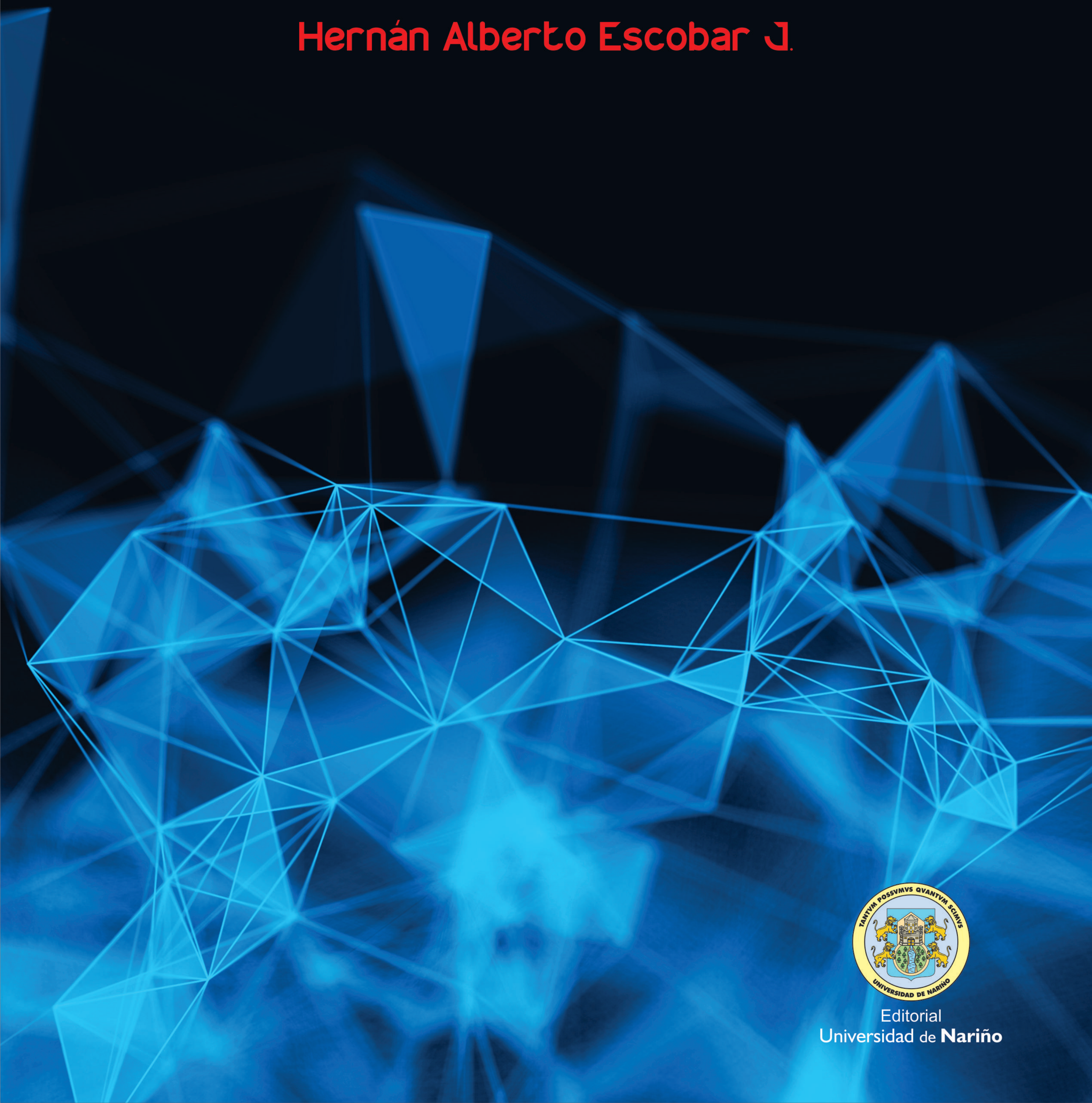
APLICACIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Hernán Alberto Escobar J.



Editorial
Universidad de Nariño

Escobar Jiménez., Hernán Alberto
Aplicaciones de cálculo diferencial / Hernán Alberto Escobar Jiménez. - San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2019.
153 p.

Incluye bibliografía
ISBN: 978-958-8958-97-2

1. Cálculo diferencial 2. Derivadas (matemáticas) 3. Ecuaciones diferenciales – Problemas, ejercicios, etc. I. Título.

515.33 E746 – SCDD-Ed. 22 Biblioteca Alberto Quijano Guerrero

APLICACIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

ISBN: 978-958-8958-97-2
Diagramación: María Elena Mesías
Diseño Portada: Mauricio Riascos
Centro de Publicaciones Universidad de Nariño

Fecha de Publicación: Noviembre de 2020
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

APLICACIONES DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Hérnan Alberto Escobar J.

Universidad de Nariño
Departamento de Matemáticas y Estadística
San Juan de Pasto

CONTENIDO

PREFACIO

El trabajo que aquí se presenta fue escrito con el propósito de que sirva como complemento o consulta para estudiantes universitarios de los cursos de Cálculo Diferencial de los programas de Licenciatura en Matemáticas e Informática, Física, Química y las ingenierías de Sistemas, Civil y Electrónica de la Universidad de Nariño.

Es la segunda edición, corregida y aumentada, del libro de texto editado en 1999. En esta edición se plantea y resuelve un mayor número de ejercicios y problemas en cada capítulo, así como también se ha mejorado la redacción, la calidad de las gráficas y, en general, la presentación del texto.

En cada capítulo se presentan enunciados y definiciones de conceptos matemáticos que el lector debe conocer, pero de todas maneras se constituyen en un referente obligado para entender los ejemplos y problemas desarrollados. En este punto conviene decir que, en este texto, no se llevan a cabo demostraciones matemáticas de conceptos muy puntuales, pues se da por hecho que tales demostraciones, acompañadas del rigor matemático del caso, ya fueron estudiadas con detalle por el lector.

Por otra parte, se hace hincapié en que la utilización de este texto supone, por parte del lector, el conocimiento y manejo de las técnicas básicas de derivación para funciones de una variable. Además, al final de cada capítulo, se plantea una serie de ejercicios, que tienen como objetivo el afianzamiento de las diferentes temáticas tratadas.

HERNÁN ALBERTO ESCOBAR J.

1. APLICACIONES GEOMÉTRICAS DE LA DERIVADA

1.1 TANGENTE A UNA CURVA

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable en $\boldsymbol{x_0}$. La pendiente de la recta tangente a la curva de ecuación $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) es $m = \frac{dy}{dx}|_{x=x_0}$, o bien $m = f'(x_0)$.

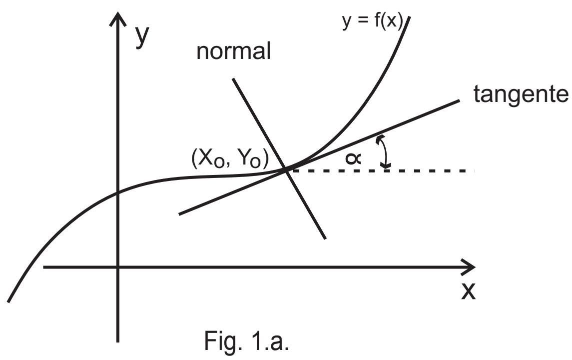


Fig. 1.a.

Entonces, la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) es :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

1.2 DIRECCIÓN DE UNA CURVA

Sea α el ángulo que forma la recta tangente a la curva $y = f(x)$ con la horizontal en el punto x_0. Como su tangente trigonométrica es precisamente $f'(x_o)$, entonces es claro que :

$$tg\,\alpha = f'(x_o)$$

Por tanto, la dirección de la curva en el punto (x_0, y_0) es :

$$\boldsymbol{\alpha} = arctg\left[f'(x_0)\right].$$

1.3 RECTA NORMAL A UNA CURVA

La ecuación de la recta normal a la curva cuya ecuación es $y = f(x)$ en el punto (x_0, y_0) viene dada por la expresión :

$$y - y_0 = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

1.4 ÁNGULO ENTRE CURVAS

El ángulo formado por las curvas de ecuaciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ en un punto común $P(x_0, y_0)$ es el formado por las tangentes a esas curvas en dicho punto. De la Figura 1.b, se tiene:

$$\phi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Entonces,

$$tg\,\phi = tg\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\ \alpha_2 - tg\ \alpha_1}{1 + tg\ \alpha_2 tg\ \alpha_1}.$$

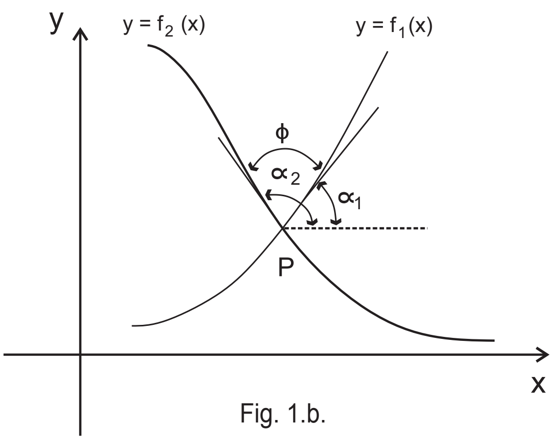


Fig. 1.b.

Por tanto,

$$tg\,\phi = \frac{f_2'(x_o) - f_1'(x_o)}{1 + f_2'(x_o) f_1'(x_o)}.$$

PROBLEMA 1.1

Hallar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola de ecuación $f(x) = x^2 + 2$ en el punto A$(2, 6)$.

SOLUCIÓN

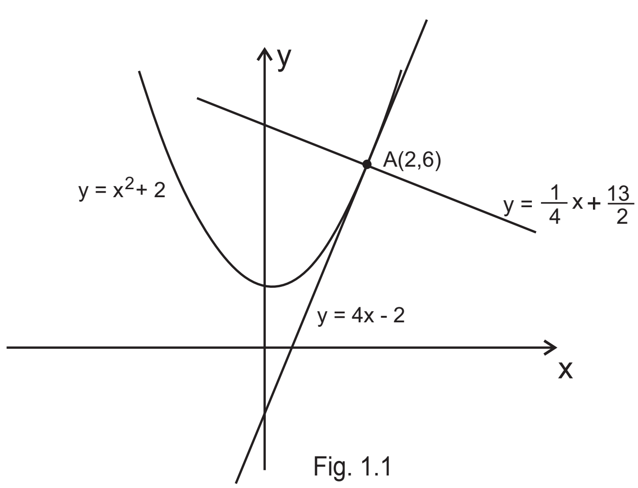


Fig. 1.1

$$f(x) = x^2 + 2; \quad f'(x) = 2x; \quad f'(2) = 2(2) = 4.$$

Luego, la ecuación de la tangente a la curva en el punto $(2, 6)$ es :

$$y - 6 = f'(2)\,(x-2),$$
$$y - 6 = 4(x-2),$$
$$y = 4x - 2.$$

Y la ecuación de la recta normal es :

$$y - 6 = \frac{-1}{f'(2)}(x-2),$$
$$y - 6 = -\frac{1}{4}(x-2),$$
$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{2}.$$

PROBLEMA 1.2

Hallar los ángulos agudos en los puntos de corte entre las curvas $y = \dfrac{x+1}{x+2}$ (a) y $y = \dfrac{1}{16}(x^2 + 4x + 8)$ (b).

SOLUCIÓN

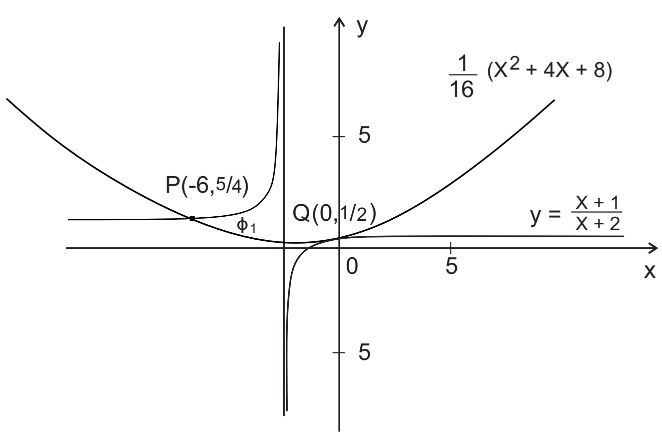


Fig. 1.2

Inicialmente, se encuentran las intersecciones entre las dos curvas así:

Al igualar las ecuaciones de las funciones dadas se obtiene:

$$\frac{x+1}{x+2} = \frac{1}{16}(x^2 + 4x + 8),$$
$$16x + 16 = x^3 + 6x^2 + 16x + 16,$$
$$x^3 + 6x^2 = 0.$$

Al resolver para $\boldsymbol{x}$:

$$x = 0; \; x = -6.$$

Los puntos de corte son:

$$Q(0,1/2);\quad P(-6,\,5/4).$$

En seguida, se calculan las derivadas de las funciones y, luego, se evalúan en los puntos de intersección:

De la función (a) : $y' = \dfrac{1}{(x+2)^2}$. De la función (b): $y' = \dfrac{1}{8}x + \dfrac{1}{4}$.

– En el punto $Q(0,1/2)$, estas derivadas toman los siguientes valores :

$$y' = \frac{1}{(0+2)^2} = \frac{1}{4} = m_1{}^{(Q)} \text{ y } y' = \frac{1}{8}(0) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = m_2{}^{(Q)}.$$

Luego :

$$tg\,\phi_2 = \frac{m_1{}^{(Q)} - m_2{}^{(Q)}}{1 + m_1{}^{(Q)}.\,m_2{}^{(Q)}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}}{1 + (\frac{1}{4})(-\frac{1}{4})} = 0;$$

$$\phi_2 = 0°.$$

– En el punto $P(-6,\,5/4)$, las derivadas valen :

$$y' = \frac{1}{(-6+2)^2} = -\frac{1}{16} = m_1{}^{(P)} \text{ y } y' = \frac{1}{8}(-6) + \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} = m_2{}^{(P)}.$$

Entonces :

$$tg\,\phi_P = \frac{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{16}(-\frac{1}{2})} = \frac{18}{31},$$

$$\phi_P = arctg\,(\frac{18}{31}) = 30°\,8'28''.$$

Las curvas se cortan en los ángulos de $0°$ y $30°\,8'28''$. (Ver Figura 1.2)

PROBLEMA 1.3

El cable de suspensión de un puente colgante está anclado a dos pilares de soporte separados entre sí $300\,m$. El cable cuelga en forma de parábola, con su punto más bajo situado a $25\,m$ de los puntos de suspensión. Hallar el ángulo formado por el cable y cada uno de los pilares de soporte.

SOLUCIÓN

La parábola que pasa por $(0,0)$ y abre sus brazos hacia arriba tiene como ecuación:

$$y = kx^2 \tag{1}$$

Como $(150,25)$ es punto de la parábola, entonces

$$25 = k(125)^2,$$

$$k = \frac{25}{(125)^2} = \frac{1}{625}.$$

Al reemplazar este valor en (1), se tiene:

$$y = \frac{1}{625}x^2 \qquad (2)$$

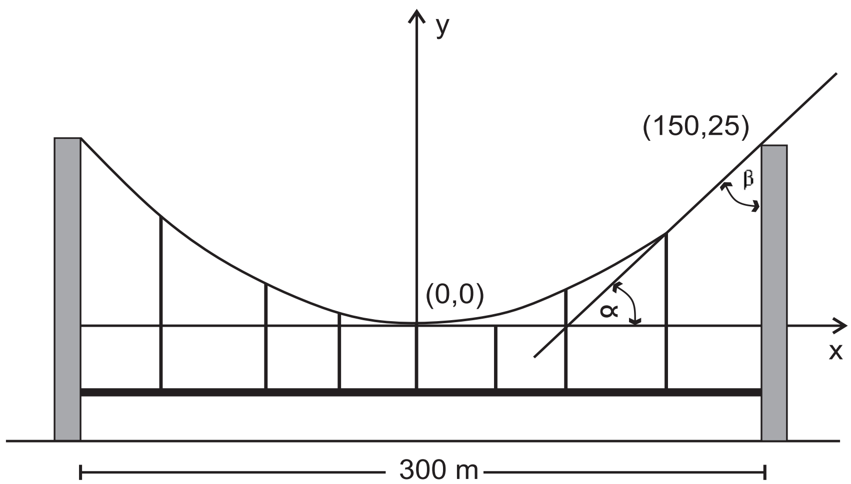


Fig. 1.3

La derivada de la función (2) es :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{625}x.$$

Al evaluar la derivada en el punto $(150, 25)$, se llega a :

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(150,\,25)} = \frac{2}{625}(150) = \frac{12}{25}.$$

El ángulo que forma el cable (la parábola) con el eje horizontal es :

$$\alpha = \ arctg\,(\frac{12}{25}) = 25,64100582°.$$

Y el ángulo que forma el cable con el pilar de soporte es :

$$\beta = \ 90° - 25,64100582°,$$

$$\beta = 64,35899418,$$

$$\beta = 64°21'32''.$$

Por consiguiente el cable y cada uno de los pilares de soporte forma un ángulo de $64°21'32''$. (Ver Figura 1.3).

PROBLEMA 1.4

Dada la función $y = 3^x,$ hallar:

a) El ángulo que forma la curva con la horizontal en el punto de corte con el eje $\boldsymbol{y}$.

b) Coordenadas en las cuales la curva forma un ángulo de $60°$ con la horizontal.

SOLUCIÓN

a) El punto de corte de la curva de ecuación $y = 3^x$ con el eje y es $(0, 1)$.

Al derivar la función $y = 3^x$, se tiene :

$$\frac{dy}{dx} = 3^x\, ln\, 3.$$

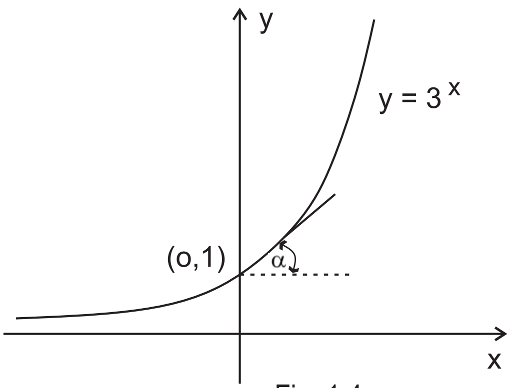


Fig. 1.4

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(0,\,1)} = 3^0\, ln\, 3 = ln 3,$$

Por tanto,

$$tg\, \alpha = ln\, 3,$$

$$\alpha = arctg\, (ln\, 3) = arctg\, (1, 098612289),$$

$$\alpha = 47, 6900875 = 47°\, 41'25''.$$

La curva $y = 3^x$ forma un ángulo de $47°\, 41'25''$ en el punto $(0, 1)$.

b) En este caso, se conoce el ángulo que forma la curva con la horizontal; es decir:

$$\alpha_1 = 60°$$

En consideración a que :

$$\frac{dy}{dx} = 3^x ln\, 3 \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx}\Big|_{(x,\, y)} = tg\, 60°,$$

entonces,

$$tg\, 60° = 3^x\, ln\, 3;$$

$$3^x = \frac{1, 732050808}{ln\, 3} = 1, 576580588;$$

$$x = log_{_3}(\, 1, 576580588) = 0, 414;$$

y consecuentemente :

$$y = 3^{0,414} = 1, 576.$$

Por lo tanto, en el punto $(0, 414\, ; 1, 576)$ la curva $y = 3^x$ forma ángulo de 60° con la horizontal.

PROBLEMA 1.5
Hallar las coordenadas de los puntos en los que las tangentes a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ son paralelas al eje $\boldsymbol{x}$.

SOLUCIÓN

La derivada de la función es $f'(x) = 3x^2 - 6x + 9.$

Como se pide calcular que la recta tangente a la curva en esos puntos sea paralela al eje $\boldsymbol{x}$, entonces el ángulo formado con la horizontal es cero; y, por consiguiente, su tangente trigonométrica también es cero.

Al igualar la derivada a cero y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtiene:

$$3x^2 - 6x + 9 = 0,$$

$$3(x-3)(x+1) = 0,$$

$$x = 3;\ x = -1.$$

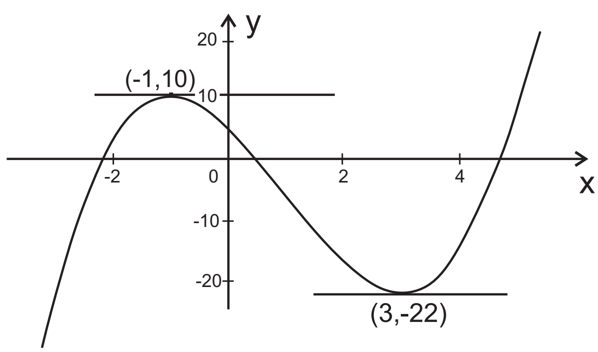


Fig. 1.5

Ahora bien, $f(3) = 3^3 - 3(3)^2 - 9(3) + 5 = -22,$
$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = 10.$

De esta manera, en los puntos $(-1, 10)$ y $(3, -22)$, las tangentes a la curva dada son paralelas al eje $\boldsymbol{x}$(Ver Figura 1.5).

PROBLEMA 1.6

Hallar los ángulos agudos que forman las curvas cuyas ecuaciones son $f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ y $f_2(x) = \frac{8}{x^2+4}$.

SOLUCIÓN

Los puntos de intersección entre las curvas se obtienen al igualar sus respectivas ecuaciones y luego, resolver para x así:

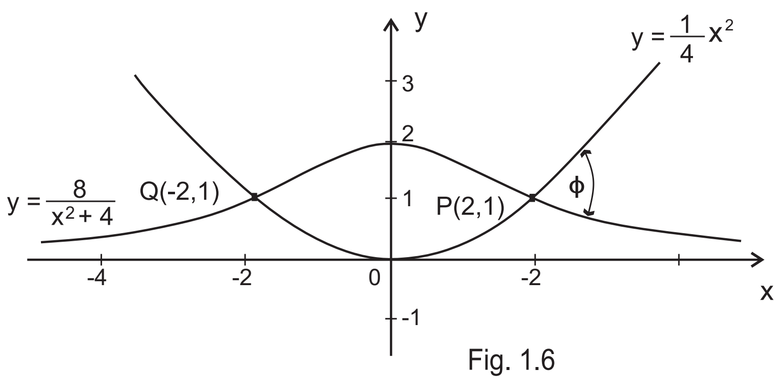


Fig. 1.6

$$(x^2+8)(x^2-4)=0,$$

$$x^2-4=0; \quad x= \pm 2.$$

Las derivadas de las funciones son, respectivamente:

$$y'=\frac{1}{2}x; \qquad y'=\frac{-16x}{(x^2+4)^2}.$$

Al evaluar estas derivadas en el punto $P(2,1)$, respectivamente, se obtiene::

$$y'=\frac{1}{2}(2)=1=m_{_1}^{(P)}; \qquad y'=\frac{-16(2)}{((2)^2+4)^2}=-\frac{1}{2}=m_{_2}^{(P)}.$$

El ángulo que forman las curvas en el punto $P(2,1)$ se calcula así :

$$tg\phi=\frac{m_{_1}^{(P)}-m_{_2}^{(P)}}{1+m_{_1}^{(P)}m_{_2}^{(P)}}=\frac{1+\frac{1}{2}}{1+1(-\frac{1}{2})}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3.$$

Por tanto, el ángulo es:

$$\phi=arctg\,3=71^o\,33'.$$

Nótese que, por simetría, en el punto $Q(-2,1)$, el ángulo también vale $71^o\,33'$.

PROBLEMA 1.7

Hallar el ángulo agudo de intersección de la intersección de las curvas $y^2=4x$ (a) y $2x^2=23-5y$ (b).

SOLUCIÓN

Las intersecciones entre las curvas se obtienen así: de la ecuación (a):

$$x=\frac{1}{4}\,y^2.$$

Al reemplazar en (b):

$$2(\frac{1}{4}y^2)=12-5y,$$

$$y^4-8y-96=0.$$

Las raíces de esta ecuación de cuarto grado son :

$y_1 = 2; \quad y_2 = -4; \quad y_3 = 1 + \sqrt{11}\, i; \quad y_4 = 1 - \sqrt{11}\, i.$

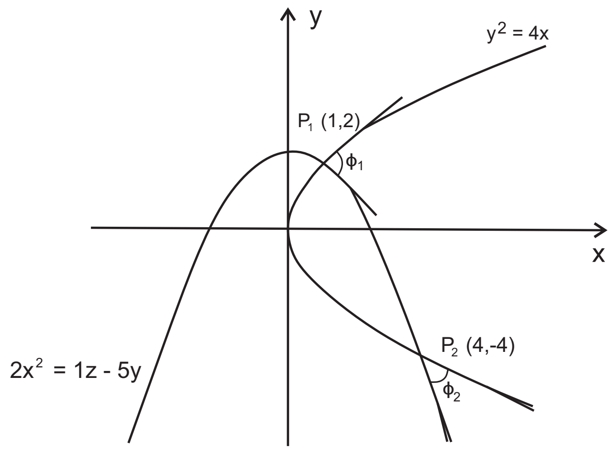


Fig. 1.7

Al considerar las raíces reales $y_1 = 2$ y $y_2 = -4$, se obtiene que los puntos de corte son $P_1(1,2)$ y $P_2(4,-4)$.(Ver Figura 1.7).

Ahora bien, las derivadas respectivas son :

De (a) : $2yy' = 4$, entonces $y' = \dfrac{2}{y}$;

$$y'(1,2) = \frac{2}{2} = 1 = m_1^{(a)};$$

$$y'(4,-4) = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} = m_1^{(b)}$$

De (b) : $y' = -\dfrac{4}{5}x;$

$$y'\,(1,2) = -\frac{4}{5}\,(11) = -\frac{4}{5} = m_2^{(a)};$$

$$y'\,(4,-4) = -\frac{4}{5}\,(4) = -\frac{16}{5} = m_2^{(b)}.$$

Los ángulos se calculan de la siguiente manera :

De la Figura 1.7 y con los datos anteriores, se tiene :

$$tg\,\phi_1 = \frac{m_1{}^{(a)} - m_2{}^{(a)}}{1 + m_1{}^{(a)}.\, m_2{}^{(a)}} = \frac{1 + \dfrac{4}{5}}{1 - \dfrac{4}{5}} = 9.$$

Entonces : $\phi_1 = arctg\, 9 = 83°39'\,35''.$

$$tg\,\phi_2 = \frac{m_1{}^{(b)} - m_2{}^{(b)}}{1 + m_1{}^{(b)}.\, m_2{}^{(b)}} = \frac{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{16}{5}}{1 + \dfrac{8}{5}} = 1,0385;$$

$83°39'35''$ y $46°4'55''$.

PROBLEMA 1.8

Hallar los puntos de la curva $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + x + 1$, en los cuales la tangente forma un ángulo de 45^o con el eje $\boldsymbol{x}$.

SOLUCIÓN

La pendiente de la tangente en el punto x_0 viene dada por

$$f'(x_0) = 4x_0^3 + 21x_0^2 + 26x_0 + 1.$$

Según los datos del problema, la tangente forma un ángulo de 45^o con el eje $\boldsymbol{x}$, entonces,

$$4x_0^3 + 21x_0^2 + 26x_0 + 1 = tg45^o,$$
$$4x_0^3 + 21x_0^2 + 26x_0 + 1 = 1,$$
$$x_0(4x_0^2 + 21x_0 + 26) = 0.$$

Al resolver para x_0, se obtiene que

$$x_0 = 0; \qquad x_0 = -2; \qquad x_0 = -13/4.$$

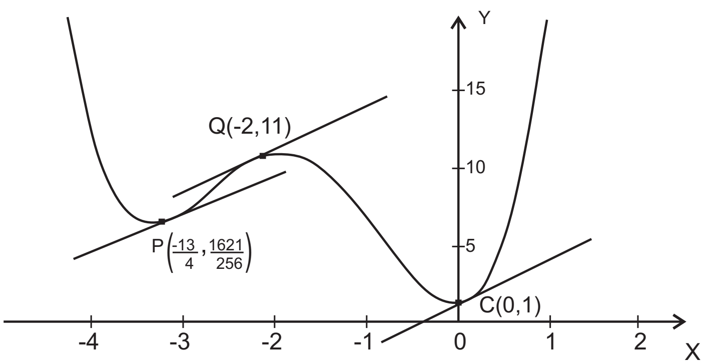


Fig. 1.8

En consecuencia, los puntos de la curva en los que la pendiente de la tangente vale uno (1), es decir que forma un ángulo de 45^o con el eje $\boldsymbol{x}$, son :

$$(0, f(0)) = (0, 1);$$
$$(-2, f(-2)) = (-2, 11);$$
$$(-13/4,\ f(-13/4)) = (-13/4,\ 1621/256).$$

Finalmente, conviene aclarar que, de acuerdo a la Figura 1.8, las tangentes en los puntos P, Q y R son paralelas entre sí y, además, tienen pendiente uno (1). Nótese, además, que la escala utilizada no es uno a uno.

PROBLEMA 1.9

Un proyectil se mueve de acuerdo a una trayectoria cuya función se define como

$$y = \frac{6}{5}x - \frac{x^2}{120}.$$

Si la distancia se mide en metros, hallar :

a) Ángulo de salida del proyectil.

b) Ángulo de impacto contra un muro vertical situado a $90\,m$ de distancia del punto de salida.

c) Ángulo de caída sobre una azotea horizontal de $15\,m$ de altura.

SOLUCIÓN

La derivada de la función en cualquier punto (x, y) es:

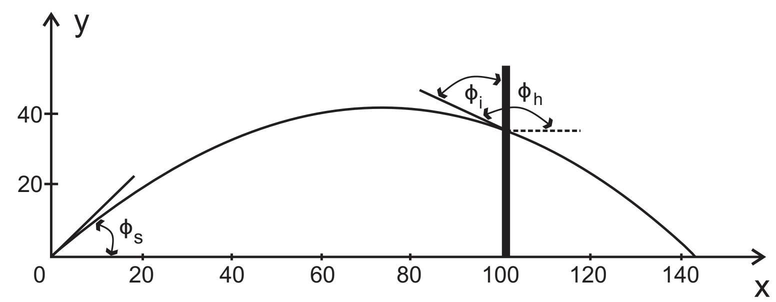


Fig. 1.9.a

$$y' = \frac{6}{5} - \frac{x}{60}.$$

a) En ángulo de salida ϕ_s, se calcula así:

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y'(0) = \frac{6}{5} = tg\,\phi_s$$

$$tg\,\phi_s = \frac{6}{5}; \qquad \phi_s = arctg\,\frac{6}{5} = 50°11'39''.$$

b) Ángulo de impacto a $100\,m$ (Figura 1.9.a) es :

$$\text{Si } x = 100\,, \qquad y'(100) = \frac{6}{5} - \frac{100}{60} = -\frac{7}{5}.$$

Denótese como ϕ_h el ángulo que forma la curva con la horizontal .

Entonces: $$tg\,\phi_h = -\frac{7}{5},$$

$$\phi_h = arctg\,(-\frac{7}{5}) = 180° - arctg\,(\frac{7}{5}),$$

$$\phi_h = 154°58'\,59''.$$

y el ángulo que forma con el muro es :

$$\phi_i = 154°58'\,59'' - 90°,$$

$$\phi_i = 64°58'\,59.''$$

c) El ángulo de caída sobre la azotea se calcula así : (Figura 1.9.b)

Si $y = 15\,m$, entonces $\quad 15 = \dfrac{6}{5}x - \dfrac{x^2}{120}.$

Al resolver para $\boldsymbol{x}$: $\quad x = 130,172\,m.$

Cuando $x = 130,172,\;\; y'\,(130,172) = \dfrac{6}{5} - \dfrac{130,17}{60} \;=\; -\,0,969533 \;= tg\;\phi;$

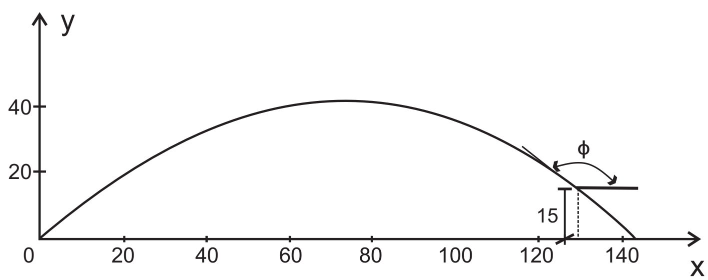


Fig. 1.9.b

$$\phi \;= arctg\,(\,-\,0,969533) = 135°\;52'\;59''.$$

El ángulo de caída sobre la azotea es de $135°\;52'\;59''$.

PROBLEMA 1.10

Hallar los coeficientes de la parábola $y = ax^2 + bx + c$, dado que su gráfica pasa por los puntos $(2,3)$ y $(0,1)$, siendo la tangente a la misma en el punto de abcisa 1 paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

SOLUCIÓN

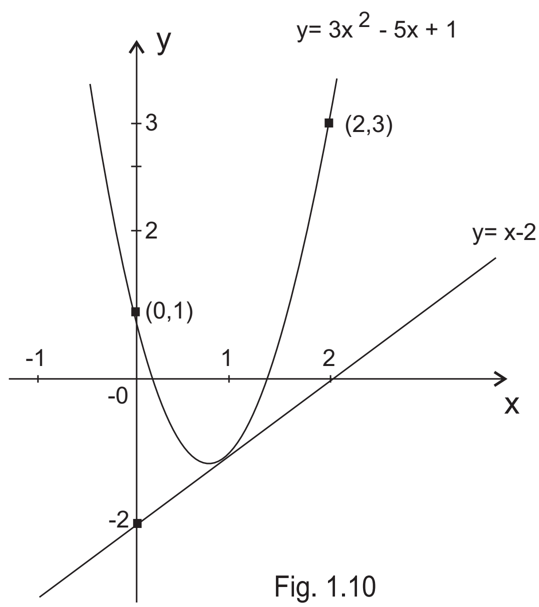


Fig. 1.10

La curva pasa por el punto $(0,1)$, entonces $a(0)^2 + b(0) + c = 1$; es decir $c = 1$.

La curva pasa por el punto $(2,3)$, entonces $a(2)^2+b(2)+c=3$. Por tanto,

$$4a+2b+c=3 \qquad (1)$$

Como la bisectriz del primer cuadrante forma un ángulo de 45^o con la horizontal, entonces $tg\,45^o=1$. Por otro lado, la pendiente de la tangente a la curva pedida en cualquier punto es :

$$y' = 2ax+b.$$

La pendiente en el punto $x=1$ es :

$$y'(1) = 2a(1)+b,$$

$$y'(1) = 2a+b.$$

Puesto que la tangente es paralela a la bisectriz del primer cuadrante, entonces se tiene que :

$$2a+b=1 \qquad (2)$$

Al resolver el sistema de ecuaciones lineales (1) y (2), y teniendo en cuenta que $c=1$, finalmente se llega a :

$$a=3;\ b=-5;\ c=1.$$

En consecuencia, la parábola tiene como ecuación:

$$y=3x^2-5x+1.$$

Fácilmente se puede ver que la tangente en el punto $x=1$ es :

$$y=x-2.$$

PROBLEMA 1.11

En una feria de diversiones, la montaña rusa obedece a la función $y=\dfrac{1}{x+1}$ y, en un momento dado, el carro va descendiendo. Si el carro está en el punto P de coordenadas $(1,\frac{1}{2})$, determinar :

a) Cuánto debe avanzar para que su ángulo con la horizontal cambie en $10°$ su dirección.

b) Cuál será el cambio de dirección cuando se desplace horizontalmente una unidad de longitud.

SOLUCIÓN

a) La derivada de la función es:

$$y' = -\frac{1}{(x+1)^2}.$$

El valor de la derivada en el punto $P(1,\frac{1}{2})$ es :

$$y'(1,\frac{1}{2}) = tg\,\phi = \frac{-1}{(1+1)^2} = -\frac{1}{4};$$

$$\phi = arctg(-\frac{1}{4}) = 180° - arctg\,(\frac{1}{4});$$

$$\phi = \ 180° - 14°2'\ 10,48'' = 165°\,57'\ 49,5''.$$

Ahora bien, si el ángulo ϕ aumenta $10°$, el nuevo ángulo ψ se calcula como

$$\psi = \phi + 10° = 175°57'\ 49,5''.$$

Por tanto,

$$tg(175°57'\ 49,5'') = \ - \frac{1}{(x+1)^2};$$

$$-\ 0,0705625 = \ - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

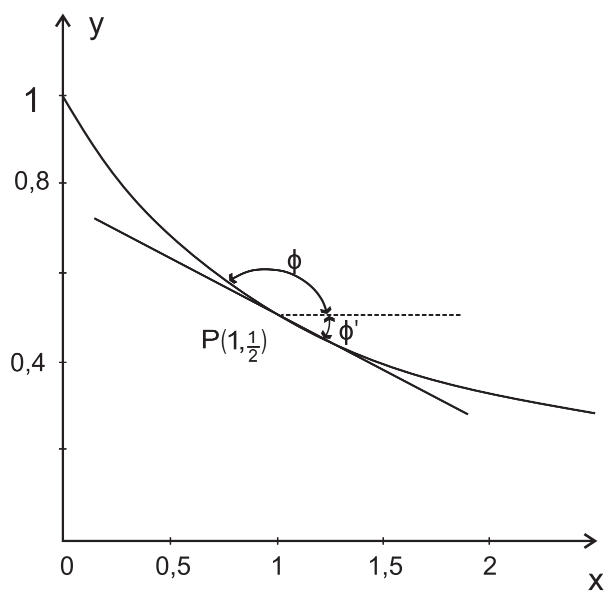


Fig. 1.11

Al despejar $\boldsymbol{x}$: $x = \ 2,76455.$

En consecuencia, el carro debe avanzar $2,76455$ unidades de longitud para variar en $10°$ su dirección.

b) Si la longitud horizontal aumenta en una unidad, el nuevo valor de la derivada es:

$$-\ \frac{1}{(1+x)^2}\Big|_{x=2} = \ -\ \frac{1}{9} = tg\ \delta;$$

entonces,

$$\delta = arctg(\ -\ \frac{1}{9}) = 180° - arctg\,(\frac{1}{9}) = 173°39'\ 35,3,$$

$$\delta = 173°39'\ 35,3.$$

La diferencia de ángulos para $x = 1$ y $x = 2$ es :

$$173°39'\ 35,3'' - 165°57'\ 49,5'' = 7°41'\ 45,81''.$$

Por tanto, el ángulo de dirección con la horizontal aumenta en $7°41'\ 45,8''$ al aumentar la coordenada $\boldsymbol{x}$ en una unidad.

PROBLEMA 1.12

Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, determinar los valores de $a,\ b,\ c$ y d si la curva pasa por los puntos $(-1, 2)$ y $(2, 3)$ y que las tangentes a ella en los puntos de abcisas $x = 1$ y $x = -2$ son paralelas al eje $\boldsymbol{x}$.

SOLUCIÓN

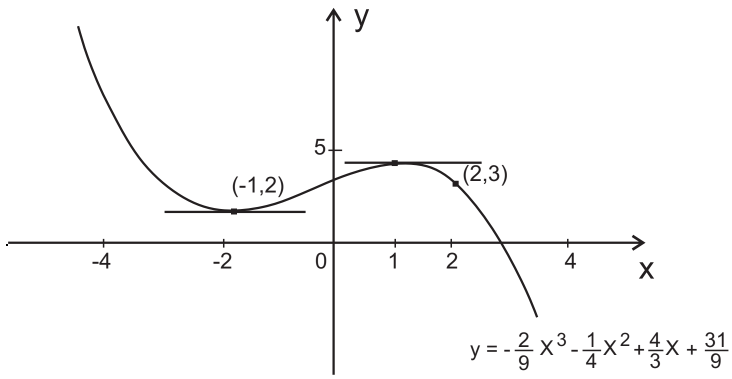


Fig. 1.12

La curva pasa por el punto $(-1, 2)$, entonces,

$$a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 2;$$

$$-a + b - c + d = 2 \qquad (1)$$

También pasa por $(2, 3)$, luego,

$$a(2)^3 + b(2)^2 + c(2) + d = 3,$$

$$8a + 4b + 2c + d = 3 \qquad (2)$$

La pendiente de la tangente a la curva en cualquier punto es :

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c.$$

Puesto que en los puntos de abcisa $x = -2,\ x = 1$ la tangente a la curva es paralela al eje $\boldsymbol{x}$, entonces,

$$f'(-2) = 3a(-2)^2 + 2b(-2) + c = 0,$$

$$12a - 4b + c = 0. \qquad (3)$$

$$f'(1) = 3a(1)^2 + 2b(1) + c = 0,$$

$$3a + 2b + c = 0 \qquad (4)$$

De las ecuaciones (1) a (4) se forma el sistema de ecuaciones lineales 4x4 :

$$\begin{cases} -a + b - c + d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = 3 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

Al resolver el sistema anterior se obtiene los valores de las incógnitas:

$$a = -2/9;\ b = -1/4;\ c = 4/3;\ d = 31/9.$$

De esta manera, la función buscada tiene como ecuación:

$$f(x) = -\frac{2}{9}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{31}{9}.$$

PROBLEMA 1.13

En qué punto de la curva $y = ln\,x$, la tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(1,0)$ y $(e,1)$.

SOLUCIÓN

La pendiente de la cuerda que une los puntos $(1,0)$ y $(e,1)$ es:

$$m = \frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}.$$

Pero $y' = \frac{1}{x}$, entonces,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{e-1}; \quad x = e-1.$$

De esta manera,

$$f(x) = f(e-1) = ln(e-1).$$

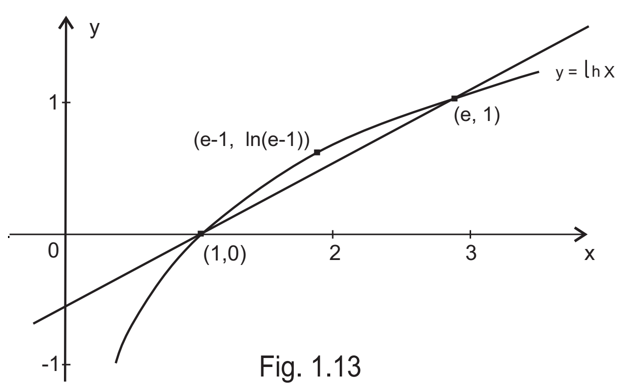


Fig. 1.13

En consecuencia, el punto de la curva en el que su tangente tiene la misma pendiente de la cuerda que une los puntos $(1,0)$ y $(e,1)$ es :

$$(e-1,\ ln(e-1)).$$

Y, por supuesto, la ecuación de la recta tangente en dicho punto es :

$$y - ln(e-1) = \frac{1}{e-1}(x-(e-1)),$$

$$y = \frac{1}{e-1}x + ln(e-1) - e + 1,$$

$$y = \frac{1}{e-1}x + ln(\frac{e-1}{e}) + 1.$$

PROBLEMA 1.14

Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $9x^2 + 16y^2 = 52$ paralelas a la recta $9x - 8y = 1$.

SOLUCIÓN

Al derivar implícitamente la ecuación de la elipse se obtiene :

$$18x + 32y\,y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y' = -\frac{9x}{16y}.$$

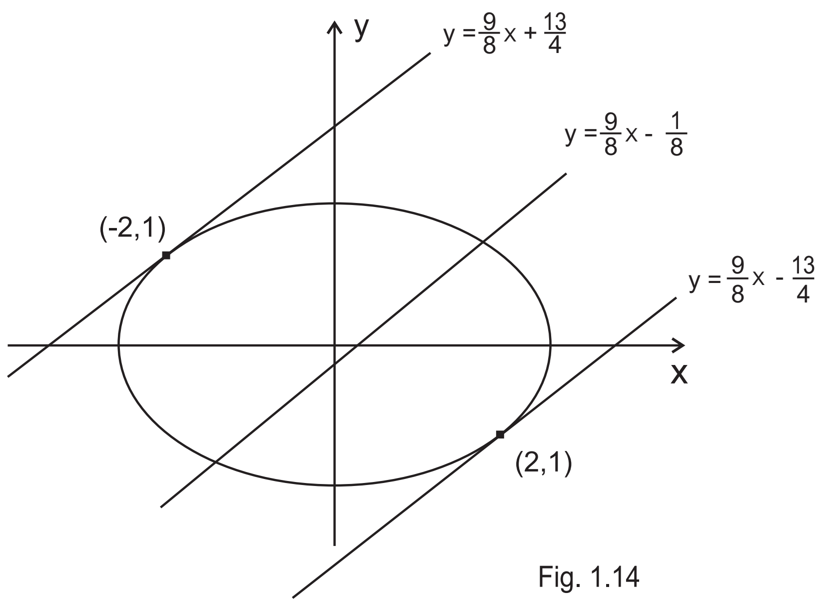


Fig. 1.14

Ahora bien, si (x_0, y_0) es punto de la elipse, entonces,

$$y'(x_0, y_0) = -\frac{9x_0}{16y_0}.$$

Por otra parte, la recta dada tiene pendiente igual a $\frac{9}{8}$, luego,

$$-\frac{9x_0}{16y_0} = \frac{9}{8} \Rightarrow \quad x_0 = -2\,y_0.$$

Al reemplazar este valor en la ecuación de la elipse, se llega a :

$$9(-2\,y_0)^2 + 16y_0^2 = 52; \quad y_0 = \pm 1;$$

Y, por consiguiente, $x_0 = \mp 2$. De esta manera los puntos de la elipse por donde pasan tangentes paralelas a la recta $9x - 8y = 1$ son : $(-2, 1)$ y $(2, -1)$.

Finalmente, las ecuaciones de las rectas tangentes con pendiente $\frac{9}{8}$ son :

$$y+1=\frac{9}{8}(x-2);\text{ o bien, }y=\frac{9}{8}x-\frac{13}{4}.$$

$$y-11=\frac{9}{8}(x+2);\text{ o bien, }y=\frac{9}{8}x+\frac{13}{4}.$$

PROBLEMA 1.15

Hallar los ángulos agudos en los puntos de intersección de las circunferencias $x^2-4x+y^2=0$ (a) y $x^2+y^2=8$ (b).

SOLUCIÓN

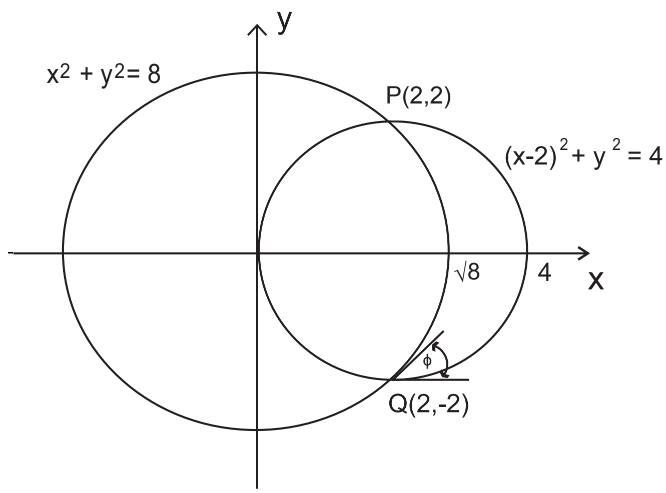


Fig. 1.15

Los puntos de intersección se encuentran fácilmente al reemplazar (b) en (a) :

$8-4x=0;\quad x=2;\ y=\pm 2.$ Entonces, los puntos de

intersección son : $(2,2)$ y $(2,-2)$.

Ahora, al derivar implícitamente la expresión (a), se obtiene:

$$2(x-2)+2y\,y'=0;\quad y'=-\frac{x-2}{y};$$

$$y'(2,-2)=-\frac{2-2}{2}=0=m_a.$$

Al derivar implícitamente la expresión (b), se llega a :

$$2x+2y\,y'=0;\qquad y'=-\frac{x}{y};$$

$$y'(2,-2)=-\frac{2}{-2}=1=m_b.$$

El ángulo agudo entre las circunferencias en el punto $Q(2,-2)$ se calcula así :

$$tg\,\phi = \frac{m_b - m_a}{1 + m_b m_a} = \frac{1-0}{1+0} = 1; \text{ entonces,}$$

$$\phi = arctg\,1 = 45^o.$$

Por la simetría entre las circunferencias, el ángulo agudo en $P(2,2)$ también es de 45º.

PROBLEMA 1.16

Mostrar que la elipse $4x^2 + 9y^2 = 45$ (a) y la hipérbola $x^2 - 4\,y^2 = 5$ (b) son ortogonales.

SOLUCIÓN

Los puntos de intersección de las cónicas dadas se obtienen así:

Al despejar de la ecuación (b) x^2, se obtiene $x^2 = 4\,y^2 + 5$. Al reemplazar en (a), se llega a :

$$4(4\,y^2 + 5) + 9y^2 = 45.$$

Al resolver para y, se obtiene que, $y = \pm 1$ y, por ende $x = \pm 3$. En consecuencia, los puntos de intersección de la hiperbola y la elipse son $(\pm 3, \pm 1)$. (Ver Figura 1.16)

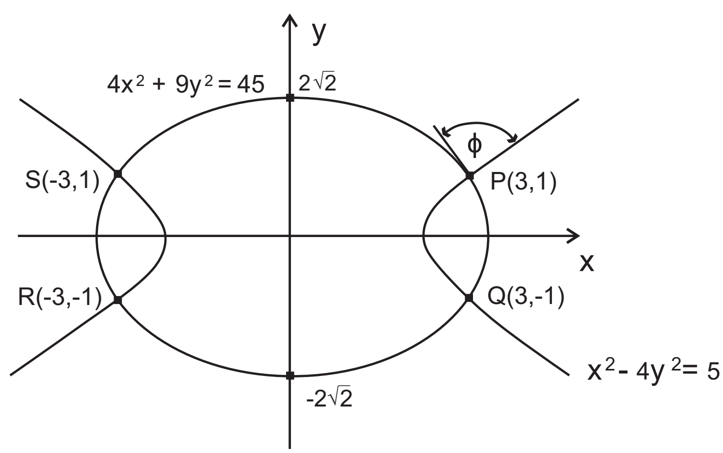


Fig. 1.16

Ahora bien, dos curvas son ortogonales si el ángulo que forman en el punto de intersección es recto; o sea, de 90^o.

Al derivar implícitamente la ecuación (a) respecto a x, se obtiene:

$$8x + 18y\,y' = 0; \qquad y' = -\frac{4x}{9y};$$

$$y'(3\,,1) = -\frac{4(3)}{9(1)} = -\frac{4}{3} = m_a.$$

Al derivar implícitamente la ecuación (b) respecto a x, se obtiene:

$$2x - 8y\,y' = 0; \qquad y' = \frac{x}{4y};$$

$$y'(3\,,1) = \frac{(3)}{4(1)} = \frac{3}{4} = m_b.$$

El ángulo en $P(3,1)$, se calcula así:

$$tg\,\phi = \frac{m_a - m_b}{1 + m_a m_b} = \frac{-4/3 - 3/4}{1 + (-4/3)(3/4)} = \frac{25/12}{0} = \infty.$$

Entonces :

$$\phi = arctg\,\infty = 90^o.$$

Idénticos resultados se obtienen en los puntos $Q,\ R,$ y $S.$

De esta manera, se ha probado que la elipse y la hipérbola son ortogonales en sus puntos de intersección.

PROBLEMA 1.17

Demostrar que la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4p\,x$ en el punto $(x_0,\ y_0)$ perteneciente a ella es $y\,y_0 = 2p\,(x + x_0)$.

SOLUCIÓN

Si se supone que $p > 0,$ entonces la Figura 1.17 ilustra la situación.

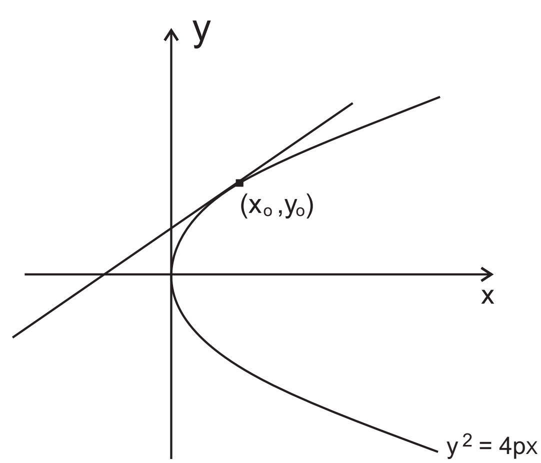


Fig. 1.17

Al derivar la ecuación de la parábola implícitamente respecto a x, se obtiene:

$$2y\,y' = 4p; \qquad y' = \frac{2p}{y}.$$

Puesto que $(x_0,\ y_0)$ pertenece a la parábola, entonces la pendiente de la recta tangente es :

$$y'(x_0,\ y_0) = \frac{2p}{y_0}.$$

En consecuencia, la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $(x_0,\ y_0)$ es :

$$y - y_0 = \frac{2p}{y_0}(x - x_0),$$

$$y\,y_0 - y_0^2 = 2p\,x - 2p\,x_0,$$

$$y\,y_0 = 2p\,x - 2p\,x_0 + y_0^2.$$

Pero $y_0^2 = 4p\,x_0$, entonces,

$$y\,y_0 = 2p\,x - 2p\,x_0 + 4p\,x_0,$$

$$y\,y_0 = 2p\,x + 2p\,x_0,$$

$$y\,y_0 = 2p\,(x + x_0).$$

PROBLEMA 1.18

Hallar los puntos en los cuales la tangente a la curva $y = x^3 + 5$ es paralela a la recta $12x - y = 17$.

SOLUCIÓN

Al derivar respecto a x la función $y = x^3 + 5$, se obtiene $y' = 3x^2$. Si (x_0, y_0) es punto de la curva, entonces,

$$y'(x_0, y_0) = 3x_0^2.$$

Ahora bien, la tangente debe ser paralela a la recta $12x - y = 17$, cuya pendiente es 12. Por tanto,

$$3x_0^2 = 12; \qquad x_0 = \pm 2.$$

Para $x = 2$, $y = 2^3 + 5 = 13$. Si $x = -2$, $y = (-2)^3 + 5 = -3$.

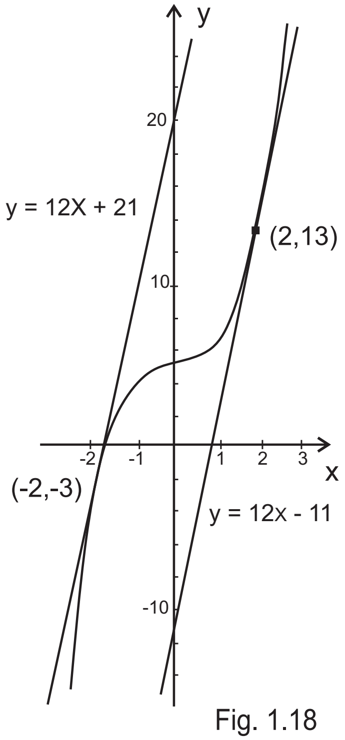


Fig. 1.18

En consecuencia, en los puntos (2, 13) y (-2, -3) las tangente a la curva $y = x^3 + 5$ son paralelas a la recta $12x - y = 17$.(Figura 1.18).

Las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = x^3 + 5$ en esos puntos son respectivamente :

$$y - 13 = 12(x - 2);\ \ y = 12x - 11,$$

$$y + 3 = 12(x + 2);\ \ \ y = 12x + 21.$$

PROBLEMA 1.19

Demostrar que la ecuaciones de las rectas tangentes de pendiente m a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ son $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

SOLUCIÓN

Al derivar implícitamente respecto a $\boldsymbol{x}$ la ecuación de la hipérbola, se tiene:

$$2b^2x - 2a^2y\,y' = 0; \quad y' = \frac{b^2x}{a^2y}.$$

Si (x_0, y_0) es punto de la curva, entonces $y'(x_0, y_0) = \dfrac{b^2x_0}{a^2y_0}$.

Pero la pendiente de la tangente es m, entonces

$$\frac{b^2x_0}{a^2y_0} = m; \qquad y_0 = \frac{b^2x_0}{a^2m}.$$

Al reemplazar el valor de y_0 en la ecuación de la hiperbola se obtiene que :

$$b^2x_0^2 - a^2\left[\frac{b^2x_0}{a^2m}\right]^2 = a^2b^2; \qquad x_0^2 - \frac{b^2x_0^2}{a^2m^2} = a^2;$$

$$x_0^2\left[1 - \frac{b^2}{a^2m^2}\right] = a^2; \ \ x_0^2\left[\frac{a^2m^2 - b^2}{a^2m^2}\right] = a^2;$$

$$x_0^2 = \frac{a^4m^2}{a^2m^2 - b^2}; \ \ x_0 = \frac{\pm\, a^2m}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}.$$

Como $y_0 = \dfrac{b^2x_0}{a^2m}$, entonces $y_0 = \pm\,\dfrac{b^2}{a^2m}\left[\dfrac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right]$;

$$y_0 = \frac{\pm\, b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}.$$

De esta manera, los puntos de tangencia de la hipérbola en términos de la pendiente m son :

$$\left(\pm\,\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}},\ \pm\,\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right).$$

Finalmente, las ecuaciones de las tangentes son :

$$y - \frac{\pm\, b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}} = m(x - \frac{\pm\, a^2m}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}});$$

$$y = mx \pm \frac{a^2m^2 - b^2}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}};\ y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

PROBLEMA 1.20

Determinar las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = 2x^3 + 13x^2 + 5x + 9$ que pasan por origen de coordenadas.

SOLUCIÓN

La derivada de la función dada respecto a $\boldsymbol{x}$ es :

$$y' = 6x^2 + 26x + 6.$$

Si $(x_0,\, y_0)$ es punto de la curva, entonces

$$y'(x_0,\, y_0) = 6x_0^2 + 26x_0 + 6.$$

Como las tangentes deben pasar por el origen, entonces sus pendientes son de la forma

$$m = \frac{y_0 - 0}{x_0 - 0} = \frac{y_0}{x_0}.$$

En consecuencia,

$$6x_0^2 + 26x_0^2 + 6y_0 = y_0,$$

$$6x_0^3 + 26x_0 + 6 = 6x_0^2 + 26x_0 + 6,$$

$$4x_0^3 + 13x_0^2 - 9 = 0.$$

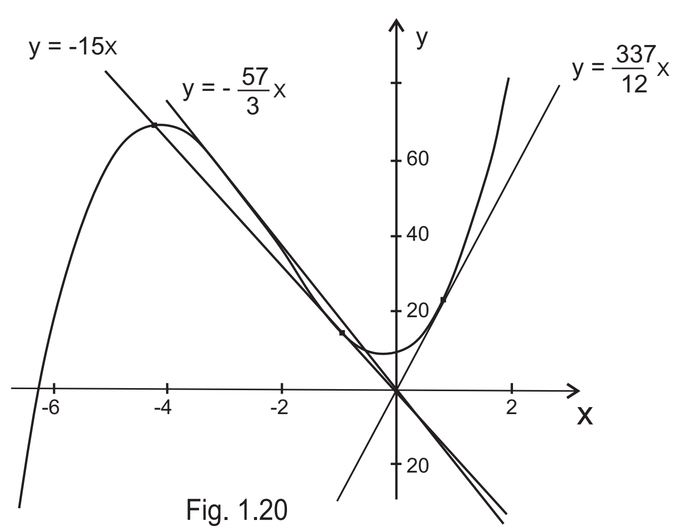


Fig. 1.20

Las raíces de esta última ecuación cúbica son : $x_0 = -1$; $x_0 = -3$; $x_0 = 3/4$.

De esta manera, los puntos de tangencia de la curva son :

$$(-1,\ 15); \qquad (-1, 57); \qquad (3/4,\ 337/16).$$

Finalmente, las ecuaciones de las tangentes que pasan por el origen son respectivamente :

$$y = -15x; \quad y = -\frac{57}{3}x; \quad y = \frac{337}{12}x.$$

PROBLEMA 1.21

Determinar los puntos de la curva $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ en los cuales la tangente es horizontal y vertical.

SOLUCIÓN

Al derivar implícitamente la ecuación de la curva, se obtiene:

$$2x + 4(xy' + y) + 32yy' = 0;$$

$$y' = -\frac{2x + 4y}{4x + 32y}.$$

a) Tangente horizontal : al igualar a cero la expresión de la derivada, se obtiene $x = -2y$. Al reemplazar en la ecuación de la curva, se llega a:

$$4y^2 - 8y^2 + 16y^2 = 0; \ y = \pm 3/2.$$

Luego, los puntos de la curva donde la tangente es horizontal son:

$(3,\ -3/2)$ y $(-3,\ 3/2)$.

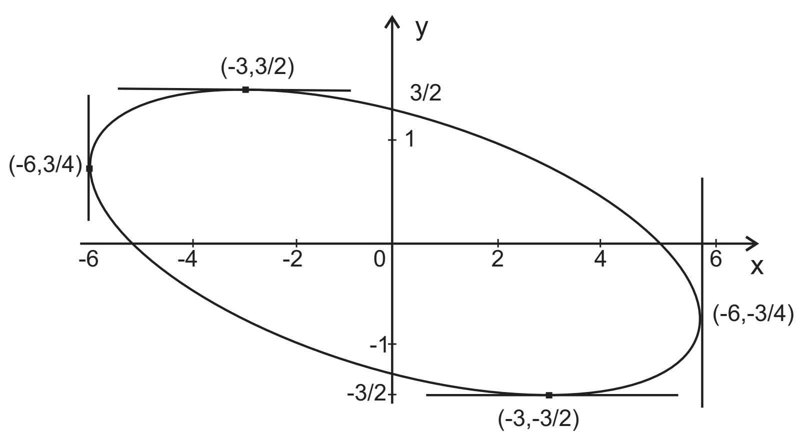


Fig. 1.21

b) Tangente vertical: al igualar a cero el denominador de la fracción de la derivada de la función, se obtiene $x = -8y$. Al reemplazar en la ecuación de la curva, se llega a :

$$64y^2 - 32y^2 + 16y^2 = 0; \ y = \pm 3/4.$$

Luego, los puntos de la curva donde la tangente es vertical son:

$(6,\ -3/4)$ y $(-6,\ 3/2)$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

1) Una línea eléctrica de alta tensión, sujeta a dos torres, tiene la forma de una catenaria de ecuación

$$y = 30(e^{x/60} + e^{-x/60}).$$

Si las torres distan entre sí $120\ m,$ hallar :

a) Ángulo que forma el cable con cada una de las torres.

b) Dirección del cable en el punto medio entre las dos torres.

c) Dirección del cable, cuando una de las torres dista $40\,m$.

d) Punto donde el cable forma con la horizontal un ángulo de 30^o.

2) Hallar el ángulo en el punto de intersección entre las curvas cuyas ecuaciones son $y = ln(-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 1)$ y $y = ln(\frac{1}{8}x^3 - 1)$.

3) Hallar los ángulos en los puntos de intersección entre las curvas definidas como

$$y = x^2 \text{ y } x = \frac{1}{2}(y^2 - 3y).$$

4) En qué puntos la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x}{2x+3}$ es paralela a la recta de ecuación $3x - 2y + 15 = 0$.

5) Hallar el punto en el que la tangente a la curva definida como $y = x^2 + 5$ es :

a) Perpendicular a la recta $x + 3y = 2$.

b) Paralela a la recta $12x - y = 17$.

6) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse $4x^2 + 9y^2 = 40$ que tengan como pendiente $m = -\dfrac{2}{9}$.

7) Dada la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ demostrar que :

a) La ecuación de la recta tangente en su punto $P(x_0, y_0)$ tiene como ecuación

$$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2.$$

b) Las ecuaciones de las rectas tangentes de pendiente $\boldsymbol{m}$ son

$$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}.$$

8) Demostrar que las curvas definidas como $y = x^3 + 2$ y $y = 2x^2 + 2$ tienen una tangente común en el punto $(0,2)$ y que se cortan en el punto $(2,10)$ formando un ángulo $\phi = arctg\left(4/9\right)$.

2. RAZÓN DE CAMBIO

Si $y = f(x)$ es una función, la razón de cambio instantánea de y por unidad de cambio de x en x_1 es $f'(x_1)$, o , equivalentemente, la derivada de y con respecto a x en x_1, si ésta existe en ese punto.

Si la variable independiente de la función es el tiempo, entonces $y = f(t)$. Por ejemplo, f podría ser :

- El tamaño de una población.
- La cantidad de pesos en una cuenta de ahorros.
- La distancia recorrida t horas después del comienzo de un viaje.
- La cantidad de agua en una represa con flujo variable.
- El volumen de un globo que está siendo inflado.

Hay gran variedad de problemas relacionados con razón de cambio de dos o más variables afines con respecto al tiempo t. Para estos casos, es necesario aplicar, en el proceso de derivación, la regla de cadena.

PROBLEMA 2.1

Una escalera de $7\ m$ de largo se apoya contra una pared vertical. Si la base de la escalera se tira horizontalmente, alejándola de la pared a $1\ m/seg$, ¿qué tan rápido resbala la parte superior de la escalera, cuando la base está a $4\ m$ de la pared?

SOLUCIÓN

Sean :

$t =$ tiempo en segundos que ha transcurrido desde que la escalera comenzó a resbalar de la pared;

$y =$ distancia en metros desde el piso a la parte superior de la escalera en t segundos;

$x =$ distancia en metros desde la base de la escalera a la pared en t.

Al aplicar el Teorema de Pitágoras (Figura 2.1), se tiene:

$$x^2 + y^2 = 49 \tag{1}$$

Al derivar los dos miembros con respecto a t :

$$2x\,\frac{dx}{dt} + 2y\,\frac{dy}{dt} = 0.$$

De donde,

$$\frac{dy}{dt} = -\,\frac{x}{y}\,\frac{dx}{dt} \tag{2}$$

Según los datos del problema, $\dfrac{dx}{dt} = 1\ m/seg.$

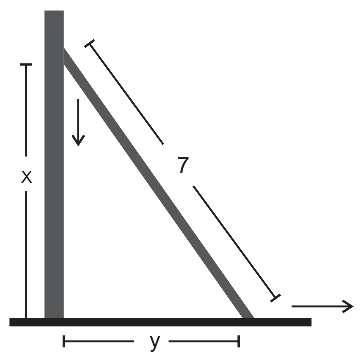


Fig. 2.1

Además, cuando $x = 4$, de la ecuación (1) se obtiene que :

$$y = \sqrt{49 - 16} = \sqrt{33}.$$

El reemplazo de estos valores en (2) da como resultado :

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{\sqrt{33}}(1) = -\frac{4}{\sqrt{33}} = -0,6963\ m/seg.$$

Por lo tanto, la parte superior de la escalera resbala por la pared a razón de $0,6963$ m/seg, cuando la base se encuentra a $4\ m$ de la pared.

NOTA: El signo negativo se debe a que $\boldsymbol{y}$ decrece, cuando $\boldsymbol{t}$ crece.

PROBLEMA 2.2

Se está vaciando arena sobre un montón de forma cónica a razón de $12\ m^3/min$. La altura del montón es siempre igual al radio de la base. Cuando el montón tiene $2,5$ m de altura, ¿con qué rapidez está aumentando su altura?

SOLUCIÓN

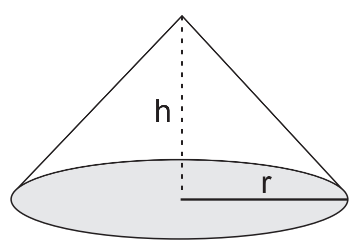


Fig. 2.2

El volumen de un cono de altura $\boldsymbol{h}$ y radio $\boldsymbol{r}$ (Figura 2.2) viene dado por la expresión :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Como $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{h}$, entonces:

$$V = \frac{1}{3}\pi h^3.$$

Al derivar con respecto a t :

$$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt} \qquad (1)$$

Según los datos del problema, $\dfrac{dV}{dt} = 12\,m^3/min$ cuando $h = 2,5\,m$. Al reemplazar en (1), se obtiene:

$$12 = \pi(2,5)^2 \frac{dh}{dt},$$

entonces,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{12\,m^3/min}{\pi(6,25)\,m^2} = 0,611\,m/min.$$

En consecuencia, la altura está aumentando a una tasa de $0,611\,m/min$.

PROBLEMA 2.3

Un avión vuela a 6 $millas$ de altitud en línea recta hacia la posición de un radar. Sea S la distancia en $millas$ entre el avión y el radar. Si S está decreciendo a razón de 400 $millas/hora$, cuando S es 10 $millas$, ¿cuál es la velocidad del avión?

SOLUCIÓN

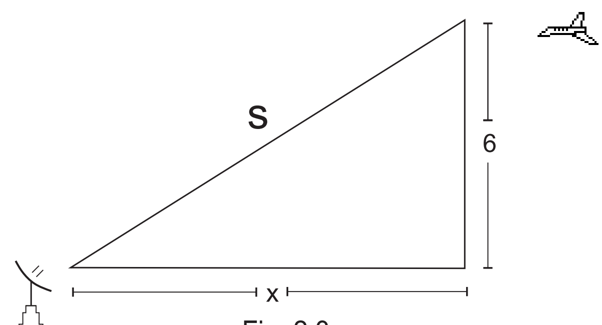


Fig. 2.3

De acuerdo a la Figura 2.3, por Teorema de Pitágoras, se tiene:

$$x^2 + 6^2 = S^2 \qquad (1)$$

Al derivar implícitamente respecto a t, se tiene:

$$2x\frac{dx}{dt} = 2S\frac{dS}{dt},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{S}{x}\frac{dS}{dt} \qquad (2)$$

Cuando $S = 10\,millas,\ x = \sqrt{S^2 - 36}$; es decir :

$$x = \sqrt{100 - 36} = 8.$$

Luego, si $S = 10\,millas,\ x = 8\,millas,$ y $\dfrac{dx}{dt} = -400\,millas/hora.$

Al reemplazar en (2) :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{10}{8}(-400) = -500\,millas/hora.$$

Por lo tanto, el avión se desplaza a una velocidad de $500\ millas/hora$.

PROBLEMA 2.4

Una lámina metálica en forma de triángulo equilátero se calienta y cada lado se dilata a una velocidad de $1\,cm/hora.$ ¿A qué velocidad se dilata el área cuando los lados miden $40\ cm$?

SOLUCIÓN

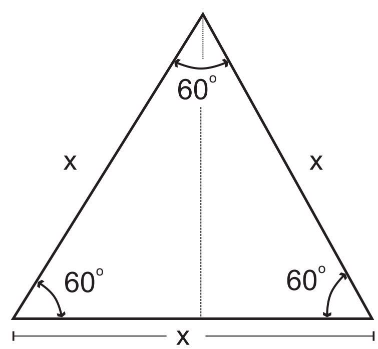


Fig. 2.4

De la Figura 2.4, el área del triángulo es:

$$A = \frac{1}{2}x{*}h \tag{1}$$

Puesto que $tg\,60° = \dfrac{h}{x/2}$, entonces,

$$h = \frac{x}{2}tg\,60° = \frac{\sqrt{3}}{2}x \tag{2}$$

Al reemplazar (2) en (1), se obtiene:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \tag{3}$$

Al derivar (3) con respecto a $\boldsymbol{t}$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}x\,\frac{dx}{dt} \tag{4}$$

Según los datos del problema, $\dfrac{dx}{dt} = 1\,cm/hora,\ x = 40\,cm.$

Al sustituir en (4), se llega a:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2}(40)(1) = 34,64\ cm^2/hora.$$

Por lo tanto, el área de la lámina metálica en forma de triángulo equilátero aumenta a razón de $34,64\,cm^2/hora$.

PROBLEMA 2.5

Un obrero eleva material por medio de una cuerda que pasa por una polea (Figura 2.5). El peso cuelga verticalmente a una altura de $10\ m$ y la cuerda tiene una longitud de $25\ m$. Si el obrero se desplaza horizontalmentea una velocidad de $9\ m/min$, ¿a qué velocidad sube la carga cuando está a $4\ m$ de altura?

SOLUCIÓN

A partitr de la Figura 2.5, se pueden establecer las siguientes relaciones matemáticas:

$$z + y = 25 \ \rightarrow z = 25 - y,$$
$$h + y = 10 \ \rightarrow y = 10 - h,$$
$$x^2 + (10)^2 = z^2.$$

Por otro lado,

$$x^2 + 100 = (25 - y)^2\ ,$$
$$x^2 + 100 = (25 - 10 + h)^2,$$
$$x^2 + 100 = (15 + h)^2 \qquad (1)$$

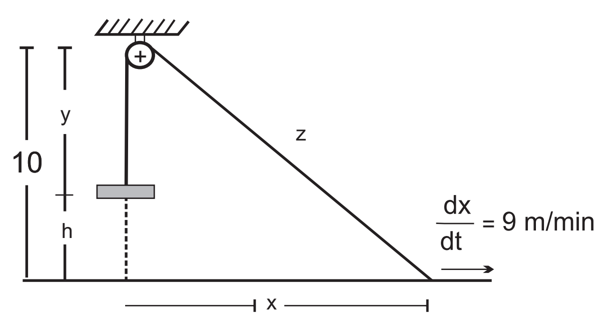


Fig. 2.5

Al derivar implícitamente la relación (1) se llega a:

$$2x\frac{dx}{dt} = 2(15 + h)\,\frac{dh}{dt},$$
$$\frac{dh}{dt} = (\frac{x}{15 + h})\,\frac{dx}{dt}\ m/min \qquad (2)$$

Cuando $h = 4\ m$, de la ecuación (1), se obtiene que :

$$x = \sqrt{(19)^2 - 100},$$
$$x = 16,16\,m.$$

Dado que $\dfrac{dx}{dt} = 9\,m/min,\ x = 16,16\,m,$ entonces la sustitución de estos valores en (2) conduce a :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{16,16}{19}(9)\,m/min = 7,65\,m/min.$$

Por tanto, el peso se eleva a razón de $7,65\ m/min.$

PROBLEMA 2.6

Considerar un tanque abierto por su parte superior, cuya sección transversal es un trapecio isósceles con base mayor $8\,m,$ base menor $6\,m$, altura $6\,m,$ largo $12\,m$ (Figura 2.6.a). Si entra agua al tanque a razón de $3\,m^3/min,$ ¿a qué velocidad sube el nivel del agua cuando la altura de ésta es de $4\,m$?

SOLUCIÓN

El volumen de agua del tanque es el producto de la sección transversal y la longitud.

Al aplicar semejanza de triángulos en la Figura 2.6.b, se obtiene que:

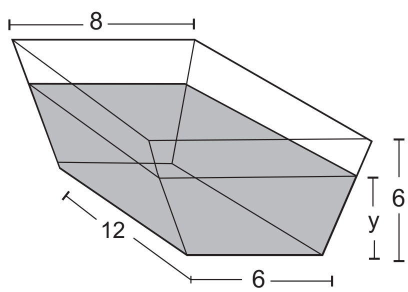


Fig. 2.6.a

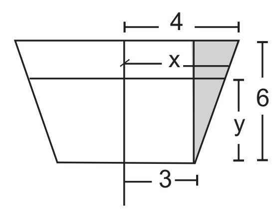


Fig. 2.6.b

$$\frac{y}{x-3} = \frac{6}{4-3} = 6,$$

entonces, $$x = 3 + \frac{y}{6} \qquad (1)$$

Ahora bien, el área de la sección transversal del agua (trapecio) es:

$$A = \left(\frac{2x+6}{2}\right)y,$$

$$A = (x+3)y \qquad (2)$$

El reemplazo de (1) en (2) da como resultado :

$$A = \left[3 + \frac{y}{6} + 3\right]y = \left[6 + \frac{y}{6}\right]y.$$

Y el volumen es:

$$V = 12A = 12\left[6 + \frac{y}{6}\right]y,$$

$$V = 72y + 2y^2 \qquad (3)$$

La derivada con respecto a $\boldsymbol{t}$ es :

$$\frac{dV}{dt} = (72 + 4y)\frac{dy}{dt}\ ;$$

entonces,

$$\frac{dy}{dt} = \left[\frac{1}{72 + 4y}\right]\frac{dV}{dt}\ .$$

Cuando $\dfrac{dV}{dt} = 3\,m^3/min$ y $y = 4\,m,$ se obtiene que :

$$\frac{dy}{dt} = \left[\frac{1}{72 + 4(4)}\right](3) = 0,034\ m/min.$$

Por tanto, el agua sube a razón de $0,034\ m/min$.

PROBLEMA 2.7

Una cámara de TV sigue desde el suelo el despegue vertical de un cohete, que se produce de acuerdo con la ecuación $S = 50t^2$, con S en $metros$ y t en $segundos$. Si la cámara está a $650\ m$ del lugar de despegue, hallar la razón de cambio del ángulo de elevación de la cámara $10\,seg$ después del despegue.

SOLUCIÓN

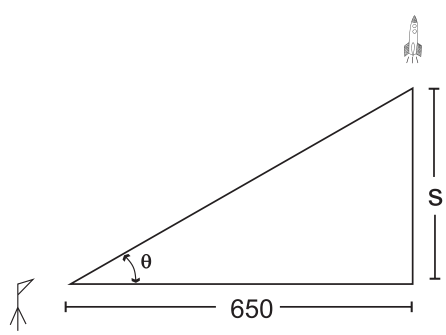


Fig. 2.7

Puesto que $S = 50t^2$, entonces $\dfrac{dS}{dt} = 100t\ \ (velocidad)$ y, además, θ es el ángulo de elevación en radianes. De la Figura 2.7, se obtiene que :

$$tg\,\theta = \frac{S}{650} \tag{1}$$

Al derivar esta última expresión respecto a $\boldsymbol{t}$:

$$sec^2\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{650}\frac{dS}{dt}.$$

Al despejar $\dfrac{d\theta}{dt}$ y reemplazar el valor de $\dfrac{dS}{dt}$, se llega a:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{cos^2\theta}{650}\,(\frac{dS}{dt}) = \frac{cos^2\theta}{650}(100t) \tag{2}$$

Cuando $\boldsymbol{t} = 10$, $\boldsymbol{S} = 50(10)^2 = 5.000.$

De esta manera, $$cos\,\theta = \frac{650}{\sqrt{650^2 + 5.000^2}} = \frac{650}{5.042,073} = 0,1289$$

Finalmente, cuando $t = 10\,seg,$ la razón de cambio del ángulo de elevación se obtiene al reemplazar los anteriores valores en (2) :

$$\frac{d\theta}{dt} = (0,1289)^2\left(\frac{1}{650}\right)(100)(10) = 0,02557\,rad/seg.$$

El ángulo de elevación cambia a una tasa de $0,02557\,rad/seg$.

PROBLEMA 2.8

En la Figura $2.8,$ se observa un brazo de $7\,pulg$ que conecta un pistón con una biela de $3\,pulg$ de radio, la que gira en sentido antihorario, a un ritmo constante de 200 $rev/min.$ Hallar la velocidad del pistón cuando $\theta = 60°$.

SOLUCIÓN

Dado que una revolución completa corresponde a 2π radianes, entonces

$$\frac{d\theta}{dt} = 200(\,2\pi) = 400\,\pi\ radianes/min.$$

Por otra parte, aplicando la Ley de cosenos en la Figura $2.8,$ se tiene:

$$7^2 = 3^2 + x^2 - 2(3)\,x\,cos\,\theta,$$
$$40 = x^2 - 6x\,cos\,\theta \qquad (1)$$

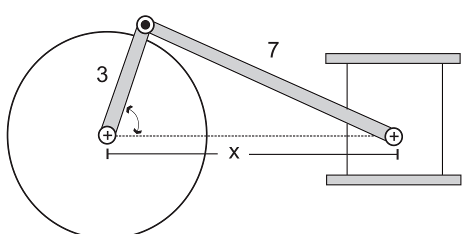


Fig. 2.8

La derivada de la relación (1) con respecto a $\boldsymbol{t}$ es :

$$0 = 2x - 6\left[-x\,sen\,\theta\,\frac{d\theta}{dt} + cos\,\theta\,\frac{dx}{dt}\right],$$
$$(6\,cos\,\theta\ - 2x)\,\frac{dx}{dt} = 6x\,sen\,\theta\frac{d\theta}{dt},$$
$$\frac{dx}{dt} = \frac{6x\,sen\,\theta}{6\,c\,os\,\theta - 2x}\left(\frac{d\theta}{dt}\right) \qquad (2)$$

Al reemplazar $\theta = 60° \ = \pi/3,$ en (1) se obtiene :

$$40 = x^2 - 6x\,cos\,(\pi/3),$$
$$x^2 - 3x - 40 = 0.$$

Al resolver para $\boldsymbol{x}$:

$$x = 8,\; x = -5.$$

Al tomar la raíz positiva $x = 8,$ para $\theta = 60° = \pi/3$ en (2), se tiene:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{6(8)\,sen\,\pi/3}{6\,c\,os\;\pi/3 - 16}(400\pi) = \frac{(6)(8)\frac{1}{2}\sqrt{3}}{6(\frac{1}{2}) - 16}(400\pi) = -4,018\,pulg/min.$$

De modo que el pistón se mueve a una velocidad de $4,018\,pulg/min$ cuando el ángulo $\theta = 60°$.

PROBLEMA 2.9

Una arandela de caucho está siendo comprimida por una prensa. En un determinado momento, la arandela tiene las siguientes medidas: el diámetro externo es de *4 cm*, diámetro interno de *2,0 cm*. El grosor de la arandela disminuye a una tasa de *1/5 cm/min* y el diámetro externo está aumentando a una tasa de $1/2\;cm/min.$ Si el volumen de la arandela se mantiene en $3,2\,cm^3$ en todo momento, calcular la tasa a la que está cambiando el diámetro interno en el instante en que se toman las medidas.

SOLUCIÓN

Denótese por D el diámetro externo, H el diámetro interno y G el grosor de la arandela (Figura 2.9), entonces su volumen se expresa como:

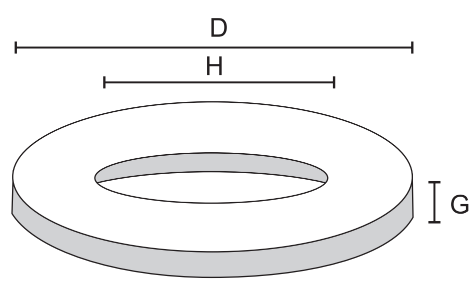


Fig. 2.9

$$V = G\left[\pi(\frac{D}{2})^2 - \pi(\frac{H}{2})^2\right],$$
$$V = \frac{\pi\;G}{4}(D^2 - H^2) \qquad (1)$$

Al derivar la expresión del volumen respecto a $\boldsymbol{t}$, se obtiene :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4}G\,\frac{d}{dt}(D^2 - H^2) + \frac{\pi}{4}(D^2 - H^2)\,\frac{dG}{dt},$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{4} G\,(2D\frac{dD}{dt} - 2H\frac{dH}{dt}) + \frac{\pi}{4}(D^2 - H^2)\,\frac{dG}{dt} \qquad (2)$$

Según los datos del problema, $\frac{dG}{dt} = -1/5\ cm/min$, pues el grosor está disminuyendo. Además, $\frac{dD}{dt} = 1/2\ cm/min$ y $D = 4\,cm;\ H = 2,0\ \ cm.$

El valor de G en ese momento se obtiene de (1) :

$$V = \frac{\pi\,G}{4}(D^2 - H^2).$$

Como $V = 3,2\,cm^3$, entonces:

$$3,2 = \frac{\pi\,G}{4}(4^2 - 2^2),$$

$$G = \frac{4(3,2)}{\pi(4^2 - 2^2)} = 0,34.$$

Como $\frac{dV}{dt} = 0$, debido a que el volumen siempre permanece constante, al reemplazar en (2) se llega a :

$$0 = \frac{\pi}{4}(0,34)\Big[2(4)(\frac{1}{2}) - 2(2)\frac{dH}{dt}\Big] + \frac{\pi}{4}(4^2 - 2^2)(-\frac{1}{5});$$

de donde,

$$\frac{dH}{dt} = -0,76\,cm/min.$$

Luego, el diámetro interno disminuye a una velocidad de $0,76\,cm/min.$

PROBLEMA 2.10

Un triángulo rectángulo está inscrito en la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$. Dos de sus vértices están localizados en los intersectos de la circunferencia con el eje $\boldsymbol{x}$ y el tercer vértice (x, y) se mueve en sentido horario sobre la circunferencia con una velocidad de $0,5\,m/seg$. Calcular con qué velocidad cambia el área del triángulo cuando $x = 3\,m.$

SOLUCIÓN

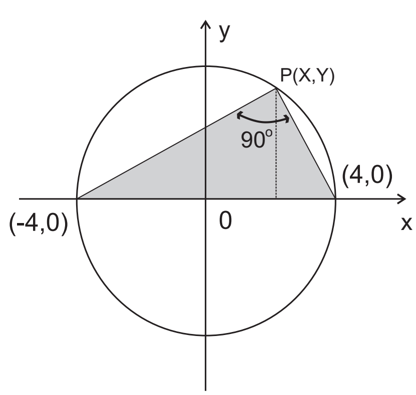


Fig. 2.10

Según la Figura 2.10, el área del triángulo es:

$$A = \frac{1}{2}(2x)(y),$$

$$A = xy \qquad (1)$$

Como $x^2 + y^2 = 16$, entonces,

$$y = \sqrt{16 - x^2} \qquad (2)$$

Al sustituir (2) en (1), se obtiene:

$$A = x\sqrt{16 - x^2} \qquad (3)$$

La derivada con respecto al tiempo de la relación (3) es :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{16 - 2x^2}{\sqrt{16 - x^2}}\frac{dx}{dt} \qquad (4)$$

Al reemplazar $x = 3\,m,\ \dfrac{dx}{dt} = 0,5\,m/seg$ en (4) :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{16 - 2(3)^2}{\sqrt{16 - 3^2}}(0,5) = -0,378\,m^2/seg.$$

Luego, para $x = 3,$ el área del triángulo disminuye a razón de $0,378\,m^2/seg.$

PROBLEMA 2.11

Considerar un tanque hemisférico de $50\ cm$ de radio, al que llega agua a razón de $250\ cm^3/seg.$

a) Calcular la velocidad del nivel de agua cuando la altura del mismo es de $35\ cm$.
b) Calcular la velocidad a la que aumenta la superficie mojada en el mismo momento.

SOLUCIÓN

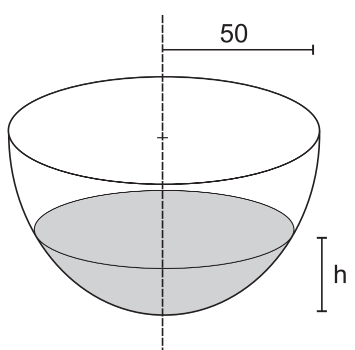


Fig. 2.11

a) El volumen de un casquete esférico de radio $\boldsymbol{r}$ y altura $\boldsymbol{h}$ está dado por la relación :

$$V = \pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3 .$$

En la expresión anterior, $\boldsymbol{r}$ es constante. Por tanto la derivada de V con respecto a $\boldsymbol{t}$ es :

$$\frac{dV}{dt} = (2\pi hr - \pi h^2)\frac{dh}{dt}$$

Al despejar $\dfrac{dh}{dt}$:

$$\frac{dh}{dt} = \left[\frac{1}{2\pi hr - \pi h^2}\right]\frac{dV}{dt}\,. \tag{2}$$

Al reemplazar $h = 35\,cm,\quad \dfrac{dV}{dt} = 250\,cm^3/seg$ en (2) :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{200}{\pi\left[2(35)(50) - 35^2\right]} = 0,035\ cm/seg.$$

Por tanto, el nivel del agua sube a razón de $0,035\ cm/seg.$

b) El área de la superficie de un casquete esférico corresponde al área mojada que menciona el problema, y es igual a :

$$A = 2\pi rh \tag{3}$$

Como el caso anterior, $\boldsymbol{r}$ es constante. La derivada de la relación (3) con respecto a $\boldsymbol{t}$ es :

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dh}{dt}. \tag{4}$$

Como $\dfrac{dh}{dt} = 0,035\,cm/seg,$ entonces, al reemplazar en (4):

$$\frac{dA}{dt} = 2(\pi)(50)(0,035) = 10,99\ cm^2/seg.$$

El área mojada aumenta a razón de $10,99\ cm^2/seg.$

PROBLEMA 2.12

Un disco metálico circular se dilata con el calor. Si su radio aumenta a razón de $0,01\ cm/min,$ hallar la rapidez con que aumenta el área y el perímetro del disco cuando el radio es $12\ m.$

SOLUCIÓN

a) El área de un disco de radio $\boldsymbol{r}$ viene dada por la relación :

$$A = \pi\, r^2.$$

Al derivar esta relación con respecto a *t*, se obtiene:

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}.$$

Puesto que $r = 12$ y $\dfrac{dr}{dt} = 0,01,$ entonces, al reemplazar en la expresión anterior, se llega a :

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(12)(0,01) = 0,754\ cm^2/min.$$

Por tanto, el área del disco aumenta a razón de $0,754\ cm^2/min.$

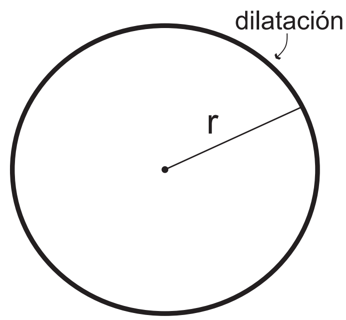


Fig. 2.12

b) El perímetro o longitud del disco de radio $\boldsymbol{r}$ se calcula por medio de la relación

$$P = 2\pi r.$$

Al derivar esta relación con respecto a t, se obtiene:

$$\frac{dP}{dt} = 2\pi\frac{dr}{dt}.$$

Como $\dfrac{dr}{dt} = 0,01$, entonces,

$$\frac{dP}{dt} = 2\pi(0,01) = 0,0628\ cm/min.$$

Así, el perímetro aumenta a razón de $0,0628\ cm/min.$

PROBLEMA 2.13

Un proyectil balístico, al ser disparado, sigue una trayectoria dada por las ecuaciones :

$$x = (v_o \, cos \, \alpha)t,$$
$$y = (v_o \, sen \, \alpha)t - \frac{1}{2}gt^2,$$

Donde:

$v_o =$ velocidad inicial
$\alpha =$ ángulo de disparo
$g =$ aceleración de la gravedad
$t =$ tiempo

Si $\boldsymbol{v_o} = 100\,m/seg$, $\boldsymbol{\alpha} = 60°$, $\boldsymbol{g} = 9,8\,m/seg^2$, calcular la variación de la altura $\boldsymbol{y}$ y el desplazamiento horizontal $\boldsymbol{x}$ del proyectil al cabo de $3\,seg$ de haber sido disparado. No debe tenerse en cuenta el rozamiento ni la acción del viento.

SOLUCIÓN

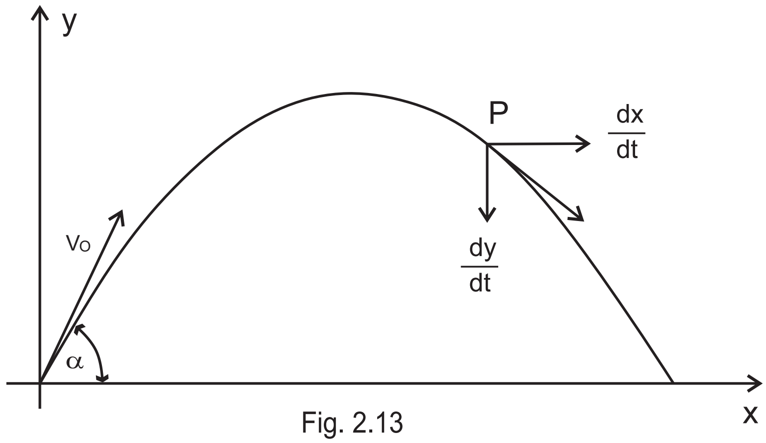


Fig. 2.13

La trayectoria del proyectil, según los datos del problema, viene dada por las expresiones :

$$x = 100\,cos\,60° = 100(1/2)t = 50\,t \tag{1}$$

$$y = (100\,sen\,60°)t - \frac{1}{2}(9,8)t^2 = (50\,\sqrt{3})t - (4,9)\,t^2 \tag{2}$$

Al derivar las relaciones (1) y (2) con respecto a $\boldsymbol{t}$:

$$\frac{dx}{dt} = 50 \quad (m/seg) \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dt} = 50\sqrt{3} - 9,8t \quad (m/seg) \tag{4}$$

Si $\boldsymbol{t} = 3\,seg$, entonces, al reemplazar en (3) y (4), se obtiene:

$$\frac{dx}{dt} = 50\ m/seg,$$

$$\frac{dx}{dt} = 50\ \sqrt{3} - (9,8)(3) = 57,2\ m/seg.$$

Por tanto, el proyectil se eleva a $50\,m/seg$ y se desplaza horizontalmente con una velocidad constante de $57,2\,m/seg$.

NOTA: la velocidad real del proyectil en ese instante puede hallarse mediante descomposición vectorial :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{(50)^2 + (57,2)^2}v = 75,97\ m/seg.$$

b) Velocidad con que aumenta la superficie libre del líquido.
c) Velocidad con que aumenta el perímetro de la superficie libre.
d) Velocidad con que aumenta el área mojada.

SOLUCIÓN

a) De la Figura $2.14,$ el volumen del líquido es :

$$V = \frac{1}{3}\,\pi r^2 h \tag{1}$$

Por semejanza de triángulos :

$$\frac{30}{8} = \frac{h}{r}, \text{ entonces } \quad r = \frac{4}{15}h \tag{2}$$

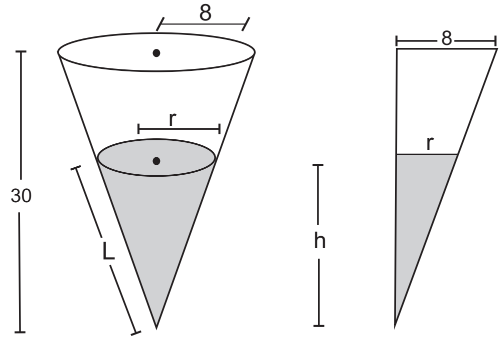


Fig. 2.14

Al sustituir en (1) :

$$V = \frac{1}{3}\,\pi(\frac{4}{15}h)^2 h$$

$$V = \frac{16\pi}{3(225)}h^3 \tag{3}$$

Al derivar la ecuación (1) con respecto al tiempo t :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{16\pi}{225}\,h^2\frac{dh}{dt} \tag{4}$$

Ahora bien, $\dfrac{dV}{dt} = 1\ cm^3/seg,\ \ h = 15\,cm,$ entonces,

$$1 = \frac{16\pi}{225}\,(15)^2\frac{dh}{dt},$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{16\pi}\ cm/seg.$$

El nivel del líquido sube a razón de $\dfrac{1}{16\pi}\ cm/seg.$

b) El área de la superficie libre del líquido vale:

$$S = \pi r^2 = \ \pi(\frac{4}{15}h)^2,$$

$$S = \frac{16\pi}{225}h^2 \qquad (5)$$

La derivada de (5) con respecto al tiempo t es :

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2(16)\pi h}{225}\,\frac{dh}{dt} \quad cm^2/seg \qquad (6)$$

Puesto que $h = 15\,cm$ y $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{16\pi}\;cm/seg,$, entonces al reemplazar en en (6), se obtiene:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2(16)\pi(15)}{225}\,\frac{1}{16\pi} = \frac{2}{15}.$$

La superficie libre del líquido aumenta a razón de $\dfrac{2}{15}\;cm^2/seg.$

c) El perímetro de la superficie libre se calcula mediante la expresión :

$$P = 2\pi r = 2\pi(\frac{4}{15}h)$$

$$P = \frac{8\pi}{15}h \qquad (7)$$

La derivada de P con respecto al tiempo t es:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{8\pi}{15}\frac{dh}{dt} \qquad (8)$$

Al reemplazar $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{1}{16\pi}\,cm/seg$ en (8), se llega a:

$$\frac{dP}{dt} = 2\pi\,(\frac{1}{60\pi}) = \frac{1}{30}\;(cm/seg).$$

El perímetro de la superficie libre aumenta a una velocidad constante de $\dfrac{1}{30}\,cm/seg$.

d) El área mojada del líquido vale:

$$A_m = \pi r l = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$$

$$A_m = \pi(\frac{4}{15}h)\sqrt{(\frac{4}{15}h)^2 + h^2}$$

$$A_m = \frac{4\pi\sqrt{241}}{225}h^2 \qquad (9)$$

Al derivar la expresión (9) con respecto al tiempo t :

$$\frac{dA_m}{dt} = \frac{8\pi\sqrt{241}}{225}\,\frac{15}{16\pi}$$

$$\frac{dA_m}{dt} = 0,517\,.$$

El área mojada aumenta a razón de $0,517\,cm^2/seg$.

PROBLEMA 2.15

Considerar un tanque en forma de prisma recto dispuesto horizontalmente (Figura 2.15.a) cuyas tapas son triángulos equiláteros, de lado $4\,m$ y longitud $8\,m$. Si se extrae agua del tanque por medio de un bomba a razón de $2\,m^3/min$, calcular la velocidad con que baja el nivel del agua, cuando la altura de este es $1,5\,m$.

SOLUCIÓN

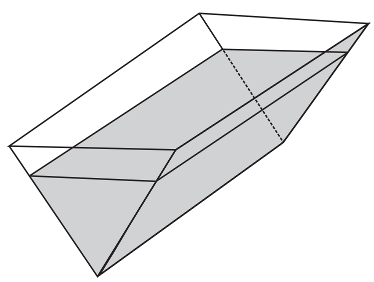


Fig. 2.15.a

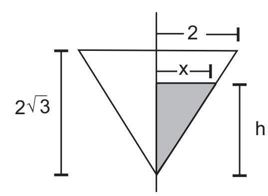


Fig. 2.15.b

Sea $\boldsymbol{h}$ la altura del agua en el tanque (Figura 2.15.b) y H la altura del triángulo. Como el triángulo es equilátero, entonces,

$$H = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12} = 2\,\sqrt{3}.$$

Ahora bien, por semejanza de triángulos,

$$\frac{x}{h} = \frac{2\,\sqrt{3}}{2}; \qquad x = \sqrt{3}\,h.$$

El área de la sección correspondiente al agua en el tanque es :

$$A = \frac{1}{2}.2x.h = (\sqrt{3}\,h)h,$$

$$A = \sqrt{3}\,h^2\ m^2.$$

Y el volumen del cuerpo de agua es :

$$V = 8A = 8\sqrt{3}\,h^2\ m^3.$$

Al derivar la expresión del volumen con respecto a $\boldsymbol{t}$ se obtiene :

$$\frac{dV}{dt} = 16\sqrt{3}\,h\,\frac{dh}{dt},$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{16\sqrt{3}\,h}\,\frac{dV}{dt}.$$

Puesto que $\dfrac{dV}{dt} = -\,2\,m^3/min,\ h = 1,5\,m$, entonces,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{16\sqrt{3}\,(1,5)}(-\,2) = -\,0,048\,m/min.$$

En consecuencia, el nivel del agua desciende a razón de $0,048\,m/min.$

PROBLEMA 2.16

Considerar un triángulo rectángulo variable así: el punto A en el origen de coordenadas, el ángulo B es recto y está sobre el eje $\boldsymbol{y}$ y el punto C está sobre la gráfica de la función exponencial $y = \dfrac{1}{2}e^x$ (Figura 2.16). Si el punto B comienza en $(0,1)$ y se mueve hacia arriba a una velocidad constante de $2\,cm/seg,$ ¿con qué rapidez está aumentando el área del triángulo cuando $t = 5\,segundos$?

SOLUCIÓN

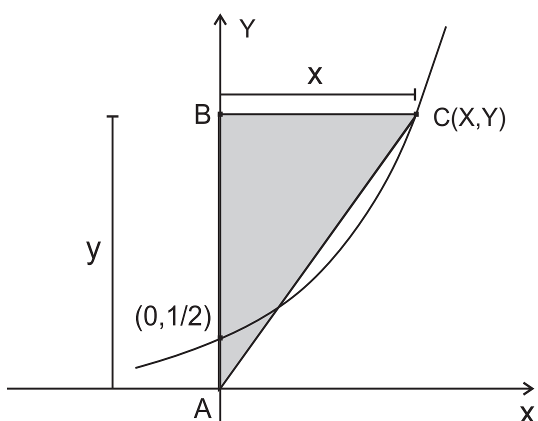


Fig. 2.16

El área del triángulo ABC de la Figura 2.16 es :

$$A = \frac{1}{2}xy \quad (cm^2) \tag{1}$$

Pero $y = \dfrac{1}{2}e^x$, entonces,

$$x = ln\,2y.$$

El área de dicho triángulo es, entonces

$$A = \frac{1}{2}y\,ln\,2y \tag{2}$$

Al derivar la expresión (2) respecto al tiempo $\boldsymbol{t}$:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\Big[1 + ln\,2y\,\Big]\frac{dy}{dt} \tag{3}$$

Como $\dfrac{dy}{dt}=2\,cm/seg$, entonces $y=\dfrac{1}{2}$ cuando $t=0$, y, en general, $y=2t+\dfrac{1}{2}$.

Por tanto, cuando $t=5$, $y=2(5)+\dfrac{1}{2}=\dfrac{11}{2}$.

Al sustituir en (3) :

$$\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\Big[1+ln\,2(\frac{11}{2})\Big](2),$$

$$\frac{dA}{dt}=3,4\ cm^2/seg.$$

Por tanto, el área del triángulo crece a razón de $3,4\ cm^2/seg$.

PROBLEMA 2.17

Un depósito tiene forma de pirámide truncada invertida, con base menor abajo y base mayor arriba, con sección transversal cuadrada. La base menor tiene $2\,m$ de lado y la base superior $4\,m$ de lado y altura $4\,m$. Si llega agua al depósito a razón de $5\,m^3/min$, encontrar la velocidad a la que sube el nivel de agua, cuando la profundidad de la misma es $40\,cm$.

SOLUCIÓN

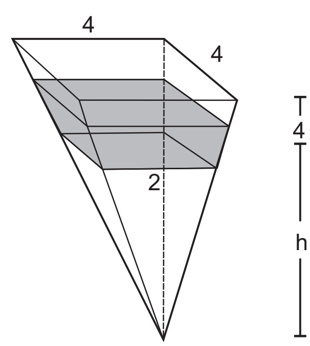


Fig. 2.17.a

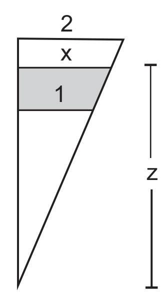


Fig. 2.17.b

Teniendo en cuenta que el volumen de una pirámide (Fig 2.17.a) de base cuadrada de lado $\boldsymbol{x}$ y altura $\boldsymbol{h}$ se calcula mediante la expresión:

$$V=\frac{1}{3}x^2h.$$

Entonces, el volumen del agua en el tronco de pirámide se calcula por diferencia entre los volúmenes de dos pirámides :

$$V=\frac{1}{3}(2x)z-\frac{1}{3}(1)^2h$$

$$V=\frac{4}{3}x^2z-\frac{1}{3}h \qquad (1)$$

Ahora bien, por semejanza entre triángulos (Figura 2.17.b), se puede establecer que :

$$\frac{x}{z} = \frac{1}{h}; \qquad x = \frac{z}{h} \tag{2}$$

Al reemplazar (2) en (1) :

$$V = \frac{4}{3}\frac{z^3}{h^2} - \frac{1}{3}h \tag{3}$$

Por otra parte,

$$\frac{h+4}{2} = \frac{h}{1}; \quad h = 4.$$

La sustitución de $h = 4$ en (3) conduce a :

$$V = \frac{1}{12}\frac{z^3}{h^2} - \frac{4}{3}h \tag{4}$$

La derivada de la relación (4) con respecto a t es:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}z^2\frac{dz}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{4}{z^2}\frac{dV}{dt} \tag{5}$$

Con $z = h + 0,4 = 4 + 0,4 = 4,4\,m$ y $\dfrac{dV}{dt} = 5\,m^3/min$, al sustituir en (5), se obtiene:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{4(5)}{(4,4)^2} = 1,033\,m/min$$

El nivel del agua sube a razón de $1,033\,m/min$.

PROBLEMA 2.18

En un parque de diversiones, la "montaña rusa" obedece a la función $y = 3/(x^2 + 1)$ para valores positivos de x. El carro se desplaza en la bajada a una velocidad variable de $5\,m/seg$ en el punto de la trayectoria que dista horizontalmente $2\,m$ de la parte más elevada del recorrido. Calcular la velocidad horizontal y vertical en ese punto.

SOLUCIÓN

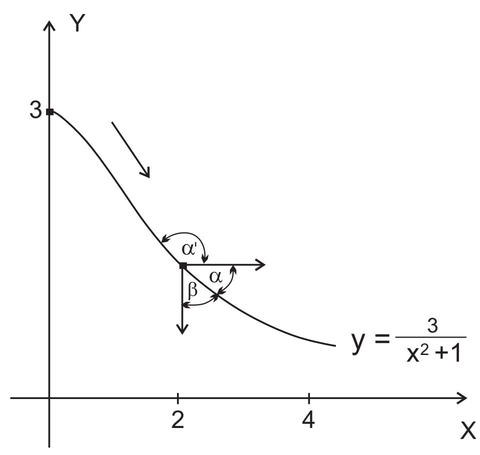


Fig. 2.18

El vehículo se desplaza con una velocidad que sigue la dirección de la recta tangente a la curva en el punto considerado. De acuerdo al enunciado, la trayectoria del carro es :

$$y = \frac{3}{x^2+1} \tag{1}$$

Al derivar con respecto a $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\,6x}{(x^2+1)^2} \tag{2}$$

En correspondencia con lo mencionado anteriormente, esta derivada es igual a la tangente del ángulo formado con la horizontal; esto es :

$$tg\,\alpha' = \frac{-\,6x}{(x^2+1)^2}.$$

Para $\boldsymbol{x} = 2$,

$$tg\ \alpha' = -\,\frac{12}{25}$$

$$\alpha' = 154°21'; \qquad \alpha = 180^o - \alpha';$$

$$\alpha = 25^o\,39' \text{ y } \beta = 64^o\,21'.$$

Ahora bien, por descomposición vectorial, los desplazamientos horizontal y vertical son respectivamente :

$$x = R\,cos\ 25^o\,39' \tag{3}$$

$$y = R\,cos\,64^o\,21' \tag{4}$$

Al derivar (4) y (5) respecto al tiempo $\boldsymbol{t}$:

$$\frac{dx}{dt} = (cos\ 25^o\,39'\,)\frac{dR}{dt} \tag{6}$$

$$\frac{dy}{dt} = (cos\,64^o\,21')\frac{dR}{dt} \tag{7}$$

Con $\dfrac{dR}{dt} = 5\ m/seg,$ la sustitución en (6) y (7) conduce a :

$$\frac{dx}{dt} = 5(cos\ 25^o\,39'\,) = \ 4,5\,m/seg.$$

$$\frac{dy}{dt} = 5\,(cos\ \ 64^o\,21') = \ 2,16\,m/seg.$$

En consecuencia, el vehículo se desplaza horizontalmente a $4,5\,m/seg$ y verticalmente a $2,16\,m/seg.$

PROBLEMA 2.19

Un cohete es lanzado verticalmente a $1.200\,m$ de un observador. Por fallas en el despegue, el cohete sube formando un ángulo de $75°$ con la horizontal. Calcular a qué velocidad aumenta el ángulo de visión del observador $5\,seg$ después del lanzamiento, si el cohete se desplaza en su trayectoria a $500\,m/seg$ alejándose del observador.

SOLUCIÓN

Al considerar el triángulo de la Figura $2.19,$ por la Ley de los senos se tiene :

$$\frac{sen\,\phi}{z} = \frac{sen\,105°}{y}.$$

Por tanto:
$$sen\,\phi = \frac{z}{y}\,sen\,105° \qquad (1)$$

La derivada de la relación (1) con respecto al tiempo $\boldsymbol{t}$ es :

$$cos\,\phi\,\frac{d\phi}{dt} = sen\,105°;$$

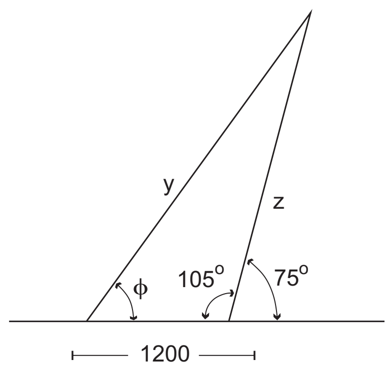


Fig. 2.19

$$\frac{d\phi}{dt} = sen\,105°\,\frac{1}{y^2}\left[y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right](rad/seg) \qquad (2)$$

Si $t = 5\,seg,$ entonces :

$$z = 500\,m/seg{*}5\,seg = 2.500\,m;$$

$$\frac{dz}{dt} = 500\,m/seg.$$

Al aplicar la Ley de los cosenos :

$$y^2 = 1.200^2 + 2.500^2 - 2(1.200)(2.500)\,cos\,105°,$$

$$y = 3.040,22\,m.$$

Por otra parte, de (1) se obtiene que :

$$y = \frac{z\,sen\,105°}{sen\,\phi} \qquad (3)$$

Al derivar la expresión (3) con respecto al tiempo $\boldsymbol{t}$:

$$\frac{dy}{dt} = sen\,105° \Big[\frac{sen\,\phi \dfrac{dz}{dt} - z\,cos\,\phi\,\dfrac{d\phi}{dt}}{sen^2\phi}\Big]\, m/seg \qquad (4)$$

Como $sen\,\phi = \dfrac{z}{y} sen\,105° = \dfrac{1}{3.040,22}\,(0,965925) = 0,794289$ y

$cos\,\phi = 0,607539$, entonces, al reemplazar en (4), se obtiene:

$$\frac{dy}{dt} = 0,965926\Big[(0,794289)(500) - (2.500)(0,607539)\,\frac{d\phi}{dt}\Big],$$

$$\frac{dy}{dt} = 383,612\; - \;1.467,094\,\frac{d\phi}{dt}.$$

Finalmente, al reemplazar los valores de $y,\;\; z,\;\; \dfrac{dz}{dt},\;\; cos\phi$ y $\dfrac{dy}{dt}$ en (2), se obtiene:

$$\frac{d\phi}{dt} = 0,965926\left[\frac{(3.040,22)(500) - 2.500(383,612 - 1.467,094\,\dfrac{d\phi}{dt}}{(3.040,22)^2(0,607539)}\right]$$

$$\frac{d\phi}{dt} = 0,261477 - 0,164965 + 0,630895*\,\frac{d\phi}{dt}.$$

De donde,

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{0,096512}{0,369104} = 0,261476\,rad/seg$$

Como un radián es igual a $57,29577... \Rightarrow \dfrac{d\phi}{dt} = 14°58'53''$.

Entonces, el ángulo de visión aumenta a razón de $14°58'53''/seg.$

PROBLEMA 2.20

Considerar una piscina rectangular de $24\,m$ de longitud por $12\,m$ de anchura. La profundidad va aumentando en forma constante desde $0,6\,m$ hasta $3\,m$ en una distancia horizontal de $18\,m$, siendo el resto del fondo horizontal (Figura 2.20.a). Si se vierte agua en la piscina a razón de $4\,m^3/min$, calcular la velocidad con que sube el nivel del agua a $1,2\,m$ del fondo.

SOLUCIÓN

a) El volumen del agua es igual al producto de la sección longitudinal (un trapecio) por su anchura (Figura 2.20.a) :

$$V = (\frac{x+6}{2})(h)(12)\;\; m^3,$$

$$V = 6h(x+6)\; m^3 \qquad (1)$$

Además, de las Figuras 2.20.a y 2.20.b, se obtiene que :

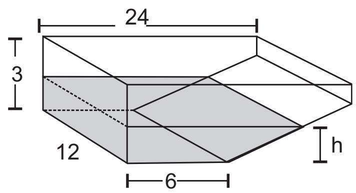


Fig. 2.20.a

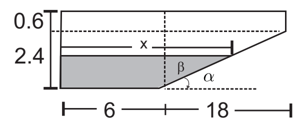


Fig. 2.20.b

$$tg\,\alpha = \frac{2,4}{18} = 0,1333$$

$$\alpha = artg(0,1333) = 7°\,35'\,40''.$$

Por tanto: $\beta = 90° \; - 7°35'40'' = 82°\,24'\,20''.$

Luego, el valor de $\boldsymbol{x}$ es :

$$x = 6 + h\,tg\,(82°24'20''),$$

$$x = 6 + 7,5h\,. \tag{2}$$

Al sustituir (2) en (1):

$$V = 6h\,[6 + 7,5h + 6],$$

$$V = 72h + 45\,h^2 \tag{3}$$

La derivada con respecto al tiempo t de la expresión (3) es :

$$\frac{dV}{dt} = (72 + 90h)\,\frac{dh}{dt};$$

de donde,

$$\frac{dh}{dt} = \left[\frac{1}{72 + 90h}\right]\frac{dV}{dt}. \tag{4}$$

Si $h = 1,2\,m$ y $\dfrac{dV}{dt} = 4\,m/min,$ al sustituir en (4), se obtiene:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{4}{72 + 90(1,2)} = 0,022\,m/min.$$

Por tanto, el nivel del agua sube a razón de $0,022\,m/min.$

PROBLEMAS PROPUESTOS

$1)$ Sea R el radio de una esfera en el instante $\boldsymbol{t}$. Hallar dicho radio cuando su incremento en la unidad de tiempo es igual, numéricamente, al de la superficie.

$2)$ Las dimensiones de un recipiente en forma de paralelepípedo son, en metros: 8 de largo, 2 de ancho y 4 de profundidad. Si se vierte agua a razón de $2\,m^3/min,$

hallar la variación de la altura del nivel, con respecto al tiempo, cuando la profundidad del agua es de $1\,m$.

$3)$ Una escalera de $20\,m$ se apoya contra un edificio.

a) Hallar la velocidad a la que se mueve el extremo superior cuando el inferior se aleja del edificio a una velocidad de $1m/seg$.

b) Hallar la velocidad a la que disminuye la pendiente.

$4)$ Un depósito cónico circular recto, de $8\,m$ de diámetro y $16\,m$ de profundidad, se llena de agua a razón de $10\,m^3/min$. Sabiendo que el depósito en cuestión tiene una fuga y que, cuando la profundidad del agua es de $1\,m$, el nivel se eleva a razón de $0,33\ m/min$, hallar la cantidad de agua que abandona el depósito en la unidad de tiempo.

$5)$ Dos lados paralelos de un rectángulo se alargan a razón de $2\,cm/seg$, mientras que los otros dos se acortan de manera que la figura resultante, en todo momento, es un rectángulo de área constante e igual a $50\,cm^2$. Calcular la variación en la unidad de tiempo del perímetro P, cuando la longitud de los lados extensibles es de :

a) $5\ cm$ b) $10\,cm$

c) Hallar las dimensiones del rectángulo cuando el perímetro deja de disminuir.

$6)$ Dos lados de un triángulo son iguales en un principio. Éstos crecen a razón de $2\ cm/min$ y el ángulo entre ellos crece a razón de $0,5\ rad/min$. Hallar el cambio que experimenta el tercer lado en el momento en que los otros lados miden $10\,cm$ y el ángulo entre ellos es de 90^o.

$7)$ Una persona sube por una rampa que forma un ángulo de 24^o con la horizontal a una velocidad constante de $0,6\,m/seg$. Calcular las velocidades vertical y horizontal en cualquier momento.

3. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

3.1 OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Optimizar una función de una variable es el proceso mediante el cual se determinan los valores de la variable x, para los cuales la función dada toma un valor máximo o mínimo. Con frecuencia, a la función que se pretende optimizar se la suele llamar FUNCIÓN OBJETIVO. Para optimizar funciones de una variable de la forma $y = f(x)$, se procede de la siguiente manera:

a) Calcular la primera derivada de $f(x)$; esto es, $f'(x)$.

b) Resolver para $\boldsymbol{x}$ la ecuación algebraica $f'(x) = 0$, de la que se obtienen puntos críticos o estacionarios x^*.

c) Determinar la segunda derivada de $f(x)$; es decir, $f''(x)$.

d) Tomar la decisión así:

- Si $f''(x^*) < 0$, entonces x^* define un MÁXIMO LOCAL, y $f_{max} = f(x^*)$ en el punto x^*.
- Si $f''(x^*) > 0$, entonces x^* define un MÍNIMO LOCAL, y $f_{min} = f(x^*)$ en el punto x^*.
- Si $f''(x^*) = 0$, no se puede concluir nada respecto de la naturaleza de ese punto crítico.

PROBLEMA 3.1

Dividir el número 8 en dos sumandos, tales que la suma de sus cubos sea la menor posible.

SOLUCIÓN

Sean x, y los sumandos; entonces

$$x + y = 8 \tag{1}$$

Se pide que la suma de los cubos de los dos sumandos sea la menor. Sea, entonces,

$$S = x^3 + y^3 \tag{2}$$

De la relación (1) : $y = 8 - x$. Al reemplazar en (2), se obtiene :

$$S = x^3 + (8 - x)^3 \tag{3}$$

De esta manera, la relación (3) es la función objetivo.

▪ La derivada de la función (3) con respecto a $\boldsymbol{x}$ es :

$$\frac{dS}{dx} = 3x^2 - 3(8 - x)^2.$$

▪ Al igualar a cero esta derivada y resolver para x:

$$3x^2 - 3(8 - x)^2 = 0,$$

$$x^2 - 64 + 16x - x^2 = 0,$$

$$x = 4. \text{ (Punto crítico).}$$

■ La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2S}{dx^2} = 6x + 6(8 - x) = 48.$$

■ El valor de la segunda derivada de la función objetivo en el punto crítico $x = 4$ es :

$$\frac{d^2S}{dx^2}(4) = 48 > 0.$$

■ Decisión : como $\frac{d^2S}{dx^2}(4) > 0$, entonces $x = 4$ define un mínimo local o mínimo relativo. Además, el otro sumando es $y = 8 - x = 8 - 4 = 4.$

Conclusión : los números buscados son 4 y 4, y, por supuesto.

$$S_{min} = 4^3 + 4^3 = 64 + 64 = 128.$$

PROBLEMA 3.2

Hallar el número positivo que sumado a su inverso produzca la suma mínima.

SOLUCIÓN

Sea $\boldsymbol{x}$ el número buscado, $\boldsymbol{x} > 0$; entonces, la función objetivo se define como

$$S = x + \frac{1}{x} \qquad (1)$$

■ La derivada de la función (1) con respecto a $\boldsymbol{x}$ es :

$$\frac{dS}{dx} = 1 - \frac{1}{x^2}.$$

■ Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$:

$$1 - \frac{1}{x^2} = 0; \quad \frac{1}{x^2} = 1; \quad x = \pm 1.$$

Se toma $x = 1$ (Punto crítico), pues el número buscado es positivo.

■ La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2S}{dx^2} = \frac{1}{2x^3}.$$

■ El valor de la segunda derivada de la función objetivo en el punto crítico $x = 1$ es :

$$\frac{d^2S}{dx^2}(1) = \frac{1}{2(1)^3} = \frac{1}{2} > 0.$$

■ Decisión : como $\frac{d^2S}{dx^2}(1) > 0$, entonces $x = 1$ define un mínimo relativo.

Conclusión : el número buscado es 1. Además, $S_{min} = 1 + \frac{1}{1} = 2.$

PROBLEMA 3.3

Se quiere construir una caja de base cuadrada y abierta por la parte superior, al utilizar para ello una lámina de cartón de $12\,cm$ de lado, recortando cuadrados iguales en las esquinas y doblan los lados. Determinar la longitud de los lados para obtener una caja de volumen máximo.

SOLUCIÓN

Sea $\boldsymbol{x}$ la longitud en centímetros del lado del cuadrado que se debe cortar. Las dimensiones de la caja son : x, $12-2x$ y $12-2x$.

Por lo tanto, el volumen es (Figura 3.3) :

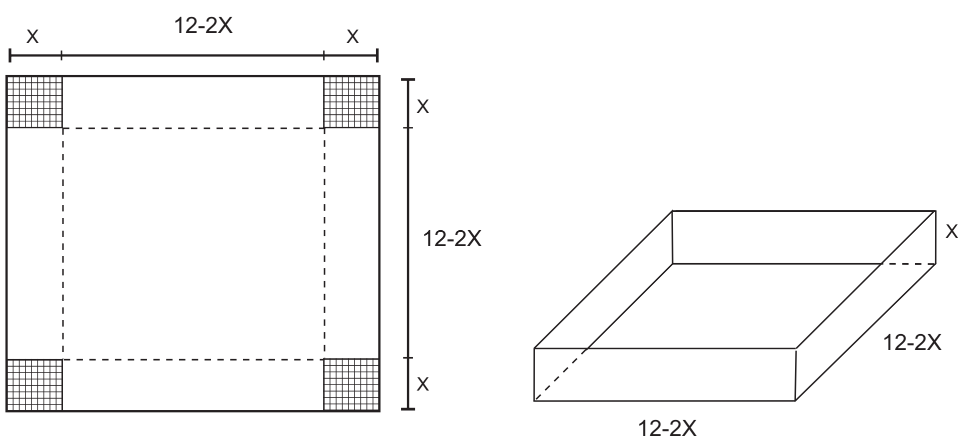


Fig. 3.3

$$V = x(12-2x)(12-2x),$$

$$V = 4x^3 - 48x^2 + 144x \quad (cm^3) \tag{1}$$

■ La derivada de (1) respecto a $\boldsymbol{x}$ es :

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 96x + 144. \tag{2}$$

■ Al igualar la derivada a cero y resolver para $\boldsymbol{x}$:

$$12x^2 - 96x + 144 = 0,$$

$$12(x-2)(x-6) = 0.$$

Entonces, los puntos críticos son $x = 2$ y $x = 6$ (inadmisible).

■ La segunda derivada de la función (2) :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 96. \tag{3}$$

■ Al evaluar esta segunda derivada en el punto crítico :

$$\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x\,=\,2} = 24(2) - 96 = \,-\,48 < 0.$$

■ Decisión : como $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x\,=\,2} < 0,$ entonces, para $\boldsymbol{x} = 2,$ la función V toma un valor máximo.

Conclusión : Las dimensiones de la caja son $12 - 2x\,, 12 - 2x$ y x; es decir, $8,\ \ 8$ y $2\,cm.$ Además,

$$V_{max} = 4(2)^3 - 48(2)^2 + 144(2) = 128\,cm^3.$$

PROBLEMA 3.4

Hallar las dimensiones del cilindro recto circular, de máximo volumen, que puede ser inscrito en un cono circular de radio $5\,cm$ y altura $12\,cm.$

SOLUCIÓN

El volumen del cilindro circular recto de radio $\boldsymbol{r}$ y altura $\boldsymbol{h}$ viene dado por la siguiente expresión :

$$V = \pi r^2 h \ \ (cm^2) \tag{1}$$

De la Figura $3.4.b,$ por semejanza de triángulos, se tiene:

$$\frac{12 - h}{r} = \frac{12}{5};\ h = \frac{12}{5}(5 - r) \tag{2}$$

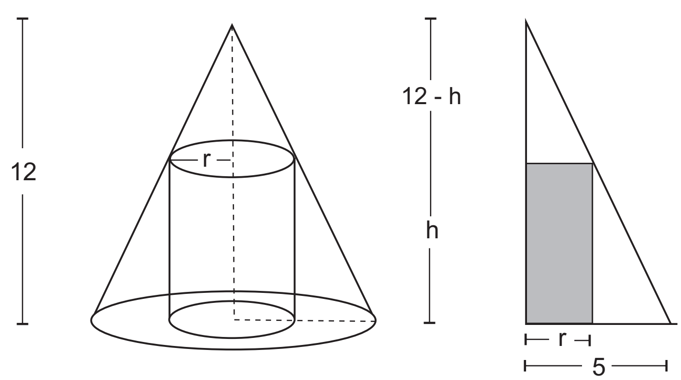


Fig. 3.4.a Fig. 3.4.b

Al reemplazar (2) en (1) se obtiene la función objetivo :

$$V = \frac{12\pi}{5}\,(5r^2 - r^3) \tag{3}$$

■ La derivada de la ecuación (3) con respecto a $\boldsymbol{r}$:

Luego, los puntos críticos son $\boldsymbol{r} = 0$ y $\boldsymbol{r} = \dfrac{10}{3}$. Solo es admisible $\boldsymbol{r} = \dfrac{10}{3}$, pues $r = 0$ implica la no existencia de cilindro alguno.

■ Al derivar (4) por segunda vez :

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{12\pi}{5}(10 - 6r).$$

■ La evaluación de la segunda derivada en el punto crítico $\boldsymbol{r} = \dfrac{10}{3}$ da como resultado :

$$\left.\frac{d^2V}{dr^2}\right|_{r = \frac{10}{3}} = \frac{12\pi}{5}\left[10 - 6(\frac{10}{3})\right] = -\frac{24\pi}{5} < 0.$$

■ Decisión : la función $\boldsymbol{V}$ tiene un máximo para $\boldsymbol{r} = \dfrac{10}{3}$.

Las dimensiones del cilindro circular recto de volumen máximo son :

$$\boldsymbol{r} = \frac{10}{3}\,cm \quad \text{y} \quad \boldsymbol{h} = \frac{10}{5}(5 - r) = 4\,cm.$$

El volumen máximo es : $V_{max} = \pi(\dfrac{10}{3})^2 4 = \dfrac{400}{9}\pi \ \ cm^3$.

PROBLEMA 3.5

De una hoja de cartón de 8 x 5 cm, deben recortarse cuadrados iguales, de modo que al doblarse la hoja, siguiendo las líneas punteadas, resulte una caja sin tapa, con la mayor capacidad posible. Hallar las dimensiones de la caja.

SOLUCIÓN

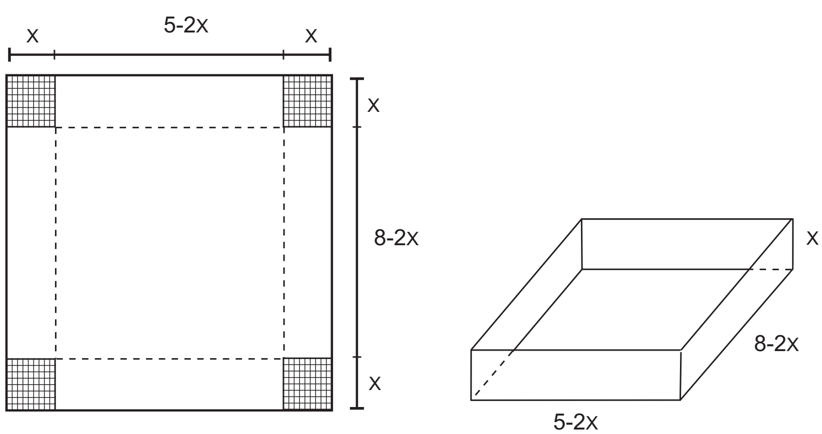


Fig. 3.5

Sea $\boldsymbol{x}$ la longitud en centímetros del lado del cuadrado esquinero que se debe cortar. En estas condiciones, las dimensiones de la caja son: x, $5 - 2x$ y $8 - 2x$.

Por lo tanto, el volumen es (Figura 3.5) :

$$V = x(5-2x)(8-2x),$$

$$V = 4x^3 - 26x^2 + 40x \quad (cm^3) \qquad (1)$$

■ La derivada de (1) respecto a $\boldsymbol{x}$ es :

$$\frac{dV}{dx} = 12x^2 - 52x + 40. \qquad (2)$$

■ Al igualar la derivada a cero y resolver para $\boldsymbol{x}$:

$$12x^2 - 52x + 40 = 0,$$

$$(x-1)(3x-10) = 0.$$

Entonces, los puntos críticos son $x = 1$ y $x = 10/3$ (inadmisible).

■ La segunda derivada de la función (2) :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 24x - 52. \qquad (3)$$

■ Al evaluar la segunda derivada en el punto crítico :

$$\frac{d^2V}{dx^2}(1) = 24(1) - 52 = -28 < 0.$$

■ Decisión : como $\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=1} < 0$, entonces, para $\boldsymbol{x} = 1$, la función volumen V se maximiza.

Conclusión : Las dimensiones de la caja son $5-2x$, $8-2x$ y x; es decir, 3, 6 y 1 cm. Por otra parte,

$$V_{max} = 3.6.1 = 18\, cm^3$$

PROBLEMA 3.6

El perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. Hallar las dimensiones de los lados para que el volumen del cuerpo engendrado por la rotación del triángulo en torno a la base sea el mayor posible.

SOLUCIÓN

En correspondencia con la Figura 3.6, sean x, y, y los lados del triángulo isósceles.

Por el Teorema de Pitágoras, su altura es:

$$h = \sqrt{y^2 - \left[\frac{x}{2}\right]^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4y^2 - x^2} \qquad (1)$$

El volumen del sólido engendrado por la rotación del triángulo alrededor de su base se calcula como:

$$V = \frac{2\pi}{3} * \frac{1}{4}(4y^2 - x^2) * \frac{x}{2},$$

$$V = \frac{\pi}{12} x(4y^2 - x^2) \qquad (3)$$

Al reemplazar (2) en (3), se obtiene la función objetivo :

$$V = \frac{\pi}{12} 2(p-y)(4y^2 - [2(p-y)]^2);$$

$$V = \frac{2\pi}{3}(-p^3 + 3p^2 y - 2p y^2) \qquad (4)$$

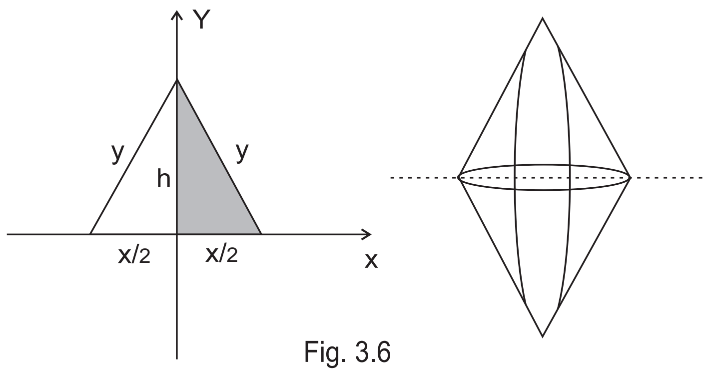


Fig. 3.6

- La derivada de la relación (4) con respecto a y es :

$$\frac{dV}{dy} = \frac{2\pi}{3}(3p^2 - 4p y) \qquad (5)$$

- Al igualar a cero la derivada (5) y resolver para y, se obtiene:

$$3p^2 - 4p y = 0,$$

$$p(39 - 4y) = 0; \qquad y = \frac{3}{4}p \text{ (Punto crítico).}$$

- La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{2\pi}{3}(-4p) = -\frac{8\pi p}{3}. \qquad (6)$$

- La evaluación de la segunda derivada (6), en el punto crítico, conduce a:

$$\frac{d^2V}{dx^2}\left[\frac{3}{4}p\right] = -\frac{8\pi p}{3} < 0.$$

- Decisión : Puesto que $\frac{d^2V}{dx^2}\left[\frac{3}{4}p\right] < 0$, entonces $y = \frac{3}{4}p$ maximiza la función V. Además, $x = 2(p-y) = \frac{p}{2}$.

Conclusión : las dimensiones de los lados del triángulo isósceles de perímetro $2p$ son $\frac{p}{2}$, $\frac{3p}{4}$ y $\frac{3p}{4}$. x.

$$V_{max} = \frac{2\pi p}{3} * \frac{p}{4} * \frac{p}{2} = \frac{\pi}{12} p^3 \quad \text{Unidades de volumen.}$$

PROBLEMA 3.7

Se debe construir una caja con tapa, cuyo volumen sea de $72\ cm^3$; los lados de la base deben estar en relación $1:2$. Hallar las medidas de las aristas para que la superficie total sea la menor posible.

SOLUCIÓN

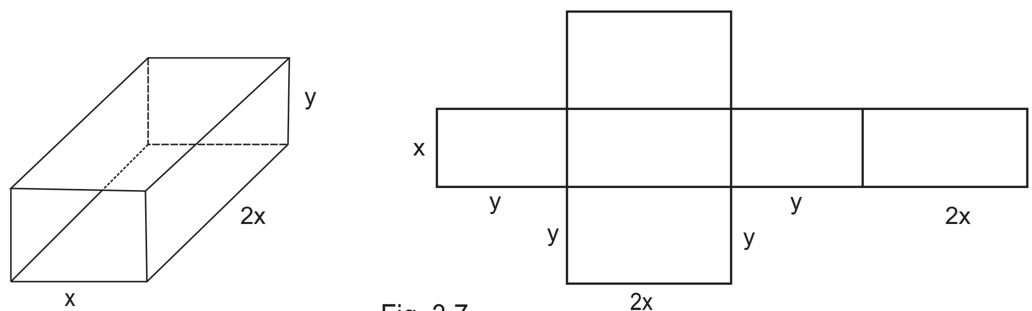


Fig. 3.7

Sean x, $2x$ y y las dimensiones en cm de la caja. Su volumen es:

$$x(2x)y = 72; \qquad 2x^2y = 72 \qquad (1)$$

Ahora bien, la superficie total de la caja es:

$$S = 2(2x)x + 2xy + 2(2x)y;$$

$$S = 4x^2 + 6xy \qquad (2)$$

De la relación (1), se tiene $y = \frac{36}{x^2}$. Al reemplazar el valor de y en (2), se obtiene la función objetivo :

$$S = 4x^2 + \frac{216}{x} \qquad (3)$$

■ La derivada de la función objetivo con respecto a $\boldsymbol{x}$ es :

$$\frac{dS}{dx} = 8x - \frac{216}{x^2} \qquad (4)$$

■ Al igualar a cero la derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtiene:

$$8x - \frac{216}{x^2} = 0; \qquad 8x^3 - 216 = 0;$$

$$x^3 = 27; \qquad x = 3 \text{ (Punto crítico).}$$

■ La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2S}{dx^2} = 8 + \frac{432}{x^3}.$$

▪ El valor de la segunda derivada calculada en el punto crítico siempre será mayor que cero; esto es, $\dfrac{d^2S}{dx^2}(3) = 8 + \dfrac{432}{27} > 0.$

▪ Decisión : Puesto que $\dfrac{d^2S}{dx^2}(3) > 0,$ entonces $x = 3$ minimiza la función $S.$

Por otra parte, $y = \dfrac{36}{x^2} = \dfrac{36}{9} = 4.$

En conclusión, las dimensiones de la caja son $x, 2x, y$; es decir, $3, 6, 4\ cm.$

Además,

$$S_{min} = 4(3)^2 + \frac{216}{3} = 108\, cm^3.$$

PROBLEMA 3.8

El perímetro de un triángulo isósceles es $2p$. Hallar las dimensiones de los lados para que el cono engendrado por la rotación del triángulo en torno a su altura bajada sobre la base sea el mayor posible.

SOLUCIÓN

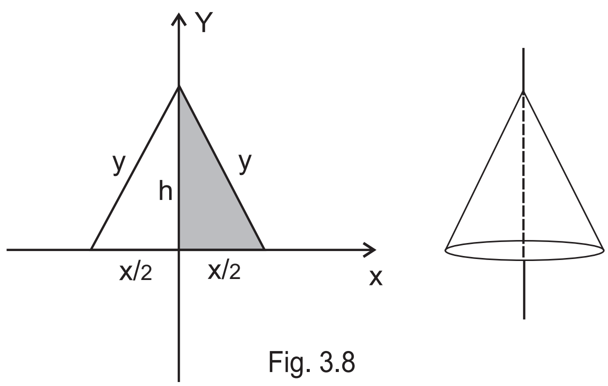


Fig. 3.8

En correspondencia con la Figura 3.8, sean x, y, y los lados del triángulo isósceles. Por el Teorema de Pitágoras, su altura es:

$$h = \sqrt{y^2 - \left[\frac{x}{2}\right]^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4y^2 - x^2} \qquad (1)$$

Puesto que el triángulo es isósceles, entonces,

$$2y + x = 2p,$$
$$x = 2(p - y) \qquad (2)$$

El volumen del sólido engendrado por la rotación del triángulo en torno a su altura es:

$$V = \frac{\pi}{3} * \left[\frac{x}{2}\right]^2 * \frac{1}{2}\sqrt{4y^2 - x^2},$$
$$V = \frac{\pi}{24} x^2 \sqrt{4y^2 - x^2} \qquad (3)$$

Al reemplazar (2) en (3), se obtiene la función objetivo :

$$V = \frac{\pi}{24} * 4\sqrt{4y^2 - 4(p-y)^2};$$

$$V = \frac{\pi}{3}(p-y)^2\sqrt{2py - p^2}. \tag{4}$$

■ La derivada de la relación (4) con respecto a y es :

$$\frac{dV}{dy} = \frac{\pi}{3}\left[\frac{p(p-y)^2}{\sqrt{2py-p^2}} - 2(p-y)\sqrt{2py-p^2}\right];$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{\pi}{3}\left[\frac{5py^2 - 8p^2y + 3p^3}{\sqrt{2py-p^2}}\right] \tag{5}$$

■ Al igualar a cero la derivada (5) y resolver para y, se obtiene:

$$5py^2 - 8p^2y + 3p^3 = 0,$$

$$p(y-p)(5y-3p) = 0; \qquad y = \frac{3}{5}p \text{ (Punto crítico).}$$

■ La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\pi p\,(15y^2 - 189y + 5p^2)}{(2y-p)\sqrt{2py-p^2}} \tag{6}$$

■ La evaluación de la segunda derivada (6), en el punto crítico, conduce a:

$$\frac{d^2V}{dx^2}\left[\frac{3}{5}p\right] = -\,0,894427191\,p < 0.$$

■ Decisión : Puesto que $\frac{d^2V}{dx^2}\left[\frac{3}{5}p\right] < 0$, entonces, $y = \frac{3}{5}p$ maximiza la función V. Además, $x = 2(p-y) = \frac{4}{5}p$.

Conclusión : las dimensiones de los lados del triángulo isósceles de perímetro $2p$ son $\frac{3}{5}p$, $\frac{3}{5}p$ y $\frac{4}{5}p$ y, además,

$$V_{max} = \frac{\pi}{24} * \left[\frac{4p}{5}\right]^2 \sqrt{4\left[\frac{3p}{5}\right]^2 - \left[\frac{4p}{5}\right]^2},$$

$$V_{max} = \frac{4\pi\sqrt{5}}{375}p^3 \text{ unidades de volumen.}$$

PROBLEMA 3.9

Hallar el radio y la altura del cilindro circular recto de mayor volumen inscrito en una esfera de radio R.

SOLUCIÓN

Sean h y r la altura y el radio, respectivamente, del cilindro circular recto inscrito en la esfera de radio R.

En el triángulo rectágulo de la Figura 3.9, por el Teorema de Pitágoras, se tiene :

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2} \tag{1}$$

El volumen del cilindro de radio r y altura $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$ es :

$$V = \pi r^2 h = \pi r^2 \left[2\sqrt{R^2 - r^2}\right],$$

$$V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}. \tag{2}$$

De esta manera, la función objetivo es $V = 2\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2}$.

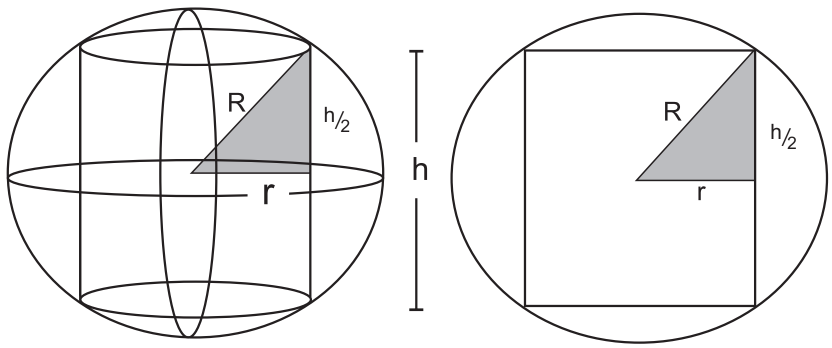


Fig. 3.9

- La derivada de la función objetivo con respecto a r es :

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi \left[\frac{r^2(-r)}{\sqrt{R^2 - r^2}} + 2r\sqrt{R^2 - r^2} \right],$$

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi \left[\frac{-3r^3 + 2rR^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right] \tag{3}$$

- Al igualar la derivada (3) a cero y resolver para r, se obtienen puntos críticos:

$$2\pi \left[\frac{-3r^3 + 2rR^2}{\sqrt{R^2 - r^2}} \right] = 0,$$

$$-3r^3 + 2rR^2 = 0, \quad r(-3r^2 + 2rR) = 0;$$

$$r = 0 \ ; \ r = \sqrt{\frac{2}{3}}R\,.$$

De manera que el único punto crítico es $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R$, pues $r = 0$ no origina cilindro alguno.

- La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{2\pi\left[2R^4 - 9R^2r^2 + 6r^4\right]}{\sqrt{(R^2 - r^2)^3}}.$$

- La evaluación de la segunda derivada de la función objetivo, en el punto crítico $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R,$ da como resultado :

$$\frac{d^2V}{dr^2}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}R\right] = \frac{2\pi\left[2R^4 - 9R^2\left[\frac{2}{3}R\right]^2 + 6\left[\frac{2}{3}R\right]^4\right]}{\sqrt{(R^2 - \left[\frac{2}{3}R\right]^2)^3}},$$

$$\frac{d^2V}{dr^2}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}R\right] = -8\pi\sqrt{3}\,R < 0.$$

- Decisión: Puesto que $\frac{d^2V}{dr^2}\left[\sqrt{\frac{2}{3}}R\right] < 0,$ entonces $r = \sqrt{\frac{2}{3}}R = \frac{\sqrt{6}}{3}R$ maximiza la función objetivo.

Además, la altura del cilindro inscrito es $h = 2\sqrt{R^2 - \frac{2}{3}R^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}R = \frac{2\sqrt{3}}{3}R.$

Así, pues, el radio y altura del cilindro son respectivamente $\frac{\sqrt{6}}{3}R$ y $\frac{2\sqrt{3}}{3}R.$

El volumen máximo se obtiene al reemplazar los valores de r y h en (2) :

$$V_{max} = \frac{4\sqrt{3}\,\pi\,R^3}{9} \text{ unidades de volumen.}$$

PROBLEMA 3.10

Se necesita cortar un alambre de $2m$ de longitud en dos partes: con la primera se forma un triángulo equilátero y con la otra un círculo. Calcular la longitud de cada una de las partes, de manera que la suma de las áreas de las figuras obtenidas sea la menor.

SOLUCIÓN

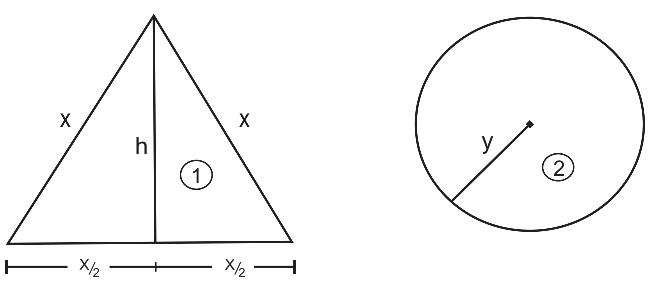


Fig. 3.10

Sean : x la longitud en metros del triángulo equilátero;

y la longitud en metros del radio del círculo.

De la figura 3.10, se puede calcular el área total como la suma de las áreas del triángulo A_1 y del círculo A_2 :

$$A = A_1 + A_2,$$

$$A = \frac{1}{2}xh + y^2 \tag{1}$$

La altura h en función de x se calcula como :

$$h = \sqrt{x^2 - \left[\tfrac{1}{2}x\right]^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2};$$

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2}x \tag{2}$$

la sustitución de (2) en (1) da como resultado:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + y^2. \tag{3}$$

Según los datos del problema :

$$3x + 2\pi y = 2. \tag{4}$$

De la relación (4), al despejar y, se obtiene que:

$$y = \frac{2 - 3x}{2\pi}. \qquad (5).$$

Al reemplazar (5) en (3), se obtiene la función objetivo:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left[\frac{2 - 3x}{2\pi}\right]^2 \tag{6}$$

■ La derivada de la función objetivo con respecto a $\boldsymbol{x}$ es :

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2\pi}(2 - 3x) \tag{7}$$

■ Al igualar a cero la derivada (7) y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtiene el único punto crítico:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{3}{2\pi}(2 - 3x) = 0,$$

$$(\sqrt{3}\pi + 9)\,x = 6,$$

$$x = \frac{6}{\sqrt{3}\pi + 9} \approx 0,41547.$$

■ La segunda derivada de la función objetivo :

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{9}{2\pi}.$$

■ Se puede ver que la evaluación de la segunda derivada de la función objetivo es positiva para cualquier valor de $\boldsymbol{x}$; esto es :

$$\frac{d^2A}{dx^2} > 0.$$

■ Decisión: Puesto que $\dfrac{d^2A}{dx^2} > 0$, entonces, el punto crítico $x = \dfrac{6}{\sqrt{3}\pi + 9}$ minimiza la función área A. Además, de la relación (5) :

$$y = \frac{2 - 3(0,41547)}{2\pi} \approx 0,12.$$

Conclusión : El alambre se debe cortar así :

Para formar triángulo $3\boldsymbol{x} = 3(0,41547) \approx 1,24641\, m.$

Para formar círculo $2\pi \boldsymbol{y} = 2\pi(0,12) \approx 0,75398\, m.$

Y, ademas, $A_{min} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(0,41547) + (0,12)^2 \approx 0,225\, m^2.$

PROBLEMA 3.11

Una tina abierta por la parte superior tiene la forma de un cilindro circular recto. Si su volumen es igual a V, calcular las longitudes del radio y su altura para que su superficie total sea la menor posible.

SOLUCIÓN

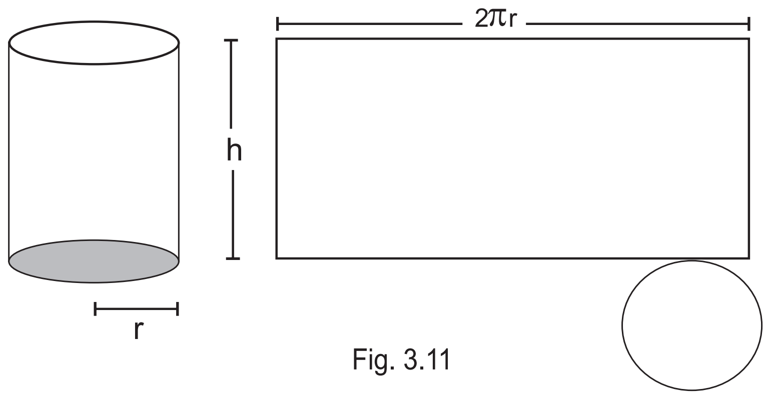


Fig. 3.11

Sean $\boldsymbol{r}$ el radio y $\boldsymbol{h}$ la altura de la tina en forma de cilindro circular recto.

El volumen del cilindro es :

$$V = \pi\, r^2 h \tag{1}$$

La superficie total de la tina es igual a la suma del área de la base y el área lateral :

$$S = \pi\, r^2 + 2\pi\, r h \tag{2}$$

De la relación (2) :

$$h = \frac{V}{\pi\, r^2}.$$

Al reemplazar esta última igualdad en (2), se obtiene:

$$S = \pi\, r^2 + 2\pi\, r \left[\frac{V}{\pi\, r^2}\right],$$

$$S = \pi\, r^2 + \frac{2V}{r} \tag{3}$$

La relación (3) constituye la función objetivo.

▪ La derivada de la función objetivo con respecto a $\boldsymbol{r}$ es :

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\, r - \frac{2V}{r^2} \tag{4}$$

■ Al igualar a cero la derivada de la función objetivo y resolver la ecuación para r, se obtiene el único punto crítico :

$$2\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0,$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \text{ (Punto crítico).}$$

■ La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi + \frac{4V}{r^3}.$$

■ La evaluación de la segunda derivada en el punto crítico es :

$$\frac{dS}{dr}\left[\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right] = 2\pi + \frac{4V}{V/\pi} = 6\pi > 0.$$

■ Decisión : Puesto que $\frac{dS}{dr}\left[\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right] > 0$, entonces el punto crítico $r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ minimiza la función objetivo.

Por otro lado, la altura es igual a $h = \dfrac{V}{\pi\left[\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right]^2} = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}.$

Además,

$$S_{min} = \pi\left[\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right]^2 + 2\pi\left[\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right]^2 = 3\pi\left[\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}\right]^2,$$

$$S_{min} = 3\sqrt[3]{\pi V^2} \text{ unidades de superficie.}$$

PROBLEMA 3.12

Calcular el radio y la altura del cilindro circular recto de mayor área lateral inscrito en una esfera de radio R.

SOLUCIÓN

Sea $\boldsymbol{r}$ el radio y h la altura del cilindro circular recto inscrito en la esfera de radio R.

Al aplicar el Teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo en la Figura 3.12, se tiene :

$$h = 2\sqrt{R^2 - r^2} \tag{1}$$

Ahora bien, el área lateral del cilindro es :

$$S = 2\pi r h \tag{2}$$

Al reemplazar (1) en (2), se obtiene la función objetivo:

$$S = 4\pi r\sqrt{R^2 - r^2} \tag{3}$$

■ La derivada de la función objetivo con respecto a r es :

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi\left[\frac{-r^2}{\sqrt{R^2-r^2}} + \sqrt{R^2-r^2}\right],$$

$$\frac{dS}{dr} = 4\pi\left[\frac{-2r^2+R^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\right] \tag{4}$$

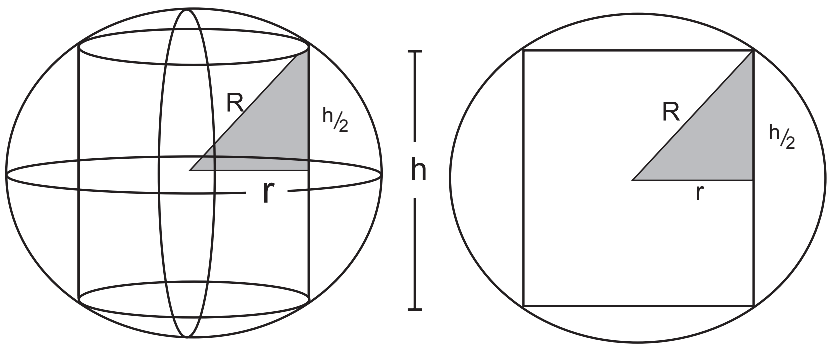


Fig. 3.12

■ Al resolver para r la ecuación algebraica resultante de igualar la derivada (4) a cero, se obtiene que :

$$4\pi\left[\frac{-2r^2+R^2}{\sqrt{R^2-r^2}}\right] = 0,$$

$$-2r^2+R^2 = 0; \qquad r = \frac{\sqrt{2}}{2}R.$$

De esta manera, el único punto crítico es $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R.$

■ La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi\left[\frac{-4r\sqrt{R^2-r^2} + \dfrac{r(-2r^2+R^2)}{\sqrt{R^2-r^2}}}{R^2-r^2}\right],$$

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi\left[\frac{-3rR^2+2r^3}{\sqrt{(R^2-r^2)^3}}\right].$$

■ La evaluación de la segunda derivada en el punto crítico conduce a :

$$\frac{d^2S}{dr^2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}R\right] = 4\pi\left[\frac{-3\left[\frac{\sqrt{2}}{2}R\right]R^2 + 2\left[\frac{\sqrt{2}}{2}R\right]^3}{\sqrt{\left[R^2-\left[\frac{\sqrt{2}}{2}R\right]^2\right]^3}}\right],$$

$$\frac{d^2S}{dr^2}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}R\right] = -16v < 0.$$

■ Decisión : Como $\dfrac{d^2S}{dr^2}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}R\right] < 0$, entonces el punto crítico $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}R$ maximiza la función objetivo.

Por otra parte, $h = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2\sqrt{R^2 - \left[\frac{\sqrt{2}}{2}R\right]^2} = \sqrt{2}\,R.$

En consecuencia, las longitudes del radio y altura del cilindro circular recto inscrito en la esfera de radio R son respectivamente, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}R$ y $\sqrt{2}\,R$. Además,

$$S_{max} = 2\pi * \frac{\sqrt{2}}{2}R * \sqrt{2}\,R = 2\pi R^2 \text{ unidades de superficie.}$$

PROBLEMA 3.13

Calcular el punto de la elipse $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{28} = 1$, de modo que el área del triángulo engendrado por la tangente que pasa por ese punto y los intersectos de la misma con los ejes coordenados sea la menor posible.

SOLUCIÓN

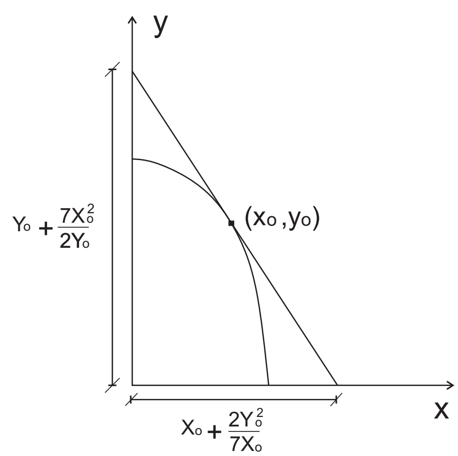


Fig. 3.13

Se va a considerar la parte de la elipse localizada en el primer cuadrante. Al derivar implícitamente la ecuación $\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{28} = 1$ con respecto a $\boldsymbol{x}$, se tiene :

$$\frac{x}{4} + \frac{yy'}{14} = ; \quad y' = -\frac{7x}{2y}.$$

Si (x_0, y_0) es el punto de tangencia, entonces la pendiente de la tangente en ese punto es $-\dfrac{7x_0}{2y_0}$.

Ahora bien, la ecuación de la recta tangente a la elipse en el punto (x_0, y_0) es :

$$\frac{x-x_0}{y-y_0} = -\frac{7x_0}{2y_0}.$$

En esta última expresión, si $x=0$, entonces $y = y_0 + \dfrac{7x_0^2}{2y_0}$.

De igual manera, si $y=0$, entonces $x = x + \dfrac{2y_0^2}{7x_0}$.

En consecuencia, el área del trángulo rectángulo formado por la recta tangente y sus intersectos con los ejes coordenados es :

$$A = \frac{1}{2}\left[x_0 + \frac{2y_0^2}{7x_0}\right]\left[y_0 + \frac{7x_0^2}{2y_0}\right],$$

$$A = \frac{1}{2}\left[\frac{7x_0^2+2y_0^2}{7x_0}\right]\left[\frac{7x_0^2+2y_0^2}{2y_0}\right];$$

$$A = \frac{1}{28}\,\frac{\left[7x_0^2+2y_0^2\right]^2}{x_0\,y_0} \qquad (1)$$

Pero (x_0, y_0) es punto de la elipse; entonces, $\dfrac{x_0^2}{8} + \dfrac{y_0^2}{28} = 1$; es decir,

$$28x_0^2 + 8y_0^2 = 224;$$

$$7x_0^2 + 2y_0^2 = 56. \qquad (2)$$

Al reemplazar (2) en (1), se tiene que la función objetivo es:

$$A = \frac{1}{28}\,\frac{(56)^2}{x_0y_0} = \frac{112}{x_0y_0} \qquad (3)$$

De la relación (2) : $y_0 = \sqrt{\dfrac{56-7x_0^2}{2}}$. Al sustituir en (3) :

$$A = \frac{1}{28}\,\frac{(56)^2}{x_0\sqrt{\frac{56-7x_0}{2}}},$$

$$A = 112\sqrt{\frac{2}{7}}\frac{1}{x_0\sqrt{8-x_0}} \qquad (5)$$

De esta manera, la relación (5) constituye la función objetivo.

- La derivada de la función objetivo con respecto a x_0 es :

$$\frac{dA}{dx_0} = \frac{32\sqrt{14}\,(4-x_0^2)}{x_0^2\sqrt{8-x_0}} \qquad (6)$$

- Al igualar la derivada a cero y resolver para x_0, se tiene:

$$x_0 = \pm 2;$$

Se toma $x_0 = 2$ como punto crítico, por estar en el primer cuadrante.

■ La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{dA}{dx_0^2} = -\frac{32\sqrt{14}\,(3x_0^4 - 20x_0^2 + 64)}{x_0^3\sqrt{(8-x_0)^3}}.$$

■ La evaluación de la segunda derivada en el punto crítico $x_0 = 2$ da como resultado :

$$\frac{dA}{dx_0^2}(2) = -\frac{32\sqrt{14}\,[3(2)^4 - 20(2)^2 + 64])}{2^3\sqrt{(8-2)^3}},$$

$$\frac{dA}{dx_0^2}(2) = 2\sqrt{56} > 0.$$

■ Decisión : Puesto que $\frac{dA}{dx_0^2}(2) > 0$, entonces el punto crítico $x_0 = 2$ minimiza la función objetivo. Además, $y_0 = \sqrt{\frac{56-7(4)}{2}} = \sqrt{14}.$

De esta manera, el punto de tangencia es $(2, \sqrt{14})$ y el área mínima posible es

$$A_{min} = \frac{112}{2\sqrt{14}} = 4\sqrt{14} \text{ unidades de área.}$$

PROBLEMA 3.14

Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en un triángulo equilatero de lado L.

SOLUCIÓN

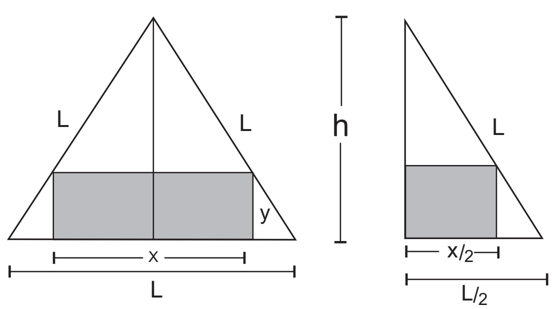


Fig. 3.14

Sean x , y las dimensiones del rectángulo inscrito en el triángulo equilátero.
En correspondencia con la figura 3.14, el área del rectángulo es :

$$A = xy \tag{1}$$

De igual manera, la altura del triángulo equilátero es :

$$h^2 = L^2 - \left[\frac{1}{2}L\right]^2,$$

$$h = \frac{\sqrt{3}\,L}{2} \tag{2}$$

Por semejanza de triángulos, se puede establecer que :

$$\frac{h}{L/2} = \frac{y}{L/2 - x/2};$$
$$\frac{2h}{L} = \frac{2y}{L-x};$$
$$y = \frac{h}{L}(L-x).$$

En consecuencia,

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}(L-x) \qquad (3)$$

Al reemplazar (3) en (1), se obtiene la función objetivo :

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2}x(L-x),$$
$$A = \frac{\sqrt{3}}{2}(Lx - x^2) \qquad (4)$$

- La derivada de la función objetivo con respecto a $\boldsymbol{x}$ es :

$$\frac{dA}{dx} = \frac{\sqrt{3}}{2}(L-2x) \qquad (5)$$

- Al igualar a cero la derivada de la función objetivo, y resolver para x, se obtiene el único punto crítico :

$$x = \frac{L}{2}.$$

- La segunda derivada de la función objetivo :

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -\sqrt{3}.$$

- Decisión : Como $\frac{d^2A}{dx^2} < 0$, para cualquier valor de $\boldsymbol{x}$, entonces el punto crítico $x = \frac{L}{2}$ maximiza la función objetivo. Además, de la relación (2),

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2}(L - \frac{L}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{4}L.$$

Conclusión : las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en el triángulo equilátero de lado L son $\frac{L}{2}$ y $\frac{\sqrt{3}}{4}L$; y el área máxima es :

$$A_{max} = \frac{1}{2}L * \frac{\sqrt{3}}{4}L = \frac{\sqrt{3}}{8}L^2 \text{ unidades de área.}$$

PROBLEMA 3.15

Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

SOLUCIÓN

Para resolver este problema, se considera la porción de elipse localizada en el primer cuadrante (Figura 3.15).

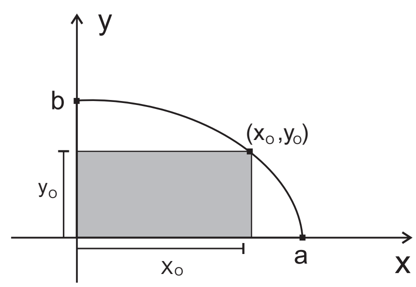


Fig. 3.15

Sean x_0, y_0 las dimensiones del rectángulo inscrito en la elipse. Entonces, el área del rectángulo es:

$$A = x_0 y_0 \tag{1}$$

Como (x_0, y_0) es punto de la elipse, entonces,

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1; \;\; y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2} \tag{2}$$

Al reemplazar (2) en (1), se obtiene la función objetivo :

$$A = \frac{b}{a} x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2} \tag{3}$$

- La derivada de la función objetivo respecto a x_0 es :

$$\frac{dA}{dx_0} = -\frac{b(-a^2 + 2x_0^2)}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}}.$$

- Al igualar a cero esta derivada y resolver para x_0, se obtiene un único punto crítico:

$$\frac{b(-a^2 + 2x_0^2)}{a\sqrt{a^2 - x_0^2}} = 0; \quad -a^2 + 2x_0^2 = 0; \quad x_0 = \frac{\sqrt{2}\,a}{2}.$$

- La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2A}{dx_0^2} = \frac{b(-3a^2 x_0 + 2bx_0^3)}{a\sqrt{\left[a^2 - x_0^2\right]^3}} \tag{4}$$

- La evaluación de la segunda derivada en el punto crítico conduce a :

$$\frac{d^2A}{dx_0^2}\left[\frac{\sqrt{2}\,a}{2}\right] = -\frac{4b}{a} < 0.$$

■ Como $\dfrac{d^2A}{dx_0^2}\left[\dfrac{\sqrt{2}\,a}{2}\right] < 0$, entonces $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}\,a}{2}$ maximiza la función objetivo.

Por otra parte, de (2) $y_0 = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - \left[\dfrac{\sqrt{2}\,a}{2}\right]^2} = \dfrac{\sqrt{2}\,b}{2}$.

■ Conclusión : Las dimensiones del rectángulo de mayor área son $2\,x_0$ y $2\,y_0$; es decir, $\sqrt{2}\,a$ y $\sqrt{2}\,b$. además,

$$A_{max} = \left(\sqrt{2}\,a\right)\left(\sqrt{2}\,b\right) = 2\,ab \text{ unidades de área.}$$

PROBLEMA 3.16

Una ventana de forma rectangular está rematada en la parte superior por un triángulo equilátero. El perímetro de la ventana es P. Hallar las dimensiones de la ventana para que tenga la mayor área posible.

SOLUCIÓN

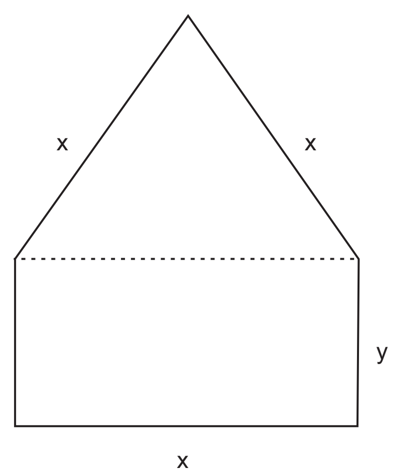


Fig. 3.16

Sean $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ las dimensiones de la parte rectangular de la ventana y $\boldsymbol{x}$ el lado del triángulo equilátero que la remata (Figura 3.16).

El perímetro de la ventana es :

$$3x + 2y = P \qquad (1)$$

El área de la ventana es igual a la suma de las áreas de la parte rectangular y el triángulo equilátero; esto es :

$$A = xy + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \qquad (2)$$

De la relación (1), se obtiene que:

$$y = \frac{P - 3x}{2} \qquad (3)$$

Al reemplazar (3) en (1) se obtiene la función objetivo:

$$A = x\left[\frac{P-3x}{2}\right] + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2,$$

$$A = \frac{1}{2}(Px - 3x^2) + \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 \qquad (4)$$

■ La derivada de la función objetivo respecto a x es :

$$\frac{dA}{dx_0} = \frac{1}{2}(P-6x) + \frac{\sqrt{3}}{24}x.$$

■ Al igualar a cero esta derivada y resolver para x se obtiene un único punto crítico:

$$\frac{1}{2}(P-6x) + \frac{\sqrt{3}}{24}x = 0; \quad x = \frac{P}{6-\sqrt{3}}.$$

■ La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2A}{dx_0^2} = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

■ La evaluación de la segunda derivada en el punto crítico es negativa; esto es :

$$\frac{d^2A}{dx^2}\left[\frac{P}{6-\sqrt{3}}\right] < 0;$$

entonces, $x_0 = \dfrac{P}{6-\sqrt{3}}$ maximiza la función objetivo.

Por otra parte, de (3) $y = \dfrac{P - \frac{3P}{6-\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{5-\sqrt{3}}{22}.$

■ Conclusión : Las dimensiones de la ventana de mayor área son :

Para el rectángulo : $x = \dfrac{P}{6-\sqrt{3}}$ y $y = \dfrac{5-\sqrt{3}}{22}$.

Para el lado del triángulo equilátero: $x = \dfrac{P}{6-\sqrt{3}}$.

El área máxima se obtiene al sustituir los valores de x, y en (2) :

$A_{max} = \dfrac{1}{132}(6+\sqrt{3})\,P^2$ unidades de área.

PROBLEMA 3.17

En una página de un libro, el texto impreso debe ocupar $S \ \ cm^2$. Los márgenes superior e inferior deben ser iguales a $\boldsymbol{a}$ cm y los de izquierda y derecha iguales a $\boldsymbol{b}$ cm. Si se toma en consideración solo la economía del papel, hallar las dimensiones de la página más ventajosa.

SOLUCIÓN

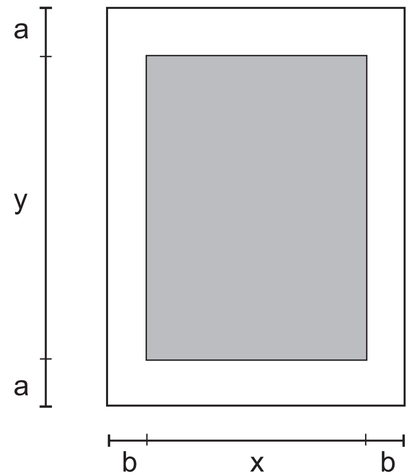


Fig. 3.17

Sean $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ las dimensiones del texto en cm y $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ las dimensiones de los márgenes (Figura 3.17).

De esta manera, el área en cm^2 de la página es :

$$A = (x + 2a)(y + 2b) \tag{1}$$

De igual manera, el área del texto es :

$$x\,y = S \tag{2}$$

De la relación (2) :

$$y = \frac{S}{x} \tag{3}$$

Al sustituir (3) en (1), se obtiene la función objetivo:

$$A = (x + 2a)(\frac{S}{x} + 2b),$$

$$A = S + \frac{2\,aS}{x} + 2\,xb + 4ab \tag{4}$$

La derivada de la función objetivo con respecto a x es :

$$\frac{dA}{dx} = -\frac{2\,aS}{x} + 2b \tag{5}$$

■ Al igualar la derivada a cero y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtienen puntos críticos:

$$-\frac{2\,aS}{x^2} + 2b = 0; \quad x = \pm\sqrt{\frac{aS}{b}}.$$

Se toma $x = \sqrt{\dfrac{aS}{x}}$ como punto crítico, pues el negativo no tiene sentido.

■ La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{dA}{dx^2}=\frac{4aS}{x^3}.$$

■ La evaluación de la segunda derivada en el punto crítico $x=\sqrt{\dfrac{aS}{x}}$ da como resultado :

$$\frac{dA}{dx^2}\left[\sqrt{\frac{aS}{b}}\right]=\frac{4aS}{\sqrt{\left[\frac{aS}{x}\right]^3}}=4b\sqrt{\frac{b}{as}}>0.$$

■ Decisión : Puesto que $\dfrac{dA}{dx^2}\left[\sqrt{\dfrac{aS}{b}}\right]>0$, entonces el punto crítico $x=\sqrt{\dfrac{aS}{b}}$ minimiza la función objetivo. Además, $y=\sqrt{\dfrac{bS}{a}}$. Así las dimensiones de la página más económica son $2a+\sqrt{\dfrac{aS}{b}}$ y $2b+\sqrt{\dfrac{bS}{a}}$ y su área es:

$$A_{min}=\left[2a+\sqrt{\frac{aS}{b}}\right]\left[2b+\sqrt{\frac{bS}{a}}\right],$$

$$A_{min}=4ab+4\sqrt{abS}+S\ cm^2.$$

PROBLEMA 3.18

Una ventana rectangular coronada por un semicírculo tiene un perímetro de $5\,m$. Determinar las dimensiones de la ventana de manera que su área sea la mayor.

SOLUCIÓN

Sean $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ las dimensiones del rectángulo y $\boldsymbol{\dfrac{x}{2}}$ el radio del semicírculo (Figura 3.18). Entonces, el área en m^2 es :

Área ventana $=$ Área rectángulo $+$ Área semicírculo.

$$A=xy+\pi(\frac{x}{2})^2,$$

$$A=xy+\frac{1}{4}\pi x^2 \qquad (1)$$

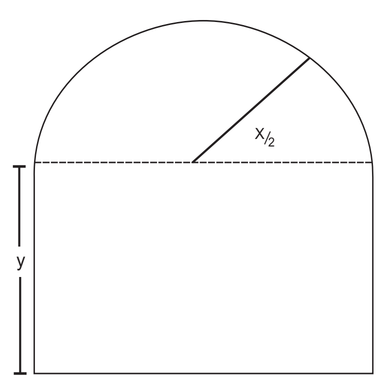


Fig. 3.18

El perímetro de la ventana vale $5\,m,$ entonces:

$$x + 2y + \pi\frac{x}{2} = 5,$$

$$y = \frac{5 - x - \pi/2x}{2} \tag{3}$$

Al sustituir (3) en (1), se obitene la función objetivo:

$$A = \frac{1}{2}(5x - x^2 - \frac{\pi}{4}x^2) \tag{4}$$

■ La derivada con respecto a $\boldsymbol{x}$ de la función objetivo es :

$$\frac{dA}{dx} = \frac{1}{2}(5 - 2x - \frac{\pi}{2}x).$$

■ Al igualar a cero la derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obitene un único punto crítico :

$$\frac{1}{2}(5 - 2x - \frac{\pi}{2}x) = 0; \quad x = \frac{10}{4+\pi}.$$

■ La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{1}{2}(-2x - \frac{\pi}{2});$$

■ La evaluación de la segunda derivada en el punto crítico $x = \dfrac{10}{4+\pi}$ es :

$$\frac{d^2A}{dx^2}\left[\frac{10}{4+\pi}\right] = -2 - \frac{\pi}{2} \;< 0.$$

■ Decisión : como $\dfrac{d^2A}{dx^2}\left[\dfrac{10}{4+\pi}\right] < 0,$ entonces el punto crítico $x = \dfrac{10}{4+\pi}$ maximiza la función objetivo. El valor de $\boldsymbol{y}$ es :

$$y = \frac{5 - 2(\frac{10}{4+\pi}) - \frac{\pi}{2}(\frac{10}{4+\pi})}{2} = \frac{5}{4+\pi}.$$

El área máxima es :

$$A_{max} = \left[\frac{10}{4+\pi}\right]\left[\frac{5}{4+\pi}\right] + \frac{1}{4}\pi\left[\frac{10}{4+\pi}\right]^2 = \frac{50+25\pi}{(4+\pi)^2} \approx 2,52\,m^2$$

PROBLEMA 3.19

Hallar las dimensiones del cono circular recto que circunscribe a una esfera de radio $\boldsymbol{R}$, de manera que el volumen del cono sea máximo.

SOLUCIÓN

El volumen del cono de altura $\boldsymbol{h}$ y radio $\boldsymbol{r}$ (Figura 3.19) es :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \tag{1}$$

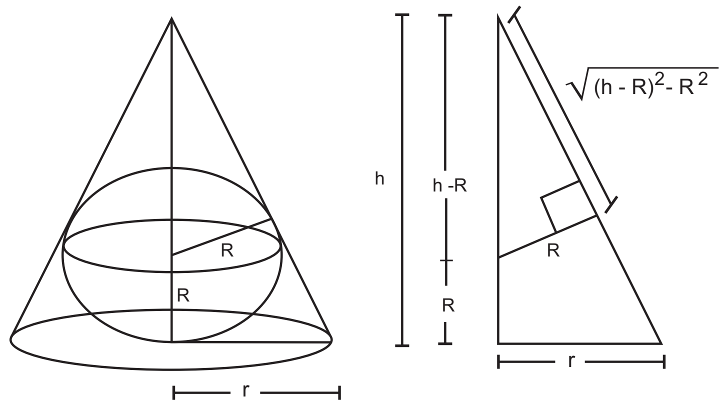


Fig. 3.19

Por triángulos semejantes, se establece que:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{\sqrt{(h-R)^2 - R^2}},$$

$$r^2 = \frac{R^2 h}{h - 2R} \tag{2}$$

Al sustituir (2) en (1), se obtiene la función objetivo:

$$V = \frac{\pi R h^2}{3(h - 2R)} \tag{3}$$

- La derivada con respecto a $\boldsymbol{h}$ de la función objetivo es :

$$\frac{dV}{dh} = \frac{1}{3}R^2\left[\frac{2(h-2R)h - h^2}{(h-2R)^2}\right].$$

- Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{h}$, se obtienen puntos críticos:

$$\frac{R^2}{3}\left[\frac{(h^2 - 4Rh)}{(h-2R)^2}\right] = 0,$$

$$2h^2 - 4Rh - h^2 = 0,$$

$$h(h - 4R) = 0,$$

$h = 0$ y $h = 4R$ son puntos críticos.

El valor $h = 0$ no tiene sentido. Así, el único punto crítico es $h = 4R$.

- La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2V}{dh^2} = \frac{4}{3}R^2\frac{1}{(h-2R)^3}.$$

- Al evaluar la segunda derivada en el punto crítico, se llega a:

$$\frac{d^2V}{dh^2}(4R) = \frac{R}{6} > 0.$$

■ Decisión : Puesto que $\dfrac{d^2V}{dh^2}(4R) > 0$, entonces el punto crítico $h = 4R$ minimiza la función objetivo. El valor del radio del cono es:

$$r = \sqrt{\frac{R^2(4R)}{4R - 2R}} = \sqrt{\frac{4R^3}{2R}} = \sqrt{2}\,R$$

El volumen del cono circunscrito de volumen mínimo es :

$$V_{min} = \frac{1}{3}\pi\left(\sqrt{2}\,R\right)\left(4\,R\right) = \frac{8}{3}\pi R^3 \text{ unidades de volumen.}$$

PROBLEMA 3.20

Se desea construir una tienda de campaña de forma de cono circular recto, sin piso, de una pieza de lona de forma circular de radio $2\,m$. Calcular las dimensiones de la tienda y el ángulo del sector que se debe eliminar a fin de obtener un volumen máximo.

SOLUCIÓN

El volumen en m^3 de la tienda de radio $\boldsymbol{r}$ y altura $\boldsymbol{h}$ es :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \tag{1}$$

La altura del cono formado es :

$$h = \sqrt{4 - r^2} \tag{2}$$

Al sustituir (2) en (1), se obtiene la función objetivo:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2\,\sqrt{4 - r^2} \tag{3}$$

■ La derivada con respecto a $\boldsymbol{r}$ de la función objetivo es :

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\pi}{3}\left(\frac{8r - 3r^3}{\sqrt{4 - r^2}}\right) = 0.$$

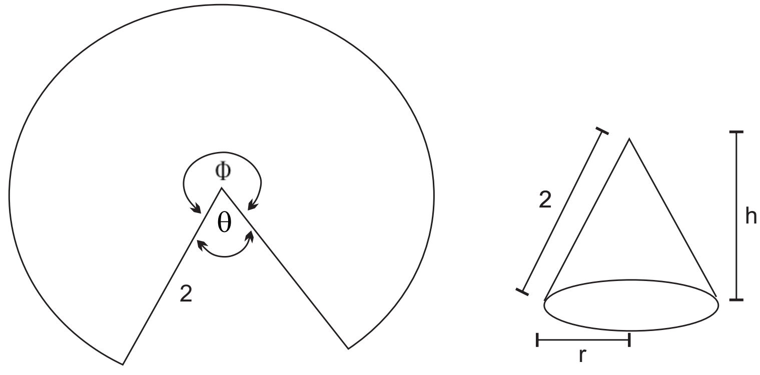


Fig. 3.20

■ Al igualar la derivada a cero y resolver para $\boldsymbol{r}$, se obtienen puntos críticos:

$$r(8r - 3r^2) = 0; \quad r = 0 \text{ y } r = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

El valor de $r = 0$ no tiene sentido. Así,el único punto crítico es: $r = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

- La segunda derivada de la función objetivo es :

$$\frac{d^2V}{dr^2} = \frac{\pi}{3}\left[\frac{6r^4 + 32}{\sqrt{(4 - r^2)^3}}\right].$$

- Al evaluar la segunda derivada en el punto crítico, se llega a:

$$\frac{d^2V}{dr^2}\left[\frac{2\sqrt{6}}{3}\right] = \frac{28\pi}{3}\sqrt{3} > 0. \quad r = \frac{2\sqrt{6}}{3} \approx 1,633\ m.$$

- Como $\dfrac{d^2V}{dr^2}\left[\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right] > 0$, entonces $r = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ maximiza la función objetivo.

El valor de la altura es $h = \sqrt{(4 - \frac{8}{3})} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15\ m.$

Ahora bien, la superficie lateral del cono vale:

$$S = \pi r l = \pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)(2) = \frac{4}{3}\pi\sqrt{6} \quad m^2.$$

Este valor será igual al área del sector remanente inicial :

$$S = 2\phi.$$

Entonces,

$$2\phi = \frac{4}{3}\pi\sqrt{6} \quad ; \quad \phi = \frac{2}{3}\pi\sqrt{6}.$$

Y el ángulo θ vale:

$$\theta = 2\pi - \frac{2}{3}\pi\sqrt{6},$$
$$\theta = 2\pi(1 - \frac{1}{3}\sqrt{6}),$$
$$\theta = 1,152985987\,(Rad),$$
$$\theta = 66,0612° \approx 66°\,3'\,40''.$$

Las dimensiones de la tienda de volumen máximo son: radio de $1,633\ m$, altura de $1,15\ m$ y se debe recortar un sector circular con un ángulo central de $66°\,3'\,40''$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

$1)$ Hallar la relación entre el radio R y la altura H de un cilindro circular recto que tiene la menor superficie total posible, conociendo su volumen V.

$2)$ Hallar la altura del cono circular recto, de menor volumen posible circunscrito en torno a una esfera de radio R.

$3)$ Se quiere construir un recipiente cilíndrico metálico de base circular y de $64\ cm^3$ de volumen. Hallar las dimensiones que debe tener para que el área total sea mínima, cuando :

a) El recipiente sea abierto.

b) El recipiente sea cerrado.

$4)$ Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la porción de parábola $y^2 = 4x$, limitada por la recta $x = 3$.

$5)$ Hallar las dimensiones de una caja rectangular abierta de $6400\ cm^3$ para que resulte la más económica, teniendo en cuenta que el costo de la base es de $\$7500$ por cm^2 y el de las superficies laterales de $\$\ 2500$ por cm^2.

$6)$ Se traza la tangente en un punto de la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$, de forma que el segmento de ella interceptado por los ejes coordenados sea mínimo. Demostrar que la longitud de este segmento es de 9 unidades de longitud.

$7)$ Hallar la ecuación de la recta que, pasando por el punto $P(3,4)$, determina en el primer cuadrante un triángulo de área mínima.

$8)$ Un depósito abierto, de hojalata, con fondo cuadrado, debe tener capacidad para $V\ litros.$ Hallar las dimensiones de dicho depósito para que en su fabricación se necesite la menor cantidad de hojalata.

9) Un recipiente abierto está formado por un cilindro, terminado por su parte inferior en una semiesfera. Si el espesor de las paredes es constante, hallar las dimensiones que deberá tener dicho recipiente para que, sin variar su capacidad, se gaste la menor cantidad posible de material en su fabricación.

10) Hallar las dimensiones de un trapecio isósceles, de área S, de manera que tenga un perímetro mínimo, si el ángulo en la base es α.

4. TRAZADO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES

Para trazar la gráfica de la función cuya ecuación es $\boldsymbol{y = f(x)}$, se procede así:

a) Encontrar las intersecciones de la gráfica con los ejes $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$, para lo cual se hace $\boldsymbol{y} = 0$ y $\boldsymbol{x} = 0$, respectivamente.

b) Determinar el dominio de definición de la función.

c) Determinar (si existen) las asíntotas de la función, así

- $\boldsymbol{y = c}$ es **asíntota horizontal** si $\lim\limits_{x\to\infty} \boldsymbol{f(x) = c}$

- Para hallar una asíntota vertical, se consideran los valores de $\boldsymbol{x}$ para los cuales $f(x)$ no está definida. Si $f(x)$ no está definida en $x = a$, entonces $\boldsymbol{x = a}$ es **asíntota vertical**.

- Si $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es función racional, en la cual el grado de $p(x)$ es mayor en una unidad que el grado de $q(x)$, entonces al dividir $p(x)$ entre $q(x)$ se obtiene :

$$\boldsymbol{f(x) = mx + b + r(x)} \quad \text{donde} \quad \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{r(x) = 0}$$

De esta manera, $\boldsymbol{y = mx + b}$ es **asíntota oblicua.**

En general, $\boldsymbol{y = mx + b}$ es **asíntota oblicua** si :

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - mx\right] = b$$

d) Calcular la primera derivada de $f(x)$ con respecto a $\boldsymbol{x}$, $f'(x)$.

e) Igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$; esto es : $f'(x) = 0$. De esta manera, se obtienen puntos críticos.

f) Determinar regiones de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ y establecer máximos o mínimos (**Criterio de la primera derivada**), así:

Si $\boldsymbol{x_0}$ es punto crítico, se pueden presentar los siguientes casos :

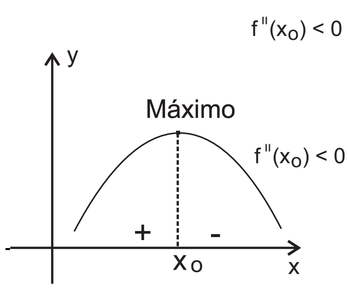


Fig. 4.a

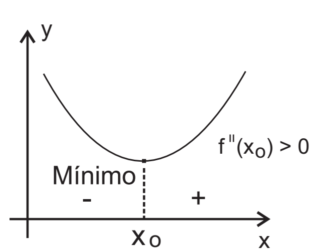


Fig. 4.b

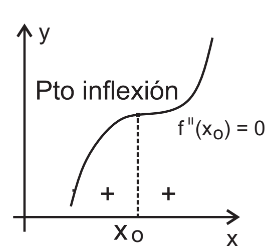


Fig. 4.c

- Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa al pasar por $\boldsymbol{x_0}$, entonces $(x_0,\ f(x_0))$ es **Máximo Relativo**. (Figura 4.a).

■ Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva al pasar por $\boldsymbol{x_0}$, entonces $(x_0,\, f(x_0))$ es **Mínimo Relativo**.(Figura 4.b).

■ Si $f'(x)$ es positiva (o negativa) en los dos lados de $\boldsymbol{x_0}$, entonces $(x_0,\, f(x_0))$ no es ni máximo ni mínimo. Es punto de inflexión. (Figura 4.c).

g) Calcular la segunda derivada $f''(x)$. Al resolver la ecuación algebraica $f''(x) = 0$, para $\boldsymbol{x}$ permite obtener puntos de inflexión, si el criterio de la primera derivada falla.

h) **Criterio de la segunda derivada**. Si $\boldsymbol{x_0}$ es punto crítico y

■ $f''(x_0) < 0$, hay **Máximo Relativo** en $(x_0,\, f(x_0))$ y existe concavidad negativa.

■ $f''(x_0) > 0$, hay **Mínimo Relativo** en $(x_0,\, f(x_0))$ y existe concavidad positiva.

h) Conviene, en algunos casos, tabular algunos valores de $\boldsymbol{x}$.

PROBLEMA 4.1

Trazar la gráfica de la función $f(x) = 2x^2 - x^3$.

SOLUCIÓN

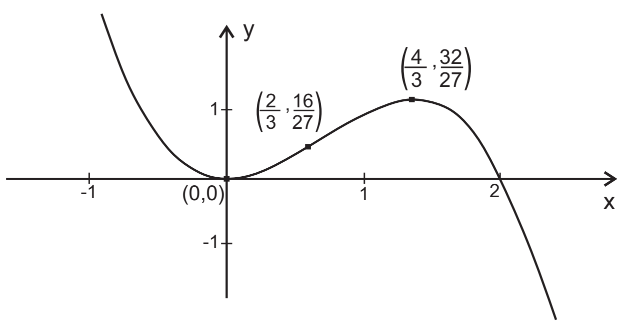


Fig. 4.1

Intersecciones : Si $x = 0,\ f(x) = 0.$

Si $f(x) = 0,\ 2x^2 - x^3 = 0;$

$x^2(2 - x) = 0;\quad x = 0$ y $x = 2.$

Los intersectos con el eje $\boldsymbol{x}$ son: $(0, 0)$ y $(2, 0)$.

Dominio : por tratarse de una función polinómica, el dominio son los reales ($\mathbb{R}$).

Asíntotas : No tiene asíntotas horizontales ni verticales.

Puntos críticos : Se calcula la primera derivada, se iguala a cero y se resuelve para x :

$$f'(x) = 4x - 3x^2 = 0.$$

Es decir, $x(4 - 3x) = 0;\ x = 0$ y $x = 4/3$ son puntos críticos.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento : Se toman como puntos de prueba los puntos $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3/2$ pertenecientes a los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0,\ 4/3)$ y $(4/3,\ +\infty)$ para determinar el comportamiento de la función :

$$f'(-1) = 4(-1) - 3(-1)^2 = -7 < 0.$$

Por tanto, f es decreciente en $(-\infty, 0)$.

$$f'(1) = 4(1) - 3(1)^2 = 1 > 0.$$

Luego, f es creciente en el intervalo $(0, 4/$

$$f'(3/2) = 4(3/2) - 3(3/2)^2 = -3/4 < 0.$$

Por tanto f es decreciente en el intervalo

Puntos de inflexión, Máximos y Mínimos. La segunda derivada de la función es :

$$f''(x) = 4 - 6x.$$

Al igualar esta segunda derivada a cero y resolver para x, se obtiene :

$$f''(x) = 0; \text{es decir } 4 - 6x = 0,\ x = \frac{2}{3}.$$

Entonces,

$$(\frac{2}{3},\ f(\frac{2}{3})) = (\frac{2}{3},\ \frac{16}{27}) \text{ es punto de inflexión.}$$

Al evaluar la segunda derivada en los puntos críticos, se decide si estos son máximos o mínimos :

$$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow (0,\ f(0)) = (0, 0) \text{ es Mínimo Relativo.}$$

$$f''(\frac{4}{3}) = -4 < 0 \Rightarrow (4/3,\ f(\frac{4}{3})) = (\frac{4}{3}, \frac{32}{27}) \text{ es Máximo Relativo.}$$

Por otra parte,

$$f''(-1) = 24 > 0 \text{ hay concavidad positiva en } (-\infty, 2/3).$$

$$f''(1) = -2 < 0 \text{ hay concavidad negativa en } (2/3,\ +\infty).$$

PROBLEMA 4.2

Trazar la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 3$.

SOLUCIÓN

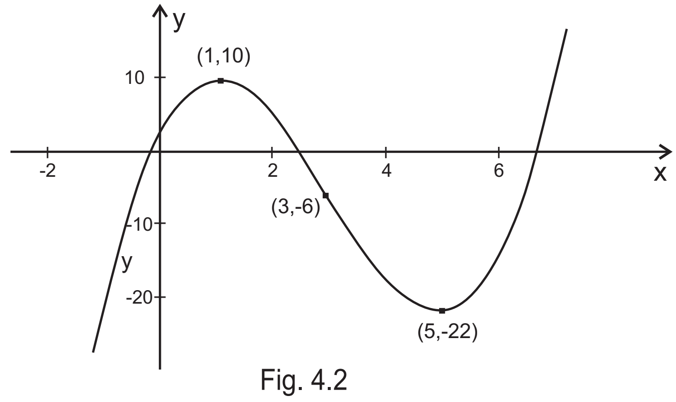


Fig. 4.2

Intersecciones : Si $x = 0, \; f(x) = 3.$

El intersecto con el eje $\boldsymbol{y}$ es $(0, 3)$.

Si $f(x) = 0, \; x^3 - 9x^2 + 15x + 3 = 0.$

Las raíces aproximadas de esta ecuación polinómica son:

$$x = -0,1804; \qquad x = 2,489; \qquad x = 6,69.$$

Entonces, los intersectos con el eje $\boldsymbol{x}$ son : $(-0,1804, \; 0)$; $(2,489, \; 0)$ y $(6,69, \; 0)$.

Dominio : Como es una función polinómica, el dominio es los reales $(\mathbb{R})$.

Asíntotas : No tiene asíntotas horizontales ni verticales.

Puntos críticos : Se calcula la primera derivada y se iguala a cero :

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 15 = 0.$$

Es decir : $3(x^2 - 5x + 6) = 0, \quad 3(x-5)(x-1) = 0; \quad x = 1$ y $x = 5$ son puntos críticos.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Se toman como puntos de prueba los puntos $0, \, 3$ y 7 y se calcula el valor de la primera derivada en esos puntos :

$f'(0) = 15 > 0.$ Por tanto, f es creciente en $(-\infty, 1)$.

$f'(3) = 3(3)^2 - 18(3) + 15 = -12 < 0.$

Luego, f es decreciente en el intervalo $(1, 5)$.

$f'(7) = 3(7)^2 - 18(7) + 15 = 36 > 0.$

Por tanto f es creciente en el intervalo $(5, \, \infty)$.

Puntos de inflexión, Máximos y Mínimos. La segunda derivada de la función es :

$$f''(x) = 6x - 18.$$

Al igualar esta segunda derivada a cero y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtienen puntos de inflexión :

$f''(x) = 0;$ es decir $6x - 18 = 0, \; x = 3.$

Entonces,

$(3, \, f(3)) = (3, \, -6)$ es punto de inflexión.

Al evaluar la segunda derivada en los puntos críticos, se decide si estos son máximos o mínimos :

$f''(1) = 6(1) - 18 = -12 < 0.$ Entonces, $(1, \, f(1)) = (1, 10)$ es Máximo Relativo.

$f''(5) = 6(5) - 18 = 12 > 0.$ De esta manera, $(5, \, f(5)) = (5, \, -22)$ es Mínimo Relativo.

Por otra parte,

$f''(1) - 12 < 0,$ hay concavidad negativa en $(-\infty, \, 3)$;

$f''(5) = 12 > 0,$ hay concavidad positiva en $(3, \, +\infty)$.

PROBLEMA 4.3

Trazar la gráfica de la función $f(x) = 3x^5 - 125x^3 + 2160x.$

SOLUCIÓN

Intersecciones : Si $x = 0,\ f(x) = 0.$

Si $f(x) = 0,\ 3x^5 - 125x^3 + 2160x = 0;\ x(3x^4 - 125x^2 + 2160) = 0;\ x = 0.$

Así, el único punto de corte con los ejes es $(0, 0)$.

Dominio : Como es una función polinómica, el dominio es los reales $(\mathbb{R})$.

Asíntotas : No tiene asíntotas horizontales ni verticales.

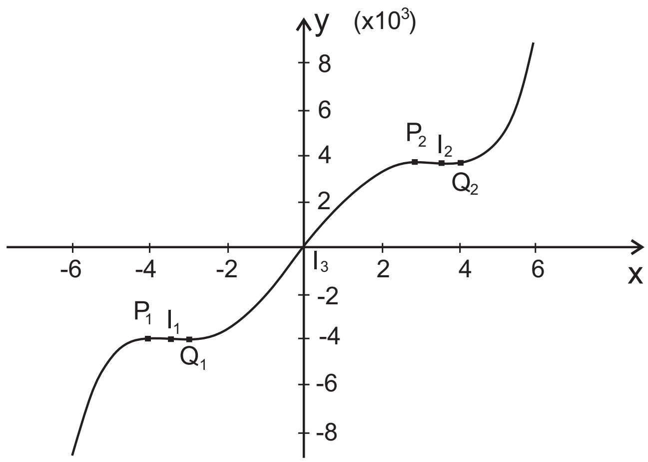


Fig. 4.3

Puntos críticos : Se calcula la primera derivada y se iguala a cero para obtener puntos críticos :

$$f'(x) = 15x^4 - 375x^2 + 2160 = 0.$$

Es decir : $(x+4)(x+3)(x-3)(x-4) = 0;$

$x = -4;\ x = -3;\ x = 3;\ x = 4$ son puntos críticos.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Se toman como puntos de prueba los puntos $-5,\ -3,5;\ 1;\ 3,5;$ y 5 y se calcula el valor de la primera derivada en esos puntos :

$f'(-5) = 2160 > 0.$ Por tanto, f es creciente en $(-\infty, -4).$

$f'(-3,5) = -182,8 < 0.$ Luego, f es decreciente en $(-4, -3)$

$f'(1) = 1800 > 0,$ entonces f es creciente en el intervalo $(-3, 3).$

$f'(3,5) = -182,8.$ Luego, f es decreciente en $(3, 4).$

$f'(5) = 2160 > 0.$ Por tanto, f es creciente en $(4, \infty).$

Puntos de inflexión, Máximos y Mínimos. La segunda derivada de la función es :

$$f''(x) = 60x^3 - 750x.$$

Al igualar esta segunda derivada a cero y resolver para x, se obtienen puntos de inflexión :

$$f''(x) = 0; \text{es decir, } 60x^3 - 750x = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son: $x = 0$; $x = \pm \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

En consecuencia los puntos de inflexión son :

$$I_1\Big(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, f\Big(-\frac{5\sqrt{2}}{2}\Big)\Big) = I_1\Big(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{21325\sqrt{2}}{2}\Big);$$

$$I_2\Big(\frac{5\sqrt{2}}{2}, f\Big(\frac{5\sqrt{2}}{2}\Big)\Big) = I_1\Big(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{21325\sqrt{2}}{2}\Big);$$

$$I_3\Big(0, f(0)\Big) = I_3(0,0).$$

Al evaluar la segunda derivada en los puntos críticos, se decide si estos son máximos o mínimos :

$f''(-4) = -840 < 0$. Entonces, $P_1(-4,\ f(-4)) = P_1(-4,\ -3712))$ es Máximo Relativo.

$f''(-3) = 630 > 0$. De esta manera, $Q_1\ (-3,\ f(-3)) = Q_1(-3,\ -4320)$ es Mínimo Relativo.

$f''(3) = -630 < 0$. De esta manera, $P_2\ (3,\ f(3)) = P_2(3, 4320)$ es Máximo Relativo.

$f''(4) = 840 > 0$. Entonces, $Q_2(4,\ f(4)) = Q_2(4, 3712))$ es Mínimo Relativo.

Concavidades.

Como $f''(-4) = -840 < 0$, entonces hay concavidad negativa en $(-\infty, -\frac{5\sqrt{2}}{2})$;

$f''(-3) = 630 > 0$, entonces hay concavidad positiva en $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, 0)$;

$f''(3) = -630 < 0$, se presenta concavidad negativa en $(0, \frac{5\sqrt{2}}{2})$;

$f''(4) = 840 > 0$, hay concavidad positiva en $(\frac{5\sqrt{2}}{2}, +\infty)$.

PROBLEMA 4.4

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$.

SOLUCIÓN

Intersecciones: Si $x = 0 \Rightarrow y = -1$.

Si $f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$;

$x = \pm 1$.

Luego, las intersecciones con los ejes son: $(-1, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, -1)$.

Campo de definición. Como $x^2+1 \neq 0$ para cualquier valor de $\boldsymbol{x}$, entonces el denominador de $f(x)$ nunca se anula. En consecuencia, el dominio es los números reales.

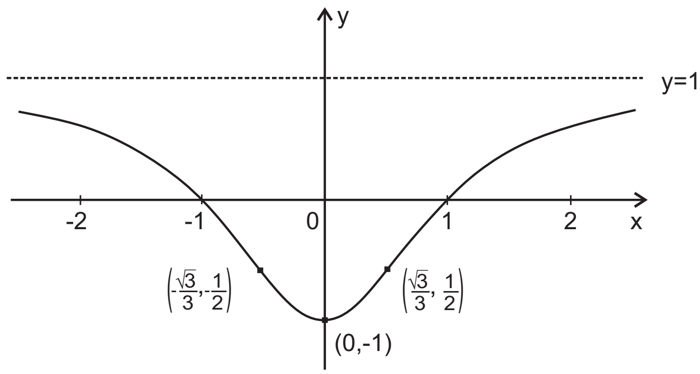


Fig. 4.4

Asíntotas. No hay asíntotas verticales. Por otra parte,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1.$$

Luego, $y=1$ es asíntota horizontal.

Puntos críticos. La primera derivada de la función es :

$$f'(x)=\frac{4x}{(x^2+1)^2}.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtienen puntos críticos :

$$\frac{4x}{(x^2+1)^2}=0, \text{ entonces } \boldsymbol{x}=0 \text{ es punto crítico.}$$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Se toman como puntos de prueba $x=-2$, $x=2$. La evaluación de la primera derivada en estos puntos da como resultado :

$$f'(-2)=\frac{4(-2)}{((-2)^2+1)^2}=-\frac{8}{25}<0. \text{ Por tanto, } f \text{ decrece en } (-\infty,\, 0).$$

$$f'(2)=\frac{4(2)}{((2)^2+1)^2}=\frac{8}{25}>0. \text{ Entonces, } f \text{ crece en } (0,\, \infty).$$

Puntos de inflexión. Máximos y Mínimos. La segunda derivada de f es :

$$f''(x)=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}.$$

Al igualar a cero la segunda derivada, se obtienen puntos de inflexión :

$$\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}=0;\ 4-12x^2=0;\ \ x=\frac{\sqrt{3}}{3}\ ,\ x=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Luego, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ f(\frac{\sqrt{3}}{3})\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{1}{2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f(\frac{\sqrt{3}}{3})\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ -\frac{1}{2}\right)$ son puntos de inflexión.

Por otra parte, $f''(0)=\frac{4-12(0)^2}{((0)^2+1)^3}=4>0$. Esto significa que $(0, f(0))=(0,\ -1)$ es Mínimo Relativo.

Concavidades.

$f''(-1)=-1<0$, hay concavidad negativa en $(-\infty,\ -\frac{\sqrt{3}}{3})$.

$f''(0)=4>0$, hay concavidad positiva en $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3})$.

$f''(1)=-1<0$, hay concavidad negativa en $(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$.

PROBLEMA 4.5

Trazar la gráfica de la función $y=\frac{x^2+1}{x^2-1}$.

SOLUCIÓN

Intersecciones. Si $x=0,\ y=-1$. Entonces, $(0,\ -1)$ es punto de corte con el eje $\boldsymbol{y}$.

Si $y=0,\ \ x^2+1=0$. No existe valor real que cumpla $x^2+1=0$, luego la gráfica no corta el eje $\boldsymbol{x}$.

Dominio de definición. La función se define para todo número real que cumpla $x^2-1\neq 0$; es decir, $x\neq\ \pm\ -1$.

Asíntotas

Asíntotas verticales: $x=1$ y $x=-1$.

Asíntotas horizontales : $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-1}=1$. Luego, $y=1$ es asíntota horizontal.

Además :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty;\ \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty.$$
$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+1}{x-1}=+\infty;\ \lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+1}{x-1}=-\infty.$$

Puntos críticos. La primera derivada de la función es :

$$f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtienen puntos críticos :

$$\frac{-4x}{(x^2-1)^2}=0;\text{ entonces, }\boldsymbol{x}=0\text{ es punto crítico.}$$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Se toman como puntos de prueba

$x = -2,\ x = -\frac{1}{2},\ x = 2.$ La evaluación de la primera derivada en estos puntos da como resultado :

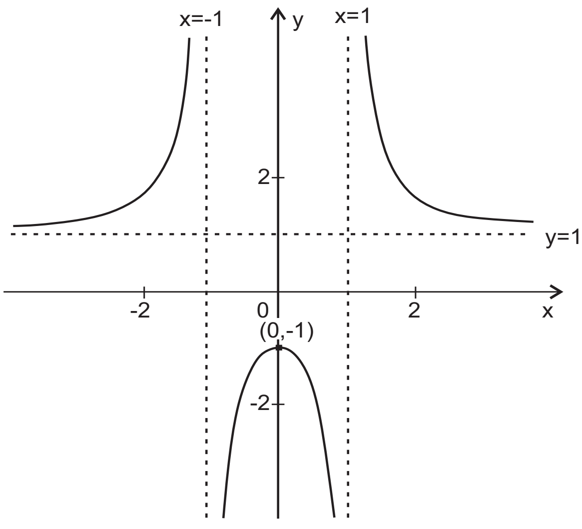


Fig. 4.5

$$f'(-2) = \frac{-4(-2)}{\left[(-2)^2 - 1\right]^2} = \frac{8}{9} > 0.$$ Por tanto, f crece en $(-\infty, -1)$.

$$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-4(-\frac{1}{2})}{\left[(-\frac{1}{2})^2 - 1\right]} = \frac{32}{9} > 0.$$ Luego, f crece en $(-1, 0)$.

$$f'(\frac{1}{2}) = \frac{-4(\frac{1}{2})}{\left[(\frac{1}{2})^2 - 1\right]^2} = -\frac{32}{9} < 0.$$ Entonces, f decrece en $(0,\ 1)$.

$$f'(2) = \frac{-4(2)}{\left[(2)^2 - 1\right]^2} = -\frac{8}{9} < 0.$$ Por tanto, f decrece en $(1, \infty)$.

Puntos de inflexión. Máximos y Mínimos. La segunda derivada de f es :

$$f''(x) = \frac{(x^2+1)^3}{12x^2 - 4}.$$

Al igualar a cero la segunda derivada, se obtienen puntos de inflexión :

$$\frac{(x^2+1)^3}{12x^2 - 4} = 0;$$

Como $x^2 + 1 = 0$, no tiene solución en los números reales; entonces, se concluye que no existen puntos de inflexión (Figura 4.5).

Por otra parte, $f''(0) = \dfrac{(0^2+1)^3}{12(0)^2 - 4} = -\dfrac{1}{4} < 0.$

Por tanto, $(0, f(0)) = (0, -1)$ es un Máximo Relativo.

Concavidades. Se analiza el signo de la segunda derivada así:

$f''(-2)=\dfrac{125}{44}>0$, hay concavidad positiva en $(-\infty,\,-1)$.

$f''(0)=-\dfrac{1}{4}<0$, se presenta concavidad negativa en $(-1,\,1)$

$f''(-2)=\dfrac{125}{44}>0$, hay concavidad positiva en $(1,\,+\infty)$.

PROBLEMA 4.6

Trazar la gráfica de la función $y=\mathrm{e}^{-x^2}$

SOLUCIÓN

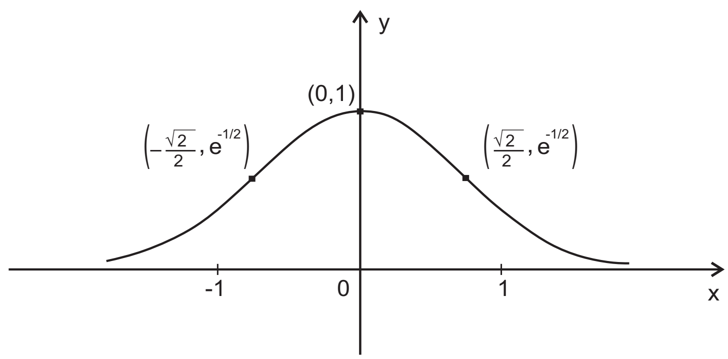


Fig. 4.6

<u>Intersecciones</u>. Si $x=0,\ y=1$. Entonces $(0,1)$ es punto de corte con el eje $\boldsymbol{y}$.

Si $y=0,\ \mathrm{e}^{-x^2}=0$. No existe valor real $\boldsymbol{x}$ que satisfaga $\mathrm{e}^{-x^2}=0$. Luego, la gráfica no corta el eje $\boldsymbol{x}$.

<u>Dominio de definición</u>. La función se define para todo número real.

<u>Asíntotas</u>.

Verticales: No tiene.

Horizontales: $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{-x^2}=\frac{1}{\displaystyle\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x^2}}=0$. Por tanto, $y=0$, (el eje $\boldsymbol{x}$), es asíntota horizontal.

<u>Puntos críticos</u>. La primera derivada de la función es :

$$f'(x)=-2x\mathrm{e}^{-x^2}.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtienen puntos críticos :

$$-2x\mathrm{e}^{-x^2}=0;\ \text{entonces,}\ \boldsymbol{x}=0\ \text{es punto crítico.}$$

<u>Intervalos de crecimiento y decrecimiento</u>. Se toman como puntos de prueba

$x=-1,\ x=1.$ La evaluación de la primera derivada en estos puntos da como resultado :

$$f'(-1)=-2(-1)\mathrm{e}^{-(-1)^2}=\frac{2}{\mathrm{e}}>0.\ \text{Por tanto, } f \text{ crece en } (-\infty,0).$$

$$f'(1) = -2(1)e^{-(1)^2} = -\frac{2}{e} < 0.$$ Luego, f decrece en $(0, \infty)$.

Puntos de inflexión. Máximos y Mínimos. La segunda derivada de f es :

$$f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

Al igualar a cero la segunda derivada, se obtienen puntos de inflexión :

$$(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0;$$

$$x^2 = \frac{1}{2}; \qquad x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Así, los puntos de inflexión son: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ y

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right).$$

Por otra parte, $f''(0) = (4(0)^2 - 2)e^{-0^2} = -2 < 0$.

Por tanto, $(0, f(0)) = (0, 1)$ es un Máximo Relativo.

Concavidades.

$f''(-1) = \frac{2}{e} > 0$, hay concavidad positiva en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$f''(0) = -2 < 0$, se presenta concavidad negativa en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

$f''(1) = \frac{2}{e} > 0$, hay concavidad positiva en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

PROBLEMA 4.7

Trazar la gráfica de la función $f(x) = ln(x^2 - x - 2)$.

SOLUCIÓN

Dominio. La función logarímitica existe siempre que su argumento sea mayor que cero; esto es :

$$x^2 - x - 2 > 0$$

Al resolver la inecuación, se obtiene que el dominio es: $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$.

Intersecciones con los ejes. Puesto que $\boldsymbol{x}$ no puede tomar valores en $(-1, 2)$, entonces la curva no intercepta al eje $\boldsymbol{y}$.

Si $f(x) = 0$, entonces $ln(x^2 - x - 2) = 0$; $x^2 - x - 2 = 1$; $\quad x^2 - x - 3 = 0$.

Al resolver la cuadrática, se obtiene que $x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$.

Asíntotas. No hay asíntotas horizontales.

Como el dominio de definición excluye al intervalo $\left[-1,2\right]$, entonces existen dos asíntotas verticales : $x=-1$ y $x=2$.

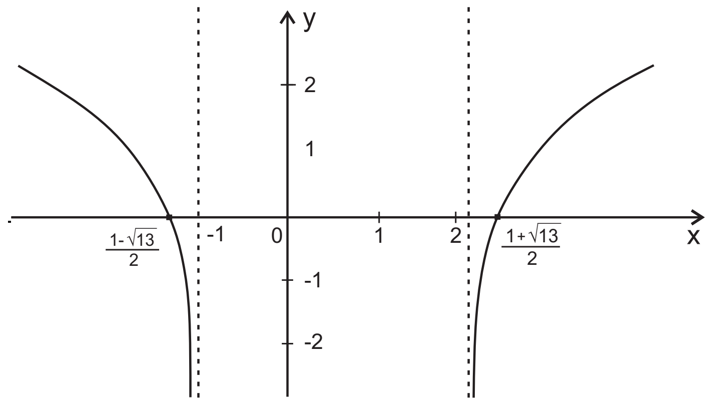


Fig. 4.7

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x)=\frac{2x-1}{x^2-x-2}.$$

Al igualar a cero, para obtener puntos críticos:

$$\frac{2x-1}{x^2-x-2}=0;\;\; 2x-1=0;\;\; x=\frac{1}{2}.$$

Pero $\frac{1}{2}\in\left[-1,2\right]$. Por tanto, no existen puntos críticos.

Se toman $x=-2,\, x=3$ como puntos de prueba para determinar el comportamiento de la curva dentro del dominio de definición :

$f'(-2)=\frac{2(-2)-1}{(-2)^2-(-2)-2}=-\frac{5}{4}<0.$ En $(-\infty,\;-1)$ la curva decrece.

$f'(3)=\frac{2(3)-1}{(3)^2-(3)-2}=\frac{5}{4}>0.$ En $(-2,\infty)$ la curva crece.

Puntos de inflexión. Máximos y Mínimos.

$$f''(x)=-\frac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2}.$$

Al igualar a cero la segunda derivada, se obtienen puntos de inflexión:

$$\frac{2x^2-2x+5}{(x^2-x-2)^2}=0;\;\; 2x^2-2x+5=0.$$

Esta ecuación cuadrática no tiene raíces reales. Por tanto, la curva carece de puntos de inflexión.

Concavidades.

$f''(-3)=-\frac{29}{100}<0$, hay concavidad negativa en $(-\infty,\;-1)$.

$f''(3) = -\dfrac{17}{16} < 0$, hay concavidad negativa en $(2, +\infty)$.

PROBLEMA 4.8

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

SOLUCIÓN

Intersecciones. Si $x = 0,\ y = 0$.
Si $y = 0,\ x = 0$.

Entonces, $(0,0)$ es el punto de intersección con los ejes.

Dominio de definición.

El denominador nunca se anula. Por tanto, el campo de definición está constituído por los reales.

Asíntotas

No hay asíntotas verticales.

Por otra parte : $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0.$

Luego, $\boldsymbol{y} = 0$; es decir, el eje $\boldsymbol{x}$ es asíntota horizontal.

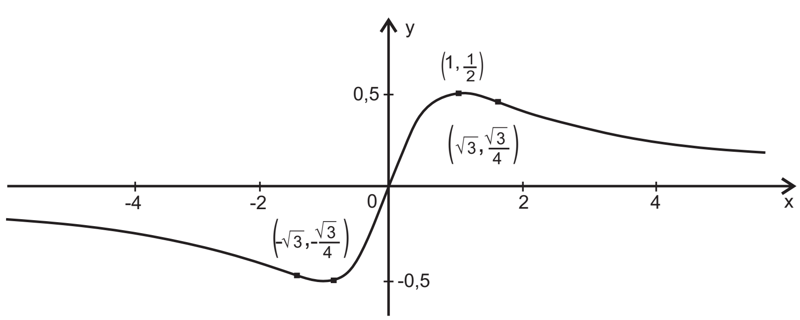


Fig. 4.8

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y Mínimos.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Al Igualar a cero, se obtienen puntos críticos :

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0;\ \ 1 - x^2 = 0;$$

$x = \pm 1$ son puntos críticos.

Se toman $x = -2,\ x = -\dfrac{1}{2},\ x = \dfrac{1}{2},\ \ x = 2$ como puntos de prueba para determinar el comportamiento de la curva.

$f'(-2) < 0.$ En $(-\infty, -1)$ la curva decrece.

$f'(-\frac{1}{2}) > 0.$ En $(-\frac{1}{2}, 0)$ la curva crece.

$f'(\frac{1}{2}) > 0.$ En $(0, \frac{1}{2})$ la curva crece.

$f'(2) < 0.$ En $(1, +\infty)$ la curva decrece

En consecuencia, en $(-1, f(-1)) = (-1, -\frac{1}{2})$ hay un Mínimo Relativo y en el punto $(1, f(1)) = (1, \frac{1}{2})$ hay un Máximo Relativo. (Criterio de la primera derivada).

Puntos de inflexión

$$f''(x) = \frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

$$x = 0, \ x = \pm\sqrt{3}.$$

Al igualar a cero la segunda derivada, se obtienen puntos de inflexión :

$$(0, f(0)) = (0, 0).$$

$$(\sqrt{3}, f(\sqrt{3})) = (\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

$$(-\sqrt{3}, f(-\sqrt{3})) = (-\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{4}).$$

Concavidades.

$f''(-2) = -\frac{4}{125} < 0$, hay concavidad negativa en $(-\infty, -\sqrt{3})$.

$f''(-1) = \frac{1}{2} > 0$, hay concavidad positiva en $(-\sqrt{3}, 0)$.

$f''(1) = -\frac{1}{2} < 0$, hay concavidad negativa en $(0, \sqrt{3})$.

$f''(2) = \frac{4}{125} > 0$, hay concavidad positiva en $(\sqrt{3}, +\infty)$.

PROBLEMA 4.9

Trazar la gráfica de la función $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2.$

SOLUCIÓN

Intersecciones. Si $x = 0, \ y = -2.$

Si $y = 0, \ 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2 = 0$

La única raíz real es aproximadamente igual a $0,193.$

Los puntos de corte con los ejes $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ son, respectivamente, $(0, -2)$ y $(0,193; 0)$.

Dominio de definición. Los números reales.

<u>Asíntotas</u> : No tiene asíntotas horizontales, ni verticales ni oblicuas, por tratarse de una función polinómica.

<u>Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y Mínimos.</u>

$$\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 18x + 12$$

Los puntos críticos se obtienen al igualar la primera derivada a cero :

$$6x^2 - 18x + 12 = 0.$$

$(x-2)(x-1) = 0; \quad x = 2, \quad x = 1$ son puntos críticos.

Se toman $x = 0,\ x = 3/2,\ x = 3$ como puntos de prueba para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$\frac{dy}{dx}(0) = 12 > 0$. En $(-\infty,\ 1)$ la función es creciente.

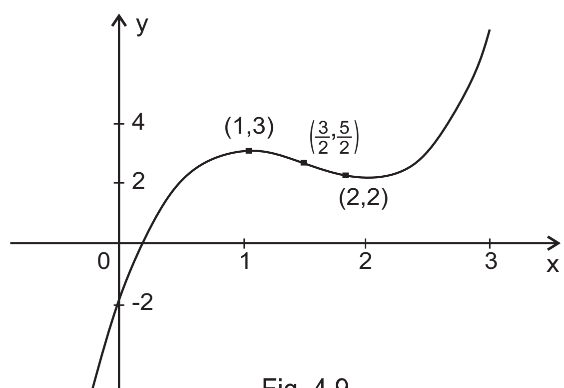


Fig. 4.9

$\frac{dy}{dx}\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} < 0.$ En $(1,2)$ la función es decreciente.

$\frac{dy}{dx}(3) = 12 > 0$. En $(2,\ \infty)$ la función es creciente.

Por el criterio de la primera derivada, en $(1, f(1)) = (1,3)$ hay un Máximo Relativo y en $(2, f(2)) = (2,2)$ hay un Mínimo Relativo.

<u>Concavidad y puntos de inflexión.</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 18;$$

$\frac{d^2y}{dx}(1) = -6 < 0,$ hay concavidad negativa (Maximo);

$\frac{d^2y}{dx}(4) = 6 > 0,$ hay concavidad positiva (Mínimo);

Al igualar la segunda derivada a cero y resolver para x, se obtienen puntos de inflexión:

$$12x - 18 = 0; \quad x = \frac{3}{2}$$

,Por tanto, $(\frac{3}{2},\ f(\frac{3}{2})) = (\frac{3}{2},\ \frac{5}{2})$ es punto de inflexión.

PROBLEMA 4.10

Trazar la gráfica de la función $y = \dfrac{4x+3}{3x-2}$.

SOLUCIÓN

Intersecciones. Si $x = 0,\ y = -\dfrac{3}{2}$. Si $y = 0,\ x = -\dfrac{3}{4}$.

Luego, las intersecciones con los ejes son $(0, -\dfrac{3}{2})$ y $(-\dfrac{3}{4}, 0)$.

Dominio de definición. Todos los reales, a excepción de $x = \dfrac{2}{3}$.

Asíntotas: La gráfica tiene una asíntota vertical en $x = \dfrac{2}{3}$.
Además:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{3x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x+3}{3x-2} = \frac{4}{3}.$$

Luego, $y = \dfrac{4}{3}$ es asíntota horizontal.

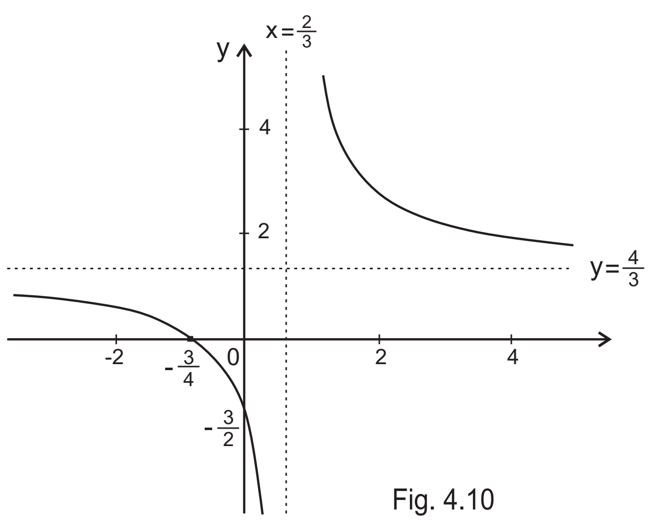


Fig. 4.10

Intervalos de crecimiento y decrecimiento

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-17}{(3x-2)^2}$$

Al igualar a cero esta derivada, se obtiene una ecuación algebraica sin solución. En consecuencia, no existen puntos críticos.

Al tomar $x = -1$ y $x = 1$ como puntos de prueba para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento, se tiene:

$\frac{dy}{dx}(-1) = -\frac{17}{25} < 0.$ En el intervalo $(-\infty,\ 2/3)$ la función es decreciente.

$\frac{dy}{dx}(1) = -\frac{17}{25} < 0.$ En el intervalo $(2/3,\ \infty)$ la función es decreciente.

Además, debe notarse que:

$$\lim_{x \to (\frac{2}{3})^-} \frac{4x+3}{3x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to (\frac{2}{3})^+} \frac{4x+3}{3x-2} = \infty.$$

La función no tiene ni máximo ni mínimo.(Figura 4.10).

<u>Puntos de inflexión. Máximos y Mínimos</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{102}{(3x-2)^3}.$$

Al igualar a cero, se encuentra una ecuación sin solución. Se concluye, por tanto, que no existen puntos de inflexión.

No obstante : $\frac{d^2y}{dx^2}(-1) < 0$, hay concavidad negativa.

$\frac{d^2y}{dx}(1) > 0$, hay concavidad positiva.

PROBLEMA 4.11

Trazar la gráfica de la función $y = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}$.

SOLUCIÓN

<u>Intersecciones</u>. Si $x = 0,\ y = 0$. Si $y = 0,\ x = 0$.

El único punto de corte de la curva con los ejes es $(0, 0)$.

<u>Dominio de definición</u> : Los números reales.

<u>Asíntotas</u> : No existen asíntotas verticales.

Por otro lado :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}\right) = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{2x}\right) = 0.$$

Luego, $\boldsymbol{y} = 0$; o sea que el eje $\boldsymbol{x}$ es asíntota horizontal izquierda. (Figura 4.11).

<u>Intervalos de crecimiento y decrecimiento</u>.

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^{2x}.$$

Al igualar a cero esta derivada, se obtienen puntos críticos :

$$e^x - 2e^{2x} = 0; \;\; e^x(1 - 2e^x) = 0;$$

$$e^x = \frac{1}{2}; \;\; x = ln(\frac{1}{2}); \;\; x = -ln2.$$

Es decir, $x = -ln\,2$ es punto crítico.

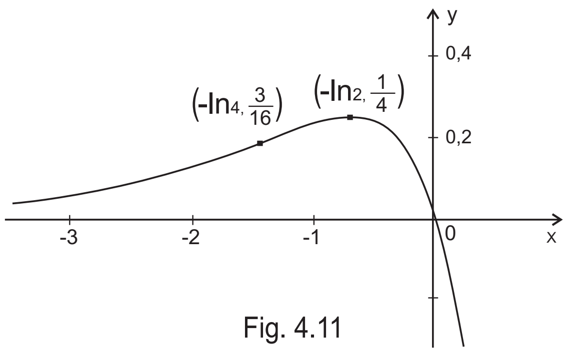


Fig. 4.11

Se escogen arbitrariamente dos puntos a lado y lado de $\boldsymbol{x} = -ln\,2$ para determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento: $x = -2, \;\; x = 1.$

$\frac{dy}{dx}(-2) = e^{-2} - 2e^{-4} > 0.$ La función es creciente en $(-\infty, -ln\,2)$;

$\frac{dy}{dx}(1) \;\; = e - 2e^{-2} < \; 0.$ La función es decreciente en $(-ln\,2, \infty)$.

Por tanto, $(-ln\,2, \; f(-ln\,2)) = (-ln\,2, \; \frac{1}{4})$ es Máximo Relativo. (Criterio de la primera derivada).

<u>Concavidad y puntos de inflexión</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^x - 4e^{2x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(-ln\,2) < 0 \text{ (concavidad negativa).}$$

Además : $e^x - 4e^{2x} = 0$; es decir, $x = -ln\,4.$

Entonces, $(-ln\,4, \; f(-ln\,4)) = (-ln\,4, \; \frac{3}{16})$ es punto de inflexión.

$$\frac{d^2y}{dx^2}(-2) = \frac{e^2 - 4}{e^4} > 0 \text{ (concavidad positiva).}$$

En consecuencia, hay concavidad positiva en $(-\infty, -\,ln\,4)$ y concavidad negativa en el intervalo $(-\,ln\,4, +\infty,)$.

PROBLEMA 4.12

Trazar la gráfica de la función $f(x) = x^2e^x$.

SOLUCIÓN

Dominio de definición. Los números reales.

Intersecciones con los ejes. Si $x = 0$, $y = 0$. El único punto de corte es $(0,0)$.

Asíntotas. No existen asíntotas verticales. Además,

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\mathrm{e}^x = \infty \;\text{ y }\; \lim_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0.$$

Por tanto, $y = 0$ es asíntota horizontal izquierda.

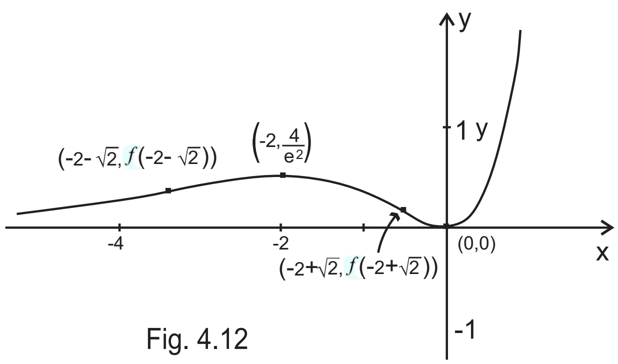


Fig. 4.12

Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = (x+2)\,x\mathrm{e}^x.$$

Al igualar a cero esta derivada, se obtienen puntos críticos :

$$(x+2)\,x\mathrm{e}^x = 0;\; x = 0,\; x = -2.$$

Se toman como puntos de prueba a $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$.

$$f'(-3) = (-3+2)(-3)\,\mathrm{e}^{-3} = \frac{3}{\mathrm{e}^3} > 0. \text{ La función crece en } (-\infty,\, -2).$$

$$f'(-1) = (-1+2)(-1)\,\mathrm{e}^{-1} = -\frac{1}{\mathrm{e}} < 0. \text{ La función decrece en } (-2,\, 0).$$

$$f'(1) = (1+2)(1)\,\mathrm{e}^{-3} = \frac{3}{\mathrm{e}^3} > 0. \text{ La función crece en } (0,\, +\infty).$$

Por el criterio de la primera derivada, $(-2, f(-2)) = (-2,\, 4/e^2)$ es un Máximo Relativo y $(0, f(0)) = (0,0)$ es un Mínimo Relativo.

Puntos de inflexión.

$$f''(x) = (x^2+4x+2)\mathrm{e}^x.$$

Al igualar a cero la segunda derivada, se obtienen puntos de inflexión :

$$(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x = 0;\; x = -2 \pm \sqrt{2}\,.$$

De esta manera, los puntos de inflexión son :

$$(-2-\sqrt{2},\; f(-2-\sqrt{2})) \approx (-3{,}4142;\; 0{,}3835);$$

$$(-2+\sqrt{2},\ f(-2+\sqrt{2})) \approx (-0,5657;\ 0,191).$$

Concavidades. Para determinar las concavidades de la curva, se analiza el signo de la segunda derivada, así :

$f''(-5) = \dfrac{7}{e^5} > 0.$ Hay concavidad positiva en $(-\infty,\ -2-\sqrt{2})$.

$f''(-2) = -\dfrac{2}{e^2} < 0.$ Hay concavidad negativa en $(-2-\sqrt{2},\ -2+\sqrt{2})$.

$f''(-2) = 14\,e^2 > 0.$ Hay concavidad positiva en $(-2+\sqrt{2},\ +\infty)$.

PROBLEMA 4.13

Trazar la gráfica de la función $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

SOLUCIÓN

Dominio de definición. Los números reales, excluyendo el cero: $\mathbb{R}-\{0\}$.

Intersecciones con los ejes. No hay intersección con el eje $\boldsymbol{x}$.

Si $f(x)=0$, entonces $x+\dfrac{1}{x}=0;\ \dfrac{x^2+1}{x}=\ ;\ x^2+1=0$ no tiene solución en los números reales. Por tanto, la curva no tiene intersección con el eje $\boldsymbol{y}$.

Asíntotas. No tiene asíntotas horizontales.

El eje $\boldsymbol{y}$, es decir $x=0$, es asíntota vertical.

Ahora, $$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x\to\\ x\to\infty}}\frac{x+\frac{1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2} = 1 = m.$$

$$\lim_{x\to\infty}\big[f(x)-mx\big] = \lim_{x\to\infty}\big[x+\frac{1}{x}-x\big] = \lim_{x\to\infty}\big[\frac{1}{x}\big] = 0 = b.$$

En consecuencia, la recta $y=mx+b$; es decir, $y=x$ es asíntota oblicua.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y Mínimos.

$$f'(x) = 1-\frac{1}{x^2}.$$

Al igualar a cero esta derivada, se obtienen puntos críticos :

$$1-\frac{1}{x^2}=0;\ \ x^2-1=0;\ \ x=\pm 1$$

Se toman como puntos de prueba los puntos $x=-2;\ x=-\dfrac{1}{2};\ x=\dfrac{1}{2};\ x=2$ y, posteriormente, se analiza el signo de la primera derivada en esos puntos :

$f'(-2) = 1-\dfrac{1}{(-2)^2} = \dfrac{3}{4} > 0.$ La función es creciente en $(-\infty,\ -1)$.

$f'(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{(-\frac{1}{2})^2} = -3 < 0.$ La función es decreciente en $(-1, 0)$.

$f'(\frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} = -3 < 0.$ La función es decreciente en $(-1, 0)$.

$f'(2) = 1 - \frac{1}{(2)^2} = \frac{3}{4} > 0.$ La función es creciente en $(1, +\infty)$.

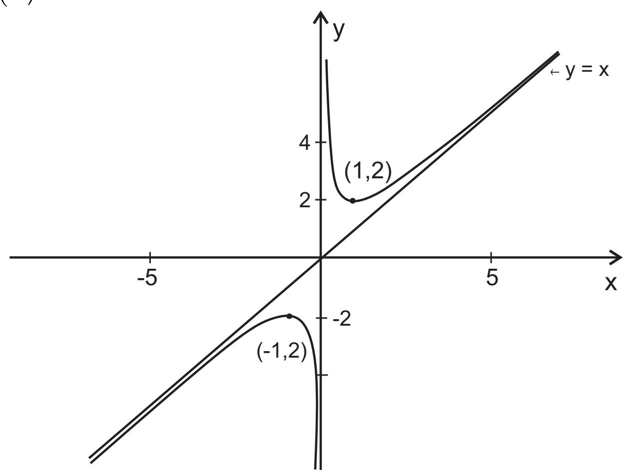


Fig. 4.13

Por el criterio de la primera derivada, $(-1, f(-1)) = (-1, -2)$ es Máximo Relativo y $(1, f(1)) = (1, 2)$ es Mínimo Relativo.

Puntos de inflexión.

$$f''(x) = \frac{2}{x^3}.$$

Al igualar a cero la segunda derivada, se encuentra que no existen puntos de inflexión.

Concavidades.

$f''(-1) = -2 < 0.$ Hay concavidad negativa en $(-\infty, 0)$.

$f''(1) = 2 > 0.$ Hay concavidad positiva en $(0, +\infty,)$.

PROBLEMA 4.14

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{1 - x^2}$.

SOLUCIÓN

Intersecciones. Si $x = 0$, $y = 0$; y si $y = 0$, $x = 0$.

El punto (0 , 0) es el único punto de corte con los ejes.

Dominio de definición. La función está definida para cualquier valor real, excepto $x = \pm 1$

<u>Asíntotas</u>. La gráfica tiene asíntotas verticales $x = -1$ y $x = 1$.

Además : $$\lim_{x\to -1^-}\left[\frac{x}{1-x^2}\right] = +\infty \;\text{ y }\; \lim_{x\to -1^+}\left[\frac{x}{1-x^2}\right] = -\infty;$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left[\frac{x}{1-x^2}\right] = \infty \;\text{ y }\; \lim_{x\to 1}\left[\frac{x}{1-x^2}\right] = -\infty.$$

Por otra parte : $$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x}{1-x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{1-x^2}\right] = 0 :$$

De manera que $y = 0$ (el eje $\boldsymbol{x}$) es asíntota horizontal. (Figura 4.14)

<u>Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y Mínimos</u>

$$f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}.$$

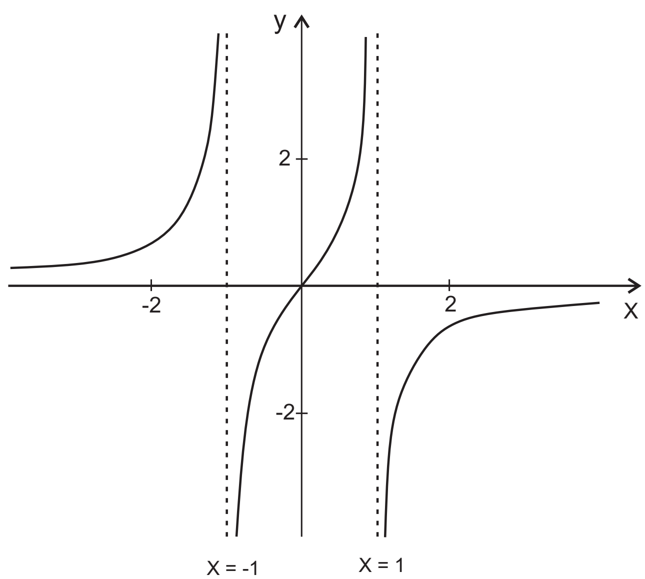


Fig. 4.14

Al igualar a cero esta derivada se obtienen puntos críticos :

$$\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} = 0.$$

No existe valor real que satisfaga esta ecuación. Por tanto, no existen puntos críticos.

Para determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento se toman puntos de prueba: $x = -2$; $x = -\frac{1}{2}$; $x = 2$ que pertenecen a los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$, respectivamente.

$$f'(-2) = \frac{5}{9} > 0. \text{ En } (-\infty, -1) \text{ la función es creciente.}$$

$$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{20}{9} > 0.$$ En $(-1,\ 1)$ la función es creciente.

$$f'(2) = \frac{5}{9} > 0.$$ En $(1,\ +\infty)$ la función es creciente.

Luego, la función es creciente en los intervalos donde está definida y no existen Máximos ni Mínimos.

Concavidad y puntos de inflexión

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3} = 0\,;\ \text{de donde}\ x = 0.$$

Entonces, $(0,\ f(0)) = (0,0)$ es punto de inflexión.
Además:

$f''(x) > 0$, para $\boldsymbol{x}$ en $(-\infty,\ -1)$ (concavidad positiva).

$f''(x) > 0$, para $\boldsymbol{x}$ en $(0,1)$ (concavidad positiva).

$f''(x) < 0$, para $\boldsymbol{x}$ en $(-1,0)$ (concavidad negativa).

$f''(x) < 0$ para $\boldsymbol{x}$ en $(1,\ \infty)$ (concavidad negativa).

PROBLEMA 4.15

Dibujar la gráfica de la función $y = \dfrac{-x^2-2x+3}{x^2}$.

SOLUCIÓN

Intersecciones. Si $y = 0,\ -x^2-2x+3 = 0$.

O bien : $x^2+2x-3 = 0$. Entonces, $x = 1,\ x = -3$.

La variable $\boldsymbol{x}$ no puede tomar el valor cero. Luego, las intersecciones con el eje $\boldsymbol{x}$ son $(-3,0)$ y $(1,0)$.

Dominio de definición. La función no está definida $\boldsymbol{x} = 0$.

Asíntotas. $x = 0$ es asíntota vertical. Por otra parte :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-2x+3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-2x+3}{x^2} = -1.$$

Luego, $\boldsymbol{y} = -1$ es asíntota horizontal.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x-6}{x^3}$$

Al igualar a cero la derivada y resolver para x, se obtiene $\boldsymbol{x} = 3$.

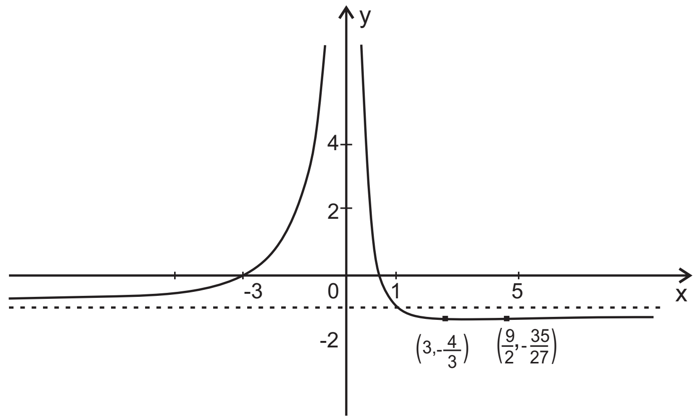


Fig. 4.15

Se toman los puntos de prueba $x = -4$; $x = 2$; $x = 5$ que pertenecen a los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0, 3)$ y $(3, +\infty)$ respectivamente.

$\frac{dy}{dx}(-4) > 0$. En el intervalo $(-\infty, 0)$ la función crece .

$\frac{dy}{dx}(2) < 0$. En el intervalo $(0\,,\,3)$ la función decrece.

$\frac{dy}{dx}(5) > 0$. En el intervalo $(3, +\infty)$ la función crece.

En consecuencia, al aplicar el criterio de la primera derivada, se concluye que el punto $(3,\ f(3)) = (3,\ -\frac{4}{3})$ es Mínimo Relativo.

<u>Concavidad y puntos de inflexión</u>.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4x + 18}{x^4}.$$

Al Igualar a cero esta segunda derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtiene:

$$-4x + 18 = 0\,;\ x = \frac{9}{2}.$$

Luego, $(\frac{9}{2}, y(\frac{9}{2})) = (\frac{9}{2},\ -\frac{35}{27})$ es punto de inflexión.

Además: $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ para x en $(-\infty, 0)$ (concavidad positiva).

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ para x en $(0,\ \frac{9}{2})$ (concavidad positiva).

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ para x en $(\frac{9}{2}, \infty)$ (concavidad negativa).

PROBLEMA 4.16

Trazar la gráfica de la función $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$.

SOLUCIÓN

Intersecciones. Si $x=0,\ y=1$. Entonces $(1,0)$ es punto de corte de la gráfica con el eje $\boldsymbol{x}$. Si $y=0,\ x^2-2x+1=0;\ (x-1)^2=0;\ x=1.$

Dominio de definición. La función está definida para todos los puntos $\boldsymbol{x} \neq -1$.

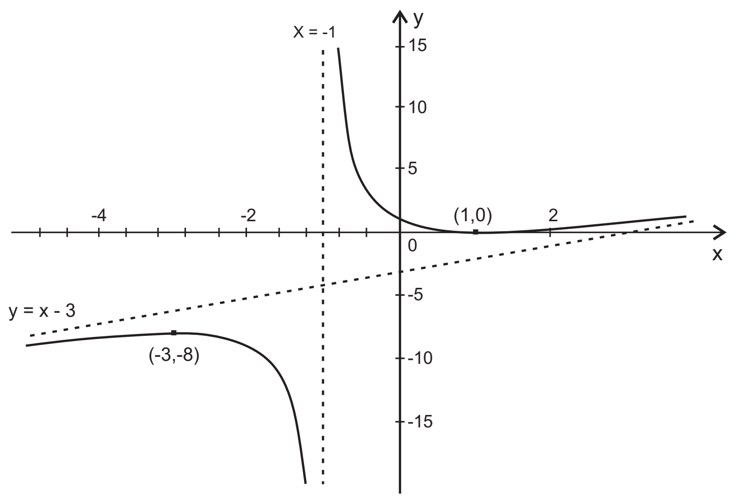


Fig. 4.16

Asíntotas. $x=-1$ es asíntota vertical.

Además:
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-2x+1}{x+1} = -\infty;$$
$$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2-2x+1}{x+1} = +\infty.$$

Como se trata de una función racional impropia, al realizar la división formal, se obtiene que :
$$\frac{x^2-2x+1}{x+1} = x-3+\frac{4}{x+1}.$$
Puesto que
$$\lim_{x\to\infty}\frac{4}{x+1}=0,$$
entonces, $y=x-3$ es asíntota oblicua. (Figura 4.16).

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.
$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-2x-3}{(x+1)^2}.$$
Al igualar a cero y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtiene:
$$x^2+2x-3=0; \qquad x=1,\ x=-3.$$
Se toman los puntos de prueba $x=-4,\ x=-2,\ x=0,\ x=2$, que pertenecen respectivamente a los intervalos $(-\infty,\ -3)$, $(-3,\ -1)$, $(-1,\ 1)$ y $(1,\ +\infty)$ para

determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$\frac{dy}{dx}(-4) > 0.\text{ En } (-\infty, -3) \text{ la función es creciente;}$$

$$\frac{dy}{dx}(-2) < 0.\text{ En } (-3, -1) \text{ la función es decreciente;}$$

$$\frac{dy}{dx}(0) < 0.\text{ En } (-1, 1) \text{ la función es decreciente;}$$

$$\frac{dy}{dx}(2) > 0.\text{ En } (1, \infty,) \text{ la función es creciente.}$$

Por lo tanto, $(-3,\ f(-3)) = (-3,\ -8)$ es Máximo Relativo.

y $(1,\ f(1)) = (1,\ 0)$ es Mínimo Relativo.

Puntos de inflexión y concavidad.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{8}{x(x+1)^3} = 0.$$

Puesto que no existe ningún valor real que satisfaga la ecuación anterior, se concluye que no existen puntos de inflexión.

Por otra parte,

$$\frac{d^2y}{dx^2}(-4) < 0.\text{ Se presenta concavidad negativa en } (-\infty,\ -1).$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}(2) > 0;\text{ es decir, hay concavidad positiva en } (-1,\ +\infty).$$

NOTA

Si la función no es racional, la determinación de la asíntota oblicua (si la tiene) no obedece a la técnica empleada en este ejemplo.

PROBLEMA 4.17

Trazar la gráfica de la función $y = x\mathrm{e}^{-x}$.

SOLUCIÓN

Intersecciones. Si $x = 0,\ y = 0$. Luego, $(0, 0)$ es el único punto de intersección con los ejes coordenados.

Dominio de definición. Los números reales.

Asíntotas. No tiene asíntotas verticales.

Por otra parte,

$$\lim_{x\to\infty} x\mathrm{e}^{-x} = \lim_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

Por tanto $\boldsymbol{y} = 0$ (eje $\boldsymbol{x}$) es asíntota horizontal.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{e}^{-x}(1-x).$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtiene:

$$\mathrm{e}^{-x}(1-x) = 0; \;\; x = 1.$$

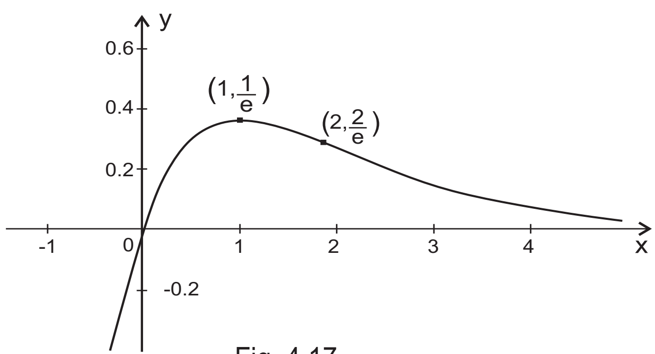


Fig. 4.17

Los puntos de prueba $x = -1$, $x = 3$, pertenecientes a los intervalos $(-\infty,\ 1)$ y $(1,\ +\infty)$ respectivamente, determinan el comportamiento de la función en dichos intervalos :

$$\frac{dy}{dx}(-1) = \frac{2}{\mathrm{e}} > 0. \text{ En } (-\infty, 1) \text{ la función es creciente.}$$

$$\frac{dy}{dx}(3) = -\frac{2}{\mathrm{e}^3} < 0. \text{ En } (1,\ +\infty) \text{ la función es decreciente.}$$

Por tanto, en el punto $(1,\ f(1)) = (1,\ \frac{1}{\mathrm{e}})$ existe un Máximo Relativo.

Puntos de inflexión y concavidad.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\mathrm{e}^{-x}(2-x).$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para x, se obtiene:

$$-\mathrm{e}^{-x}(2-x) = 0; \;\; x = 2.$$

Luego, $(2,\ f(2)) = (2,\ \frac{2}{e^2})$ es punto de inflexión.

Además : $\dfrac{d^2y}{dx^2}(0) = -2 < 0$: concavidad negativa en $(-\infty,\ 2)$.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}(3) = \dfrac{1}{e^3} > 0$: concavidad positiva en $(2,\ +\infty)$.

PROBLEMA 4.18

Trazar la gráfica de la función $y = \dfrac{2}{x} + 6x^2$.

SOLUCIÓN

Intersecciones. Si $y = 0,\ \dfrac{2}{x} + 6x^2 = 0$; es decir, $x = -\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3}$.

Por tanto, $\left(-\dfrac{\sqrt[3]{9}}{3},\, 0\right)$ es punto de intersección con el eje $\boldsymbol{x}$. No hay intersección con el eje $\boldsymbol{y}$.

Dominio de definición. $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntotas. El eje $\boldsymbol{y}$ $(x = 0)$ es asíntota vertical.

Además :

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2}{x} + 6x^2\right] = +\infty \text{ y } \lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2}{x} + 6x^2\right] = -\infty.$$

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2} + 12x.$$

Al igualar la derivada a cero y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtienen puntos críticos :

$$-2 + 12x^3 = 0;\quad x = \frac{\sqrt[3]{36}}{6}.$$

Se toman $x = -2 \in (-\infty, 0)$ y $2 \in (0, +\infty)$ para analizar el signo de la primera derivada y, de esta manera, determinar el comportamiento de la función en esos intervalos. (Figura 4.18) :

$$\frac{dy}{dx}(-2) = \frac{25}{5} < 0. \quad \text{En } (-\infty, 0) \text{ la función es decreciente.}$$

$$\frac{dy}{dx}(2) = \frac{25}{5} > 0. \quad \text{En } (0, +\infty) \text{ la función es creciente.}$$

En consecuencia, en $\left(\dfrac{\sqrt[3]{36}}{6},\, y\left(\dfrac{\sqrt[3]{36}}{6}\right)\right) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{36}}{6},\, 3\sqrt[3]{36}\right)$ hay un Máximo Relativo.

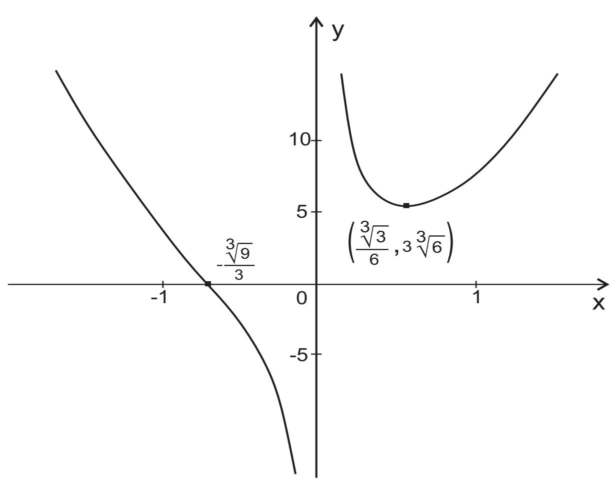


Fig. 4.18

Concavidades y Puntos de inflexión.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4}{x^3} + 12.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para x, se obtienen puntos críticos:

$$\frac{4}{x^3} + 12 = 0; \quad x = \frac{\sqrt[3]{9}}{3}$$

Por tanto $\left(-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}, y\left(-\frac{\sqrt[3]{3}}{3}\right)\right) = \left(-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}, 0\right)$ es punto de inflexión.

Por otro lado : $\frac{d^2y}{dx^2}(-2) > 0.$ Hay concavidad positiva en $(-\infty, \frac{\sqrt[3]{9}}{3})$.

$\frac{d^2y}{dx^2}(-\frac{1}{2}) < 0.$ Hay concavidad negativa en $(-\frac{\sqrt[3]{9}}{3}, 0)$.

$\frac{d^2y}{dx^2}(2) > 0.$ Hay concavidad positiva en $(0, +\infty)$.

PROBLEMA 4.19

Trazar la gráfica de la función $y = \dfrac{x^2+1}{x^2-4x+3}$.

SOLUCIÓN

Intersecciones. Si $x = 0$, $y = \frac{1}{3}$. Entonces, $(0, \frac{1}{3})$ es punto de corte con el eje $\boldsymbol{y}$.

Si $y = 0$,

$$\frac{x^2+1}{x^2-4x+3} = 0; \ x^2+1 = 0.$$

Esta última ecuación no tiene solución en los reales. Entonces, la curva no tiene intersección con el eje $\boldsymbol{y}$.

Dominio de definición. El denominador $x^2 - 4x + 3 = (x-3)(x-1)$ se anula para $x = 1$ y $x = 3$. Por tanto, el dominio de definición es $\mathbb{R} - \{1, 3\}$.

Asíntotas. $x = 1$, $x = 3$ son asíntotas verticales.

Por otra parte :

$$\lim_{x \to 1^-}\left[\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}\right] = +\infty \ ; \ \lim_{x \to 1^+}\left[\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}\right] = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 3^-}\left[\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}\right] = -\infty \ ; \ \lim_{x \to 3^+}\left[\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}\right] = +\infty.$$

Además : $\displaystyle\lim_{x \to \infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}\right] = \lim_{x \to -\infty}\left[\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}\right] = 1.$

De esta manera, $y = 1$ es asíntota horizontal.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$y' = \frac{-4(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 4x + 3)^2}$$

Al resolver para x la ecuación algebraica proveniente de igualar a cero la anterior derivada, se llega a :

$$\frac{-4(x^2 - x + 1)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = 0;\ x^2 - x - 1 = 0;$$

Es decir, $x = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}\,) \approx 1,61$ y $x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}\,) \approx -0,618$.

Se toman los puntos de prueba $x = -1,\ x = 0,\ x = \frac{3}{2},\ x = \frac{5}{2},\ x = 4,$ pertenecientes a los intervalos $(\frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}),\ 1);\ \ (1, \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}));\ \ (\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}),$ y $(3,\ +\infty)$, respectivamente, para determinar el comportamiento de la función.

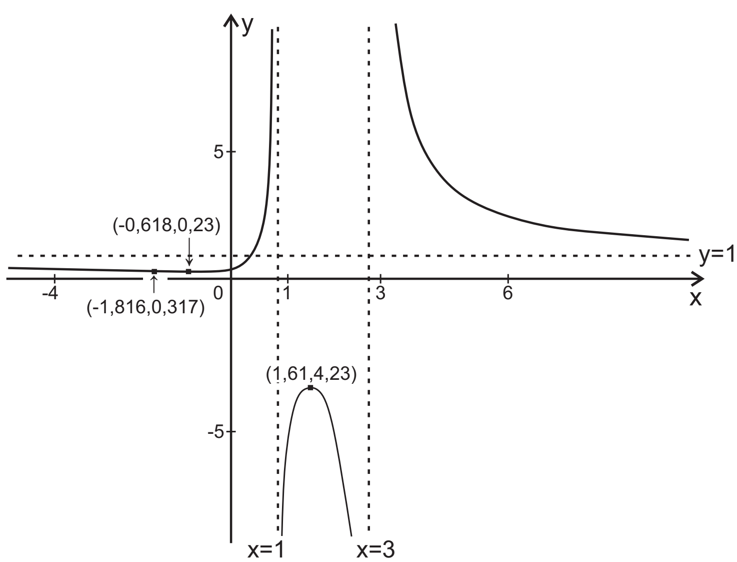


Fig. 4.19

$\frac{dy}{dx}(-1) > 0.$ En $(-\infty,\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}))$, la función decrece.

$\frac{dy}{dx}(0) > 0.$ En $(-\infty,\ \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}))$, la función decrece.

$\frac{dy}{dx}(3/2) > 0.$ En $(1,\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}))$, la función crece.

$\frac{dy}{dx}(5/2 < 0.$ En $(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}))$, la función decrece.

$\frac{dy}{dx}(4) < 0.$ En $(3,\ +\infty)$, la función decrece.

Por tanto, por el criterio de la primera derivada, se puede concluir que :

$(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5}),\ f(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})) \approx (-0,618;\ 0,23)$ es un Mínimo Relativo;

$(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\ f(\frac{1}{2}(1\sqrt{5})) \approx (1,61;\ -4,23)$ es un Máximo Relativo.

Concavidad y Puntos de inflexión.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{4(2x^3-3x^2-6x+11)}{(x^2-4x+3)^3}$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{4(2x^3-3x^2-6x+11)}{(x^2-4x+3)^3} = 0;$$

$$2x^3-3x^2-6x+11=0.$$

La única raíz real es aproximadamente $x = -1,816.$

En consecuencia, $(-1,816,\ f(-1,816)) = (-1,816;\ 0,317)$ es punto de inflexión.

Además: $\frac{d^2y}{dx^2}(-2)<0.$ Concavidad negativa en $(-\infty,\ -1,816)$.

$\frac{d^2y}{dx^2}(0)>0.$ Concavidad positiva en $(-1,816;\ 1)$.

$\frac{d^2y}{dx^2}(2)<0.$ Concavidad negativa en $(1,\ 3)$.

$\frac{d^2y}{dx^2}(4)>0.$ Concavidad positiva en $(3,\ +\infty)$.

PROBLEMA 4.20

Trazar la gráfica de la función $y = \frac{(2-x)^3}{3x^2}$.

SOLUCIÓN

Dominio de definición. $\mathbb{R} - \{0\}$.

Intersecciones.Si $y=0,\ x=2.$ Luego, $(2,0)$ es el punto de corte de la gráfica con el eje $\boldsymbol{x}$. Desde luego, no existe punto de corte con el eje $\boldsymbol{x}$.

Asíntotas. $x=0$ es asíntota vertical. No existen asíntotas horizontales.

Como se trata de una función racional impropia, al realizar la división formal se obtiene que:

$$\frac{(2-x)^3}{3x^2} = -\frac{1}{3}x+2-\frac{4}{x}+\frac{8}{3x^2}.$$

Ahora bien,

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{4}{x}+\frac{8}{3x^2}\right)=0,$$

entonces,

$$y=-\frac{1}{3}x+2 \text{ es asíntota oblicua. (Figura } 4.20).$$

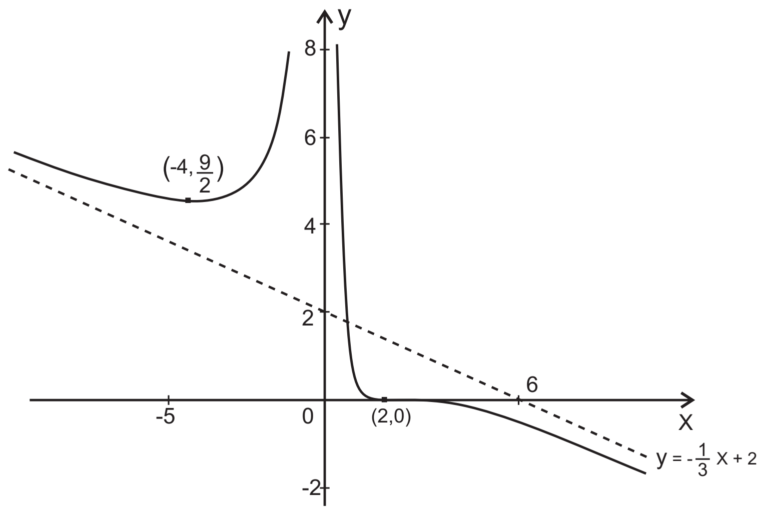


Fig. 4.20

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{3} + \frac{4}{x^2} - \frac{16}{3x^3}.$$

Al igualar a cero y resolver para $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{-x^3 + 12x - 16}{3x^3} = 0; \; x = 2 \text{ y } x = -4 \text{ .}$$

Se toman puntos de prueba $x = -5,\ x = -1,\ x = 1,\ x = 3,$ que pertenecen respectivamente a los intervalos $(-\infty, -4), (-4, 0); (0, 2)$ y $(2, +\infty)$ para determinar el comportamiento de la función :

$\frac{dy}{dx}(-5) < 0.$ En $(-\infty, -4)$ la función decrece.

$\frac{dy}{dx}(-1) > 0.$ En $(-4, 0)$ la función crece.

$\frac{dy}{dx}(1) < 0$. En $(0, 2)$ la función decrece.

$\frac{dy}{dx}(3) < 0.$ En $(2, +\infty)$ la función decrece.

En $(-4,\ f(-4)) = (-4, \frac{9}{2})$ hay Mínimo Relativo.

El criterio de la primera derivada no sirve para determinar qué tipo de punto crítico es $\boldsymbol{x} = 2.$

Concavidad y Puntos de inflexión.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{16 - 8x}{x^4}.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{16-8x}{x^4}=0; \;\; x=2$$

Por tanto $(2,\ f(2))=(2,0)$ es punto de inflexión.

Además : $\dfrac{d^2y}{dx^2}(-1)>0.$ Concavidad positiva en $(-\infty,\ 0)$.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}(1)>0.$ Concavidad positiva en $(0,2)$.

$\dfrac{d^2y}{dx^2}(4)<0.$ Concavidad negativa en $(2,\ \infty)$.

PROBLEMA 4.21

Trazar la gráfica de la función $y=\dfrac{x^3}{x^3+1}$.

SOLUCIÓN

Intersecciones. Si $y=0,\ x=0.$

Dominio de definición. $\mathbb{R}-\{-1\}$.

Asíntotas : $x=-1$ es asíntota vertical. Además :

$$\lim_{x\to-1^-}\left[\frac{x^3}{x^3+1}\right]=+\infty \text{ y } \lim_{x\to-1^+}\left[\frac{x^3}{x^3+1}\right]=-\infty\,.$$

Por otra parte,

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{x^3+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^3+1}\right]=1.$$

Por tanto, $y=1$ es asíntota horizontal.

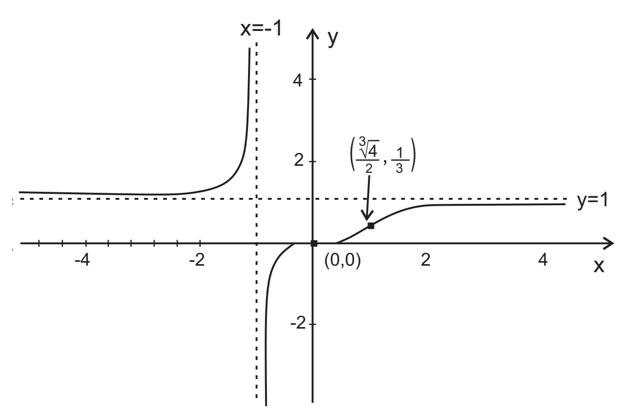


Fig. 4.21

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2}{(x^3+1)^2}.$$

Al igualar a cero y resolver para $\boldsymbol{x}$:

$$\frac{3x^2}{(x^3+1)^2} = 0.$$

Es decir $\boldsymbol{x} = 0$ es punto crítico.

Como, $\dfrac{dy}{dx} > 0$ para cualquier valor de $\boldsymbol{x}$ (excepto $x = -1$), se concluye que la función es creciente y no existe punto máximo ni mínimo.(Figura 4.21)

<u>Concavidad y Puntos de inflexión</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x(-2x^3+1)}{(x^3+1)^2}.$$

Al igualar a cero y resolver para $\boldsymbol{x}$:

$$x = 0 \text{ y } x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Luego, $(0, f(0)) = (0,0)$ es punto de inflexión y además,

$\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}, y\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}, \right)\right) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}, \dfrac{1}{3}\right)$ también es punto de inflexión.

Por otra parte : $\dfrac{d^2y}{dx^2}(-2) > 0.$ Concavidad positiva en $(-\infty, -1)$;

$\dfrac{d^2y}{dx^2}(-\dfrac{1}{2}) < 0.$ Concavidad negativa en $(-1, 0)$;

$\dfrac{d^2y}{dx^2}(\dfrac{1}{2}) > 0.$ Concavidad positiva en $\left(0, \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}\right)$;

$\dfrac{d^2y}{dx^2}(2) < 0.$ Concavidad negativa en $\left(\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}, +\infty\right)$.

PROBLEMA 4.22

Trazar la gráfica de la función $y = \dfrac{sen\, x}{1 + sen\, x}$.

SOLUCIÓN

<u>Intersecciones</u>. Si $y = 0$, $sen\, x = 0$ es decir $x = 2k\pi$, k es un número entero.
Los puntos de corte son : $(0,0)$; $(\pi, 0)$; $(-\pi, 0)$; $(2\pi, 0)$ etc..

<u>Dominio de definición</u> : Está constituido por todos los números reales, a excepción de aquellos que satisfacen la ecuación :

$$1 + sen\, x = 0$$

Es decir : $x = \dfrac{3}{2}\pi + 2k\pi = \dfrac{(4k+3)\pi}{2}$, k es un número entero

<u>Asíntotas</u> : Las asíntotas verticales son de la forma :

$$x=\frac{(4k+3)\pi}{2};\ k \text{ es un número entero.}$$

Por ejemplo si $k=0,\ x=\frac{3}{2}\pi$ es asíntota vertical. Igualmente si $k=1,\ x=\frac{7}{2}\pi$ también es asíntota vertical.

Por otra parte:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2}\pi)^+}\left[\frac{sen\,x}{1+sen\,x}\right]=\lim_{x\to(-\frac{1}{2}\pi)^-}\left[\frac{sen\,x}{1+sen\,x}\right]=-\infty,$$

y, también,

$$\lim_{x\to(\frac{3}{2}\pi)^+}\left[\frac{sen\,x}{1+sen\,x}\right]=\lim_{x\to(\frac{3}{2}\pi)^-}\left[\frac{sen\,x}{1+sen\,x}\right]=-\infty.$$

No existen asíntotas horizontales.

<u>Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos</u>.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cos\,x}{(1+sen\,x)^2}.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtiene:

$$\frac{cos\,x}{(1+sen\,x)^2}=0.$$

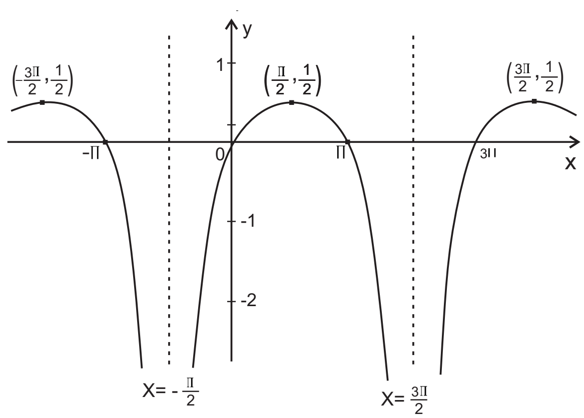


Fig. 4.22

Esto se cumple cuando $cos\,x=0$ y $1+sen\,x\neq 0$; o sea, $x=\frac{(4k+1)\pi}{2}$; k es entero.

Se toman los puntos de prueba $x=\frac{1}{4}\pi$ y $x=\frac{3}{4}\pi$ pertenecientes a los intervalos $(-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi)$ y $(\frac{1}{2}\pi,\ \frac{3}{2}\pi)$, respectivamente, para determinar el comportamiento de la función en esos intervalos.

$$\frac{dy}{dx}(\frac{1}{4}\pi)>0.\ \text{En}\ (-\frac{1}{2}\pi,\ \frac{1}{2}\pi)\text{, la función es creciente.}$$

$\frac{dy}{dx}(\frac{3}{4}\pi) < 0$. En $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, la función es decreciente.

Por tanto, existe un Máximo Relativo en el punto $(\frac{1}{2}\pi, f(\frac{1}{2}\pi)) = (\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2})$.

También, son máximos relativos los puntos: $(-\frac{3}{2}\pi, \frac{1}{2})$; $(\frac{5}{2}\pi, \frac{1}{2})$; $(\frac{9}{2}\pi, \frac{1}{2})$ etc.

<u>Concavidad y Puntos de inflexión</u>

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-2cos^2 x}{(1+sen\,x)^2}.$$

Como $\frac{-2cos^2 x}{(1+sen\,x)^2} < 0$, para cualquier valor de x, excepto para los valores que satisfacen la ecuación $1+sen\,x=0$, entonces existirá concavidad negativa siempre. No existen puntos de inflexión.

NOTA:
Obsérvese que la función es periódica . El período es 2π.

PROBLEMA 4.23

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

SOLUCIÓN

<u>Dominio de definición</u>. Está constituido por todos los números reales, a excepción de $x = -1$.

<u>Intersecciones</u>. Si $x=0$, $y=0$; es decir, la curva pasa por el punto $(0,0)$.

<u>Asíntotas</u>. Las asíntota vertical es la recta $x = -1$.

Por otra parte,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{(x+1)^2}\right] = 0 \text{ y } \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{(x+1)^2}\right] = 0.$$

En consecuencia, $y=0$ es asíntota horizontal.

<u>Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos</u>.

$$f'(x) = \frac{1-x}{(x+1)^3}.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para x, se obtiene: ,

$$\frac{1-x}{(x+1)^2} = 0; \quad x = 1.$$

Se toman los puntos de prueba $x = -2$, $x = \frac{1}{2}$ y $x=2$ pertenecientes a los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, +\infty)$, respectivamente, para determinar el comportamiento de la función en esos intervalos.

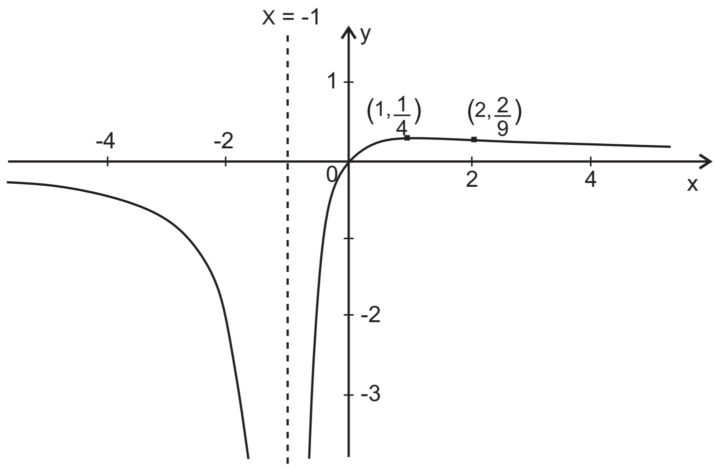


Fig. 4.23

$f'(-2) = -3 < 0$. En $(-\infty, -1))$, la función es decreciente.

$f'(\frac{1}{2}) = \frac{4}{27} > 0$. En $(0, 1)$, la función es creciente.

$f'(2) = -\frac{1}{27} < 0$. En $(1, +\infty)$, la función es decreciente.

Por tanto, existe un Máximo Relativo en el punto $(1, f(1)) = (1, \frac{1}{4})$.

Concavidad y Puntos de inflexión.

$$f''(x) = \frac{2(x-2)}{(x+1)^4}.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtiene:

$$\frac{2(x-2)}{(x+1)^4} = 0; \quad x = 2\,.$$

Por tanto, $(2, f(2)) = (2\,, \frac{2}{9})$ es punto de inflexión.

Por otra parte : $f''(-3) = -\frac{5}{8} < 0$. Concavidad negativa en $(-\infty, -1)$.

$f''(0) = -\frac{5}{8} < 0$. Concavidad negativa en $(-1, 2)$.

$f''(3) = \frac{1}{28} > 0$. Concavidad positiva en $(2, +\infty)$.

PROBLEMA 4.24

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$.

SOLUCIÓN

Dominio de definición. Está constituido por todos los números reales, a excepción de $x = -1$.

Intersecciones. Si $x=0,\ y=0$, es decir, la curva pasa por el punto $(0,0)$.

Asíntotas. Las asíntota vertical es la recta $x=\ -1$.

Por otra parte,

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{(x+1)^2}\right]=1, \text{ y, por otra parte,}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{(x+1)^2}\right]=1.$$

En consecuencia, $y=1$ es asíntota horizontal.

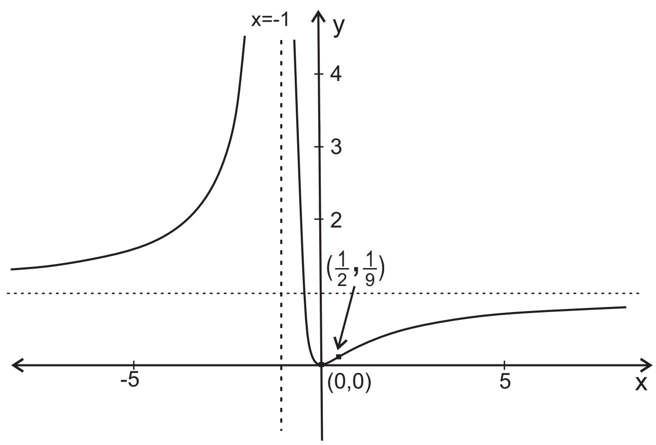


Fig. 4.24

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$f'(x)=\frac{2x}{(x+1)^3}.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para x, se obtiene:

$$\frac{2x}{(x+1)^3}=0;\ x=0.$$

Se toman los puntos de prueba $x=\ -2,\ x=-\frac{1}{2}$ y $x=\frac{1}{2}$ pertenecientes a los intervalos $(-\infty,\ -1)$, $(-1,0)$ y $(0,+\infty)$ respectivamente, para determinar el comportamiento de la función en esos intervalos.

$f'(-2)=4>0.$ En $(-\infty,\ -1)$, la función es creciente.

$f'(-\frac{1}{2})=\ -8<0.$ En $(-1,\ 0)$, la función es decreciente.

$f'(\frac{1}{2})=\frac{8}{27}>0.$ En $(0,\ +\infty)$, la función es creciente.

Por tanto, existe un Mínimo Relativo en el punto $(0,\ f(0))=(0,\ 0)$.

Concavidad y Puntos de inflexión. La segunda derivada de la función dada es :

$$f''(x) = \frac{-2(2x-1)}{(x+1)^4}.$$

Al igualar a cero esta derivada y rtesolver para x, se obtiene:

$$\frac{-2(2x-1)}{(x+1)^4} = 0; \qquad x = \frac{1}{2}.$$

Por tanto, $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2})) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{9})$ es punto de inflexión.

Además,

$f''(-2) = 10 > 0$. Concavidad positiva en $(-\infty, -1)$.

$f''(-\frac{1}{2}) = 64 > 0$. Concavidad positiva en $(-1, \frac{1}{2})$.

$f''(2) = -\frac{1}{2} < 0$. Concavidad negativa en $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

PROBLEMA 4.25

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+2x+2}$.

SOLUCIÓN

Dominio de definición : Está constituido por todos los números reales.

Intersecciones. Si $x = 0$, $y = 0$; es decir, la curva pasa por el punto $(0, 0)$.

síntotas. No existen asíntotas verticales.

Por otra parte,

$$\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x^2}{x^2+2x+2}\right] = 1\,;$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left[\frac{x^2}{x^2+2x+2}\right] = 1.$$

En consecuencia, $y = 1$ es asíntota horizontal.

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$f'(x) = \frac{2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para x, se obtienen puntos críticos:

$$\frac{2x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = 0; \ x = 0 \text{ y } x = -2 \text{ son puntos críticos.}$$

Se toman los puntos de prueba $x = -4$, $x = -1$ y $x = 2$ pertenecientes a los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$ y $(0, +\infty)$, respectivamente, para determinar el comportamiento de la función en esos intervalos.

$f'(-4) = \dfrac{4}{25} > 0$. En $(-\infty, -2)$, la función es creciente.

$f'(-1) = -2 < 0$. En $(-2,\ 0)$, la función es decreciente.

$f'(2) = \dfrac{8}{15} > 0$. En $(0,\ +\infty)$, la función es creciente.

Por tanto, existe un Máximo Relativo en el punto $(-2,\ f(-2)) = (-2, 2)$ y un Mínimo Relativo en $(0, f(0)) = (0, 0)$.

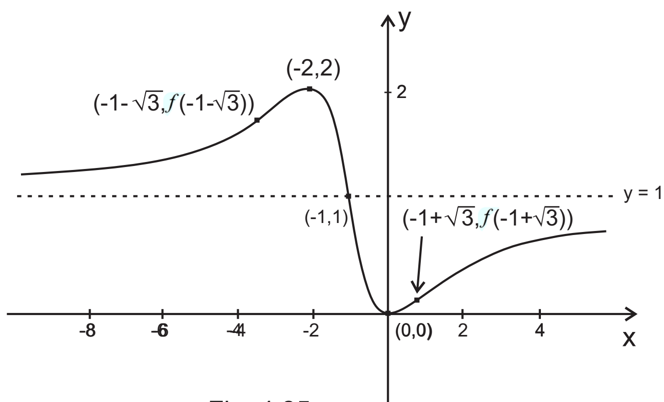


Fig. 4.25

Concavidad y Puntos de inflexión.

$$f''(x) = \frac{-4(x^3 + 3x^2 - 2)}{(x^2 + 2x + 2)^3}.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtiene:

$$\frac{-4(x^3 + 3x^2 - 2)}{(x^2 + 2x + 2)^3} = 0;$$

Esta ecuación tiene como raíces a $x = -1 - \sqrt{3}$; $x = -1$; $x = -1 + \sqrt{3}$.

De esta manera, son puntos de inflexión:

$$(-1 - \sqrt{3}, f(-1 - \sqrt{3}) \approx (-2,732;\ 1,911);$$
$$(-1, f(-1)) = (-1, 1);$$
$$(-1 + \sqrt{3}, f(-1 + \sqrt{3}) \approx (0,732;\ 0,134).$$

Por otra parte,

$f''(-4) = \dfrac{18}{25} > 0.$ Concavidad positiva en $(-\infty,\ -1 - \sqrt{3})$.

$f''(-\dfrac{3}{2}) = -\dfrac{352}{125} < 0.$ Concavidad negativa en $(-1 - \sqrt{3},\ -1)$.

$f''(-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{352}{125} > 0.$ Concavidad positiva en $(-1,\ -1 + \sqrt{3})$.

$f''(2) = -\dfrac{18}{25} < 0.$ Concavidad negativa en $(-1 + \sqrt{3},\ +\infty)$.

PROBLEMA 4.26

Trazar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{ln\, x}$.

SOLUCIÓN

Dominio de definición. Está constituido por todos los números reales positivos, a excepción de $x = 1$.

Intersecciones. No existen intersecciones con los ejes.

Asíntotas. La recta $x = 1$ es asíntota vertical.

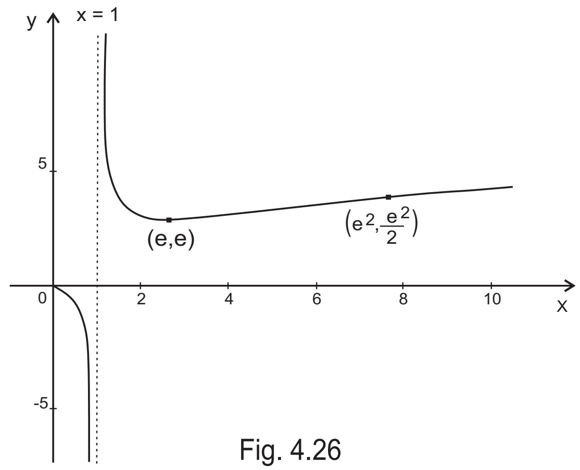


Fig. 4.26

Intervalos de crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$f'(x) = \frac{lnx - 1}{ln^2 x}.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtiene:

$$\frac{lnx - 1}{ln^2 x} = 0;\ lnx - 1 = 0;\ \ x = \text{e}.$$

Se toman los puntos de prueba $x = \dfrac{1}{2}$, $x = 2$ y $x = 4$ pertenecientes a los intervalos $(0,\, 1)$, $(1, \text{e})$ y $(\text{e},\, +\infty)$, respectivamente, para determinar el comportamiento de la función en esos intervalos.

$f'(\frac{1}{2}) \approx -3,52 < 0$. En $(0,\, 1)$ la función es decreciente;

$f'(2) \approx -0,639 < 0$. En $(1, \text{e})$ la función es decreciente;

$f'(4) \approx 0,383 > 0$. En $(\text{e},\, +\infty)$ la función es creciente.

Por tanto, existe un Mínimo Relativo en el punto $(\text{e},\, f(\text{e})) = (\text{e}, \text{e})$.

Concavidad y Puntos de inflexión.

$$f''(x) = -\frac{1}{x\, ln^2 x} + \frac{2}{x\, ln^3 x}.$$

Al igualar a cero esta derivada y resolver para $\boldsymbol{x}$, se obtiene:

$$-\frac{1}{x\,ln^2x}+\frac{2}{x\,ln^3x}=0;$$

$$\frac{-\,lnx+2}{x\,ln^3x}=0;\ \ lnx=2;\ \ x=\mathrm{e}^2.$$

De esta manera, el único punto de inflexión es $(\mathrm{e}^2, f(\mathrm{e}^2)\approx(\mathrm{e}^2,\ \frac{\mathrm{e}^2}{2})$.

Por otra parte,

$f''(\frac{1}{2})\approx\ -16,17<0.$ Concavidad negativa en $(0,\ 1)$;

$f''(2)\ \approx1,96>0.$ Concavidad positiva en $(1,\ \mathrm{e}^2)$;

$f''(9)\ \approx\ -0,02<0.$ Concavidad negativa en $(\mathrm{e}^2,\ +\infty)$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

Estudiar las funciones y construir sus gráficas :

1) $y=x^4-2x+10$

2) $y=\mathrm{e}^{-1/x}$

3) $y=\dfrac{x+3}{x^2}$

4) $y=\dfrac{x+4}{x^3}$

5) $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$

6) $f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$

7) $f(x)=ln(x^2+1)$

8) $f(x)=x+senx$

9) $y=(x+1)^2(x-2)$

10) $y=log(cos\,x)$

11) $y=\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x}$

12) $y=x+\dfrac{1}{x^2}$

13) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$

14) $f(x)=\dfrac{10\,x}{x^2+1}$

5. INCREMENTOS, DIFERENCIALES Y APROXIMACIÓN LINEAL

Sea la función $y = f(x)$.

Si $\boldsymbol{x}$ se incrementa en $\boldsymbol{\Delta x}$, la función se incrementa $\boldsymbol{\Delta y}$. En la Figura $5.a$, se observa que el valor de Δy es :

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \tag{1}$$

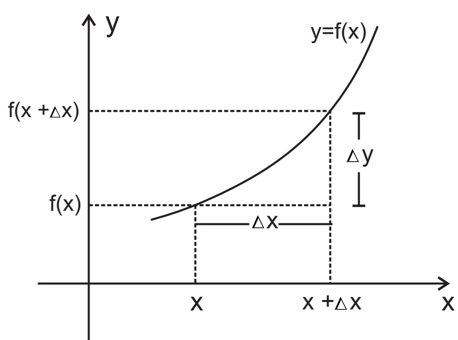


Fig. 5.a

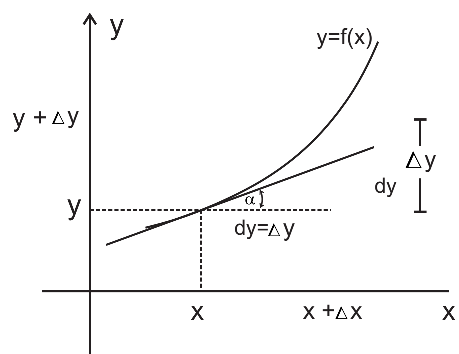


Fig. 5.b

De acuerdo con la Figura $5.b$, el cambio que podría ocurrir en $\boldsymbol{y}$, si continuara cambiando con razón fija $\boldsymbol{f'(x)}$, es:

$$tg\,\alpha = f'(x) = \frac{dy}{\Delta x};$$

es decir :

$$dy = f'(x)\Delta x; \tag{2}$$

$\boldsymbol{dy}$ se denomina <u>la diferencial</u> de $\boldsymbol{y}$.

Cuando $\boldsymbol{\Delta x}$ es pequeño ($\Delta x \to 0$), $f'(x)\Delta x \simeq f(x + \Delta x) - f(x)$.

Como $\Delta x = dx$, entonces:

$$\boldsymbol{f'(x + dx) \simeq f(x) + f'(x)dx} \tag{3}$$

La expresión (3) es una <u>buena aproximación lineal</u> de la función $\boldsymbol{f(x)}$, cuando $\boldsymbol{x}$ se incrementa en $\boldsymbol{\Delta x}$, para $\boldsymbol{\Delta x} \to 0$.

De esta última afirmación

Aproximaciones : $\Delta x = dx;\ \Delta y \simeq dy.$

Errores pequeños: $\Delta y \simeq dy$: Error absoluto.

$\dfrac{\Delta y}{y} \simeq \dfrac{dy}{y}$: Error relativo.

Porcentaje de error $\quad \dfrac{\Delta y}{y}*100 \simeq \dfrac{dy}{y}*100.$

PROBLEMA 5.1

Calcular aproximadamente los valores de $\sqrt{48,8}$ y $\sqrt{49,2}$.

SOLUCIÓN

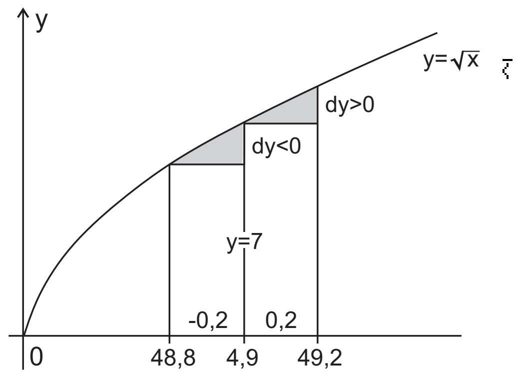


Fig. 5.1

Se considera la función $y = \sqrt{x}$. Al diferenciar en ambos miembros :

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx \qquad (1)$$

a) Al reemplazar $x = 49,\ dx = 0,2$ en (1), se obtiene:

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{49}}(0,2) = 0,0142857.$$

Luego : $\quad \sqrt{49,2} = \sqrt{49 + 0,2} \simeq \sqrt{49} + 0,01428575 \simeq 7 + 0,01428575;$

$\sqrt{49,2} \simeq 7,01428575.$

b) Al tomar $x = 49,\ dx = -0,2$ y reemplazar en (1) :

$$dy = \frac{-0,2}{2\sqrt{49}} = -0,0142857.$$

Luego: $\quad \sqrt{48,8} = \sqrt{49 - 0,2} \simeq \sqrt{49} - 0,00625 = 7 - 0,01428575,$

$\sqrt{48,8} = 6,9857143.$

El valor aproximado de $\sqrt{49,2}$ es $7,01428575.$

El valor aproximado de $\sqrt{48,8}$ es $6,9857143.$

PROBLEMA 5.2

Calcular aproximadamente el valor de $tg\,(45°\,15').$

SOLUCIÓN

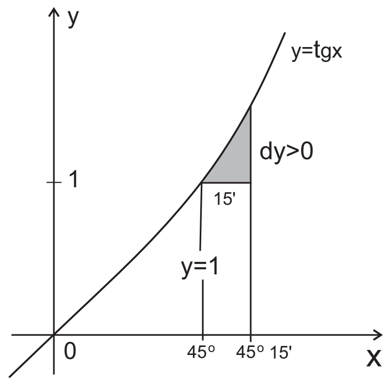


Fig. 5.2

Sea $y = tg\,x$. Al diferenciar en los dos miembros, se obtiene:

$$dy = sec^2\,x\,dx \tag{1}$$

Con $x = 45°$ y $dx = 15' = \left(\frac{15}{60}\right)° = \left(\frac{1}{4}\right)° = \frac{1}{4}*\frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{720}$,

$$dx = \frac{\pi}{720}(rad).$$

Al sustituir en (1) :

$$dy = sec^2(45°)*\frac{\pi}{720} = 0,008726646.$$

Luego :

$$tg\,45°15' \approx tg\,45° + dy,$$

$$tg\,45°15' \approx 1 + 0,008726646,$$

$$tg\,45°15' \approx 1,008726646.$$

El valor aproximado de $tg\,45°15'$ es $1,008726646$.

PROBLEMA 5.3

Calcular aproximadamente el valor de $(1,01)^4 - (1,01)^3 + 8\,(1,01)^2$

SOLUCIÓN

Se toma $y = x^4 - x^3 + 8x^2$. (Figura 5.3).

Al diferenciar en los dos miembros, se obtiene:

$$dy = f'(x)dx,$$

$$dy = (4x^3 - 3x^2 + 16x)dx.$$

Con $\boldsymbol{x} = 1$, $\boldsymbol{dx} = 0,01$, se llega a:

$$dy = \left[4(1)^3 - 3(1)^2 + 16(1)\right]dx,$$

$$dy = 17(0,01) = 0,17.$$

Además, $y(1) = 8$.

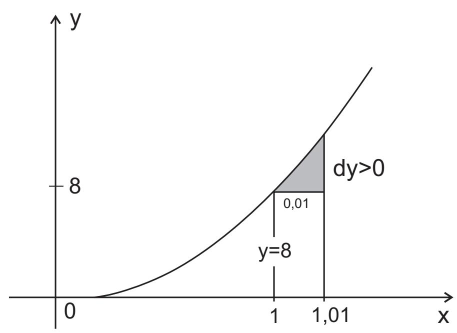


Fig. 5.3

Por tanto :
$$(1,01)^4 - (1,01)^3 + 8(1,01)^2 = y(1) + y'(1)(0,01)$$
$$= 8 + 0,17 = 8,17.$$

El valor aproximado de $(1,01)^4 - (1,01)^3 + 8(1,01)^2$ es $8,17.$

PROBLEMA 5.4

Calcular aproximadamente el valor de $-\sqrt{(4,01)^3} + \dfrac{1}{\sqrt{4,01}} + 20.$

SOLUCIÓN

Se considera la función $y = -\sqrt{x^3} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + 20.$ (Figura 5.4).

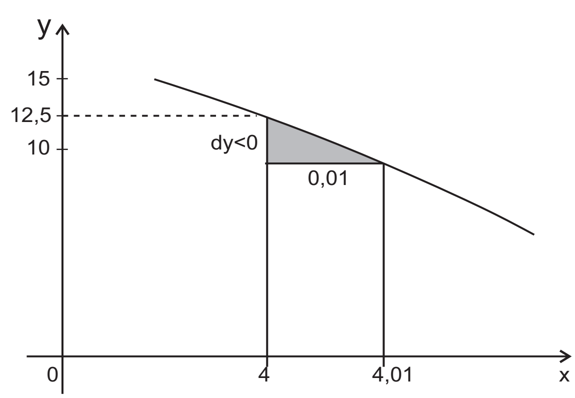


Fig. 5.4

Al diferenciar en los dos miembros :
$$dy = \Big(-\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\Big)dx.$$

Con $x = 4, \quad dx = 0,01,$ se obtiene :
$$dy = \Big[-\frac{3}{2}\sqrt{4} - \frac{1}{2\sqrt{4^3}}\Big](0,01),$$
$$dy = -0,030625.$$

Además, $y(4) = -\sqrt{4^3} + \dfrac{1}{\sqrt{4}} + 20 = 12,5.$

Luego :

$$-\sqrt{(4,01)^3} + \frac{1}{\sqrt{4,01}} + 20 = \sqrt[4]{(4)^3} + \frac{1}{\sqrt{4}} + 20 + dy\,,$$
$$= 12,5 - 0,030625 = 12,469375.$$

El valor aproximado de $-\sqrt{(4,01)^3} + \dfrac{1}{(4,01)^3} + 20$ es $12,469375.$

PROBLEMA 5.5

En un tambor cilíndrico recto con tapa, de radio interior $40\,cm$ y altura interna $80\,cm$, se envasa aceite lubricante para motor. Al vaciar el tambor, permanece adherida una película uniforme de $1\,mm$ de espesor en toda la superficie interna del tambor. Calcular el volumen de aceite que se pierde por adherencia al vaciar el tambor.

SOLUCIÓN

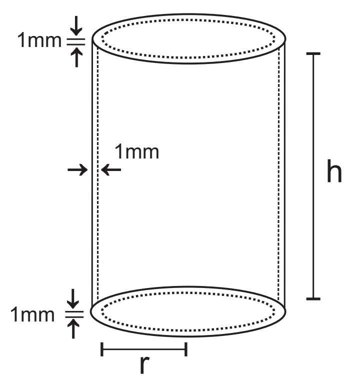


Fig. 5.5

El volumen de un cilindro circular recto de altura $\boldsymbol{h}$ y radio $\boldsymbol{r}$ es :

$$V = \pi r^2 h \qquad (1)$$

Al diferenciar en ambos miembros :

$$dV = \pi(r^2 dh + 2rh\,dh) \qquad (2)$$

Al reemplazar $dr = -1\,mm = -0,001\,m; \quad r = 0,4\,m;$

$h = 0,8\,m\,; \;\; dh = -(2)(1)\,mm = -0,002\,(m)$ en (2) :

$$dV = \pi\big[(0,4)^2(-0,002)) + 2(0,4)(0,8)(-0,001)\big]$$
$$dV = -0,00301529\ m^3 = -3.015,29\,cm^3$$

El volumen de aceite perdido por adherencia es aproximadamente de $3.015,29\,cm^3$.

PROBLEMA 5.6

Calcular el peso aproximado de un tubo metálico de $2,5\,m$ de longitud, radio interior $3\,cm$ y radio exterior $3,2\,cm,$ si la densidad del metal es $9,85\,grs/cm^3$.

SOLUCIÓN

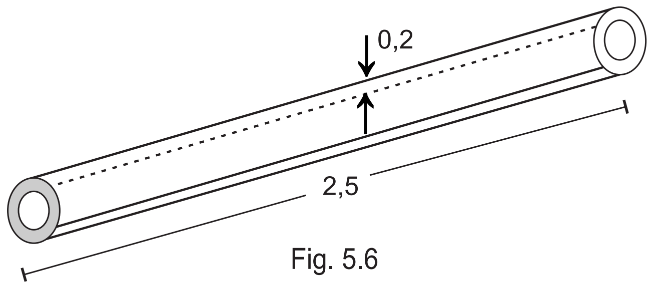


Fig. 5.6

El volumen del tubo es:

$$V = \pi r^2 h \quad (m^3).$$

El peso del tubo es: $P = V * Densidad$

$$P = \pi r^2 h \; (9,85) \; (grs).$$

Con $h = 250\,cm$, se obtiene que el peso del tubo es :

$$P = \pi r^2 (250)(9,85) = (2.462,5)\,\pi r^2 \;,$$

$$P = (2.462,5)\,\pi r^2 \;. \qquad (1)$$

Al diferenciar la relación (1), se llega a :

$$dP = 2\pi (2.462,5)\, r\, dr \qquad (2)$$

Como el radio exterior es $3,2\,cm$, entonces $dr = 0,2\,cm$.

Al reemplazar $r = 3\,cm$, $dr = 0,2\,cm$ en (2) :

$$dP = 2\pi (2.462,5)\,(3)(0,2),$$

$$dP = 9.283,4\,.$$

El peso aproximado del tubo es $9.283,4\; grs$.

PROBLEMA 5.7

El alcance horizontal en m de un proyectil balístico no auto-propulsado, en un medio sin rozamiento, viene dado por la expresión:

$$x = (\frac{v_o^2}{g})\, sen\, 2\phi$$

Donde es $\boldsymbol{v_o}$ la velocidad inicial de disparo en m/seg y $\boldsymbol{g}$ es la aceleración de la gravedad en m/seg^2. Dado que $\boldsymbol{v_o} = 180\, m/seg$, $\boldsymbol{g} = 9,81\, m/seg^2$ y $\boldsymbol{\phi} = 30°$, calcular aproximadamente la variación que experimenta el alcance del proyectil si, por error, fue medido en $30°\,30'$.

SOLUCIÓN

Según los datos del problema, la función que describe el movimiento es:

$$x = (\frac{v_o^2}{g}) sen\, 2\phi \tag{1}$$

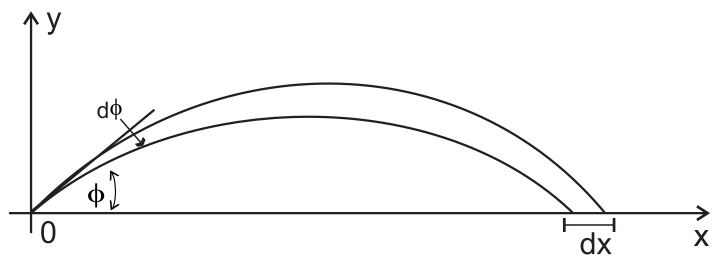


Fig. 5.7

Al diferenciar (2) con respecto a ϕ, considerando $\boldsymbol{v_o}$ constante, se obtiene:

$$dx = 2(\frac{v_o^2}{g})\, cos\, 2\phi\ d\phi \tag{2}$$

Puesto que $d\phi = 30' = \dfrac{\pi}{360}\, rad$, $v_o = 180\, m/seg$, $g = 9,81\, m/seg^2$, entonces, al sustituir en (1), se llega a:

$$dx = \frac{2(180)^2}{9,81}(cos\, 60°)(\frac{\pi}{360}) = 28,82\, m.$$

En consecuencia, el alcance se ha aumentado en $28,82\ m$ aproximadamente.

PROBLEMA 5.8

Calcular el valor aproximado de $\dfrac{\sqrt{3,95}+1}{\sqrt{3,95}-1}$.

SOLUCIÓN

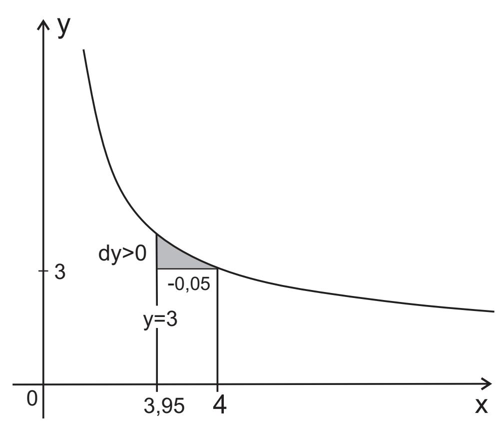


Fig. 5.8

Considerar la función:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\ ;$$

entonces,

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}.$$

Al tomar $x = 4$; $dy = -0,05$, se tiene:

$$\frac{\sqrt{3,95}+1}{\sqrt{3,95}-1} = \frac{\sqrt{4}+1}{\sqrt{4}-1} + \left[-\frac{1}{\sqrt{4}(\sqrt{4}-1)}(-0,05)\right];$$

$$= 3 - \frac{1}{2}(-\frac{5}{100}) = 3 + \frac{1}{40};$$

$$= 3 + 0,025 = 3,025.$$

El valor aproximado de $\dfrac{\sqrt{3,95}+1}{\sqrt{3,95}-1}$ es $3,025.$

PROBLEMA 5.9

Calcular por medio de diferenciales el valor aproximado de:

$$\sqrt[3]{3(0,99)^4 + 4(0,99)^3 + 1}.$$

SOLUCIÓN

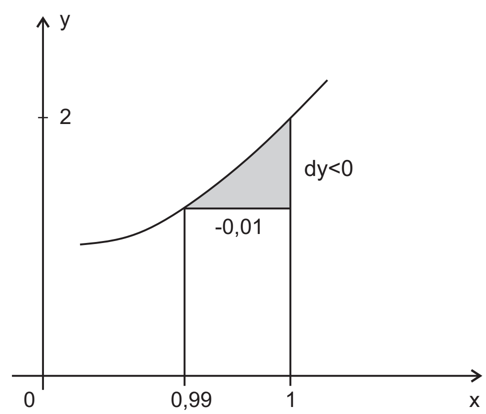


Fig. 5.9

Se considera la función $f(x) = \sqrt[3]{3x^4 + 4x^3 + 1}.$

La derivada de esta función es :

$$f'(x) = \frac{4(x^3 + x^2)}{\sqrt[3]{(3x^4 + 4x^3 + 1)^2}}.$$

Al tomar los valores $x = 1$; $dx = -0,01$, se llega a:

$$\sqrt[3]{3(0,99)^4 + 4(0,99)^3 + 1} = \sqrt[3]{3(1)^4 + 4(1)^3 + 1} + \frac{4(1^3 + 1^2)(-0,01)}{\sqrt[3]{(3(1)^4 + 4(1)^3 +)^2}},$$

$$= \sqrt[3]{8} + \frac{6}{\sqrt[3]{8^2}}\left[-\frac{1}{100}\right] = 2 - \frac{3}{100},$$

$$= 2 - 0,03 = 1,97.$$

El valor aproximado de $\sqrt[3]{3(0,99)^4+4(0,99)^3+1}$ es $1,97.$

PROBLEMA 5.10

Calcular aproximadamente la altura de un edificio por medio del ángulo de elevación con la horizontal. Si la medida del ángulo tomada a 300 m de la vertical del edificio es de 30°, pero, por error se estimó en 30° 30', calcular la variación que experimenta la altura del edificio.

SOLUCIÓN

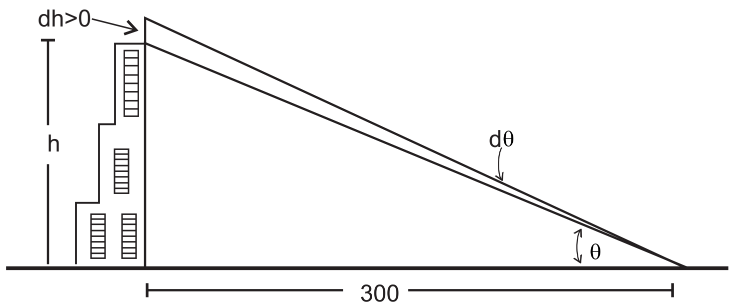


Fig. 5.10

En correspondencia con la Figura 5.10, la altura del edificio es:

$$h = 300\, tg\, \theta \tag{1}$$

Al diferenciar la relación (1), se obtiene:

$$dh = sec^2\theta\, d\theta \tag{2}$$

Al reemplazar $\theta = 30^o$ y $d\theta = 30' = \left(\frac{1}{2}\right)^o = \frac{\pi}{360}\, rad$, en la ecuación (2), se llega a:

$$dh = 300\, sec^2\left(\frac{\pi}{60}\right)\left(\frac{\pi}{360}\right);$$

$$dh = 300(1,333333398)(0,008726646);$$

$$dh = 3,49\, m.$$

En consecuencia, la altura del edificio se aumentó en $3,49\, m$ aproximadamente.

PROBLEMA 5.11

Considerar un recipiente en forma de cono circular recto invertido, de radio $1\, m$, altura $3m$ y la altura del agua contenida en él $2m$. Si se invierten en el recipiente $5\, cm^3$ de agua, calcular aproximadamente el incremento de la altura del nivel del agua.

SOLUCIÓN

De acuerdo a la Figura 5.11.a, el volumen del cuerpo de agua es :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \tag{1}$$

Por semejanza de triángulos (Figura 5.11.b) :

$$\frac{1}{3}=\frac{r}{h}, \quad r=\frac{1}{3}h \tag{2}$$

Al reemplazar (2) en (1) :

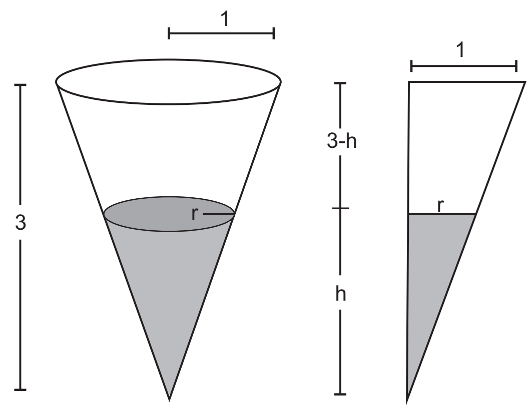


Fig. 5.11.a Fig. 5.11.b

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}h\right)^2 * h,$$

$$V=\frac{1}{27}\pi h^3 \ \ m \tag{3}$$

Al diferenciar los dos miembros de (3) y despejar dh, se obtiene:

$$dV=\frac{1}{9}\pi h^2 dh; \quad dh=\frac{9(dV)}{\pi h^2} \tag{4}$$

Al sustituir $dV = 5\,cm^3$; $h=2\,m = 200\,cm$; en la relación (4), se llega a:

$$dh=\frac{9(5)}{\pi(200)^2} = 0,000359 \ cm.$$

El nivel del agua sube $0,000359 \ cm$ aproximadamente.

PROBLEMA 5.12

Según el Problema 5.7, el alcande horizontal em m de un proyectil balístico no autopropulsado en un medio sin rozamiento se expresa mediante la relación:

$$x=\frac{v_o^2}{g} sen\, 2\phi$$

Donde x es alcance en metros, $\boldsymbol{v_o} =$ velocidad inicial del proyectil $= 180\, m/seg$ y $\boldsymbol{\phi} =$ ángulo de disparo $= 30^o$, $\boldsymbol{g} =$ aceleración de la gravedad $= 9,81\, m/seg^2$. Calcular la variación que experimenta el alcance horizontal del proyectil, cuando:

a) La velocidad inicial aumenta a $182\, m/seg$.

b) El ángulo de disparo disminuye a a $29°45'$.

SOLUCIÓN

a) Al diferenciar $x=\dfrac{v_o^2}{g}\, sen\, 2\phi$, considerando v_o variable y ϕ constante, se tiene:

$$dx = \frac{2v_o}{g} sen\, 2\phi\, dv_o.$$

Con $v_o = 300\, m/seg,\ g = 9,81\, m/seg^2,\ \phi = 30°$ y $dv_o = 2\, m/seg,$ se obtiene:

$$dx = \frac{2(180)}{9,81}(sen\, 60°)(2) = 63,56\, m.$$

Por tanto, el alcance se aumenta en $63,56\, m$.

b) Considerando v_o constante y ϕ variable, al diferenciar $x = \frac{v_o^2}{a} sen\, 2\phi$ se tiene :

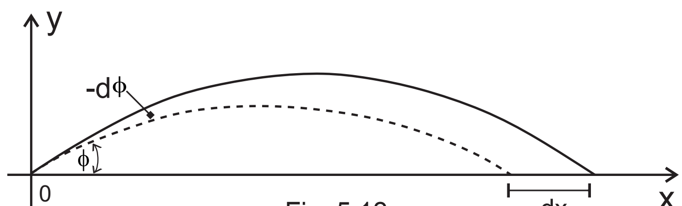


Fig. 5.12

$$dx = \frac{v_o^2}{g}(2) cos\, 2\phi\, d\phi$$

Si $v_o = 180\, m/seg,\ \phi = 30°$, $g = 9,81\, m/seg^2$ y $d\phi = -15' = -\frac{\pi}{720}.$

Entonces,

$$dx = \frac{2(180)^2}{9,81} cos\,(60°)(-\frac{\pi}{720}) = -14,41.$$

En consecuencia, el alcance del proyectil se disminuye en $14,41\ m$.

PROBLEMA 5.13

Determinar la variación del volumen de una esfera, cuando se comete un error relativo cualquiera al medir su radio.

SOLUCIÓN

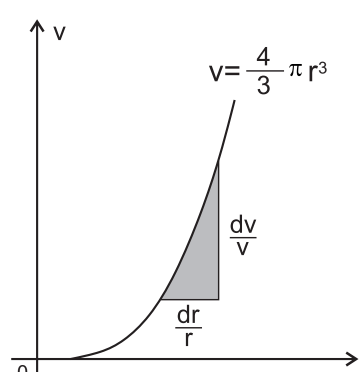


Fig. 5.13

El volumen de la esfera de radio r se encuentra mediante la expresión:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \tag{1}$$

Al aplicar logaritmos naturales a los dos miembros de la anterior relación, se obtiene :

$$ln\, V = ln\left[\frac{4}{3}\boldsymbol{\pi} r^3\right],$$

$$ln\, V = ln\, 4 - ln\, 3 + ln\, \boldsymbol{\pi} + 3\, ln\, r \qquad (2)$$

Al diferenciar en los dos miembros de (2) se llega a :

$$\frac{dV}{V} = 3\frac{dr}{r}.$$

Esto quiere decir que el error relativo al estimar el volumen de la esfera es tres veces mayor que el error relativo al medir su radio.

PROBLEMA 5.14

Considerar un sector circular de radio $2,5\, m$ con un ángulo central de 315^o. Calcular aproximadamente el incremento del área del sector si el ángulo central cambia de 315^o a 316^o.

SOLUCIÓN

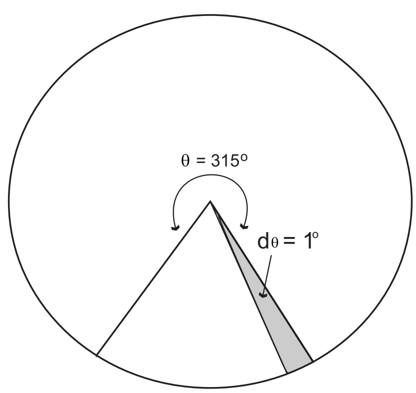


Fig. 5.14

El área de un sector circular en función del radio y el ángulo central (en radianes) se expresa como :

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta \qquad (1)$$

Al diferenciar (1) con respecto a θ, considerando r como constante, se obtiene :

$$dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta \qquad (2).$$

Al reemplazar $r = 2,5\, m;\ \theta = 1^o = \dfrac{\pi}{180}\, rad$ en (2), se llega a:

$$dA = \frac{1}{2}(2,5)^2\left[\frac{\pi}{180}\right] = 0,00545415\ m^2.$$

Por tanto, el área del sector circular aumenta $0,00545415\ m^2$.

PROBLEMA 5.15

Calcular el incremento que experimenta $arctg\, x$ cuando x cambia de $1,73$ a $1,74$.

SOLUCIÓN

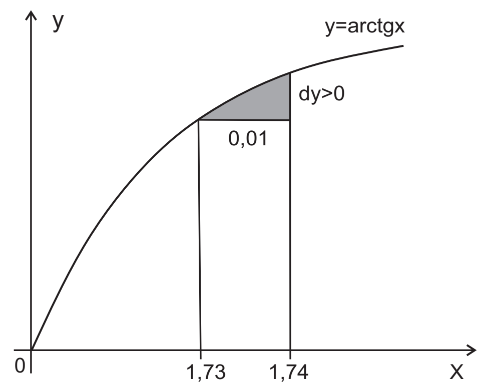


Fig. 5.15

Se considera la función $y = arctg\, x$. Al diferenciar los dos miembros de esta relación, se obtiene:

$$dy = \frac{1}{1+x^2}\, dx.$$

Si $x = 1,73$ y $dx = 0,01$, entonces, al reemplazar estos valores en la anterior relación, se llega a:

$$dy = \left[\frac{1}{1+(1,73)^2}\right](0,01) = 0,0025\, rad.$$

Al convertir a grados, se obtiene:

$$dy = (0,0025)(57,295779513),$$
$$dy = 0,14349415 = 0^o\ 8'\, 36,58''.$$

Esto quiere decir que el ángulo se incrementó en $8'\, 36,58''$ aproximadamente.

PROBLEMA 5.16

Un recipiente en forma de cilindro circular recto con tapa debe tener un radio interior de $0,5\, m$ y altura de $2,0\ m$. Si la lámina con que se va a fabricar el recipiente tiene un espesor de $3\, mm$,

a) Calcular aproximadamente el volumen del material de manufactura.

b) Calcular el valor exacto del material de manufactura.

c) Calcular el error entre el cálculo aproximado y el exacto.

SOLUCIÓN

a) El volumen de un cilindro circular recto de radio $\boldsymbol{r}$ y altura $\boldsymbol{h}$ es :

$$V = \pi\, r^2 h.$$

Al diferenciar la anterior relación, se obtiene:

$$dV = \pi(2rh\,dr + r^2 dh).$$

dV, en realidad,calcula el volumen aproximado de material de manufactura. Al reemplazar $r = 0,5m$; $h = 2,0\,m$; $dr = 0,003\,m$; $dh = 2(0,03) = 0,06\,m$ en la expresión del diferencial, se obtiene:

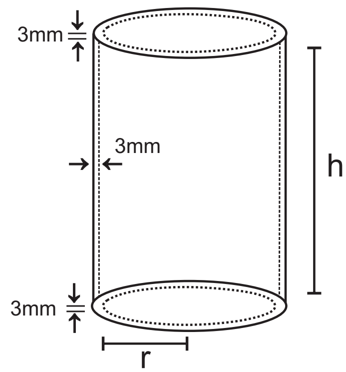


Fig. 5.16

$$dV = \pi[2(0,5)(2,0)(0,003) + (0,5)(0,006];$$
$$dV = 0,0075\,\pi\ m^3.$$

b) El volumen de material se puede obtener por la diferencia entre el volumen externo y el volumen interno, así:

$$V_{ext} = \pi[(0,5 + 0,003)^2][2 + 2(0,003)],$$
$$V_{ext} = \pi[(0,503)^2][2,006)],$$
$$V_{ext} = 0,507536\pi\ m^3.$$

Por otra parte,

$$V_{int} = \pi[(0,50)^2][2,0],$$
$$V_{int} = 0,5\,\pi\,m^3.$$

Por tanto, el volumen exacto es :

$$V = V_{ext} - V_{int}$$
$$V = (0,507536 - 0,5)\pi;$$
$$V = 0,007536\,\pi\ m^3.$$

c) El error cometido entre el cálculo aproximado y el exacto es :

$$E\% = \frac{V - dV}{V} * 100\% = 0,0478\ \%.$$

PROBLEMA 5.17

En relación con los Problemas 5.7 y 5.12, el tiempo de vuelo, es el tiempo en segundos durante los cuales el proyectil permanece en el aire. Se calcula por medio de la relación :

$$t = \frac{2v_o}{g} sen\phi \qquad (1)$$

a) Calcular el tiempo de vuelo para $v_o = 180\, m/seg$; $\phi = 30^o$; $g = 9,81\, m/seg^2$.

b) Calcular aproximadamente el incremento en el tiempo de vuelo si $\phi = 30^o\, 30'$.

c) Calcular el error cometido entre el cálculo aproximado y el cálculo exacto.

SOLUCIÓN

a) El tiempo de vuelo exacto se obtiene al aplicar la ecuación (1), así:

$$t = \frac{2(180)}{9,81} sen\, 30^o = 18,349\ seg.$$

b) Al diferenciar la relación (1) con respecto a ϕ, permaneciendo v_o constante, es:

$$dt = \frac{2v_o}{g} cos\, \phi\, d\phi.$$

Puesto que $30^o = \dfrac{\pi}{360}\, rad$, entonces,

$$dt = \frac{2(180)}{9,81} cos\, (\, 30^o) * (\frac{\pi}{360}),$$
$$dt = 0,27734\ seg.$$

Esto significa que el tiempo total de vuelo es :

$$18,349 + 0,27734 = 18,62634\, seg.$$

c) Ahora, el tiempo total de vuelo por aplicación directa de la ecuación (1), para $\phi = 30^o\, 30'$, es:

$$t_d = \frac{2(180)}{9,81} sen(\, 30^o\, 30') = 18,62526\ seg.$$

En consecuencia, el error cometido entre el cálculo aproximado y el cálculo exacto es :

$$E\% = \frac{t - t_d}{t} * 100\% = 0,00419\%.$$

PROBLEMA 5.18

Considerar un domo semiesférico con radio $r = 100\, m$. Si se comete un error por exceso de $1\, cm$ al estimar el radio,

a) Calcular el máximo error resultante en el área de superficie del domo.

b) Determinar aproximadamente el área de superficie total del domo.

c) Calcular el área exacta.

d) Determinar el error entre el cálculo exacto y el aproximado del área del domo.

SOLUCIÓN

El área de superficie del domo se encuentra mediante la expresión :

$$A = 2\pi\, r^2\ m^2 \qquad (1)$$

a) Al diferenciar con respecto a $\boldsymbol{r}$, se obtiene:

$$dA = 4\pi\, r\, dr \tag{2}$$

Al reemplazar $r = 100\, m$; $dr = 1\, mm = 0,01\, m$ en la expresión (2), se llega a:

$$dA = 4\pi\,(100)(0,01) = 4\pi\, m^2.$$

El máximo error al estimar el área es $4\pi\ m^2$.

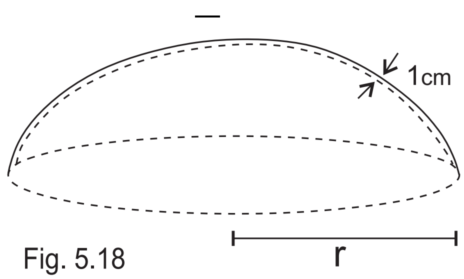


Fig. 5.18

b) El área de superficie aproximada es :

$$A_t = A(100) + dA,$$
$$A_t = 2\pi\,(100)^2 + 4\pi,$$
$$A_t = (20.000 + 4)\pi = 20.004\,\pi\ m^2.$$

c) El área de superficie exacta se obtiene por aplicación directa de la ecuación (1):

$$A_e = 2\pi\,(100,01)^2 = (20.004,0002\,)\pi\ \ m^2.$$

d) El error entre el cáculo exacto y aproximado del área de superficie del domo se obtiene así :

$$E\% = \frac{A_e - A_t}{A_e} = 9,898 \text{ x } 10^{-7}.$$

PROBLEMA 5.19

En relación con el Problema 5.14*:*

a) Calcular el incremento que experimenta el área del sector circular cuando el radio aumenta de $2,5$ a $2,6\, m$.

b) Determinar el área aproximada total del sector.

c) Determinar el área exacta.

d) Estimar el error cometido entre el cálculo aproximado y el exacto.

SOLUCIÓN

a) El área del sector circular de radio $\boldsymbol{r}$ y ángulo central $\boldsymbol{\theta}$ se calcula mediante la expresión :

$$A = \frac{1}{2} r^2 \theta \tag{1}$$

Al diferenciar la relación (1) respecto a $\boldsymbol{r}$, permaneciendo $\boldsymbol{\theta}$ constante, se obtiene :

$$dA = r\,\theta\ dr \tag{2}$$

Al sustituir $r = 2,5\,m;\ \theta = 315^o = \frac{7}{4}\pi$, en (2) se llega a:

$$dA = (2,5)\left[\frac{7}{4}\pi\right](0,1) = 1,37444\ m^2.$$

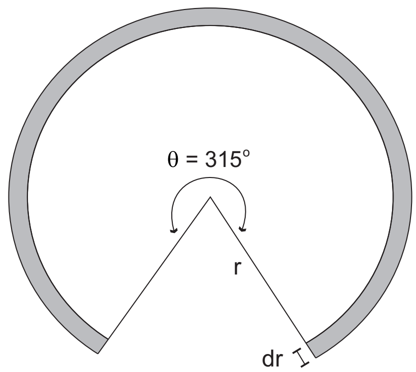


Fig. 5.19

b) El área total aproximada es :

$$A_a = \frac{1}{2}(2,5)^2\left[\frac{7}{4}\pi\right] + dA,$$

$$A_a = 17,18058 + 1,3744 = 18,55502\ m^2.$$

c) El área exacta se obtiene por cálculo directo de la ecuación (1) :

$$A_e = A_a = \frac{1}{2}(2,6)^2\left[\frac{7}{4}\pi\right] = 18,58252\ m^2.$$

d) El error cometido entre el cálculo exacto y el aproximado es:

$$E\% = \frac{A_e - A_a}{A_e} * 100\% = 0,14798\%.$$

PROBLEMA 5.20

El radio de una bola esférica se estima en $10\,pg$, con un error máximo por exceso de $\frac{1}{16}pg$.

a) Determinar el error máximo resultante en el volumen calculado.

b) Determinar el valor del radio para garantizar un error máximo de $1\,pg^3$ en el volumen calculado.

SOLUCIÓN

a) El volumen de una esfera de radio $\boldsymbol{r}$ se calcula mediante la relación :

$$V = \frac{4}{3}\pi\,r^3 \qquad (1)$$

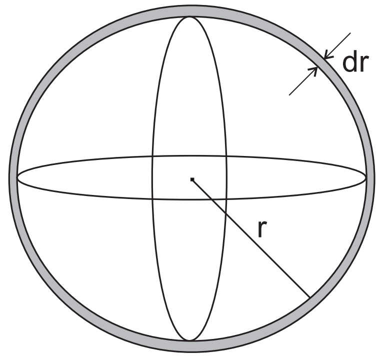


Fig. 5.20

Al diferenciar con respecto a $\boldsymbol{r}$, se obtiene:

$$dV = 4\pi\, r^2 dr \tag{2}$$

Al reemplazar $r = 10\, pg;\ dr = \dfrac{1}{16}\, pg$ en la expresión (2), se llega a :

$$dV = 4\pi\,(10)^2 \left[\frac{1}{16}\right],$$

$$dV = 25\pi \ \ pg^3.$$

En consecuencia, el error máximo en el volumen calculado es $25\pi \ \ pg^3$.

b) De la relación (1), al despejar r^2, se obtiene:

$$r^2 = \frac{1}{4\pi\, dr} = \frac{1}{4\pi\,(\frac{1}{16})} = \frac{4}{\pi}.$$

En consecuencia, el mayor radio que garantiza un error máximo de $1\, pg$ es

$$r = \sqrt{\frac{4}{\pi}}\ pg.$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1) Hallar el valor aproximado de las cantidades dadas por medio de diferenciales.

a) $tg\,44^o$.

b) $\sqrt[3]{126}$.

c) $log\,999$

d) $\dfrac{\sqrt{4,01}-(4,01)^{-1}+1}{2\sqrt{4,01}+3(4,01)^{-1}-7}$.

e) $3(8,99)^{3/2}+\dfrac{2}{(8,99)^{1/2}}-2$.

f) $\dfrac{sen(41^o)+cos(41^o)}{tg(41^o)}$.

2) El volumen de agua que pasa por unidad de tiempo (gasto) por una tubería de sección circular de radio interior $5\,cm$ a una velocidad de $38\ cm/seg$ es el producto del área de la sección por la velocidad.

a) Si la velocidad aumenta $1\ mm/seg$, calcular aproximadamente el aumento del gasto.

b) Si la velocidad disminuye en $1,5\,mm/seg$, estimar aproximadamente la disminución del gasto.

3) Se estima el radio de un globo esférico y se comete un error de $\pm\,0,05\,cm.$ Si el radio es de $30\,cm$, calcular el error cometido al estimar el volumen total del globo.

4) Considerar un recipiente esférico de $50\,cm$ de radio interior, que contiene agua hasta una altura de $15\,cm.$ Si se vierten en el recipiente $20\,cm^3$ de agua, calcular aproximadamente el incremento en el nivel de agua.

5) El espacio recorrido por un cuerpo que cae libremente, sin considerar el rozamiento, se calcula mediante la expresión:

$$S=\frac{1}{2}g\,t^2.$$

a) Si $g=9,81\,m/seg^2$, calcular aproximadamente cuánto recorre el cuerpo desde $t=5$ a $t=5,1\,seg.$

b) Calcular el desplazamiento aproximado total desde $t=0$ a $t=5,1\ seg.$

c) Determinar el desplazmiento total exacto desde $t=5$ a $t=5,1\ seg.$

d) Calcular el error cometido entre el cálculo exacto y el aproximado.

BIBLIOGRAFÍA

AYRES, Frank. Cálculo Diferencial e Integral. McGraw-Hill. México, 1974.

CASABIANCA, Manuel. Problemas Resueltos de Cálculo Diferencial. Tercer Mundo Editores. Bogotá, 1995.

EDWARDS, C. PENNEY, David. Cálculo con Geometría Analítica. PHH. México, 1993.

FARRAND, Scott POXON, Nancy. Cálculo. Hardcourt Brace Jovanovich. Bogotá,1988.

LEITHOLD, Louis. El Cálculo con Geometría Analítica. Harper. 1995.

PINZÓN, Alvaro. Cálculo Diferencial. Harper. Madrid, 1973.

PISKUNOV, N. Cálculo Diferencial e Integral. Mir. Moscú, 1969.

PURCELL, Edwin VARBERG, Dale. Cálculo con geometría analítica. PHH. México, 1992.

THOMAS, George. Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica. Aguilar. Madrid, 1968