámetros auxiliares a integrar. Se empieza por el caso más simple con dos factores en el denominador, usando la identidad:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dx dy \delta(x + y - 1) \frac{1}{[xA + yB]^2} \quad (3.6)$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{(k-p)^2(k^2-m^2)} = \int_0^1 dx dy \delta(x + y - 1) \frac{1}{[x(k-p)^2 + y(k^2-m^2)]^2} \quad .$$

Calculando el término en el denominador $x(k-p)^2 + y(k^2-m^2) = x(k^2 - 2k \cdot p + p^2) + yk^2 - ym^2 = k^2(x+y) - 2xk \cdot p + xp^2 - ym^2$. De la función $\delta(x+y-1)$ se tiene que $x+y=1$ por lo que $k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - ym^2$, así entonces:

$$\frac{1}{(k-p)^2(k^2-m^2)} = \int_0^1 dx dy \delta(x + y - 1) \frac{1}{[k^2 - 2xk \cdot p + xp^2 - ym^2]^2} \quad .$$

Si se asigna a $l \equiv k - xp$, se observa que el denominador depende solo de l^2 . La integración sobre d^4k ahora será mas fácil ya que $d^4k = d^4l$ y el integrando es esféricamente simétrico con respecto a l . Las variables x y y que hacen posible esta transformación se llaman parámetros de Feynman. La integral de la expresión (3.5) implica un denominador con tres factores, por lo que se requiere una identidad ligeramente mejor. Al diferenciar (3.6) con respecto a B , se obtiene:

$$\frac{1}{AB^n} = \int_0^1 dx dy \delta(x + y - 1) \frac{ny^{n-1}}{[xA + yB]^{n+1}} \quad (3.7)$$

Sin embargo, esto todavía no es lo suficientemente bueno. La fórmula que se necesita es:

$$\frac{1}{A_1 A_2 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{[x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots x_n A_n]^n} \quad (3.8)$$

La prueba de esta identidad es por inducción. Para el caso de $n = 2$ se obtiene ecuación (3.6). A continuación se presenta de manera mas general la identidad (3.8), obteniendo:

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta\left(\sum x_i - 1\right) \frac{\prod x_i^{m_i-1} \Gamma(m_1 + \dots + m_n)}{[\sum x_i A_i]^{\sum m_i} \Gamma(m_1) \dots \Gamma(m_n)} \quad (3.9)$$

Esta fórmula se cumple cuando los m_i no son enteros y es posible su aplicación en otros casos.

3.2.2. Evaluación de los factores de forma

Aplicando la identidad (3.8) en el denominador de la ecuación (3.5), se obtiene:

$$\frac{1}{((k-p)^2 + i\epsilon)(k'^2 - m^2 + i\epsilon)(k^2 - m^2 + i\epsilon)} = \int_0^1 dx dy dz \times \delta(x + y + z - 1) \frac{2}{D^3} \quad (3.10)$$

donde:

$$D = x(k^2 - m^2 + i\epsilon) + y(k'^2 - m^2 + i\epsilon) + z((k-p)^2 + i\epsilon) \quad .$$

Separando en cada término el factor $i\epsilon$ por x , y y z , se tiene como resultado:

$$D = x(k^2 - m^2) + x(i\epsilon) + y(k'^2 - m^2) + y(i\epsilon) + z(k-p)^2 + z(i\epsilon) \quad (3.11)$$

Ordenando términos y factorizando $i\epsilon$

$$\begin{aligned} D &= x(k^2 - m^2) + y(k'^2 - m^2) + z(k - p)^2 + (x + y + z)i\epsilon \\ &= xk^2 - xm^2 + yk'^2 - ym^2 + z(k^2 - 2kp + p^2) + (x + y + z)i\epsilon \quad . \end{aligned} \quad (3.12)$$

De la relación $k' = k + q$, se tiene que: $k'^2 = k^2 + 2kq + q^2 \implies yk'^2 = yk^2 + 2yqk + yq^2$. Así, se reemplaza yk'^2 en el tercer término de la ecuación (3.12), obteniendo de esta manera:

$$D = xk^2 - xm^2 + yk^2 + 2yqk + yq^2 - ym^2 + zk^2 - 2zkp + zp^2 + (x + y + z)i\epsilon \quad .$$

Factorizando términos:

$$D = k^2(x + y + z) - (x + y)m^2 + 2k(yq - zp) + yq^2 + zp^2 + (x + y + z)i\epsilon \quad . \quad (3.13)$$

De (3.10) se determina a partir de la función delta

$$\delta(x + y + z - 1)$$

que

$$x + y + z = 1 \quad , \quad (3.14)$$

entonces la expresión resultante en (3.13) es:

$$D = k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + yq^2 + zp^2 - (x + y)m^2 + i\epsilon \quad . \quad (3.15)$$

Sumando y restando el término $(yq - zp)^2$ en la ecuación (3.15):

$$\begin{aligned} D &= \underbrace{k^2 + 2k \cdot (yq - zp) + (yq - zp)^2}_{(k+(yq-zp))^2} - (yq - zp)^2 + yq^2 + zp^2 - (x + y)m^2 + i\epsilon \\ &= (k + (yq - zp))^2 - (yq - zp)^2 + yq^2 + zp^2 - (x + y)m^2 + i\epsilon \quad . \end{aligned} \quad (3.16)$$

Denotando $l = k + (yq - zp)$, entonces:

$$D = l^2 - (yq - zp)^2 + yq^2 + zp^2 - (x + y)m^2 + i\epsilon \quad .$$

Desarrollando $(yq - zp)^2$ resulta:

$$\begin{aligned} D &= l^2 - [y^2q^2 - 2yzq \cdot p + z^2p^2] + yq^2 + zp^2 - (x + y)m^2 + i\epsilon \\ D &= l^2 - y^2q^2 + 2yzq \cdot p - z^2p^2 + yq^2 + zp^2 - (x + y)m^2 + i\epsilon \quad . \end{aligned} \quad (3.17)$$

Considerando la conservación global del momento:

$$(p + q)^2 = p'^2 = m^2 \quad .$$

Calculando el cuadrado de $p + q$, se obtiene:

$$p^2 + 2p \cdot q + q^2 = m^2 \quad .$$

Se reemplaza $p^2 = m^2$, lo que implica que:

$$m^2 + 2p \cdot q + q^2 = m^2 \quad .$$

Cancelando los términos m^2 de cada lado de la expresión conduce a:

$$2p \cdot q + q^2 = 0 \quad .$$

De modo que:

$$2p \cdot q = -q^2 \quad . \quad (3.18)$$

Reemplazando (3.18) en (3.17), se obtiene:

$$D = l^2 - y^2q^2 - yzq^2 - z^2p^2 + yq^2 + zp^2 - (x + y)m^2 + i\epsilon \quad , \quad (3.19)$$

donde $-z^2p^2 + zp^2 = zp^2(1 - z)$ y considerando (3.14), se deduce que $\Rightarrow x + y = 1 - z$.

Por lo cual, la expresión (3.19) que resulta es:

$$D = l^2 - y^2q^2 - yzq^2 - yq^2 + zp^2(1 - z) - (1 - z)m^2 + i\epsilon \quad . \quad (3.20)$$

Trabajando el quinto y sexto término del lado derecho de (3.20), conduce a:

$$zp^2(1 - z) - (1 - z)m^2 = zm^2(1 - z) - (1 - z)m^2 \quad .$$

Factorizando $m^2(1 - z)$:

$$zp^2(1 - z) - (1 - z)m^2 = m^2(1 - z)(z - 1) \quad .$$

De $(z - 1)$ se factoriza un -1 , por tal razón $(z - 1) = -(1 - z)$. Así:

$$zp^2(1 - z) - (1 - z)m^2 = -m^2(1 - z)(1 - z) \quad .$$

De esta manera:

$$zp^2(1 - z) - (1 - z)m^2 = -m^2(1 - z)^2 \quad .$$

Por lo tanto:

$$D = l^2 - y^2q^2 - yzq^2 - yq^2 - m^2(1 - z)^2 + i\epsilon$$

Factorizando yq^2 , se obtiene:

$$D = l^2 + yq^2[-y - z + 1] - m^2(1 - z)^2 + i\epsilon \quad . \quad (3.21)$$

Dado que, $x + y + z = 1 \Rightarrow x = 1 - y - z$, la expresión es:

$$\begin{aligned} D &= l^2 + xyq^2 - m^2(1 - z)^2 + i\epsilon \\ D &= l^2 - \Delta + i\epsilon \quad , \end{aligned} \quad (3.22)$$

donde

$$l = k + yq - zp \quad . \quad (3.23)$$

y

$$\Delta = -xyq^2 + (1 - z)^2m^2 \quad . \quad (3.24)$$

Dado que $q^2 < 0$ para un proceso de dispersión, Δ es positivo, se puede considerar como un término de masa efectivo.

Ahora, se expresará el numerador de la ecuación (3.5) en términos de l . Esta tarea se simplifica al observar que D depende sólo de la magnitud de l , entonces:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu}{D^3} = 0 \quad (3.25)$$

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l^\mu l^\nu}{D^3} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{\frac{1}{4}g^{\mu\nu}l^2}{D^3} \quad (3.26)$$

La primera identidad (3.25) se desprende de la simetría. De la segunda identidad, (3.26), se debe tener en cuenta que la integral desaparece por simetría, a menos que $\mu = \nu$. Por lo tanto, la invariancia de Lorentz requiere que se obtenga algo proporcional a $g^{\mu\nu}$.

De la ecuación (3.5), ahora se requiere trabajar el numerador:

$$\bar{u}(p')[\not{k}\gamma^\mu\not{k}' + m^2\gamma^\mu - 2m(k + k')^\mu]u(p) \quad . \quad (3.27)$$

Considerando: $l \equiv k + yq - zp \Rightarrow k = l - yq + zp$, $k' = k + q$, se calcula:

$$2m(k + k')^\mu = 2m(k + k + q)^\mu = 2m(2k + q)^\mu \quad .$$

Reemplazando el valor de k :

$$2m(k + k')^\mu = 2m(2(l - yq + zp) + q)^\mu \quad .$$

Resolviendo el término $2(l - yq + zp)$:

$$2m(k + k')^\mu = 2m(2l - 2yq + 2zp + q)^\mu \quad .$$

Ahora, se factoriza $q(1 - 2y)$ y se reparte el índice μ en cada término del paréntesis, obteniendo de esta manera:

$$2m(k + k')^\mu = 2m(2l^\mu + (1 - 2y)q + 2zp^\mu) \quad .$$

Finalmente se multiplica el factor $2m$ a cada término entre paréntesis, lo que conduce a:

$$2m(k + k')^\mu = 4ml^\mu + 2m((1 - 2y)q + 2zp^\mu) \quad . \quad (3.28)$$

Así entonces, al realizar:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{2m(k+k')^\mu}{D^3} &= \int \frac{4ml^\mu + 2m((1-2y)q + 2zp^\mu)}{D^3} \\ &= \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4ml^\mu}{D^3} + \int \frac{2m((1-2y)q + 2zp^\mu)}{D^3} . \end{aligned}$$

De acuerdo con (3.25), entonces:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{4ml^\mu}{D^3} = 0 . \quad (3.29)$$

Dado que este término se cancela, entonces de (3.28) sólo queda el término de:

$$2m(k+k')^\mu = 2m((1-2y)q + 2zp^\mu) . \quad (3.30)$$

Ahora, se trabaja el primer término del numerador de (3.27)

$$\not{k}\gamma^\mu\not{k}' = \not{k}\gamma^\mu(\not{k} + \not{q}) .$$

De (3.23) se despeja el valor de k y se realiza el respectivo reemplazo para \not{k} , con lo cual se obtiene:

$$\not{k}\gamma^\mu\not{k}' = (l - y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu(l + (1-y)\not{q} + z\not{p}) .$$

Se procede a repartir γ^ν considerando que $\gamma^\mu l = l$, por tanto:

$$\not{k}\gamma^\mu\not{k}' = l\gamma^\mu l + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1-y)\not{q} + z\not{p}) .$$

donde:

$$l\gamma^\mu l = (2l^\mu - l\gamma^\mu)l = 2l^\mu l - l^2 l - l^2 \gamma^\mu = 2 \left(\frac{1}{4} \gamma_\nu g^{\mu\nu} l^2 \right) - l^2 \gamma^\mu = \frac{1}{2} l^2 \gamma^\mu - l^2 \gamma^\mu = -\frac{1}{2} l^2 \gamma^\mu ,$$

por lo tanto:

$$\not{k}\gamma^\mu\not{k}' = -\frac{1}{2} l^2 \gamma^\mu + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1-y)\not{q} + z\not{p}) . \quad (3.31)$$

Reemplazando (3.30), (3.31) en (3.27), se obtiene:

$$\bar{u}(p') \left[-\frac{1}{2} \gamma^\mu l^2 + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1-y)\not{q} + z\not{p}) + m^2 \gamma^\mu - 2m((1-2y)q^\mu + 2zp^\mu) \right] u(p) . \quad (3.32)$$

Ahora, el propósito es poner el numerador, ecuación (3.32) en una forma más útil. Se requiere agrupar todo en términos proporcionales a γ^μ y $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$. La forma mas directa es conseguir que (3.32) resulte de la forma:

$$\gamma^\mu \cdot A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + q^\mu \cdot C \quad .$$

Para esto, se requerirá de ciertas relaciones de anticonmutación:

$$\begin{aligned} \not{p}\gamma^\mu &= 2p^\mu - \gamma^\mu\not{p} \quad , \\ \not{p}u(p) &= mu(p) \rightarrow \text{Ecuación de Dirac} \quad , \\ \bar{u}(p')\not{p}' &= \bar{u}(p')m \quad , \\ \bar{u}(p')\not{q}u(p) &= 0 \quad . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Además, recordar que: $x + y + z = 1$.

Así, se trabajará con el numerador expresado en la ecuación (3.32). Para el término: $(-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu((1-y)\not{q} + z\not{p})$, se factoriza dos signos menos, por lo tanto:

$$-(y\not{q} - z\not{p})\gamma^\mu(-1)((y-1)\not{q} - z\not{p}) = (y\not{q} - z\not{p})\gamma^\mu((y-1)\not{q} - z\not{p}) \quad . \quad (3.34)$$

Reemplazando (3.34) en (3.32), resulta:

$$\bar{u}(p')\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 + (y\not{q} - z\not{p})\gamma^\mu((y-1)\not{q} - z\not{p}) + m^2\gamma^\mu - 2m((1-2y)\not{q}^\mu + 2z\not{p}^\mu)\right]u(p) \quad . \quad (3.35)$$

De la expresión (3.35) se trabaja con $\bar{u}(p')[(y\not{q} - z\not{p})\gamma^\mu((y-1)\not{q} - z\not{p})]u(p)$, del cual se repartirá el factor γ^μ en cada término del paréntesis, de modo que:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p')[(y\not{q} - z\not{p})\gamma^\mu((y-1)\not{q} - z\not{p})]u(p) &= \bar{u}(p')[y\not{q}\gamma^\mu(y-1)\not{q} - (y\not{q})\gamma^\mu(z\not{p}) \\ &\quad - (z\not{p})\gamma^\mu(y-1)\not{q} + (z\not{p})\gamma^\mu(z\not{p})]u(p) \quad . \end{aligned}$$

Ordenando términos:

$$\bar{u}(p')[y(y-1)\not{q}\gamma^\mu\not{q} - yz\not{q}\gamma^\mu\not{p} - z(y-1)\not{p}\gamma^\mu\not{q} + z^2\not{p}\gamma^\mu\not{p}]u(p) \quad . \quad (3.36)$$

De la expresión (3.36), se va a trabajar con cada término, con el fin de utilizar las relaciones de conmutación anteriormente expuestas.

■ Primer término

$$\bar{u}(p')[y(y-1)q\gamma^\mu q]u(p) = y(y-1)\bar{u}(p')[q\gamma^\mu q]u(p) \quad .$$

Usando $q\gamma^\mu = 2q^\mu - \gamma^\mu q$

$$\bar{u}(p')[y(y-1)q\gamma^\mu q]u(p) = y(y-1)\bar{u}(p')[(2q^\mu - \gamma^\mu q)q]u(p) \quad ,$$

Multiplicando q por $2q^\mu$ y $\gamma^\mu q$ y considerando $qq = q^2$, se tiene que:

$$\bar{u}(p')[y(y-1)q\gamma^\mu q]u(p) = y(y-1)\bar{u}(p')[(2q^\mu q - \gamma^\mu q^2)]u(p) \quad ,$$

de esta manera:

$$\bar{u}(p')[y(y-1)q\gamma^\mu q]u(p) = \bar{u}(p')[y(y-1)(2q^\mu q - \gamma^\mu q^2)]u(p) \quad . \quad (3.37)$$

■ Segundo término

$$\bar{u}(p')[yzq\gamma^\mu p]u(p) \quad ,$$

usando: $pu(p) = mu(p)$, por lo tanto:

$$\bar{u}(p')[yzq\gamma^\mu p]u(p) = \bar{u}(p')[yzq\gamma^\mu m]u(p) \quad .$$

De esta manera:

$$\bar{u}(p')[yzq\gamma^\mu p]u(p) = \bar{u}(p')[yzmq\gamma^\mu]u(p) \quad . \quad (3.38)$$

■ Tercer término

$$\bar{u}(p')[z(y-1)p\gamma^\mu q]u(p) \quad , \quad (3.39)$$

usando: $p' = p + q \implies p = p' - q$, por lo tanto:

$$\bar{u}(p')[z(y-1)(p' - q)\gamma^\mu q]u(p) = \bar{u}(p')[z(y-1)(p'\gamma^\mu q - z(y-1)q\gamma^\mu q)]u(p) \quad ,$$

usando: $\bar{u}(p')p' = \bar{u}(p')m$, $q\gamma^\mu = 2q^\mu - \gamma^\mu q$ y $qq = q^2$ se obtiene:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p')[z(y-1)m\gamma^\mu q - z(y-1)(2q^\mu - \gamma^\mu q)q]u(p) \\ & = \bar{u}(p')[z(y-1)m\gamma^\mu q + z(y-1)(2q^\mu q - q^2\gamma^\mu)]u(p) \quad . \quad (3.40) \end{aligned}$$

■ Cuarto término

$$\bar{u}(p')[z^2 \not{p} \gamma^\mu \not{p}]u(p) \quad ,$$

usando $\not{p} \gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu \not{p}$ resulta:

$$\bar{u}(p')[z^2 \not{p} \gamma^\mu \not{p}]u(p) = \bar{u}(p')[z^2(2p^\mu \not{p} - \gamma^\mu \not{p} \not{p})]u(p) \quad ,$$

por lo tanto:

$$\bar{u}(p')[z^2 \not{p} \gamma^\mu \not{p}]u(p) = \bar{u}(p')[z^2(2p^\mu \not{p} - \gamma^\mu p^2)]u(p) \quad . \quad (3.41)$$

Reemplazando las expresiones obtenidas en (3.37), (3.38), (3.39) y (3.41) en (3.36), se obtiene la expresión del numerador:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p')[y(y-1)\not{q}\gamma^\mu\not{q} - yzq\gamma^\mu\not{p} - z(y-1)\not{p}\gamma^\mu\not{q} + z^2\not{p}\gamma^\mu \\ & = \bar{u}(p')[y(y-1)(2q^\mu\not{q} - q^2\gamma^\mu - yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu\not{q} \\ & + (y-1)z(2q^\mu\not{q} - q^2\gamma^\mu) + z^2(2p^\mu\not{p} - p^2\gamma^\mu)]u(p) \quad , \end{aligned} \quad (3.42)$$

De la ecuación (3.42) se expresa el primer y último término de acuerdo a las reglas de conmutación así:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p')[y(y-1)(2q^\mu\not{q})]u(p) = y(y-1)2q^\mu\bar{u}(p')\not{q}u(p) \quad , \\ & \bar{u}(p')[z^2 2p^\mu\not{p}]u(p) = z^2 2p^\mu\bar{u}(p')\not{p}u(p) = z^2 2p^\mu m u(p) \quad . \end{aligned}$$

Entonces el numerador expresado en la ecuación (3.42) es:

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p')[-y(y-1)q^2\gamma^\mu - yzmq\gamma^\mu \\ & - (y-1)zm\gamma^\mu\not{q} - (y-1)zq^2\gamma^\mu + z^2(2p^\mu m - m^2\gamma^\mu)]u(p) \quad . \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ahora, de la expresión (3.43) se trabaja el término:

$$-yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu\not{q} = -yzmq\gamma^\mu - yzm\gamma^\mu\not{q} + zm\gamma^\mu\not{q} \quad .$$

Factorizando $-yzm$, se llega a la expresión:

$$-yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu\not{q} = -yzm(q\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{q}) + zm\gamma^\mu\not{q} \quad .$$

De acuerdo a la expresión: $q\gamma^\mu = 2q^\mu - \gamma^\mu q \longrightarrow q\gamma^\mu + \gamma^\mu q = 2q^\mu$, entonces:

$$-yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu q = -yzm2q^\mu + zm\gamma^\mu q \quad ,$$

donde $q = \not{p}' - \not{p}$, por lo que:

$$-yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu q = -yzm2q^\mu + zm\gamma^\mu(\not{p}' - \not{p}) \quad ,$$

Multiplicando $zm\gamma^\mu$ en cada término del paréntesis, conduce que:

$$-yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu q = -yzm2q^\mu - zm\gamma^\mu \not{p} + zm\gamma^\mu \not{p}' \quad ,$$

donde $\not{p}u(p) = mu(p)$ y $\gamma^\mu \not{p}' = 2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu$. Así:

$$-yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu q = -yzm2q^\mu - zm^2\gamma^\mu + zm(2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu) \quad .$$

Multiplicando zm por cada término del paréntesis, se obtiene que:

$$-yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu q = -yzm2q^\mu - zm^2\gamma^\mu + zm2p'^\mu - zm\not{p}'\gamma^\mu \quad .$$

Usando la relación: $\bar{u}(p')\not{p}' = m\bar{u}(p')$. De esta manera:

$$-yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu q = -yzm2q^\mu - zm^2\gamma^\mu + zm2p'^\mu - zm^2\gamma^\mu \quad .$$

Sumando términos comunes:

$$-yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu q = -yzm2q^\mu - 2zm^2\gamma^\mu + 2zmp'^\mu \quad .$$

Reemplazando la expresión: $p'^\mu = p^\mu + q^\mu$, se obtiene:

$$-yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu q = -yzm2q^\mu - 2zm^2\gamma^\mu + 2zmp^\mu + 2zmq^\mu \quad ,$$

Factorizando q^μ y ordenando términos, conduce a:

$$-yzmq\gamma^\mu - (y-1)zm\gamma^\mu q = -2m^2z\gamma^\mu + 2mz(1-y)q^\mu + 2mzp^\mu \quad , \quad (3.44)$$

Reemplazando la expresión (3.44) en (3.43), resulta:

$$\bar{u}(p')[y(y-1)(-q^2\gamma^\mu) + (-2m^2z\gamma^\mu + 2mz(1-y)q^\mu + 2mzp^\mu) +$$

$$\begin{aligned}
 & (y-1)(-zq^2\gamma^\mu) + z^2(2p^\mu m - m^2\gamma^\mu)]u(p) \\
 & = \bar{u}(p')[\gamma^\mu(-q^2y(y-1) - 2m^2z - q^2(y-1)z - m^2z^2) \\
 & + 2mz(1-y)q^\mu + 2mzp^\mu + 2z^2p^\mu m]u(p) \quad ,
 \end{aligned}$$

Factorizando $-q^2$, $-m^2z$ y q^μ se llega a la expresión:

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}(p')[y(y-1)(-q^2\gamma^\mu) + (-2m^2z\gamma^\mu + 2mz(1-y)q^\mu + 2mzp^\mu) + \\
 & (y-1)(-zq^2\gamma^\mu) + z^2(2p^\mu m - m^2\gamma^\mu)]u(p) \\
 & = \bar{u}(p')[\gamma^\mu(-q^2(y^2 - y + yz - z) - m^2z(2+z)) \\
 & + q^\mu(2mz(1-y)) + p^\mu(2mz(1+z))]u(p) \quad ,
 \end{aligned}$$

dado que $x + y + z = 1$, entonces: $y + z = 1 - x$, por lo tanto:

$$y^2 - y + yz - z = (1-x)(y-1) = -(1-x)(1-y) \quad ,$$

por lo tanto, la expresión del numerador resulta:

$$\bar{u}(p')[\gamma^\mu((1-x)(1-y)q^2 - m^2z(2+z)) + q^\mu(2mz(1-y)) + p^\mu(2mz(1+z))]u(p) \quad . \quad (3.45)$$

Reemplazando (3.45) en (3.35), se obtiene hasta el momento, la expresión para el numerador así:

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}(p') \left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 + \gamma^\mu(q^2(1-x)(1-y) - m^2z(2+z)) + q^\mu(2mz(1-y)) \right. \\
 & \left. + p^\mu 2mz(1+z) + m^2\gamma^\mu - 2m((1-2y)q^\mu + 2zp^\mu) \right] u(p) \quad .
 \end{aligned}$$

Agrupando términos comunes para q^μ y p^μ :

$$\begin{aligned}
 & \bar{u}(p') \left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 + \gamma^\mu(q^2(1-x)(1-y) - m^2z(2+z)) + m^2\gamma^\mu \right. \\
 & \left. + q^\mu[2mz(1-y) - 2m(1-2y)] + p^\mu[2mz(1+z) - 4mz] \right] u(p) \quad . \quad (3.46)
 \end{aligned}$$

Trabajando con el término:

$$\begin{aligned}
 2mz(1+z) - 4mz & = 2mz + 2mz^2 - 4mz \\
 & = -2mz + 2mz^2 \\
 & = 2mz(z-1) \quad .
 \end{aligned}$$

Así, (3.46) es:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 + \gamma^\mu(q^2(1-x)(1-y) - m^2z(2+z)) + m^2\gamma^\mu \right. \\ \left. + q^\mu[2mz(1-y) - 2m(1-2y)] + p^\mu[2mz(z-1)] \right] u(p) \quad . \end{aligned} \quad (3.47)$$

Considerando:

$$p^\mu = \frac{1}{2}(p+p')^\mu + \frac{1}{2}(p-p')^\mu = \frac{1}{2}(p+p')^\mu - \frac{1}{2}q^\mu \quad ,$$

entonces:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 + \gamma^\mu(q^2(1-x)(1-y) - m^2z(2+z)) + m^2\gamma^\mu \right. \\ \left. + q^\mu[2mz(1-y) - 2m(1-2y)] + \left(\frac{1}{2}(p+p')^\mu - \frac{1}{2}q^\mu \right) [2mz(z-1)] \right] u(p) \quad . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Denotando:

$$I = q^\mu[2mz(1-y) - 2m(1-2y)] + \left(\frac{1}{2}(p+p')^\mu - \frac{1}{2}q^\mu \right) [2mz(z-1)] \quad .$$

Multiplicando el término $2mz(z-1)$ a cada término del paréntesis se obtiene:

$$I = q^\mu[2mz(1-y) - 2m(1-2y)] + \frac{1}{2}(p+p')^\mu 2mz(z-1) - \frac{1}{2}q^\mu 2mz(z-1) \quad .$$

Factorizando q^μ :

$$I = q^\mu[2mz(1-y) - 2m(1-2y) - mz(z-1)] + (p+p')^\mu mz(z-1) \quad .$$

Desarrollando los términos $2z(1-y)$, $2(1-2y)$ y $z(z-1)$ conduce a:

$$I = q^\mu[m(2z - 2zy - 2 + 4y - z^2 + z)] + (p+p')^\mu mz(z-1) \quad .$$

Realizando las operaciones en los términos comunes, la expresión se simplifica a:

$$I = q^\mu[m(3z - 2 + 4y - 2zy - z^2)] + (p+p')^\mu mz(z-1) \quad .$$

Dado que $x+y+z = 1$, entonces $z = 1 - (x+y)$, reemplazando z y realizando las respectivas operaciones se obtiene:

$$I = q^\mu [m(3 - 3x - 3y - 2 + 4y - 2y + 2xy + 2y^2 - 1 + 2x + 2y - x^2 - 2xy - y^2)] + (p + p')^\mu m z (z - 1) \quad .$$

Simplificando la expresión:

$$I = q^\mu [m(-x + y - x^2 + y^2)] + (p + p')^\mu m z (z - 1) \quad .$$

Factorizando $(x + 1)$ y $(y + 1)$, implica que:

$$I = q^\mu [m(-(x(x + 1) - y(y + 1)))] + (p + p')^\mu m z (z - 1) \quad .$$

Dado que: $x + y + z = 1$, entonces $x = 1 - y - z$ y $y = 1 - x - z$. De esta manera:

$$\begin{aligned} I &= q^\mu [m(-\underbrace{x(1 - y - z + 1)}_{2-y-z} - y\underbrace{(1 - x - z + 1)}_{2-x-z})] + (p + p')^\mu m z (z - 1) \\ &= q^\mu [m(-\underbrace{x(2 - y - z) - y(2 - x - z)}_{2x-xy-xz-2y+yx+yz})] + (p + p')^\mu m z (z - 1) \\ &= q^\mu [m(-\underbrace{(2x - xy - xz - 2y + yx + yz)}_{x(2-z)+y(z-2)})] + (p + p')^\mu m z (z - 1) \\ &= q^\mu [m(-(y(z - 2) - x(z - 2)))] + (p + p')^\mu m z (z - 1) \end{aligned}$$

Factorizando $(x - y)$, implica que:

$$I = q^\mu m (z - 2)(x - y) + (p + p')^\mu m z (z - 1) \quad . \quad (3.49)$$

Reemplazando (3.49) en (3.48), se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \left[-\frac{1}{2} \gamma^\mu l^2 + \gamma^\mu (q^2 (1 - x)(1 - y) - m^2 z (2 + z)) + m^2 \gamma^\mu \right. \\ \left. + q^\mu m (z - 2)(x - y) + (p + p')^\mu m z (z - 1) \right] u(p) \quad . \end{aligned}$$

Ordenando términos con el fin de obtener la forma de la expresión:

$$\gamma^\mu A + (p'^\mu + p^\mu) \cdot B + q^\mu \cdot C \quad ,$$

se factoriza γ^μ ,

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \cdot \left(-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2 \right) \right. \\ \left. + [(p'^\mu + p^\mu) \cdot mz(z-1) + q^\mu \cdot m(z-2)(x-y)] \right] u(p) \quad . \end{aligned} \quad (3.50)$$

El coeficiente q^μ se desvanece de acuerdo a la identidad de Ward. De la ecuación (3.22) el denominador es simétrico bajo $x \leftrightarrow y$. El coeficiente de q^μ es impar bajo $x \leftrightarrow y$ y por lo tanto se desvanece cuando se integra bajo x y y .

Entonces, la expresión del numerador resulta:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \cdot \left(-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2 \right) \right. \\ \left. + (p'^\mu + p^\mu) \cdot mz(z-1) \right] u(p) \quad . \end{aligned} \quad (3.51)$$

De la expresión (3.51) se trabaja con el término:

$$\bar{u}(p') [(p'^\mu + p^\mu) \cdot mz(z-1)] u(p) = \bar{u}(p') [(p'^\mu + p^\mu)] u(p) mz(z-1) \quad . \quad (3.52)$$

Teniendo en cuenta la identidad de Gordon:

$$\begin{aligned} \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) &= \bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^\mu q_\nu}{2m} \right] u(p) \\ \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) &= \bar{u}(p') \left(\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} \right) u(p) + \bar{u}(p') \left(\frac{i\sigma^\mu q_\nu}{2m} \right) u(p) \quad . \end{aligned}$$

Despejando el término:

$$\bar{u}(p') \left[\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} \right] u(p) = \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu - \frac{i\sigma^\mu q_\nu}{2m} \right] u(p) \quad .$$

Pasando a multiplicar $2m$ al lado derecho de la ecuación:

$$\bar{u}(p') [p'^\mu + p^\mu] u(p) = \bar{u}(p') \left[2m \left(\gamma^\mu - \frac{i\sigma^\mu q_\nu}{2m} \right) \right] u(p) \quad . \quad (3.53)$$

Reemplazando (3.53) en (3.52)

$$\bar{u}(p') \left[2m \left(\gamma^\mu - \frac{i\sigma^\mu q_\nu}{2m} \right) \right] u(p) mz(z-1)$$

$$= \bar{u}(p') \left[2m^2 z(z-1) \left(\gamma^\mu - \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right) \right] u(p) \quad . \quad (3.54)$$

Ahora, reemplazamos (3.54) en (3.51)

$$\begin{aligned} & \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \cdot \left(-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2 \right) + 2m^2 z(z-1) \left(\gamma^\mu - \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right) \right] u(p) \\ &= \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \cdot \left(-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2 + 2m^2 z(z-1) \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} 2m^2 z(1-z) \right] u(p) \quad , \quad (3.55) \end{aligned}$$

donde: $(1-2z-z^2)m^2 + 2m^2 z(z-1) = m^2(1-2z-z^2-2z^2-2z) = m^2(1-4z-z^2)$

Así, el numerador resulta:

$$\bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \cdot \left(-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} 2m^2 z(z-1) \right] u(p) \quad .$$

Por lo tanto, la contribución para el vértice del electrón será:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) &= 2ie^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{2}{D^3} \\ & \quad \times \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \cdot \left(-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(z-1)) \right] u(p) \quad . \quad (3.56) \end{aligned}$$

Se saca de la integral el factor 2, en consecuencia se tiene:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu(p', p) &= 4ie^2 \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \frac{1}{D^3} \\ & \quad \times \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \cdot \left(-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2 \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(z-1)) \right] u(p) \quad . \quad (3.57) \end{aligned}$$

3.2.3. Rotación de Wick

La ecuación (3.57) representa la descomposición de los factores de forma. El objetivo ahora es calcular la integral de momento de (3.57). Para el presente trabajo se hará uso del método

llamado Rotación de Wick, el cual es una rotación en el plano complejo para transformar una variable real en una variable imaginaria. La rotación hace que sea posible una solución a un problema en el espacio de Minkowski mediante la búsqueda de una solución a un problema relacionado en el espacio euclidiano. La integración de la parte espacial también se vuelve mucho más simple en el espacio euclidiano.

De acuerdo a la expresión encontrada para el denominador D en (3.22)

$$D = l^2 - \Delta + i\epsilon \quad ,$$

donde:

$$l^2 = (l^0)^2 - \mathbf{l}^2 \quad , \quad (3.58)$$

por lo que,

$$D = (l^0)^2 - \mathbf{l}^2 - \Delta + i\epsilon \quad . \quad (3.59)$$

Para encontrar la ubicación de los polos en la rotación de Wick, se hace $D = 0$, lo cual conduce a:

$$\begin{aligned} (l^0)^2 - \mathbf{l}^2 - \Delta + i\epsilon &= 0 \\ (l^0)^2 &= \mathbf{l}^2 + \Delta - i\epsilon \quad , \end{aligned} \quad (3.60)$$

por ende, el valor de (l^0) es:

$$\begin{aligned} (l^0) &= \pm \sqrt{|\mathbf{l}|^2 + \Delta - i\epsilon} \\ &= \pm \sqrt{(|\mathbf{l}|^2 + \Delta) \left(1 - \frac{i\epsilon}{|\mathbf{l}|^2 + \Delta}\right)} \\ &= \pm \sqrt{|\mathbf{l}|^2 + \Delta} \sqrt{1 - \frac{i\epsilon}{|\mathbf{l}|^2 + \Delta}} \quad . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Ahora, dado que el factor

$$\frac{i\epsilon}{|\mathbf{l}|^2 + \Delta} \ll 1 \quad , \quad (3.62)$$

es particularmente útil realizar una aproximación bajo expansión binomial, resultando así

$$(l^0) = \pm \sqrt{|\mathbf{I}|^2 + \Delta} \left[1 - \frac{i}{2} \frac{\epsilon}{|\mathbf{I}|^2 + \Delta} \right] , \quad (3.63)$$

entonces, de acuerdo a la integral que se desea calcular en (3.56)

$$I_m^{2n} = \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^{2n}}{(l^2 - \Delta + i\epsilon)^m}$$

se obtiene

$$I_m^{2n} = \int \frac{d^3 \mathbf{l}}{(2\pi)^3} \int \frac{dl^0}{(2\pi)} \frac{l^{2n}}{(l^0 - \sqrt{|\mathbf{l}|^2 + \Delta} + i\epsilon)(l^0 - \sqrt{|\mathbf{l}|^2 + \Delta} - i\epsilon)}$$

Con $l^0 = \pm \sqrt{|\mathbf{l}|^2 + \Delta} \mp i\epsilon$, es decir

$$l^{0+} = +\sqrt{|\mathbf{l}|^2 + \Delta} - i\epsilon ,$$

$$l^{0-} = -\sqrt{|\mathbf{l}|^2 + \Delta} + i\epsilon ,$$

esto debido a que siendo ϵ una cantidad arbitrariamente pequeña, se desprecia el 2 que lo está dividiendo en (3.63) y se define ϵ . Las ubicaciones de los polos y el hecho de que el integrando se cae lo suficientemente rápido en $|l^0|$ grande, permite rotar 90° el contorno en el sentido contrario a las agujas del reloj (Ver Figura (3.2)). De esta manera, se define la variable euclidiana:

$$l^0 \equiv il_E^0 , \quad (3.64)$$

dado que $l^2 = (l^0)^2 - \mathbf{l}^2$, entonces

$$l^2 \longrightarrow (il_E^0)^2 - \mathbf{l}^2 = -(l_E^0)^2 - \mathbf{l}^2 = -((l_E^0)^2 + \mathbf{l}^2) \equiv l_E^2 .$$

De esta manera, considerando la integral

$$I_m^{2n} = \frac{i}{(-1)^m} \int \frac{d^4 l_E}{(2\pi)^4} \frac{l_E^{2n}}{(l_E^2 + \Delta)^m}$$

$$I_m^{2n} = \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{(2\pi)^4} \int d\Omega \int_0^\infty l_E^3 dl_E \frac{l_E^{2n}}{(l_E^2 + \Delta)^m} , \quad (3.65)$$

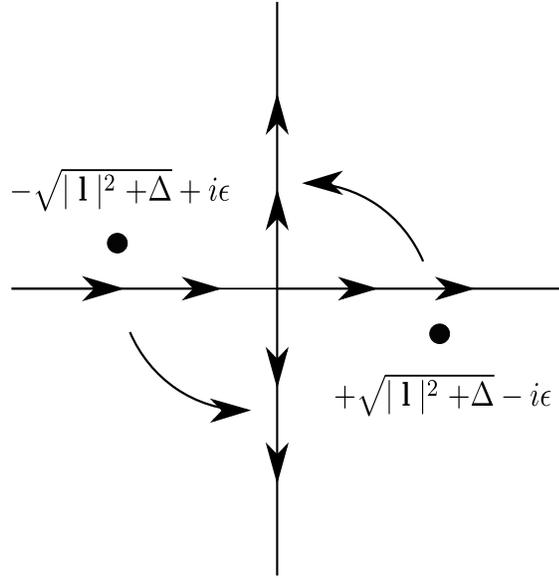


Figura 3.2: Ubicación de los polos l^{0+} y l^{0-} . El contorno de integración de l^0 se rota 90° en el sentido contrario a las agujas del reloj.

Fuente: Esta investigación.

donde Ω se refiere al ángulo sólido subtendido por la superficie esférica completa $d - 1$ dimensional de la esfera unitaria en el espacio euclidiano d dimensional, definido en cualquier número de dimensiones d , es representado por la expresión:

$$\Omega_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} \quad .$$

Para el presente caso, se necesita $d = 4$, entonces:

$$\Omega_4 = \frac{2\pi^{4/2}}{\Gamma(4/2)} = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} \quad .$$

Recordando la definición de la función gamma, matemáticamente se representa por:

$$\Gamma(n) = (n - 1)! \quad , \tag{3.66}$$

Entonces

$$\Gamma(2) = (2 - 1)! = 1! = 1 \quad ,$$

Por lo tanto

$$\Omega_4 = \frac{2\pi^2}{\Gamma(2)} = \frac{2\pi^2}{1} = 2\pi^2 \quad .$$

De este modo

$$\begin{aligned} I_m^{2n} &= \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{(2\pi)^4} \int_0^\infty l_E^3 dl_E \frac{l_E^{2n}}{(l_E^2 + \Delta)^m} \\ &= \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{8\pi^2} 2\pi^2 \int_0^\infty l_E^3 dl_E \frac{l_E^{2n}}{(l_E^2 + \Delta)^m} \\ &= \frac{i}{(-1)^m} \frac{1}{8\pi^2} \int_0^\infty dl_E \frac{l_E^{2n+3}}{(l_E^2 + \Delta)^m} \quad . \end{aligned} \quad (3.67)$$

Asignando

$$A = \int_0^\infty du \frac{u^{2n+1}}{(u^2 + \Delta)^m} \quad (3.68)$$

Se realiza la sustitución

$$\begin{aligned} y &= u^2 + \Delta \Rightarrow dy = 2udu \\ u^2 &= y - \Delta \Rightarrow du = \frac{dy}{2u} \end{aligned}$$

De acuerdo a la sustitución realizada, los límites de la integral resultante:

Para el límite inferior se tiene: cuando $u \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow \Delta$.

Para el límite superior se tiene: cuando $u \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow \infty$. Así, la integral es:

$$\int_\Delta^\infty \frac{dy}{2u} \frac{u^{2n+1}}{y^m} = \frac{1}{2} \int_\Delta^\infty dy \frac{u^{2n}}{y^m} = \frac{1}{2} \int_\Delta^\infty dy \frac{(y - \Delta)^n}{y^m}$$

Sustituyendo $y = \Delta z \Rightarrow dy = \Delta dz$, así

$$A = \frac{1}{2} \int \Delta dz \frac{(\Delta z - \Delta)^n}{(\Delta z)^m} \quad .$$

Del término $(\Delta z - \Delta)^n$ se factoriza $(\Delta)^n$, por ende:

$$A = \frac{1}{2} \int \Delta (\Delta)^n \frac{(z - 1)^n}{(\Delta)^m z^m} dz \quad .$$

Ahora, teniendo en cuenta que $\frac{\Delta \Delta^n}{\Delta^m} = \Delta^{n-m+1}$, de esta manera:

$$A = \frac{1}{2} \Delta^{n-m+1} \int dz \frac{(z - 1)^n}{z^m} \quad .$$

Finalmente, $\frac{(z-1)^n}{z^m} = \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z^{m-n}}$, por lo que:

$$A = \frac{1}{2} \Delta^{n-m+1} \int \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z^{m-n}} dz \quad .$$

Para los límites se obtiene: cuando $y \rightarrow \Delta \Rightarrow z \rightarrow 1$, y cuando $y \rightarrow \infty \Rightarrow z \rightarrow \infty$, entonces la integral asignada A resulta hasta el momento como

$$A = \frac{1}{2} \Delta^{n-m+1} \int_1^\infty \left(1 - \frac{1}{z}\right)^n \frac{1}{z^{m-n}} dz \quad .$$

Bajo la sustitución

$$s = z^{-1}, ds = -z^{-2} dz = -s^2 dz \quad ,$$

así que:

$$dz = -s^{-2} ds \quad .$$

De esta manera:

$$A = \frac{1}{2} \Delta^{n-m+1} \int ds (1-s)^n (-s^{m-n-2}) \quad .$$

Cuando $z \rightarrow 1 \Rightarrow s = 1$, $z \rightarrow \infty \Rightarrow s \rightarrow 0$

De esta manera.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \Delta^{n-m+1} \int_1^0 ds (1-s)^n (-s^{m-n-2}) \\ &= \frac{1}{2} \Delta^{n-m+1} \int_0^1 ds (1-s)^n (s^{m-n-2}) \quad . \end{aligned} \quad (3.69)$$

Comparando con la definición de la función beta

$$B(x, y) \equiv \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad , \quad (3.70)$$

se puede considerar que $t = s$, por lo tanto cada exponente resulta $n = y - 1$ lo que conduce a que $y = n + 1$ y $x - 1 = m - n - 2$, por lo tanto $x = m - n - 2 + 1 = m - n - 1$. Por lo tanto

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \frac{\Gamma(m-n-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m-n-1+n+1)} = \frac{\Gamma(m-n-1)\Gamma(n+1)}{\Gamma(m)} \quad . \quad (3.71)$$

Llegando así a la expresión

$$A = \frac{1}{2} \Delta^{n-m+1} \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(m-n-1)}{\Gamma(m)} \quad (3.72)$$

Considerando los casos:

■ n=1

$$A_1 = \frac{1}{2} \Delta^{1-m+1} \frac{\Gamma(1+1)\Gamma(m-1-1)}{\Gamma(m)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta^{m-2}} \frac{\Gamma(2)\Gamma(m-2)}{\Gamma(m)}$$

De (3.66) se determina que $\Gamma(2) = (2-1)! = 1! = 1$, además de $\Gamma(m-2) = (m-2-1)! = (m-3)!$, por lo que:

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta^{m-2}} \frac{(1)(m-3)!}{(m-1)(m-2)(m-3)!}$$

Cancelando el término $(m-3)!$ el cual esta presente en el numerador y el denominador, por esta razón A_1 es:

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta^{m-2}} \frac{1}{(m-1)(m-2)}$$

■ n=2

$$A_2 = \frac{1}{2} \Delta^{2-m+1} \frac{\Gamma(2+1)\Gamma(m-2-1)}{\Gamma(m)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta^{m-3}} \frac{\Gamma(3)\Gamma(m-3)}{\Gamma(m)}$$

De la definición expresada en (3.66) se obtiene que $\Gamma(3) = (3-1)! = 2! = 2$, $\Gamma(m-3) = (m-3-1)! = (m-4)!$ y $\Gamma(m) = (m-1)!$, así:

$$A_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta^{m-3}} \frac{2(m-4)!}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)!} = \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta^{m-3}} \frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)}$$

Reemplazando estos resultados en (3.67), se obtiene:

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}, \text{ para } n = 1 \quad (3.73)$$

$$\int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^{m-1}}{(4\pi)^2} \frac{2}{(m-1)(m-2)(m-3)} \frac{1}{\Delta^{m-3}}, \text{ para } n = 2 \quad (3.74)$$

Se nota que la ecuación (3.74) es válida sólo para $m > 3$. Cuando $m = 3$ la Rotación de Wick no se puede justificar, y en cualquier caso, la integral también es divergente. Pero es sólo este caso el que se necesita para (3.56), por el momento se introducirá una prescripción artificial con el fin de que la integral sea finita. Regresando a la expresión original de la integral de Feynman en (3.5) y realizando el siguiente reemplazo para el propagador del fotón.

$$\frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{(k-p)^2 + i\epsilon} - \frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon'} \quad ,$$

donde

$$\frac{1}{(k-p)^2 - \Lambda^2 + i\epsilon'} \quad ,$$

es el propagador para un fotón ficticio con masa Λ muy grande. Este método se conoce como regularización de Pauli-Villars, el cual consiste en hacer las integrales de Feynman sean finitas mediante la introducción de partículas pesadas ficticias. El fotón ficticio no tiene importancia física y este método es sólo uno de los muchos para definir integrales divergentes. El integrando no se ve afectado para k pequeño (ya que Λ es grande), pero se corta suavemente cuando $k > \Lambda$. De esta manera, se puede considerar en el segundo término como el propagador de fotón pesado ficticio, cuya contribución se resta de la del fotón ordinario. En términos que involucran fotón pesado, el álgebra del numerador no cambia, mientras que el denominador es alterado por

$$\Delta \rightarrow \Delta_\Lambda = -xyq^2 + (1-z)^2m^2 + z\Lambda^2 \quad . \quad (3.75)$$

La integral (3.74) es entonces reemplazada con una integral convergente que se puede rotar a través de la rotación de Wick y evaluar:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left(\frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^3} - \frac{l^2}{(l^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \int_0^\infty dl_E^2 \left(\frac{l_E^4}{(l_E^2 - \Delta)^3} - \frac{l_E^4}{(l_E^2 + \Delta_\Lambda)^3} \right) \\ &= \frac{i}{(4\pi)^2} \log \left(\frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} \right) \quad . \end{aligned} \quad (3.76)$$

Ahora, para calcular

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} - \frac{1}{(l^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right] \quad ,$$

se usa (3.73), que no es divergente. Para este caso $m = 3$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} - \frac{1}{(l^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right] \\ &= \left(\frac{i(-1)^3}{(4\pi)^2} \frac{1}{(3-1)(3-2)} \frac{1}{\Delta^{3-2}} \right) - \left(\frac{i(-1)^3}{(4\pi)^2} \frac{1}{(3-1)(3-2)} \frac{1}{(\Delta_\Lambda^{3-2})} \right) \end{aligned}$$

Realizando las respectivas operaciones algebraicas se obtiene:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} - \frac{1}{(l^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right] = \left(\frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta} \right) - \left(\frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right)$$

Factorizando $\frac{-i}{2(4\pi)^2}$

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} - \frac{1}{(l^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right] = \frac{-i}{2(4\pi)^2} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right)$$

Así

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} - \frac{1}{(l^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right] = \frac{-i}{32\pi^2} \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta_\Lambda} \right)$$

dado que $\Lambda \rightarrow \infty$, entonces:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(l^2 - \Delta)^3} - \frac{1}{(l^2 - \Delta_\Lambda)^3} \right] = \frac{-i}{32\pi^2} \frac{1}{\Delta} \quad (3.77)$$

Reemplazando las expresiones obtenidas de las integrales de (3.77) y (3.76) en (3.57), se llega a:

$$\begin{aligned} \delta\Gamma^\mu &= 4ie^2 \left(\frac{-i}{32\pi^2} \right) \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(\log \frac{\Delta_\Lambda}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \left(m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-y)(1-x) \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Delta} \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(z-1)) \right] u(p) \end{aligned} \quad (3.78)$$

En el límite $\Lambda \gg q, m$ (3.75) se convierte en $\Delta_\Lambda = z\Lambda^2$ por ende:

$$\begin{aligned} &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \\ &\quad \times \bar{u}(p') \left[\gamma^\mu \left(\log \frac{z\Lambda^2}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \left(m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-y)(1-x) \right) \right) \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\Delta} \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} (2m^2 z(z-1)) \Big] u(p) \quad . \quad (3.79)$$

Las expresiones entre corchetes de (3.79) son las correcciones deseadas a los factores de forma, llegando así a obtenerse la expresión

$$\bar{u}(p') \left(\gamma(F_1(q^2) - 1) - \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} F_2(q^2) \right) u(p) \quad ,$$

por lo que,

$$F_1(q^2) = 1 + \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \times \left(\ln \frac{z\Lambda^2}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \left(m^2(1-4z+z^2) + q^2(1-y)(1-x) \right) \right) \quad (3.80)$$

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[\frac{1}{\Delta} 2m^2 z(1-z) \right] \quad .$$

Reemplazando el valor de Δ de (3.24), entonces:

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[\frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2 - xyq^2} \right] + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (3.81)$$

Teniendo en cuenta que ni la divergencia ultravioleta ni la infrarroja afectan a $F_2(q^2)$, por lo tanto, se puede evaluar de forma inequívoca.

$$F_2(q^2 = 0) = \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[\frac{2m^2 z(1-z)}{m^2(1-z)^2} \right] \quad .$$

Simplificando la expresión:

$$\begin{aligned} F_2(q^2 = 0) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dx dy dz \delta(x+y+z-1) \left[\frac{z}{(1-z)} \right] \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{1-z} \\ &= \frac{\alpha}{2\pi} \quad . \end{aligned} \quad (3.82)$$

De esta manera, se obtiene la corrección al factor g del electron:

$$a_e \equiv \frac{g-2}{2} = \frac{\alpha}{2\pi} \approx 0.0011614 \quad . \quad (3.83)$$

Este resultado fue obtenido por primera vez por Schwinger en 1948 [40].

3.3. Momento magnético anómalo del muón

El momento magnético del muón, según la ecuación de Dirac, es

$$\mathbf{M} = g_\mu \frac{e}{2m_\mu} \mathbf{S} \quad , \quad (3.84)$$

donde e y m_μ representan la carga y masa del muón respectivamente. La relación giro-magnética está representado por g_μ , que según la física clásica, debería ser exactamente 1, sin embargo en 1928, la mecánica cuántica relativista predijo que el valor numérico es $g_\mu = 2$. La teoría cuántica de campos de acuerdo a los efectos a un loop predice pequeñas correcciones, es decir, conduce a una pequeña desviación de $g_\mu = 2$, causada por partículas virtuales que aparecen y desaparecen continuamente, modificando la forma en que el muón interactúa con el campo magnético. Por esta razón, a la diferencia entre g y 2, lo que es “g-2” se le llama momento magnético anómalo y en la literatura está dada por

$$a_\mu \equiv \frac{g_\mu - 2}{2} \quad . \quad (3.85)$$

La predicción del Modelo Estándar de partículas elementales para el momento magnético anómalo del muón a_μ^{SM} generalmente se puede dividir en tres contribuciones, la contribución electromagnética, hadrónica y electrodébil, ecuación (3.86). Los correspondientes diagramas de Feynman se muestran en la Figura (4.1) respectivamente.

$$a_\mu^{SM} = a_\mu^{QED} + a_\mu^{EW} + a_\mu^{Had} \quad . \quad (3.86)$$

La contribución QED de la ecuación (3.86) se representa como a_μ^{QED} , siendo así la contribución de menor orden. A ordenes más altos se deben incluir todos los loops fotónicos y leptónicos (e, μ, τ). a_μ^{QED} presenta una dependencia de la masa de los leptones, y dado que la anomalía a_μ es dimensional, esta dependencia aparece en forma de relación entre las masas de los leptones, lo cual puede ser representado matemáticamente como:

$$a_\mu^{QED} = A_1 + A_2(m_\mu/m_e) + A_2(m_\mu/m_\tau) + A_3(m_\mu/m_e, m_\mu/m_\tau) \quad , \quad (3.87)$$

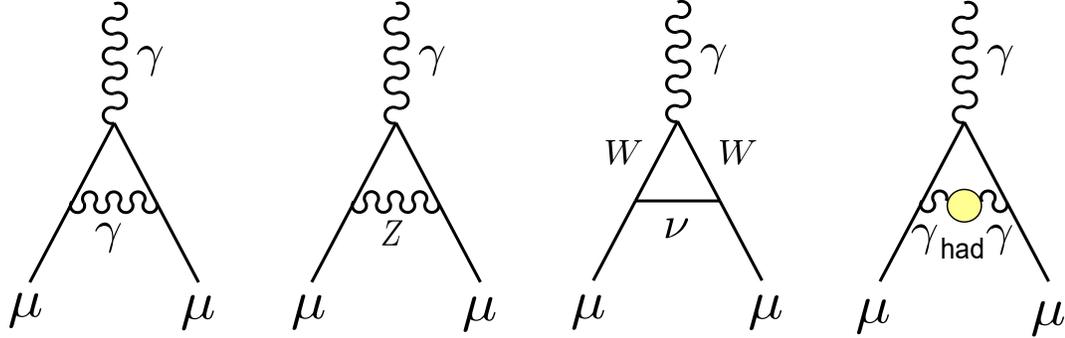


Figura 3.3: Diagramas representativos que contribuyen a a_μ^{SM} . De izquierda a derecha: QED de primer orden (término de Schwinger), débil de orden más bajo, hadrónico de orden más bajo

Fuente: Tomado de [41].

donde m_e , m_μ y m_τ son las masas del electrón e , muón μ y del lepton τ . El término A_1 es independiente de las proporciones de las masas de los leptones.

$$A_i = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right) A_i^{(2)} + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^2 A_i^{(4)} + \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^3 A_i^{(6)} + \dots \quad , \quad (i = 1, 2, 3). \quad (3.88)$$

El resultado de Schwinger de 1947 fue $A_1^{(2)} = 1/2$, lo cual conduce a que la contribución clásica $\frac{\alpha}{2\pi}$ sea universal para todas las especies de leptones. El valor de a_μ^{QED} se ha extendido a un décimo orden, es decir a través de 5 loops [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52].

$$\begin{aligned} a_\mu^{QED} = & \frac{\alpha}{2\pi} + 0,765857425(17) \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^2 + 24,05050996(32) \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^3 \\ & + 130,8796(63) \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^4 + 752,2(1,0) \left(\frac{\alpha}{2\pi}\right)^5 \dots \end{aligned} \quad (3.89)$$

con pocos cambios en los coeficientes desde la última actualización de [53]. Empleando la constante de estructura fina $\alpha^{-1} = 137,035999046(27)$, obtenido de las medidas precisas de h/m_{Cs} [54], la constante de Rydberg y m_{Cs}/m_e conduce a [42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52].

$$a_\mu^{QED} = 116584718,92(0,03) \times 10^{-11} \quad , \quad (3.90)$$

donde el pequeño error resulta principalmente de la incertidumbre en α .

El experimento E821 en el Brookhaven National Lab (BNL) estudió la precesión de μ^+ y μ^- en un campo magnético externo constante mientras circulaban en un anillo de almacenamiento confinado. Se encontró

$$\begin{aligned} a_{\mu^+}^{exp} &= 11659204(6)(5) \times 10^{-10} \quad , \\ a_{\mu^-}^{exp} &= 11659215(8)(3) \times 10^{-10} \quad , \end{aligned} \quad (3.91)$$

donde los primeros errores son estadísticos y los segundos sistemáticos. Suponiendo invariancia CPT y teniendo en cuenta las correlaciones entre incertidumbres sistemáticas, se encuentra para su promedio global [55, 56, 57].

$$a_{\mu}^{exp} = 11659209,1(5,4)(3,3) \times 10^{-10} \quad . \quad (3.92)$$

Estos resultados representan aproximadamente un factor 14 de mejora con respecto a los experimentos clásicos del CERN de la década de 1970 [58].

La mejora de la medición en un factor de cuatro mediante la instalación del anillo de almacenamiento E821 en Fermilab, y la utilización de un haz de muones más limpio e intenso y detectores mejorados [59] se inició en 2017, y el 7 de Abril de 2021 se anunciaron los primeros resultados del experimento Muon g-2 en Fermilab, donde las incertidumbres constantes estadísticas, sistemáticas y fundamentales se combinaron en cuadratura y se obtuvo que el valor del momento magnético anómalo del muón:

$$a_{\mu}(\text{FNAL}) = 116592040(54) \times 10^{-11} \quad , \quad (3.93)$$

el cual difiere del valor del Modelo Estándar en $3,3\sigma$ y concuerda con el resultado BNL E821. El promedio $a_{\mu}(\text{Exp})$ de los resultados obtenidos en los experimentos de Fermilab y Brookhaven es [60]:

$$a_{\mu}(\text{Exp}) = 116592061(41) \times 10^{-11} \quad .$$

La diferencia, $a_{\mu}(\text{Exp}) - a_{\mu}(\text{ME}) = (251 \pm 59) \times 10^{-11}$, tiene una significancia con la teoría de $4,2\sigma$, como se muestra en la Figura (3.4).

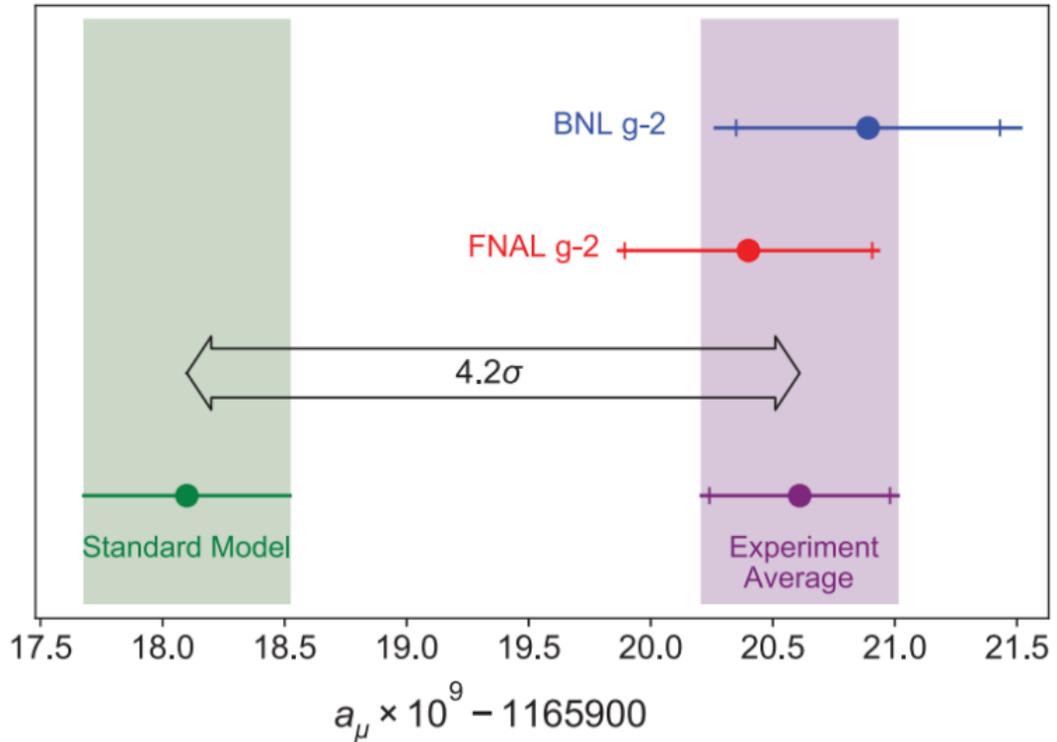


Figura 3.4: De arriba a abajo: valores experimentales de a_μ de BNL E821, primer resultado de Fermilab y el promedio combinado. Las marcas de verificación internas indican la contribución estadística a las incertidumbres totales. También se muestra el valor recomendado [1] de la iniciativa de la teoría de Muon g-2 para el modelo estándar.

Fuente: Tomada de [60].

Esta desviación del valor esperado del ME se ha utilizado como motivación para muchos modelos de nueva física, aún más el desarrollo de extensiones del Modelo Estándar, incluidas las que tienen nuevos acoplamientos con leptones.

Otro experimento de muón $g - 2$ con sensibilidad similar pero utilizando una técnica alternativa de campo eléctrico cero con un haz de muones de baja emisión y baja cantidad de movimiento se está construyendo actualmente en J-PARC en Japón [61].

Capítulo 4

Modelos libres de anomalías

Desde 1970, ha surgido un considerable interés en las teorías de gauge, principalmente debido al éxito de probar la renormalización de tales teorías. Sin embargo, para completar la prueba de renormalizabilidad se requiere una condición adicional que no se puede cumplir con elecciones arbitrarias de múltiples partículas. Esta restricción adicional es que teoría de gauge particular debe estar libre de anomalías. De acuerdo a esto, para la anomalía del momento magnético anómalo del muón trabajado en el capítulo [3] se requiere crear nuevos modelos libres de anomalías con los cuales se pueda encontrar una solución a dicha anomalía experimental en $g - 2$.

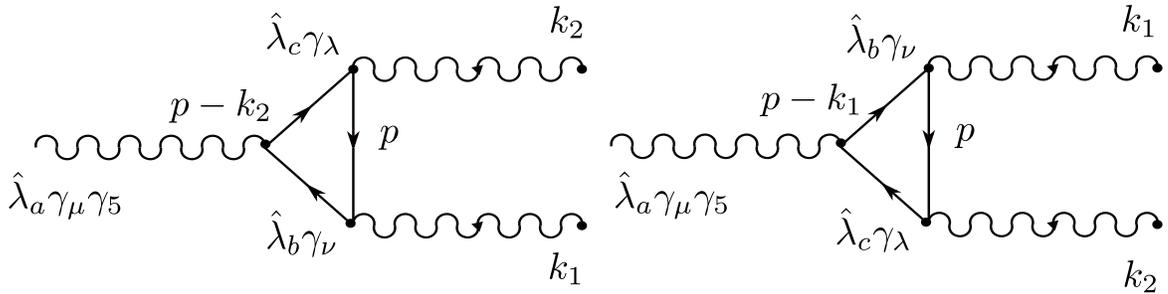


Figura 4.1: Diagramas importantes para la anomalía. El izquierdo difiere del derecho por el intercambio de los dos fotones.

Fuente: Tomada de [36].

Ya que estas integrales que se obtienen de los diagramas que se muestran en la Figura 4.1 son divergentes, estas deben absorberse en acoplamientos del Lagrangiano que tengan las mismas propiedades de simetría. Sin embargo, estos diagramas generan términos con simetrías de permutación en los índices a , b y c , que están ausentes en el Lagrangiano de la teoría y por lo tanto hay que asegurarse que sean cero para que la teoría sea renormalizable. Estos diagramas triangulares representan fuertes restricciones para los acoplamientos gauge de una

teoría y generan lo que comunmente se conoce como ecuaciones de anomalías. La amplitud del diagrama triangular y del diagrama de intercambio respectivo se puede denotar siguiendo las reglas de Feynman:

Para cada línea externa se denota p_1, p_2 y p_3 y para cada línea interna q_1, q_2 y q_3 .

Los tres vértice contribuyen con los factores

$$\left(\frac{\hat{\lambda}^c}{2}\gamma^\lambda\right), \left(\frac{\hat{\lambda}^b}{2}\gamma^\nu\right), \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2}\gamma^\mu\gamma_5\right) .$$

Cada línea fermiónica interna contribuye con:

$$\left(\frac{i(q_1 + m)}{q_1^2 - m^2}\right), \left(\frac{i(q_2 + m)}{q_2^2 - m^2}\right), \left(\frac{i(q_3 + m)}{q_3^2 - m^2}\right) .$$

Además

$$\left(\frac{i(q_1 + m)}{q_1^2 - m^2}\right) = \frac{i}{(q_1 - m)} ,$$

ya que:

$$\frac{i}{(q_1 - m)} \cdot \frac{(q_1 + m)}{(q_1 + m)} = \frac{i(q_1 + m)}{q_1^2 - m^2} ,$$

donde $q_1^2 = q_1 q_1 = q_1^2$. De esta manera, se presentan las contribuciones de cada línea fermiónica:

$$\left(\frac{i}{q_1 - m}\right), \left(\frac{i}{q_2 - m}\right), \left(\frac{i}{q_3 - m}\right) .$$

A partir de la conservación de momento-energía, por cada vértice se escribe una función delta de la forma:

$$(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_2 - q_3), (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q_1 - q_2), (2\pi)^4 \delta^4(q_3 - q_1 - p_3) .$$

Para cada momento interno q_i , se escribe:

$$\frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4}, \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4}, \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} .$$

De esta manera, hasta el momento se tiene:

$$T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = \int \int \int \left(\frac{i}{q_1 - m}\right) \left(\frac{\hat{\lambda}^c}{2}\gamma^\lambda\right) \left(\frac{i}{q_2 - m}\right) \left(\frac{\hat{\lambda}^b}{2}\gamma^\nu\right) \left(\frac{i}{q_3 - m}\right) \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2}\gamma^\mu\gamma_5\right) \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + q_2 - q_3) (2\pi)^4 \delta^4(p_2 + q_1 - q_2) (2\pi)^4 \delta^4(q_3 - q_1 - p_3) \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q_3}{(2\pi)^4} .$$

Calculando la integral para $\delta^4(p_1 + q_2 - q_3)$, entonces $p_1 + q_2 - q_3 = 0$, así, $q_3 = p_1 + q_2$

Por lo tanto, $\delta^4(q_3 - q_1 - p_3) = \delta^4(p_1 + q_2 - q_1 - p_3)$.

Ahora evaluando la integral $\delta^4(p_2 + q_1 - q_2)$, entonces $p_2 + q_1 - q_2 = 0$. Lo que conduce a $q_1 = q_2 - p_2$.

Por lo tanto: $\delta^4(p_1 + q_2 - q_2 + p_2 - p_3) = \delta^4(p_1 + p_2 - p_3)$. De esta manera:

$$T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{q}_1 - m} \right) \left(\frac{\hat{\lambda}^c}{2} \gamma^\lambda \right) \left(\frac{i}{\not{q}_2 - m} \right) \left(\frac{\hat{\lambda}^b}{2} \gamma^\nu \right) \left(\frac{i}{\not{q}_3 - m} \right) \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \right) \\ \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3) \quad .$$

Finalmente se multiplica por i y se cancela el factor global $(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 - p_3)$, por lo tanto:

$$T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = i \int \frac{d^4 q_2}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{q}_1 - m} \right) \left(\frac{\hat{\lambda}^c}{2} \gamma^\lambda \right) \left(\frac{i}{\not{q}_2 - m} \right) \left(\frac{\hat{\lambda}^b}{2} \gamma^\nu \right) \left(\frac{i}{\not{q}_3 - m} \right) \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \right) \quad . \quad (4.1)$$

Pasando a notación del texto [33], donde:

$$q_2 \rightarrow p \quad ,$$

$$p_1 \rightarrow k_1 \quad ,$$

$$p_2 \rightarrow k_2 \quad .$$

Dado que

■

$$q_1 = q_2 - p_2 \Rightarrow \not{q}_1 = \not{q}_2 - \not{p}_2 = \not{p} - \not{k}_2 \quad , \quad \text{con} \quad \not{q}_2 = \not{p} \quad .$$

■

$$q_3 = p_1 + q_2 \Rightarrow \not{q}_3 = \not{p}_1 + \not{q}_2 = \not{k}_1 + \not{p} = \not{p} + \not{k}_1 \quad .$$

Reemplazando esta nueva notación en (4.1), resulta:

$$T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \right) \left(\frac{\hat{\lambda}^c}{2} \gamma^\lambda \right) \left(\frac{i}{\not{p} - m} \right) \left(\frac{\hat{\lambda}^b}{2} \gamma^\nu \right) \left(\frac{i}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \right) \left(\frac{\hat{\lambda}^a}{2} \gamma^\mu \gamma_5 \right) \quad . \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = & -i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \frac{\hat{\lambda}^c}{2} \gamma_\lambda \frac{1}{\not{p} - m} \frac{\hat{\lambda}^b}{2} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \frac{\hat{\lambda}^a}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \\
 & - i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \frac{\hat{\lambda}^b}{2} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - m} \frac{\hat{\lambda}^c}{2} \gamma_\lambda \frac{i}{\not{p} + \not{k}_2 - m} \frac{\hat{\lambda}^a}{2} \gamma_\mu \gamma_5 \right] .
 \end{aligned}$$

Los generadores $\hat{\lambda}^i$ y las matrices γ actúan en diferentes espacios y por lo tanto la traza puede ser descompuesta en el producto de la traza bajo $\hat{\lambda}$ y la traza bajo las γ :

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = & \frac{1}{8} Tr(\hat{\lambda}^c \hat{\lambda}^b \hat{\lambda}^a) \left(-i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_\lambda \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \right) \\
 & + \frac{1}{8} Tr(\hat{\lambda}^b \hat{\lambda}^c \hat{\lambda}^a) \left(-i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\lambda \frac{i}{\not{p} + \not{k}_2 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \right) .
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

De acuerdo a la propiedad cíclica de las trazas:

$$Tr(ABC) = Tr(CAB) = Tr(BCA) .$$

Para este caso se obtiene:

$$Tr(\hat{\lambda}^c \hat{\lambda}^b \hat{\lambda}^a) = Tr(\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^c \hat{\lambda}^b) .$$

Y para el término cruzado se tiene:

$$Tr(\hat{\lambda}^b \hat{\lambda}^c \hat{\lambda}^a) = Tr(\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^b \hat{\lambda}^c) .$$

Por lo tanto (4.3), resulta:

$$\begin{aligned}
 T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = & \frac{1}{8} Tr(\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^c \hat{\lambda}^b) \left(-i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_2 - m} \gamma_\lambda \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k}_1 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \right) \\
 & + \frac{1}{8} Tr(\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^b \hat{\lambda}^c) \left(-i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_1 - m} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p} - m} \gamma_\lambda \frac{i}{\not{p} + \not{k}_2 - m} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \right) .
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Observando que las trazas sobre el γ es (en el límite $m \rightarrow 0$) simétrico bajo el intercambio ($\nu \leftrightarrow \lambda, k_1 \leftrightarrow k_2$). Se obtiene de esta manera:

$$T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = \frac{1}{8}Tr(\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^c \hat{\lambda}^b) \left(-i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_2} \gamma_\lambda \frac{1}{\not{p}} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k}_1} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \right) \\ + \frac{1}{8}Tr(\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^b \hat{\lambda}^c) \left(-i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_1} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}} \gamma_\lambda \frac{i}{\not{p} + \not{k}_2} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \right) .$$

Ahora, haciendo el intercambio $\nu \leftrightarrow \lambda, k_1 \leftrightarrow k_2$, se obtiene:

$$T_{\mu\nu\lambda}^{abc} = \frac{1}{8}Tr(\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^c \hat{\lambda}^b) \left(-i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_1} \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}} \gamma_\lambda \frac{i}{\not{p} + \not{k}_2} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \right) \\ + \frac{1}{8}Tr(\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^b \hat{\lambda}^c) \left(-i \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p} - \not{k}_2} \gamma_\lambda \frac{1}{\not{p}} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p} + \not{k}_1} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \right) . \quad (4.5)$$

Ahora, se procede a calcular las igualdades para los términos del diagrama cruzado de la expresión (4.5):

$$\frac{i}{\not{p} - \not{k}_2} = \frac{i}{\not{p} - \not{k}_2} \frac{\not{p} + \not{k}_2}{\not{p} + \not{k}_2} = \frac{i(\not{p} + \not{k}_2)}{\not{p}^2 - \not{k}_2^2} = \frac{i(\gamma_\alpha p + \gamma_\alpha k_2)}{p^2 - k_2^2} = \frac{i\gamma_\alpha(p + k_2)^\alpha}{p^2 - k_2^2} . \quad (4.6)$$

$$\frac{1}{\not{p}} = \frac{1}{\not{p}} \frac{\not{p}}{\not{p}} = \frac{\not{p}}{p^2} = \frac{\gamma_\beta p^\beta}{p^2} . \quad (4.7)$$

$$\frac{i}{\not{p} - \not{k}_1} = \frac{i}{\not{p} - \not{k}_1} \frac{\not{p} + \not{k}_1}{\not{p} + \not{k}_1} = \frac{i(\not{p} + \not{k}_1)}{\not{p}^2 - \not{k}_1^2} = \frac{i(\gamma_\gamma p + \gamma_\gamma k_1)}{p^2 - k_1^2} = \frac{i\gamma_\gamma(p + k_1)^\gamma}{p^2 - k_1^2} . \quad (4.8)$$

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas en (4.6), (4.7) y (4.8), la traza presentada en (4.5) para el diagrama cruzado resulta:

$$Tr[\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\gamma \gamma_\mu \gamma_5] (p - k_2)^\alpha p^\beta (p + k_1)^\gamma . \quad (4.9)$$

Haciendo el reemplazo de $p \rightarrow -p$, se obtiene:

$$Tr[\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\gamma \gamma_\mu \gamma_5] (-p - k_2)^\alpha (-p)^\beta (-p + k_1)^\gamma \\ = Tr[\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\gamma \gamma_\mu \gamma_5] (-)(p + k_2)^\alpha (-)(p^\beta)(-)(p - k_1)^\gamma \\ = -Tr[\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\gamma \gamma_\mu \gamma_5] (p + k_2)^\alpha (p^\beta)(p - k_1)^\gamma .$$

De acuerdo a la propiedad de las trazas: $Tr(A^T) = Tr(A)$ Por lo tanto:

$$\begin{aligned} & -Tr[\gamma_\alpha \gamma_\lambda \gamma_\beta \gamma_\nu \gamma_\gamma \gamma_\mu \gamma_5](p+k_2)^\alpha (p-k_1)^\gamma \\ & = -Tr[\gamma_5^T \gamma_\mu^T \gamma_\gamma^T \gamma_\nu^T \gamma_\beta^T \gamma_\lambda^T \gamma_\alpha^T](p+k_2)^\alpha (p-k_1)^\gamma \quad . \end{aligned} \quad (4.10)$$

El cambio $p \rightarrow -p$ es válido debido a la integración sobre el espacio total.

Introduciendo el operador unidad

$$1 = \hat{C}^{-1} \hat{C} \quad ,$$

Donde \hat{C} es el operador de conjugación de carga.

Es una generalización de la operación de inversión de carga, ya que en una conjugación de carga no sólo se invierte el signo de las cargas sino que se substituye una partícula por su antipartícula. (No modifica la paridad de las partículas). Entonces

$$\hat{C} \gamma_\mu \hat{C}^{-1} = -\gamma_\mu^t \quad . \quad (4.11)$$

Por lo que:

$$\begin{aligned} & -Tr[\gamma_5^T \gamma_\mu^T \gamma_\gamma^T \gamma_\nu^T \gamma_\beta^T \gamma_\lambda^T \gamma_\alpha^T](p+k_2)^\alpha (p-k_1)^\gamma \\ & = -Tr[(\hat{C} \gamma_5 \hat{C}^{-1})(-)(\hat{C} \gamma_\mu \hat{C}^{-1})(-)(\hat{C} \gamma_\gamma \hat{C}^{-1})(-)(\hat{C} \gamma_\nu \hat{C}^{-1}) \\ & \quad \times (-)(\hat{C} \gamma_\beta \hat{C}^{-1})(-)(\hat{C} \gamma_\lambda \hat{C}^{-1})(-)(\hat{C} \gamma_\alpha \hat{C}^{-1})](p+k_2)^\alpha (p-k_1)^\gamma \quad . \end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\hat{C} \gamma_5 \hat{C}^{-1} = +\gamma_5^t \quad .$$

Así, le expresión (4.10) resulta

$$\begin{aligned} & Tr[\gamma_5^T \gamma_\mu^T \gamma_\gamma^T \gamma_\nu^T \gamma_\beta^T \gamma_\lambda^T \gamma_\alpha^T](p+k_2)^\alpha (p-k_1)^\gamma \\ & = -(-1)^6 Tr[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\gamma \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma_\alpha](p+k_2)^\alpha p^\beta (p-k_1)^\gamma \\ & = -Tr[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\gamma \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma_\alpha](p+k_2)^\alpha p^\beta (p-k_1)^\gamma \quad . \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de índices $\alpha \longleftrightarrow \gamma$, resulta:

$$-Tr[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\gamma \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma_\alpha](p+k_2)^\alpha p^\beta (p-k_1)^\gamma = -Tr[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\beta \gamma_\lambda \gamma_\gamma](p+k_2)^\gamma p^\beta (p-k_1)^\alpha \quad .$$

Realizando conmutación de γ_5 con γ_μ

$$\begin{aligned}
 & -Tr[\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma_\gamma](p+k_2)^\gamma p^\beta (p-k_1)^\gamma \\
 & = -Tr[\gamma_\mu\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma_\gamma\gamma_5](p+k_2)^\gamma p^\beta (p-k_1)^\gamma \\
 & = -Tr[\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma_\gamma(-\gamma_\mu)\gamma_5](p-k_1)^\alpha p^\beta (p+k_2)^\gamma \\
 & = Tr[\gamma_\alpha\gamma_\nu\gamma_\beta\gamma_\lambda\gamma_\gamma\gamma_\mu\gamma_5](p-k_1)^\alpha p^\beta (p+k_2)^\gamma \quad . \quad (4.12)
 \end{aligned}$$

Se realiza el cambio ($\nu \longleftrightarrow \lambda, k_1 \longleftrightarrow k_2$), la traza resulta:

$$Tr[\gamma_\alpha\gamma_\lambda\gamma_\beta\gamma_\nu\gamma_\gamma\gamma_\mu\gamma_5](p-k_2)^\alpha p^\beta (p+k_1)^\gamma \quad .$$

Después del intercambio ($\nu \longleftrightarrow \lambda, k_1 \longleftrightarrow k_2$) esto simplemente reproduce la expresión inicial (4.9). Por lo tanto debido a la simetría se denota:

$$T_{\mu\nu\alpha}^{abc} = \frac{1}{8}D^{abc} \left(-i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} Tr \left[\frac{i}{\not{p}-k_2} \gamma_\lambda \frac{1}{\not{p}} \gamma_\nu \frac{i}{\not{p}-k_1} \gamma_\mu \gamma_5 \right] \right) \quad . \quad (4.13)$$

Donde

$$D^{abc} = \sum_f Tr[\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^b \hat{\lambda}^c] + Tr[\hat{\lambda}^a \hat{\lambda}^c \hat{\lambda}^b] = \sum_f Tr[\hat{\lambda}^a \{\hat{\lambda}^b, \hat{\lambda}^c\}] \quad .$$

Donde las sumas corren sobre todos los fermiones que contribuyen a la anomalía. El numerador de (4.13) es de orden p^4 , mientras que el denominador es sólo de orden p^3 . Esto conduce a una expresión integral linealmente divergente que no se puede renormalizar. Por tanto, no se puede aplicar la prueba de renormalizabilidad a la teoría de gauge a menos que desaparezca la contribución de la anomalía. Esto solo se puede garantizar si el grupo de gauge cumple con el requisito de ser libre de anomalías:

$$\sum_f Tr\{\hat{\lambda}^a \{\hat{\lambda}^b, \hat{\lambda}^c\}\} = 0 \quad .$$

En este contexto, se enfatiza que una teoría de gauge puede ser renormalizable si esta libre de anomalía. La prueba general de renormalizabilidad no se puede aplicar por sí sola.

4.1. Cancelación de Anomalías para el Z'

4.1.1. La simetría de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)'$

El objetivo de esta sección es construir la parametrización más general para la extensión ED (electrodébil) mínima del ME, limitándose a los fermiones del ME más neutrinos derechos y un leptón exótico cargado con cargas vectoriales. Para lograr dicho propósito no se usará la hipótesis de la universalidad¹. Con esto en mente, se considera el grupo de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)'$ como una extensión no universal libre de anomalías del sector ED del ME.

En lo que sigue T_{1L}, T_{2L} y T_{3L} denotan los generadores de $SU(2)_L$, mientras que Y y $Q_{Z'}$ denotan el generadores de $U(1)_Y$ y $U(1)'$, respectivamente. La derivada covariante del modelo viene dada por [16].

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \vec{T}_L \cdot \vec{A}_\mu - ig_Y Y B_{Y\mu} - ig_{Z'} Q_{Z'} Z'_\mu \quad , \quad (4.14)$$

donde g, g_Y y $g_{Z'}$ son los acoplamientos de gauge asociados con los grupos de gauge, $SU(2)_L, U(1)$ y $U(1)'$, respectivamente, y $\vec{A}_\mu, B_{Y\mu}$ and Z'_μ representan los campos de gauge correspondientes. A nivel de corrientes el Lagrangiano está dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\supset \sum_f \bar{f}_L \gamma^\mu f_L g_{Z'} \epsilon_L(f) Z'_\mu + \bar{f}_R \gamma^\mu f_R g_{Z'} \epsilon_R(f) Z'_\mu \\ &= \sum_f \bar{f} \gamma^\mu g_{Z'} (g_v(f) + \gamma^5 g_a(f)) f Z'_\mu, \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde $\epsilon_R = g_v + g_a$ y $\epsilon_L = g_v - g_a$. Las relaciones inversas son: $g_v = \frac{\epsilon_R + \epsilon_L}{2}$ y $g_a = \frac{\epsilon_R - \epsilon_L}{2}$.

Para encontrar la solución más general libre de anomalías, se asumen cargas diferentes para los fermiones en cada familia bajo $U(1)'$, debido a esto, se requieren al menos dos dobletes

¹La única diferencia entre los fermiones de diferentes generaciones es la masa, no es posible distinguir entre unos sabores u otros en aquellos procesos físicos en los que masa no juegue un papel relevante. Esta propiedad fundamental del Modelo Estándar se conoce como universalidad. En particular, en el caso del electrón, el muón y el tau se suele hablar de universalidad leptónica, la cual establece que todos los leptones se acoplan de igual manera a los bosones vectoriales.

de Higgs para dar masas a las tres familias, entonces:

$$\langle \Phi_i \rangle^T = (0, v_i/\sqrt{2}), \quad i = 1, 2. \quad (4.16)$$

En esta etapa, es importante enfatizar que en el presente trabajo de grado no se pretende reportar un modelo, sino que el propósito es mostrar una solución general a las ecuaciones de cancelación de anomalías. Se agregaron dos dobletes de Higgs ya que representa el contenido de campo escalar mínimo para tener acoplamientos de Yukawa cuando los fermiones del ME acoplan con un bosón de gauge Z' no universal. En la solución, cada conjunto de parámetros representa un posible modelo electrodébil. Para cada elección de las cargas Z' es posible introducir escalares adicionales para reproducir los ángulos de mezcla en los sectores de leptones y quarks. En la base de interacción con la estructura de Higgs del modelo es posible generar matrices de masa con cuatro ceros de textura ² para los leptones y quarks. Eso es posible ya que en la solución, dos familias se acoplan a un solo doblete de Higgs y sólo una de las familias se acopla a un doblete escalar diferente. Es bien sabido que incluso las matrices de masa con cinco ceros de textura pueden generar las matrices de mezcla para los sectores de leptones y quarks [63]. Así, en principio, no está prohibido que matrices de masa con cuatro ceros de textura generen las mezclas de CKM ³ (matriz de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa) y PMNS ⁴ (matriz de Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata). En cualquier caso, como se mencionó anteriormente, para una elección particular de las cargas Z' es posible agregar nuevos escalares si es necesario.

²Los ceros de textura de una matriz de masa de fermiones dada significan que los elementos de la matriz correspondientes están desapareciendo exactamente o están suficientemente suprimidos en comparación con sus contrapartes vecinas. Por lo general, hay dos tipos de ceros de textura: pueden originarse simplemente a partir de una elección adecuada de la base del sabor y, por lo tanto, no tienen un significado físico definido o se originan como una consecuencia natural o artificial de una simetría de sabor discreta o continua subyacente [62].

³Es una matriz unitaria que contiene información sobre la intensidad de las desintegraciones débiles que cambian el sabor. Técnicamente, especifica la diferencia de los estados cuánticos de los quarks cuando propagan libremente y cuando participan en las interacciones débiles. Es importante en el estudio de la violación de CP.

⁴La matriz VPMNS es la matriz de mezcla leptónica en las interacciones débiles, contiene información de discordancia de estados cuánticos de neutrinos cuándo estos se propagan libremente y participan en las interacciones débiles.

4.1.2. Cancelación de anomalías de gauge

Para la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \otimes U(1)'$ con el contenido de partículas que se muestra en la Tabla 4.1, las ecuaciones de anomalías de gauge no triviales son:

$$\begin{aligned}
 [SU(2)]^2 U(1)' : 0 &= \Sigma q + \frac{1}{3} \Sigma \ell \quad , \\
 [SU(3)]^2 U(1)' : 0 &= 2\Sigma q - \Sigma u - \Sigma d \quad , \\
 [\text{grav}]^2 U(1)' : 0 &= 6\Sigma q - 3(\Sigma u + \Sigma d) + 2\Sigma \ell - \Sigma n - \Sigma e \quad , \\
 [U(1)]^2 U(1)' : 0 &= \frac{1}{3} \Sigma q - \frac{8}{3} \Sigma u - \frac{2}{3} \Sigma d + \Sigma \ell - 2\Sigma e \quad , \\
 U(1)[U(1)']^2 : 0 &= \Sigma q^2 - 2\Sigma u^2 + \Sigma d^2 - \Sigma \ell^2 + \Sigma e^2 \quad , \\
 [U(1)']^3 : 0 &= 6\Sigma q^3 - 3(\Sigma u^3 + \Sigma d^3) + 2\Sigma \ell^3 - \Sigma n^3 - \Sigma e^3 \quad , \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

donde $\Sigma f = f_1 + f_2 + f_3$. También se tiene en cuenta las restricciones derivadas de los acoplamientos Yukawa:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_Y \supset & \bar{\ell}_{1L} \tilde{\Phi}_1 \nu_{1R} + \bar{\ell}_{1L} \Phi_1 e_{1R} + \bar{q}_{1L} \tilde{\Phi}_1 u_{1R} + \bar{q}_{1L} \Phi_1 d_{1R} + \\
 & \bar{\ell}_{2L} \tilde{\Phi}_2 \nu_{2R} + \bar{\ell}_{2L} \Phi_2 e_{2R} + \bar{q}_{2L} \tilde{\Phi}_2 u_{2R} + \bar{q}_{2L} \Phi_2 d_{2R} + \\
 & \bar{\ell}_{3L} \tilde{\Phi}_2 \nu_{3R} + \bar{\ell}_{3L} \Phi_2 e_{3R} + \bar{q}_{3L} \tilde{\Phi}_2 u_{3R} + \bar{q}_{3L} \Phi_2 d_{3R} + \text{h.c.} \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Las restricciones correspondientes que provienen de los términos en el Lagrangiano anterior son (donde $\phi_2 = \phi_3$):

$$\begin{aligned}
 0 &= e_i - \ell_i + \phi_i \quad , \\
 0 &= n_i - \ell_i - \phi_i \quad , \\
 0 &= d_i - q_i + \phi_i \quad , \\
 0 &= u_i - q_i - \phi_i \quad . \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Particles	Spin	$SU(3)_C$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$U(1)'$
ℓ_{Li}	1/2	1	2	-1/2	ℓ_i
e_{Ri}	1/2	1	1	-1	e_i
ν_{Ri}	1/2	1	1	0	n_i
q_{Li}	1/2	3	2	1/6	q_i
u_{Ri}	1/2	3	1	2/3	u_i
d_{Ri}	1/2	3	1	-1/3	d_i
Φ_i	0	1	2	1/2	ϕ_i
E_{Li}	1/2	1	1	-1	1
E_{Ri}	1/2	1	1	-1	1

Tabla 4.1: Contenido de partículas. El subíndice $i = 1, 2, 3$ representa el número de familia en la base de interacción. En nuestra solución $\phi_2 = \phi_3$ de tal manera que solo se necesitan dos dobletes de Higgs. Sin embargo, a veces mantenemos la notación ϕ_i , que es bastante conveniente para fines de notación. El leptón vectorial $E_{L,R}$ es exótico y se introduce para generar una contribución suficientemente grande al $g - 2$.

La solución a las ecuaciones de anomalía de gauge (4.17) y las restricciones de los términos de interacción de Yukawa (4.19) corresponden a las cargas que se muestran en la Tabla 4.2 (hay seis soluciones correspondientes a las permutaciones entre los índices ijk). En general, cada una de estas soluciones depende de seis parámetros, (q_i, n_i) , con $i = 1, 2, 3$, correspondientes a las cargas de Z' del doblete de quark y del neutrino derecho, respectivamente, en cada generación. En particular se puede definir $(n_j - n_k)/2 = L_i = -L_k = 1$, $n_k = -1$ y $q_i = q_j = q_k = n_i = 0$, para obtener el modelo $L_j - L_k$ [4], donde L_i es 1 para los leptones de la familia i -th y cero en caso contrario. De estas soluciones, el modelo más conocido es el modelo $L_\mu - L_\tau$ que se ha utilizado ampliamente para explicar la anomalía $g - 2$ [64].

f	$\epsilon^{Z'}(f)$
ℓ_i	$-3q_i$
e_i	$-n_i - 6q_i$
u_i	$+n_i + 4q_i$
d_i	$-n_i - 2q_i$
ℓ_j	$+\frac{1}{2}[n_j - n_k - 3(q_j + q_k)]$
e_j	$-n_k - 3(q_j + q_k)$
u_j	$+\frac{1}{2}(n_j + n_k + 5q_j + 3q_k)$
d_j	$-\frac{1}{2}(n_j + n_k + q_j + 3q_k)$
ℓ_k	$+\frac{1}{2}[-n_j + n_k - 3(q_j + q_k)]$
e_k	$-n_j - 3(q_j + q_k)$
u_k	$+\frac{1}{2}(n_j + n_k + 3q_j + 5q_k)$
d_k	$-\frac{1}{2}(n_j + n_k + 3q_j + q_k)$

Tabla 4.2: Los acoplamientos Z' para los dobletes de Higgs Φ_i y Φ_j son $\phi_i = n_i + 3q_i$ y $\phi_j = \phi_k = \frac{1}{2}[n_j + n_k + 3(q_j + q_k)]$, respectivamente. El campo de Higgs ϕ_i se acopla a los fermiones de la i -th familia. Los enteros ijk son una permutación 123.

4.1.3. $L_\mu - L_\tau$

El número leptónico es una simetría global accidental del ME, que sin embargo se rompe por correcciones cuánticas. Se ha observado, sin embargo, que la diferencia de números leptónicos entre familias es libre de anomalías y por lo tanto se puede asumir como una simetría gauge abeliana [65, 5, 66]. $L_\mu - L_\tau$ es un ejemplo explícito que se ha investigado en detalle en [67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77]. El grupo de gauge $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ implica que sólo la segunda y la tercera generación de leptones se cargan bajo la nueva simetría de gauge abeliana, bajo la cual llevan cargas opuestas. Como es habitual, el nuevo grupo gauge abeliano conduce a la existencia de nuevos bosones gauge masivos, Z' , que pueden adquirir masa mediante una ruptura espontánea de la simetría gobernada por un nuevo campo escalar o mediante el mecanismo de Stueckelberg [78, 79]. De cualquier manera, el nuevo bosón se acopla a los dobletes de leptones ME

a través del término $\bar{L}\gamma^\alpha D_\alpha L$, donde la derivada covariante es $D_\alpha = \partial_\alpha + ig_{Z'} q Z'_\alpha$, siendo $g_{Z'}$ el nuevo acoplamiento gauge de la simetría $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ y q la carga correspondiente ($q_{\mu,\nu_\mu} = 1, q_{\tau,\nu_\tau} = -1$). Escribiendo explícitamente este término se obtiene

$$\mathcal{L}_{\text{fermions}} \supset g_{Z'} (\bar{\mu}\gamma_\alpha\mu - \bar{\tau}\gamma_\alpha\tau + \bar{\nu}_\mu\gamma_\alpha P_L\nu_\mu - \bar{\nu}_\tau\gamma_\alpha P_L\nu_\tau) Z'^\alpha \quad . \quad (4.20)$$

El primer término de ecuación (4.20) da lugar a una contribución a $g - 2$, que se encontró en la ecuación (51) de [80]

$$\Delta a_\mu(Z') = \frac{g_{Z'}^2 m_\mu^2}{8\pi^2 m_{Z'}^2} \int_0^1 dx \frac{P_4^+(x)}{(1-x)(1-\lambda^2x) + \epsilon_f^2 \lambda^2 x}, \quad (4.21)$$

donde $P_4^+ = 2x^2(1-x)$, con $\lambda \equiv \frac{m_\mu}{m_{Z'}}$, $\epsilon_f \equiv \frac{m_f}{m_\mu}$,

de acuerdo con [81, 56].

Se enfatiza que el resultado en la Eq. (4.21) es completamente general y aplicable a cualquier modelo con un bosón gauge con acoplamientos puramente vectoriales a muones. En la ecuación (51b) de [80] se obtuvo un resultado más general, que incluía acoplamientos de vector y vector axial, así como posibles mezclas de leptones cargados.

Límites existentes

A partir del resultado hallado en la ecuación (4.21) se llega a la conclusión de que los bosones gauge Z' pueden explicar la anomalía $g - 2$; sin embargo, sobre el modelo $L_\mu - L_\tau$ hay restricciones muy fuertes para masas de Z' grandes, debido a la producción del tridente de neutrinos y la medición del ancho parcial del Z en cuatro leptones, como se describe a continuación.

Suponiendo que la masa de Z' se genera a través un singlete escalar con VEV v_ϕ , se encuentra que su masa es $m_{Z'} = g'v_\phi$. El límite que surge de la producción del tridente de neutrinos impone $m_{Z'}/g_{Z'} > 750$ GeV, mientras que el límite de la medición del ancho de desintegración Z en cuatro leptones requiere $m_{Z'} \gtrsim 40$ GeV. Estas restricciones descartan decisivamente el modelo $L_\mu - L_\tau$ como una posible explicación de la anomalía $g - 2$ en esta configuración mínima para masas $m_{Z'}$ mayores que 300 MeV. Sin embargo, cuando el Z'

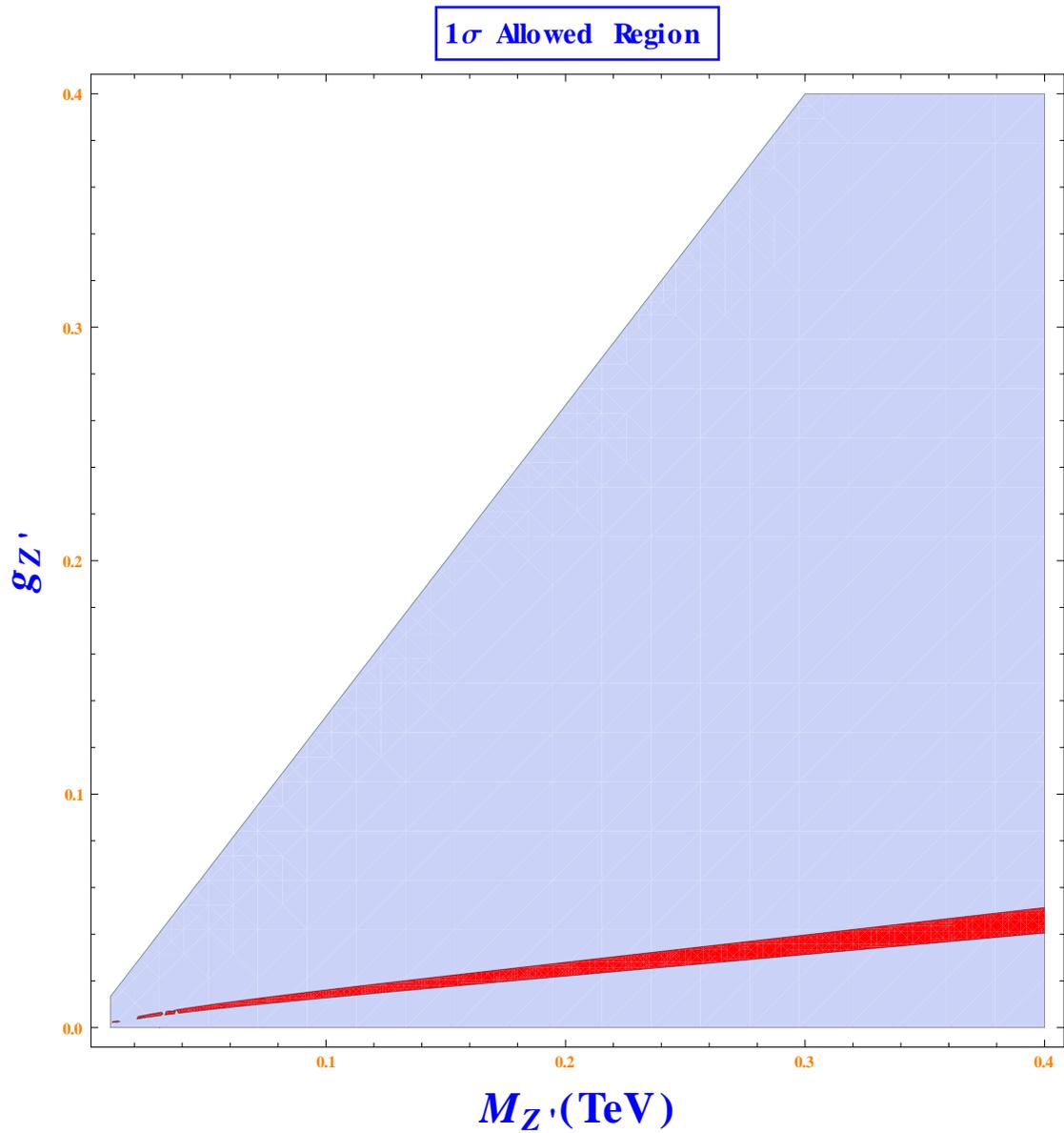


Figura 4.2: La región en rojo corresponde al espacio de parámetros permitido para $g - 2$ con un nivel de confianza de 1σ . La región púrpura es la región permitida por producción tridente del neutrino $m_{Z'}/g_{Z'} > 0,75 \text{ TeV}$. Se asume para la masa de la partícula exótica un valor de 80 GeV.

se vuelve lo suficientemente ligero, el límite de producción del tridente de neutrinos permite una ventana para el modelo $L_\mu - L_\tau$ para explicar la anomalía $g - 2$. Estos hallazgos se muestran claramente en la Fig. 4.2. Se puede encontrar una discusión más detallada de estos límites en [70, 82, 83].

Capítulo 5

Conclusiones

- Al realizar la deducción de la ecuación de Klein-Gordon (K-G) como primer intento de combinar la mecánica cuántica con la relatividad especial para obtener una ecuación de Schrödinger relativista, se pudo evidenciar los problemas físicos que esta ecuación generaba, por ejemplo: la presencia de energías negativas, la densidad de probabilidad era incompatible con la interpretación estadística de Born y la aplicabilidad de esta ecuación era reducida sólo a partículas de espín cero.
- Desarrollando la propuesta de Dirac ante los problemas expuestos en la ecuación de K-G, se llegó a la ecuación de Dirac, la cual describe las partículas elementales de espín $1/2$, siendo así consistente con los principios de la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad especial.
- Se estudió con gran detalle las propiedades de la covariancia de la ecuación de Dirac. Se desarrolló el formalismo de las matrices γ y la tecnología de trazas para manipular amplitudes.
- A partir de la densidad Lagrangiana de la electrodinámica cuántica se obtiene los diagramas de Feynman de la teoría. De estos formalismos obtuvimos la amplitud de Feynman a un loop correspondiente a la evaluación de la función del vértice del electrón, el cual contribuyó al cálculo de la corrección al factor $g - 2$ del electrón, descubierto por Schwinger en 1948.
- Existe un gran interés en la física de altas energías en la confrontación del valor experimental de $g - 2$ con lo que predice el ME. En el experimento E821 en el Brookhaven National Lab (BNL) se registraron los valores experimentales del momento magnético anómalo del muón ($g - 2$). A través de este experimento se obtuvo una mejora de un

factor 14 con respecto al experimento realizado en 1970 en el CERN. En la actualidad se esta construyendo un nuevo experimento para medir $g - 2$ en las instalaciones de J-PARC en Japón.

- Se encontró una solución de la anomalía experimental en $g - 2$. Para esto se consideró a los Z' con un contenido mínimo de fermiones, es decir, solo contienen los fermiones del ME, 3 neutrinos derechos y un leptón exótico cargado. De esta manera, se obtuvo el espacio de parámetros permitidos para $g - 2$ con un nivel de confianza de 1σ . También se encontró la región permitida por producción tridente de neutrinos $m_{Z'}/g_{Z'} > 0,75$ TeV. Se asumió para la masa de la partícula exótica un valor de 80 GeV.

Bibliografía

- [1] T. Aoyama, N. Asmussen, M. Benayoun, J. Bijnens, T. Blum, M. Bruno, I. Caprini, C.M. Carloni Calame, M. Cè, G. Colangelo, and et al. The anomalous magnetic moment of the muon in the standard model. *Physics Reports*, 887:1–166, Dec 2020.
- [2] A. Soria, María Shaw Martos, and A. Torres. Física nuclear y de partículas. 2003.
- [3] CERN Accelerating science. What is the LHC? (Obtenido de: <https://home.cern/about>. En línea; Consultado Septiembre 5, 2021).
- [4] X. G. He, Girish C. Joshi, H. Lew, and R. R. Volkas. NEW Z-prime PHENOMENOLOGY. *Phys. Rev. D*, 43:22–24, 1991.
- [5] Xiao-Gang He, Girish C. Joshi, H. Lew, and R. R. Volkas. Simplest Z-prime model. *Phys. Rev. D*, 44:2118–2132, 1991.
- [6] Ennio Salvioni, Alessandro Strumia, Giovanni Villadoro, and Fabio Zwirner. Non-universal minimal Z' models: present bounds and early LHC reach. *JHEP*, 03:010, 2010.
- [7] Andreas Crivellin, Giancarlo D'Ambrosio, and Julian Heeck. Addressing the LHC flavor anomalies with horizontal gauge symmetries. *Phys. Rev. D*, 91(7):075006, 2015.
- [8] Paul Langacker. The Physics of Heavy Z' Gauge Bosons. *Rev. Mod. Phys.*, 81:1199–1228, 2009.
- [9] F. Pisano and V. Pleitez. An $SU(3) \times U(1)$ model for electroweak interactions. *Phys. Rev. D*, 46:410–417, 1992.
- [10] P. H. Frampton. Chiral dilepton model and the flavor question. *Phys. Rev. Lett.*, 69:2889–2891, 1992.

-
- [11] S. F. Mantilla, R. Martinez, and F. Ochoa. Neutrino and CP -even Higgs boson masses in a nonuniversal $U(1)'$ extension. *Phys. Rev. D*, 95(9):095037, 2017.
- [12] Thomas Appelquist, Bogdan A. Dobrescu, and Adam R. Hopper. Nonexotic Neutral Gauge Bosons. *Phys. Rev. D*, 68:035012, 2003.
- [13] Marcela Carena, Alejandro Daleo, Bogdan A. Dobrescu, and Timothy M. P. Tait. Z' gauge bosons at the Tevatron. *Phys. Rev. D*, 70:093009, 2004.
- [14] Ernest Ma. Progressive Gauge $U(1)$ Family Symmetry for Quarks and Leptons. *Phys. Rev. D*, 94(3):031701, 2016.
- [15] Corey Kownacki, Ernest Ma, Nicholas Pollard, and Mohammadreza Zakeri. Generalized Gauge $U(1)$ Family Symmetry for Quarks and Leptons. *Phys. Lett. B*, 766:149–152, 2017.
- [16] W. A. Ponce. Anomaly - Free Version of $SU(2) \times U(1) \times U(1)$ -prime. *Phys. Rev. D*, 36:962–965, 1987.
- [17] J. Beringer et al. Review of Particle Physics (RPP). *Phys. Rev. D*, 86:010001, 2012.
- [18] Christopher Aubin, Thomas Blum, Maarten Golterman, and Santiago Peris. Model-independent parametrization of the hadronic vacuum polarization and $g-2$ for the muon on the lattice. *Phys. Rev. D*, 86:054509, 2012.
- [19] Christopher Aubin, Thomas Blum, Maarten Golterman, and Santiago Peris. Hadronic vacuum polarization with twisted boundary conditions. *Phys. Rev. D*, 88(7):074505, 2013.
- [20] Christopher Aubin, Thomas Blum, Maarten Golterman, Kim Maltman, and Santiago Peris. The muon anomalous magnetic moment, a view from the lattice. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, 35:1460418, 2014.

-
- [21] Thomas Blum, Achim Denig, Ivan Logashenko, Eduardo de Rafael, B. Lee Roberts, Thomas Teubner, and Graziano Venanzoni. The Muon $(g-2)$ Theory Value: Present and Future. 11 2013.
- [22] Fred Jegerlehner. Application of Chiral Resonance Lagrangian Theories to the Muon $g - 2$. *Acta Phys. Polon. B*, 44(11):2257–2266, 2013.
- [23] Andreas Nyffeler. Status of hadronic light-by-light scattering in the muon $g - 2$. *Nuovo Cim. C*, 037(02):173–178, 2014.
- [24] Matthias Steinhauser. Towards analytic $(g - 2)_\mu$ at four loops. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, 35:1460417, 2014.
- [25] W. Greiner and J. Reinhardt. *Quantum electrodynamics*. 1992.
- [26] Richard Feynman. Seis piezas fáciles. 08 2021.
- [27] Paul A. M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 117:610–624, 1928.
- [28] A. Salam and E. Wigner. Aspects of quantum theory. *Aspects of Quantum Theory, by Abdus Salam , E. P. Wigner, Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2010*, 03 2010.
- [29] P. Dirac. Prof. erwin schrödinger, for.mem.r.s. *Nature*, 189:355–356, 1961.
- [30] I. Segal. Development of quantum field theory. *Fields Quanta*, 2:51–91, 1971.
- [31] Steven Weinberg. *The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations*. Cambridge University Press, 6 2005.
- [32] B. Thaller. *The Dirac equation*. 1992.
- [33] David Griffiths. *Introduction to elementary particles*. 2008.

-
- [34] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.
- [35] R. P. Feynman. Space-time approach to quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 76:769–789, Sep 1949.
- [36] W. Greiner and Berndt Muller. *Gauge theory of weak interactions*. 1993.
- [37] S. H. Neddermeyer and C. D. Anderson. Note on the Nature of Cosmic Ray Particles. *Phys. Rev.*, 51:884–886, 1937.
- [38] K. Nagamine. *Introductory muon science*. 2003.
- [39] Wikipedia. Muón. (Obtenido de: <https://es.wikipedia.org/wiki/Muon>. En línea; Consultado Octubre 20, 2021).
- [40] Julian S. Schwinger. On Quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 73:416–417, 1948.
- [41] Andreas Hoecker and William Joseph Marciano. Muon Anomalous Magnetic Moment.
- [42] Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio. Complete Tenth-Order QED Contribution to the Muon $g-2$. *Phys. Rev. Lett.*, 109:111808, 2012.
- [43] Tatsumi Aoyama, Masashi Hayakawa, Toichiro Kinoshita, and Makiko Nio. Tenth-Order QED Contribution to the Electron $g-2$ and an Improved Value of the Fine Structure Constant. *Phys. Rev. Lett.*, 109:111807, 2012.
- [44] Toichiro Kinoshita and M. Nio. Improved α^4 term of the electron anomalous magnetic moment. *Phys. Rev. D*, 73:013003, 2006.
- [45] T. Aoyama, M. Hayakawa, T. Kinoshita, and M. Nio. Revised value of the eighth-order electron $g-2$. *Phys. Rev. Lett.*, 99:110406, 2007.
- [46] Toichiro Kinoshita and M. Nio. Improved α^4 term of the muon anomalous magnetic moment. *Phys. Rev. D*, 70:113001, 2004.

-
- [47] T. Kinoshita. Theory of lepton $g-2$: Improvement of QED terms. *Nucl. Phys. B Proc. Suppl.*, 144:206–213, 2005.
- [48] T. Kinoshita and M. Nio. The Tenth-order QED contribution to the lepton $g-2$: Evaluation of dominant α^5 terms of muon $g-2$. *Phys. Rev. D*, 73:053007, 2006.
- [49] Stefano Laporta. High-precision calculation of the 4-loop contribution to the electron $g-2$ in QED. *Phys. Lett. B*, 772:232–238, 2017.
- [50] Alexander Kurz, Tao Liu, Peter Marquard, Alexander Smirnov, Vladimir Smirnov, and Matthias Steinhauser. Electron contribution to the muon anomalous magnetic moment at four loops. *Phys. Rev. D*, 93(5):053017, 2016.
- [51] A. L. Kataev. The Comments on QED contributions to $(g-2)(\mu)$. In *12th Lomonosov Conference on Elementary Particle Physics*, pages 345–349, 2 2006.
- [52] M. Passera. The Standard model prediction of the muon anomalous magnetic moment. *J. Phys. G*, 31:R75–R94, 2005.
- [53] T. Aoyama et al. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. *Phys. Rept.*, 887:1–166, 2020.
- [54] Richard H. Parker, Chenghui Yu, Weicheng Zhong, Brian Estey, and Holger Müller. Measurement of the fine-structure constant as a test of the Standard Model. *Science*, 360:191, 2018.
- [55] James P. Miller, Eduardo de Rafael, and B. Lee Roberts. Muon $(g-2)$: Experiment and theory. *Rept. Prog. Phys.*, 70:795, 2007.
- [56] Fred Jegerlehner and Andreas Nyffeler. The Muon $g-2$. *Phys. Rept.*, 477:1–110, 2009.
- [57] James P. Miller, Eduardo de Rafael, B. Lee Roberts, and Dominik Stöckinger. Muon $(g-2)$: Experiment and Theory. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 62:237–264, 2012.

- [58] J. Bailey, K. Borer, F. Combley, H. Drumm, C. Eck, F.J.M. Farley, J.H. Field, W. Flegel, P.M. Hattersley, F. Krienen, F. Lange, G. Lebé, E. McMillan, G. Petrucci, E. Picasso, O. Rúnolfsson, W. von Rüden, R.W. Williams, and S. Wojcicki. Final report on the cern muon storage ring including the anomalous magnetic moment and the electric dipole moment of the muon, and a direct test of relativistic time dilation. *Nuclear Physics B*, 150:1–75, 1979.
- [59] J. Grange et al. Muon ($g-2$) Technical Design Report. 1 2015.
- [60] B. Abi et al. Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, 126(14):141801, 2021.
- [61] M. Abe et al. A New Approach for Measuring the Muon Anomalous Magnetic Moment and Electric Dipole Moment. *PTEP*, 2019(5):053C02, 2019.
- [62] Harald Fritzsch and Murray Gell-Mann. *50 Years of Quarks*. WORLD SCIENTIFIC, 2015.
- [63] Patrick Otto Ludl and Walter Grimus. A complete survey of texture zeros in general and symmetric quark mass matrices. *Phys. Lett. B*, 744:38–42, 2015.
- [64] Anirban Biswas, Sandhya Choubey, and Sarif Khan. FIMP and Muon ($g - 2$) in a $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ Model. *JHEP*, 02:123, 2017.
- [65] Robert Foot. New Physics From Electric Charge Quantization? *Mod. Phys. Lett. A*, 6:527–530, 1991.
- [66] Robert Foot, X. G. He, H. Lew, and R. R. Volkas. Model for a light Z-prime boson. *Phys. Rev. D*, 50:4571–4580, 1994.
- [67] Xiao-Jun Bi, Xiao-Gang He, and Qiang Yuan. Parameters in a class of leptophilic models from PAMELA, ATIC and FERMI. *Phys. Lett. B*, 678:168–173, 2009.
- [68] Julian Heeck and Werner Rodejohann. Gauged $L_\mu - L_\tau$ and different Muon Neutrino and Anti-Neutrino Oscillations: MINOS and beyond. *J. Phys. G*, 38:085005, 2011.

- [69] Julian Heeck and Werner Rodejohann. Gauged $L_\mu - L_\tau$ Symmetry at the Electroweak Scale. *Phys. Rev. D*, 84:075007, 2011.
- [70] Wolfgang Altmannshofer, Stefania Gori, Maxim Pospelov, and Itay Yavin. Quark flavor transitions in $L_\mu - L_\tau$ models. *Phys. Rev. D*, 89:095033, 2014.
- [71] Wolfgang Altmannshofer, Chien-Yi Chen, P. S. Bhupal Dev, and Amarjit Soni. Lepton flavor violating Z' explanation of the muon anomalous magnetic moment. *Phys. Lett. B*, 762:389–398, 2016.
- [72] Andreas Crivellin, Giancarlo D’Ambrosio, and Julian Heeck. Explaining $h \rightarrow \mu^\pm \tau^\mp$, $B \rightarrow K^* \mu^+ \mu^-$ and $B \rightarrow K \mu^+ \mu^- / B \rightarrow K e^+ e^-$ in a two-Higgs-doublet model with gauged $L_\mu - L_\tau$. *Phys. Rev. Lett.*, 114:151801, 2015.
- [73] Andreas Crivellin, Julian Heeck, and Peter Stoffer. A perturbed lepton-specific two-Higgs-doublet model facing experimental hints for physics beyond the Standard Model. *Phys. Rev. Lett.*, 116(8):081801, 2016.
- [74] Jong-Chul Park, Jongkuk Kim, and Seong Chan Park. Galactic center GeV gamma-ray excess from dark matter with gauged lepton numbers. *Phys. Lett. B*, 752:59–65, 2016.
- [75] Seungwon Baek. Dark matter and muon $(g - 2)$ in local $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ -extended Ma Model. *Phys. Lett. B*, 756:1–5, 2016.
- [76] Wolfgang Altmannshofer, Stefania Gori, Stefano Profumo, and Farinaldo S. Queiroz. Explaining dark matter and B decay anomalies with an $L_\mu - L_\tau$ model. *JHEP*, 12:106, 2016.
- [77] Anirban Biswas, Sandhya Choubey, and Sarif Khan. Neutrino Mass, Dark Matter and Anomalous Magnetic Moment of Muon in a $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ Model. *JHEP*, 09:147, 2016.
- [78] Henri Ruegg and Marti Ruiz-Altaba. The Stueckelberg field. *Int. J. Mod. Phys. A*, 19:3265–3348, 2004.

-
- [79] Daniel Feldman, Zuowei Liu, and Pran Nath. The Stueckelberg Z Prime at the LHC: Discovery Potential, Signature Spaces and Model Discrimination. *JHEP*, 11:007, 2006.
- [80] Manfred Lindner, Moritz Platscher, and Farinaldo S. Queiroz. A Call for New Physics : The Muon Anomalous Magnetic Moment and Lepton Flavor Violation. *Phys. Rept.*, 731:1–82, 2018.
- [81] Jacques P. Leveille. The Second Order Weak Correction to $(G-2)$ of the Muon in Arbitrary Gauge Models. *Nucl. Phys. B*, 137:63–76, 1978.
- [82] Wolfgang Altmannshofer, Stefania Gori, Maxim Pospelov, and Itay Yavin. Neutrino Trident Production: A Powerful Probe of New Physics with Neutrino Beams. *Phys. Rev. Lett.*, 113:091801, 2014.
- [83] Ben Allanach, Farinaldo S. Queiroz, Alessandro Strumia, and Sichun Sun. Z models for the LHCb and $g - 2$ muon anomalies. *Phys. Rev. D*, 93(5):055045, 2016. [Erratum: *Phys.Rev.D* 95, 119902 (2017)].
- [84] Bob Holdom. Two $U(1)$'s and Epsilon Charge Shifts. *Phys. Lett. B*, 166:196–198, 1986.
- [85] Peter Galison and Aneesh Manohar. TWO Z 's OR NOT TWO Z 's? *Phys. Lett. B*, 136:279–283, 1984.
- [86] C. Boehm, Pierre Fayet, and J. Silk. Light and heavy dark matter particles. *Phys. Rev. D*, 69:101302, 2004.
- [87] Maxim Pospelov, Adam Ritz, and Mikhail B. Voloshin. Secluded WIMP Dark Matter. *Phys. Lett. B*, 662:53–61, 2008.
- [88] Nima Arkani-Hamed, Douglas P. Finkbeiner, Tracy R. Slatyer, and Neal Weiner. A Theory of Dark Matter. *Phys. Rev. D*, 79:015014, 2009.
- [89] Maxim Pospelov. Secluded $U(1)$ below the weak scale. *Phys. Rev. D*, 80:095002, 2009.

- [90] Miguel D. Campos, D. Cogollo, Manfred Lindner, T. Melo, Farinaldo S. Queiroz, and Werner Rodejohann. Neutrino Masses and Absence of Flavor Changing Interactions in the 2HDM from Gauge Principles. *JHEP*, 08:092, 2017.
- [91] Jim Alexander et al. Dark Sectors 2016 Workshop: Community Report. 8 2016.