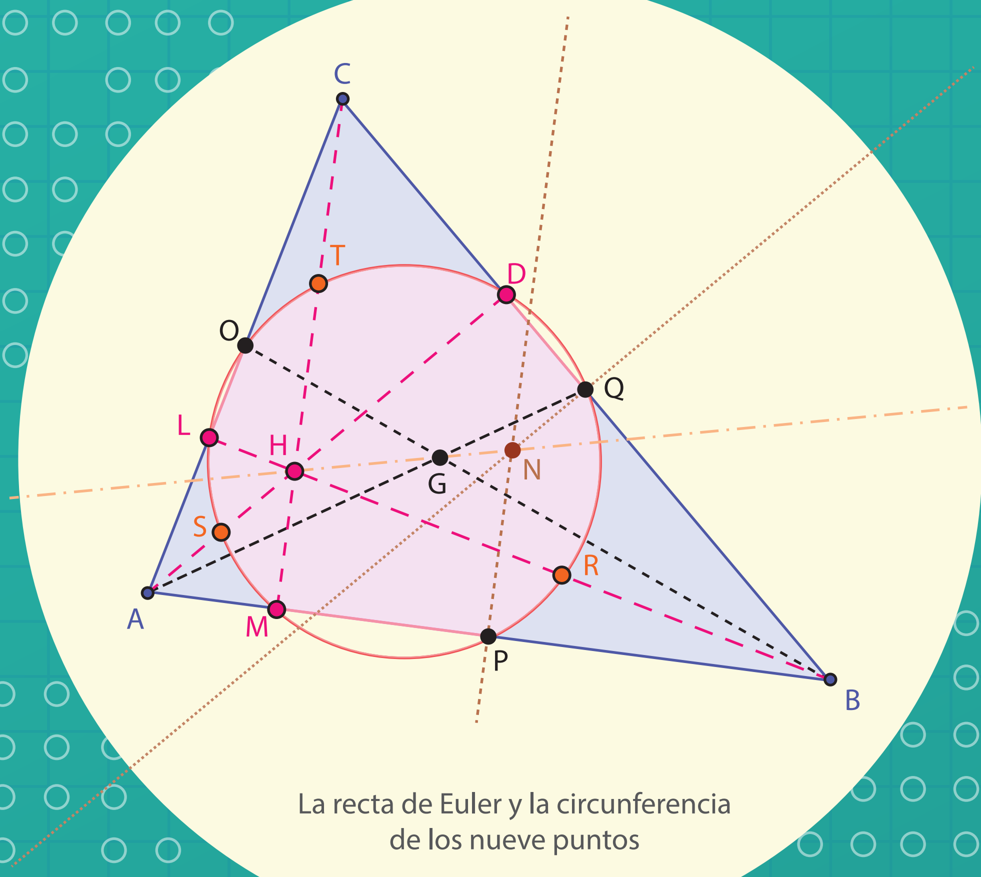
CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON GeoGebra



La recta de Euler y la circunferencia
de los nueve puntos

Saulo
Mosquera López

GESCAS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Editorial
Universidad de Nariño

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
Editorial
Universidad de **Nariño**

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON

GeoGebra

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON GeoGebra

Saulo Mosquera López

Editorial
Universidad de Nariño

Mosquera López, Saulo

Construcciones Geométricas con Geogebra / Saulo Mosquera López. - - 1ªed. - - San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2021.
143p.: Gráficas, tablas

ISBN: 978-628-7509-23-8

1.Enseñanza con ayuda de software (Geogebra) 2. Tecnología – Educación (construcciones geométricas) 3. Sistemas de enseñanza 4. Innovaciones Educativas (construcciones geométricas.

371.33 M912 – SCDD-Ed. 22 Biblioteca Alberto Quijano Guerrero

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON GEOGEBRA

saulo.mosquera@gmail.com

ISBN: 978-628-7509-23-8
Primera Edición

CORRECCIÓN DE ESTILO: Manuel Enrique Martínez Riascos
DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN: Diana Salas y Nathaly Rivadeneira M.

Fecha de publicación: 24 de marzo de 2021
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Índice general

Presentación

En los lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), sección de *Referentes Curriculares*, se propone una nueva visión de las matemáticas escolares basada en una serie de premisas, entre las cuales se encuentra: "*Reconocer el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones*", en este sentido se considera el desarrollo del pensamiento espacial y métrico como espacios propicios para su utilización y aplicación, recurriendo para ello a la geometría.

Esta área de las matemáticas es considerada, en el mismo documento, como una *"herramienta para interpretar, entender y apreciar un mundo que es eminentemente geométrico, constituye una importante fuente de modelación y un ámbito por excelencia para desarrollar el pensamiento espacial y procesos de nivel superior y, en particular, formas diversas de argumentación",* sin olvidar que el uso adecuado de las nuevas tecnologías aplicadas a la educación es un campo que requiere investigación, desarrollo y formación de los docentes.

Con base en lo descrito se consideró apropiado la utilización de GeoGebra, como un software que permite crear actividades que posibilitan tener un acercamiento más visual del concepto, lo cual es la base de este documento, ya que éste permite que se aproveche la tecnología de manera particular con los temas tratados en geometría, puesto que posibilita la manipulación de los objetos y por tanto la experimentación, simulación y verificación o refutación de conjeturas, sin dejar de tener presente que, *"estas tecnologías son simplemente un elemento curricular más y por tanto dependerán de cómo se apliquen o en dónde se apliquen para que tengan relevancia en un buen proceso educativo"(*Adams, 2006). No es suficiente con conocer y utilizar el mejor software si no hay alguien que lo oriente en el proceso de aprendizaje.

Así entonces, el objetivo central de este texto es presentar una orientación que permita al lector, utilizar de manera apropiada las herramientas básicas de GeoGebra y no tiene como propósito constituirse en un libro de geometría Euclidiana o Analítica. Aunque en el trabajo se definen los conceptos, que no se tratan usualmente en un curso de geometría, la teoría complementaria, sustento de este texto, puede encontrarse en libros tales como: Geometría Elemental de Hemmerling, E. (2002) y Geometría Analítica de Lehmann, C. (2000).

El texto está constituido básicamente por dos capítulos, a lo largo de los cuales se muestran ejemplos ilustrativos que permiten conocer y afianzar las diferentes herramientas de este software.

El primer capítulo, presenta las herramientas fundamentales de GeoGebra, su utilización y potencialidad, sin desconocer que no representa una descripción exhaustiva del mismo. Se desarrollan elementos tales como: Instalación del Software, dibujos contra construcciones, objetos libres y dependientes, color y animación de un objeto, uso de deslizadores, elaboración de texto, la forma para guardar un archivo, construcción de herramientas propias, el protocolo de una construcción, el uso de las casillas de control y de los botones, así como la forma de elaborar una presentación a través de los mismos..

El segundo, contiene nueve secciones y en él se desarrollan algunas construcciones de geometría con GeoGebra. Se incluyen ilustraciones elementales de geometría, construcciones relacionadas con los puntos notables de un triángulo, construcciones que utilizan el concepto de lugar geométrico, un estudio básico de las cónicas, algunos problemas de disección; se desarrolla el Problema de Apolonio, se ilustran algunas maneras de construir un cuadrado sin el uso de la herramienta polígono regular, se trabajan algunas maneras de construir, geométricamente, las raíces de una ecuación de segundo grado y se implementan algunos de los casos considerados por Omar Al Khayyam, para la solución geométrica de una ecuación cúbica.

El texto finaliza con algunos comentarios relacionados con la utilización de GeoGebra y una sección de problemas propuestos, en las diferentes temáticas tratadas, que se espera sean resueltos por el lector para complementar lo expuesto y afianzar de modo conceptual lo desarrollado en el mismo.

Una observación necesaria, una primera versión de este texto fue escrita en el primer semestre del año 2019, fue experimentada, en algunas Instituciones educativas de la Costa Pacífica, en el segundo semestre del mismo año y se mantuvo sin modificaciones hasta el mes de marzo del 2020, cuando en el país, se presentaron los primeros casos de la pandemia COVID-19, que obligó, a las autoridades nacionales y locales, a establecer la cuarentena social lo cual posibilitó el espacio de tiempo para su revisión, implementación de las sugerencias y la escritura de la sección 2.8 conjuntamente con la elaboración de sus correspondientes archivos GeoGebra.

A los evaluadores externos se agradece su voluntad, disposición y rigurosidad en la evaluación, sus enriquecedoras observaciones están reflejadas en esta versión del trabajo y han permitido un mejor desarrollo del mismo. Finalmente, espero que a los posibles usuarios el texto les sea útil y lo disfruten, así como de manera personal se ha disfrutado en su elaboración.

SAULO MOSQUERA LÓPEZ
San Juan de Pasto, febrero de 2021

Capítulo 01

Herramientas básicas del Software

Capítulo 1: Herramientas básicas del software

GeoGebra es un software gratuito para apoyo en la enseñanza de las matemáticas cuyo desarrollo inició en el 2001, en la tesis de maestría de Markus Hohenwarter y se complementó en la tesis de doctorado en Educación Matemática en la Universidad de Salzburgo (Austria). Actualmente, GeoGebra continúa su desarrollo en varias Universidades y entre sus desarrolladores se encuentran Markus Hohenwarter, Michael Borcherds e Yves Kreis, y un gran número de colaboradores en diferentes países, (Llamas, Carrillo, Parrado & Chacón, 2017).

GeoGebra es un programa sencillo y fácil de utilizar, lo cual permite que, desde los primeros momentos de su inmersión, sea posible realizar construcciones y afrontar la resolución de problemas a través de las herramientas y opciones que ofrece. GeoGebra permite trabajar con objetos de aritmética, geometría, cálculo, análisis, álgebra, lógica, matemática discreta, probabilidad y estadística.

Con GeoGebra es posible construir de modo muy simple puntos, segmentos, polígonos, rectas, vectores, cónicas, lugares geométricos, gráficas de funciones, curvas paramétricas e implícitas, distribuciones de probabilidad y diagramas estadísticos. Todo ello dinámicamente, de forma que cualquier objeto puede sufrir modificaciones con el movimiento del ratón o al animar un deslizador; este capítulo está dedicado a describir e ilustrar algunas herramientas fundamentales para la utilización del software, con la versión 6.0, aunque no constituye una descripción exhaustiva del mismo.

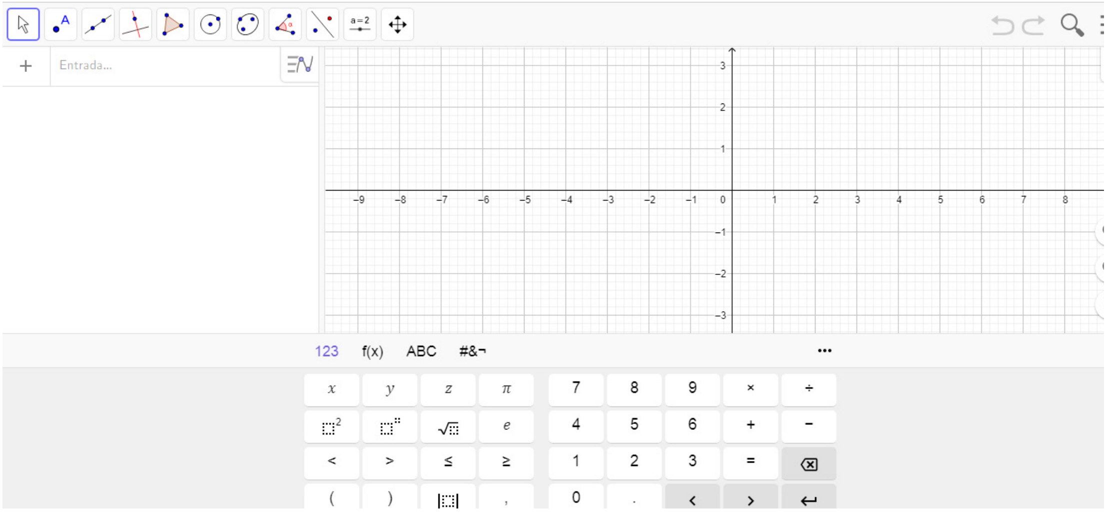
1.1 Instalación y ejecución.

Para instalar GeoGebra es necesario descargarlo del sitio oficial, www.GeoGebra.org, desde el que se ofrecen las posibilidades para su uso en distintos sistemas operativos. Este programa está en continuo desarrollo y hace que cada vez que se presente una nueva versión, aparezcan nuevas herramientas y por tanto su potencia aumenta. Sin embargo, GeoGebra se puede adaptar a cualquier nivel educativo, lo cual lo convierte en un recurso indispensable para el profesor que quiera incorporar las TIC a su trabajo diario.

Una vez instalado para ejecutar GeoGebra es necesario dar doble clic sobre el icono del programa,

Gráfica 1: Logo de Geogebra

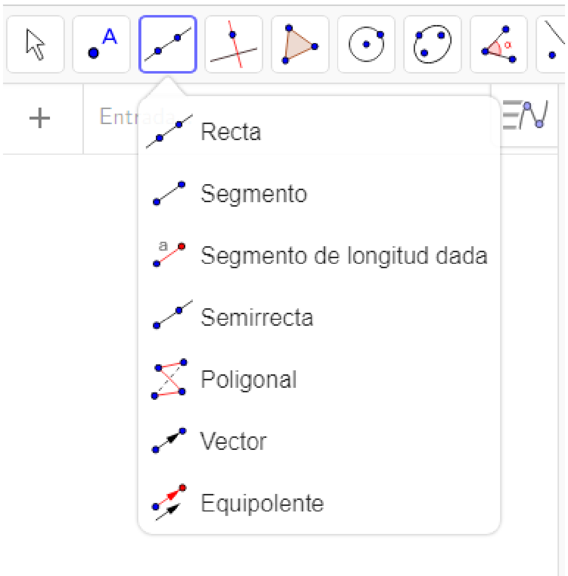
Y al cabo de algunos segundos, aparece un cuadro de *"advertencia de seguridad"* en el cual Ud. debe dar clic en *"ejecutar"* o en *"cancelar"*, según la opción que desee seleccionar.
Al seleccionar *"ejecutar"* aparece una pantalla análoga a la siguiente, la cual corresponde, en este caso, a la versión 6.0 de GeoGebra.



Gráfica 2: Pantalla inicial de Geogebra

En la cual en la parte derecha aparece una caja de diálogo en la cual puede seleccionar la opción según el área que desee trabajar. Para iniciar y realizar algunas construcciones básicas, se elegirá: 

Con ello se despliega la ventana gráfica y en la parte superior izquierda aparece la **Barra de Herramientas** que contiene las diferentes opciones de la misma. Al colocar el puntero sobre cualquiera de las opciones se despliega una caja de diálogo que contiene las opciones de la misma y para seleccionar una de ellas es suficiente dar clic sobre la opción seleccionada, con lo cual esta aparece enmarcada en un cuadro de color azul. Por ejemplo, la siguiente gráfica muestra aquello que sucede al colocar el puntero sobre la opción **“recta**”; nótese que la opción **“puntero** activa en este momento se ve “azul”.

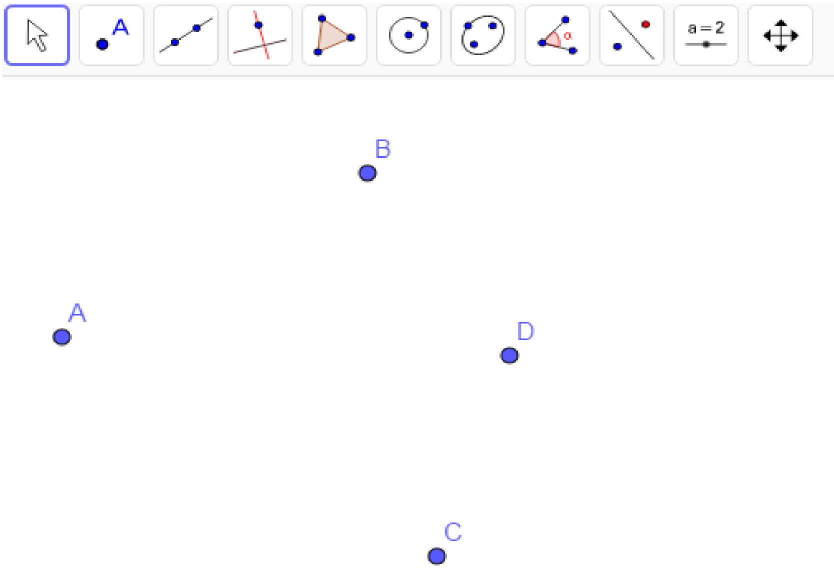


Gráfica 3: Herramientas de la pestaña Recta

Es importante anotar que, al ubicar el cursor, sobre cualquier elemento de los submenús correspondientes a las opciones de la barra de herramientas, que posee GeoGebra, el elemento correspondiente se colorea azul tenue y se genera un cuadro donde se muestra una información de ayuda para utilizar la correspondiente herramienta. ¡Verifique este hecho, seleccionando la herramienta que Ud. desee!

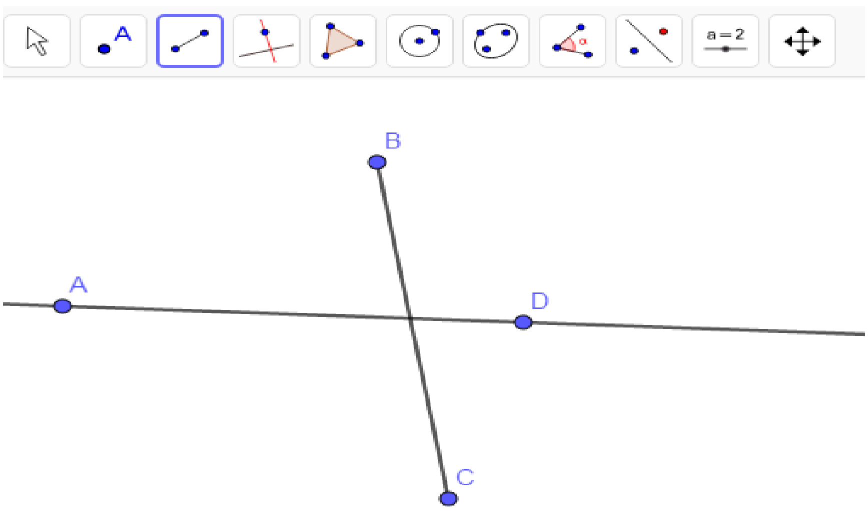
1.2 Objetos libres vs objetos dependientes.

De la barra de herramientas seleccione la herramienta **Punto**, la segunda de izquierda a derecha, y se crean 4 puntos que aparecerán marcados A, B. C y D ya que por defecto GeoGebra los nombra en orden alfabético. Esto se logra haciendo clic, con el botón izquierdo del mouse, cuatro veces en lugares diferentes de la ventana gráfica.



Gráfica 4: Cuatro puntos en la ventana gráfica

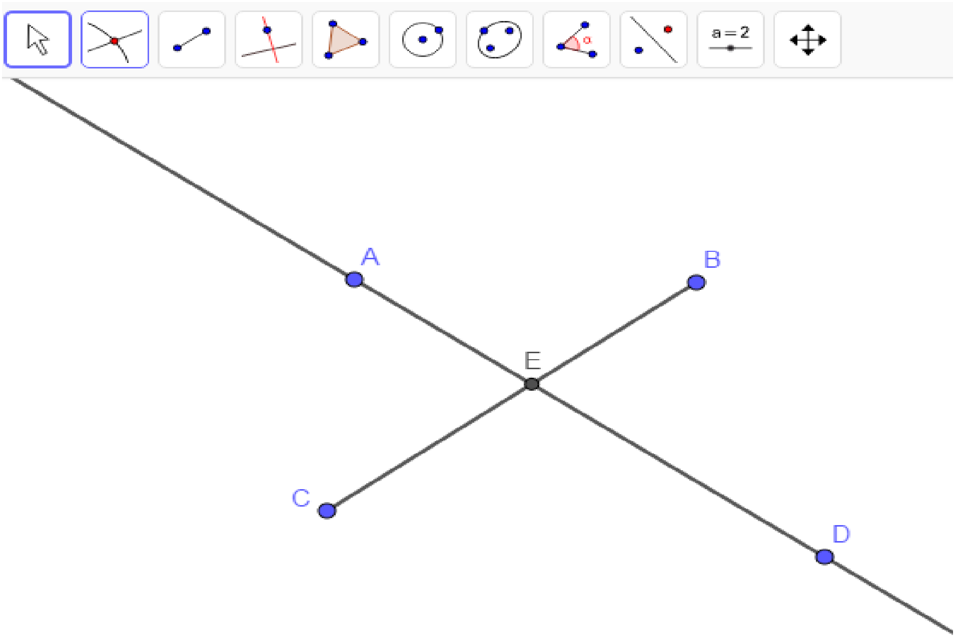
Con cuatro puntos se pueden realizar diferentes acciones. Con los cuatro se puede construir un cuadrilátero, con tres una circunferencia, con dos una recta o un segmento. Crear la recta AD y el segmento BC. Se selecciona la herramienta **recta** (a la derecha de punto), y moviendo el cursor con el mouse se acerca al punto A, al estar sobre el puntero se convierte en una mano, se da clic sobre el punto A y se desplaza hasta el punto D, aparece en la ventana gráfica la recta, y al dar clic sobre el punto D, queda establecida la recta AD. Se crea el segmento BC de manera análoga, con el uso de la herramienta **segmento**. Se obtiene algo semejante a aquello que muestra la gráfica siguiente.



Gráfica 5: Una recta y un segmento a través de cuatro puntos

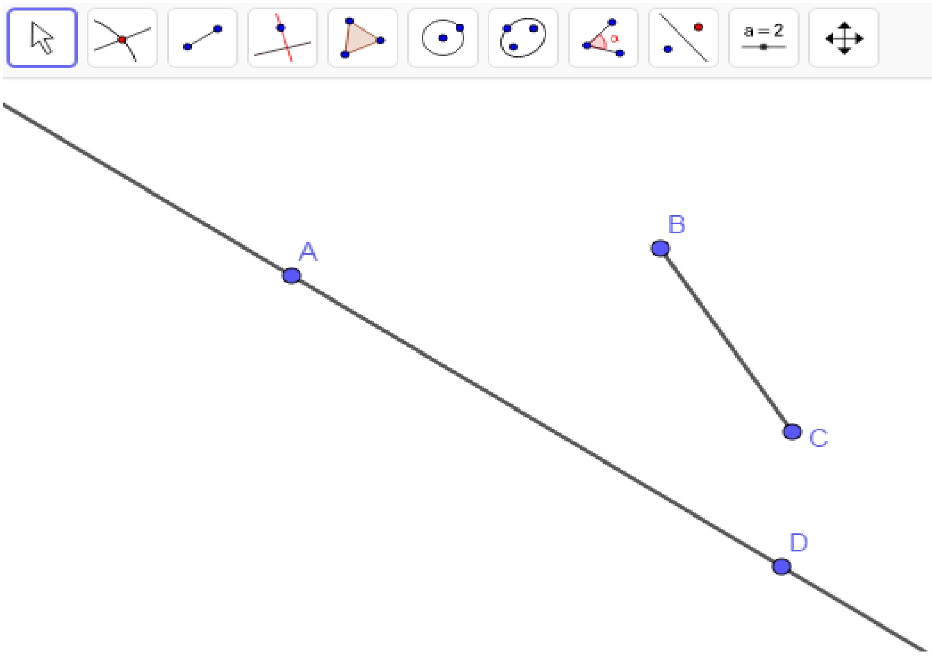
Se observa que la recta y el segmento tienen un punto en común pero que este no aparece señalado, esto se logra con la herramienta **intersección**, que se encuentra en el menú de la herramienta

punto. Se selecciona la herramienta, se acerca el puntero a la recta, (aparece la mano) se da clic sobre ella, con el botón izquierdo del ratón, (se resalta la recta), se acerca al segmento, se da clic sobre él y automáticamente aparece el punto de intersección, nombrado como E.



Gráfica 6: El punto de intersección de la recta y el segmento

Nótese que los puntos A, B, C y D son de color azul y el punto E es de color negro. ¿Por qué? Obsérvese, que se pueden mover los objetos creados sobre la pantalla, para ello al seleccionar la herramienta **puntero,** y de su menú **elige y mueve**, se acerca al objeto que se quiere mover, por ejemplo el punto C, con el botón izquierdo del mouse oprimido, se mueve el puntero y el punto (El objeto seleccionado) se desplaza sobre la ventana gráfica y al soltar el ratón el punto (El objeto seleccionado) queda en esa posición. Por ejemplo, en determinado momento se puede obtener aquello que ilustra la siguiente gráfica.



Gráfica 7: Al mover un punto libre el punto de corte puede desaparecer

¡El punto E ha desaparecido! ¿Existe este punto, verdaderamente?. Al respecto,

- El punto existe, siempre y cuando la relación que lo creó se mantenga. El punto E es la intersección entre la recta y el segmento y el punto E existe mientras esta relación de dependencia exista.

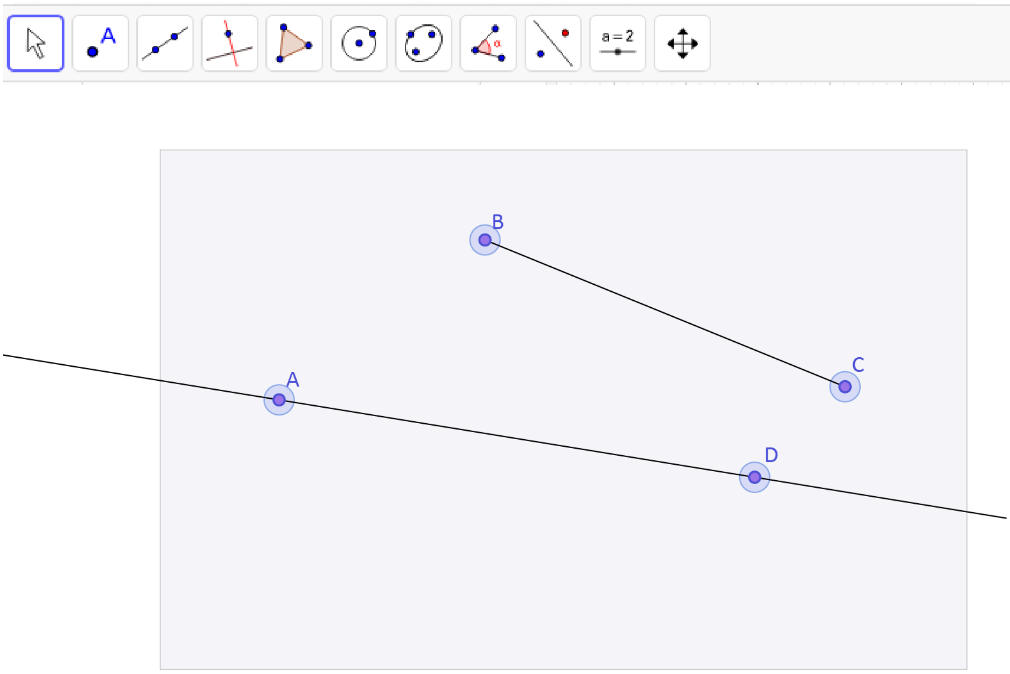
De la misma manera que se movió el punto C, se pueden mover los puntos A, B, D, la recta AD o el segmento BC. "Movamos", el punto E. Se procederá de la misma manera, nos acercamos al punto E, aparece la "mano", seleccionamos el punto con el botón izquierdo del mouse, el punto se resalta, pero ¡No se mueve! ¿Por qué?

- Nuevamente la razón radica en su dependencia. Los puntos A, B, C y D fueron creados con la herramienta **punto** pulsando en cualquier sitio de la ventana gráfica y por tanto no hay ninguna relación entre ellos. Son objetos libres. El punto E fue creado como la intersección entre la recta AC y el segmento BC. El punto E es un objeto dependiente.

Los objetos libres se pueden mover independientemente, pero los objetos dependientes no. Estos se mueven cuando se muevan los objetos de los cuales ellos dependen.

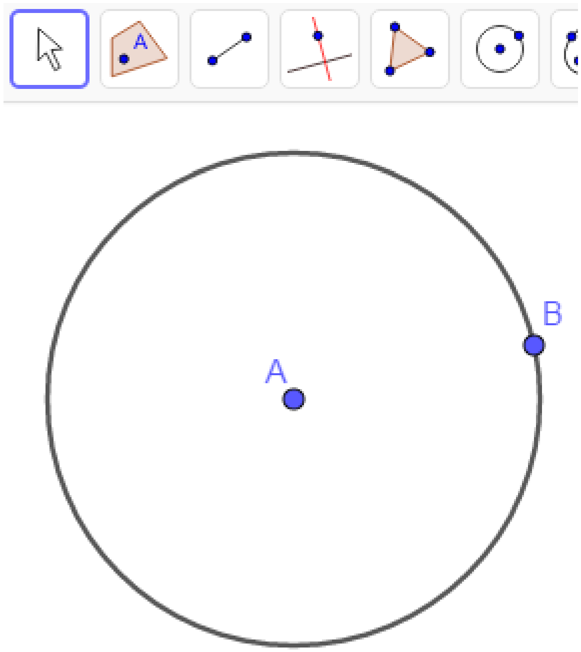
1.3 Dibujos vs construcciones.

En primer lugar, borremos todo lo que aparece en la pantalla. Para ello manteniendo oprimido el botón derecho del mouse, seleccionamos con un rectángulo "lo que aparece en la pantalla", como se ilustra en la gráfica, pulsamos la tecla "suprimir" del teclado y listo.



Gráfica 8: La forma de seleccionar los elementos de la pantalla

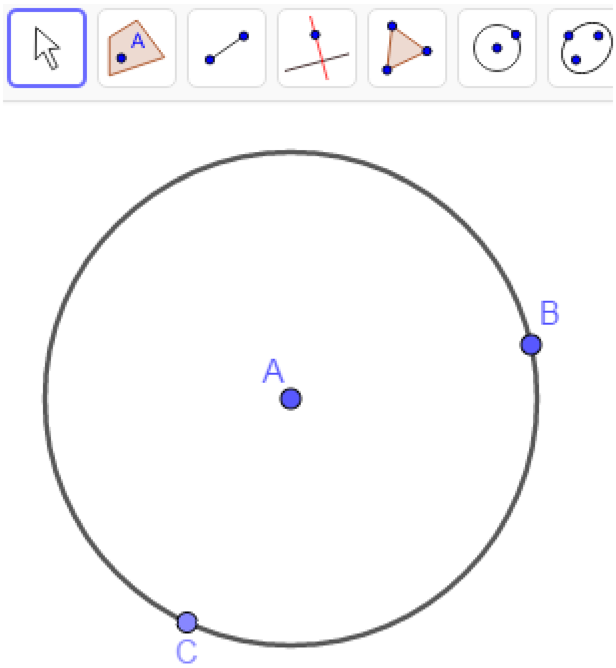
En la herramienta **Circunferencia**, sexta opción de izquierda a derecha de la barra de herramientas, seleccionemos la opción **"Circunferencia (centro, punto)"**, al dar clic, siempre con el botón izquierdo del mouse, sobre la ventana gráfica se crea un punto, en este caso el punto A, que es el "centro" de la circunferencia, al desplazar el puntero sobre la ventana gráfica aparece la circunferencia y al dar clic se crea la circunferencia y un punto B que pertenece a la misma. Así, la circunferencia creada tiene centro A y radio AB.



Gráfica 9: Circunferencia centro - punto

Algunas observaciones importantes.

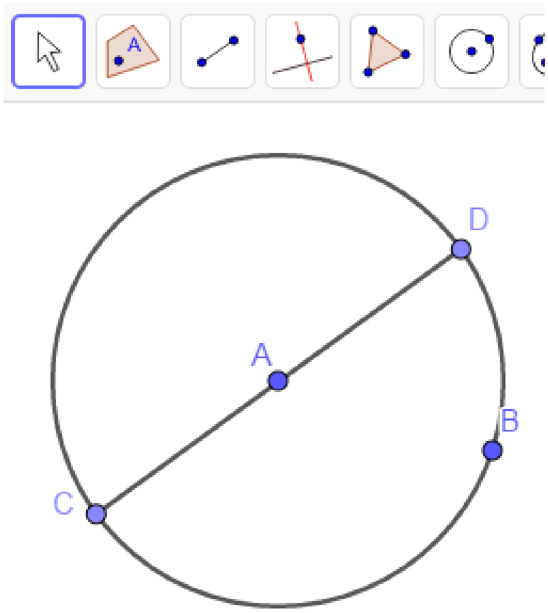
Creemos otro punto C sobre la circunferencia. Para ello seleccionamos la herramienta **punto** y de ella la opción **punto en objeto**. Al seguir un proceso como el descrito en los casos anteriores, acercar el puntero a la circunferencia, aparece la mano, dar clic, con el botón izquierdo del mouse sobre la circunferencia, aparece el punto C sobre la circunferencia.



Gráfica 10: Un punto sobre una circunferencia

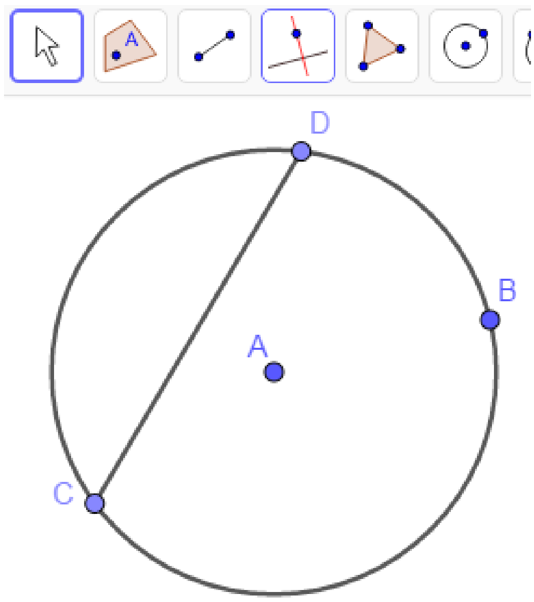
El punto C aparece de color azul, un poco más tenue, que el color azul de los puntos A y B. ¿Por qué? Al mover el punto A cambia el centro de la circunferencia y por tanto su tamaño, al mover el punto B se modifica el radio de la circunferencia y al mover el punto C, este únicamente se mueve sobre la circunferencia. Los puntos A y B son libres sobre el plano, el punto C es libre sobre la circunferencia y no sobre el plano.

"Construyamos" un diámetro de la circunferencia que contenga el punto C. Seleccionamos la herramienta **segmento**, nos ubicamos sobre el punto C, pasamos sobre el punto A hasta llegar "al otro lado" de la circunferencia y damos clic sobre ella, se crea el segmento CD que es el "diámetro de la circunferencia" que contiene el punto C.



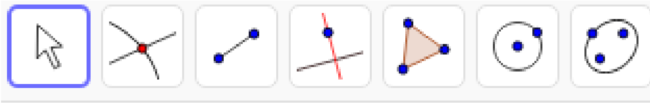
Gráfica 11: Un segmento que "pasa" por el centro de la circunferencia

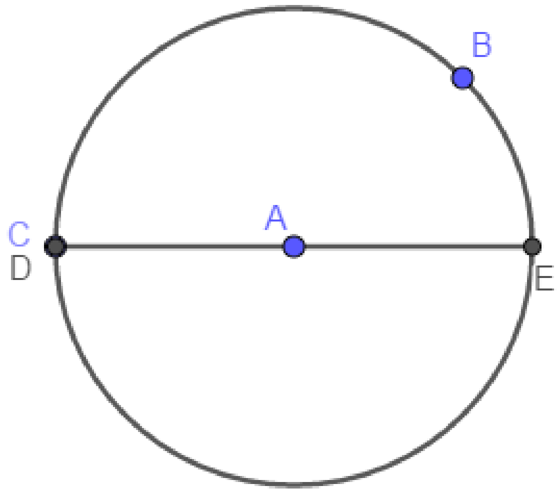
¿Es correcta nuestra "construcción"? No, es un dibujo, pero no una verdadera construcción. Si la "construcción" fuera correcta, debería soportar la prueba del "arrastre", es decir, sería posible interactuar con los distintos objetos que la conforman (puntos, segmentos, rectas, …) de manera que se respeten las relaciones geométricas que subyacen a la construcción. En este caso al mover el punto D, el segmento DB debería seguir pasando por el punto A, ya que un diámetro de una circunferencia siempre pasa por su centro, y en este caso, esto no sucede.



Gráfica 12: Un segmento que "pasa" por el centro de la circunferencia

Para corregir la situación anterior, trazamos la recta determinada por los puntos A y C, marcamos los puntos de intersección de esta recta con la circunferencia, seleccionamos el segmento determinado por los dos puntos de intersección y ocultamos la recta AC. El resultado es el siguiente.





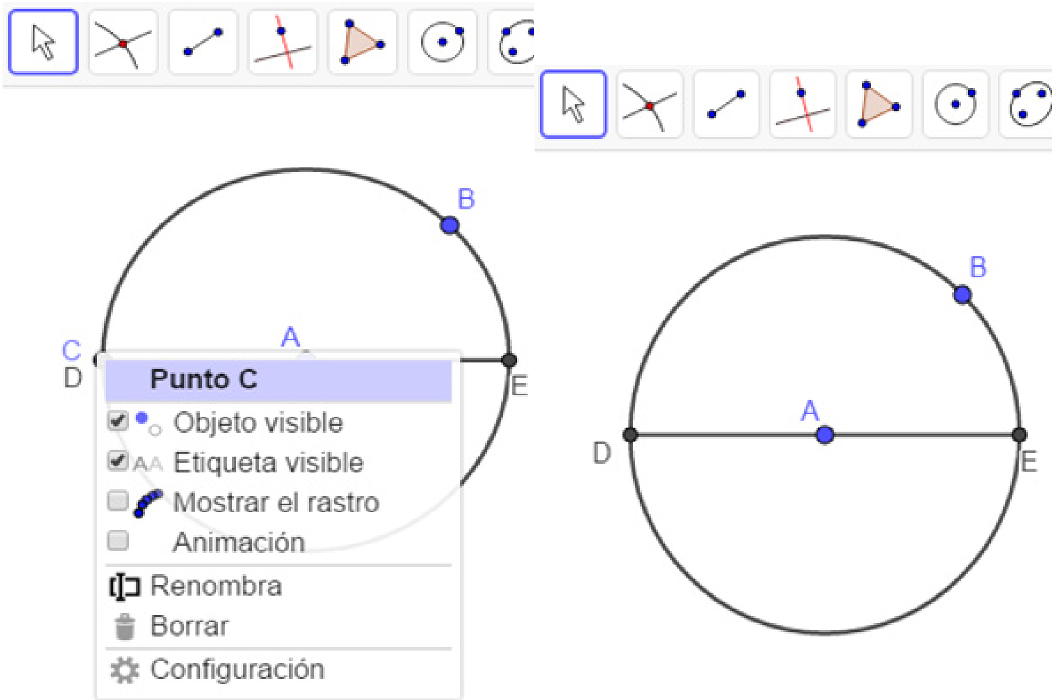
Gráfica 13: Un segmento que pasa por el centro de la circunferencia

Nótese que GeoGebra ha renombrado el punto C como D, se ha coloreado de negro y que al mover el punto C, que es libre, simultáneamente se mueve el punto D y en este movimiento, el punto A siempre se mantiene sobre el segmento CE; sin embargo, si oculta el punto C e intenta mover el punto D (o el E), ya no es posible mover ninguno de los dos, pues son objetos dependientes, han sido creados como intersección de la recta AC y la circunferencia. Con este proceso se ha realizado una construcción y no un dibujo.

Así entonces, no es lo mismo dibujar que construir. En la primera "construcción" se ha dibujado una cuerda que aparentemente pasa por el centro y en el segundo se ha construido una cuerda que verdaderamente pasa por el centro, es decir, en este caso, se ha desarrollado, una construcción. Cuando las relaciones o propiedades matemáticas entre los objetos están bien definidas, la construcción será correcta y, por tanto, al aplicar desplazamientos a los objetos que conforman la actividad, esta se transforma, pero conserva invariantes las relaciones geométricas iniciales.

De otra manera, dibujar consiste en trazar unos objetos junto a otros sin relaciones explícitas entre ellos y, por tanto, al modificar algunas de las condiciones iniciales se perderán las relaciones que deberían existir entre estos; sin embargo, si se realiza una construcción se están estableciendo relaciones (geométricas, aritméticas, funcionales, …) entre los objetos que se conservan al cambiar las condiciones iniciales. Esta es la característica básica de dinamismo que brinda GeoGebra.

Por otro lado, una de las maneras de ocultar un objeto, en este caso el punto C, es la siguiente. Acerque el cursor sobre el objeto, el punto C, y cuando aparezca la "mano" oprima el botón derecho del mouse. En este momento se despliega un menú del cual Ud. debe desactivar la opción "objeto visible". Realizado esto, el objeto el punto C, no se ve en la pantalla, aunque no ha sido borrado. Si se borra el objeto, desaparecen simultáneamente los objetos que dependen de él.

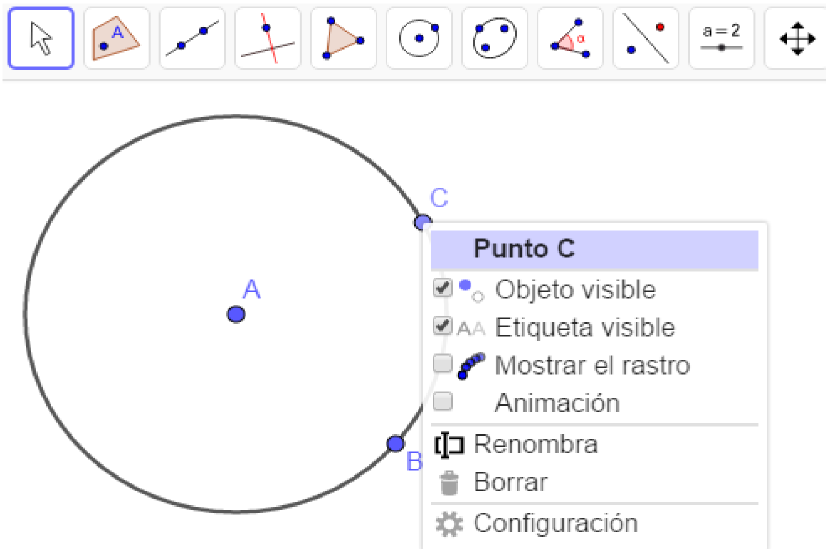


Gráfica 14: Ocultar un objeto

1.4 Animación, coloración y rastro de un objeto.

En esta sección se ilustran algunas de las opciones que permiten construir en GeoGebra objetos, en nuestra opinión, visualmente llamativos como el que se ilustra con el siguiente proceso.

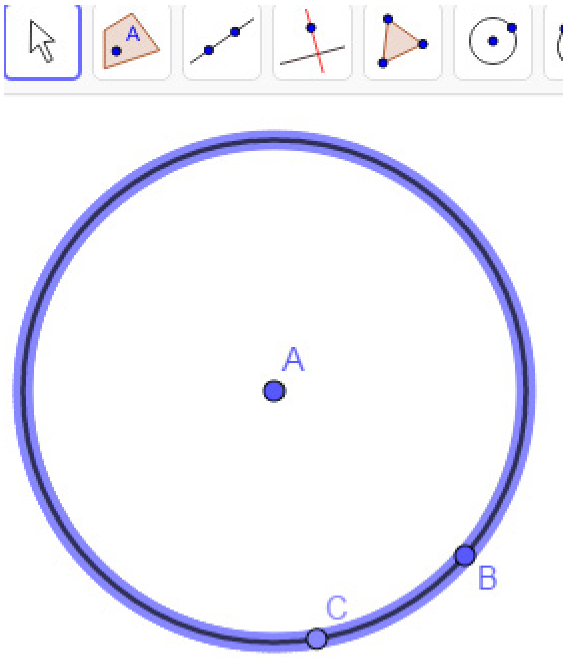
Para iniciar, construya una circunferencia de centro A, radio AB y ubique un punto C sobre la circunferencia.



Gráfica 15: Objetos iniciales para una animación.

El movimiento automático del punto C sobre la circunferencia se obtiene seleccionando el punto C con el botón derecho del mouse, con lo cual aparece una ventana y al seleccionar **animación**, se inicia el movimiento del punto C. Para detener la animación damos clic sobre un botón que aparece en la esquina inferior izquierda de la ventana gráfica y se reinicia la animación, al oprimirlo nuevamente.

Algo más llamativo se obtiene, seleccionando el punto C con el botón derecho del mouse, con lo cual se obtiene el menú ya mostrado, se selecciona la opción **Mostrar el rastro** y se anima el punto C. Se obtiene aquello que mostramos a continuación.



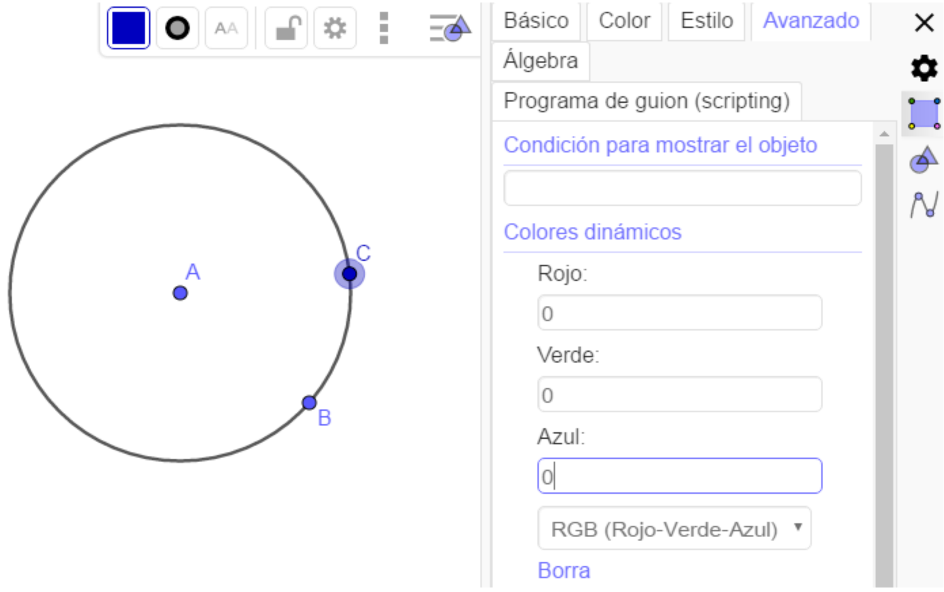
Gráfica 15: El rastro de un punto.

El rastro se borra oprimiendo simultáneamente Ctrl+F

Podemos mejorar esta imagen al lograr que el punto C vaya cambiando de color a medida que se mueve sobre la circunferencia. Esto se obtiene de la siguiente manera. Seleccione el punto C con el botón derecho del mouse, para obtener el menú usual, deshabilite la opción **Mostrar rastro** y seleccione de la opción **configuración**. Al realizar esto se despliega una nueva ventana como se muestra en la gráfica siguiente.

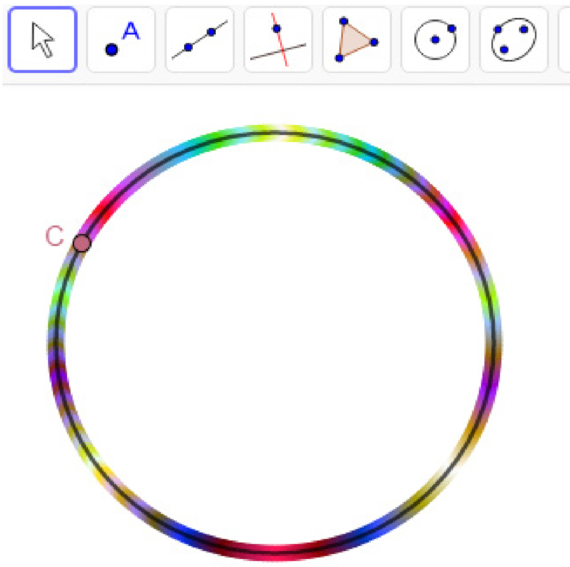
Gráfica 16: La ventana de propiedades de un objeto.

De esta ventana se selecciona la opción **Avanzado** con lo cual se obtiene, el siguiente menú.



Gráfica 17: La pestaña avanzado de un objeto.

En las casillas Rojo, Verde, Azul se escribe, por ejemplo, x(C), y(C), x(C)*y(C) respectivamente y cerramos la ventana. Con ello se logra que el punto C cambie de color a medida que su posición cambia en el plano, en este caso a medida que el punto C se mueva sobre la circunferencia. Si ahora se anima el punto C se obtiene algo semejante a aquello que se muestra a continuación.



Gráfica 18: El rastro generando colores variables de un punto.

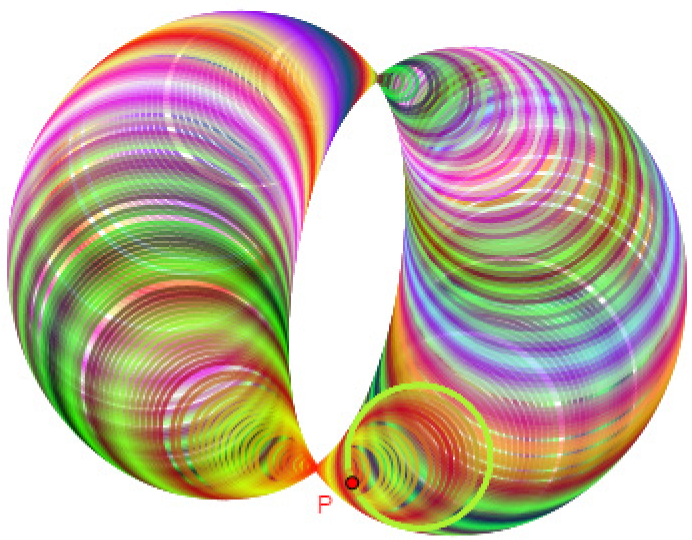
Es necesaria una observación. Si C es un punto del plano, las expresiones x(C) y y(C), proporcionan en GeoGebra, respectivamente la abcisa y la ordenada del punto C.

Combinando, de manera creativa, las acciones de animación, color, rastro y algunos comandos de GeoGebra, se pueden obtener figuras verdaderamente llamativas. Por ejemplo, con la siguiente lista de instrucciones:

1. Cree una circunferencia cualquiera, seleccione un punto A sobre ella y un punto B en su interior, diferentes a los utilizados para generar la circunferencia.

2. En la cuarta opción de izquierda a derecha de la barra de herramientas, seleccione la opción **"Tangentes",** quinta opción de arriba hacia abajo. Al dar clic, sobre el punto A y luego sobre la circunferencia, con el botón izquierdo del mouse, se crea la recta tangente a la circunferencia en el punto A.
3. Al seleccionar, del mismo menú, la opción **"Perpendicular"** y dar clic sobre el punto B y la recta tangente se crea la recta perpendicular a esta recta en el punto B.
4. Con la herramienta **"Intersección",** que se encuentra, de izquierda a derecha, en la segunda opción de la barra de herramientas, construya el punto P de intersección de estas rectas.
5. Con la herramienta **"Circunferencia(centro, punto)"**, que se encuentra, de izquierda a derecha, en la sexta opción de la barra de herramientas, construya la circunferencia de centro A que pase por P.
6. Al dar clic, con el botón derecho del mouse, sobre esta circunferencia, se muestra una nueva ventana. De esta ventana, de clic sobre la opción **configuración** y en la pestaña **avanzado**, asigne a esta circunferencia colores que dependan de las coordenadas del punto P, por ejemplo, en las correspondientes casillas de los colores, escriba: Rojo: x(P), Verde: x(P)*y(P) y Azul: y(P).
7. Nuevamente, al dar clic con el botón derecho del mouse, sobre esta circunferencia se muestra de nuevo la correspondiente caja de diálogo de la cual debe seleccionar la opción mostrar el **rastro** de la circunferencia de centro A.
8. Oculte los elementos que no considere necesarios.
9. Con el botón derecho del mouse de clic sobre el punto A y de la ventana que se genera de clic sobre la opción **Animación.**

El punto A se mueve sobre la circunferencia inicial, con lo cual se produce el movimiento del punto P, pues este depende de A y este movimiento genera una figura análoga a la que se muestra a continuación:

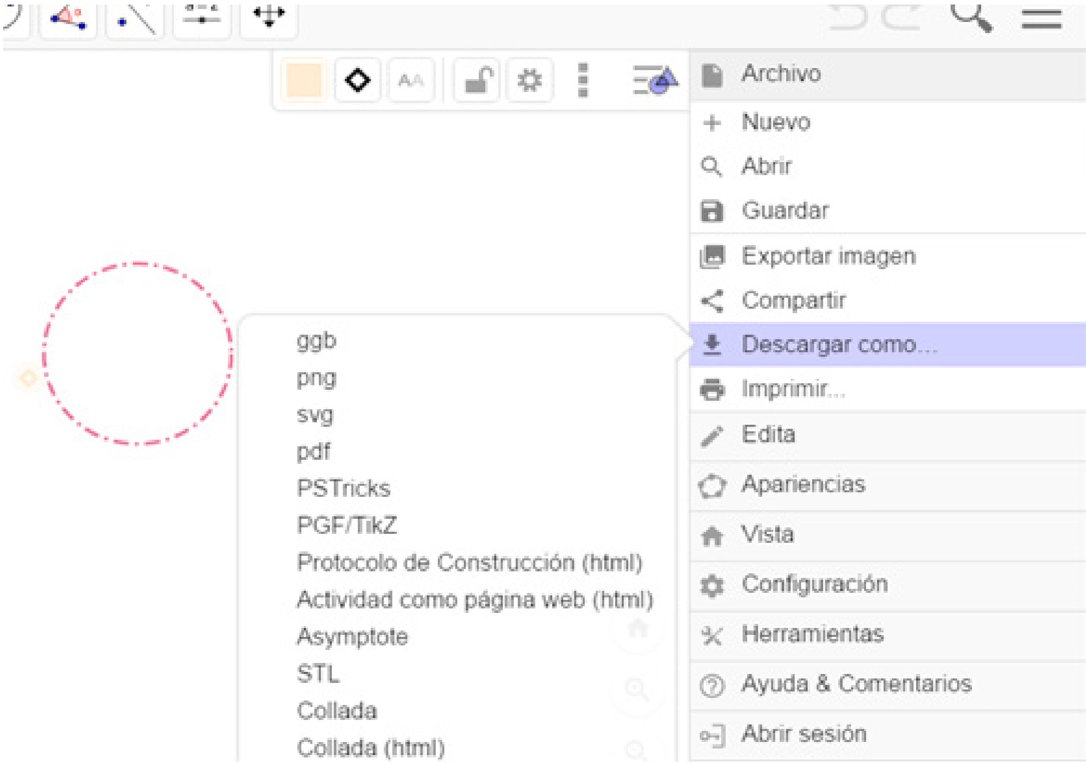


Gráfica 19: El resultado de el rastro, el color variable y la animación de un punto.

Realice esta construcción y si lo desea, puede guardarla de la siguiente manera.

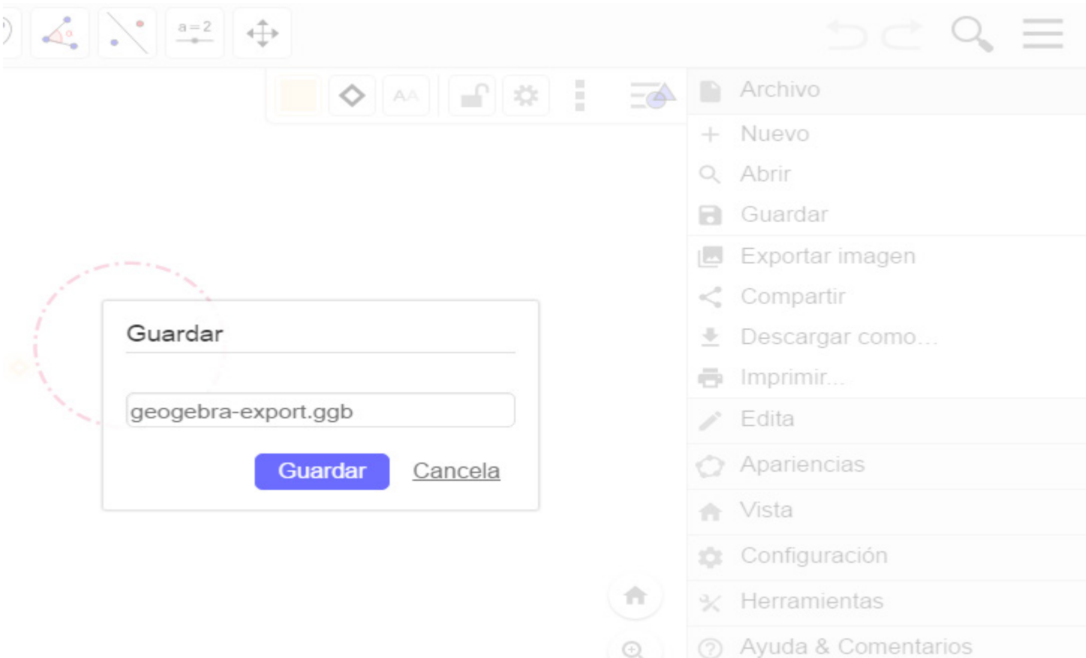
1.5 Guardar un archivo.

Seleccione el botón que se encuentra en la esquina superior derecha de la ventana gráfica de GeoGebra y del menú que se expone, elija la opción **Descargar como**. Con ello se visualiza una pantalla como la siguiente en la cual se muestran todas las extensiones con las cuales es posible guardar un archivo elaborado en GeoGebra.



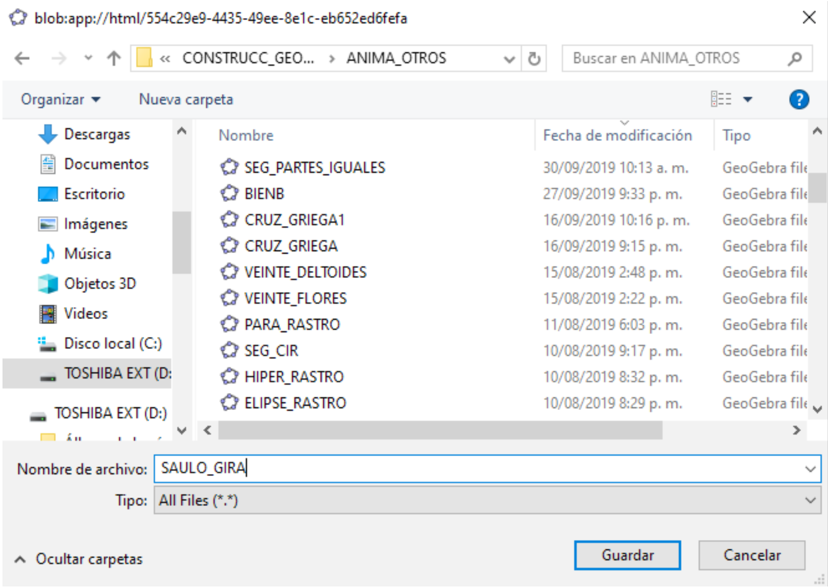
Gráfica 20: La ventana que permite guardar un archivo.

Dado que en esta ocasión deseamos guardarlo como un archivo propio de GeoGebra seleccionamos la opción **ggb** con lo cual se despliega una nueva ventana como se muestra a continuación.



Gráfica 21: La ventana que permite asignar el nombre de un archivo.

En ella al dar clic en guardar se muestra, como es usual en otros programas, la ventana en la cual podemos asignar al archivo el nombre que deseamos y seleccionar la carpeta en la cual guardaremos el mismo. En este caso le hemos asignado el nombre SAULO_GIRA y al dar nuevamente guardar el archivo se guarda en la carpeta seleccionada.



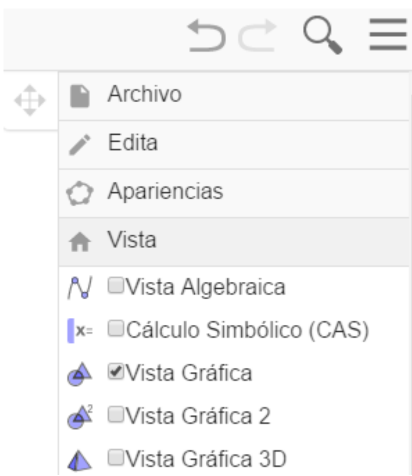
Gráfica 22: La carpeta seleccionada para guardar el archivo.

1.6 Deslizadores, texto dinámico y Látex.

Entre las variadas características que posee GeoGebra, que permiten construir elementos que pueden ayudarle en su labor pedagógica en el aula, en este apartado mencionaremos dos de ellas. La primera se relaciona con una manera diferente de realizar una animación con el uso de la herramienta denominada **Deslizador** que corresponde a la primera opción de la ventana que se despliega al seleccionar del menú de la barra de herramientas la décima opción de izquierda a derecha. La segunda se refiere a la utilización de la herramienta **Texto** que es la segunda opción de la misma ventana y permite la creación, en una construcción, de un texto o una fórmula Látex, así como texto dinámico, es decir, texto que cambia si se modifican los parámetros que permitieron crearlo.

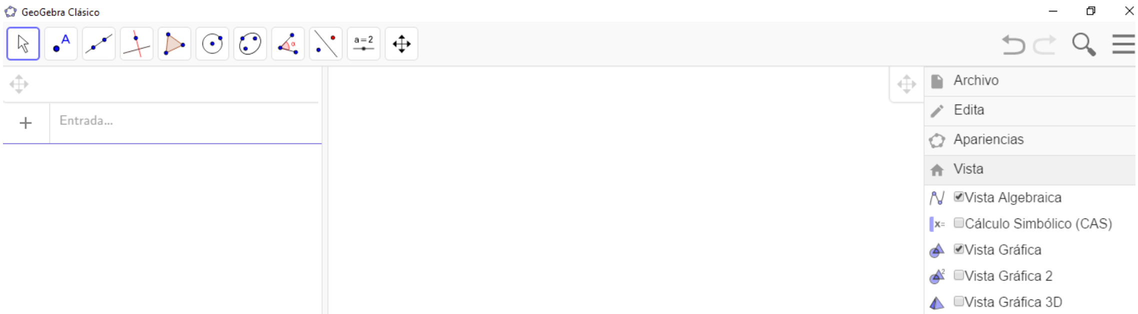
Ilustraremos el uso de estas herramientas con la elaboración de un archivo que nos permita "demostrar", el siguiente resultado de la geometría Euclidiana. "La suma de los ángulos internos de un triángulo cualquiera es 180º". El siguiente proceso nos permite obtener esto.

1. Inicie GeoGebra y de clic en la esquina superior derecha de la ventana gráfica con lo que se muestra un menú en el que, de arriba hacia abajo en la cuarta posición, se encuentra la opción **Vista**, la cual al ser seleccionada y dar clic izquierdo sobre ella, despliega un nuevo menú así: Active las vistas gráfica y algebraica



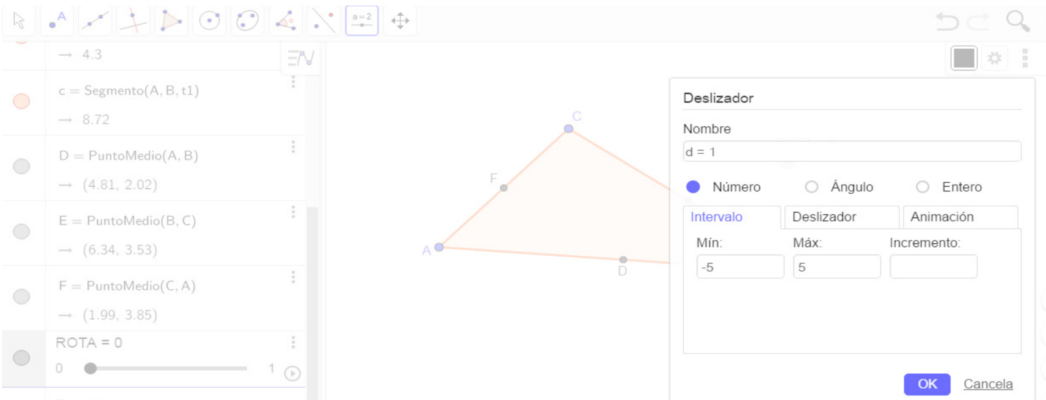
Gráfica 23: Las diferentes opciones para las vistas de GeoGebra.

De este menú seleccione **Vista algebraica,** con lo cual se han activado las vistas gráfica y algebraica y su pantalla debe verse de la siguiente manera:



Gráfica 24: Las ventanas algebraica y gráfica de GeoGebra.

2. En la cuarta opción de la barra de herramientas se encuentra, la herramienta Polígono. Cree, con esta herramienta, un triángulo cualquiera ABC, dando clic izquierdo sobre tres puntos cualesquiera A, B y C y nuevamente clic sobre el punto A.
3. Construya, con la herramienta **Medio o Centro**, que se encuentra en la segunda opción de la barra de herramientas de izquierda a derecha, dando clic izquierdo sobre los puntos A y B, B y C y C y A, respectivamente, los puntos medios de los segmentos AB, BC, AC. El sistema nombra a estos puntos como D, E y F, respectivamente.
4. En el menú correspondiente a la décima opción de la barra de herramientas seleccione la herramienta **Deslizador** y de clic en una zona libre de la pantalla. Con ello se visualiza la siguiente ventana, en la cual puede asignar los valores que desee a los parámetros del deslizador.



Gráfica 25: La ventana que permite crear un deslizador.

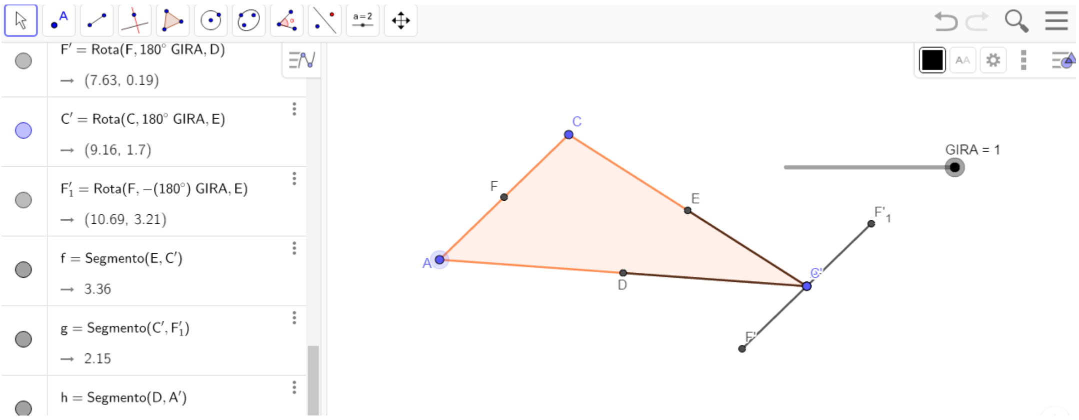
Para el caso, hemos seleccionado: Mïn: 0, Máx: 1, Incremento: 0.01 y como Nombre: GIRA. Al dar OK, queda construido el deslizador.

Utilizaremos este deslizador para “mover” de manera adecuada los ángulos en A y C hacia el punto B; para ello, en la barra de entrada escriba:

5. Rota(F, 180º*GIRA, D) y de enter.
   Rota(A, 180º*GIRA, D) y de enter.
   Rota(C, -180º*GIRA, E) y de enter.
   Rota(F, -180º*GIRA, E) y de enter.

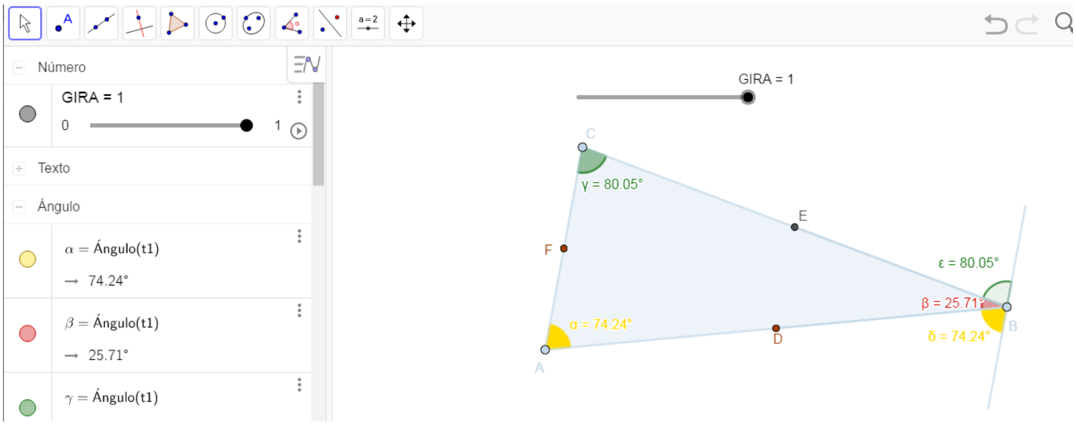
La instrucción 5, por ejemplo, significa que el punto F rota, en el sentido de las manecillas del reloj, con centro en el punto D, hasta lograr un ángulo de 180º, mientras el deslizador GIRA se mueve de 0 a 1. Con estas órdenes se crean los puntos F’, A’, C’ y F'_1.

6. Construya los segmentos EC’, C’F_1’, DA’ y A’F’. Con ello se ha logrado “repetir” en A’ y C’ los ángulos en A y C. Si se mueve, manualmente, el deslizador hasta 1 se observa la siguiente figura.



Gráfica 26: El resultado de rotar algunos puntos.

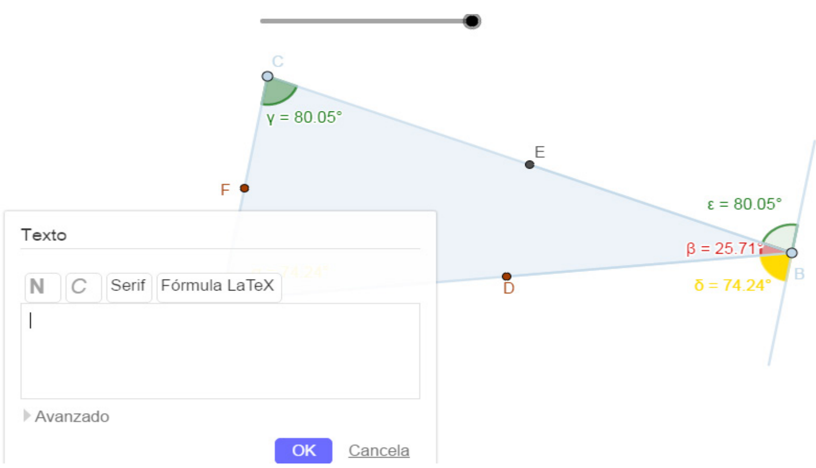
Estos son los pasos fundamentales de la “demostración”; lo que falta es dar un poco de estética a la misma. Para ello, damos color a los ángulos, cambiamos el color del triángulo, ocultamos los elementos que no deseamos que se muestren en la pantalla, para obtener la siguiente gráfica.



Gráfica 27: Una "demostración visual" de un resultado.

Para complementar lo propuesto necesitamos incluir un texto, veamos esto.

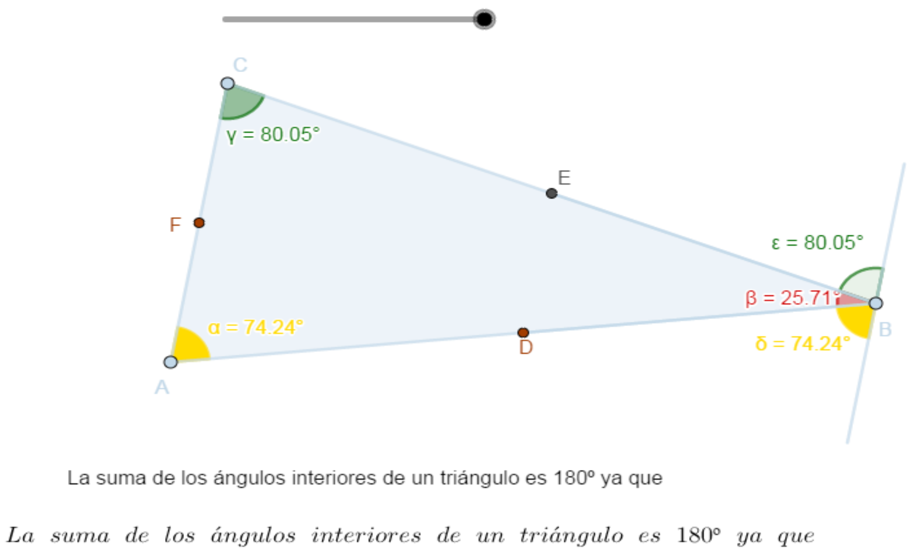
7. De la ventana que se despliega al escoger el deslizador seleccionamos la herramienta **Texto** y al dar clic sobre una parte libre de la ventana gráfica aparece el siguiente cuadro



Gráfica 28: La ventana que permite generar texto.

En el cual puede escribir texto “normal” o texto Látex, usando la sintaxis usual de Látex, para obtener el uno o el otro. La siguiente gráfica muestra texto normal y texto estático Látex. El texto Látex se ha obtenido con la siguiente sintaxis,

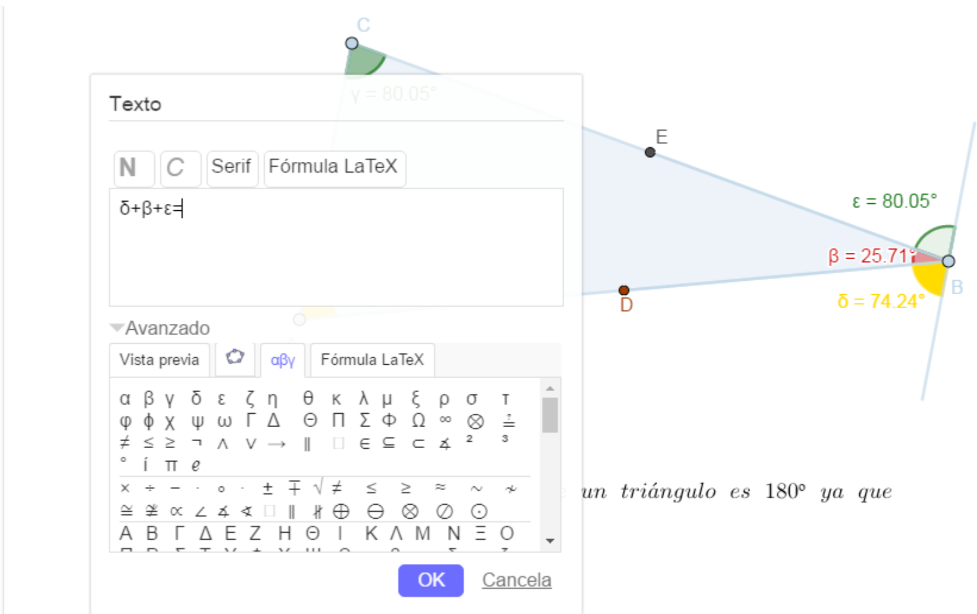
La\; suma\; de\; los \; ángulos\; interiores\; de\; un\; triángulo \; es \; 180º\; ya \; que



Gráfica 29: Texto usual y texto Látex en GeoGebra.

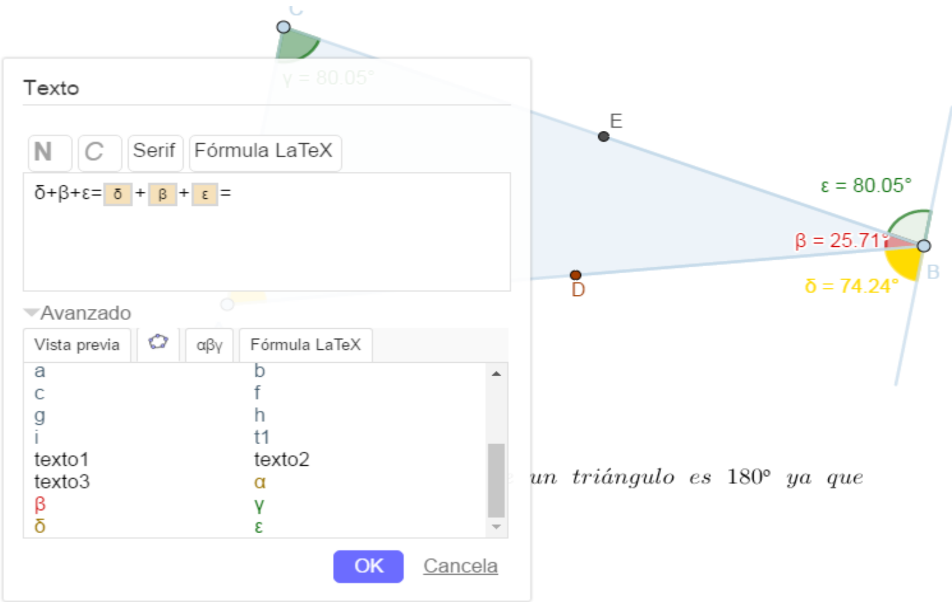
Mostramos como obtener texto dinámico para lo cual construiremos la expresión δ+β+ε=180º, la cual mostrará los valores de cada uno de los ángulos y se irá modificando a medida que se muevan los vértices del triángulo.

8 Seleccionamos la herramienta **Texto**, pulsamos sobre una zona libre de la vista gráfica para que aparezca la ventana usual, en ella escogemos **Avanzado** y de esta la opción, αβγ desde donde, dando clic sobre la letra (o símbolo) correspondiente, se puede escribir el texto δ+β+ε= como se muestra en la gráfica



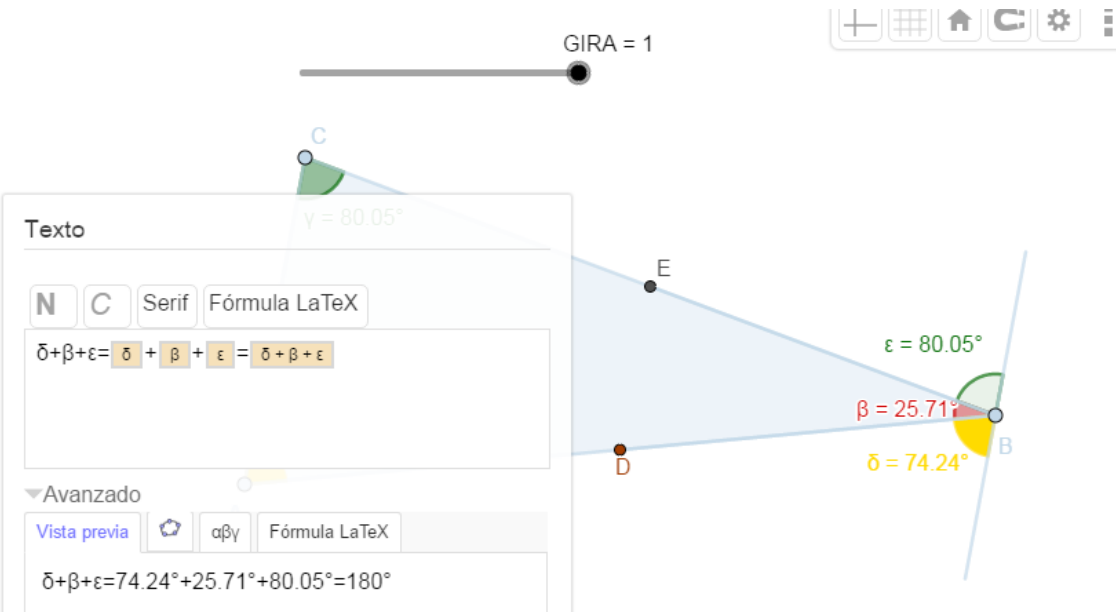
Gráfica 30: La ventana para generar símbolos especiales.

Ahora deseamos que se muestren los valores de los ángulos, para ello desde la misma ventana, **Avanzado,** seleccionamos la opción donde aparece el símbolo de GeoGebra, escogemos, dando clic sobre el objeto correspondiente, el primer valor δ, escribimos el signo +, y de la misma manera escogemos los otros dos valores para obtener lo que muestra la siguiente gráfica.



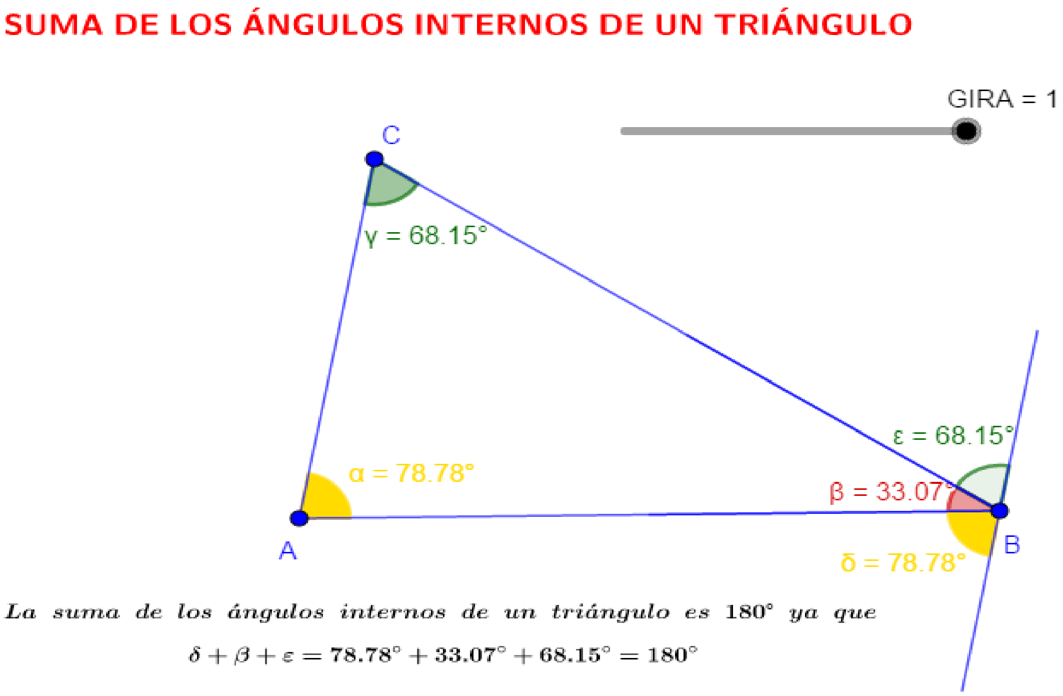
Gráfica 31: La ventana para generar texto dinámico.

Únicamente falta, obtener la suma de estos valores, para ello desde la misma ventana, seleccionamos el primer valor δ, (valor, no texto), nos situamos en el interior del último cuadro y dentro de él, escribimos como texto, no como valor, +β+ε para obtener lo que se muestra en el siguiente gráfico. En él adicionalmente, del mismo menú, se ha seleccionado **vista previa** con lo cual se muestra una previsualización de aquello que se mostrará en la vista gráfica al oprimir **OK**.



Gráfica 32: El texto dinámico generado.

De manera análoga podemos complementar la vista con un título, que por ejemplo diga, "SUMA DE LOS ÁNGULOS INTERNOS DE UN TRIÁNGULO", podemos darle color y negrilla y después de haber desactivado la ventana algebraica, obtenemos lo siguiente.



Gráfica 33: El resultado de todo el proceso.

Realice esta construcción y si lo desea, puede guardarla como se explicó anteriormente.

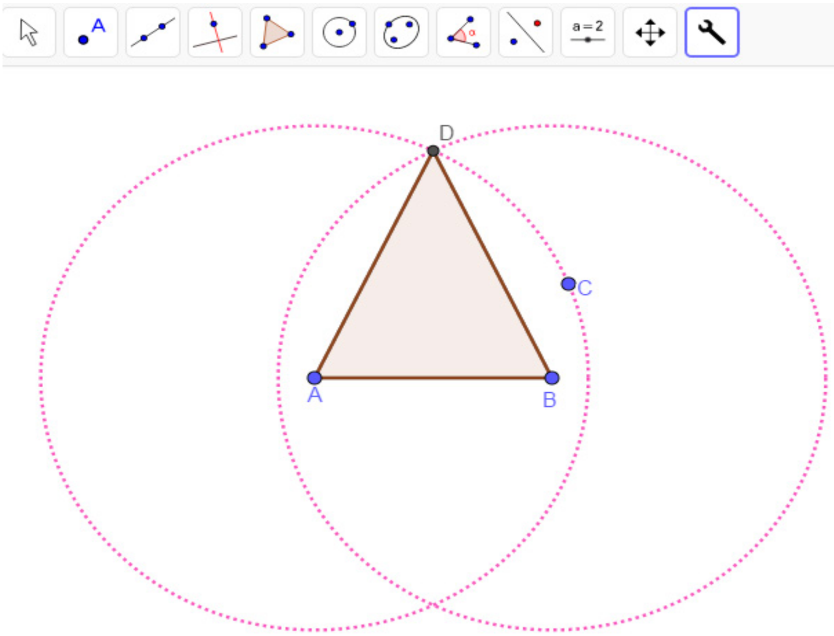
1.7 Construcción de una herramienta propia.

GeoGebra tiene incorporadas algunas opciones que permiten la elaboración de “Macro construcciones”, que corresponden a objetos que Ud. puede utilizar dentro de un proceso diferente sin necesidad de realizar nuevamente toda la construcción.

Ilustramos a continuación el proceso con la construcción de una herramienta que nos permita la creación de un triángulo isósceles a partir de tres puntos no colineales A, B y C tales que la distancia entre A y C sea mayor que la mitad de la distancia entre A y B. En estas condiciones el segmento AC determina la longitud de los lados congruentes del triángulo. El proceso es el siguiente.

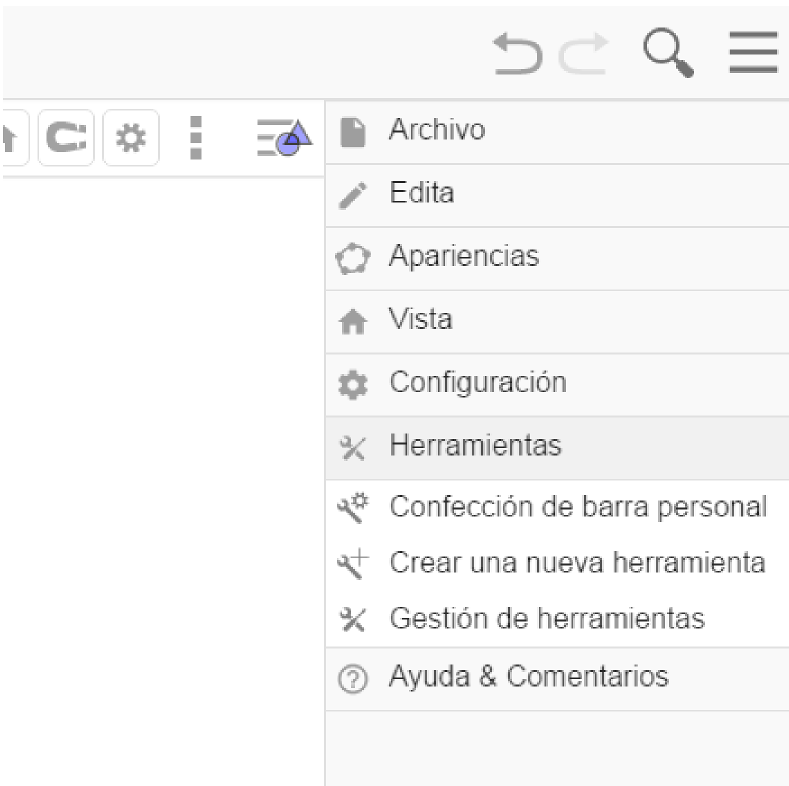
1. Construcción del triángulo isósceles.
   a. Seleccione, con el comando **Punto**, tres puntos cualesquiera A, B y C tales que la distancia entre A y C sea mayor que la mitad de la distancia entre A y B.
   b. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio** construya dos circunferencias. La primera de centro A y radio AC y la segunda de centro B y el mismo radio.
   c. Con la herramienta **Intersección** construya los puntos de corte de estas circunferencias. Sea D uno de estos puntos.
   d. Con la herramienta **Polígono** construya el triángulo ABD. Este triángulo es isósceles ya que los segmentos AD y BD son congruentes al segmento AC.

Realmente se han generado dos triángulos isósceles, el otro está determinado por los puntos A y B y el segundo punto de intersección de las dos circunferencias.



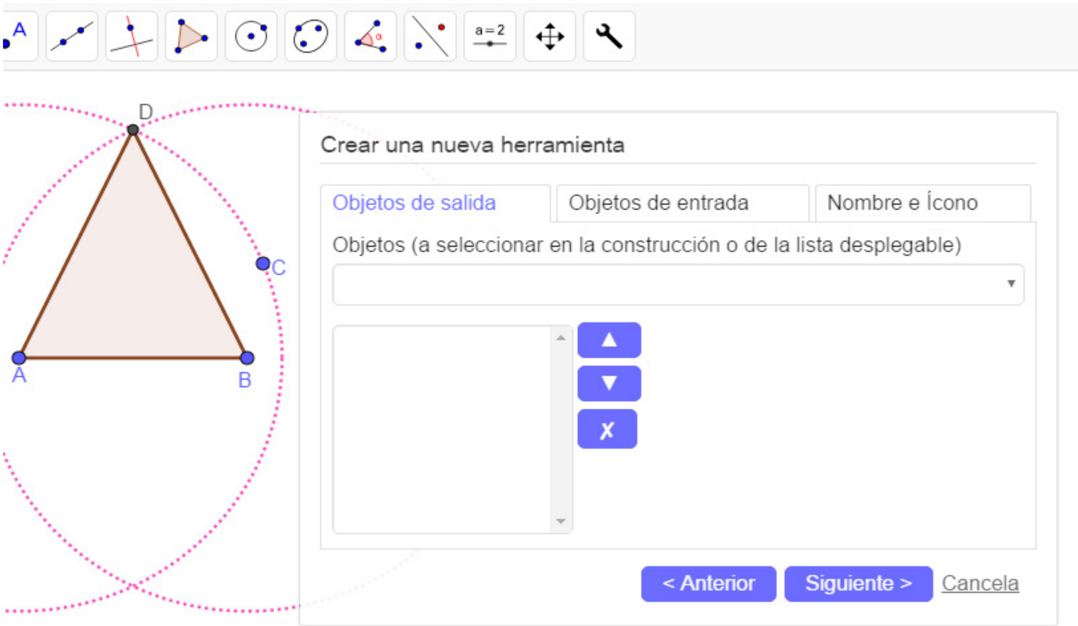
Gráfica 34: La construcción de un triángulo insósceles.

2. Elaboración de la herramienta.
   a. Al dar clic en la esquina superior derecha de la ventana gráfica aparece un menú en el cual, de abajo a arriba en la segunda posición, se encuentra la opción **Herramientas**, la cual al ser seleccionada despliega un nuevo menú así.



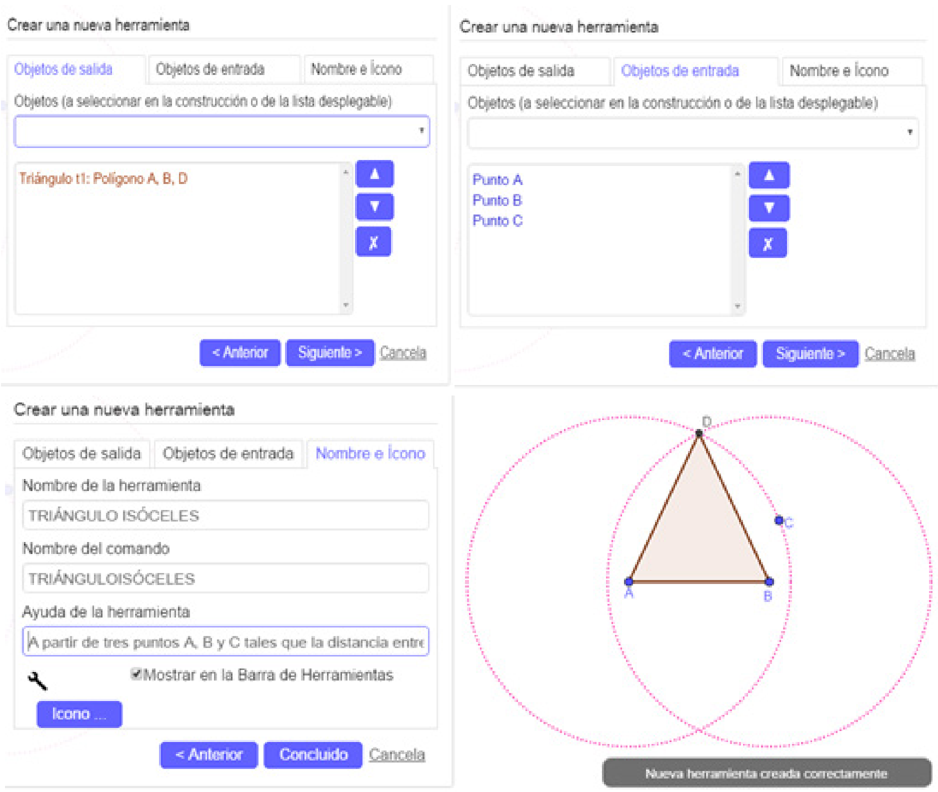
Gráfica 35: La ventana inicial para crear una herramienta.

   b. Seleccionamos **Crear nueva herramienta**, con lo cual obtenemos el siguiente cuadro.



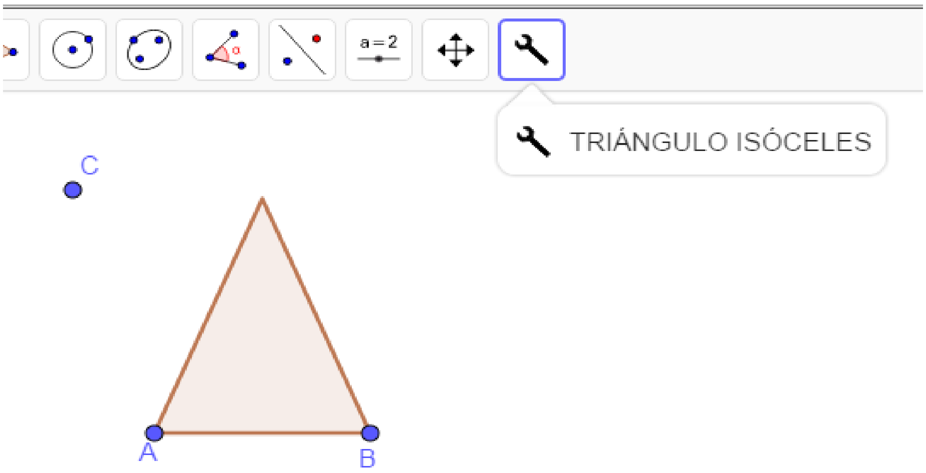
Gráfica 36: La ventana para generar los objetos básicos de la construcción de una herramienta.

Este cuadro nos permite “comunicarle”, a GeoGebra, en primer lugar, los elementos básicos para la construcción, para el caso, los puntos A, B y C, que para el software son los **Objetos de entrada**, en segunda instancia, el resultado de la construcción, para el caso, el triángulo ABD, que para el software son los **Objetos de salida**, a continuación podemos asignar un **nombre** para la macroconstrucción, un **nombre para el ícono** de la misma, para el caso TRIÁNGULO ISÓSCELES y una información de **ayuda**, por último al dar **concluido**, si la herramienta está bien creada, aparece el mensaje **“nueva herramienta creada correctamente”,** que indica el éxito de nuestro proceso. La siguiente gráfica resume lo anterior.



Gráfica 37: El proceso de generar una herramienta que permite crear un triángulo isósceles.

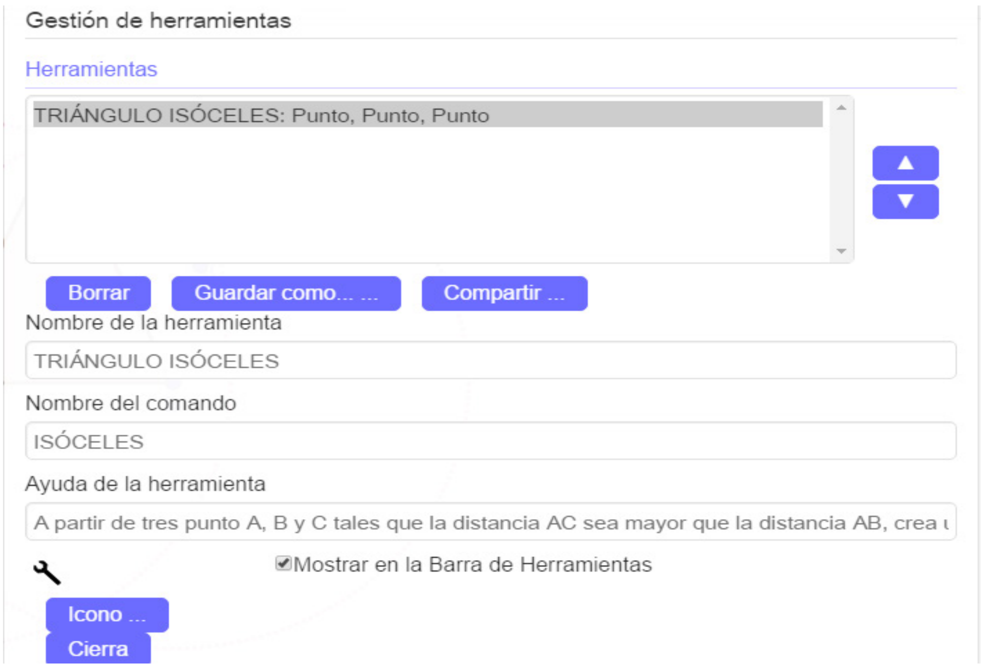
c. Con esto en la barra de herramientas se muestra el ícono correspondiente que nos indica que la herramienta puede ser utilizada a partir de este momento, así la gráfica siguiente nos muestra un triángulo isósceles creado a partir de la herramienta.



Gráfica 38: Un triángulo isósceles creado a partir de la herramienta.

Una vez que la herramienta ha sido creada, debemos guardarla para que pueda ser utilizada posteriormente. Este es un proceso que, por lo menos en la versión 6.0 de GeoGebra, no es transparente ya que el resultado no es lo que normalmente se esperaría.

d. El proceso es: Seleccionar del menú **herramientas** la opción **Gestión de herramientas** la cual despliega la siguiente ventana

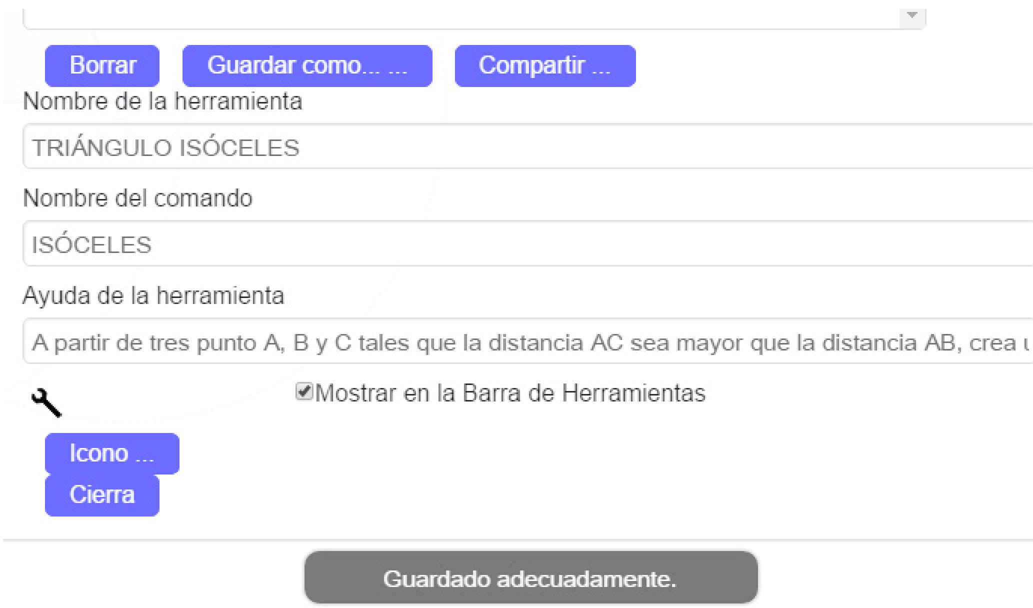


Gráfica 39: La ventana para "guardar" una herramienta.

En ella al seleccionar, **guardar como**, se muestra la siguiente ventana, en la cual podemos

Gráfica 40: El proceso para "guardar" una herramienta.

asignar el nombre a la herramienta, para el caso TRI_ISO y al dar **guardar** debería desplegarse, como es usual en todo programa, la opción en la cual es posible seleccionar el directorio apropiado en el cual almacenar el archivo; esto no sucede y en su lugar se genera un aviso en el que nos informa que el archivo ha sido **guardado adecuadamente**, pero no podemos conocer en donde, en todo caso ¡en ningún lugar del equipo queda almacenado!.



Gráfica 41: La herramienta fué guardada "exitosamente".

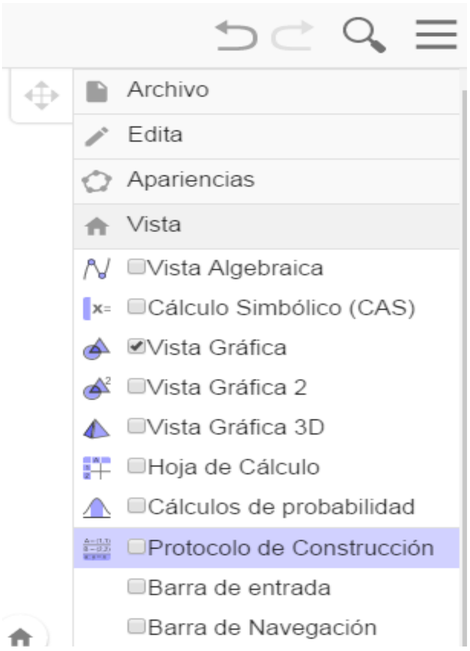
Sin embargo, la herramienta está activa y Ud. puede usarla sin dificultad. Si se guarda esta hoja de trabajo como un archivo *.ggb, al abrirlo nuevamente, la herramienta estará disponible para su utilización.

1.8 El Protocolo de construcción.

GeoGebra posee una opción, denominada **Protocolo de Construcción**, que le permite mostrar la secuencia de pasos que se utilizaron para realizar una construcción y por tanto posibilita rehacer totalmente la misma.

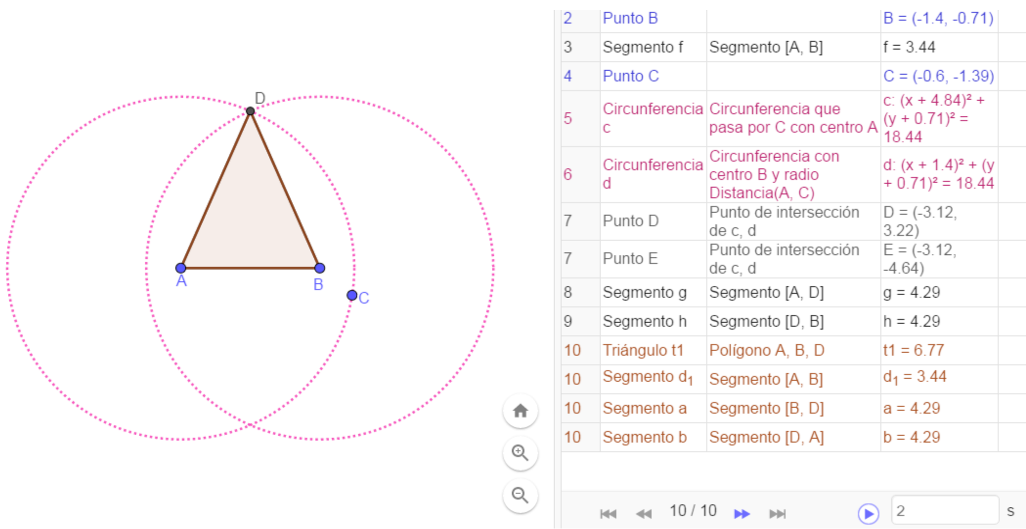
Ilustramos a continuación el proceso que permite utilizar esta opción.

1. Al dar clic en la esquina superior derecha de la ventana gráfica aparece un menú en el cual, de arriba a abajo en la cuarta posición, se encuentra la opción **Vista**, la cual al ser seleccionada despliega un nuevo menú así.



Gráfica 42: La ventana para generar el protocolo de construcción.

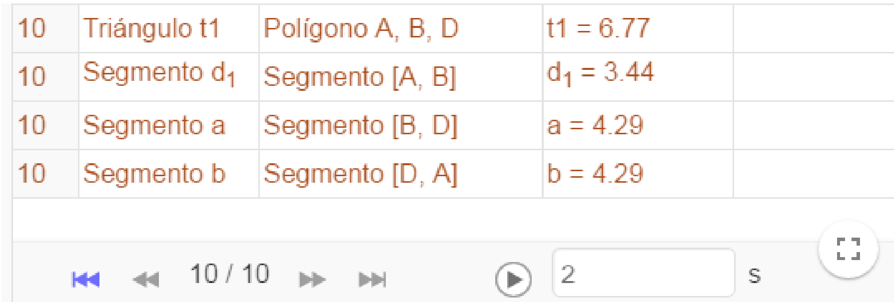
2. De este cuadro seleccionamos **Protocolo de Construcción**, con lo cual en la ventana gráfica se muestra una tabla donde se encuentran los pasos necesarios para realizar la construcción activa en ese momento, para el caso la secuencia de pasos que permiten construir un triángulo isósceles a partir de tres puntos A, B y C.



2	Punto B		B = (-1.4, -0.71)
3	Segmento f	Segmento [A, B]	f = 3.44
4	Punto C		C = (-0.6, -1.39)
5	Circunferencia c	Circunferencia que pasa por C con centro A	c: (x + 4.84)² + (y + 0.71)² = 18.44
6	Circunferencia d	Circunferencia con centro B y radio Distancia(A, C)	d: (x + 1.4)² + (y + 0.71)² = 18.44
7	Punto D	Punto de intersección de c, d	D = (-3.12, 3.22)
7	Punto E	Punto de intersección de c, d	E = (-3.12, -4.64)
8	Segmento g	Segmento [A, D]	g = 4.29
9	Segmento h	Segmento [D, B]	h = 4.29
10	Triángulo t1	Polígono A, B, D	t1 = 6.77
10	Segmento d_1	Segmento [A, B]	d_1 = 3.44
10	Segmento a	Segmento [B, D]	a = 4.29
10	Segmento b	Segmento [D, A]	b = 4.29

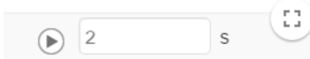
Gráfica 43: El protocolo de construcción de un triángulo isósceles.

3. Si Ud. observa en la parte inferior de este cuadro se encuentra **la barra de navegación** la cual posee unos botones que permiten avanzar o retroceder paso a paso la construcción. El gráfico muestra 10/10 que corresponde al décimo paso de los diez necesarios para la construcción del triángulo isósceles.



10	Triángulo t1	Polígono A, B, D	t1 = 6.77
10	Segmento d_1	Segmento [A, B]	d_1 = 3.44
10	Segmento a	Segmento [B, D]	a = 4.29
10	Segmento b	Segmento [D, A]	b = 4.29

Gráfica 44: La barra de navegación de una construcción.

Adicional a lo anterior se encuentra el botón  el cuál en este caso, permite reproducir, de manera automática cada 2 segundos, cada paso de la construcción. Si Ud. experimenta, con cierto cuidado, podrá observar que existen otras opciones que permiten, por ejemplo, intercalar o eliminar pasos de la construcción y otros.

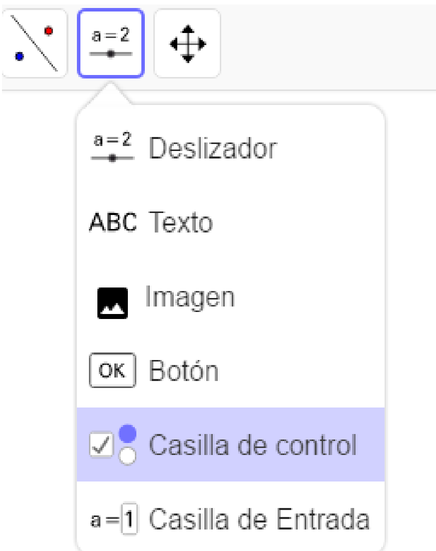
Finalmente, en lo que a este aspecto se refiere, desde el menú **Archivo** utilizando **Descargar como**, el protocolo de construcción puede exportarse, como archivo *.html e imprimirse en formato pdf.

1.9 La utilización de la casilla de control.

GeoGebra posee una opción, denominada **Casilla de Control**, que le permite mostrar u ocultar objetos, previamente seleccionados, que hacen parte de una construcción. Esta opción posibilita realizar una presentación didáctica de una construcción sobre un determinado tema.

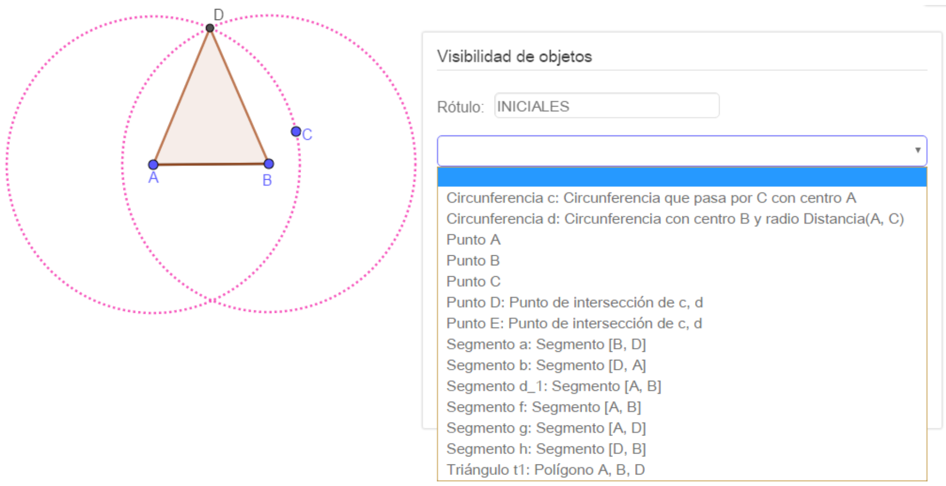
Ilustramos a continuación el proceso que permite utilizar esta opción, con la construcción de un triángulo isósceles.

La **Casilla de control** se encuentra en la barra de herramientas en el submenú correspondiente al deslizador.



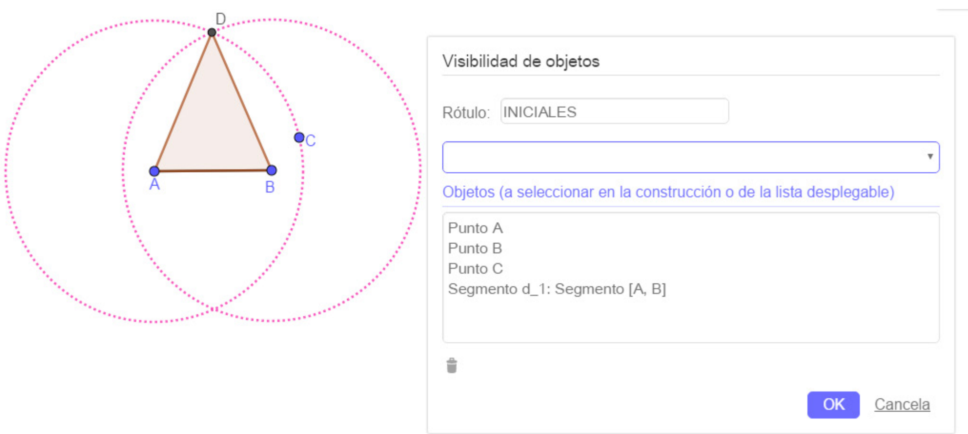
Gráfica 45: La ventana para la creación de la casilla de control.

1. Al seleccionar esta opción y dar clic sobre una zona libre de la pantalla aparece un cuadro en el cual es posible ubicarle un título y seleccionar los objetos que aparecerán al activar o desactivar el botón correspondiente.



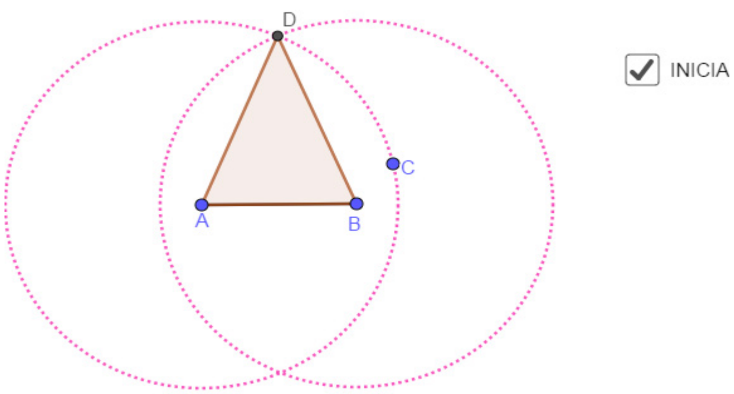
Gráfica 46: Ventana para la selección de los objetos asociados a la casilla.

2. En esta ventana se ha colocado como rótulo INICIALES y seleccionamos, en este caso, los objetos básicos que permiten la construcción, es decir los puntos A, B, C y el segmento AB.



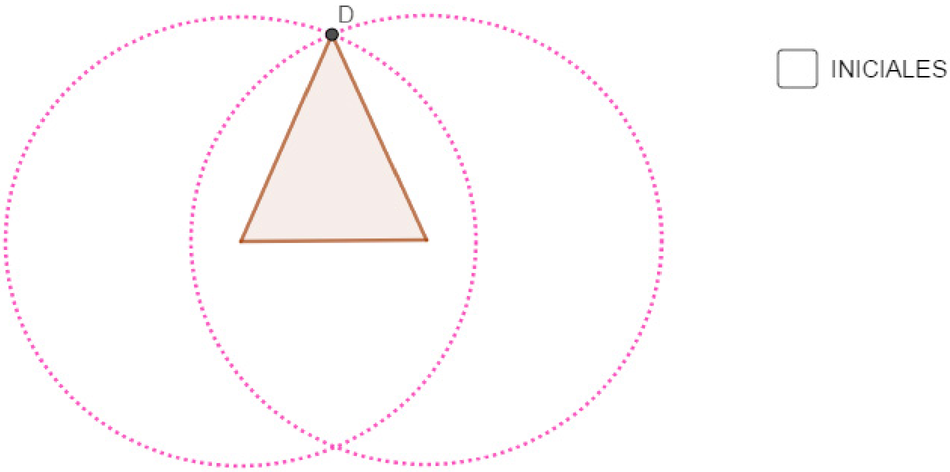
Gráfica 47: Objetos asociados a la casilla INICIALES.

3. Al dar clic sobre OK se genera un botón con el correspondiente rótulo, que presenta una especie de "visto bueno".



Gráfica 48: La casilla INICIALES activada.

4. Al desactivar el botón, dando doble clic sobre él, desaparecen los objetos asignados al botón, para el caso los puntos A, B, C y el segmento AB.

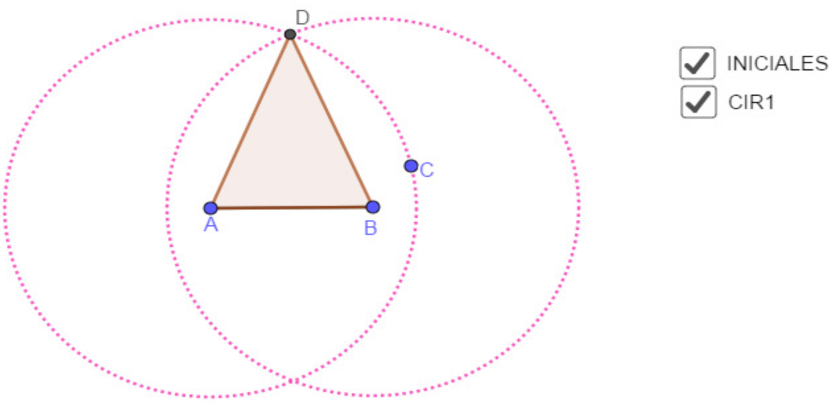


Gráfica 49: La casilla INICIALES desactivada.

5. Continuando de esta manera podemos construir los botones necesarios que nos permitan presentar, a nuestro gusto, los elementos de la construcción. Por ejemplo, podríamos mostrar a continuación, la circunferencia de centro A que, pasa por C.

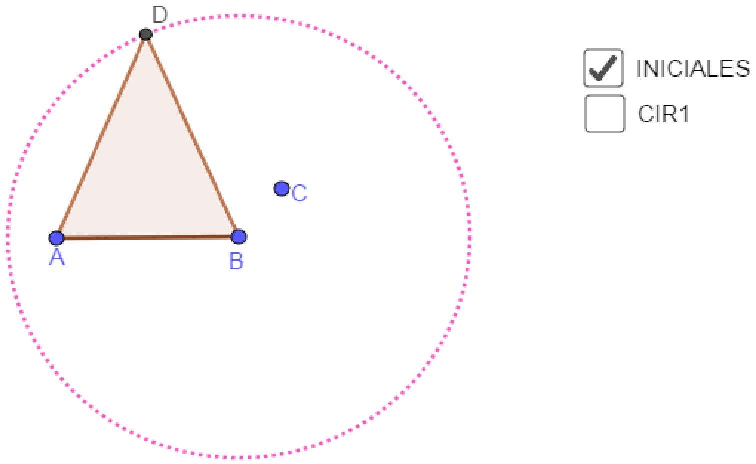
Gráfica 50: La construcción de la casilla CIR1.

6. Al dar clic sobre OK se genera el botón con el correspondiente rótulo.



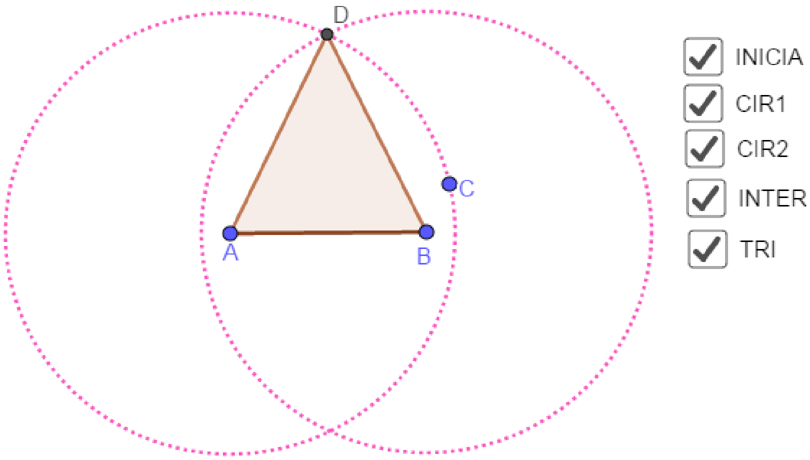
Gráfica 51: Las casillas INICIALES y CIR1 activadas.

7. Nuevamente, al desactivar el botón, dando doble clic sobre él, desaparecen los objetos asociados al botón, para el caso la circunferencia de centro A, que pasa por C.



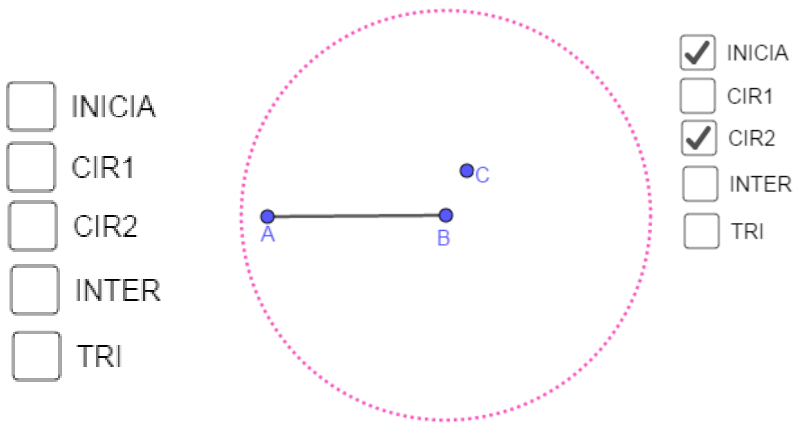
Gráfica 52: La casilla INICIALES activada y la casilla CIR1 desactivada.

8. La siguiente gráfica muestra, para el caso, la etapa final de este proceso la cual ha requerido cinco botones que se encuentran activados.



Gráfica 53: Las cinco casillas activadas.

9. Así mismo, únicamente como ilustración, las siguientes dos gráficas muestran los cinco botones desactivados y tres desactivados respectivamente.



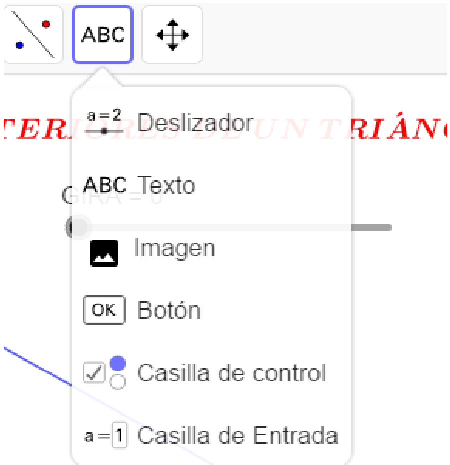
Gráfica 54: Las cinco casillas desactivadas y las casillas INICIALES y CIR2 activadas.

1.10 Los botones en GeoGebra.

Un botón es un objeto de GeoGebra, configurado de tal manera que, al dar clic sobre él, permite la ejecución de una sucesión de ordenes previamente creadas. Esta serie de instrucciones reciben, en GeoGebra, el nombre de guion (Script).

Las siguientes instrucciones permiten la creación de un botón que anima un deslizador, para nuestro caso el deslizador GIRA de la sección 1.6.

1. La primera acción consiste en crear un deslizador. En esta ilustración, ha sido creado y tiene por nombre GIRA.
2. Se crea, una variable lógica que, por ejemplo, se llame **Anima,** escribiendo desde la barra de entrada Anima=true. Una variable lógica admite únicamente dos valores y para el caso esta variable toma el valor true.
3. Desde la barra de **herramientas**, al dar clic sobre la segunda opción de derecha a izquierda, se genera una ventana en la cual la cuarta opción, de arriba abajo, corresponde a la de botón.

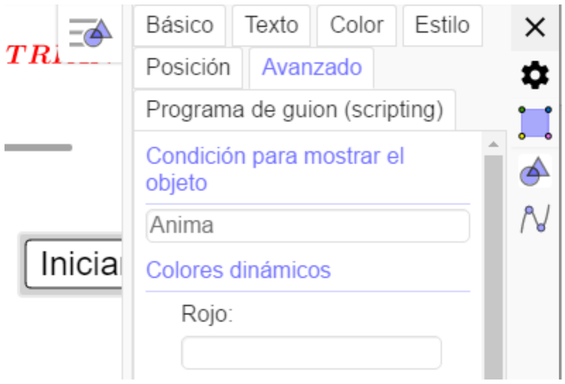


Gráfica 55: El submenú que permite crear los botones.

Al dar clic sobre botón, y nuevamente clic sobre cualquier lugar de la pantalla, se genera una caja de diálogo en la cual se muestran, en blanco, una casilla para escribir el **Rótulo** del botón y otra para su correspondiente **Guion.** La siguiente imagen muestra, en este caso, lo que se ha escrito, para cumplir el objetivo.

Gráfica 56: La ventana para el nombre y el script del botón.

4. Al dar clic sobre OK se crea el botón, que tiene por rótulo Iniciar.
5. Si se da clic derecho sobre el botón se despliega una ventana que tiene varias opciones una de las cuales es **configuración**. Al dar clic sobre ella se muestra la configuración del botón en la cual, una de las opciones es, **Avanzado**. Al pulsar sobre esta opción, se muestran algunas casillas vacías, una de las cuales corresponde a **Condición para mostrar el objeto**. En ella se escribe Anima y se cierra la ventana, desde la esquina superior derecha.



Gráfica 57: La ventana que permite configurar un botón.

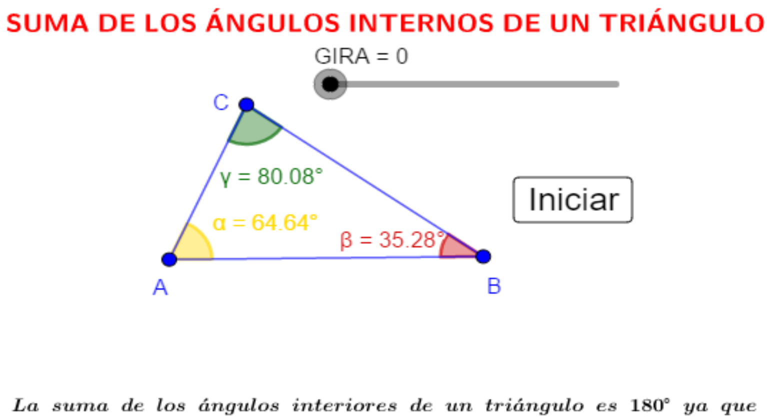
Si en este momento se pulsa el botón iniciar, el deslizador se, anima, pero el botón se oculta. Para detener la animación se debe acceder a la configuración del deslizador y desactivar la opción animación.

Construimos ahora un segundo botón que permita parar la animación, el cual se ubicará en la misma posición del botón Animar para crear la sensación de que se realizan estas acciones con un único botón.

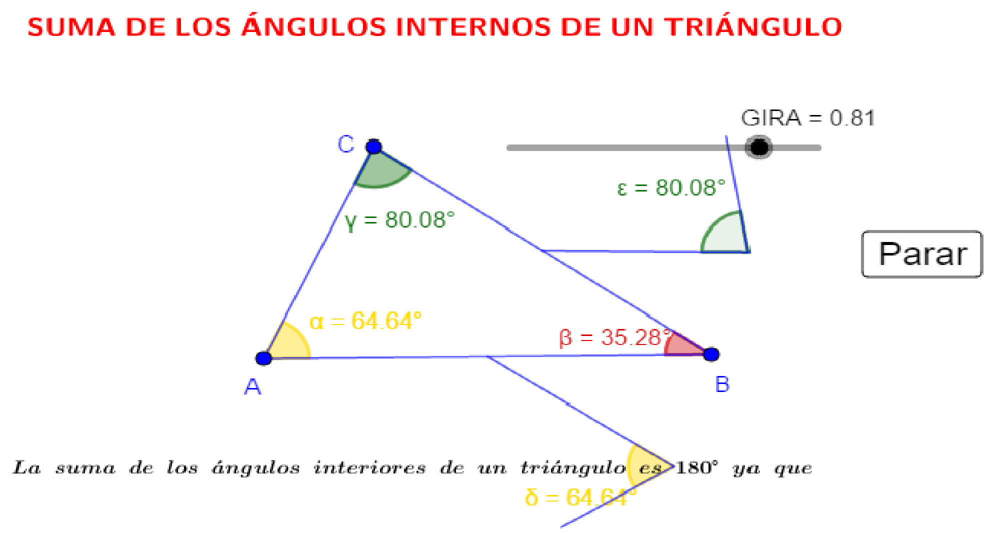
6. Se repite el paso 3 pero en la casilla del rótulo del botón se escribe, Parar, y en la casilla Guion se escribe
   IniciaAnimación[GIRA, False]
   Anima=true
   Damos OK y con esta acción se crea el botón Parar.
7. Repetimos el paso 5 pero ahora en la pestaña **avanzado**, en la, **Condición para exponer el objeto**, se escribe, ¬Anima y se cierra la ventana.

   Al dar clic sobre el botón iniciar, se inicia la animación y aparece el botón Parar, al pulsar este botón, se detiene la animación y aparece el botón Iniciar.

   Las siguientes imágenes muestran dos posiciones de esta animación.

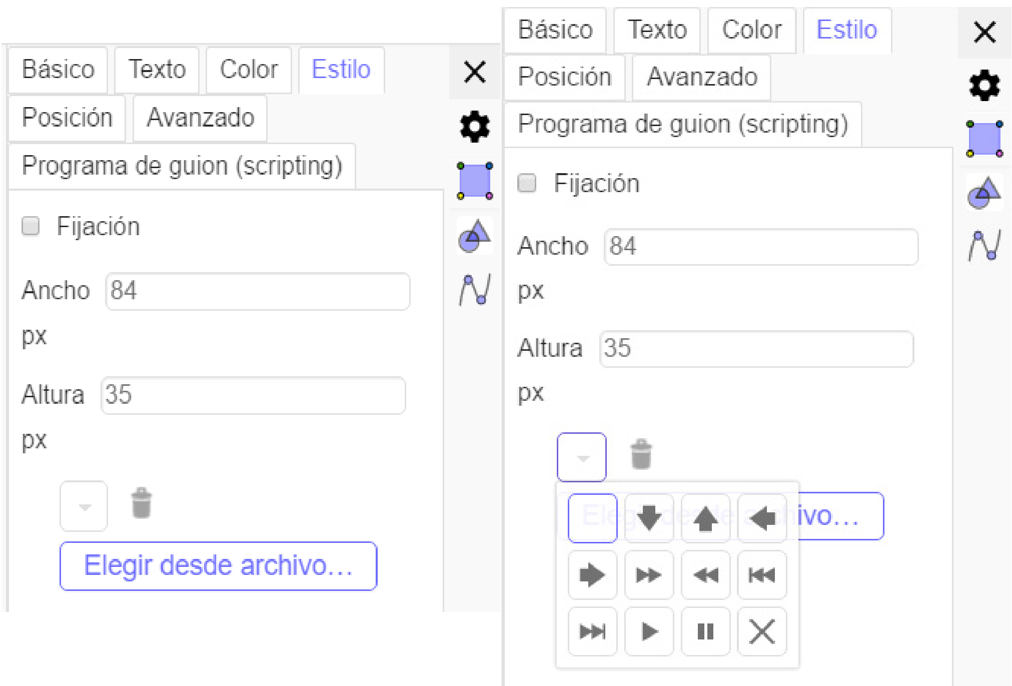


Gráfica 58: La posición inicial con el botón iniciar desactivado.



Gráfica 59: Una posición intermedia con el botón iniciar activado.

Una observación. Consideramos apropiado mencionar que una vez que un botón ha sido creado, su estilo puede modificarse accediendo a su configuración con lo cual se visualiza la ventana usual en la que se muestra la pestaña estilo; al acceder a ella se genera una nueva caja de diálogo en la cual al pulsar el cuadro que se encuentra sobre y a la izquierda del texto “Elegir desde archivo…”, se genera una ventana desde donde se. puede seleccionar el botón que prefiera y se adapte a la acción que desee realizar.



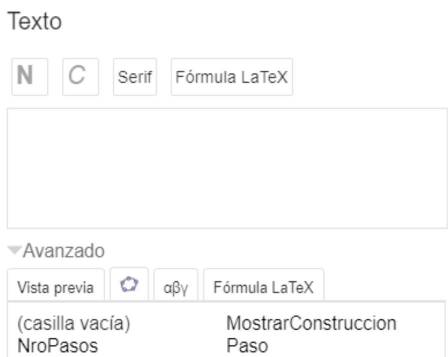
Gráfica 60: La ventana que permite modificar el aspecto de un botón.

1.11 Una presentación a través de botones

La combinación de las herramientas: casillas de control, deslizadores y botones, son útiles, por ejemplo, para realizar una presentación paso a paso a través de botones. Considerando que hasta el momento hemos adquirido un dominio básico de las herramientas de GeoGebra, finalizamos este capítulo describiendo, en esta sección, los pasos básicos para elaborar una presentación con GeoGebra y los aplicamos para realizar la siguiente construcción geométrica:

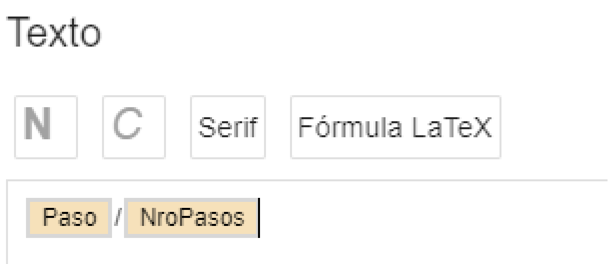
Trazar por un punto exterior a un segmento una recta perpendicular al segmento sin utilizar la herramienta perpendicular.

a. Los pasos básicos de la presentación.
   1. Se crea una variable lógica de nombre, por ejemplo, MostrarConstrucción con valor “true”. Esto se logra, escribiendo, desde la barra de entrada, MostrarConstrucción=true.
   2. Creamos un deslizador de nombre NroPasos, tipo entero, con Min=0, Max=20 e incremento=1.
   3. Creamos un deslizador de nombre Paso, tipo entero, con Min=0, Max=NroPasos e incremento 1.
   4. Seleccionamos la herramienta texto y creamos el texto dinámico Paso/NroPasos, desde la pestaña Avanzado. Esto se realiza de la siguiente manera:
      i. En la pestaña Avanzado, seleccionamos la opción donde se muestra el símbolo de GeoGebra, con lo cual, en este caso, se muestra una lista análoga a la siguiente:



Gráfica 61: La pestaña avanzado para la creación de texto.

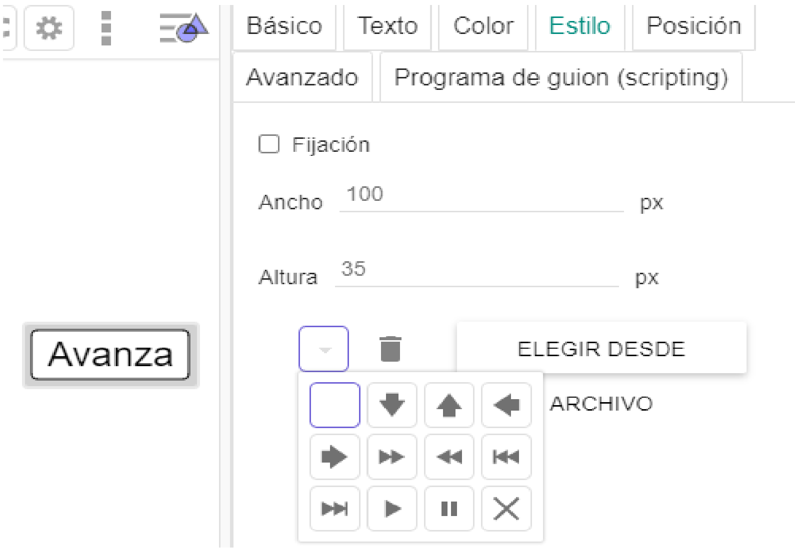
      ii. Damos clic sobre Paso, escribimos el símbolo / y de la misma manera escogemos el objeto NroPasos, para obtener lo que se muestra en la siguiente imagen



Gráfica 62: Un texto dinámico.

      iii. Damos Clic, sobre OK, con lo cual obtenemos el texto deseado.

   5. Como se ilustró en la sección 1.10, creamos un botón, Botón1, con rótulo Avanza y guion: Paso =Paso+1.
   Con ello se obtiene un botón análogo al siguiente Avanza ; sin embargo, al acceder a su configuración, este puede ser modificado en su aspecto, sustituyéndolo por uno de los que aparecen en este menú, así: accedemos a las **Propiedades** del botón, seleccionamos la pestaña **Estilo** y en ella, al dar clic sobre la casilla ubicada a la izquierda de la opción **ELEGIR DESDE**, se genera la siguiente ventana en la cual podemos seleccionar el botón que se adapte a la acción que deseemos realizar.



Gráfica 63: El menú que permite modificar el aspecto de un botón.

6. Crear un botón, Botón2, con guion, **Paso =20.** Nótese que el máximo valor del deslizador NroPasos, es 20.
7. Crear un botón, Botón3, con guion, **Paso =Paso-1.**
8. Crear un botón, Botón4, con guion, **Paso =0.**
   Una imagen de estos botones, modificados en su aspecto, se muestra a continuación.

Gráfica 64: Los botones modificados en su aspecto.

Estos botones, de izquierda a derecha, corresponden al botón 4, 3, 1 y 2 respectivamente.

9. Cómo se ilustró, en la sección 1.9, se crea una casilla de control con nombre **Presenta**, Rótulo **Construcción paso a paso** y con objetos asociados al mismo los cuatro botones y el texto, con lo cual se obtiene una casilla como la siguiente.

Gráfica 65: La casilla de entrada que, activada, muestra los botones.

Si la casilla está activada se muestran los botones y si está desactivada estos no se muestran. Al dar clic sobre el botón Avanzar

Gráfica 66: El botón que permite avanzar en la presentación de la construcción.

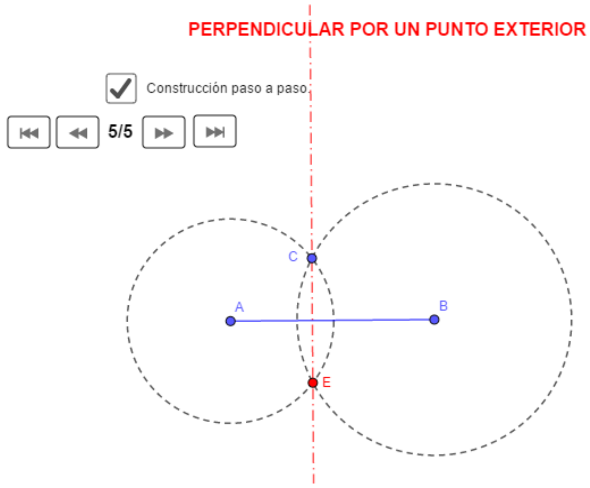
el texto dinámico se va modificando, por ejemplo, una de las imágenes anteriores muestra que se estaría ejecutando el paso 3 de 4 pasos.

b. La construcción geométrica
   Dado un segmento AB y un punto C en su exterior, trazar una perpendicular al segmento por el punto C, sin el uso de la herramienta perpendicular.
   Los pasos de la construcción son los siguientes:
   1. Con la herramienta, **Circunferencia (centro, punto),** construir una circunferencia de centro A que pase por C.
   2. Análogamente, crear una circunferencia de centro B que pase por C.

3. Con la herramienta **Intersección**, halle los puntos de corte, C y E, de estas circunferencias.
4. Utilizando la herramienta, **Recta**, cree la recta CE. Esta es perpendicular al segmento AB.

c. La visualización de la construcción.
Si deseamos visualizar paso a paso esta construcción, realizamos lo siguiente.
1. Accedemos a las Propiedades de los puntos A, B, C y a la del segmento AB y en la pestaña avanzado, en Condición para mostrar el objeto, escribimos: Presenta $\wedge$ Paso ≥ 1.
2. Accedemos a las **Propiedades** de la primera circunferencia y en la pestaña **avanzado**, en **Condición para mostrar el objeto**, escribimos: Presenta $\wedge$ Paso ≥ 2.
3. Accedemos a las **Propiedades** de la segunda circunferencia y en la pestaña **avanzado** en, **Condición para mostrar el objeto**, escribimos: Presenta $\wedge$ Paso ≥ 3.
4. Accedemos a las **Propiedades** del punto E y en la pestaña **avanzado** en **Condición para mostrar el objeto**, escribimos: Presenta $\wedge$ Paso ≥ 4.
5. Accedemos a las **Propiedades** de la recta CE y en la pestaña avanzado en, **Condición para mostrar el objeto**, escribimos: Presenta $\wedge$ Paso ≥ 5.

Al iniciar, el texto Paso/NroPasos está en 0/5 y la pantalla vacía, al dar clic sobre el botón Avanzar (Botón1) el texto pasa a 1/5 y en la pantalla se muestran los puntos A, B, C y el segmento AB. Al dar clic nuevamente el texto cambia a 2/5 y se muestra además una circunferencia y así sucesivamente. La siguiente imagen muestra 5/5.



Gráfica 67: El aspecto final de la presentación de la construcción.

Si replica la construcción, Ud. puede dar clic sobre los otros botones para conocer su efecto sobre la misma.

Cerramos esta sección con dos comentarios.
1. Para elaborar un guion, en GeoGebra, se pueden utilizar dos lenguajes, GGBScript y Javascprit, en la dirección https://wiki.GeoGebra.org/es/Programa_(guion-scripting) se encuentra una breve explicación sobre este tema. Complementariamente en la dirección https://wiki.GeoGebra.org/es/Tutorial:Introducci%C3%B3n_a_Guiones_GeoGebraScript se muestra un tutorial sobre la manera de construir un guion, sin embargo, la elaboración de un guion en GeoGebra es una actividad que requiere cierto dominio y experiencia en la utilización del software.
2. Aquello que hemos desarrollado hasta el momento es únicamente una muestra de la potencialidad que tiene GeoGebra; de ahora en adelante Ud. podrá explorar individualmente el software y descubrir la utilidad de otras opciones tales como **Casilla de entrada, Copiar estilo visual, Imagen** u otras que no hemos considerado.

Capítulo
02

Algunas construcciones geométricas básicas

Capítulo 2: Algunas construcciones geométricas básicas

Una vez conocido el funcionamiento básico de GeoGebra, centraremos nuestra atención en reafirmar las herramientas tratadas y en conocer nuevas opciones y posibilidades de otras, con el objetivo de ilustrar algunos resultados de geometría Euclidiana. Las características de GeoGebra permiten que se pueda experimentar, simular, interactuar, descubrir, conjeturar; siempre a través de la manipulación de los objetos que intervienen en una construcción.

2.1 Construcciones elementales.

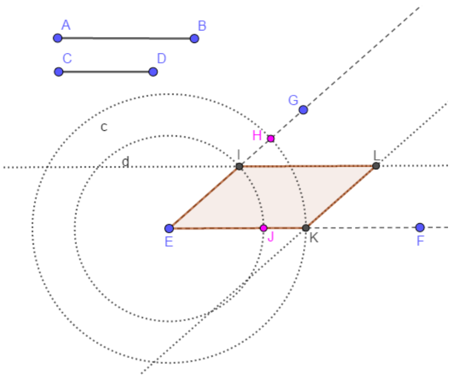
En lo que sigue utilizaremos GeoGebra para ilustrar algunas relaciones geométricas básicas. En cada una de las actividades desarrolladas se realiza una descripción de los pasos necesarios para obtener la construcción, sin embargo, dado que en matemáticas generalmente existen diferentes maneras de resolver un problema, sugerimos que intente realizar su propia construcción la cual, naturalmente, no necesariamente coincidirá con la realizada en estas notas. Dado que consideramos que, en este punto Ud. ha adquirido la experiencia suficiente para utilizar el software, en algunas de las construcciones, omitimos mencionar la herramienta que debe ser utilizada, esperamos que esto no sea un obstáculo para que pueda replicar la misma, de cualquier manera, en la dirección, https://www.geogebra.org/m/hhpsxnp7 puede consultar las construcciones.

Ilustración 1. Dados dos segmentos construir un paralelogramo que tenga los segmentos como lados.

Las siguientes instrucciones nos permiten obtener el resultado deseado.

1. Con la herramienta **Segmento**, elabore dos segmentos AB y CD cualesquiera.
2. A partir, del punto E y con la herramienta **Semirrecta**, construya dos semirrectas EF y EG. Sobre ellas trasladaremos los segmentos AB y CD.
3. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio** construya dos circunferencias de centro E y radios AB y CD, respectivamente.
4. A partir de la herramienta **Intersección**, halle los puntos de corte de las semirrectas EF y EG con las circunferencias, sean estos I, J y H, K.
5. Seleccione, por ejemplo, los puntos I y K, que satisfacen EK=AB y EI=CD.
6. Con la herramienta **Paralela**, que, se encuentra en la cuarta opción de la barra de herramientas de izquierda a derecha, trace por el punto I, una paralela a EF y por el punto K una paralela a EG.
7. Con la herramienta **Intersección**, seleccione el punto L, de corte de estas dos rectas.
8. Con la herramienta **Polígono,** se define el cuadrilátero EKLI, el cuál es un paralelogramo ya que por construcción tiene dos pares de lados opuestos paralelos.

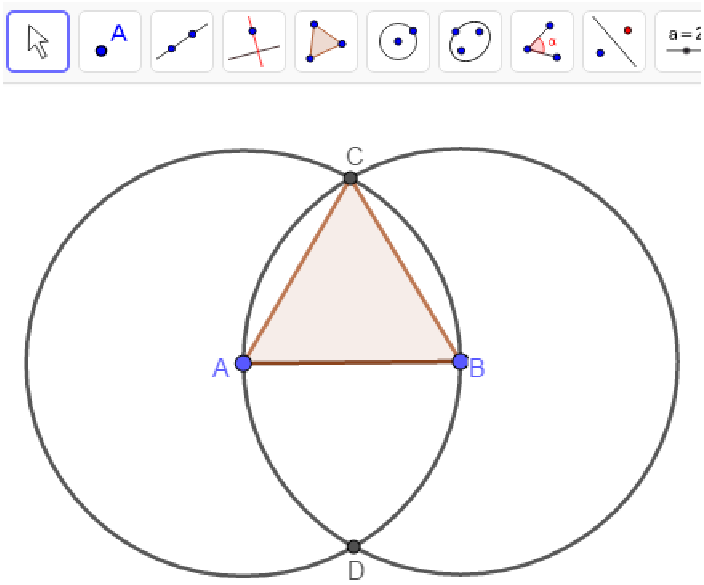
Obsérvese que al mover los extremos de los segmentos AB y CD, se modifica el tamaño del paralelogramo y que los puntos H y J determinan otro paralelogramo que satisface las condiciones pedidas.



Gráfica 68: La construcción de un paralelogramo.

Ilustración 2. Construir un triángulo equilátero, sin el uso de la herramienta Polígono regular. Las siguientes instrucciones nos permiten obtener el resultado deseado.

1. Con la herramienta **Segmento**, construya el segmento AB que corresponde al lado del triángulo.
2. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, construya dos circunferencias con centros A y B y radio AB.
3. Utilice la herramienta **Intersección** para obtener los puntos de corte de estas circunferencias.
4. Con el comando **Polígono**, se define el triángulo ABC. Este triángulo es equilátero ya que las dos circunferencias tienen radio AB. Nótese que el punto D determina otro triángulo que también satisface las condiciones pedidas

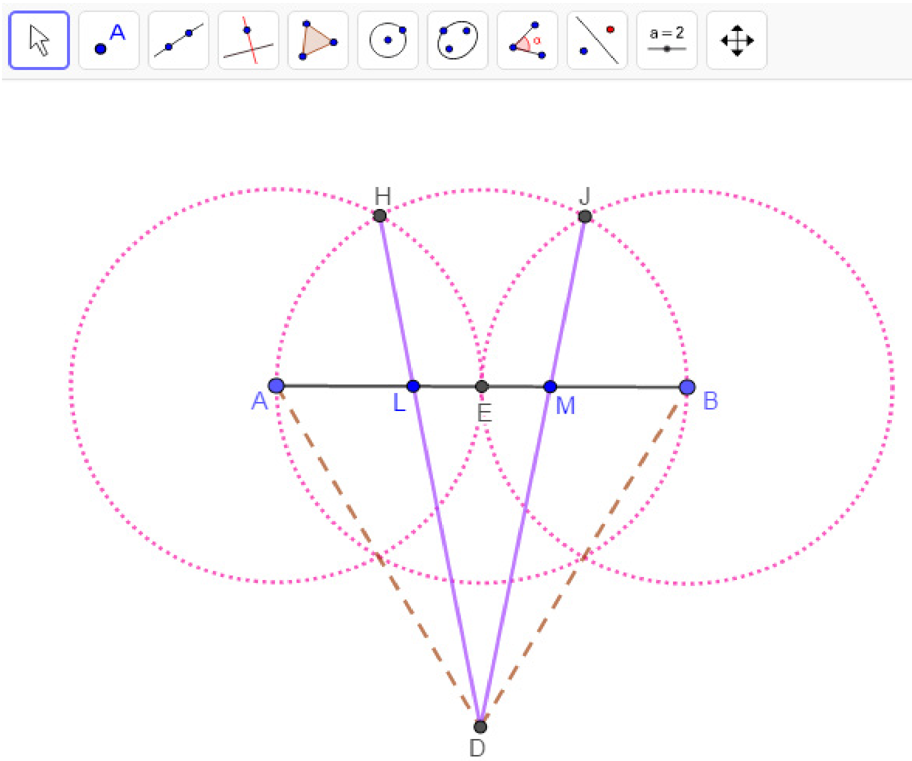


Gráfica 69: La construcción de un triángulo equilátero.

Ilustración 3. Dividir un segmento AB en tres y cinco partes que tengan igual longitud.

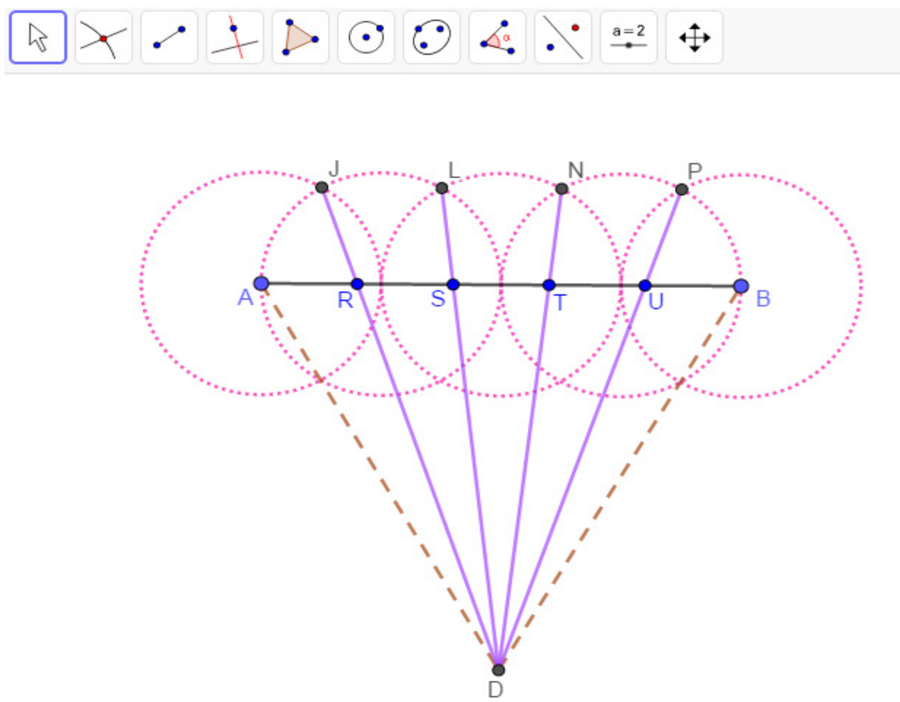
La división clásica de un segmento en partes iguales se fundamenta en la utilización del Teorema de Thales y puede consultarse por ejemplo en Landaverde, 1968; en este caso utilizaremos un algoritmo diferente, diseñado por el Profesor Fernando Soto de la Universidad de Nariño que puede consultarse por ejemplo en (Soto, Mosquera. 2017). El soporte teórico fundamental está en el Teorema I de Los Elementos de Euclides (Eves, 1985), y es la construcción desarrollada en la ilustración 2, es decir el problema de construir un triángulo equilátero a partir de un segmento dado. Los pasos básicos son los siguientes.

1. Utilizando el proceso de la ilustración 2, construya un triángulo equilátero ABD de lado AB.
2. Con la herramienta **Medio o Centro** construya el punto medio E del segmento AB.
3. Utilizando el proceso de la ilustración 2, construya dos triángulos equiláteros de lados AE y EB, triángulos AEH y EBJ.
4. Con la herramienta **Segmento,** una los puntos H y J con el punto D.
5. Utilice la herramienta **Intersección** para obtener los puntos de corte L y M de estos segmentos con el segmento AB.
6. Los puntos L y M, son los puntos de trisección del segmento AB.



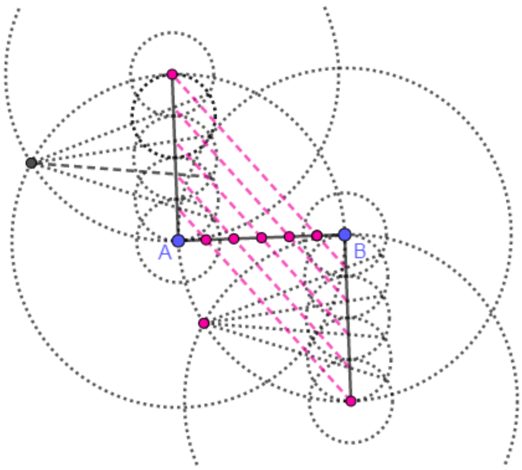
Gráfica 70: La división de un segmento en tres partes de igual longitud.

Para dividir el segmento AB en cinco segmentos de igual longitud, con la herramienta **Medio o Centro** se divide este segmento en cuatro partes, se construyen, sobre estos segmentos cuatro triángulos equiláteros, se localizan los cuatro puntos de intersección J, L, N y P, de las circunferencias y se unen, mediante segmentos, estos puntos con el punto D. Los puntos de corte R, S, T y U de estos segmentos con el segmento AB, dividen en segmento AB en cinco partes de igual longitud. La congruencia de estos segmentos está asegurada ya que las circunferencias de la construcción tienen el mismo radio.



Gráfica 71: La división de un segmento en cinco partes de igual longitud.

Si sobre una perpendicular trazada por los extremos del segmento AB, se construyen dos segmentos de igual longitud, se dividen estos segmentos en cinco partes iguales y estos puntos de división se unen como muestra la siguiente figura entonces el segmento AB queda dividido en seis partes de igual longitud. Una generalización de este procedimiento se encuentra en (Soto, Mosquera. 2017).

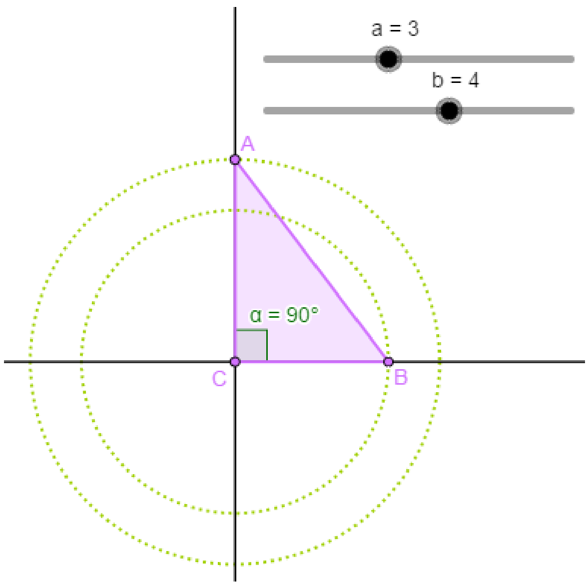


Gráfica 72: La división de un segmento en seis partes de igual longitud.

Ilustración 4. Construir un triángulo rectángulo cuyas longitudes de sus catetos dependan de deslizadores.

Las siguientes instrucciones resuelven el problema.

1. Se definen, con la herramienta **Deslizador**, dos deslizadores a y b con las siguientes características: tipo NÚMERO, MIN=1, MAX=6, INCREMENTO=0.1.
2. Se construye, con la herramienta **perpendicular**, dos rectas perpendiculares y con la herramienta **Intersección** su punto de corte C.
3. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, se construyen dos circunferencias de centro C y radios a y b respectivamente.
4. Con la herramienta **Intersección**, se crean los puntos de corte de estas circunferencias con las rectas perpendiculares y se nombran dos de ellas, una sobre cada perpendicular, como A y B, respectivamente.
5. A partir de la herramienta **Polígono**, se crea el triángulo ACB, que es rectángulo ya que tiene un ángulo recto en C, por ser las rectas CA y CB perpendiculares.



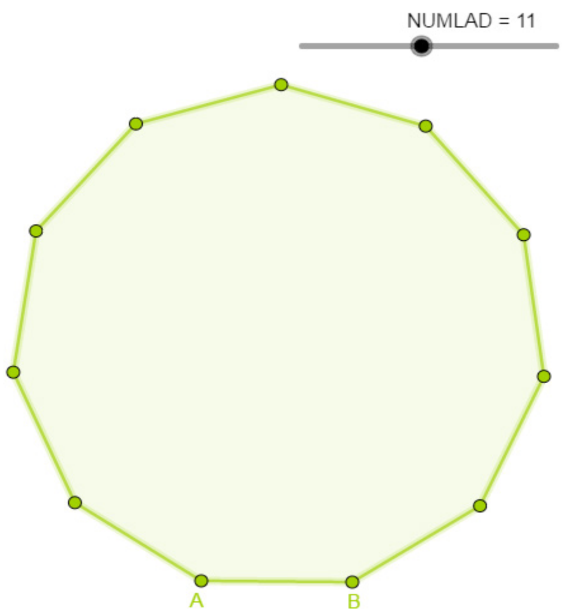
Gráfica 73: La construcción de un triángulo rectángulo.

Ilustración 5. Construir un polígono regular de manera tal que su número de lados dependa de un deslizador.

Las siguientes instrucciones resuelven el problema.

6. Se construye, con la herramienta **Segmento**, el segmento AB, que será la longitud del lado del polígono.
7. Con la herramienta **deslizador**, se construye un deslizador que corresponda a un número entero con las siguientes características. MIN: 3, MAX: 20, INCREMENTO: 1, NOMBRE: NUMLAD.
8. Con la herramienta **Polígono regular**, se crea un polígono que como vértices iniciales tenga los puntos A y B, y como número de lados tenga el deslizador NUMLAD.

Esto crea un polígono regular que como mínimo corresponde a un triángulo equilátero de lado AB y a medida que se mueva, o se anime, el deslizador se va generando un polígono regular de máximo 20 lados. En la gráfica siguiente se muestra el polígono correspondiente a 11 lados.

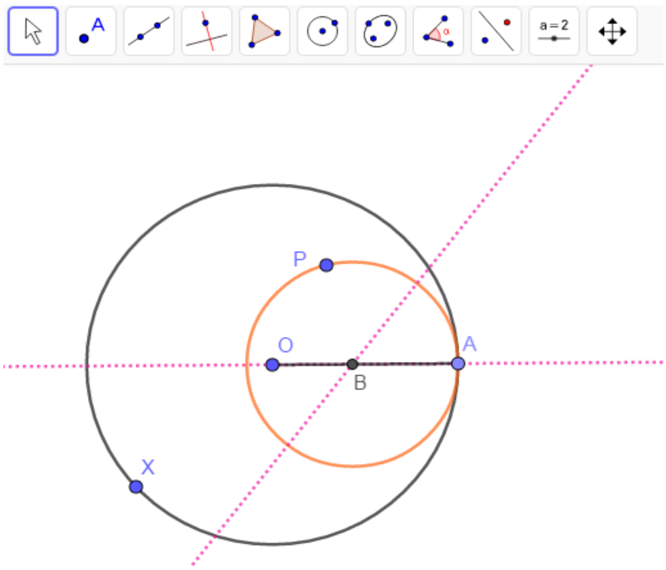


Gráfica 74: La construcción de un polígono regular.

Ilustración 6. Dada una circunferencia de centro O, un punto A sobre ella y un punto P en su interior, construir una circunferencia que pase por P y sea tangente a la circunferencia dada en A.

Las instrucciones para conseguir lo deseado son las siguientes:

1. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto),** construya la circunferencia de centro O que, pasa por el punto X.
2. A partir de la herramienta, **Punto en objeto**, que se encuentra en la segunda opción de la barra de herramientas, ubique el punto A sobre la circunferencia y un punto P en su interior.
3. Trace la recta que contiene al radio OA.
4. Con la herramienta **Mediatriz**, que se encuentra en la cuarta opción de la barra de herramientas, construya la mediatriz del segmento AP.
5. Use la herramienta **Intersección** para hallar el punto B de intersección de la mediatriz y el radio OA.
6. La circunferencia de centro B que pasa por P, es tangente en A, a la circunferencia dada. ¿Puede Ud. explicar por qué? ¿Qué sucede si el punto P está en el exterior de la circunferencia?

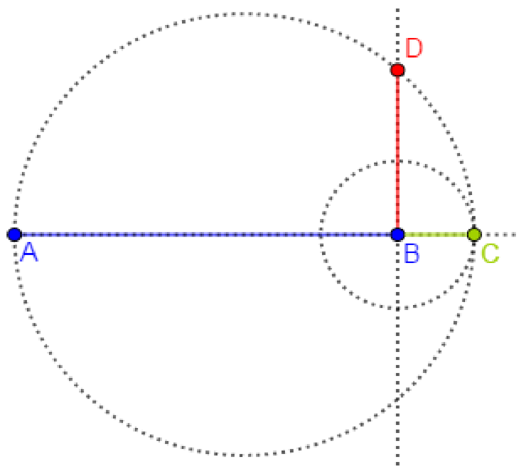


Gráfica 75: La construcción de un circunferencia tangente a otra.

Ilustración 7. Dado un segmento AB de longitud a, construir un segmento que tenga como longitud $\sqrt{a}$.

La construcción que se presenta es consecuencia de las proposiciones II.14 y VI.13 de los Elementos de Euclides, que construye la media geométrica de dos cantidades dadas e implica que los números de la forma $p + q\sqrt{a}$ con p, q números racionales y a entero positivo, son construibles con regla y compás. Los pasos de la construcción son los siguientes:

1. Sobre una semirrecta y con la herramienta **Segmento**, construir un segmento AB de longitud a.
2. A continuación de B, construir un segmento de longitud 1. Para esto es suficiente, con la herramienta, **Circunferencia: centro y radio**, trazar la circunferencia de centro B, radio 1 y tomar el punto C de corte de esta circunferencia con la semirrecta AB.
3. Con centro en el punto medio de AC y radio $\frac{AC}{2}$, trazar la circunferencia de diámetro AC.
4. Con la herramienta **Perpendicular**, que se encuentra en la cuarta opción de la barra de herramientas, trazar la perpendicular en B a la recta AC.
5. Si D es el punto de corte de la circunferencia y la perpendicular entonces $BD = \sqrt{a}$ ya que, por el teorema de la altura, es decir, en el triángulo rectángulo ADC, la altura DB sobre la hipotenusa AC es media proporcional entre las proyecciones AB y BC de los catetos AD y DC sobre ella, por tanto, $\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{BD}$ por lo que $BD^2 = a$ y así $BD = \sqrt{a}$.



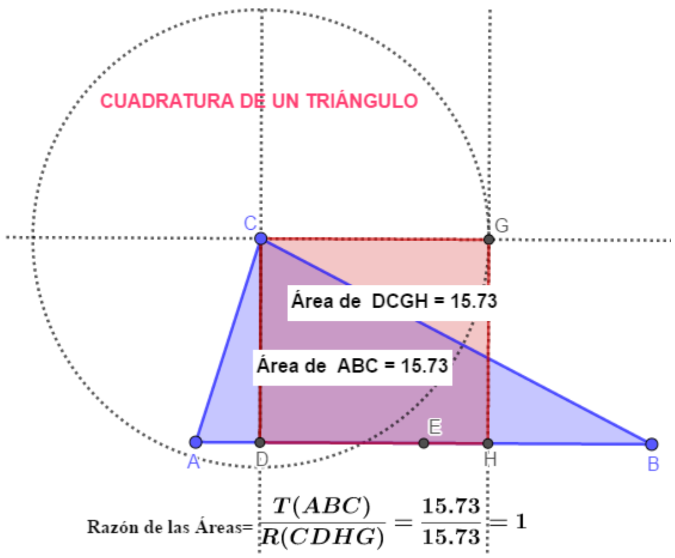
Gráfica 76: La construcción de un segmento correspondiente a la raíz cuadrada de un número.

Ilustración 8. Dado un triángulo ABC, construir un rectángulo que tenga la misma área que el triángulo.

Para resolver el problema es suficiente construir un rectángulo con la misma base que la del triángulo y altura la mitad o la misma altura y la mitad de la base; seleccionamos la segunda opción, así se tiene:

1. Construir un triángulo cualquiera, ABC.
2. Con la herramienta **Perpendicular**, trazar por el vértice C una perpendicular a la recta determinada por el lado AB. Sea D, el punto de corte de esta perpendicular con la recta AB.
3. Con la herramienta **Segmento**, construir la altura CD correspondiente al lado AB.
4. Por el punto C y con la herramienta **Paralela**, trazar una recta paralela al lado AB.
5. Utilizando la herramienta **Medio o Centro**, tomar el punto medio E del lado AB.
6. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, centro en C y radio AE trazar una circunferencia.
7. Sea G uno de los puntos de corte de esta circunferencia y la paralela por C a AB.
8. Por el punto G y con la herramienta **Paralela**, trazar una recta paralela a la recta CD.
9. Construir, con la herramienta **Intersección**, el punto de corte de esta paralela y la recta AB.
10. Con la herramienta **Polígono**, se construye el rectángulo pedido CDHG.

El rectángulo tiene la misma área que el triángulo ya que tiene la misma altura CD y la base DH es la mitad de BC. Para verificar nuestro resultado construimos un texto dinámico, como se ilustró en la sección 1.6, que muestre el valor de las áreas del triángulo y del rectángulo.



Gráfica 77: La cuadratura de un triángulo.

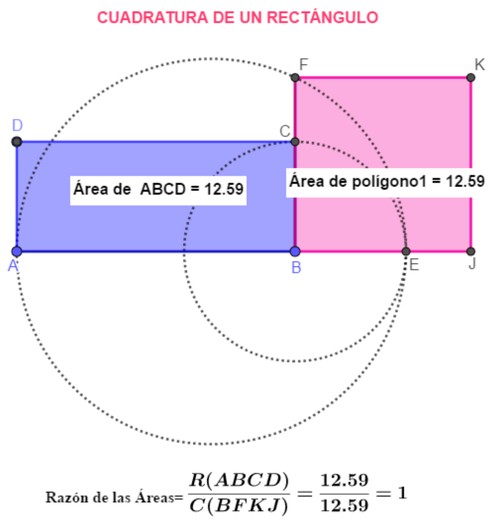
Ilustración 9. Dado un rectángulo ABCD construir un cuadrado que tenga la misma área que el rectángulo.

Si a y b son la base y la altura del rectángulo dado, el problema consiste en hallar el lado x de un cuadrado tal que $x^2 = ab$ es decir que $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ y por tanto se debe construir, geométricamente la media proporcional entre a y b. En estas condiciones el lado del cuadrado se logra como sigue.

1. Utilizando las herramientas apropiadas de GeoGebra, construir el rectángulo ABCD.
2. Sobre la semirrecta AB y con centro en B se construye la circunferencia de radio BC. Sea E el punto de corte de esta circunferencia y la semirrecta AB entonces el segmento BE tiene la misma longitud que BC y por tanto hemos trasladado el segmento BC a partir de B.
3. Se construye la circunferencia de diámetro AE.

4. Por el punto B se levanta una perpendicular a AE.
5. Si F es el punto de corte la circunferencia y la perpendicular, entonces el segmento FB es el lado del cuadrado buscado, ya que, por el teorema de la altura, en el triángulo rectángulo AFJ, la altura FB sobre la hipotenusa AJ es media proporcional entre las proyecciones AB y BJ de los catetos AF y FJ sobre ella. Obsérvese que este resultado generaliza la construcción realizada en la ilustración 7.

Para complementar el ejercicio se ha elaborado un texto dinámico, utilizando el proceso descrito en la sección 1.6, en el que se muestra el valor de las áreas del rectángulo y del cuadrado y ahora es posible mover los objetos de la construcción para verificar que la razón entre las áreas se mantiene constante.



Gráfica 78: La cuadratura de un rectángulo.

2.2 Puntos notables de un triángulo y algunos de sus resultados.

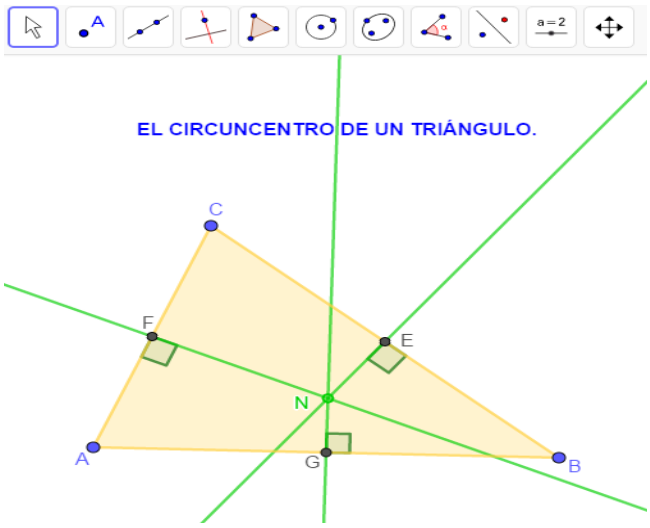
Con el uso de GeoGebra es posible es posible la verificación de resultados geométricos que, aunque no se pueden considerar una demostración de los mismos, nos permiten, a través de la manipulación de los objetos, su comprobación lo cual en ciertos niveles educativos es suficiente para los propósitos docentes. En esta sección consideraremos algunos resultados relacionados con los puntos notables de un triángulo y sus relaciones.

Ilustración 1. Las mediatrices de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia se llama el **circuncentro N** del triángulo.

Una **mediatriz** de un triángulo es la recta perpendicular trazada en el punto medio de un lado del triángulo. GeoGebra posee una herramienta denominada **Mediatriz,** que se encuentra, de izquierda a derecha, en la cuarta opción de la barra de herramientas y permite hallar directamente la mediatriz de un segmento, por ello con la utilización de esta herramienta el resultado deseado puede obtenerse de la siguiente manera.

1. Construir, con la herramienta **Polígono**, un triángulo cualquiera ABC.
2. Con la herramienta **Mediatriz** obtener las mediatrices de dos lados del triángulo, digamos de los lados AB y BC.
3. A partir de la herramienta **Intersección** hallar el punto de corte N de estas mediatrices.
4. Con la herramienta **Mediatriz**, trazar la mediatriz del lado AC y verificar que pasa por N.

Con ello se ha verificado que las mediatrices del triángulo se intersectan en un único punto N.



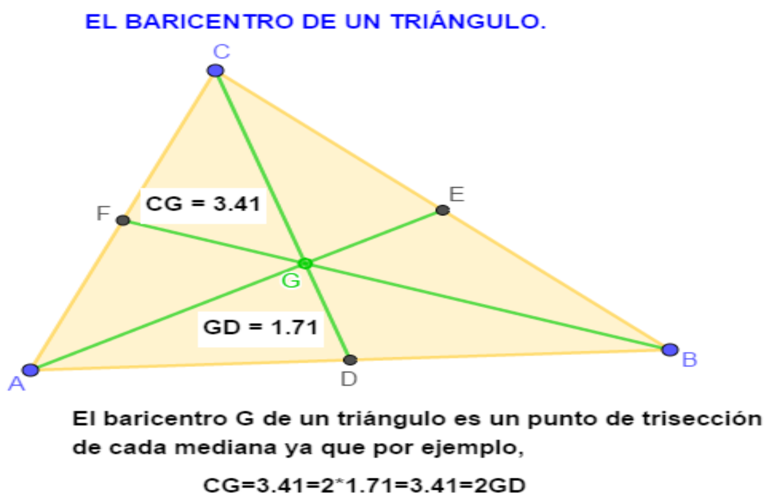
Gráfica 79: El circuncentro de un triángulo.

Ilustración 2. Las medianas de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia se llama el **baricentro G** del triángulo y es el punto de trisección de cada mediana ya que, por ejemplo, CG=2GD.

Una **mediana** de un triángulo es el segmento de recta que une, un vértice con el punto medio del lado opuesto. GeoGebra no posee una herramienta que permita mostrar directamente las medianas de un triángulo, sin embargo, las herramientas **Medio o Centro** y **Segmento**, nos permiten realizar tal construcción a través de las siguientes instrucciones.

1. Construir, con la herramienta **Polígono**, un triángulo cualquiera ABC.
2. Con la herramienta **Medio o Centro**, hallar los puntos medios D, E y F de los lados AB, BC y AC respectivamente.
3. Utilizar la herramienta **Segmento,** para trazar los segmentos AE y BF.
4. Con la herramienta **Intersección**, hallar el punto G de intersección de estos segmentos.
5. Con la herramienta **Segmento**, construir el segmento CD y verificar que pasa por G.

Con ello se ha verificado que las medianas del triángulo concurren en un único punto G, adicionalmente se ha construido un texto dinámico, de manera análoga a la sección 1.6, que permite comprobar que el punto G divide a la mediana CD en dos segmentos, CG y GD tales que $GD = \frac{CD}{3}$ y que $CG = \frac{2CD}{3}$.



Gráfica 80: El baricentro de un triángulo.

Ilustración 3. Las alturas de un triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia se llama el **ortocentro H** del triángulo.

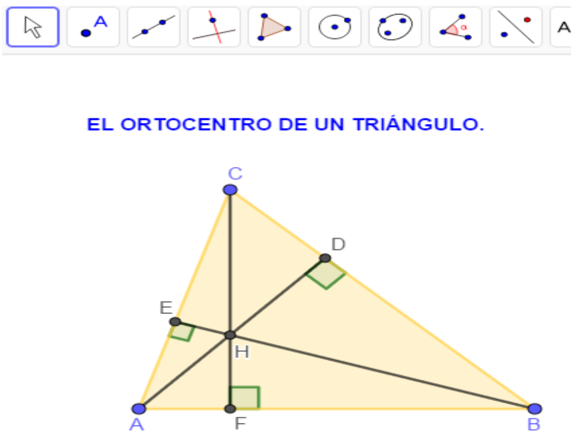
Una **altura** de un triángulo es el segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación. GeoGebra no posee una herramienta que permita mostrar directamente las alturas de un triángulo, pero la herramienta **Perpendicular**, nos permite realizar tal construcción a través de las siguientes instrucciones.

1. Construir un triángulo cualquiera ABC.
2. Por los vértices A y B, con la herramienta **Perpendicular**, trazar perpendiculares a los lados BC y AC respectivamente.
3. Hallar, con la herramienta **Intersección**, el punto H de intersección de estas rectas.
4. Con la herramienta **Perpendicula**r, trazar la perpendicular por C al lado AB y verificar que pasa por H.

Con ello se ha comprobado que las rectas que contienen las alturas del triángulo se intersectan en un único punto H.

5. Obtener, con la herramienta **Intersección**, los puntos D, E y F de corte de estas perpendiculares con los correspondientes lados del triángulo, o su prolongación.
6. Con la herramienta **Segmento**, construir los segmentos AD, BE y AD, que corresponden a las alturas del triángulo y ocultar lo que se considere necesario.

Obsérvese que si mueve uno de los vértices de manera que el pie de la correspondiente altura esté fuera del lado del triángulo este punto sigue activo y el ortocentro se conserva, aunque ahora está fuera del triángulo.; esto significa que la posición del ortocentro de un triángulo depende de la clase de triángulo de la siguiente manera: está el interior del triángulo sí, es acutángulo, cómo en la figura siguiente; coincide con el vértice del ángulo recto si es rectángulo, y se halla en el exterior si es obtusángulo.

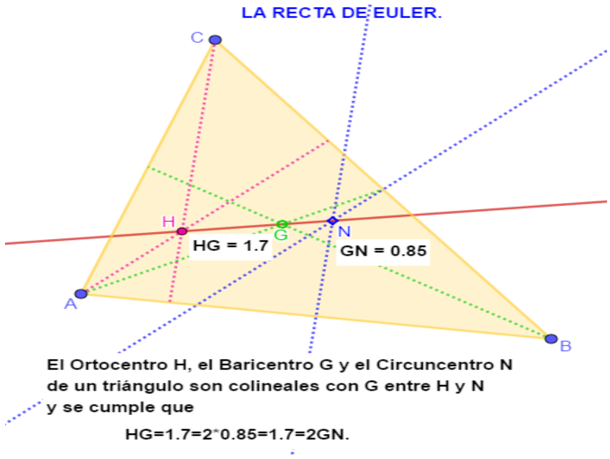


Gráfica 81: El ortocentro de un triángulo.

Ilustración 4. El circuncentro N, el baricentro G y el ortocentro H de un triángulo son colineales, con G entre H y N y HG=2GN. La recta contiene estos tres puntos se llama **recta de Euler.**

1. Con la herramienta **Polígono**, se construye un triángulo cualquiera ABC.
2. Con el uso de la herramienta **Mediatriz**, trazamos dos mediatrices del triángulo y seleccionamos su punto de intersección N.
3. Utilizando las herramientas **Centro** y **Segmento** construimos dos medianas del triángulo y marcamos su punto de intersección G.
4. Con la herramienta **Perpendicular**, construimos dos alturas del triángulo y marcamos su punto de corte H.
5. Trazamos, con la herramienta **Recta**, la recta que pasa por el circuncentro N y el baricentro G.

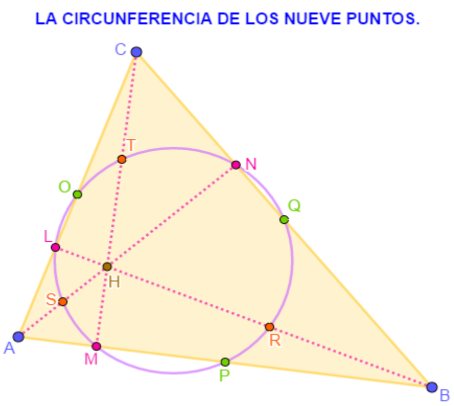
6. Verificamos que la recta NG contiene el ortocentro H moviendo esta recta y observando que los tres puntos se mueven simultáneamente sobre la misma recta.
7. Construimos un texto dinámico, con el método de la sección 1.6, que muestre la relación HG=2GN.



Gráfica 82: La recta de Euler.

Ilustración 5. Los puntos medios de los lados de un triángulo, los pies de las alturas y los puntos medios de los segmentos que unen el ortocentro con cada uno de los vértices del triángulo pertenecen a una circunferencia. La circunferencia en la cual están estos puntos se llama **circunferencia de los nueve puntos**.
Los pasos para obtener el resultado deseado son los siguientes.

1. A partir de la herramienta **Polígono**, construir un triángulo cualquiera ABC.
2. Utilizando la herramienta **Perpendicular**, trazar las alturas del triángulo.
3. Con la herramienta **Intersección**, obtener los puntos de corte M, N y L de las alturas con los lados del triángulo y el ortocentro H.
4. Utilizando la herramienta **Medio o Centro**, construir los puntos medios O, P, Q de los lados del triángulo.
5. Con la misma herramienta, tomar los puntos medios R, S, T de los segmentos que unen el ortocentro con los vértices del triángulo.
6. Seleccionar tres de los puntos K, L, M, O, P, Q, R S, y T y con la herramienta **Circunferencia por tres puntos** trazar una circunferencia.
7. Mover el triángulo para verificar que los demás puntos están sobre esta circunferencia.



Gráfica 83: La circunferencia de los nueve puntos.

2.3 Lugar geométrico.

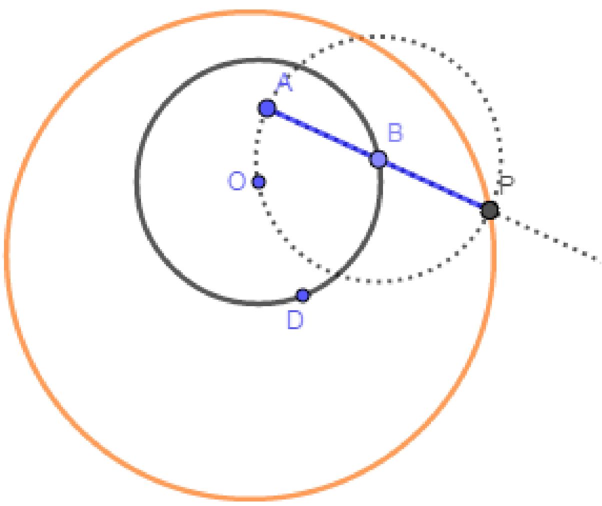
Se denomina **lugar geométrico** el conjunto de puntos del plano que satisface cierta propiedad, la cual generalmente se expresa en términos de una construcción que se determina utilizando distancias a puntos, rectas o circunferencias o con una expresión algebraica que relaciona las coordenadas o las ecuaciones de estos elementos. En GeoGebra un lugar geométrico se construye con el uso de una herramienta denominada **Lugar Geométrico** que corresponde a la última opción del menú que se despliega al seleccionar, en la barra de herramientas, la cuarta opción de izquierda a derecha.

La construcción de un lugar geométrico requiere la utilización de dos objetos básicos: Un punto que describe el lugar geométrico y que depende de otro que se mueve sobre un objeto construido y por tanto posibilita que las condiciones se vayan modificando y consecuentemente exista el lugar geométrico. Ilustramos a continuación el uso de la herramienta **Lugar Geométrico**, así como de la herramienta **Mostrar rastro**, cuya utilización se explicó en la sección 1.4 y que corresponde a la huella que va dejando un objeto a medida que se va desplazando.

Ilustración 1. Considere una circunferencia, A un punto en su interior y B un punto sobre la circunferencia. Si P es un punto sobre la prolongación de AB tal que AB=BP, hallar el lugar geométrico del punto P cuando el punto B se mueve sobre la circunferencia. ¿Qué sucede si el punto A coincide con el centro de la circunferencia? ¿Qué sucede si A coincide con B?

Los pasos básicos de la construcción son los siguientes.

1. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto),** construya una circunferencia y seleccione un punto B sobre ella y otro A en su interior, diferentes a los utilizados para construirla.
2. A partir de la herramienta **Circunferencia: centro y radio,** trace la circunferencia de centro B y radio AB.
3. Con la herramienta **Semirrecta**, construya la semirrecta AB y sus intersecciones con esta circunferencia. Una es el punto A y la otra es el punto P.
4. Con la herramienta **Lugar Geométrico** halle el lugar geométrico de P cuando el punto B se mueve sobre la circunferencia.



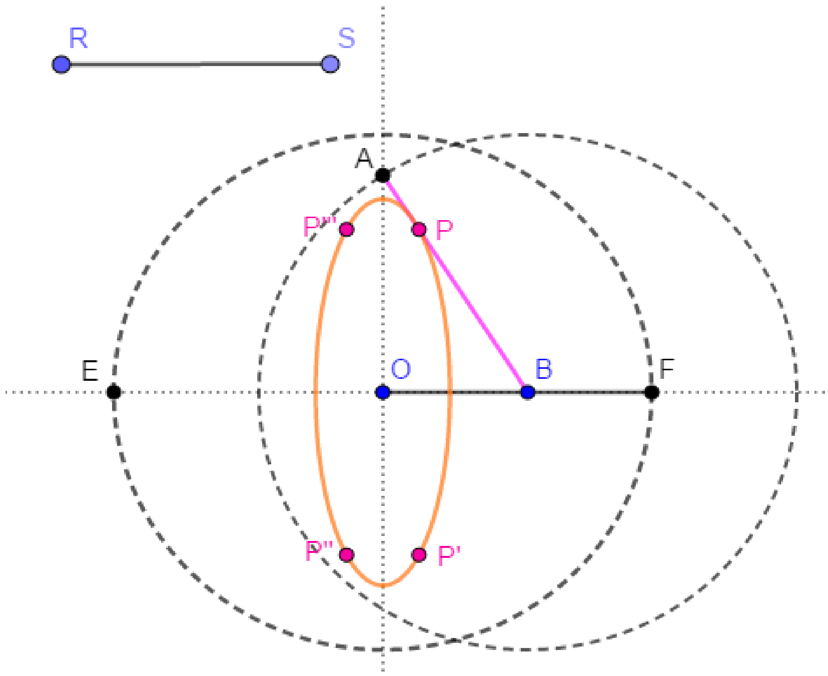
Gráfica 84: Un primer lugar geométrico.

El lugar geométrico es una circunferencia ya que, durante el movimiento de B, P se mueve de manera que AB=BP. Si A coincide con O, entonces OA=AB=BP es un radio de la circunferencia y por tanto las dos circunferencias son concéntricas. Si A coincide con B entonces A=B=P y por tanto las dos circunferencias son tangentes en dicho punto.

Ilustración 2. Hallar el lugar geométrico de un punto P que está situado a una distancia igual a la cuarta parte de uno de los extremos de un segmento de longitud fija AB cuando el segmento se desliza sobre unos ejes perpendiculares. ¿Qué ocurre cuando se cambia la posición del punto P? ¿Dónde debe estar P para obtener una circunferencia? ¿Cómo se obtiene el lugar geométrico completo?

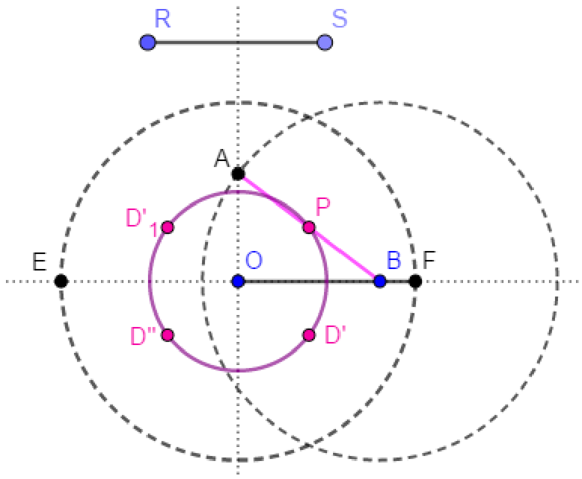
Dado el segmento RS, que proporciona la longitud del segmento AB, se realiza lo siguiente:

1. A partir de la herramienta **Perpendicular**, se construyen dos rectas perpendiculares en un punto cualquiera O.
2. Se utiliza, la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, para trazar una circunferencia de centro O y radio RS y se define el segmento OF, a partir de uno de los puntos de intersección de esta circunferencia con la recta horizontal.
3. Con la herramienta **Punto en objeto**, se ubica un punto cualquiera B sobre el segmento OF.
4. Con centro en B y radio RS se traza una circunferencia.
5. Se Utiliza la herramienta **Intersección** para definir el punto A, corte de esta circunferencia y la perpendicular a EF en el punto O.
6. Con la herramienta **Segmento**, se define el segmento AB. Nótese que este segmento tiene la longitud dada RS y al mover B se desliza sobre las rectas perpendiculares OF y AO.
7. Con la herramienta **Medio o Centro**, se construye el punto P a una distancia igual a la cuarta parte de RS del extremo A.
8. Se utiliza la herramienta **Lugar Geométrico**, para hallar el lugar geométrico de P, cuando se mueve B.



Gráfica 85: Un segundo lugar geométrico.

Se obtiene la cuarta parte de una elipse. Esta curva se completa tomando la reflexión de P sobre las rectas perpendiculares y aplicando de nuevo lugar geométrico. Cuando P es el punto medio de AB, es decir, P es el punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo AOB y por tanto P es el centro de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo luego OP=OB y así, el lugar geométrico, generado por P al mover B, corresponde a una circunferencia de centro O.



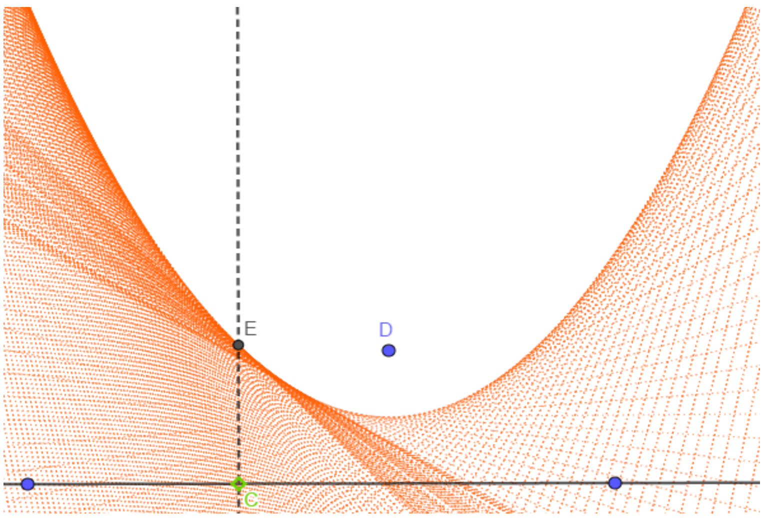
Gráfica 86: Una variación del lugar geométrico anterior.

Ilustración 3. Considere una recta cualquiera, un punto C sobre ella y un punto D en su exterior. Trace la perpendicular en C a la recta, construya sobre ella un punto E tal que CE=ED y la bisectriz l del ángulo CED. Hallar el lugar geométrico de la recta l cuando el punto C se mueve sobre la recta dada.

En este caso, para resolver el problema, no es posible usar la herramienta **Lugar Geométrico**, ¿por qué? Y en su lugar se utiliza la opción **Mostrar rastro**, en este caso de una recta, y la **animación** de un punto. Los pasos de la construcción son los siguientes.

1. Se construye, con la herramienta **Recta**, una recta AB y con la herramienta **Punto en Objeto**, se ubica un punto C sobre ella y un punto D en su exterior.
2. Utilizando la herramienta **Perpendicular**, se construye la perpendicular en C a la recta AB.
3. Se utiliza, la herramienta **Mediatriz**, para construir la mediatriz del segmento CD y se selecciona, con la herramienta **Intersección,** el punto de corte E de la mediatriz y la perpendicular.
4. Seleccionamos de la cuarta opción de la **barra de herramientas**, la herramienta **Bisectriz** y construimos la bisectriz del ángulo CED.
5. Con él botón derecho del mouse damos clic sobre la bisectriz y seleccionamos la opción **Mostrar rastro**.
6. Con el botón derecho del mouse damos clic sobre el punto C y seleccionamos la opción **animación.**

Al mover el punto C sobre la recta AB se mueve el punto E, por tanto, la bisectriz y se crea una curva que, en este caso, corresponde a una parábola, ya que el punto E es tal que ED=EC.



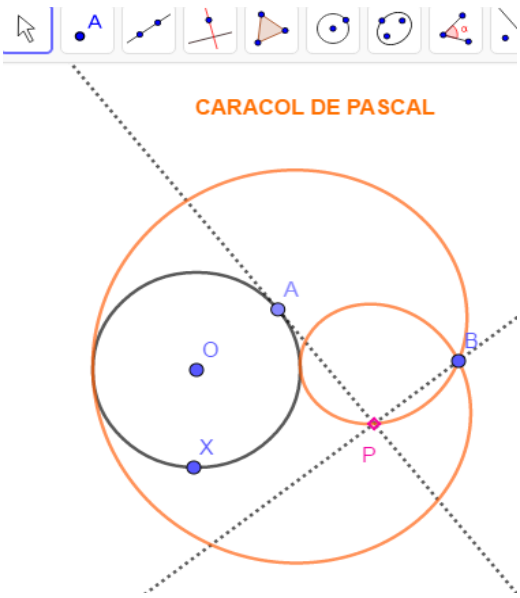
Gráfica 87: Un lugar geométrico generado por una recta.

Esta construcción de la curva, corresponde a la construcción de la parábola como envolvente de la familia de rectas, en este caso las bisectrices, que se generan al mover el punto C. Dada una familia de curvas (rectas, circunferencias, …), la **envolvente** de esta familia, es un concepto que pertenece a la geometría diferencial, y usualmente se define como, la curva que es tangente a cada uno de los miembros de la familia de curvas dada.

Ilustración 4. Considere una circunferencia cualquiera, un punto A sobre ella y un punto B exterior a la misma. Hallar el lugar geométrico del pie de la perpendicular trazada por el punto B, a la tangente a la circunferencia trazada por el punto A.

El lugar geométrico se obtiene de la siguiente manera.

1. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto),** trace una circunferencia, seleccione un punto A sobre ella y un punto B en su exterior, diferentes a los utilizados para construir la circunferencia.
2. Utilizando la herramienta tangente, construir la tangente a la circunferencia en el punto A.
3. Con la herramienta **Perpendicular**, trace por el punto B, la perpendicular a la recta tangente. Sea P el punto de intersección de estas dos rectas.
4. Utilice la herramienta **Lugar Geométrico**, para hallar el lugar geométrico de P cuando A se mueve sobre la circunferencia.



Gráfica 88: El caracol de Pascal.

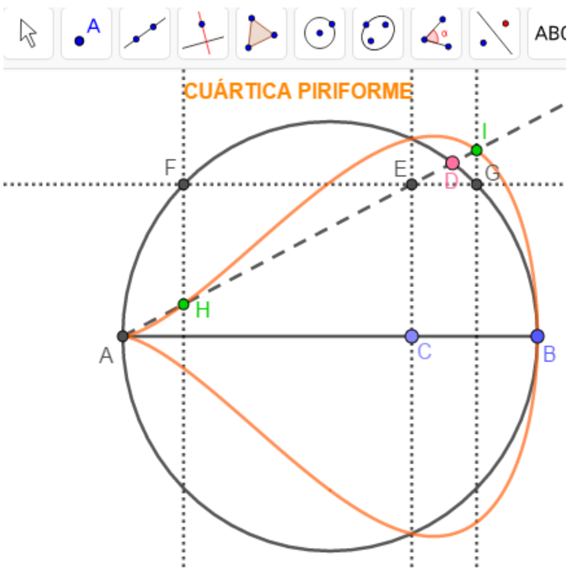
El lugar geométrico obtenido se llama **Caracol de Pascal** y fue descubierto por Alberto Durero quien lo denominó **araña,** fue redescubierto por, Étienne Pascal, el padre de Blaise Pascal y el nombre actual se debe a Gilles Personne de Roberval quien la estudió en 1650 por temas relacionados con la diferenciación.

Ilustración 5. Considere una circunferencia cualquiera, un diámetro AB de la misma, un punto C sobre este y un punto D sobre la circunferencia. Si por C se traza una perpendicular al diámetro entonces esta recta corta a la recta AD en un punto E. Al trazar por este punto una paralela al diámetro entonces esta recta intersecta a la circunferencia en dos puntos F y G y si por estos puntos se dibujan perpendiculares al diámetro entonces estas cortan a la recta AD en dos puntos I y H. Hallar el lugar geométrico de los puntos I y H cuando el punto D se mueve sobre la circunferencia.

El lugar geométrico se obtiene como sigue.

1. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** construya una circunferencia con centro en un punto O y que pase por un punto B.

2. Utilice la herramienta **Recta** para trazar la recta OB y denomine, al otro punto de corte de esta recta y la circunferencia, como A.
3. Con la herramienta **Segmento**, defina el segmento AB, diámetro de la circunferencia.
4. Con la herramienta **Punto en objeto**, seleccione un punto C sobre este segmento y un punto D sobre la circunferencia.
5. Use la herramienta **Perpendicular**, para trazar la perpendicular por C al diámetro AB.
6. Construya la recta AD y defina como E la intersección entre esta recta y la perpendicular.
7. Con la herramienta **Paralela**, trace una recta paralela al diámetro AB.
8. Con la herramienta **Intersección**, halle los puntos de corte de esta paralela con la circunferencia y defínalos como F y G.
9. Con la herramienta **Perpendicular**, construya por F y G las rectas perpendiculares al diámetro AB.
10. Con la herramienta **Intersección**, halle los puntos de corte de estas perpendiculares y la recta AD y defínalos como H, I.
11. Al utilizar la herramienta **Lugar Geométrico** sobre el punto I cuando se mueve D sobre la circunferencia se obtiene una parte del lugar y cuando la herramienta se le aplica al punto H y mover D, se completa el lugar geométrico.



Gráfica 89: La cuartica piriforme.

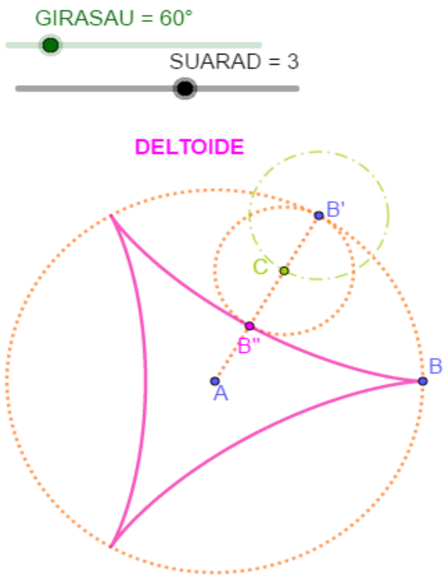
La curva generada por este lugar geométrico se llama **cuartica piriforme** y fue estudiada por John Wallis en 1685. Está curva se denomina de esta manera, pues su expresión en coordenadas rectangulares corresponde a una ecuación de cuarto grado y su forma se asemeja a una pera.

Ilustración 6. Hallar el lugar geométrico de un punto fijo de una circunferencia que rueda sin deslizarse sobre otra circunferencia de radio tres veces mayor.

Los pasos básicos de la construcción son los siguientes:

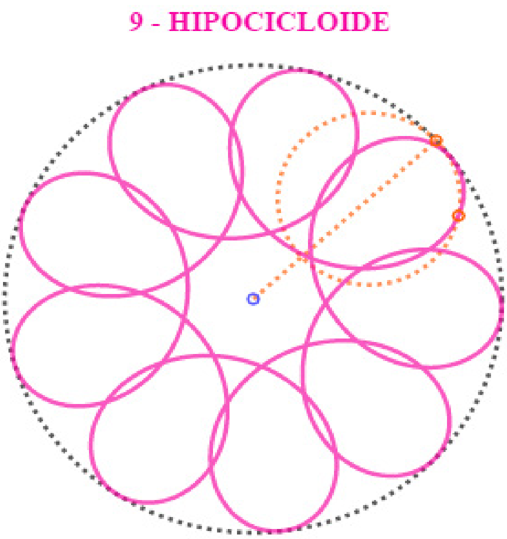
1. Se construye un deslizador que corresponda a un ángulo con las siguientes características. MIN: 0, MAX: 360º, INCREMENTO: 0.5, NOMBRE: GIRASAU.
2. Se construye un deslizador que corresponda a un número entero con las siguientes características. MIN: 1, MAX: 5, INCREMENTO: 0.1, NOMBRE: SAURAD.
3. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, se traza una circunferencia de centro en un punto A, con radio SAURAD y se ubica este valor en 3.
4. Con la herramienta **Punto en objeto**, se ubica un punto B sobre la circunferencia y con la herramienta ángulo dada su amplitud se construye su imagen B', con ángulo GIRASAU y centro A.

5. Con la herramienta Segmento, construya el segmento que une A con B'.
6. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, construir la circunferencia de centro B' y radio 1 y marcar con E la intersección de esta circunferencia con el segmento AB'.
7. Trazar una circunferencia con centro en el punto C que pase por B'.
8. Aplicar ángulo dada su amplitud al punto B' con centro en el punto C y ángulo GIRASAU en sentido horario, para obtener su imagen B''.
9. Si al punto B'' se le modifica la **configuración** y en **básico** se triplica GIRASAU y se le pide **Lugar Geométrico,** cuando se mueve el deslizador GIASAU, se obtiene el lugar geométrico deseado.



Gráfica 90: Una deltoide

Obsérvese que al mover el deslizador SAURAD, se modifica la forma de la curva y aquella que se obtiene, para SAURAD=3, se conoce como **deltoide**, fue estudiada por primera vez por Leonard Euler en 1745 y luego por Jacob Steiner en 1788 y es un caso particular de una familia de curvas denominadas **hipocicloides.** Una **hipociclode** es una curva plana generada por un punto fijo en una circunferencia que rueda sin deslizarse dentro de otra circunferencia de radio mayor. Si en el proceso anterior se multiplica el ángulo GIRASAU por un número natural se generan diferentes hipocicloides. Por ejemplo, la siguiente gráfica ilustra la **9-hipocicloide.**

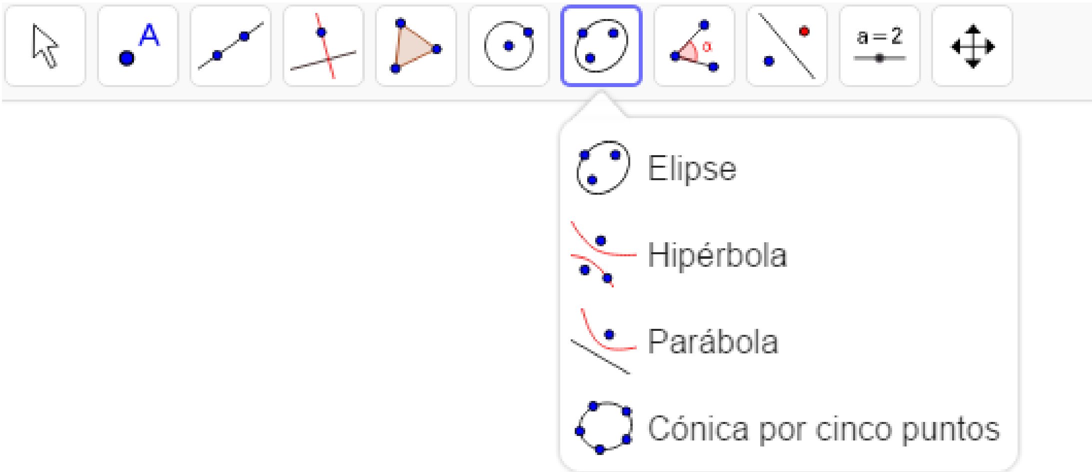


Gráfica 91: Una hipocicloide.

2.4 Las cónicas.

De acuerdo a Boyer (1986), es a Menecmo a quien se le atribuye el primer estudio de las secciones cónicas en la búsqueda de la solución del *Problema de la Duplicación del Cubo.* Aristeo, en su trabajo *Solid Loci*, se refiere a la elipse como la sección del cono de ángulo agudo, a la hipérbola como la sección del cono de ángulo obtuso y a la parábola como la sección del cono de ángulo recto. A pesar de esto, y otros trabajos de Euclides y Arquímedes, según Boyer (1986), es a Apolonio de Perga con su trabajo *Las Cónicas* a quien se le reconoce los aportes más importantes con relación a este tema. Entre estos se encuentran: Reconocer que las cónicas se pueden obtener a partir de un único cono circular variando el ángulo formado entre el plano de sección y el eje del cono, dar por primera vez los nombres de estas curvas y demostrar las propiedades a partir de las cuales la cónicas se definen actualmente como lugares geométricos.

En GeoGebra las cónicas se encuentran en la séptima opción de la **barra de herramientas** como indica la siguiente gráfica



Gráfica 92: El menú que permite generar cónicas.

La cual, en particular, nos indica que en GeoGebra:

- Una **Elipse** está determinada por sus focos y un punto de la curva.
- Una **Hipérbola** está determinada por sus focos y un punto de la curva.
- Una **Parábola** está determinada por su foco y la recta directriz.

Ilustramos a continuación, con el uso de GeoGebra, diferentes maneras de obtener las cónicas.

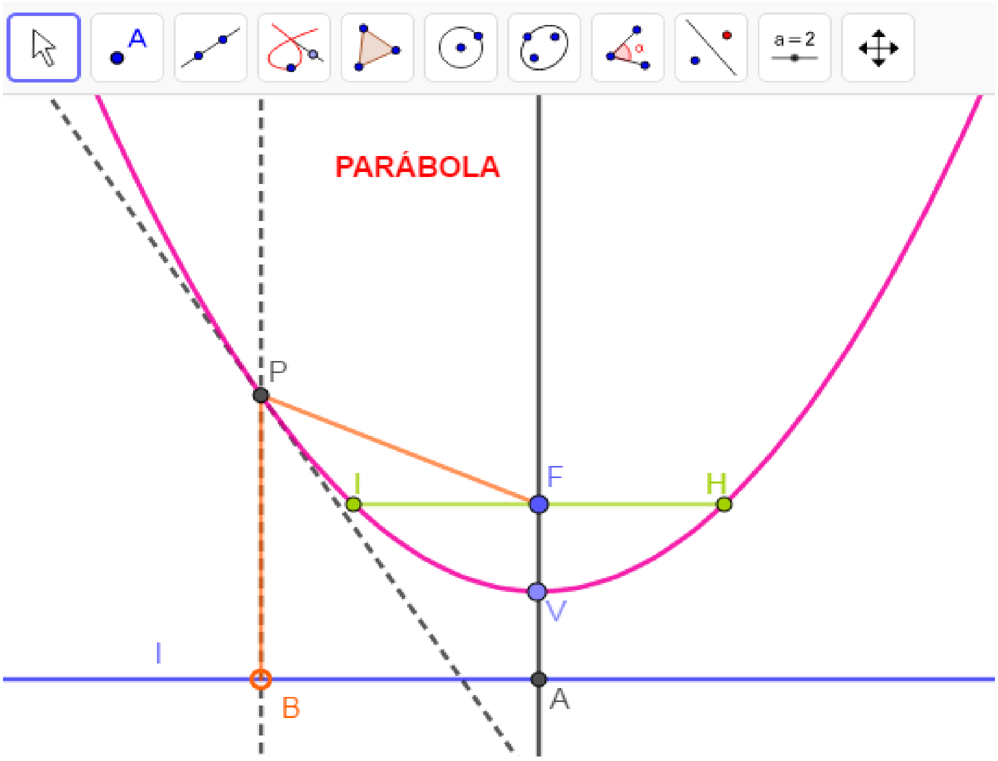
Ilustración 1. Construir la Parábola a partir de su definición como lugar geométrico.

La ***Parábola*** se define como el lugar geométrico de los puntos P del plano cuya distancia a un punto fijo F, llamado **Foco** es igual a su distancia a una recta fila l llamada **Directriz**.

El lugar geométrico puede obtenerse de la siguiente manera:

1. Trazar con, el comando, **recta**, la recta directriz l y seleccionar, con la herramienta **Punto**, un punto fuera de la directriz, el foco F.
2. Con la herramienta **Punto en objeto**, se ubica B un punto cualquiera sobre la directriz y con la herramienta **Perpendicular**, se traza por B una perpendicular a la directriz.
3. A partir de la herramienta, **Mediatriz**, se traza la mediatriz del segmento BF.
4. Utilizando la herramienta **Intersección**, se selecciona el P el punto de corte de la mediatriz y la

perpendicular entonces este punto está en la parábola ya que BP=PF y por tanto la parábola se obtiene como el **Lugar Geométrico** de P cuando B se mueve sobre la directriz l.



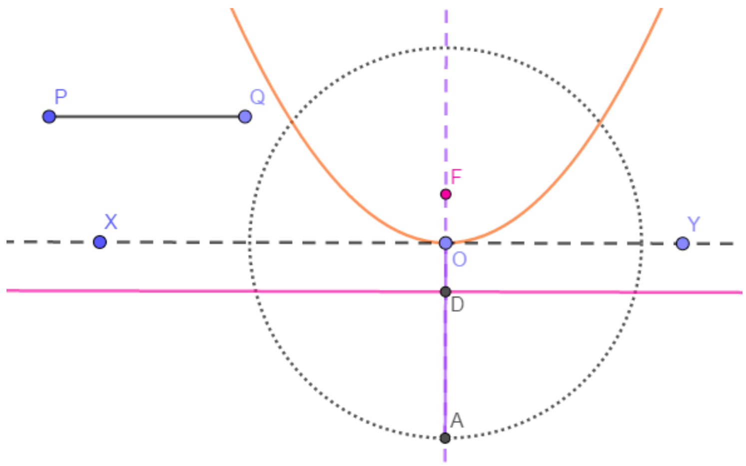
Gráfica 93: La parábola como lugar geométrico.

La perpendicular por F a la directriz se llama **eje** de la parábola, el punto medio A del segmento FA se llama **vértice** de la parábola, el segmento IH paralelo a la directriz por F es el **lado recto** de la parábola y tiene la propiedad de que IH=4AV.

Ilustración 2. Trazar una parábola a partir de su lado recto y su eje.

La utilización de la herramienta **Parábola** requiere determinar a partir de la información dada el foco F y la directriz l, para ello procedemos de la siguiente manera.

1. Consideramos un segmento PQ que corresponde al lado recto de la parábola y construimos, con el comando **Perpendicular**, dos rectas perpendiculares, una de las cuales será el eje de la parábola y su intersección el vértice O de la misma.
2. Con la herramienta **Circunferencia (centro, radio)** se construye la circunferencia de centro en O y radio PQ, con lo cual se obtiene el segmento OA=PQ.
3. Dado que el foco y la directriz están situados a una distancia igual a la cuarta parte del lado recto, dividimos, con la herramienta **Medio o Centro**, el segmento OA en cuatro partes iguales para obtener el punto D.
4. Con herramienta, **Simetría Central**, que se encuentra, de izquierda a derecha, en la novena opción de la barra de herramientas, se halla el simétrico de D con respecto al vértice O, con lo cual se obtiene el foco F.
5. Con la herramienta **Paralela**, se traza por D una paralela a la recta XY se obtiene la directriz.
6. Al utilizar la opción **parábola** del menú herramientas, pulsando en F y en la paralela a la recta XY se obtiene la cónica deseada.



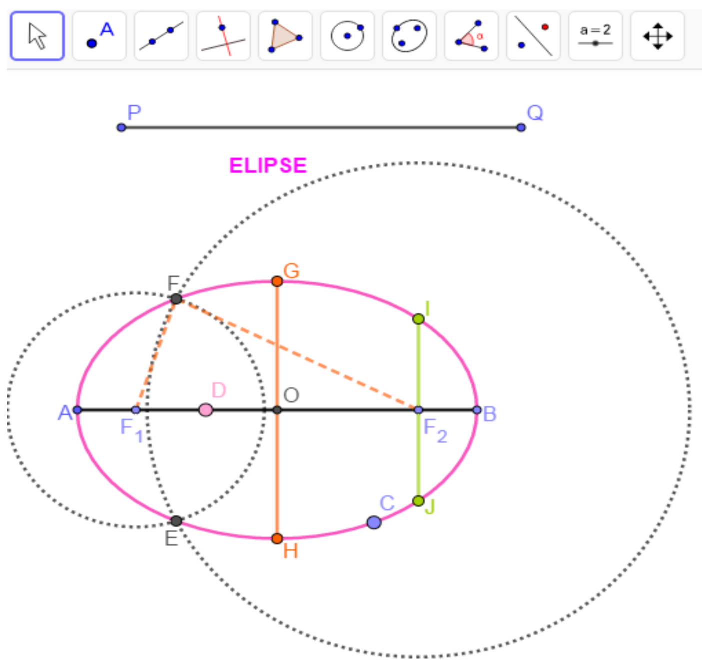
Gráfica 94: La parábola a partir de su lado recto y su eje.

Ilustración 3. Construir la elipse a partir de su definición como lugar geométrico.

La ***Elipse*** se define como el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la suma de las distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados **Focos** es igual a una cantidad constante denotada 2a.

El lugar geométrico puede obtenerse de la siguiente manera:

1. Considerar un segmento PQ, de longitud 2a, con la herramienta **segmento de longitud dada** se lo transporta a partir de un punto A, para obtener el segmento AB de longitud 2a.
2. Si O es el punto medio de AB, tomar un punto F_1 sobre el segmento AB y, con la herramienta **Simetría Central**, su simétrico F_2 respecto de O. Los puntos F_1 y F_2 son los focos de la elipse.
3. Seleccionar un punto cualquiera D sobre el segmento AB y con la herramienta **Circunferencia: centro y radio** trazar la circunferencia de centro F_1 y radio AD y la circunferencia de centro F_2 y radio BD.
4. Los puntos de corte, E y F, de estas circunferencias están sobre la elipse ya que, $F_1E + F_2D=$ $AD+DB=AB=2a$ y por tanto la elipse se obtiene como el **Lugar Geométrico** de los puntos E y F cuando el punto D se mueve sobre el segmento AB.



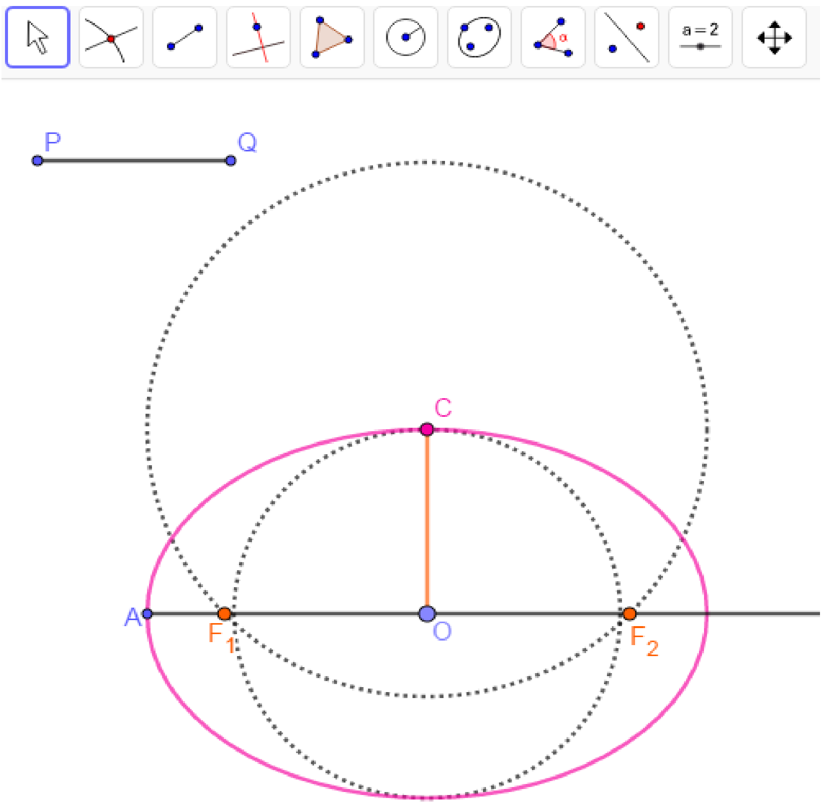
Gráfica 95: La elipse a partir de su definición.

El punto O es el **centro** de la elipse, los puntos A y B son los **vértices** de la elipse, el segmento AB=2a es el **eje mayor** de la elipse, el segmento se F_1F_2=2c llama **eje focal** de la elipse, el segmento HG=2b se llama **eje menor** y un segmento tal como IJ se llama **lado recto**.

Ilustración 4. Construir la Elipse a partir de su centro O, un vértice A y la longitud de su semieje menor b.

La utilización de la herramienta **Elipse** requiere determinar a partir de la información dada, los focos de la elipse y un punto de la misma, dado que conocemos un punto, el vértice A, únicamente encontramos los focos para lo cual procedemos de la siguiente manera.

1. Construir, con la herramienta **Semirrecta**, una semirrecta por el vértice A, ubicar el punto O en ella y, con la herramienta **Perpendicular**, trazar por O una perpendicular a OA.
2. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio)** construir la circunferencia de centro O y radio PQ.
3. Utilizar la herramienta **Intersección**, para hallar el punto C de intersección de la circunferencia y la perpendicular.
4. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio)** construir la circunferencia de centro C y radio OA.
5. Utilizar la herramienta **Intersección** para hallar los puntos, F_1 y F_2, de corte de la semirrecta OA y esta circunferencia los cuales son los focos de la elipse.
6. Al utilizar la opción **elipse** del menú herramientas, pulsando sobre F_1 y F_2 y sobre el punto A se obtiene la cónica deseada.



Gráfica 96: La elipse a partir de un vértice, su centro y el semieje menor.

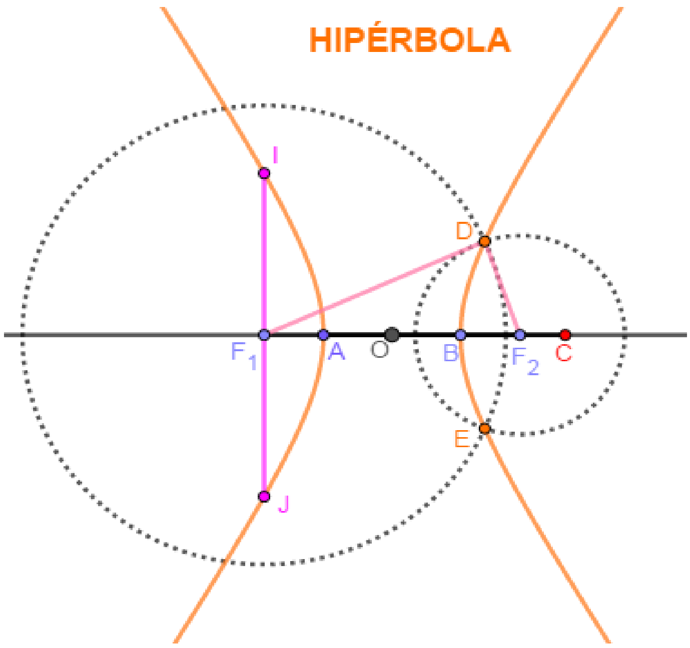
Ilustración 5. Construir la Hipérbola a partir de su definición como lugar geométrico.

La ***Hipérbola*** se define como el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el valor absoluto de la diferencia de las distancias a dos puntos fijos F_1 y F_2, llamados **Focos** es igual a una cantidad constante, menor que la distancia entre los focos, denotada 2a.

El lugar geométrico puede obtenerse de la siguiente manera:

1. Construimos, con la herramienta **Segmento**, un segmento AB de longitud 2a y con la herramienta **Medio o Centro**, su punto medio O.
2. Con la herramienta **Punto en objeto**, ubicamos, sobre la recta AB y en el exterior del segmento AB, un punto F_1 y con **Simetría Central**, su simétrico F_2 respecto de O. Los puntos F_1 y F_2 son los focos de la hipérbola.
3. Sobre la recta AB, en el exterior del segmento F_1F_2 seleccionamos, con el comando **Punto en objeto**, un punto cualquiera C y con la herramienta **Circunferencia: centro y radio** se traza la circunferencia de centro F_1 y radio AC y la circunferencia de centro F_2 y radio BC.
4. Con el comando **Intersección**, se hallan los puntos de corte, D y E, de estas circunferencias. Estos puntos están sobre la hipérbola ya que $|F_1D - F_2D| = |AC - BD| = AB = 2a$ y por tanto la hipérbola se obtiene como el **Lugar Geométrico** de los puntos D y E cuando el punto C se mueve sobre la recta AB.

El punto O es el **centro** de la hipérbola, los puntos A y B son los **vértices** de la hipérbola, el segmento AB=2a es el **eje transverso** de la hipérbola, el segmento se F_1F_2=2c llama **eje focal** de la hipérbola, un segmento tal como IJ se llama **lado recto** y su longitud está dada por la expresión $IJ = \frac{2b^2}{a}$.



Gráfica 97: La hipérbola a partir de su definición.

Ilustración 6. Construir una Hipérbola equilátera dadas sus asíntotas y un punto de ella.

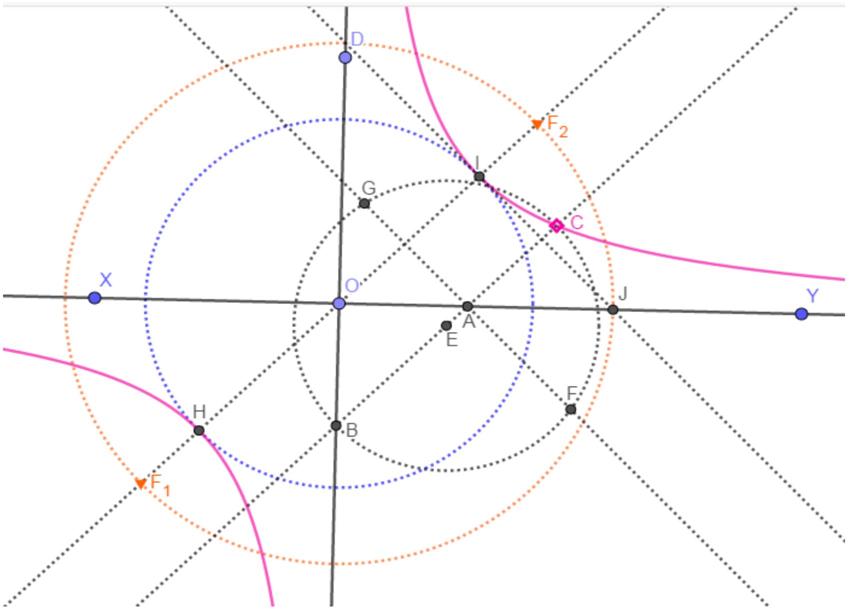
La utilización de la herramienta **Hipérbola** requiere determinar, a partir de la información dada, un punto y los focos de la hipérbola. Dado que conocemos un punto, requerimos encontrar los focos. En este caso, esto no es tan evidente como en los casos considerados y dividimos nuestra labor en tres etapas, a saber: Hallar los vértices de la hipérbola, luego los focos y por último el trazo de la cónica. Veamos esto.

a. Construcción de los vértices de la hipérbola.
   1. Con las herramientas apropiadas y de acuerdo con los datos, se construye una recta (XY), una perpendicular (DO) en un punto O de la misma y un punto C exterior a estas rectas.
   2. Se traza, con la herramienta **Bisectriz**, la bisectriz del ángulo DOY (Eje de la hipérbola).
   3. Por el punto C, y con la herramienta **Paralela**, se traza una paralela al eje de la hipérbola,

la cual corta a las asíntotas en dos puntos A y B.
4. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, se traza, con centro en E, punto medio de BC y radio EB una circunferencia.
5. Por A, con la herramienta **Perpendicular,** se traza una perpendicular al eje de la hipérbola. Sean G y F las intersecciones de esta recta con la circunferencia.
6. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, centro en O y radio GC se traza una circunferencia. Sean F y I los puntos de intersección de esta circunferencia y el eje de la hipérbola. Los puntos I y H son los vértices de la hipérbola.

b. Construcción de los focos de la hipérbola.
1. Por I trazar, con el comando **Perpendicular**, una recta perpendicular a la asíntota XY de la hipérbola. Sea J su punto de intersección.
2. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, centro en O y radio OJ se construye una circunferencia. Sean F_1 y F_2 los puntos de corte de esta circunferencia y el eje de la hipérbola. Los puntos F_1 y F_2 son los focos de la hipérbola deseada.

c. Construcción de la hipérbola.
1. Con la opción **Hipérbola**, del menú herramientas, pulsando sobre F_1 y F_2 y sobre el punto C se obtiene la cónica deseada.



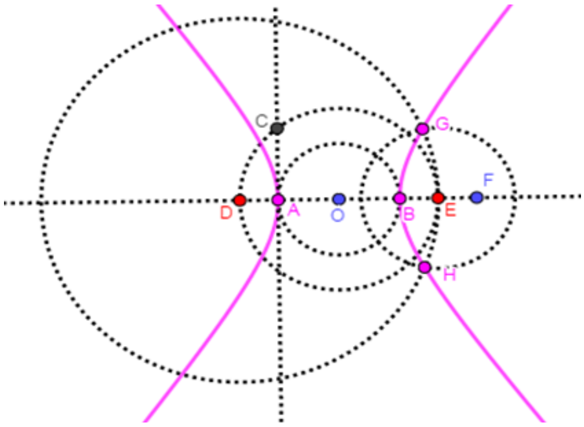
Gráfica 98: Una hiperbólica equilátera a partir de sus asíntotas y un punto.

Ilustración 7. Construir una Hipérbola dadas las longitudes de sus semiejes a y b.

Así como en la ilustración anterior se deben encontrar los focos y un punto de la hipérbola; para ello procedemos de la siguiente manera.

1. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, se traza, una circunferencia de centro en un punto O cualquiera y de radio a.
2. Se utiliza la herramienta **Recta**, para trazar una recta que pase por el centro de la circunferencia.
3. Con la herramienta **Intersección**, se determinan los puntos de corte A y B de esta recta con la circunferencia, los cuales serán los vértices de la hipérbola.
4. Con la herramienta **Perpendicular**, por el punto A, se traza una perpendicular a la recta OA y sobre ella se toma un punto C de tal manera que el segmento OC tenga longitud b.
5. Utilizando la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, se traza la circunferencia de centro O y radio OC.

6. Con **Intersección**, se hallan los puntos, D y E, intersecciones de esta circunferencia y la recta AB. Estos puntos corresponden a los focos de la hipérbola.
7. Con **Punto en objeto**, se toma un punto cualquiera F en la semirrecta con origen en E, que no contiene a O y se trazan las circunferencias de centros D y E con radios AF y BF, cuyos puntos de corte están en la hipérbola.
8. Con la opción **Hipérbola**, del menú herramientas, pulsando sobre D y E y sobre uno de los puntos de corte de estas circunferencias, se obtiene la cónica deseada.



Gráfica 99: Una Hiperbólica a partir de sus semiejes.

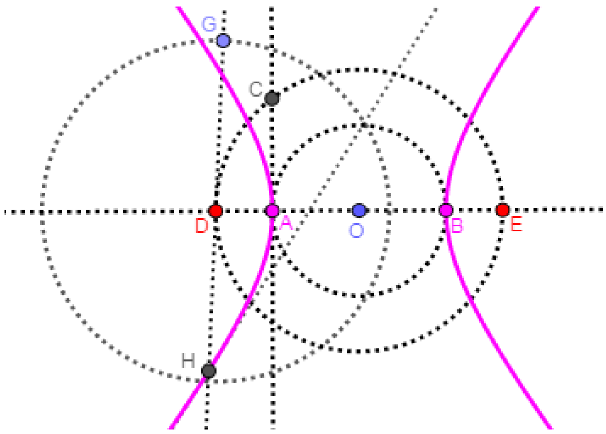
Si se conoce la longitud del lado recto (LR) y de uno de los semiejes, la expresión $LR = \frac{2b^2}{a}$ permite conocer la longitud del otro semieje y por tanto construir la hipérbola.

Una construcción alternativa de esta hipérbola, como lugar geométrico, se puede obtener modificando la construcción a partir del paso 5 de la siguiente manera:

5' Con la herramienta **Circunferencia: radio y centro**, se traza la circunferencia de centro D y radio AB.

6' Se selecciona, con el comando **Punto en objeto**, un punto cualquiera G de esta circunferencia y con la herramienta **Mediatriz**, se traza la mediatriz del segmento BG.

7' Si H es el punto de corte de la mediatriz y la recta GD entonces la cónica se obtiene al tomar el **Lugar Geométrico** del punto H cuando el punto G se mueve sobre la circunferencia.



Gráfica 100: Una construcción alternativa de esta hipérbola.

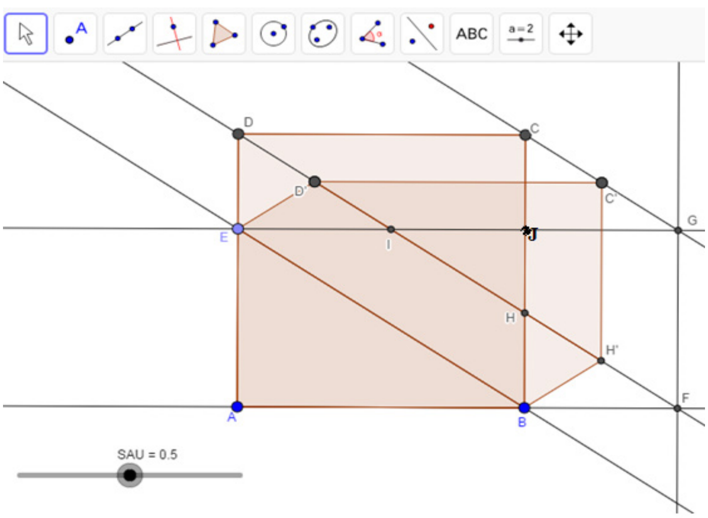
2.5 Cuatro problemas de disección.

La **disección geométrica** es la división, de una figura geométrica, en diversas partes que, después de ser recortadas, se pueden reorganizar para formar otra figura geométrica. La disección geométrica es un instrumento flexible que posibilita tratar diversos problemas geométricos de manera visual y creativa. Escher (1898-1972) fue el primero en utilizar las disecciones y las transformaciones del plano para diseñar mosaicos a partir de figuras geométricas que recubren el plano y utilizó estas técnicas para elaborar bellas obras de arte, fruto del ejercicio de una imaginación excepcional. Utilizaremos la disección geométrica para transformar un cuadrado en un rectángulo, un triángulo equilátero en un cuadrado y para dar dos demostraciones visuales del Teorema de Pitágoras.

Ilustración 1. Utilizando disección transformar un cuadrado en un rectángulo de la misma área.

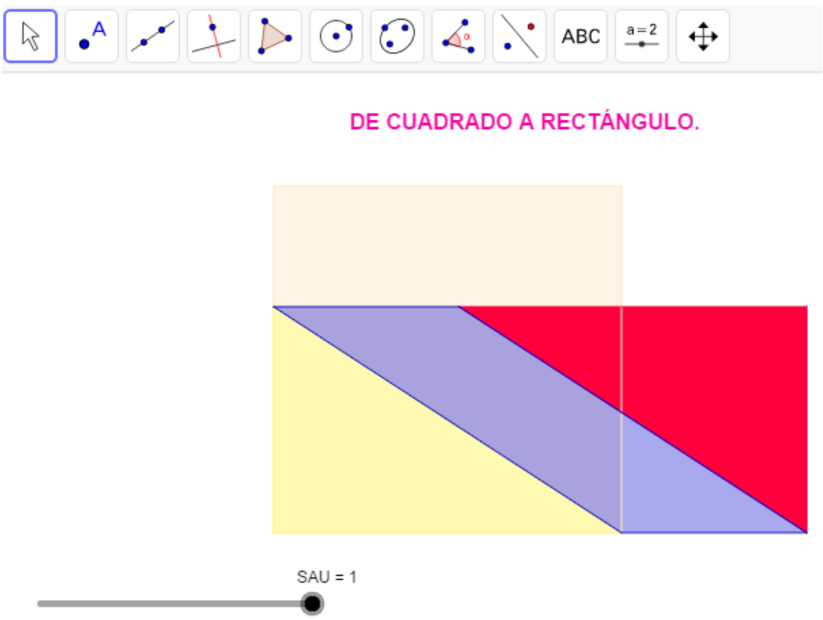
La disección se basa en el trazo de ciertas rectas paralelas y en definir de manera adecuada una traslación. Las primeras seis instrucciones conforman la disección y las tres últimas, los movimientos que llevan el cuadrado en un rectángulo. Estas son:

1. Con la herramienta **Polígono regular**, que se encuentra en la quinta opción de la barra de herramientas, construir un cuadrado ABCD.
2. Utilizar la herramienta **Punto en objeto**, para ubicar un punto E sobre AD, y con la herramienta **Recta**, trazar las rectas AB y EB.
3. Con la herramienta **Paralela**, construir por D y por C, rectas paralelas a EB.
4. Con la herramienta **Intersección**, ubicar el punto F de corte de la paralela por D y la recta AB y con la herramienta **Perpendicular**, trazar por este punto una perpendicular a AB.
5. Utilizar el comando **Intersección**, para hallar el punto G de intersección de esta recta con la paralela por C a EB, con el comando **Recta**, trazar la recta EG.
6. Usar la herramienta **Intersección**, para encontrar el punto H de corte de la recta DF con el lado BC y el punto I de corte de la recta EG y la recta DF.
7. Construya un **deslizador**, tipo NÚMERO, con las siguientes características; MIN=0, MAX=1, INCREMENTO=0.01 y asígnele un nombre apropiado; para el caso SAU.
8. Desde la **línea de entrada** escribir lo siguiente:
   Traslada (Polígono (D, C, H), Vector (D, I)*SAU). Esta instrucción produce tres puntos D’, C’ y H’ imágenes de los puntos D, C y H mediante la traslación según el vector DI.
9. Si con la herramienta **Polígono**, se marcan los triángulos D’C’H’, EAC, el cuadrilátero D’EBH’ y se **anima** el deslizador SAU se observa que el cuadrado ABCD, con SAU=0, se va transformando hasta obtener el rectángulo EAH’C’, con SAU=1. La siguiente gráfica ilustra lo que sucede cuando SAU=0.5. El cuadrado ABCD y el rectángulo AFGE tienen la misma área ya que los rectángulos EJCD y BFGJ tienen igual área. ¿Puede explicar por qué?



Gráfica 101: La disección de un cuadrado en un rectángulo.

Si damos un poco de estética a la construcción, ocultando objetos que no consideremos necesarios, dando color a otros y elaborando un texto, podemos obtener, cuando SAU=1, una situación como la siguiente.



Gráfica 102: El resultado final de la disección de un cuadrado en un rectángulo.

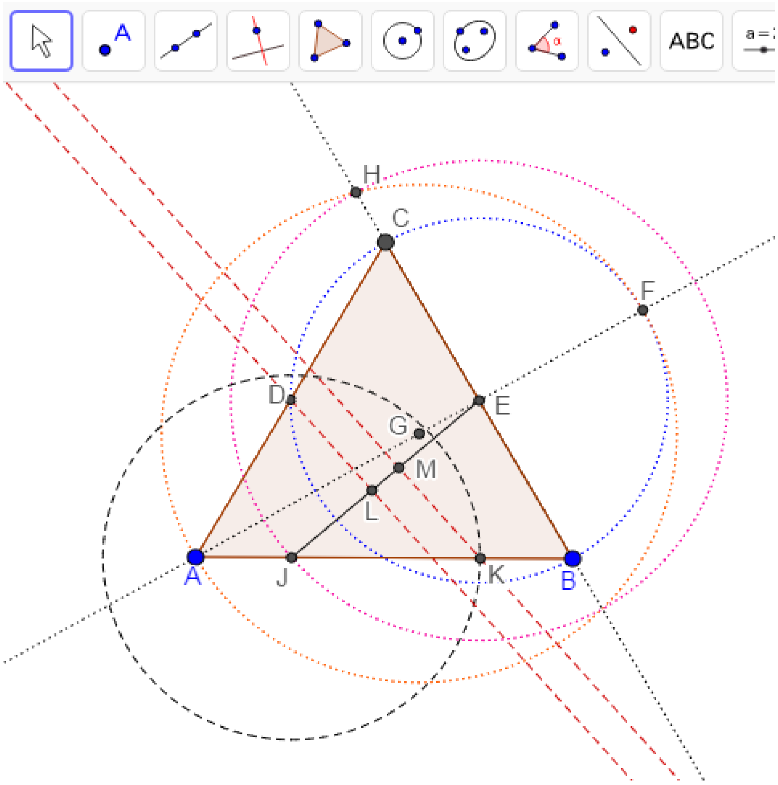
Ilustración 2: Dividir un triángulo equilátero en cuatro partes de tal manera que con ellas se pueda armar un cuadrado.

Este problema, denominado el **Problema del Mercero**, (Dudeney, 1907) fue propuesto por, el matemático aficionado inglés, H. E. Dudeney en 1902 en la revista Weekly Dispatch y en 1905 a la Royal Institution of Mathematics y en lo que sigue describimos e implementamos su solución.

La construcción está conformada por dos pasos básicos: La disección del triángulo y los movimientos que transforman esta disección en un cuadrado. La disección requiere determinar el lado del cuadrado el cual corresponde a la media proporcional entre la altura y la mitad de la longitud del lado del triángulo. Los pasos son:

1. Con la herramienta **Polígono regular**, construir un triángulo equilátero ABC y con **Medio o Centro** los puntos D y E puntos medios de los lados AC y BC.
2. Utilice la herramienta **Recta**, para trazar la recta AE.
3. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto),** construir la circunferencia de centro en E que pasa por C.
4. Con **Intersección**, hallar el punto F corte de esta circunferencia y la recta AE y G el punto medio de AF.
5. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto), c**onstruir la circunferencia de centro G que pasa por F.
6. Trazar la recta BC y el punto H intersección de esta esta recta y la circunferencia anterior.
7. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, trazar la circunferencia de centro E y radio EH.
8. Sea J el punto de corte de esta circunferencia con el lado AB. A partir de la herramienta **Segmento**, construir el segmento EJ.
9. Trazar la circunferencia de centro J y radio EH.
10. Sea K el punto de intersección de esta circunferencia y el lado AB. Trazar por D y K, con la herramienta **Perpendicular**, rectas perpendiculares al segmento EJ y sean L y M los puntos de corte de estas rectas con el segmento EJ.

En estas condiciones los polígonos ADLJ, DLEC, JMK, MEBK conforman la disección del triángulo ABC, como se ilustra en la siguiente gráfica.

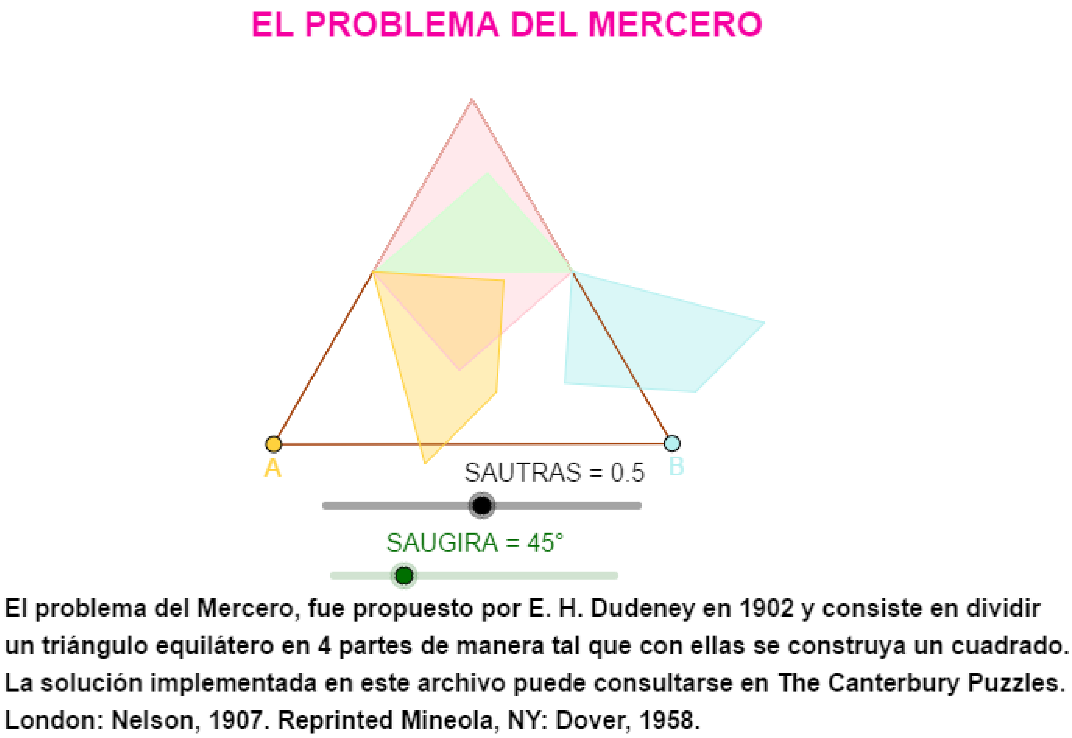


Gráfica 103: La disección de un triángulo equilátero para transformarlo en un cuadrado.

Enseguida, se construye, en el lugar apropiado, el cuadrado de lado EJ y se realizan los movimientos que permiten conformar el cuadrado a partir de los polígonos en los cuales se ha dividido el triángulo ABC. Aunque la versión de Dudeney incluye únicamente rotaciones, esta se ha modificado de tal manera que se incluya una traslación y dos rotaciones de 180°, asociadas cada una de ellas a un deslizador.

11. Con la herramienta **Polígono**, construir los polígonos ADLJ, DCEL, JMK, EMKB.
12. Obtener, con la herramienta **Centro o Medio**, el punto medio I del segmento AB.
13. Construir un **deslizador** tipo NÚMERO, MIN=0, MAX=1, INCREMENTO=0.01 y nombre SAUTRAS.
14. En la **línea de entrada** escribir lo siguiente.
    Traslada(Polígono(J, M, K), vector (I,C)*SAULOTRAS).
15. Construir un **deslizador** tipo ÁNGULO, con las siguientes características MIN: 0°, MAX: 180° con INCREMENTO= 1° y nombre SAUGIRA.
16. En la **línea de entrada** escribir lo siguiente.
    Rota(Polígono(A, D, L, M), SAUGIRA, D).
    Rota(Polígono(E, B, K, M), SAUGIRA, E).

Con las líneas 14 y 16 se crean los polígonos que son las imágenes, bajo la traslación y la rotación de los polígonos considerados y al mover los deslizadores estos polígonos se van moviendo hasta que cuando SAUTRAS llega a 1 y SAUGIRA a 180°, el triángulo se convierte en un cuadrado. Después de ocultar los elementos apropiados, color dar color a los polígonos, escribir un texto ilustrativo y ubicar el deslizador SAUTRAS en 0.5 y SAUGIRA en 45°, se obtiene una imagen como la siguiente.



Gráfica 104: El resultado final de la disección de un triángulo equilátero en un cuadrado.

Ilustración 3. Construir una “demostración” animada del Teorema de Pitágoras.

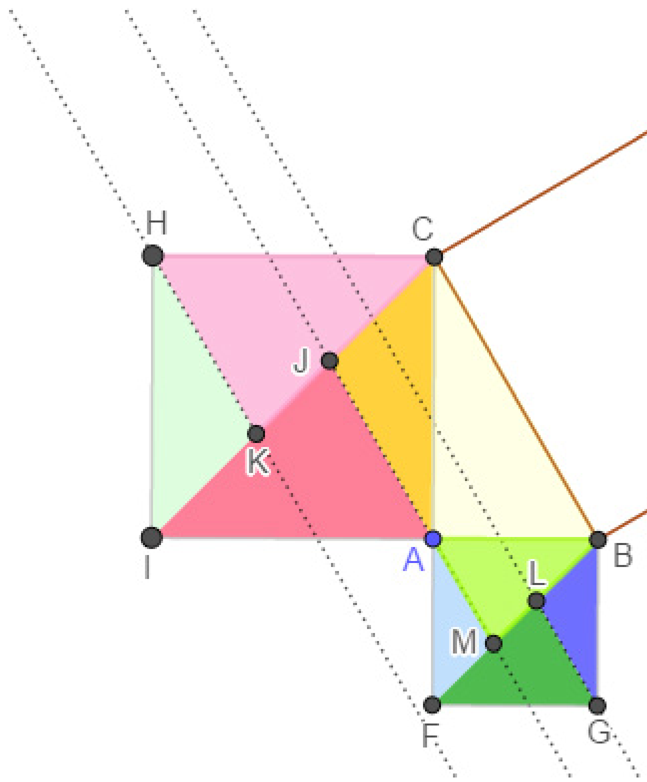
El teorema de Pitágoras es tal vez la relación matemática más conocida y su historia se remonta casi 4000 años atrás y del mismo se conocen numerosas demostraciones, por ejemplo, en el texto The Pythagoream Proposition, (Loomis, 1968), cuya primera versión se publicó en 1927, se presentan 370 demostraciones de este resultado, entre las que se incluyen pruebas algebraicas y geométricas. Entre estas últimas esta la propuesta por el físico Alemán J. E. Böttcher, el cual, en 1886 publicó un artículo en el que proponía la demostración como un puzzle geométrico, es la que se reproduce en este trabajo y utiliza una rotación y una traslación. Las instrucciones son las siguientes.

a. Construcciones iniciales

1. Utilizando el proceso descrito en la ilustración 4 de la sección 2.1, construir un triángulo rectángulo ABC y con la herramienta **Polígono regular**, sobre cada uno de sus lados, cuadrados, CBDE, ABFG y ACHI.
2. (OPCIONAL) Si lo considera conveniente construya dos deslizadores para los catetos para que los lados de los triángulos cambien de tamaño.

b. Disección de los cuadrados de lados BC y BA y puntos básicos.

3. Trazar por H, B y G, con la herramienta **Paralela**, rectas paralelas a la hipotenusa.
4. Trazar, con la herramienta **Segmento**, las diagonales CI y BF de los cuadrados ACHI y BAFG.
5. Con la herramienta **Intersección**, determina los puntos de corte J, K de las paralelas por H y A con la diagonal IC y los puntos de corte L, M con las paralelas por A y G con la diagonal BF.
6. Construya, con la herramienta **Polígono**, los polígonos HKC, CJA, AJI, HKI, FLG, AMF, BLG y AMB y coloréelos como desee.
   Estos polígonos conforman la disección de los cuadrados ABFG y ACHI, que uniéndolos de manera adecuada sobre cuadrado CBDE, lo cubren completamente. La disección se ilustra en la siguiente gráfica.



Gráfica 105: Una disección de los cuadrados sobre los catetos.

Enseguida, a partir de traslaciones y rotaciones, se construyen los elementos básicos que realizan los movimientos apropiados para cubrir el cuadrado BCED a partir de la disección.

7. Cree un **deslizador** tipo NÚMERO (SAULOTRAS), con las siguientes características. MIN=0, MAX=1, INCREMENTO=0.01.
8. Cree las imágenes de los polígonos HKC, CJA, AJI, HKI, FLG, AMF, BLG y AMB bajo una traslación. Para ello desde la barra de entrada escriba lo siguiente y cada vez oprima la tecla retorno.
   Traslada(Polígono(H, K, C), vector(H, C)*SAULOTRAS)
   Traslada(Polígono(C, J, A), vector(A, D)*SAULOTRAS), esto produce el triángulo $C'_1J'A'$.
   Traslada(Polígono(I, J, A), vector(A, D)*SAULOTRAS)
   Traslada(Polígono(H, K, I), vector(H, C)*SAULOTRAS), esto produce el triángulo $H'_1K'_1I'_1$.
   Traslada(Polígono(F, L, G), vector(G, B)*SAULOTRAS), esto produce el triángulo F'L'G'.
   Traslada(Polígono(A, M, F), vector(A, E)*SAULOTRAS)
   Traslada(Polígono(B, L, G), vector(G, B)*SAULOTRAS)
   Traslada(Polígono(A, B, M), vector(A, E)*SAULOTRAS), esto produce el triángulo $A'_3B'_1M'_1$.
9. Cree un **deslizador** tipo ÁNGULO (SAULOROTA), con las siguientes características. MIN=0°, MAX=90°, INCREMENTO=1°.
10. Cree las imágenes de los polígonos $A'_3B'_1M'_1$, $H'_1K'_1I'_1$ bajo una rotación con ángulo SAULOROTA en sentido de las manecillas del reloj. Para ello desde la barra de entrada escriba lo siguiente y cada vez oprima la tecla retorno.
    Rota(Polígono(A'_3, B'_1, M'_1), -SAULOROTA, E)
    Rota(Polígono(F', L', G'), SAULOROTA, B)
11. Cree las imágenes de los polígonos, $C'_1J'A'$, $H'_1K'_1I'_1$ bajo una rotación con ángulo SAULOROTA en sentido contrario de las manecillas del reloj. Para ello desde la barra de entrada escriba lo siguiente y cada vez oprima la tecla retorno.
    Rota(Polígono(C'_1, J', A'), SAULOROTA, D)
    Rota(Polígono(H'_1, K'_1, I'_1), SAULOROTA, C)
12. Mueva el deslizador y los polígonos se irán desplazando hasta "llenar" el cuadrado.
13. Si anima los deslizadores se observa movimiento "continuo" que simula el desplazamiento

anterior. Una imagen de lo anterior, después de haber ocultado los elementos necesarios, con SAULOTRAS en 0.8 y SAULOROTA en 45° se muestra a continuación.

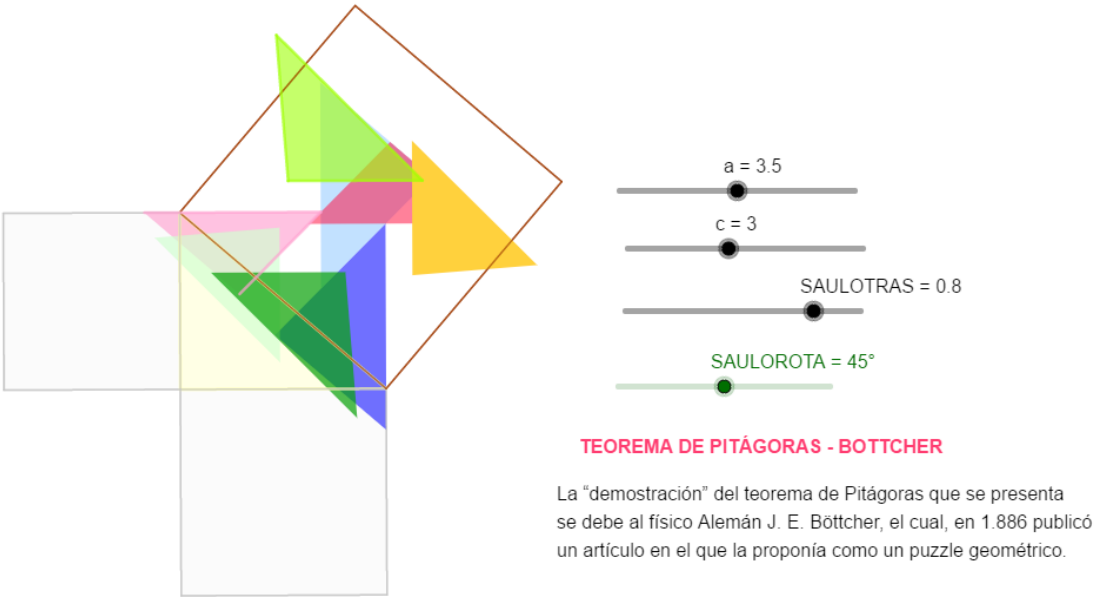


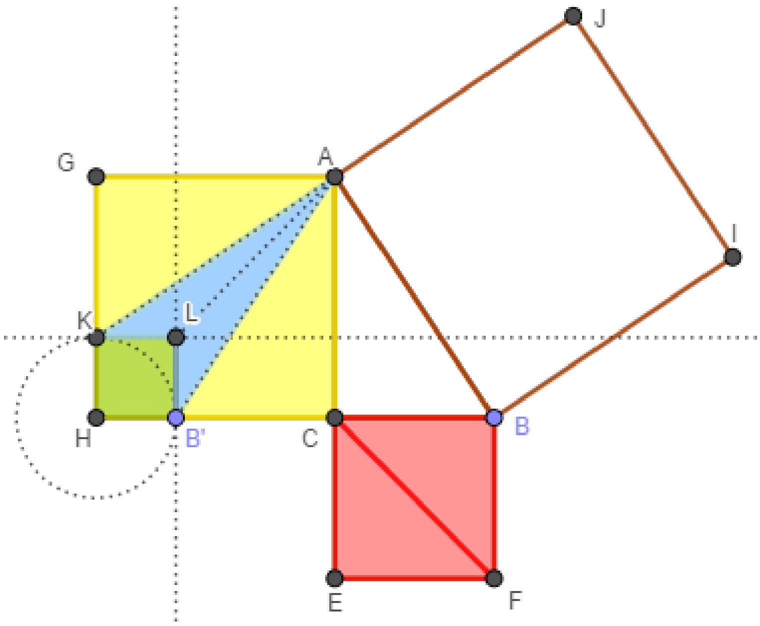
Gráfico 106: Una demostración por disección del Teorema de Pitágoras.

Ilustración 4. Construir otra "demostración" animada del Teorema de Pitágoras.

Liu Hui, Siglo III d. C., es considerado uno de los más grandes matemáticos chinos de la antigüedad. Uno de los textos chinos, de matemáticas, más famoso fue el *Jiuzhang Suanshu* y Liu Hui editó y publicó todas las soluciones a los problemas de este libro. En esta publicación se encuentran, entre otros: Algoritmos para resolver ecuaciones lineales con varias incógnitas, algunos resultados sobre geometría de sólidos, una aproximación de pi, que mejora la de Arquímedes, y una demostración del teorema de Pitágoras que utiliza disección y que implementamos en esta ilustración. Los pasos son los siguientes.

1. Utilizando el proceso descrito en la ilustración 4, de la sección 2.1, construir un triángulo rectángulo ABC y con la herramienta **Polígono regular**, sobre cada uno de sus lados, cuadrados ABIJ, ACHG y CBFE.
2. Con la herramienta **Simetría Central**, hallar el simétrico B', del punto B con respecto a C.
3. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto)**, trazar la circunferencia de centro H que pasa por B' y con **Intersección** halle el punto de corte de esta circunferencia con el segmento HG. Sea K este punto.
4. Por B' y por K, con la herramienta **Paralela**, trazar rectas paralelas, a HG y HC y llame L al punto de intersección de estas rectas.
5. Con el comando **Segmento**, construya los segmentos KL, B'L, AK, LA, B'A y CF.

Los pasos anteriores son la disección de los cuadrados ACHG y CBFE que conforman el cubrimiento del cuadrado ABIJ y se ilustra en la siguiente figura.

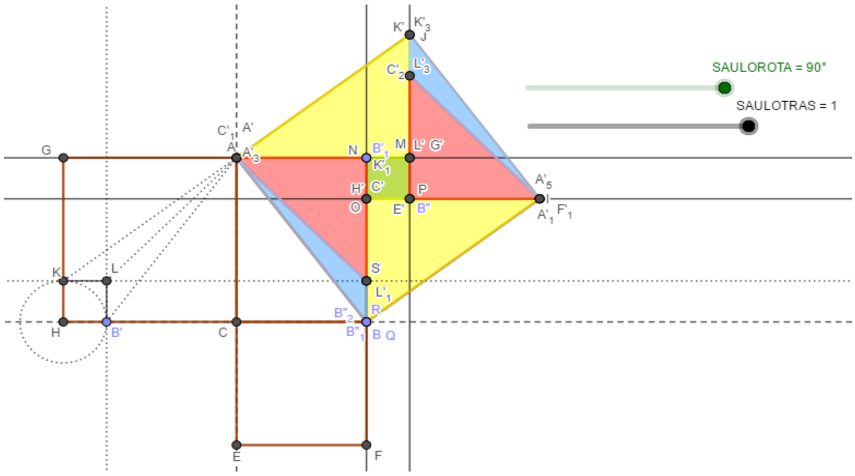


Gráfica 107: La disección de Liu Hui en el Teorema de Pitágoras.

A continuación, se presentan las instrucciones que permiten cubrir, a partir de la disección y esencialmente por medio de traslaciones y rotaciones, el cuadrado ACJI, para lo cual se definen el deslizador SAULOROTA, tipo ÁNGULO, con las siguientes características. MIN=0°, MAX=90°, INCREMENTO=1° y el deslizador SAULOTRAS, tipo NÚMERO, con las siguientes características. MIN=0, MAX=1, INCREMENTO=0.01 que van a permitir modificar realizar los movimientos adecuados que realicen él cubrimiento. Estas son:

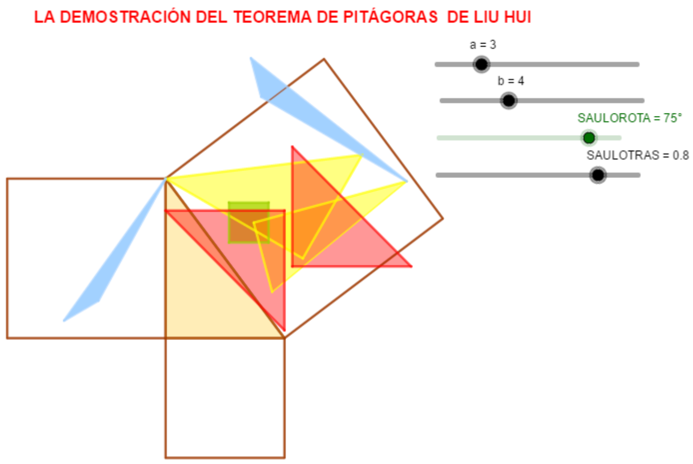
1. Desde la **barra de entrada** al escribir, Rota(Polígono(K, G, A), 2*SAULOROTA, A) se obtiene el triángulo K’G’A’ en el sitio adecuado.
2. Con la herramienta **Perpendicular**, por B y J trazamos perpendiculares a BC y por A y I perpendiculares a AC, con lo cual se obtiene el cuadrado MNOP congruente con el cuadrado LKHB’.
3. Al escribir desde la **barra de entrada** Traslada(Polígono(H, B’, L, K), Vector(H, O)*SAULOTRAS) se obtiene el polígono $H'B''L'K'_1$, imagen bajo la traslación según el vector HO.
4. Al escribir desde la **barra de entrada,** Traslada(B’, Vector(B’, B)*SAULOTRAS) se obtiene el punto B''_1.
5. Si se escribe desde la **barra de entrada**, Rota(Polígono(A, C, B''_1), -SAULOROTA, B) se obtiene el polígono $A'_1C'Q$.
6. De la misma manera la instrucción Traslada(Segmento(B’, L), Vector(B’, b)*SAULOTRAS) produce el segmento auxiliar $B''_2L'_1$.
7. La instrucción Traslada(Polígono(B, C, F), Vector(B, N)*SAULOTRAS) produce el triángulo $B_1'C'_1F'$ en el lugar apropiado.
8. La instrucción Traslada(Polígono(C, E, F), Vector(E, P)*SAULOTRAS) produce el triángulo $C_2'E'F'_1$ en el sitio adecuado.
9. Desde la **barra de entrada**, la instrucción, Rota(Polígono(K, L, A), -SAULOROTA, B) produce el triángulo K'_3 $L'_3A'_5$ que es la imagen del triángulo KLA.
10. Al escribir desde la **barra de entrada**, Rota(Polígono(B''_2, L'_1,A), 4*SAULOROTA, A) produce el triángulo RSA'_3 que corresponde a imagen del triángulo $B''_2L'_1A$.

Con este proceso, después de ubicar los deslizadores SAULOROTA en 90° y SAULOTRAS en 1, se obtiene una figura análoga a la siguiente:



Gráfica 108: Cubrimiento del cuadrado sobre la hipotenusa en la demostración de Liu Hui.

Si se ocultan los elementos que considere convenientes, con SAULOTRAS en 0.8 y SAULOROTA en 75° se obtiene una figura como la siguiente.



Gráfica 109: La demostración por disección de Liu Hui del Teorema de Pitágoras.

2.6 El Problema de Apolonio.

De acuerdo a Pappus, *"El Problema de Apolonio"* se encuentra en un texto desaparecido de Apolonio de Perga, (262-160 a. C.) denominado *"Tratado de las Tangencias"* el cual estaba dividido en dos libros que contenían cada uno 21 lemas, 60 teoremas y 11 problemas y cuyo enunciado puede condensarse en una sola proposición (Rabu-Boye, 2009):

Dados tres objetos geométricos, cada uno de los cuales puede ser un punto, una recta o una circunferencia, construir una circunferencia que sea tangente a los tres objetos dados.

Este problema ha sido considerado, además de Apolonio y Pappus, por diversos investigadores, los cuales han presentado diferentes soluciones utilizando diversas áreas de la matemática. Entre ellos se encuentran: F. Vieta (Siglo XVI), R. Descartes (Siglo XVII), L. Euler (Siglo XVIII) y otros. Las dos últimas soluciones referenciadas son las de Frederick Soddy en 1936 y la de David Eppstein en el 2001.

Si se realizan las diferentes combinaciones posibles de tres puntos, rectas o circunferencias se obtienen 10 casos que se enuncian a continuación, así como el número de soluciones en cada uno de ellos.

- Tres puntos – una solución.
- Tres rectas – cuatro soluciones.
- Dos puntos y una recta – dos soluciones.
- Dos rectas y un punto – dos soluciones.
- Dos puntos y una circunferencia – dos soluciones.
- Dos circunferencias y un punto – cuatro soluciones.
- Un punto, una recta y una circunferencia – cuatro soluciones.
- Dos rectas y una circunferencia – ocho soluciones.
- Dos circunferencias y una recta – ocho soluciones.
- Tres circunferencias– ocho soluciones.

Los dos primeros casos aparecen en el Libro IV de los Elementos de Euclides; los casos 3, 4, 5, 6, 8 y 9 están en el Libro I del Tratado de las Tangencias de Apolonio, y los casos 7 y 10 se encuentran en el Libro II de la misma obra.

El objetivo central de esta sección es el de realizar la construcción de los diferentes casos del Problema de Apolonio utilizando únicamente elementos de geometría sintética. En los dos primeros utilizaremos los conceptos de mediatriz y de bisectriz, la solución de los siete siguientes se basa, fundamentalmente, en el concepto de inversión y en el décimo los conceptos de homotecia, centro radical y potencia de un punto. Revisaremos en primer lugar el concepto de inversión y sus propiedades.

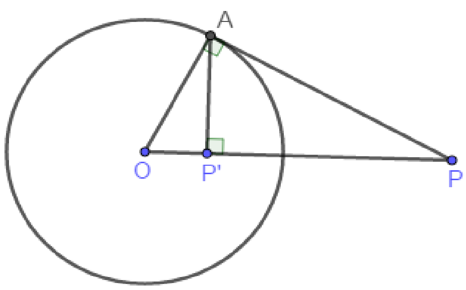
2.6.1 El concepto de inversión y algunas de sus propiedades.

Aunque no está claramente definido en que época surgió la noción de inversión, de acuerdo H. Eves (1985), al parecer las primeras ideas sobre inversión aparecen en la obra perdida de Apolonio *Lugares geométricos planos*, sin embargo, el primero en utilizar los puntos inversamente relacionados fue Francois Vieta en el siglo XVI y la utilización de la inversión para la simplificar figuras planas data del siglo XIX.

Definición: Dada una circunferencia S de centro O, radio R y un punto P en el plano, se llama **inverso de P** con respecto a la circunferencia S al punto P\` sobre $\overrightarrow{OP}$ tal que OP*OP´= R^2.
La circunferencia S se llama **circunferencia de inversión**, el punto O **centro de inversión**, el radio R **radio de inversión** y R^2 **potencia de inversión**.

Geométricamente el inverso de un punto P, en el exterior de la circunferencia de inversión, puede obtenerse como sigue.

- Trazar el segmento OP.
- Por el punto P construir la tangente a la circunferencia.
- Por el punto A de contacto trazar una perpendicular a OP.
- El punto P´, corte de la perpendicular y el segmento OP es el inverso de P.



Gráfica 110: La construcción del inverso de un punto.

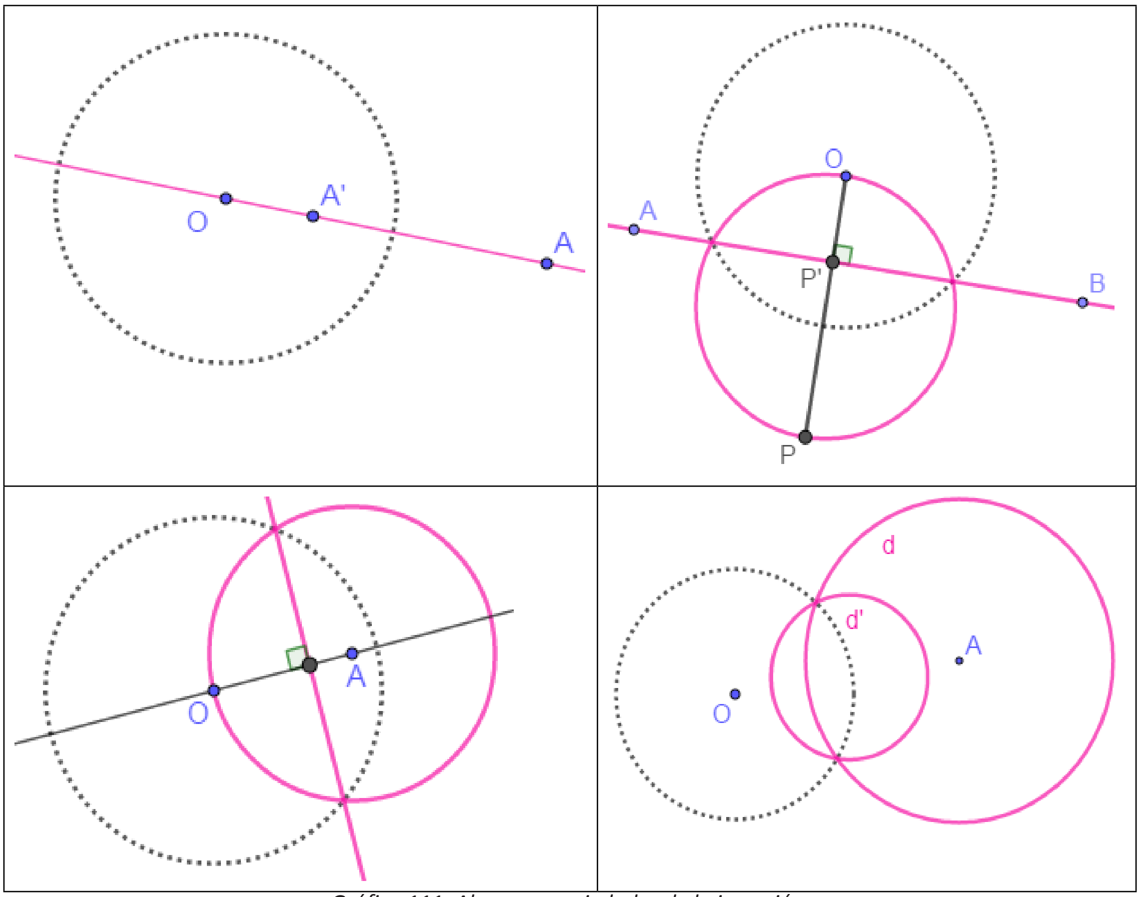
Es claro que si P está en el interior de la circunferencia el proceso contrario nos proporciona su inverso y que si P está sobre la circunferencia su inverso es el mismo punto. Naturalmente, el punto O, centro de inversión, no posee inverso.

En GeoGebra el inverso de un objeto se puede obtener directamente con la utilización del comando **Inversión** que se encuentra en la novena opción de la barra de herramientas y para utilizarla se debe dar clic sobre el objeto a invertir y luego sobre la circunferencia de inversión.

A continuación, se resumen las propiedades básicas de la inversión que utilizaremos en la solución de los diferentes casos del Problema de Apolonio.

Propiedades de la Inversión
Sea S una circunferencia de centro O y radio R entonces

a. La inversa de la circunferencia de inversión es la misma.
b. La inversa de una recta que pasa por O es la misma recta.
c. La inversa de una recta que no pasa por O es una circunferencia que pasa por O y tal que el diámetro de S que pasa por O es perpendicular a la recta dada.
d. La inversa de una circunferencia que pasa por O es una recta que no pasa por O y perpendicular al diámetro de la circunferencia que pasa por O.
e. La inversa de una circunferencia que no pasa por O es una circunferencia que no pasa por O.
f. La inversión preserva la incidencia, es decir, si dos curvas son tangentes o se cortan en un punto sus inversas son tangentes o se cortan en el inverso del punto.



Gráfica 111: Algunas propiedades de la inversión.

Fundamentalmente, la aplicación del método de inversión consiste en seguir cuatro pasos que se pueden resumir así:

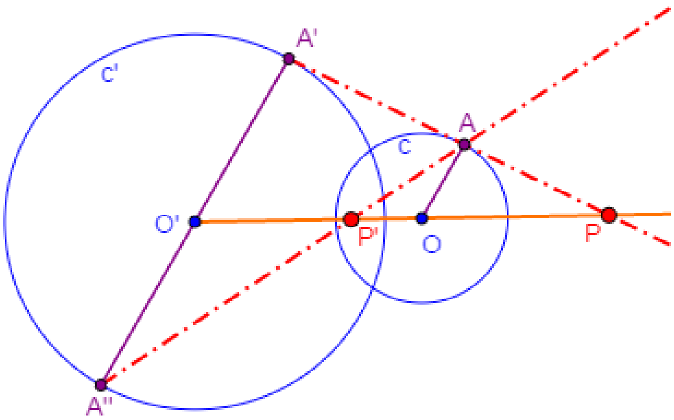
- Seleccionar apropiadamente el centro y la circunferencia de inversión.
- Calcular los inversos de los datos, con respecto a la circunferencia de inversión.
- Trazar las tangentes comunes a los objetos inversos.
- Hallar la inversa de las tangentes; estos resultados serán los objetos buscados.

Aplicaremos estos pasos para resolver algunos casos del Problema de Apolonio.

2.6.2 Otros conceptos básicos

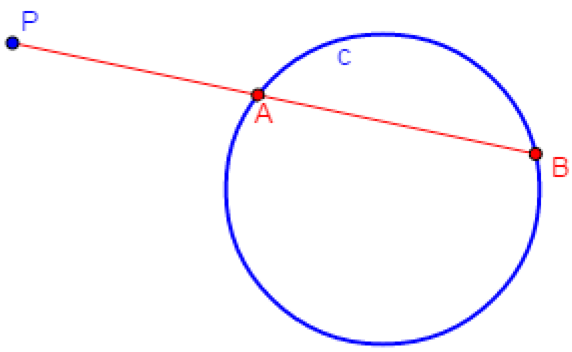
La solución del problema de Apolonio para el caso de tres circunferencias, que presentaremos en este trabajo, (ver ilustración 10), requiere algunos conceptos que usualmente no se tratan en un primer curso de geometría Euclidiana, a saber: centros de semejanza interior y exterior de dos circunferencias, potencia de un punto con respecto a una circunferencia, eje radical de dos circunferencias, centro radical y polo de una recta con respecto una circunferencia. Dedicamos esta sección a una presentación teórica de estos conceptos.

Definición 1: Sean c y c’ dos circunferencias de centros O y O’ y A un punto sobre c no colineal con estos. Considere el diámetro A’A’’ de c’ paralelo al radio OA de c y la recta OO’ que une los centros de las circunferencias c y c’ entonces las semirrectas A’A y A’’A intersectan a la semirrecta OO’ en dos puntos P y P’. Los puntos P’ y P se llaman **centros de semejanza interior y exterior** de las circunferencias c’ y c.



Gráfica 112: Centros de semejanza interior y exterior de dos circunferencias.

Definición 2: Sean c una circunferencia, P un punto del plano por el que trazamos una secante a la circunferencia la cual determina, en c, dos puntos A y B. Se llama **Potencia de P con respecto a la circunferencia c**, al producto de las longitudes de los segmentos determinados por el punto P y los puntos A y B.



Gráfica 113: La potencia de un punto con respecto a una circunferencia.

Así entonces, $Pot(P) = PA * PB$.

Es posible demostrar, que este valor es independiente de la secante seleccionada, es decir, Si C y D son los puntos de intersección de otra secante a la circunferencia, trazada desde P entonces,

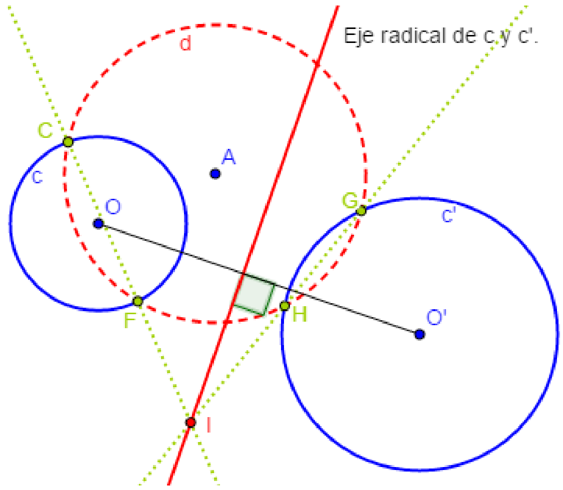
$$Pot(P) = PA * PB = PC * PD = cte.$$

Definición 3: Sean c y c' dos circunferencias que no se intersectan, el **eje radical** de las circunferencias c y c' es el lugar geométrico de los puntos del plano que tienen igual potencia con respecto a las dos circunferencias.

El eje radical de las circunferencias c y c' puede ser construido, geométricamente, de la siguiente manera:

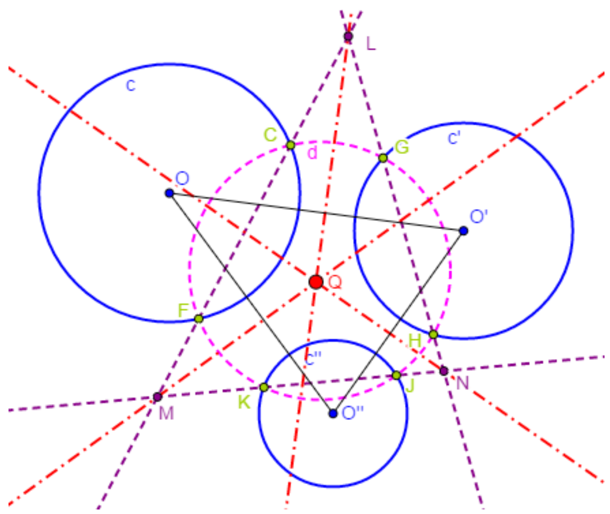
1. Construir una circunferencia auxiliar d que intersecte a c en los puntos C y F y a c' en los puntos G y H.
2. Trazar las rectas CF y HG las cuales se cortan en un punto I.

La recta perpendicular por I a la recta de los centros OO', es el **eje radical** de las circunferencias c y c'.



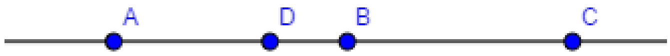
Gráfica 114: El eje radical de dos circunferencias que no se intersectan.

Definición 4: Sean c, c' y c'' tres circunferencias que no se intersectan dos a dos. Si se construyen los ejes radicales de estas circunferencias entonces estas tres rectas son concurrentes en un punto Q. El punto Q se llama **centro radical** de las circunferencias c, c', c''.



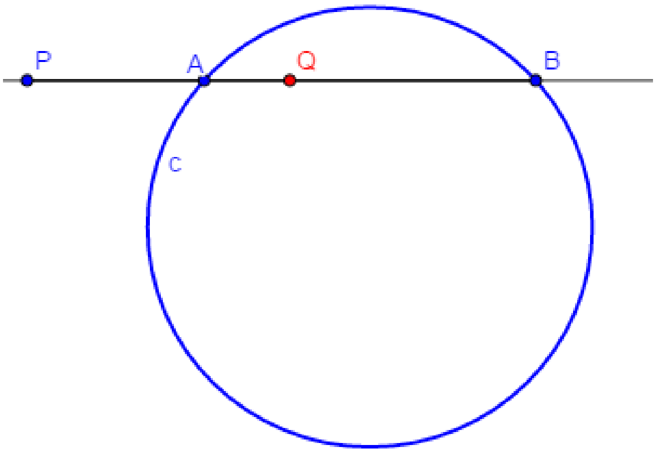
Gráfica 115: El centro radical de tres circunferencias.

Definición 5: Sean A, B, C y D puntos colineales. Los puntos C y D son **conjugados armónicos** respecto de los puntos A y B si y solo si $\frac{AC}{CB} * \frac{AD}{DB} = -1$.



Gráfica 116: El concepto de conjugado armónico.

Sea c una circunferencia y P un punto en el plano. Si l es una recta secante a la circunferencia en dos puntos A y B entonces existe un único punto Q, que es el conjugado armónico de P con respecto a los puntos A y B.



Gráfica 117: El conjugado de un punto sobre una secante a una circunferencia.

Es claro al mover recta secante por P cambia la posición de los puntos de intersección de la recta con la circunferencia y por tanto se modifica la posición punto Q. ¿Cuál es la relación entre los diversos puntos Q? Al respecto se tiene el siguiente resultado.

Proposición: El conjunto de todos los conjugados armónicos del punto P con respecto a la circunferencia c está sobre una línea recta.

Definición 6: Sea c una circunferencia y P un punto en el plano. La recta que contiene todos los conjugados armónicos de P con respecto a la circunferencia c se llama la **Polar** de P con respecto a la circunferencia c y el punto es el **Polo** de esta recta con respecto a la circunferencia c.

2.6.3 Los diez casos del problema de Apolonio.

A continuación, se aplica, fundamentalmente, el método de inversión, para para tratar los diferentes casos del Problema de Apolonio.

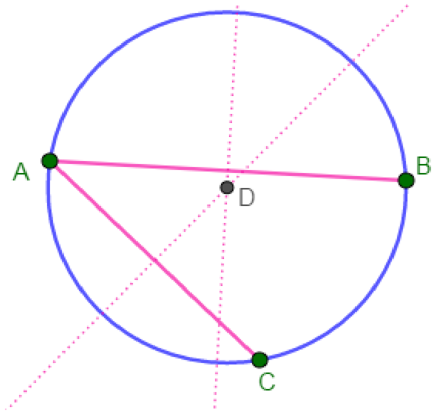
Ilustración 1: Construir una circunferencia que pase por tres puntos dados colineales o no.

Es claro que si los tres puntos son colineales la circunferencia pedida tiene radio infinito y corresponde a la recta que pasa por los tres puntos.

Si los tres puntos son no colineales el problema lo resuelve la proposición 5 del Libro IV de los Elementos de Euclides y procede como sigue:

1. Dados los tres puntos A, B y C construir, con la herramienta **Mediatriz**, las mediatrices de dos de ellos, digamos de los segmentos AB y AC.

2. Hallar, con el comando **Intersección,** el punto D de intersección de las mediatrices y con **Circunferencia (centro, punto),** trazar la circunferencia de centro D que pasa por A.



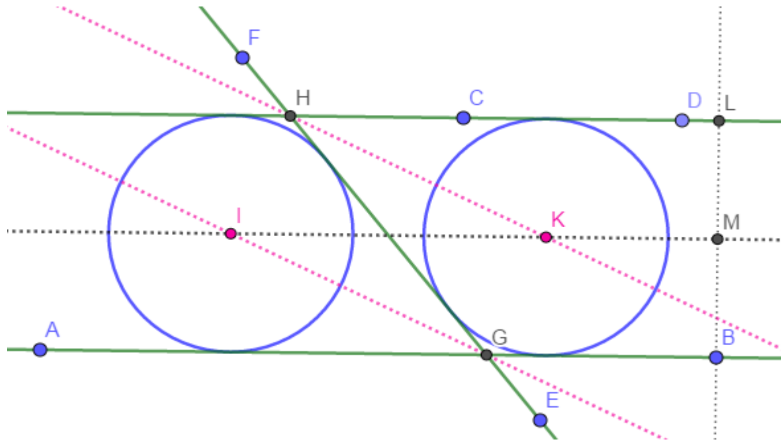
Gráfica 118: El primer caso del problema de Apolonio.

Ilustración 2: Construir una circunferencia tangente a tres rectas dadas.

Las posiciones relativas de tres rectas determinan dos casos:

CASO1: Dos rectas paralelas y una transversal a ellas.
Dadas las dos paralelas AB y CD y la transversal EF se procede así:

1. Determinar, con la herramienta **Intersección**, los puntos de de corte G y H de la transversal con las paralelas.
2. Trazar, con la herramienta **Bisectriz,** las bisectrices de los ángulos FGA y EHC.
3. Construir, utilizando las herramientas **Perpendicular** y **Paralela,** la paralela media a las dos rectas paralelas y los puntos de intersección I y K de esta recta con las bisectrices. Estos puntos son los centros de dos circunferencias que cumplen las condiciones deseadas.
4. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio** y observando que el radio de las circunferencias es la distancia LM entre una paralela y la paralela media, construir los objetos deseados.



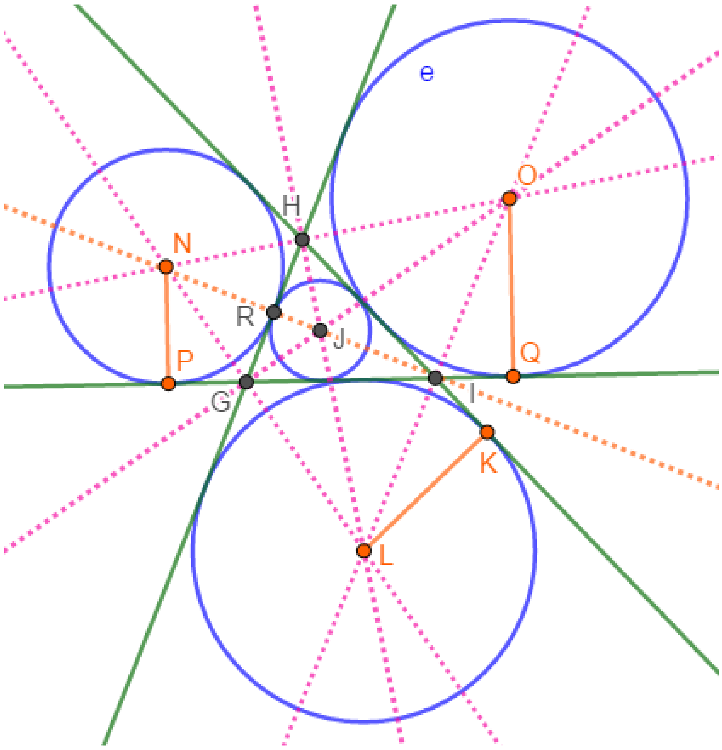
Gráfica 119: El segundo caso del problema de Apolonio. Caso 1.

CASO 2: Las tres rectas se cortan dos a dos.

Este caso se trata con la proposición 4 del Libro IV de los Elementos de Euclides y procede como sigue. Sean GH, IH y GI las rectas dadas entonces

Si IHG el triángulo determinado por los puntos de corte de las tres rectas, construir, con la herramienta **Bisectriz**, las bisectrices de los ángulos HGI y GHI.

1. Con la herramienta **Intersección**, hallar el punto J intersección de las bisectrices.
2. Trazar, con la herramienta **Perpendicular**, la recta perpendicular por J al lado GH y marcar con R su punto de intersección.
3. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, trazar la circunferencia de centro J y radio JR, que es la solución del problema.
4. Si se consideran las bisectrices de los ángulos exteriores del triángulo y se procede de manera análoga, se obtienen tres circunferencias adicionales que también satisfacen las condiciones deseadas.



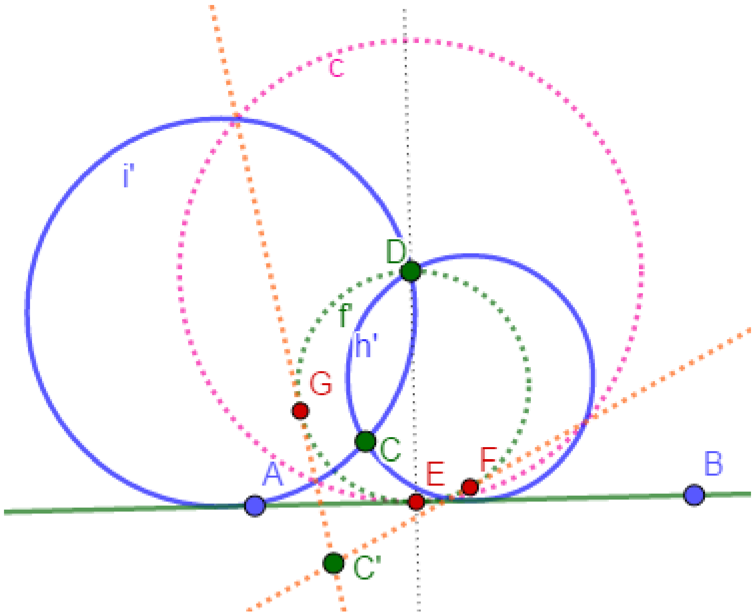
Gráfica 120: El segundo caso del problema de Apolonio. Caso 2.

Ilustración 3: Dados dos puntos y una recta construir una circunferencia que pase por los puntos y sea tangente a la recta.

Utilizamos el concepto de inversión, por lo cual aplicamos el, proceso descrito en la sección 2.6.1. Sea AB la recta y C, D los objetos dados entonces

1. Con la herramienta **Intersección**, se construye el punto E de corte de una perpendicular a la recta AB trazada por D y se con el comando **Circunferencia: centro y radio**, la circunferencia c de centro D y radio DE. En estas condiciones consideramos el punto D como centro de inversión y la circunferencia de centro D y radio DE como circunferencia de inversión.
2. Calculamos los inversos de la recta AB y del punto C con respecto a la circunferencia de inversión.
   a. Seleccionamos la herramienta **Inversión**, que, repetimos, se encuentra en la novena opción de la barra de herramientas, damos clic, sobre la recta AB, el objeto a invertir, y luego sobre la circunferencia c, la circunferencia de inversión, con lo cual se obtiene la circunferencia f´, que es la inversa de la recta AB.
   b. Con la herramienta **Inversión**, damos clic, sobre el punto C, el objeto a invertir, y luego sobre la circunferencia c, la circunferencia de inversión, con lo cual se obtiene el punto C', que es el inverso del, punto C.
3. Trazamos las tangentes comunes a los objetos inversos. Por C´, con la herramienta **Tangentes**, se trazan las tangentes a la circunferencia f´ y se obtienen las rectas C´F y C´G.
4. Calculamos los inversos de las rectas C´F y C´G con respecto a la circunferencia de inversión.

a. Con la herramienta **Inversión**, damos clic, sobre la recta C’F (C’G) y luego sobre la circunferencia c, con lo cual se obtienen dos circunferencias que pasan por C y D que son tangentes a la recta AB.



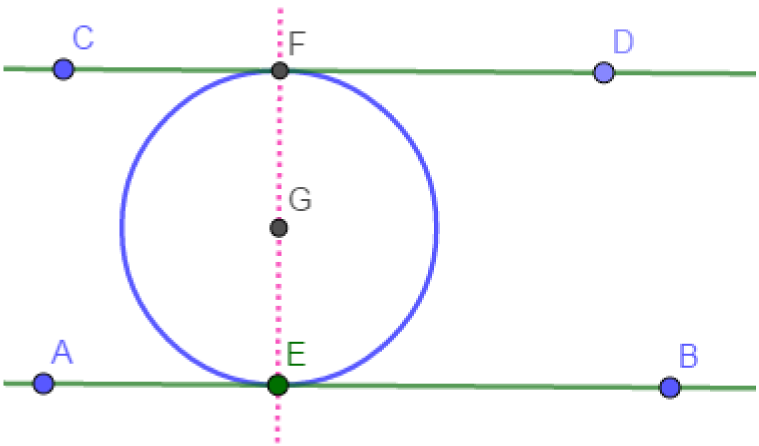
Gráfica 121: El tercer caso del problema de Apolonio.

Ilustración 4: Dados un punto y dos rectas construir una circunferencia que pase por el punto y sea tangente a las rectas dadas.

Se consideran los siguientes casos:

CASO 1: Las dos rectas son paralelas y el punto está en una de las rectas.
Si AB y CD son las rectas paralelas y E el punto en la recta AB entonces

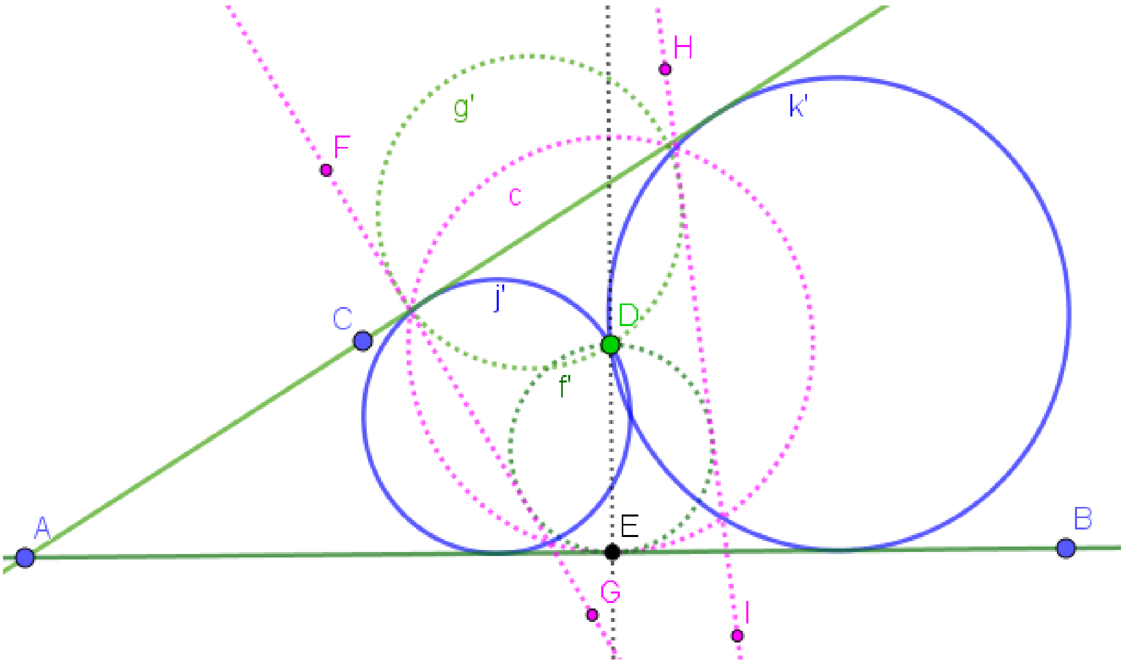
1. Con la herramienta **Perpendicular**, se traza, por E, una perpendicular a la recta AB y con la herramienta **Intersección**, se selecciona el punto F de intersección de esta recta y la recta CD.
2. Con la herramienta **Medio o Centro**, hallar el punto medio G del segmento EF. La circunferencia de centro G y radio EG satisface las condiciones establecidas.



Gráfica 122: El cuarto caso del problema de Apolonio. Caso 1.

CASO 2: Las dos rectas no son paralelas.
Utilizamos el concepto de inversión, por lo cual aplicamos el, proceso descrito en la sección 2.6.1. Sean AB, AC las rectas y el punto D los objetos dados entonces

1. Con la herramienta **Perpendicular**, se levanta una perpendicular a la recta AB por D, se llama E, el punto de corte de estas rectas y con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, se construye la circunferencia de centro D y radio DE. Consideramos el punto D como centro de inversión y la circunferencia de centro D y radio DE como circunferencia de inversión.
2. Calculamos los inversos de la recta AB y AC con respecto a la circunferencia de inversión
   a. Seleccionamos la herramienta **Inversión**, damos clic, sobre la recta AB, el objeto a invertir, y luego sobre la circunferencia c, la circunferencia de inversión, con lo cual se obtiene la circunferencia f´, que es la inversa de la recta AB.
   b. Análogamente se encuentra la inversa de la recta AC que corresponde a la circunferencia g'.
3. Trazamos las tangentes comunes a los objetos inversos. Utilizando la herramienta **Tangentes**, se trazan las tangentes comunes a las circunferencias f´ y g´ con lo cual se obtienen las rectas FG y HI.
4. Calculamos los inversos de las rectas FG y HI con respecto a la circunferencia de inversión.
   a. Con la herramienta **Inversión**, damos clic, sobre la recta FG (HI) y luego sobre la circunferencia c, con lo cual se obtienen dos circunferencias j´ y k´ que pasan por el punto D y son tangentes a las rectas AB y AC.



Gráfica 123: El cuarto caso del problema de Apolonio. Caso 2.

Ilustración 5: Dados dos puntos y una circunferencia construir una circunferencia que pase por los puntos y sea tangente a la circunferencia.

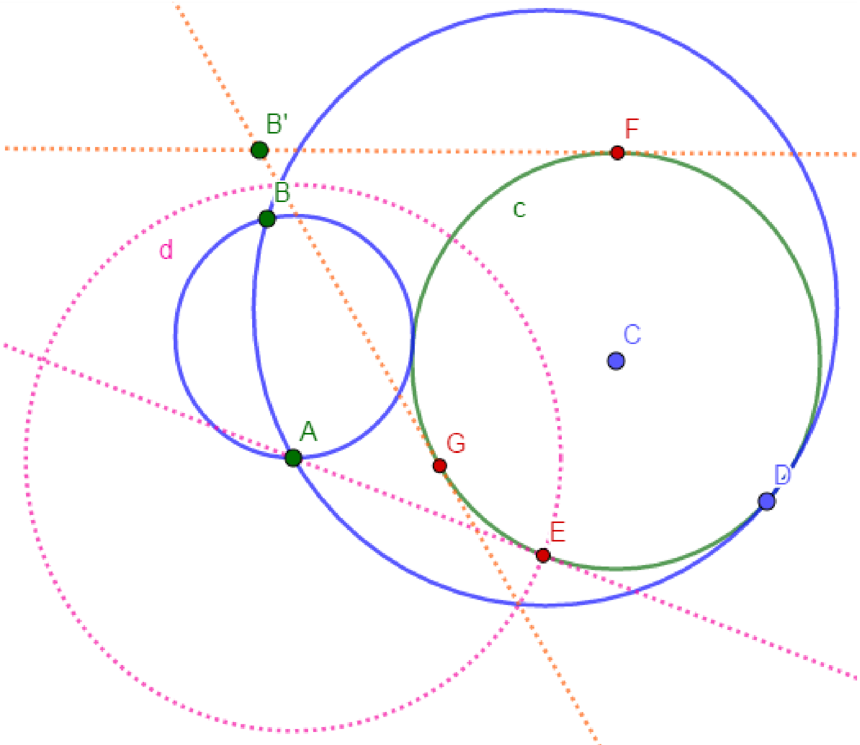
En las ilustraciones 3 y 4 se ha recurrido al concepto de inversión para obtener las construcciones requeridas y los procedimientos, se han descrito, aplicando con todo detalle, el proceso de la sección 2.6.1. De aquí en adelante, consideramos que Ud. ha adquirido un conocimiento básico del proceso, por ello, aunque usaremos el mismo método, restringiremos los detalles a los absolutamente necesarios.

Sea c la circunferencia de centro C y radio CD, A y B los objetos dados, entonces

1. Utilizando la herramienta **Tangentes**, se traza por A la recta tangente a la circunferencia c y sea E su punto de contacto. Seleccionamos el punto A como centro de inversión y la circunferencia d de centro A y radio AE, como circunferencia de inversión.
2. Con la herramienta **Inversión**, se obtienen los inversos, con respecto a la circunferencia d, del

punto B y la circunferencia c, se obtiene el punto B´ y la misma circunferencia c ya que el punto E está tanto, en la circunferencia c como en la circunferencia de inversión.

3. Por el punto B´, con la herramienta **Tangentes**, se trazan las tangentes a la circunferencia c, con lo cual se obtienen las rectas B´F y B´G.
4. Con la herramienta **Inversión**, se obtienen, las inversas de las rectas B´F y B´G., con respecto a la circunferencia d, con lo que se obtienen dos circunferencias que pasan por A y B y son tangentes a la circunferencia c.

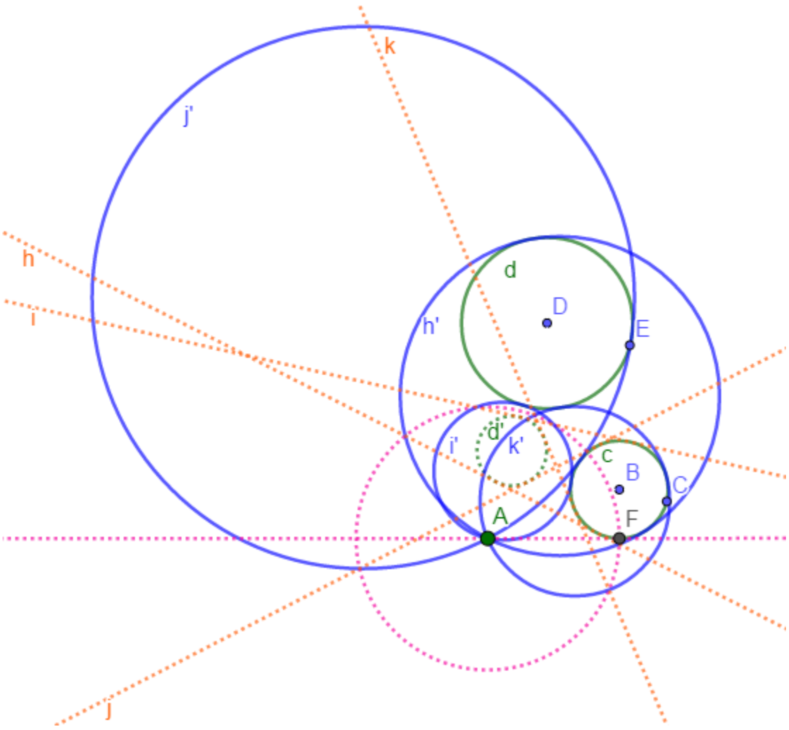


Gráfica 124: El quinto caso del problema de Apolonio.

Ilustración 6: Dados un punto y dos circunferencias construir una circunferencia que pase por el punto y sea tangente a las circunferencias.

La solución descrita utiliza el concepto de inversión. Sea A el punto, c la circunferencia de centro B, radio BC y d la circunferencia de centro D, radio DE los objetos dados, entonces

1. Con la herramienta **Tangentes** se traza por el punto A la recta tangente a la circunferencia c.
2. A partir de la herramienta **Intersección** se encuentra el punto de contacto F entre la circunferencia y la recta tangente.
3. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, se construye la circunferencia de centro en A y radio AF, la cual se considera la circunferencia de inversión.
4. Con la herramienta **Inversión**, se encuentran las inversas de las circunferencias d y c con respecto a la circunferencia de inversión, se obtiene la circunferencia d´ y la misma circunferencia c, ya que el punto F está sobre c y sobre la circunferencia de inversión.
5. Utilizando la herramienta **Tangentes**, se trazan las tangentes comunes a estas dos circunferencias, se obtienen las rectas i, j, h y k.
6. Con la herramienta **Inversión**, se encuentran las inversas de estas rectas para obtener las cuatro circunferencias i´, j´, k´ y h´ que son la solución del problema.

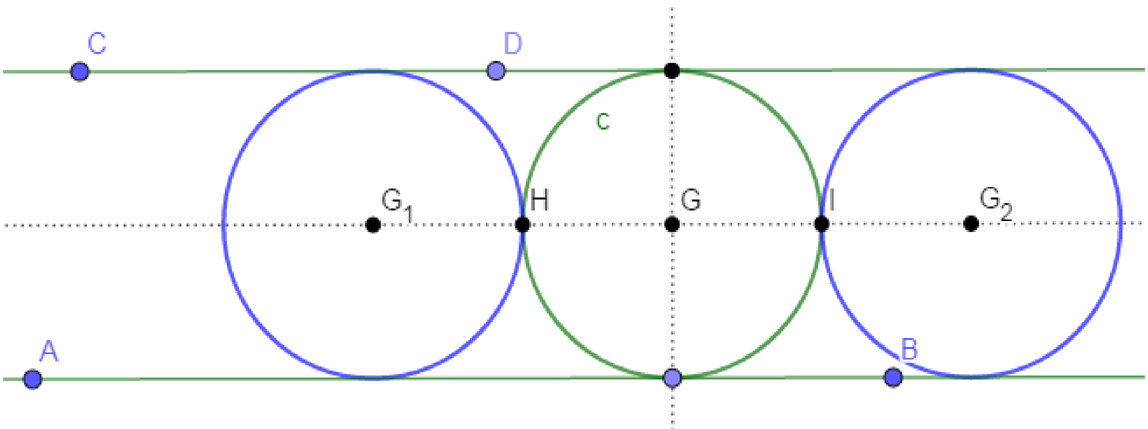


Gráfica 125: El sexto caso del problema de Apolonio.

Ilustración 7: Dadas una circunferencia y dos rectas construir una circunferencia que sea tangente a la circunferencia y a las dos rectas.

CASO 1: Las dos rectas son paralelas y la circunferencia es tangente a las rectas.
Sean AB, CD las rectas y c la circunferencia dadas entonces,

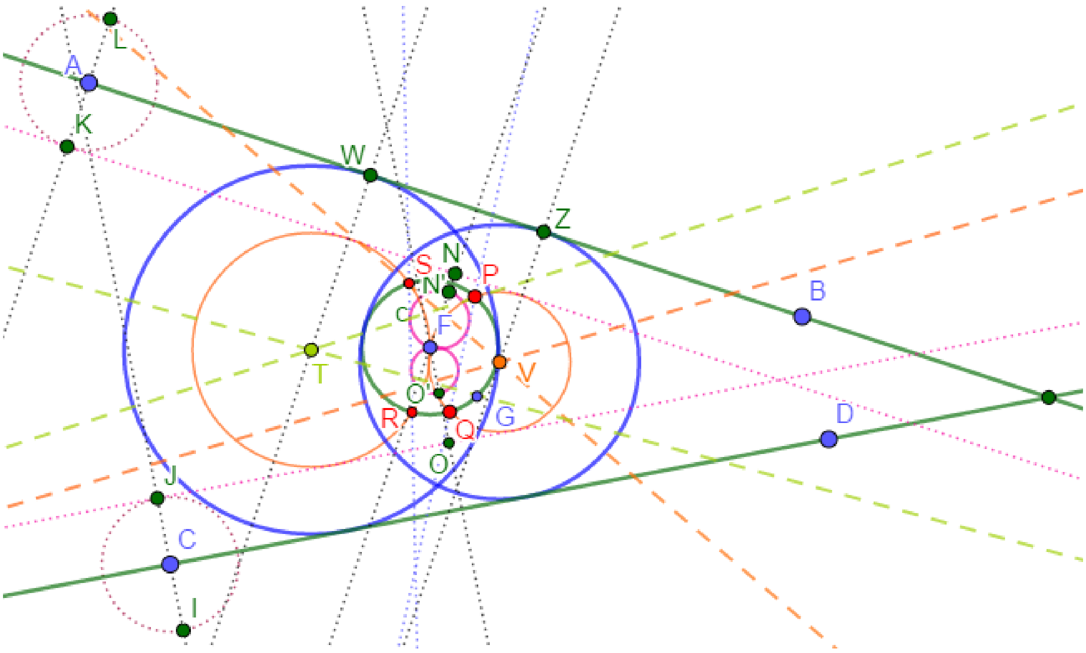
1. Utilizando las herramientas **Perpendicular** y **Paralela**, por el centro G de la circunferencia dada se traza la paralela media y se hallan los puntos de corte I y H.
2. Con la herramienta **Simetría Central**, se hallan los simétricos de G con respecto a I y a H, sean estos G_1 y G_2.
3. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, se trazan las circunferencias de centros G_1 y G_2 y radio HG, que satisfacen las condiciones pedidas.



Gráfica 125: El séptimo caso del problema de Apolonio. Caso 1.

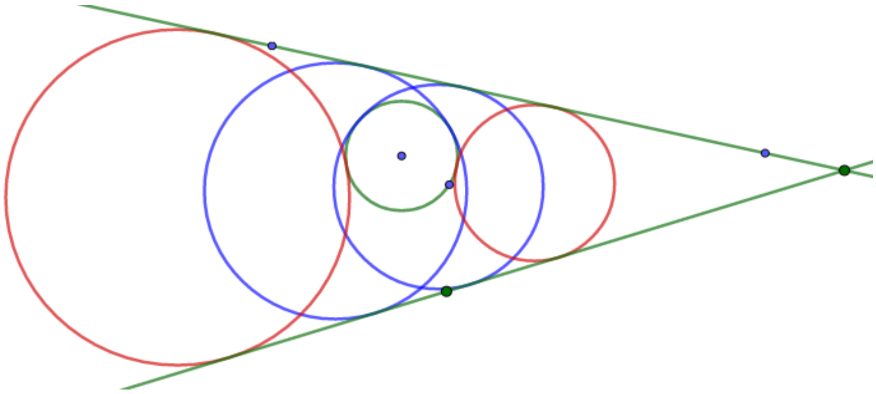
CASO 2: Las dos rectas no son paralelas y la circunferencia está entre las rectas.
La solución, en este caso utiliza el concepto de inversión. Sean AB, CD las rectas y c la circunferencia de centro F que pasa por G, los objetos dados, entonces,

1. A una distancia igual al radio de la circunferencia dada trazar paralelas interiores a las rectas AB y CD. Para ello por los puntos A y C, con la herramienta **Perpendicular**, se trazan perpendiculares a las rectas AB y CD, con la herramienta **Circunferencia: centro y radio** se trazan circunferencias con centro en A y B y radio FG, se hallan, con la herramienta **Intersección**, los puntos de corte I y J; K y L de estas circunferencias con las perpendiculares y con la herramienta **Paralela** y por los puntos J y K se trazan las rectas paralelas a las rectas AB y CD.
2. Se Considera la circunferencia dada c como circunferencia de inversión y el punto F como centro de inversión. Por él punto F, con la herramienta **Perpendicular,** se trazan rectas perpendiculares a las paralelas y se marcan sus puntos de intersección como O y N.
3. Con la herramienta **Inversión**, se obtienen los inversos de los puntos O y N y de las rectas paralelas, con respecto a la circunferencia de inversión, para obtener los puntos O´ y N´ y dos circunferencias de diámetros FO´ y FN´, respectivamente.
4. Con la herramienta **Tangentes**, se trazan las tangentes comunes a las circunferencias de diámetro FO´ y FN´ y se hallan, con la herramienta, Intersección, los puntos P, Q, R y S intersección de estas rectas con la circunferencia de inversión.
5. Con la herramienta **Inversión**, se encuentran las inversas de las tangentes comunes para obtener dos circunferencias que pasan por los puntos F, R y S y por los puntos F, P y Q, respectivamente que son tangentes a las rectas paralelas. Determinamos sus centros.
6. Con la herramienta **Mediatriz**, se obtienen las mediatrices de los segmentos N'F y FO' y con la herramienta **Intersección**, el punto de corte V de estas rectas.
7. Con la herramienta **Mediatriz**, se obtienen las mediatrices de los segmentos FR y FS y con la herramienta **Intersección**, el punto de corte T de estas rectas.
8. Los puntos V y T son los centros de las circunferencias deseadas de las cuales se debe calcular sus radios que corresponden a las distancias de estos puntos a las rectas AB y CD. Para determinar estas distancias con la herramienta **Perpendicular**, se trazan rectas perpendiculares a la recta AB por los puntos V y T y con la herramienta **Intersección**, se hallan los puntos de corte, Z y W, de estas perpendiculares con la recta AB.
9. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, se construyen las circunferencias de centros T y V con radios TW y VZ que son dos de las circunferencias tangentes pedidas.



Gráfica 127: El séptimo caso del problema de Apolonio. Dos circunferencias.

10. Si se repite el proceso anterior considerando las rectas paralelas a las rectas AB y CD por los puntos exteriores I y L, se obtienen dos circunferencias tangentes exteriores. Las cuatro circunferencias tangentes se muestran a continuación.

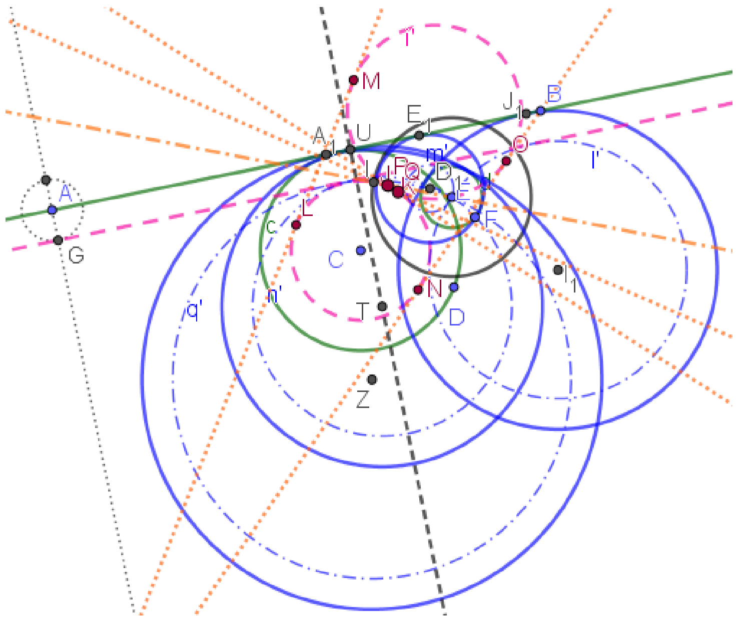


Gráfica 128: El séptimo caso del problema de Apolonio. Cuatro circunferencias.

Ilustración 8: Dadas dos circunferencias y una recta construir una circunferencia que sea tangente a la recta y a las dos circunferencias.

El método de solución seleccionado requiere el concepto de inversión. Sean AB la recta y c, d las circunferencias los objetos dados, entonces,

1. Se convierte este problema en un problema conocido del tipo punto, recta, circunferencia. Para ello, con la herramienta **Paralela** y, utilizando el proceso descrito en el paso 1, de la ilustración anterior, se traza una recta paralela a la recta AB a una distancia igual al radio EF y con la herramienta **Circunferencia: centro y radio,** una circunferencia con centro en C y radio CD-EF. En estas condiciones el problema ahora es construir una circunferencia que pase por el punto E, tangente a la circunferencia con centro C y radio CD-EF y a la paralela a AB que pasa por G.
2. Se construye la circunferencia de inversión. Para ello, con la herramienta **Tangentes**, se traza por el punto E las tangentes a la circunferencia de centro C y radio CD-EF. Si I es el punto de contacto, con la herramienta **Circunferencia: centro y radio,** se traza la circunferencia de inversión que es aquella que tiene centro en E y radio EI.
3. Con la herramienta **Inversión**, se calculan las inversas de los datos. La circunferencia de centro en C y radio IC se invierte en sí misma, y la recta paralela a AB que pasa por C se invierte en la circunferencia i´ que pasa por E.
4. Con la herramienta **Tangentes**, se trazan las rectas tangentes a estas inversas, las circunferencias c y i’, con lo cual se obtiene las rectas JK, LM, NO y PQ.
5. Con la herramienta **Inversión**, se hallan las inversas de estas rectas, con lo que se obtiene las circunferencias q´, m´, l´ y n´, que pasan por E y son tangentes a la circunferencia con centro C y radio CD-EF y a la paralela a AB que pasa por G.
6. Determinamos los centros de las circunferencias q´, m´, l´ y n´, para lo cual se requieren tres puntos sobre cada circunferencia y encontrar el punto de intersección de las mediatrices de los segmentos determinados por estos puntos. Así, por ejemplo, para la circunferencia n’, se considera el punto E y, con la herramienta **Punto en objeto**, se seleccionan dos puntos R y S sobre ella; con la herramienta **Mediatriz**, se trazan las mediatrices de los segmentos ER y RS y con la herramienta **Intersección**, se encuentra el punto de corte T de estas mediatrices. T es el centro de la circunferencia n’. Análogamente se encuentran los centros Z, D_1, y I_1 de las circunferencias q’, m’ y l’.
7. Los puntos T, Z, D_1, y I_1 son los centros de las circunferencias buscadas, para las cuales determinamos sus radios. Para ello, con la herramienta **Perpendicular**, por estos puntos se trazan perpendiculares a la recta AB y con la herramienta **Intersección**, se hallan los puntos U, A_1, E_1 y J_1 que son el corte de estas perpendiculares y la recta AB.
8. Las circunferencias de centro T y radio TU, centro Z y radio ZA_1, centro D_1 y radio D_1E_1 y centro I_1 y radio I_1J_1, son cuatro de las circunferencias deseadas.
9. Otras cuatro circunferencias se obtienen al trazar la paralela a la recta AB en el lado opuesto y repitiendo el proceso descrito.

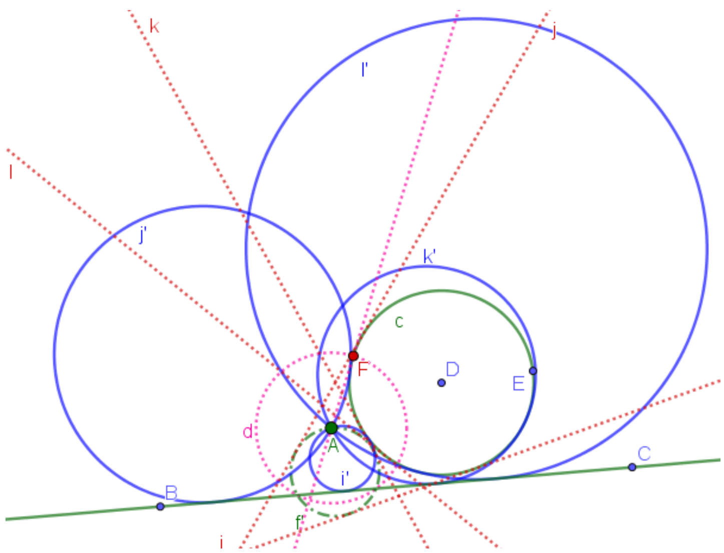


Gráfica 129: El octavo caso del problema de Apolonio.

Ilustración 9: Dados un punto, una recta y una circunferencia construir una circunferencia que pase por el punto y sea tangente a la recta y a la circunferencia.

El método de solución considerado utiliza el concepto de inversión. Sean BC la recta, c la circunferencia de centro D y radio DE y A el punto, los objetos dados, entonces

1. Se utiliza la herramienta **Tangentes**, para trazar por A la recta tangente a la circunferencia c y la herramienta **Intersección** para encontrar su punto de contacto F. Se selecciona, el punto A como centro de inversión y la circunferencia d de radio AF como circunferencia de inversión.
2. Con la herramienta **Inversión**, se encuentran las inversas, con respecto a la circunferencia d, de la circunferencia c y de la recta BC se obtienen, la misma circunferencia c y la circunferencia f’.
3. Con la herramienta **Tangentes**, se trazan las tangentes a las circunferencias c y f´, con lo cual se obtienen las rectas i, j, k, y l.
4. Con la herramienta **Inversión**, se calculan las inversas de estas rectas, con respecto a la circunferencia d, con lo cual se obtienen cuatro circunferencias que pasan por A y son tangentes a la recta BC y a la circunferencia c.



Gráfica 130: El noveno caso del problema de Apolonio.

Ilustración 10: Construir una circunferencia tangente a tres circunferencias dadas.

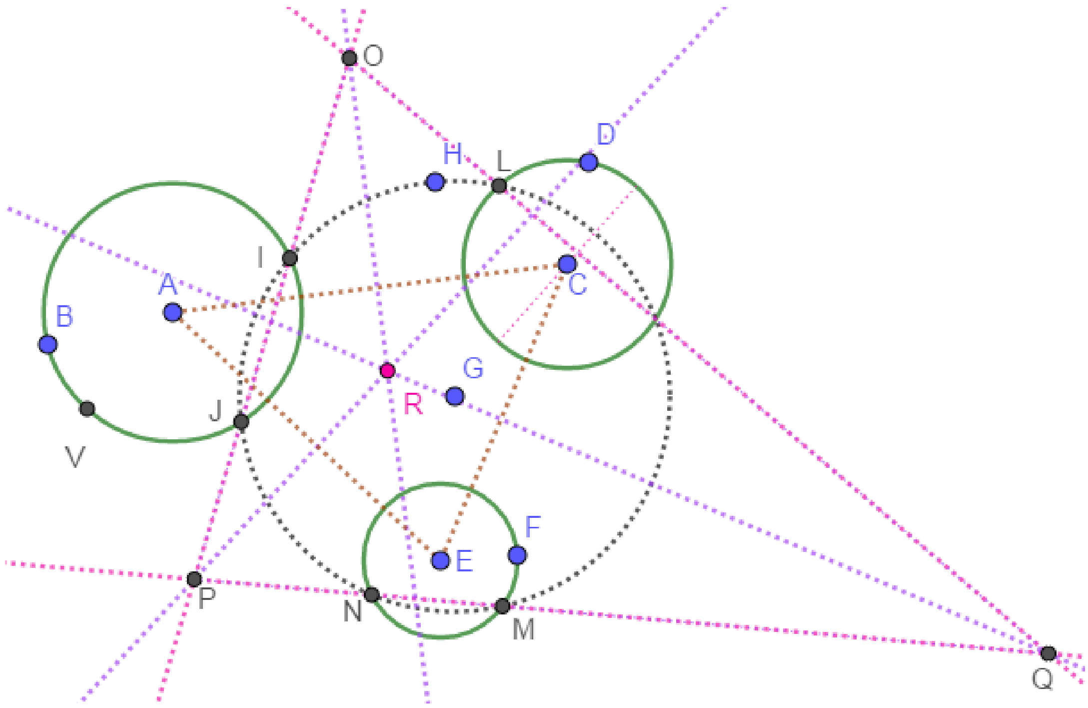
Al analizar las diferentes configuraciones, sin considerar que las circunferencias dadas sean tangentes entre sí, se encuentran 11 casos posibles. Trataremos únicamente el caso en el que las circunferencias no se intersectan entre sí.

CASO 1: Las circunferencias no se cortan dos a dos y tienen radios diferentes.

En este caso existen ocho circunferencias tangentes, para encontrarlas describiremos inicialmente el proceso para encontrar dos de ellas, las denominadas circunferencias tangentes interior y exterior, las demás se encuentran por un proceso análogo. La solución implementada data del Siglo XIX, se debe a Gergonne J. y utiliza conceptos de la denominada geometría moderna, definidos en la sección 2.2, tales como centro de semejanza, centro radical y polo de una circunferencia con respecto a una recta (Dorrie, 1965). Debido a la ardua labor a realizar, por las numerosas construcciones, la dividiremos en cuatro etapas y al final consolidaremos el trabajo.

Sean a, c y e tres circunferencias de centros A, C y E respectivamente, entonces:

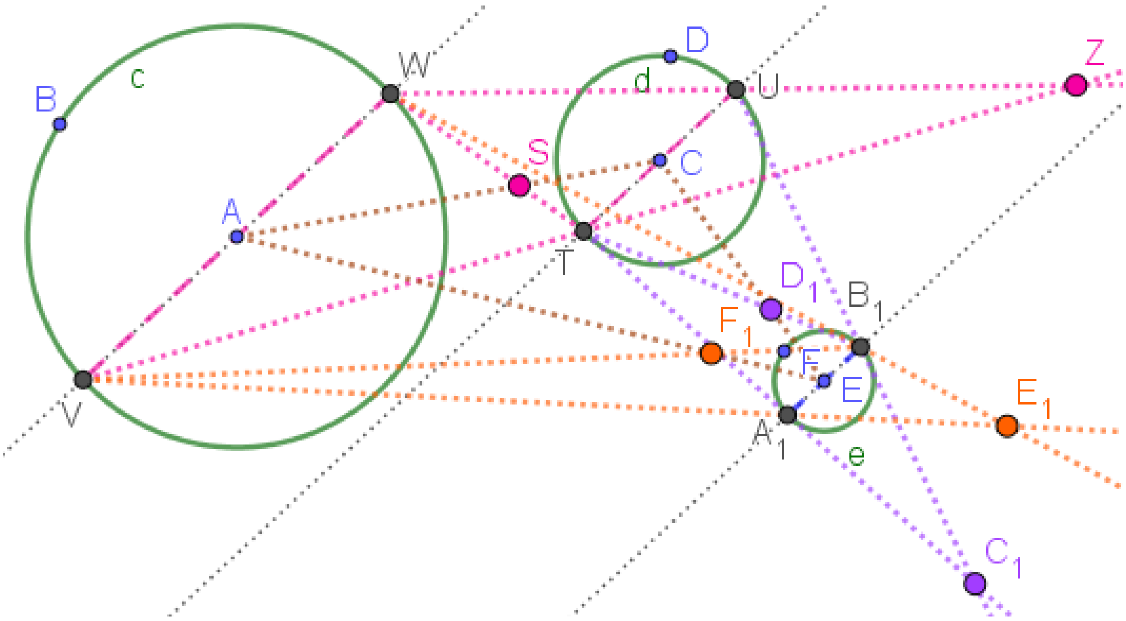
1. Construcción del Centro Radical de las circunferencias dadas.
   a. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** se construye una circunferencia auxiliar de centro G que pasa por H.
   b. Con la herramienta **Intersección** se determinan, los puntos de corte, I, J, L, K, M, N de esta circunferencia con las circunferencias dadas.
   c. Se trazan con la herramienta Recta, las rectas IJ, LK y MN cuyos puntos de intersección determinan el triángulo OPQ.
   d. Con la herramienta **Segmento**, se construyen los segmentos AC, AE y EC que unen los centros de las circunferencias dadas.
   e. Por los puntos O, P y Q, con la herramienta, se trazan rectas perpendiculares a los segmentos AC, AE y EC, las cuales son los **ejes radicales** de las circunferencias dadas.
   f. Estas rectas son concurrentes en un punto R que es el **centro radical** de las circunferencias dadas.



Gráfica 131: El centro radical de las circunferencias dadas.

2. Construcción de los centros de semejanza exterior e interior de las circunferencias dadas.

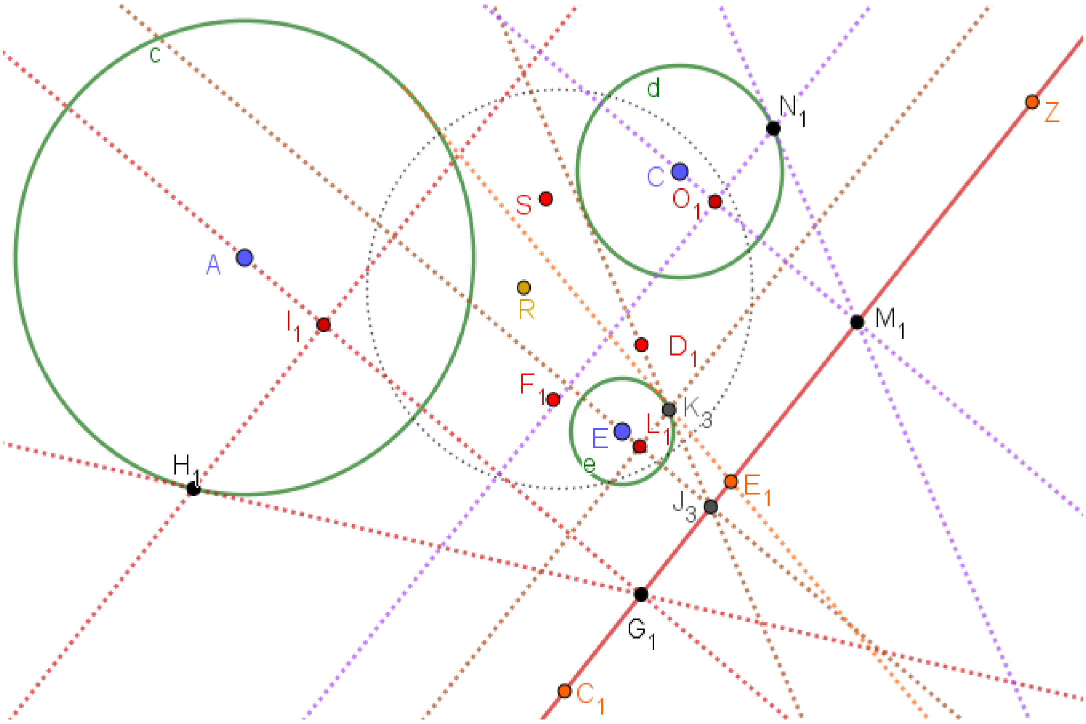
   a. Por el centro C, con la herramienta **Recta**, trazar una recta cualquiera cuyos puntos de corte, T, U, con la circunferencia d, determinan un diámetro de la circunferencia. Construir con la herramienta **Segmento**, el diámetro TU.
   b. Por el centro A y con la herramienta **Paralela**, trazar una recta paralela al diámetro a TU, cuyos puntos de corte, V, W con la circunferencia c, determinan un diámetro paralelo a, TU. Con la herramienta **Segmento**, construir el diámetro VW.
   c. Con la herramienta **Semirrecta**, se trazan las semirrectas WU y VT y con la herramienta **Intersección**, se halla su punto de corte Z.
   d. Con la herramienta **Segmento**, se construyen los segmentos WT y AC y con la herramienta **Intersección**, su punto de corte S.
   e. Los puntos Z y S son los **centros de semejanza exterior e interior** de las circunferencias c y d, respectivamente.
   f. Análogamente se construyen los puntos C_1 y D_1 centros de semejanza exterior e interior de las circunferencias d y e, respectivamente; así como los puntos E_1 y F_1 centros de semejanza exterior e interior de las circunferencias c y e, respectivamente.



Gráfica 132: Los centros de semejanza de las circunferencias dadas.

3. Construcción de los polos de las circunferencias con respecto a las cuatro rectas determinadas por ternas de centros de semejanza que son colineales.

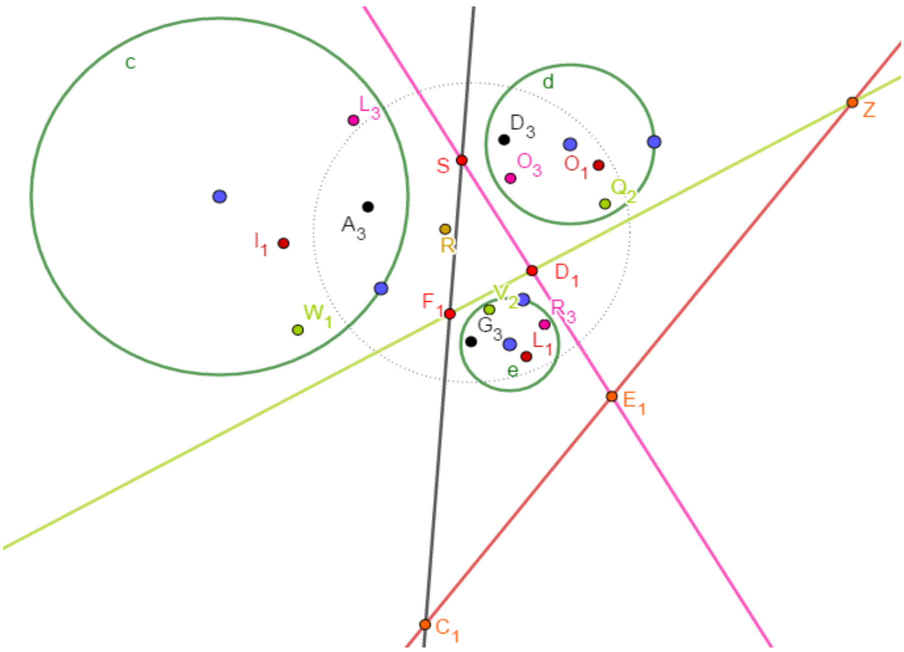
   a. Con la herramienta **Recta**, se traza la recta determinada por la terna Z, E_1 y C_1.
   b. Por el centro de la circunferencia c, el punto A y con la herramienta **Perpendicular**, trazamos una perpendicular a la recta ZE_1. Sea G_1 su punto de corte.
   c. Por el punto G_1 con la herramienta **Tangentes**, se traza una tangente a la circunferencia c. Con la herramienta **Intersección**, se determina su punto de contacto H_1.
   d. Por H_1 y con la herramienta **Perpendicular**, se traza una perpendicular a la recta AG_1.
   e. Con la herramienta **Intersección** se halla el punto I_1 de corte entre las rectas AG_1 y la perpendicular anterior. El punto I_1 es el **Polo** de la circunferencia c con respecto a la recta ZC_1.
   f. Análogamente se construyen los puntos O_1 y L_1, polos de las circunferencias d y e con respecto a la recta ZE_1.



Gráfica 133: Los polos de las circunferencias dadas.

g. A continuación, y utilizando un proceso análogo al anterior, que se construyen los polos de las circunferencias c, d y e, con respecto a las rectas ZF_1, SF_1 y SD_1 con lo cual se obtienen los puntos W_1, Q_2 y V_2; A_3, D_3 y G_3 y L_3, O_3 y R_3 respectivamente.

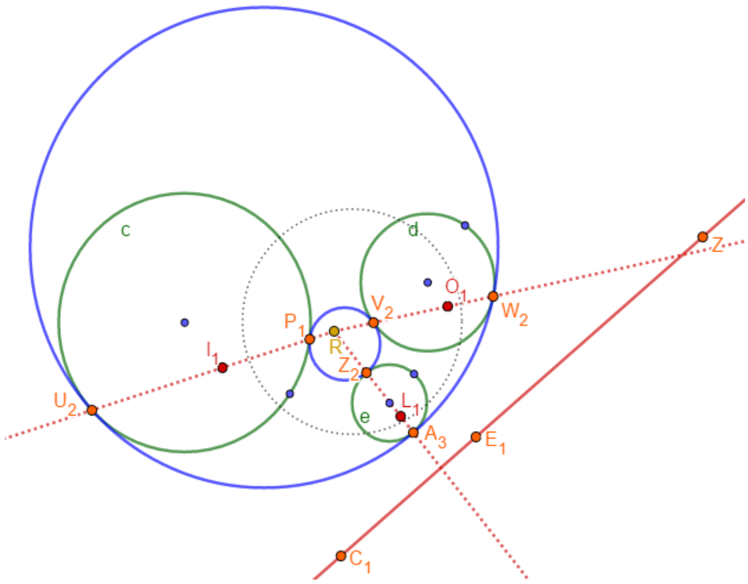
En la siguiente gráfica se muestran las circunferencias c, d, y e, los centros de semejanza exteriores Z, E_1 y C_1, centros de semejanza interiores S, F_1 y D_1, el centro radical R, los polos con respecto a la recta ZC_1 que son los puntos I_1, O_1 y L_1, los polos con respecto a la recta ZF_1 que son los puntos W_1, Q_2.y V_2, los polos con respecto a la recta SF_1 que son los puntos A_3, D_3 y G_3 y los polos con respecto a la recta SE_1 que son los puntos L_3, O_3 y R_3.



Gráfica 134: Los centros de semejanza, el centro radical y los polos.

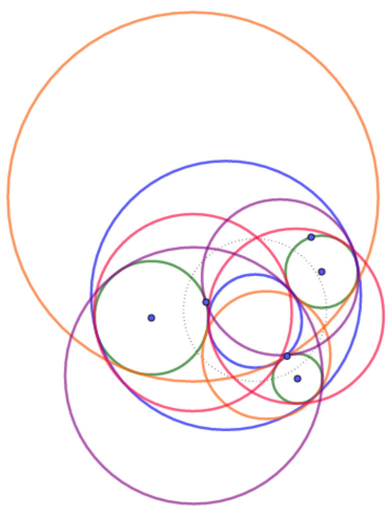
4. Construcción de las circunferencias tangentes.

   a. Se considera la recta de los centros de semejanza que pasa por Z, E_1 y C_1 y los polos de las circunferencias con respecto a esta recta, I_1, O_1 y L_1.
   b. Con la herramienta **Semirrecta**, se trazan las semirrectas que pasan por el centro radical y los polos, es decir, las semirrectas RI_1, RO_1 y RL_1.
   c. Con la herramienta **Intersección**, se hallan los puntos de corte de estas semirrectas y las circunferencias c, d y e en los puntos U_2 y P_1, V_2 y W_2 y A_3 y Z_2.
   d. Estos puntos, son los puntos de tangencia de las circunferencias buscadas con las circunferencias dadas; por tanto, seleccionando adecuadamente ternas entre estos puntos, obtenemos las dos primeras circunferencias tangentes requeridas. Para el caso con la herramienta **Circunferencia por tres puntos**, se construye, la circunferencia que pasa por U_2, W_2 y A_3 y la circunferencia que pasa por P_1, V_2 y Z_2 que satisfacen las condiciones solicitadas.



Gráfica 135: El décimo caso, cuatro circunferencias tangentes.

e. Procediendo de manera análoga con las demás rectas determinadas por tres centros de semejanza y sus correspondientes polos, se obtienen las ocho circunferencias tangentes, como se ilustra en la siguiente gráfica.



Gráfica 136: El décimo caso, ocho circunferencias tangentes.

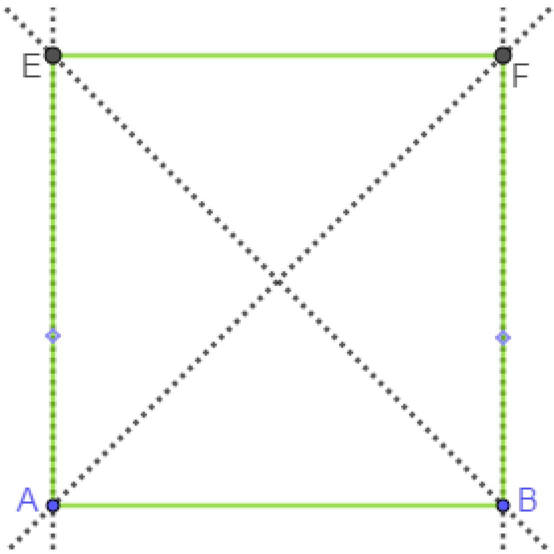
2.7 Construcción de un cuadrado sin el uso de la herramienta Polígono regular.

El cuadrado es un cuadrilátero caracterizado por su regularidad, armonía, peso y simetría y por ello es una de las figuras más sencillas de estudiar. En esta sección se presentan algunos de los resultados de una experiencia de aula, desarrollada conjuntamente con el Profesor Fernando Soto, para establecer diversas formas que un grupo de estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Nariño, encontraba para *construir un cuadrado dado su lado*, sin la utilización de la herramienta **Polígono regular**. En el desarrollo de la misma surgieron más de una veintena de soluciones las cuales aprovechan conceptos como el de homotecia, lugares geométricos como la parábola e incluso el concepto de inversión; en este apartado presentamos diez de ellas. El problema es simple, su sencillez abarca cualquier interpretación posible y muy pronto se observa que la solución consiste en localizar un tercer vértice del cuadrado o calcular el centro del mismo. La ubicación de estos puntos precede la utilización de los mecanismos de simetría central, simetría axial, cálculo de puntos medios, bisectrices, trazo de perpendiculares y de paralelas, entre otras.

Ilustración 1: Dado un segmento, construir un cuadrado cuyo lado sea el segmento.

La solución utiliza el concepto de bisectriz. Sea AB el segmento dado, entonces

1. Con la herramienta **Perpendicular**, trazar, por A y B perpendiculares al segmento AB.
2. Con la herramienta, **Bisectriz**, trazar las bisectrices de los ángulos rectángulos en A y B.
3. A partir de la herramienta **Intersección**, hallar los puntos de corte, E y F, de estas bisectrices con las rectas las perpendiculares.
4. Utilizar la herramienta, **Polígono**, para construir el polígono ABFE que corresponde a un cuadrado ya que los puntos E y F, sobre las bisectrices, equidistan de los vértices A y B de los correspondientes ángulos.



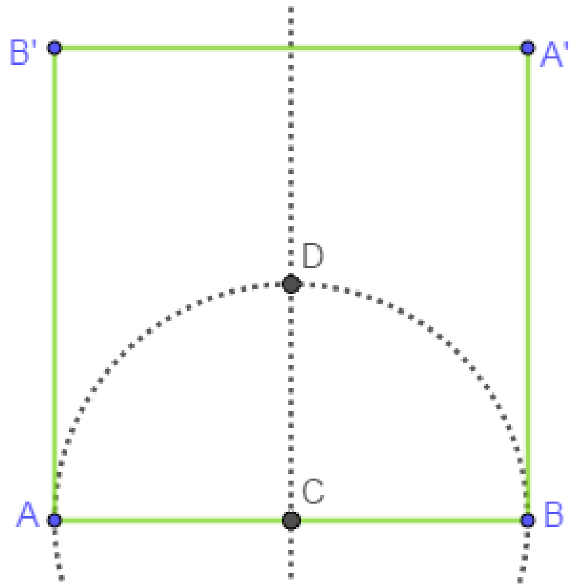
Gráfica 137: La construcción de un cuadrado. Caso 1.

Ilustración 2: Dado un segmento, construir un cuadrado cuyo lado sea el segmento.

La solución utiliza el concepto de simetría central. Sea AB el segmento dado, entonces

1. Con la herramienta **Medio o Centro**, ubicar el punto medio C, de AB y con la herramienta **Perpendicular**, trazar por C una perpendicular a AB.
2. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, trazar una circunferencia de centro C y radio AC.

3. Hallar, con la herramienta **Intersección**, el punto de corte D entre la circunferencia y la perpendicular.
4. Con la herramienta **Simetría central**, hallar la reflexión de A y B en el punto D.
5. Con la herramienta **Polígono** construir el polígono ABB´A´ que corresponde a un cuadrado ya que una reflexión con respecto a un punto, preserva las distancias.

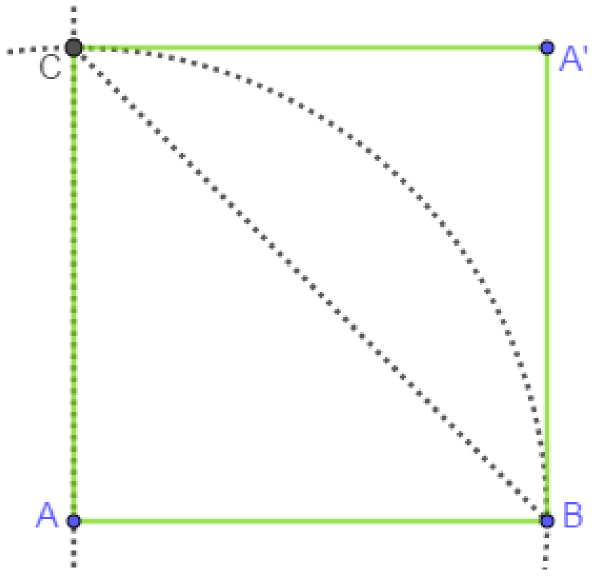


Gráfica 138: La construcción de un cuadrado. Caso 2.

Ilustración 3: Dado un segmento, construir un cuadrado cuyo lado sea el segmento.

La solución utiliza el concepto de simetría axial. Sea AB el segmento dado, entonces

1. Con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, trazar a circunferencia de centro A y radio AB.
2. A partir de la herramienta Perpendicular, trazar por A, una perpendicular al segmento AB.
3. Con la herramienta Intersección hallar el punto de corte C de la circunferencia y la perpendicular y con la herramienta **Segmento**, trazar el segmento CB.
4. Con la herramienta **Simetría axial**, hallar la reflexión de A en el segmento CB.
5. Con la herramienta **Polígono**, construir el polígono ABA´C que es un cuadrado, ya que AB=AC y una reflexión con respecto a una recta preserva las distancias.

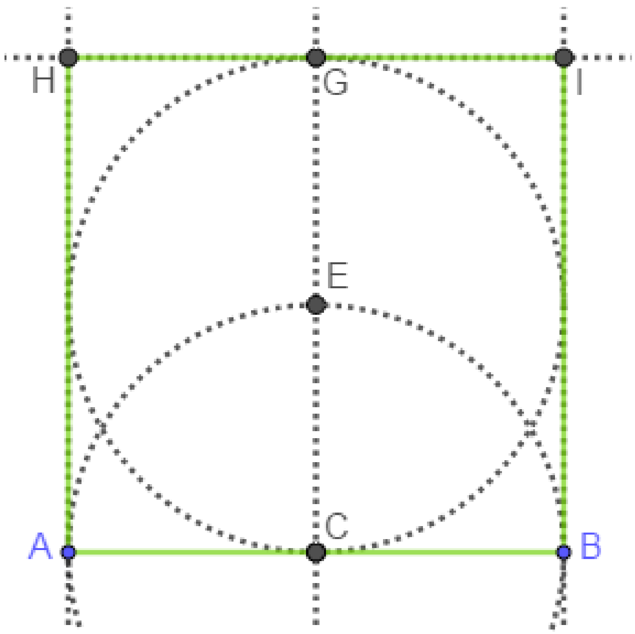


Gráfica 139: La construcción de un cuadrado. Caso 3.

Ilustración 4: Dado un segmento, construir un cuadrado cuyo lado sea el segmento.

La solución utiliza los conceptos de paralelismo y perpendicularidad. Sea AB el segmento dado, entonces

1. Con la herramienta **Medio o Centro**, hallar el punto medio C del segmento AB.
2. Utilizar la herramienta Perpendicular, para trazar, por A, B y C, perpendiculares al segmento AB.
3. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto),** trazar la circunferencia de centro C que pasa por A.
4. Con la herramienta, **Intersección**, hallar el punto de corte E, de la perpendicular por C y la circunferencia.
5. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto),** trazar la circunferencia de centro E que pasa por C.
6. Con la herramienta **Intersección**, hallar el punto de corte G de esta circunferencia con la recta CE.
7. Utilizar la herramienta **Paralela**, para trazar por G una recta paralela a AB.
8. Usar la herramienta **Intersección** para hallar los puntos de I y H de esta recta con las perpendiculares trazadas por A y B.
9. Con la herramienta **Polígono**, construir el polígono ABIH, que es un cuadrado, ya que por construcción AB=CG.

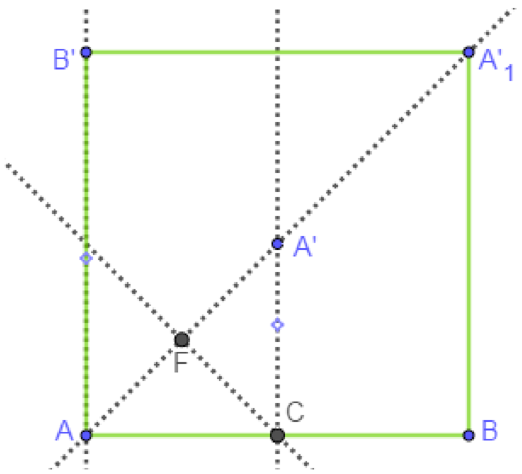


Gráfica 140: La construcción de un cuadrado. Caso 4.

Ilustración 5: Dado un segmento, construir un cuadrado cuyo lado sea el segmento.

La solución utiliza el concepto de simetría central. Sea AB el segmento dado, entonces

1. Con la herramienta **Medio o Centro**, hallar el punto medio C del segmento AB.
2. Utilizar la herramienta **Perpendicular**, para trazar por A y C perpendiculares a este segmento.
3. Con la herramienta **Bisectriz**, trazar las bisectrices de los ángulos rectos en A y C.
4. Usar la herramienta Intersección para hallar el punto de corte F de las bisectrices.
5. Con la herramienta Simetría central, hallar la reflexión de A sobre F para obtener el punto A´.
6. Con la herramienta **Simetría central**, hallar los simétricos de A y B con respecto al punto A´ para obtener los puntos $A´_1$ y B´.
7. Construir, con la herramienta **Polígono**, el cuadrilátero $ABA´_1B´$ que corresponde a un cuadrado, ya que una reflexión en un punto presera distancias.

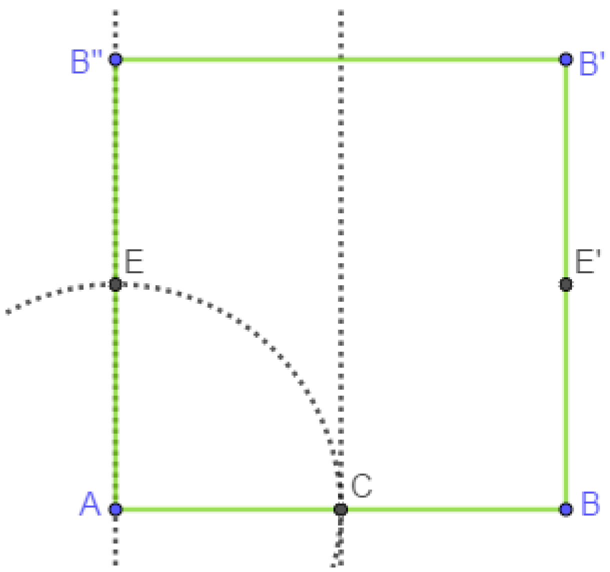


Gráfica 141: La construcción de un cuadrado. Caso 5.

Ilustración 6: Dado un segmento, construir un cuadrado cuyo lado sea el segmento.

La solución utiliza simultáneamente los conceptos de simetría central y axial. Sea AB el segmento dado, entonces

1. Con la herramienta **Medio o Centro**, trazar el punto medio C del segmento AB.
2. Con la herramienta **Perpendicular**, trazar por A y C perpendiculares a este segmento.
3. Utilizar la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** para trazar la circunferencia de centro A que, pasa por C.
4. Usar la herramienta **Intersección** para hallar el punto de corte E de, esta circunferencia y la perpendicular por A.
5. Utilizar la herramienta **Simetría axial**, para calcular la reflexión de E sobre la perpendicular por C para obtener el punto E´.
6. Con la herramienta **Simetría central**, hallar el simétrico de B con respecto a E´ para obtener el punto B´.
7. Con la herramienta **Simetría axial**, hallar la reflexión de B´ en la perpendicular por C, con lo que se obtiene el punto B''.
8. Usar la herramienta **Polígono** para construir el polígono ABB´B´´ que es un cuadrado, ya que las isometrías reflexión y una recta y reflexión en un punto preservan longitudes.

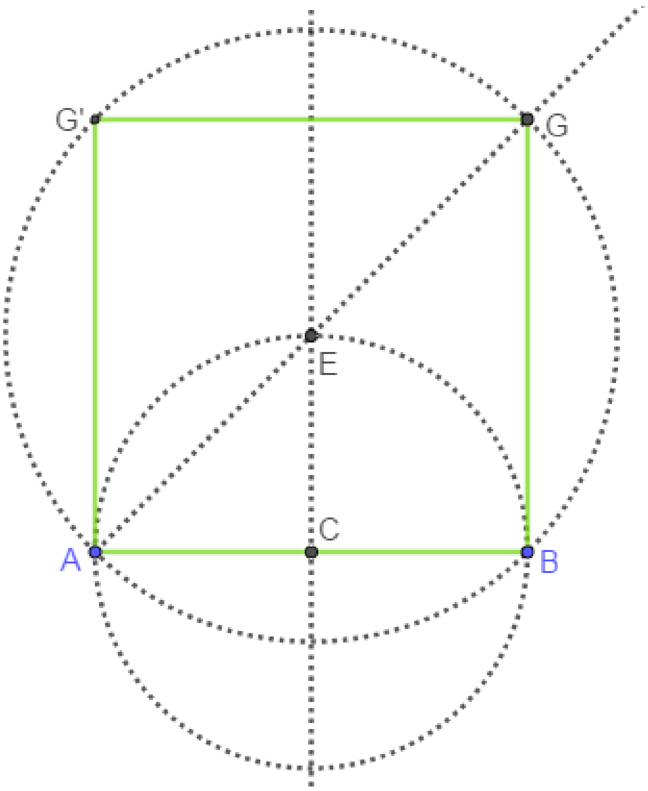


Gráfica 142: La construcción de un cuadrado. Caso 6.

Ilustración 7: Dado un segmento, construir un cuadrado cuyo lado sea el segmento.

La solución utiliza el concepto de simetría axial. Sea AB el segmento dado, entonces

1. Con la herramienta **Medio o Centro** hallar el punto medio del segmento AB y utilizar la herramienta **Perpendicular**, para trazar por C una perpendicular a este segmento.
2. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** construir la circunferencia de centro C que pasa por A.
3. Usar la herramienta **Intersección** para hallar el punto de corte E de la circunferencia y la perpendicular.
4. Con la herramienta **Semirrecta**, trazar la semirrecta AE.
5. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** trazar la circunferencia de centro E que pasa por A.
6. Utilizar la herramienta **Intersección** para hallar el punto de intersección G de esta circunferencia y la semirrecta AE.
7. Con la herramienta **Simetría axial**, hallar la reflexión de G en la perpendicular por C para obtener el punto B''.
8. Con la herramienta **Polígono**, construir el cuadrilátero ABGG´ que es un cuadrado, ya que el triángulo ACE es rectángulo e isósceles, además, AE=ED y por tanto AB=BG.



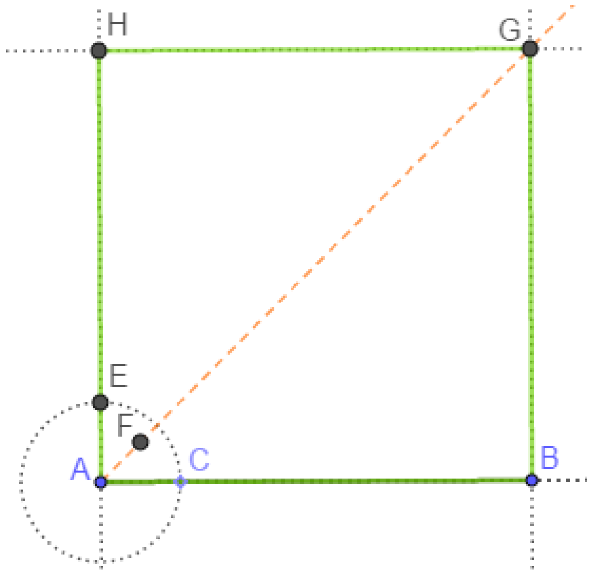
Gráfica 143: La construcción de un cuadrado. Caso 7.

Ilustración 8: Dado un segmento, construir un cuadrado cuyo lado sea el segmento.

La solución utiliza el concepto de lugar geométrico. Sea AB el segmento dado, entonces

1. Con la herramienta **Semirrecta**, definir la semirrecta AB y con Punto en objeto ubicar sobre ella un punto C cualquiera.
2. Con la herramienta **Circunferencia (centro, punto)** trazar la circunferencia de centro A que, pasa por C.
3. Utilizar la herramienta **Perpendicular**, para trazar por el punto A una perpendicular al segmento AB.

4. Usar la herramienta **Intersección** para hallar el punto de corte E entre la perpendicular y la circunferencia y la herramienta Medio o Centro para determinar el punto medio F de EC.
5. Con la herramienta **Lugar Geométrico**, hallar el lugar geométrico del punto F cuando el punto C se mueve sobre la semirrecta AB. Se obtiene la semirrecta AF.
6. Con la herramienta **Semirrecta**, defina la semirrecta AF y con la herramienta **Perpendicular**, trazar por el punto B una perpendicular al segmento AB.
7. Con la herramienta **Intersección**, hallar el punto de corte G entre la perpendicular y la semirrecta AF.
8. Con la herramienta **Paralela**, trazar por el punto F, una paralela al segmento AB y con la herramienta **Intersección** encontrar el punto de corte H entre esta paralela y la recta AE.
9. Con la herramienta **Polígono** construir el cuadrado requerido ABGH. Este polígono es un cuadrado ya que G está sobre la bisectriz del ángulo en A.



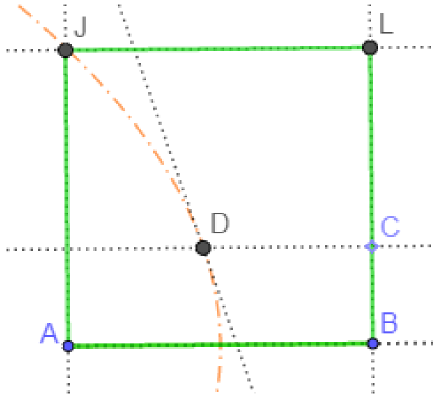
Gráfica 144: La construcción de un cuadrado. Caso 8.

Ilustración 9: Dado un segmento, construir un cuadrado cuyo lado sea el segmento.

La solución utiliza los conceptos de simetría central y de lugar geométrico, para el caso una parábola. Sea AB el segmento dado, entonces

1. Con la herramienta **Semirrecta**, definir la semirrecta AB.
2. Utilizar la herramienta **Perpendicular** para trazar por A y B perpendiculares al segmento AB.
3. Con la herramienta **Punto en objeto** seleccionar un punto cualquiera C sobre la perpendicular trazada por B.
4. Usar la herramienta **Mediatriz**, para trazar la mediatriz del segmento AC y con la herramienta **Paralela**, una recta paralela al segmento AB por el punto C.
5. Utilizar la herramienta **Intersección** para hallar el punto de corte D entre estas dos rectas y con la herramienta **Lugar Geométrico**, hallar el lugar geométrico del punto D cuando C se mueve sobre la recta BC. Se obtiene una parábola.
6. Seleccione, con la herramienta **Punto en objeto**, cinco puntos sobre el lugar geométrico y con el comando **Cónica por cinco puntos**, que se encuentra en la séptima opción de la barra de herramientas, defina la cónica que corresponde al lugar.
7. Con la herramienta **Intersección**, hallar el punto de corte J entre la cónica y la perpendicular por A al segmento AB.
8. Con la herramienta **Paralela**, trazar por I una recta paralela al segmento AB y con la herramienta **Intersección** encontrar el punto de corte L entre esta paralela y la perpendicular por B al segmento AB.

9. Con la herramienta **Polígono**, definir el cuadrilátero ABLJ el cual es un cuadrado, puesto que el punto J, al estar sobre la parábola, equidista de A y de L.

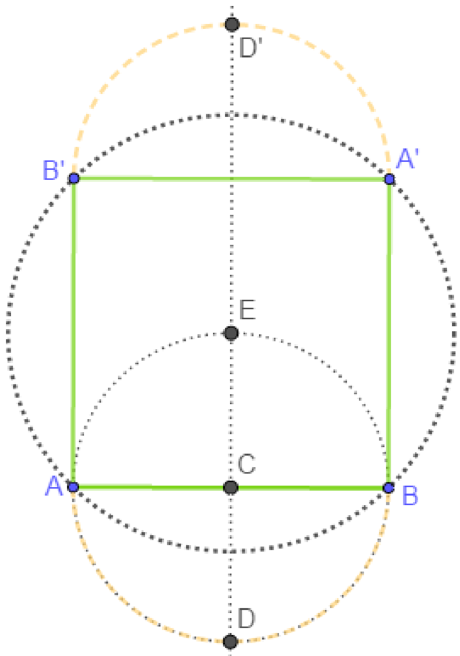


Gráfica 145: La construcción de un cuadrado caso 9.

Ilustración 10: Dado un segmento, construir un cuadrado cuyo lado sea el segmento.

La solución utiliza los conceptos de arco de una circunferencia y de simetría central. Sea AB el segmento dado, entonces

1. Con la herramienta **Mediatriz**, trazar la mediatriz del segmento AB y con la herramienta, **Medio o Centro** seleccionar el punto medio C de este segmento.
2. Utilizar la herramienta **Circunferencia (centro, punto**) para construir una circunferencia de centro en C que pase por A.
3. Con la herramienta **Intersección**, hallar los puntos E y D corte entre esta circunferencia y la mediatriz y con la herramienta **Circunferencia: centro y radio**, trazar una circunferencia de centro E y radio AE.
4. Con la herramienta **Arco Tres Puntos**, que se encuentra en la sexta opción de la barra de herramientas, trazar el arco ADB y con el comando **Simetría Central**, hallar su simétrico con respecto al punto E, para obtener el arco A´D´B´.
5. Con la herramienta Polígono, construir el cuadrilátero ABA´B´ el cual es un cuadrado.



Gráfica 146: La construcción de un cuadrado. Caso 10.

2.8 Solución geométrica de la ecuación cuadrática.

Las referencias nos muestran que alrededor del año 1600 A. c., la cultura Babilónica resolvió problemas relacionados con longitudes y áreas que actualmente se pueden expresar como un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas y cuyo proceso de solución conduce a una ecuación de segundo grado (Boyer, 1986). Los griegos, alrededor del año 100 A. c., utilizaron métodos geométricos, para resolver estas ecuaciones, con base en algunas proposiciones de *Los Elementos de Euclides*. El mayor representante de la cultura hindú, en cuanto a la solución de ecuaciones cuadráticas se refiere, fue Brahmagupta, matemático y astrónomo, quien resolvió este tipo de ecuaciones mediante métodos aritméticos. Entre los árabes merecen destacarse *MuHammad ibn Al-khwarizmi* y *Tabit Ben Qurra* quienes, en el Siglo IX, proporcionaron métodos para resolver ecuaciones cuadráticas. En épocas más recientes, en el Siglo XVI, F. Vieta, en el Siglo XVII R. Descartes, en el Siglo XVIII, T. Carlyle y en el Siglo XIX, K. V. Staudt proporcionaron otros métodos de solución para las ecuaciones de segundo grado. Nuestro propósito es tratar, desde el punto de vista geométrico, algunos de estos métodos de solución, para los cuales Ud. debe observar que todos, de una u otra manera, son equivalentes a la aplicación de la fórmula usual para hallar las raíces de una ecuación cuadrática. En GeoGebra, una manera adecuada de proporcionar dinamismo, es la utilización de deslizadores, por lo cual esto lo primero que se debe considerar en cada construcción, si esta lo requiere. Así mismo, en la dirección https://www.GeoGebra.org/m/s4ysku4n pueden consultarse las construcciones GeoGebra, relacionadas con lo considerado en esta sección.

2.8.1 Los babilonios.

Para la ecuación de segundo grado los Babilonios consideraron tres tipos de ecuaciones: $x^2 + c = bx$, $x^2 = bx + c$ y $x^2 + bx = c$ y para cada tipo de ecuación, presentaban, en cada caso particular, un algoritmo numérico que proporcionaba una solución de la ecuación.

Ilustración 1: Solución de la ecuación $x^2 + c = bx$.

El problema consiste en construir, a partir de dos segmentos de longitudes b y c un segmento de longitud r de manera que se satisfaga la igualdad $r^2 + c = br$. El proceso es el siguiente:

1. Tome la mitad de b, se obtiene $\frac{b}{2}$.
2. Calcule el cuadrado de $\frac{b}{2}$, se obtiene $de\,\frac{b^2}{4}$.
3. De este resultado reste c, se obtiene $\frac{b^2}{4} - c$.
4. Saque la raíz cuadrada de este valor $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.
5. La solución es $\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.

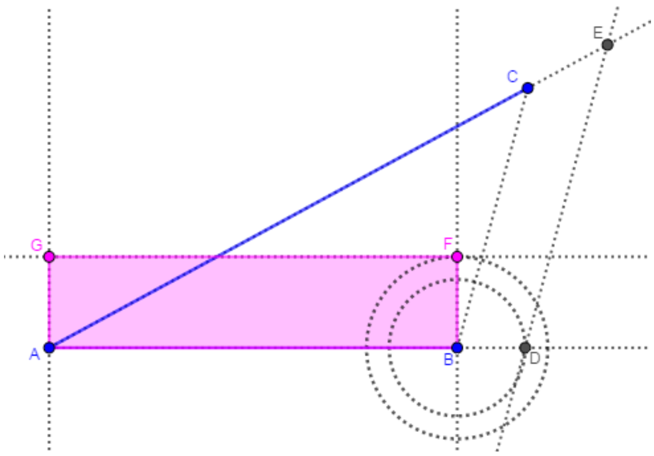
La implementación en GeoGebra de este procedimiento consta de cinco etapas, así:

1. Construir un rectángulo de área c.
2. Construir un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$.
3. Construir de un rectángulo de área $\frac{b^2}{4} - c$.
4. Construir un cuadrado equivalente al rectángulo anterior.
5. Construir el segmento solución, que corresponde a la diferencia entre la mitad de b y el lado del cuadrado anterior.

Describimos con detalle cada uno de estas etapas.

1. Construir un rectángulo de área c.

   a. Sobre una semirrecta de origen A se construye el segmento AB de longitud b.
   b. Sobre otra semirrecta con origen en A se construye el segmento AC de longitud c.
   c. Se traza, el segmento BC y con centro en B una circunferencia de radio 1. Sea D, el punto de corte de esta circunferencia con el rayo BV.
   d. Por D se traza una paralela al segmento BC, sea E punto de corte de esta recta con la semirrecta AC. Por el Teorema de Thales el segmento CE tiene longitud $\frac{c}{b}$.
   e. Con centro en B y radio CE se construye una circunferencia.
   f. Sea F el punto de corte de esta circunferencia con la perpendicular por B a la semirrecta AB, en estas condiciones, el rectángulo BFGA tiene área



Gráfica 147: La construcción del rectángulo de área c.

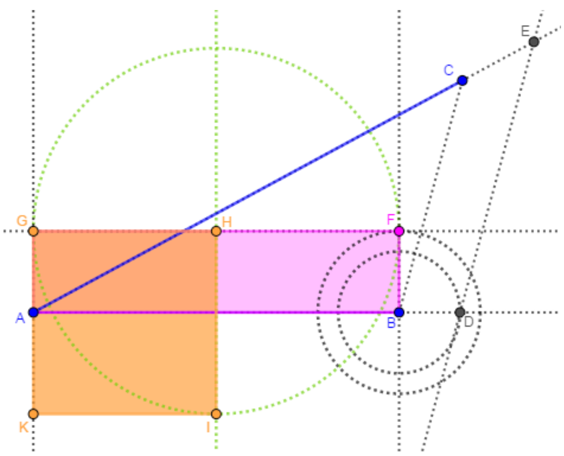
2. Construcción del cuadrado de lado $\frac{b}{2}$.

   a. Se toma el punto medio H del segmento GF.

   b. Por H se traza una perpendicular a la semirrecta AB.

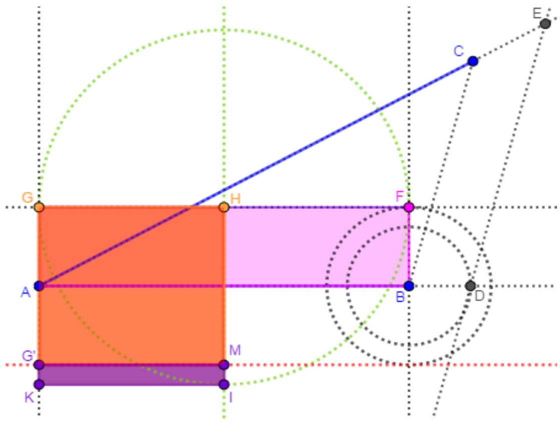
   c. Se traza la circunferencia de centro H que pasa por F.

   d. Si I es el punto de corte de esta circunferencia y la perpendicular por H entonces el cuadrado GHIK tiene área $\frac{b^2}{4}$.



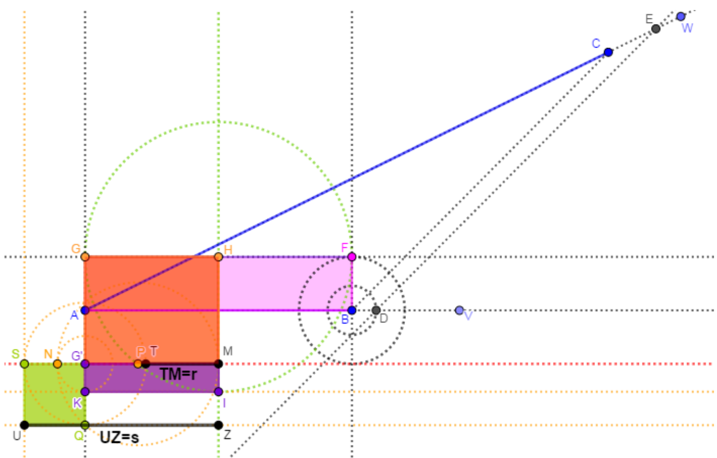
Gráfica 148: La construcción del cuadrado de lado adecuado.

3. Construcción del rectángulo de área $\frac{b^2}{4} - c$.
   a. Si G′ es el simétrico de G respecto de A, se traza por G′ una paralela a AB.
   b. El rectángulo GHMG′ tiene área c y por tanto el rectángulo G′MIK tiene área $\frac{b^2}{4} - c$.



Gráfica 149: La construcción del rectángulo de área adecuada.

4. Construir un cuadrado equivalente al rectángulo anterior. Esta tarea fue considerada en la sección 2.1 ilustración 8, sin embargo, la reproducimos en este caso en particular.
   a. Se traza la circunferencia de centro G′ y radio G′K.
   b. Si N es el punto de corte de esta circunferencia y la recta G′M, se considera el punto medio P del segmento MN y se traza la circunferencia de centro en P que pasa por N.
   c. Si Q es el punto de intersección de esta circunferencia con la recta AG se traza la circunferencia de centro G′ que pasa por Q.
   d. Si S es una de las intersecciones de esta circunferencia con la recta G′M entonces, por el Teorema de la altura, el cuadrado SG′QU tiene área $\frac{b^2}{4} - c$.
5. Construcción del segmento solución.
   a. Si T es la otra intersección de la circunferencia de centro G′ y radio G′K con la recta G′M entonces el segmento TM es una solución de la ecuación ya que $TM = MG' - G'T = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$. La otra, solución está dada por la longitud del segmento UZ.



Gráfica 150: Los Babilonios. Construcción de la solución. Caso 1.

Ilustración 2: Solución de la ecuación $x^2 = bx + c$.

Se trata de construir a partir de dos segmentos de longitudes b y c un segmento de longitud r de manera que se satisfaga la igualdad $r^2 = br + c$.El proceso es el siguiente:

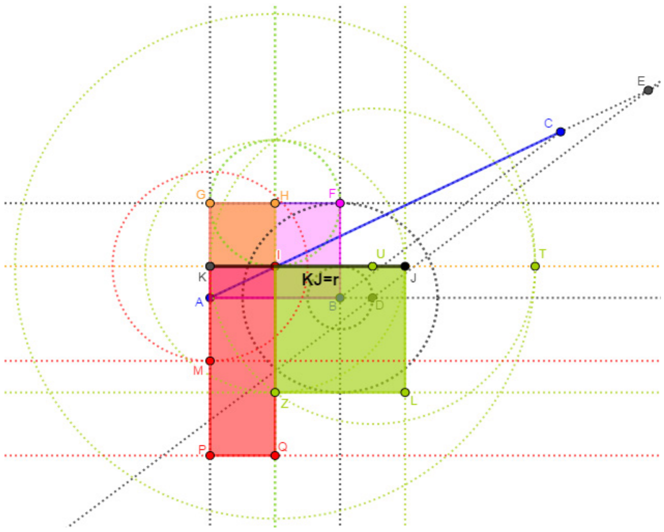
1. Tome la mitad de b, se obtiene $\frac{b}{2}$.
2. Calcule el cuadrado de $\frac{b}{2}$, se obtiene $\frac{b^2}{4}$.
3. A este resultado sume c, se obtiene $\frac{b^2}{4} + c$.
4. Saque la raíz cuadrada de este valor $\sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$.
5. La solución de la ecuación es $\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$.

La implementación en GeoGebra de este procedimiento consta de cinco etapas, así:

1. Construir un rectángulo de área c
2. Construir un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$.
3. Construir de un rectángulo de área $\frac{b^2}{4} + c$.
4. Construir un cuadrado equivalente al rectángulo anterior.
5. Construir el segmento solución, que corresponde a la suma entre la mitad de b y el lado del cuadrado anterior.

Las dos primeras etapas de este proceso son las mismas del proceso anterior, por lo cual describimos las siguientes etapas.

3. Construcción del rectángulo de área $\frac{b^2}{4} + c$.
    a. Con centro en K trazar una circunferencia de radio AG.
    b. Si M es el punto de corte de esta circunferencia con la recta AK trace por M una paralela a la recta AB.
    c. Tome la reflexión de la recta IK sobre esta paralela.
    d. Si P y Q son los puntos de corte de esta recta con las rectas GK y HI entonces el rectángulo KIQP tiene área c y por tanto el rectángulo GHQP tiene área $\frac{b^2}{4} + c$.
4. Construcción del cuadrado equivalente al rectángulo anterior. (Ver Sección 2.1, ilustración 8).
    a. Se traza la circunferencia de centro I y radio GP.
    b. Si T es el punto de corte de esta circunferencia y la recta IK, tomar el punto medio U del segmento KT y trazar la circunferencia de centro en U que pasa por T.
    c. Si Z es el punto de intersección de esta circunferencia con la recta AG se traza la circunferencia de centro I que pasa por Z.
    d. Si J es una de las intersecciones de esta circunferencia con la recta IK entonces el cuadrado IJLZ tiene área $\frac{b^2}{4} + c$.
5. Construcción del segmento solución.
    a. El segmento KJ es una solución de la ecuación ya que $KJ = KI + IJ = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$.



Gráfica 151: Los Babilonios. Construcción de la solución. Caso 2.

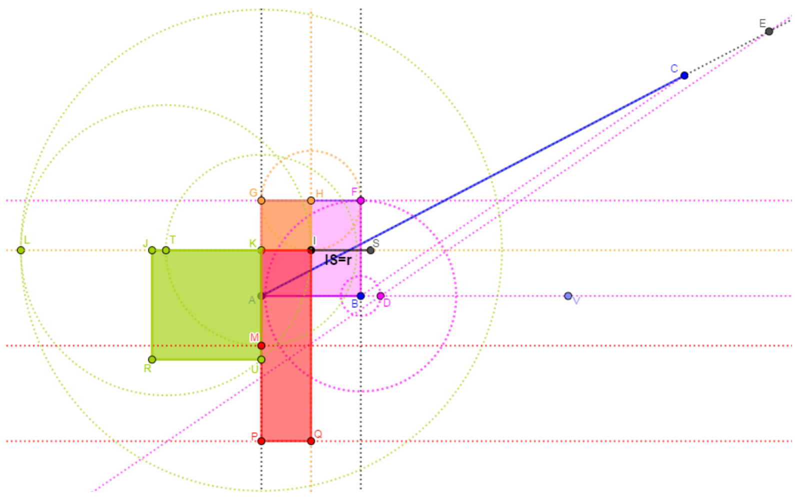
Ilustración 3: Solución de la ecuación $x^2 + bx = c$.

Dados dos segmentos de longitudes b y c, el problema consiste en construir un segmento de longitud r de manera que se satisfaga la igualdad $r^2 + c = br$.

El proceso es análogo a los dos anteriores, en tales circunstancias, describimos su implementación en GeoGebra, realizamos algunos comentarios y mostramos el resultado final.

1. Construir un rectángulo de área c.
2. Construir un cuadrado de lado $\frac{b}{2}$.
3. Construir de un rectángulo de área $\frac{b^2}{4} + c$.
4. Construir un cuadrado equivalente al rectángulo anterior.
5. Construir el segmento solución, que corresponde a la diferencia entre el lado del cuadrado anterior y la mitad de b.

Las cuatro primeras etapas son idénticas al caso anterior, en la etapa 4, el cuadrado solicitado se construye a partir del punto K y la solución está dada por el segmento IS ya que $IS = KS - KI = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}$.



Gráfica 152: Los Babilonios. Construcción del segmento soclución. Caso 3.

2.8.2 Los griegos.

Como hemos comentado, los Babilonios resolvieron las ecuaciones de segundo grado a través de un procedimiento numérico, a diferencia de estos, los griegos, utilizando la denominada *aplicación de áreas*, resolvieron esta clase de ecuaciones con base en un procedimiento de carácter geométrico. Esta Álgebra geométrica, se encuentra expuesta de manera detallada en el Libro II de los Elementos de Euclides, por ejemplo, la proposición II.5 nos dice:

Si se corta un segmento en dos segmentos de igual longitud y simultáneamente en otros dos segmentos de longitudes diferentes entonces el área de rectángulo constituido por los segmentos desiguales más el área del cuadrado de lado la diferencia entre las dos partes es igual al área del cuadrado construido sobre la mitad del segmento dado.

Esta proposición puede utilizarse para resolver ecuaciones de la forma $x^2 + c = bx$ y con una interpretación adecuada representa la identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Con relación a la ecuación cuadrática los griegos consideraron cinco casos, así: $x^2 = c$, $x^2 = bx$, $x^2 + c = bx$, $x^2 + bx = c$ y $x^2 = bx + c$. El primero consiste en construir la raíz cuadrada de un número, lo cual fue considerado en la sección 2.1, ilustración 7 y el segundo tiene como solución positiva $x = b$. Consideraremos los casos restantes.

Ilustración 1: Solución de la ecuación $x^2 + c = bx$.

El problema consiste en construir, a partir de dos segmentos de longitudes b y c un segmento de longitud r de manera que se satisfaga la igualdad $r^2 + c = br$. El proceso es el siguiente:

1. Construir un cuadrado de área $\frac{b^2}{4}$.
2. Construir un cuadrado de área c.
3. Construir un cuadrado de área $\frac{b^2}{4} - c$.
4. Construir el segmento solución, que corresponde a la diferencia entre la mitad de b y lado del cuadrado anterior.

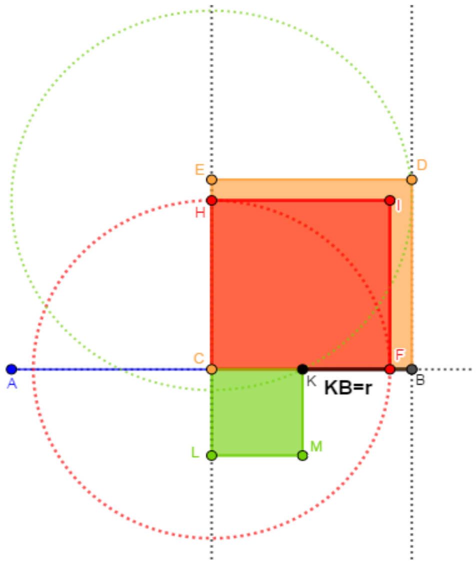
Describimos la implementación de cada uno de estos pasos.

1. Construcción del cuadrado de área $\frac{b^2}{4}$.
   a. Sobre una semirrecta con origen en un punto A se crea un segmento de longitud b.
   b. Se toma el punto medio C del segmento AB y se crea el segmento AC.
   c. Con la instrucción **Polígono(C, B, 4)** se obtiene el cuadrado pedido CBDE.

2. Construcción del cuadrado de área c.
   a. Por C se traza una perpendicular a la semirrecta AB.
   b. Se traza la circunferencia de centro C y radio $\sqrt{c}$.
   c. Si H es el punto de corte de esta circunferencia y la perpendicular entonces la instrucción **Polígono(H, C, 4)** crea el cuadrado requerido HCFI.

3. Construcción del cuadrado de área $\frac{b^2}{4} - c$.
   a. Se traza la circunferencia de centro H y radio BC.
   b. Si K es el punto de corte de esta circunferencia y la semirrecta AB entonces la instrucción **Polígono(K, C, 4)** crea el cuadrado requerido KCLM.

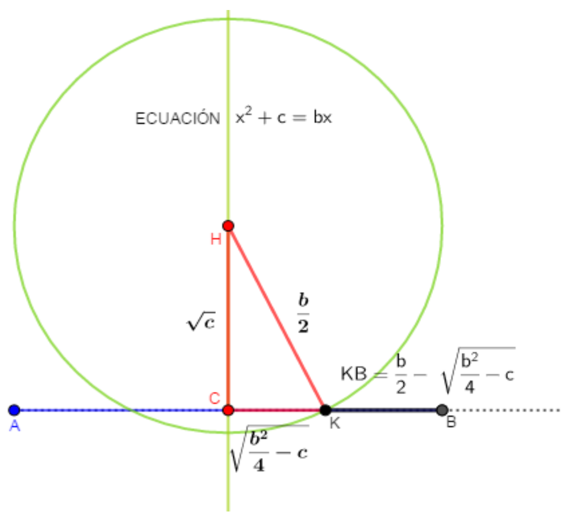
4. El segmento KB define la solución ya que $KB = CB - CK = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.



Gráfica 153: Los griegos. Construcción de la solución. Caso 1.

El proceso anterior puede resumirse de la siguiente manera:

1. Construya el segmento de AB de longitud b.
2. Tome su punto medio C y por este punto trace una perpendicular a AB.
3. Sobre esta perpendicular construya un segmento de longitud $CH = \sqrt{c}$.
4. Con centro en H trace una circunferencia de radio CB.
5. Si K es el punto de corte de esta circunferencia y el segmento AB entonces el segmento KB es una solución de la ecuación.



Gráfica 154: Los griegos. El resumen del caso 1.

Nótese que el segmento AK proporciona la otra solución de la ecuación considerada, ya que $KB = AK = AC + CK = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$.

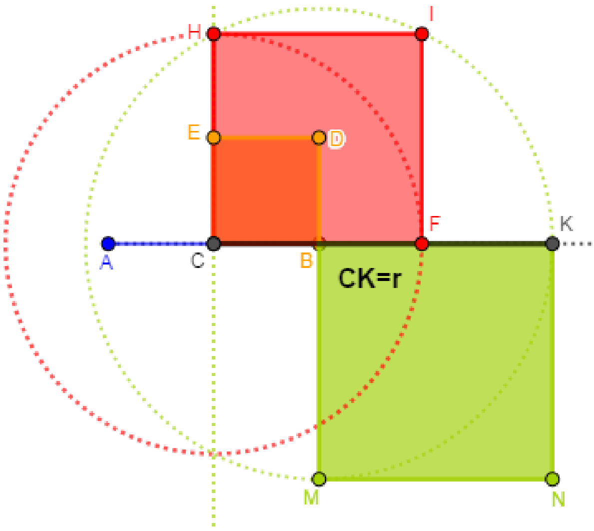
Ilustración 2: Solución de la ecuación $x^2 = bx + c$.

El problema consiste en construir, a partir de dos segmentos de longitudes b y c un segmento de longitud r de manera que se satisfaga la igualdad $r^2 + c = br$. El proceso es el siguiente:

1. Construir un cuadrado de área $\frac{b^2}{4}$.

2. Construir un cuadrado de área c.
3. Construir un cuadrado de área $\frac{b^2}{4} + c$.
4. Construir el segmento solución, que corresponde a la suma de la mitad de b y lado del cuadrado anterior.

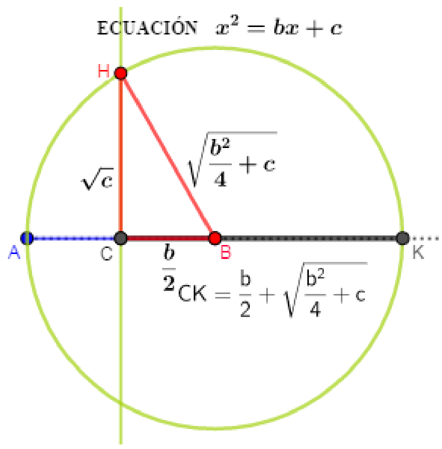
Los pasos 1 y 2 son iguales al caso anterior. Para construir el cuadrado de área $\frac{b^2}{4} + c$, con centro en B y radio BH creamos una circunferencia. Si K es el punto de corte de esta circunferencia y la semirrecta AB entonces la instrucción **Polígono(K, B, 4)** crea el cuadrado requerido KBLM. El segmento CK define la solución ya que $CK = CB + BK = \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$.



Gráfica 155: Los griegos. Construcción de la solución. Caso 2.

De manera análoga, este proceso puede resumirse así:

1. Construya el segmento de AB de longitud b.
2. Tome su punto medio C y por este punto trace una perpendicular a AB.
3. Sobre esta perpendicular construya un segmento de longitud $CH = \sqrt{c}$.
4. Con centro en B trace una circunferencia de radio HB.
5. Si K es el punto de corte de esta circunferencia y el rayo AB entonces el segmento CK es una solución de la ecuación.



Gráfica 156: Los griegos. El resumen del caso 2.

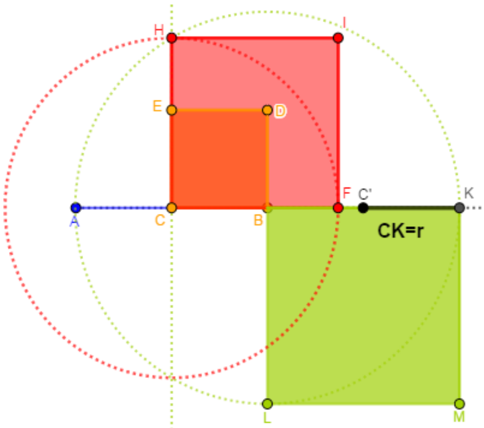
Ilustración 3: Solución de la ecuación $x^2 + bx = c$.

El problema consiste en construir, a partir de dos segmentos de longitudes b y c un segmento de longitud r de manera que se satisfaga la igualdad $r^2 + br = c$.

Las instrucciones son muy similares al caso anterior, la única diferencia se encuentra en la construcción de la solución que ahora es:

4' El segmento solución, corresponde a la diferencia entre el lado del cuadrado de área $\frac{b^2}{4} + c$ y la mitad de b.

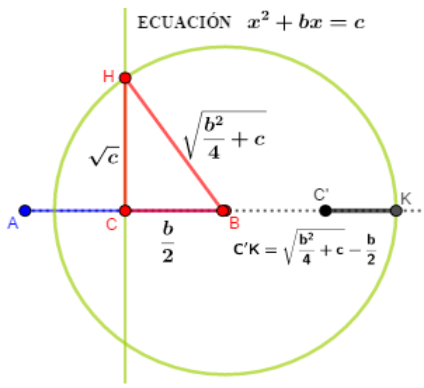
Los pasos 1, 2 y 3 son iguales al caso anterior. Para construir la solución, se construye el punto C', simétrico de C respecto de B; en estas condiciones, el segmento C'K define la solución ya que $C'K = BK - BC' = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}$.



Gráfica 157: Los griegos. Construcción de la solución. Caso 3.

Así mismo, el proceso puede resumirse así:

1. Construya el segmento de AB de longitud b.
2. Tome su punto medio C y por este punto trace una perpendicular a AB.
3. Sobre esta perpendicular construya un segmento de longitud $CH = \sqrt{c}$.
4. Con centro en B trace una circunferencia de radio HB.
5. Si K es el punto de corte de esta circunferencia y el rayo AB y se toma el punto C', simétrico de C con respecto a B, entonces el segmento C'K es una solución de la ecuación.



Gráfica 158: Los griegos. El resumen del caso 3.

2.8.3 Los árabes.

Aunque en la *Aritmética* de Diofanto, con la denominada *algebra sincopada*, se encuentran las bases para el desarrollo del álgebra, es necesario reconocer que el álgebra es el resultado de un proceso que tiene su inicio con los trabajos del matemático y astrónomo árabe *MuHammad ibn Musa Al-khwarizmi.* En la primera parte de su principal obra *Hisab Aljabr wa´l muqabalah,* que se ha traducido como *"ciencia de la transposición y cancelación"*, se encuentran los principales elementos de lo que en la actualidad denominamos álgebra (Recalde, 2018). Con respecto a las ecuaciones cuadráticas Al-Khwarizmi reconoce cinco tipos para cada uno de los cuales proporciona algoritmos de solución. Estos son: $ax^2 = c$**,** $ax^2 = bx, ax^2 + c = bx, ax^2 + bx = c$ y $ax^2 = bx + c$**.**

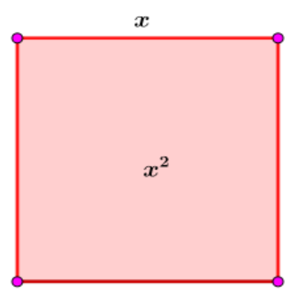
Es necesaria una observación. Las tres construcciones descritas a continuación son correctas desde el punto de vista teórico, pero no, desde la filosofía que debe tener una construcción GeoGebra, ya que, aunque estas funcionan perfectamente y proporcionan el dinamismo esperado fueron elaboradas a partir del segmento solución verdadero.

Ilustración 1: Solución de la ecuación $x^2 + bx = c$.

El problema consiste en construir, a partir de dos segmentos de longitudes b y c un segmento de longitud r de manera que se satisfaga la igualdad $r^2 + br = c$.

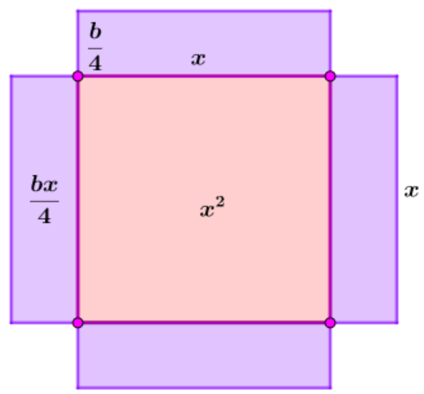
La descripción de solución proporcionada a este problema por *Al-khwarizmi* es equivalente a la dada por los Babilonios, sin embargo, en la práctica, las referencias nos muestran una combinación de procesos aritmético-geométricos que utilizan básicamente el método de completación de cuadrados. Para la ecuación anterior procedía de la siguiente manera:

1. Se construye un cuadrado de lado x.



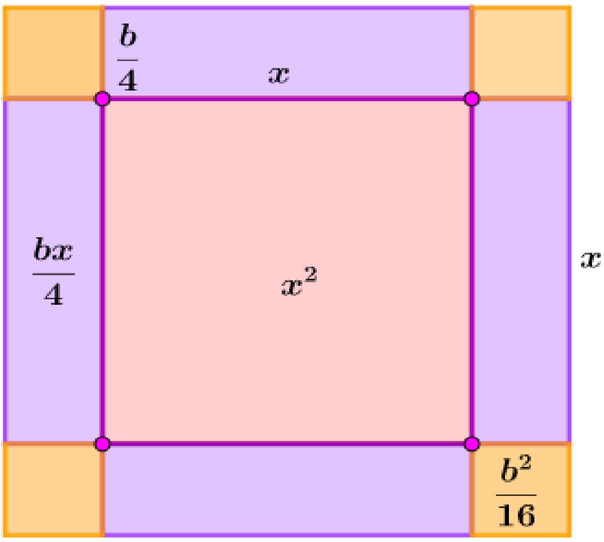
Gráfica 159: El cuadrado.

2. Sobre cada uno de sus lados, un rectángulo de lados x y $\frac{b}{4}$, con lo cual obtiene una figura que debe tener área c es decir esta figura corresponde a la ecuación $x^2 + bx = c$.



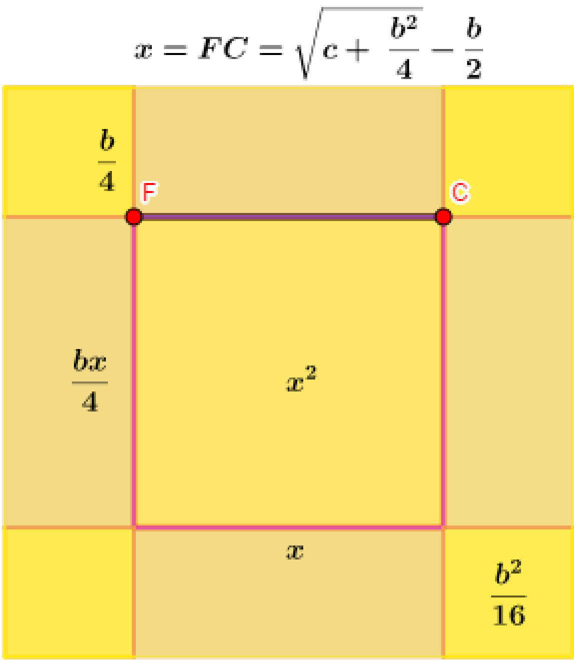
Gráfica 160: Los rectángulos sobre el cuadrado.

3. Se completa está figura a un cuadrado, para lo cual debe agregar cuatro cuadrados cada uno de lado $\frac{b}{4}$ y así esta figura corresponde a la igualdad $x^2 + bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4}$.



Gráfica 161: La completación de cuadrados.

4. La figura es un cuadrado de lado $x + \frac{b}{2}$ y área $c + \frac{b^2}{4}$ y por tanto se debe tener que $x + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$ y así $x = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} - \frac{b}{2}$ es la longitud del segmento r que satisface la igualdad $r^2 + br = c$.



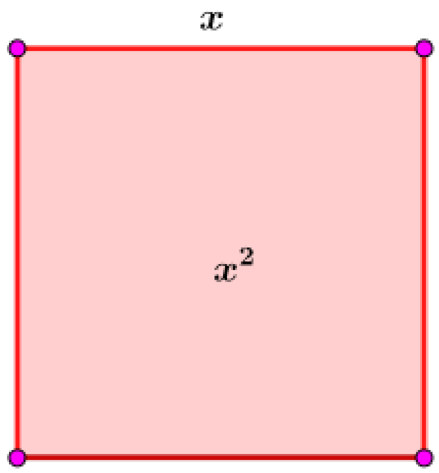
Gráfica 162: Los árabes. Construcción de la solución. Caso 1.

Ilustración 2: Solución de la ecuación $x^2 = bx + c$.

El problema consiste en construir, a partir de dos segmentos de longitudes b y c un segmento de longitud r de manera que se satisfaga la igualdad $r^2 = br + c$.

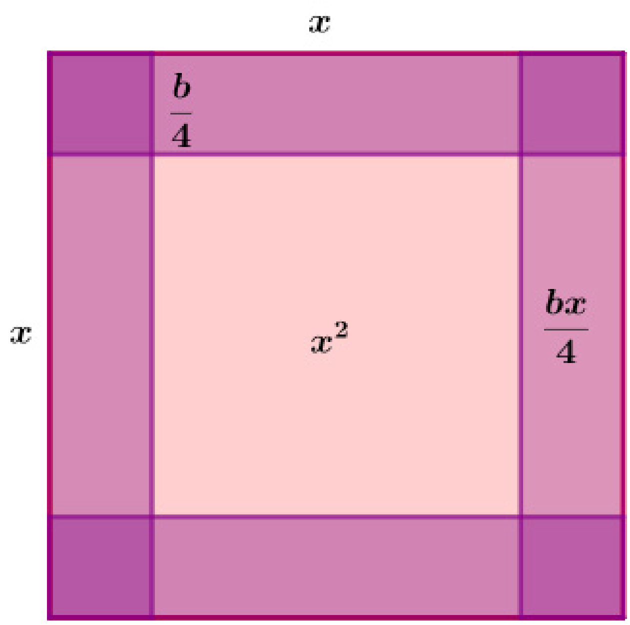
No hemos encontrado, en las referencias consultadas, una ilustración de este caso, por lo cual realizamos una interpretación de lo que pudo ser el trabajo de *Al-khwarizmi* con relación a este caso, para lo cual reescribimos la ecuación en la forma $x^2 - bx = c$.

1. Construir un cuadrado de lado x.



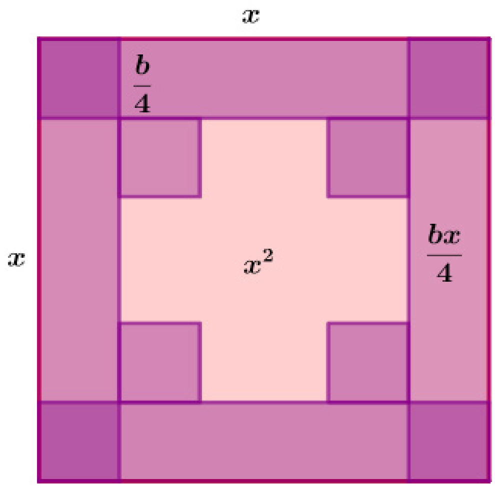
Gráfica 163: El cuadrado.

2. En el interior del cuadrado y sobre cada uno de sus lados construir un rectángulo de lados x y $\frac{b}{4}$.



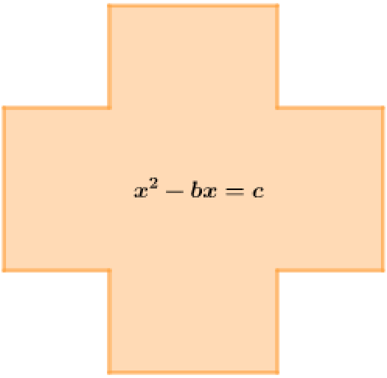
Gráfica 164: Los rectángulos en el interior del cuadrado.

3. Al realizar esta labor los rectángulos se superponen en cuatro cuadrados de lado $\frac{b}{4}$, que por tanto se cuentan dos veces, lo que significa que debemos quitárselos al cuadrado original. Con este proceso obtenemos la siguiente figura.



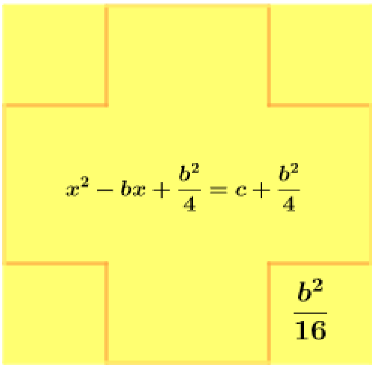
Gráfica 165: Los cuadrados en su interior.

4. En consecuencia, la gráfica que corresponde a la ecuación $x^2 - bx = c$**,** es:



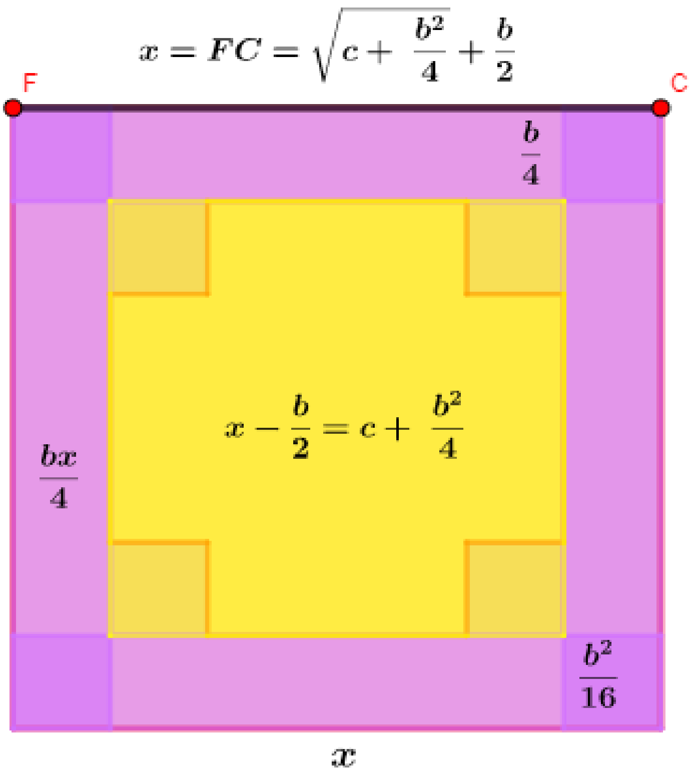
Gráfica 166: El polígono del área correspondiente.

5. Para completar está figura a un cuadrado, se deben agregar nuevamente los cuatro cuadrados de lado $\frac{b}{4}$, por tanto, la siguiente figura corresponde a la igualdad $x^2 - bx + \frac{b^2}{4} = c + \frac{b^2}{4}$.



Gráfica 167: De nuevo la completación de los cuadrados.

6. La figura es un cuadrado de lado $x - \frac{b}{2}$ y de área $c + \frac{b^2}{4}$ y por tanto se debe tener que $x - \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}$ ***y así*** $x = \sqrt{\frac{b^2}{4} + c} + \frac{b}{2}$ es la longitud del segmento r que satisface la igualdad $r^2 = br + c$.



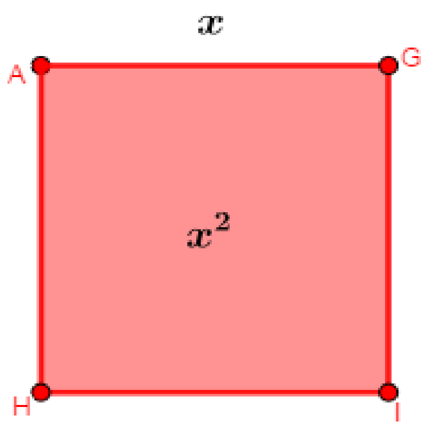
Gráfica 168: Los árabes. Construcción del segmento solución. Caso 2.

Ilustración 3: Solución de la ecuación $x^2 + c = bx$.

El problema consiste en construir, a partir de dos segmentos de longitudes b y c un segmento de longitud r de manera que se satisfaga la igualdad $r^2 + c = br$.

En este caso la construcción difiere radicalmente de las anteriores y la justificación de que esta, produce la solución de la ecuación requiere mayor cuidado.

1. Se construye el cuadrado AGHI de lado x.



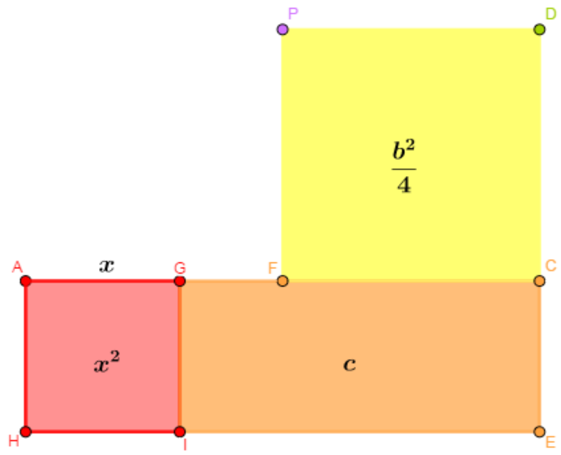
Gráfica 169: El cuadrado.

2. A este cuadrado se le anexa un rectángulo de área c, para lo cual es necesario construir a continuación de AG un segmento de longitud $\frac{c}{AG}$.

Gráfica 170: El cuadrado y el rectángulo.

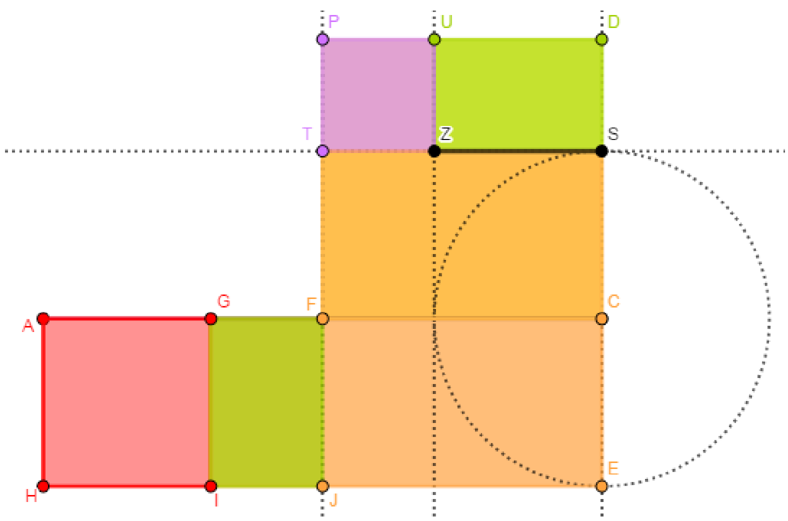
Así el área de esta región es $x^2 + c$ que debe ser igual a bx, por tanto, la figura corresponde a la ecuación $x^2 + c = bx$.

3. El rectángulo ACED corresponde a bx y puesto que $CE = x$, entonces $AC = b$, tomamos su punto medio F y construimos un cuadrado de área $\frac{b^2}{4}$. En consecuencia, la siguiente figura corresponde a la igualdad $x^2 + c + \frac{b^2}{4} = bx + \frac{b^2}{4}$.



Gráfica 171: La anexión de otro cuadrado.

4. A continuación, es necesario construir sobre CD y a partir de C un segmento de longitud x, para lo cual, se traza la circunferencia de centro C, radio AG y se toma el punto S de intersección con CD. Adicionalmente, es necesario realizar algunas construcciones auxiliares como lo muestra la siguiente gráfica.



Gráfica 172: Los árabes. Construcción de la solución. Caso 3.

El segmento ZS es la solución de la ecuación $x^2 + c = bx$ como lo muestra el siguiente razonamiento en el cual, por ejemplo, al escribir GFJI, nos estamos refiriendo al área del correspondiente rectángulo. Así mismo, nótese que GFJI=SDUZ ya que UD=AG y $GF = \frac{b}{2} - AG = \frac{b}{2} - CS = SD$, que $FCEJ = \frac{bx}{2} = CSTF = AFJH$ lo que implica que $CSTF + SDUZ = c = AFJH + SDUZ$.

Partimos de la igualdad referida en el inciso 2, $x^2 + c = bx$, y realizamos las transformaciones adecuadas.

$$x^2 + c = AGIH + GCEI = ACEH = bx$$

Sumamos $\frac{b^2}{4}$ a ambos lados de esta igualdad.

$$x^2 + c + \frac{b^2}{4} = AGIH + GCEI + FCDP = ACEH + FCDP = bx + \frac{b^2}{4}$$

Igualdad que, para trasladar bx del lado derecho al lado izquierdo, se puede escribir como:

$$x^2 + c + \frac{b^2}{4} = AGIH + GFJI + FCEJ + FCST + TSDP = ACEH + FCDP = bx + \frac{b^2}{4}$$

Con lo cual se obtiene

$$x^2 + c + \frac{b^2}{4} - bx = AGIH + GFJI + TSDP = FCDP = \frac{b^2}{4}$$

Ahora trasladamos c del lado derecho al izquierdo, para lo cual escribimos esta igualdad como:

$$x^2 + c + \frac{b^2}{4} - bx = AGJH + SDUZ + UPTZ = FCST + SDUZ + UPZT = \frac{b^2}{4}$$

y así

$$x^2 + \frac{b^2}{4} - bx = UPZT = \frac{b^2}{4} - c$$

Pero $UPZT$ es un cuadrado de lado $\frac{b}{2} - x$ y de área $\frac{b^2}{4} - c$ y por tanto se debe tener que $\frac{b}{2} - x = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ ***y así*** $x = \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} = TS - TZ = ZS$ es la longitud r del segmento que satisface la igualdad $r^2 + c = br$.

2.8.4 La época moderna.

En este trabajo, con relación a la solución de la ecuación cuadrática, consideramos *"La época moderna"* como el espacio temporal que transcurre a partir del Siglo XVI y que por tanto cubre, cronológicamente, los esfuerzos realizados, en este sentido, por: F. Vieta, R. Descartes, T. Carlyle, K. V. Staudt y, posiblemente otros autores, de los cuales no se han encontrado referencias.

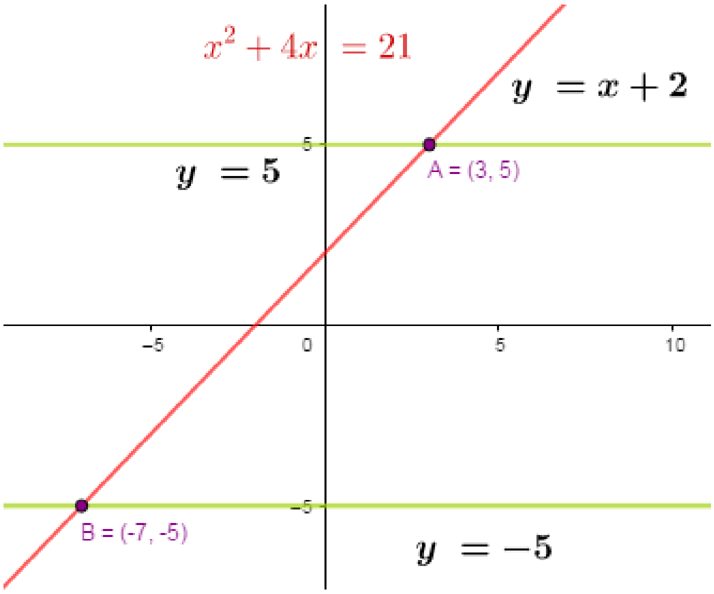
2.8.4.1 El método de Vieta.

Francois Vieta, fue un matemático francés que vivió en el Siglo XVI y usualmente se le reconoce por la solución de la ecuación cúbica de la forma $x^3 + bx = c$ mediante su transformación a una ecuación cuadrática y por la solución del problema de Apolonio en su *Apolonius Gallus*. El método utilizado por Vieta, para resolver la ecuación cuadrática, es un procedimiento algebraico que utiliza un cambio de variable. En esta sección describimos el método y realizamos una interpretación geométrica del mismo. Consideraremos simultáneamente los casos $x^2 + c = bx$, $x^2 = bx + c$ y $x^2 + bx = c$.

Para la ecuación $x^2 + bx = c$, considera el cambio de variable $y = x + \frac{b}{2}$, por lo que $y^2 = x^2 + bx + \frac{b^2}{4}$, es decir $y^2 = c + \frac{b^2}{4}$, así $y = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$ con lo que $x = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}$ es la solución de la ecuación considerada.

Geométricamente este procedimiento puede interpretarse de la siguiente manera: Hallar los puntos de intersección de la recta $y = x + \frac{b}{2}$ con las paralelas al eje x, $y = \pm\sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$.

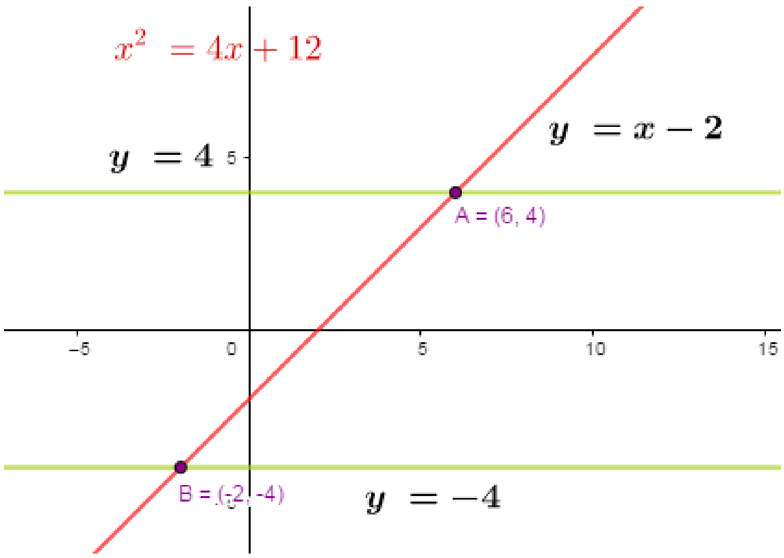
Se ilustra este hecho, con la ecuación $x^2 + 4x = 21$, para la cual, la solución corresponde a la abcisa de los puntos de intersección de las rectas $y = 5$, $y = -5$ con la recta $y = x + 2$ que son A(3, 5) y B(-7, -5) y por tanto la ecuación tiene como raíces $x = 3$ y $x = -7$.



Gráfica 173: La solución en el método de Vieta. Caso 1.

De la misma manera, la solución de la ecuación $x^2 = bx + c$ se encuentra como la intersección de la recta $y = x - \frac{b}{2}$ y las paralelas al eje x, $y = \pm\sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$.

Como ilustración, consideramos la ecuación $x^2 = 4x + 12$, para la cual la solución corresponde a la abcisa de los puntos de intersección de las rectas $y = 4$, $y = -4$ con la recta $y = x - 2$ que son A(6, 4) y B(-2, -4) y por tanto la ecuación tiene como raíces $x = 6$ y $x = -2$.



Gráfica 174: La solución en el método de Vieta. Caso 2.

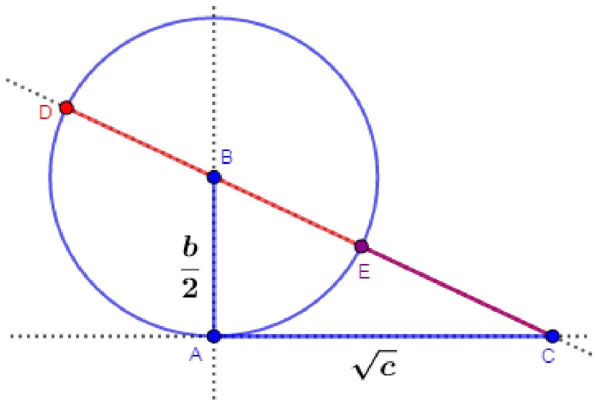
De manera análoga se trata la solución de la ecuación $x^2 + c = bx$.

2.8.4.2 El método de Descartes.

Rene Descartes fue un Filósofo, Físico y Matemático Francés que nació en la Haye en 1596 y murió en Estocolmo en 1650, es considerado el padre de la Geometría Analítica y de la Filosofía Moderna.

En el siglo XVII, en una de sus obras, *La Geométrie*, describió un método geométrico que proporciona la solución de la ecuación cuadrática $x^2 = bx + c$. La construcción referida prosigue como sigue:

1. Construir un segmento AC de longitud $\sqrt{c}$.
2. Sobre una perpendicular a AC en el punto A construir un segmento $AB = \frac{b}{2}$.
3. Trazar una circunferencia de centro B y radio $\frac{b}{2}$.
4. Trazar la recta BC.
5. Si D y E son los puntos de corte de la circunferencia con la recta BC entonces los segmentos CE y CD son soluciones de la ecuación considerada.



Gráfica 175: La solución en el método de Descartes.

El segmento $x = CD$ es una solución de la ecuación, ya que en el triángulo rectángulo BAC se tiene que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ es decir $(x - \frac{b}{2})^2 = (\frac{b}{2})^2 + \sqrt{c}^2$ y simplificando se obtiene $x^2 = bx + c$.

2.8.4.3 El método de Carlyle.

Thomas Carlyle (1775-1881) fue un matemático inglés que propuso un método que utiliza algunos elementos de geometría analítica para resolver la ecuación de segundo grado. El procedimiento proporciona las raíces de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$, con b, c números reales.

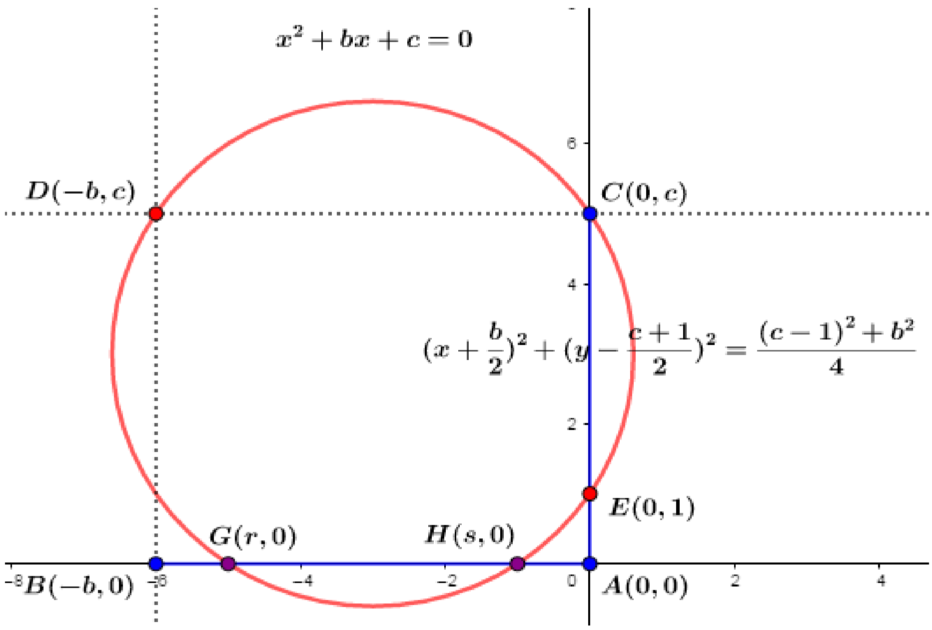
El algoritmo es el siguiente:

1. Construir los puntos B(-b, 0), C(0, c) y E(0, 1).
2. Construir el punto D(-b, c) y una circunferencia de diámetro DE.
3. En estas circunstancias puede ocurrir que:

   a. La circunferencia corta al eje x en dos puntos G(r, 0) y H(s, 0) entonces las abcisas de estos puntos son las raíces de la ecuación.

   b. La circunferencia es tangente al eje x entonces los puntos G y F coinciden y la abcisa de este punto es una raíz doble de la ecuación.

   c. La circunferencia no corta al eje x entonces las raíces de la ecuación son complejas. Esto sucede cuando la distancia entre el centro de la circunferencia y el eje x es menor que $\frac{|c-1|}{2}$.



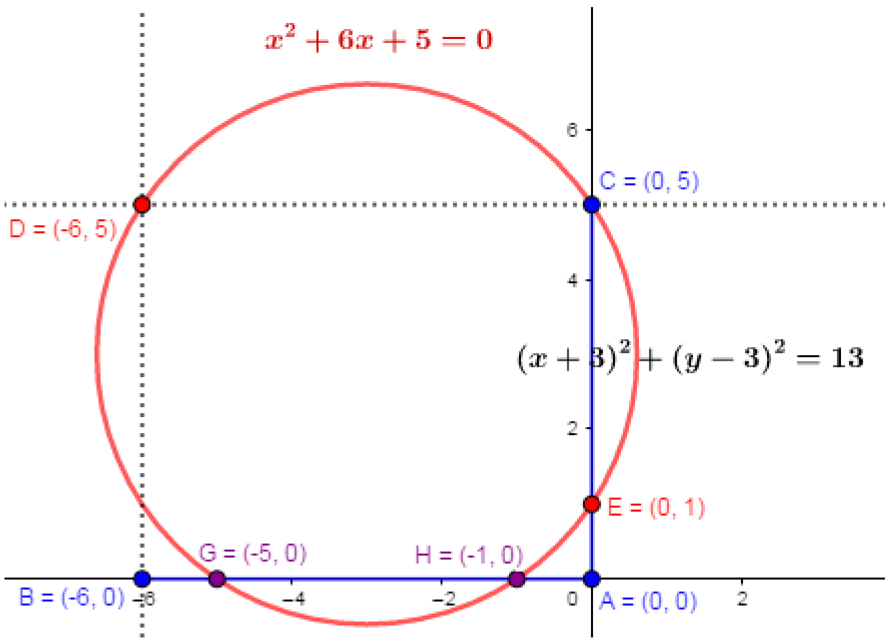
Gráfica 176: La solución en el método de Carlyle. Caso 1.

Podemos mostrar que $x = r$ es raíz de la ecuación de la siguiente manera:

El centro y radio de la circunferencia de diámetro ED son, respectivamente $\left(\frac{-b}{2}, \frac{c+1}{2}\right)$ y $R = \frac{\sqrt{(c-1)^2+b^2}}{2}$ por tanto su ecuación es $\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{(c-1)^2+b^2}{4}$.

Puesto que el punto $G(r,0)$ está sobre la circunferencia entonces $\left(r + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{c+1}{2}\right)^2 = \frac{(c-1)^2+b^2}{4}$ y al efectuar las operaciones resulta $r^2 + br + c = 0$.

Con el procedimiento descrito, la siguiente gráfica ilustra que el hecho de que las soluciones de la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$ son $x = -5$ y $x = -1$.

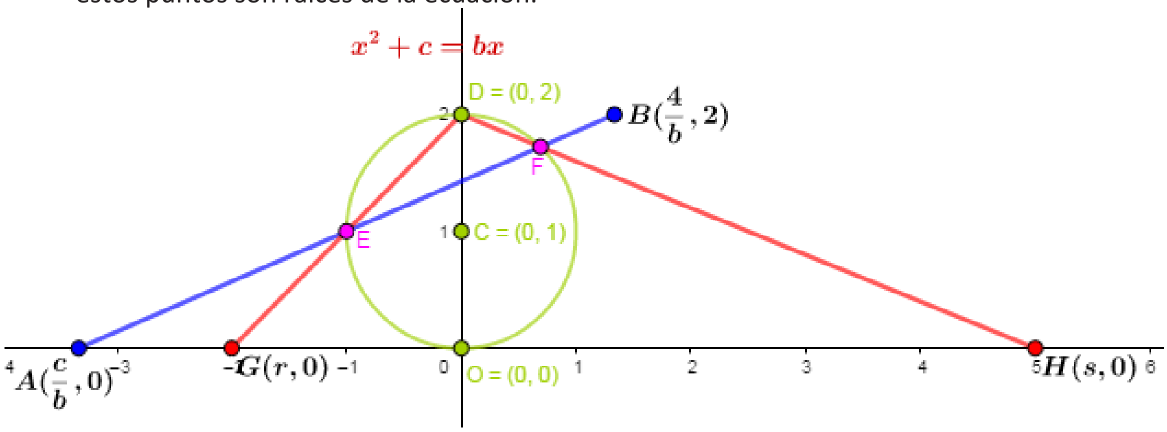


Gráfica 177: La solución en el método de Carlyle. Caso 2.

2.8.4.4 El método de Von Staudt.

Karl Von Staudt (1798-1867) fue un matemático alemán reconocido por su trabajo en teoría de números, relacionado con los Números de Bernoulli y sus trabajos en geometría proyectiva. Propuso un método diferente para resolver la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ que también utiliza geometría analítica. Este procedimiento consiste en lo siguiente (Luque, Mora & Torres, 2005):

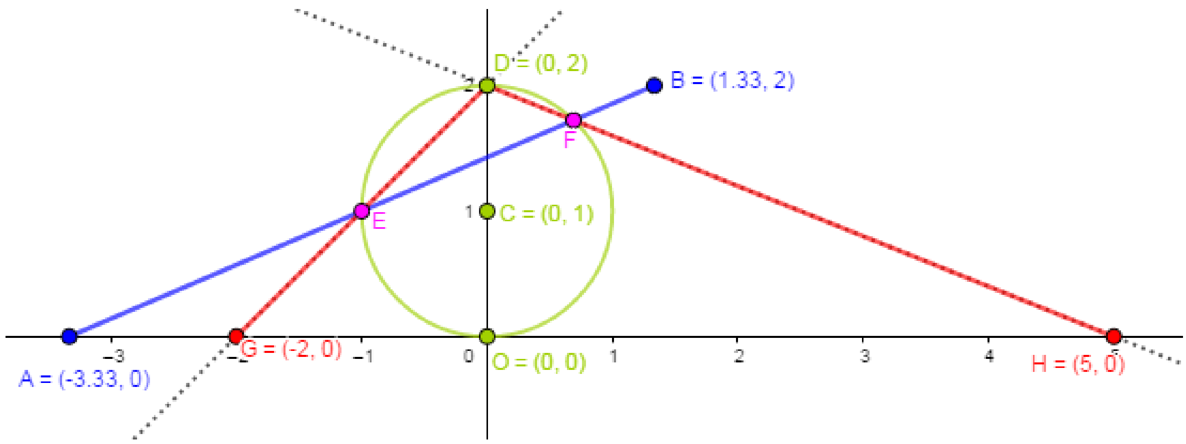
1. Ubique los puntos $A\,(\frac{c}{b}, 0)$, $B\,(\frac{4}{b}, 2)$ y construya el segmento AB.
2. Trazar la circunferencia de centro $C(0{,}1)$ y radio 1.
3. Sean E y F los puntos de corte de esta circunferencia con el segmento AB y D, el punto $(0{,}2)$.
4. Trace las rectas DE y DF.
5. Si $G(r, 0)$ y $H(s, 0)$ son los puntos de corte de estas rectas con el eje x entonces las abcisas de estos puntos son raíces de la ecuación.



Gráfica 178: La solución en el método de Von Staudt.

Los cálculos para demostrar que las abcisas de los puntos G y H son soluciones de la ecuación son dispendiosos ¡pero no difíciles!, es un buen ejercicio de carácter algebraico que intente esta demostración.

Con el procedimiento descrito, la siguiente gráfica ilustra el hecho de que las soluciones de la ecuación $x^2 - 3x - 10 = 0$ son $x = -2$ y $x = 5$.



Gráfica 179: Ilustración del método de Von Staudt.

2.8.4.5 Un algoritmo geométrico actual.

Iniciamos esta sección con los Babilonios y la finalizamos con una reinterpretación de su trabajo. Como lo hemos comentado, para ellos, resolver la ecuación $x^2 + c = bx$ era equivalente a encontrar dos números, uno de los cuales es x, y el otro digamos y tales que $x + y = b$ y $xy = c$. ¡Realmente este hecho es, al contrario, pero para nuestros propósitos podemos pensarlo de esa manera! Lo cual, geométricamente, en los tiempos de Apolonio, se podía pensar como: hallar el punto de intersección de la recta $x + y = b$ y la hipérbola $xy = c$; sin embargo, se estaría infringiendo la filosofía de los griegos: Utilizar únicamente herramientas Euclidianas.

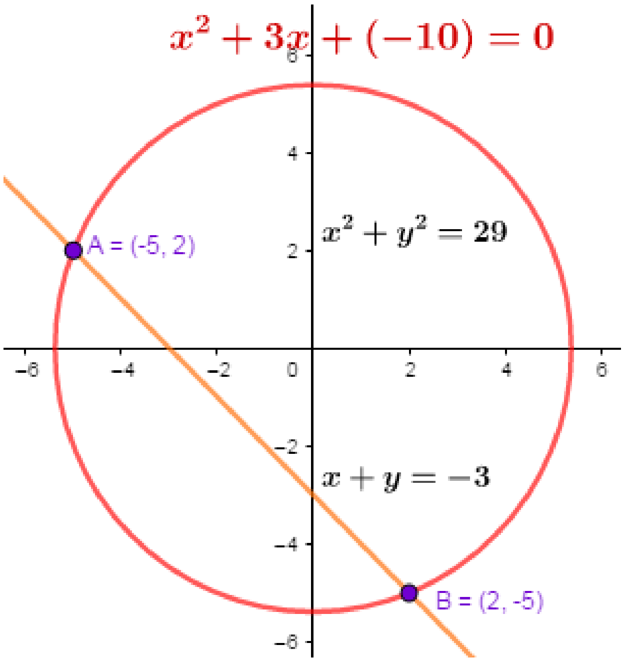
Podemos reinterpretar este proceso, para las raíces reales, de una manera diferente y adaptarnos a la manera de pensar griega. De manera semejante, podemos proceder para obtener las raíces complejas. Veamos esto.

2.8.4.5.1 Raíces reales.

Consideramos la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ con b, c números reales la cual, como sabemos es equivalente al sistema de ecuaciones $x + y = -b$ y $xy = c$. Al elevar al cuadrado la expresión $x + y = -b$ se obtiene $x^2 + 2xy + y^2 = b^2$ que, utilizando la expresión $xy = c$ se puede escribir como $x^2 + y^2 = b^2 - 2c$ y por tanto se tiene que $x^2 + y^2 = b^2 - 2c$ y $x + y = -b$.

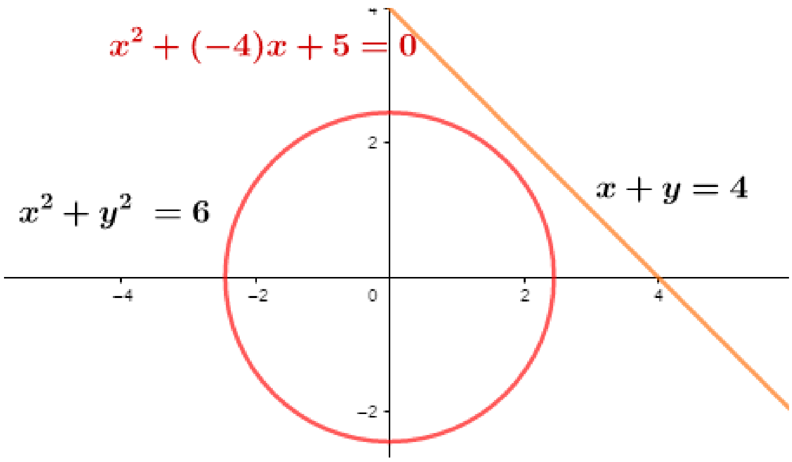
En estas condiciones: Si $b > \sqrt{2c}$ las raíces reales de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ se pueden encontrar como las abcisas de los puntos de corte de la circunferencia $x^2 + y^2 = b^2 - 2c$ y la recta $x + y = -b$.

Por ejemplo, para la ecuación $x^2 + 3x - 10 = 0$ la circunferencia y la recta tienen por ecuación, respectivamente $x^2 + y^2 = 29$ y $x + y = -3$ cuyos puntos de intersección son $A(-5{,}2)$ y $B(2, -5)$ y por tanto las raíces de la ecuación son $x = -5$ y $x = 2$, como se ilustra en la siguiente gráfica.



Gráfica 180: Un algoritmo actual, raíces reales.

Una observación. La condición $b^2 - 2c > 0$, implica la existencia de la circunferencia $x^2 + y^2 = b^2 - 2c$ pero no necesariamente, su intersección con la recta $x + y = -b$. Por ejemplo, para la ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$ se tiene $b^2 - 2c = 6 > 0$ y la circunferencia y la recta existen, sin embargo, no se intersectan, es decir, esta ecuación posee raíces complejas.



Gráfica 181: La circunferencia y la recta no se intersectan.

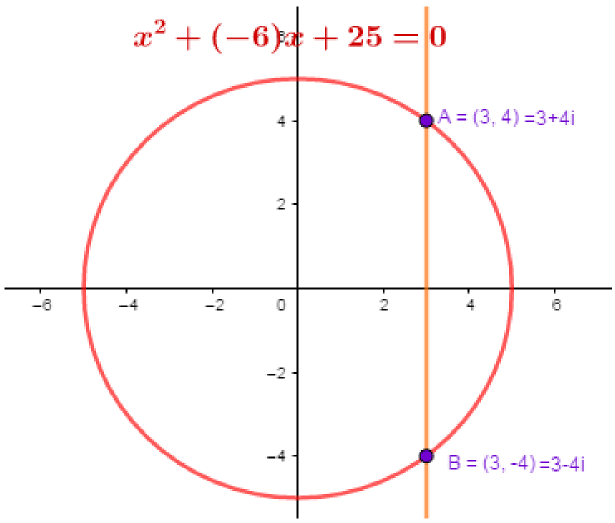
Como es conocido la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ posee raíces reales siempre y cuando $b^2 - 4c \geq 0$.

2.8.4.5.2 Raíces complejas.

Para las raíces complejas ¡Que no se concebían en el tiempo de los babilonios!, podemos proceder de una manera análoga. Si $r + si$ es una solución compleja de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ entonces $x^2 + bx + c = (x - (r + si))(x - (r - si)) = x^2 - 2rx + (r^2 + s^2)$ por lo que $b = -2r$ y $r^2 + s^2 = c$.

En estas condiciones: Si $c > 0$ las raíces, complejas, de la ecuación $x^2 + bx + c = 0$ se pueden encontrar como los puntos de corte de la circunferencia $x^2 + y^2 = c$ y la recta paralela al eje y $x = \frac{-b}{2}$.

Así por ejemplo, para la ecuación $x^2 - 6x + 25 = 0$ la circunferencia y la recta tienen por ecuación, respectivamente, $x^2 + y^2 = 25$ y $x = 3$ cuyos puntos de intersección son $A(3,4)$ y $B(3,-4)$, y por tanto las raíces de la ecuación son $x = 3 + 4i$ y $x = 3 - 4i$ como se ilustra en la siguiente gráfica.



Gráfica 182: Un algortimo actual, raíces complejas.

Nótese que cuando $\sqrt{c} = \frac{b}{2}$ o $\sqrt{c} = \frac{-b}{2}$ entonces la recta $x = \frac{-b}{2}$ es tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = c$ precisamente en el punto $(\frac{-b}{2}, 0)$ y por tanto su abcisa corresponde a una raíz real doble de la ecuación.

2.9 Omar Al Khayyam y la solución geométrica de la ecuación cúbica.

En el siglo XVI, Del Ferro, Tartaglia y Cardano, determinaron una fórmula para hallar las raíces de una ecuación de grado tres y Ferrari encontró otra más compleja para ecuaciones de grado cuatro; sin embargo, métodos geométricos para resolver la ecuación cúbica se conocían desde la antigüedad, en particular, en el siglo XI, el matemático, astrónomo y poeta árabe Omar Al Khayyam consideró algoritmos que utilizaban la intersección de secciones cónicas. En esta actividad se presentarán las ideas del método utilizado por Al Khayyam para resolver la ecuación de grado tres y exponer tres de los catorce casos considerados por este, que no pueden resolverse con el uso de herramientas Euclidianas. En la dirección https://www.GeoGebra.org/m/z9geggke pueden consultarse las construcciones relativas a los 11 casos restantes, considerados por Al Khayyam, así como sus correspondientes demostraciones.

2.9.1 Omar Al Khayyam.

Omar Al Khayyam, *el fabricante de tiendas*, (1048-1131), poeta, matemático y astrónomo, nació en Nishapur, Corazán, actual Irán, y su vida transcurrió entre su dedicación a la poesía y sus intereses científicos por la astronomía y las matemáticas.

En cuanto al ámbito de las matemáticas se refiere, en la literatura se reportan usualmente dos de sus trabajos, *Comentarios sobre las dificultades de los postulados del libro de Euclides* y su principal obra, *Tratado sobre demostraciones de problemas de Álgebra,* escrita alrededor de 1074 (Moreno, 2002). En su Álgebra, presenta soluciones aritméticas y geométricas para las ecuaciones cuadráticas y realiza un estudio pormenorizado de la ecuación cúbica mediante métodos geométricos que utilizan álgebra retórica, en los cuales recurre básicamente a secciones cónicas con lo que se infringe los estándares académicos imperantes de la época con respecto a utilizar únicamente rectas y circunferencias. (Moreno, 2002).

Al Khayyam, realizó una clasificación de las ecuaciones de grado menor o igual a tres en 25 formas diferentes; once de las cuales podían ser resueltas con regla y compas y catorce no podían ser tratados con ayuda exclusiva de los Elementos de Euclides. En este sentido el principal aporte de Al Khayyam consistió en presentar, mediante consideraciones geométricas y utilizando algunas proposiciones de Euclides y Apolonio, la solución de los 14 casos, mediante la intersección de secciones cónicas (Espinosa 2014). Los catorce casos considerados son:

Tabla 1: *Los catorce casos de Omar Al Khayyam*

1.	Cubo de la cosa igual a número	$x^3 = c$
2.	Cubo de la cosa más la cosa igual a número	$x^3 + bx = c$
3.	Cubo de la cosa más número igual a cosa	$x^3 + c = bx$
4.	Cubo de la cosa igual a cosa más número	$x^3 = bx + c$
5.	Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a número	$x^3 + ax^2 = c$
6.	Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa.	$x^3 + c = ax^2$
7.	Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más número.	$x^3 = ax^2 + c$
8.	Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más cosa igual a número.	$x^3 + ax^2 + bx = c$
9.	Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa más número igual a cosa.	$x^3 + ax^2 + c = bx$
10.	Cubo de la cosa más cosa más número igual a cuadrado de la cosa.	$x^3 + bx + c = ax^2$
11.	Cubo de la cosa igual a cuadrado de la cosa más cosa más número.	$x^3 = ax^2 + bx + c$
12.	Cubo de la cosa más cuadrado de la cosa igual a cosa más número	$x^3 + ax^2 = bx + c$
13.	Cubo de la cosa más cosa igual a cuadrado de la cosa más número.	$x^3 + bx = ax^2 + c$
14.	Cubo de la cosa más número igual a cuadrado de la cosa más número.	$x^3 + c = ax^2 + bx$

2.9.2 Solución geométrica de la ecuación cúbica.

En este aparte se considera la solución dada por Al Khayyam, en términos modernos, de tres de los casos enunciados en la tabla anterior.

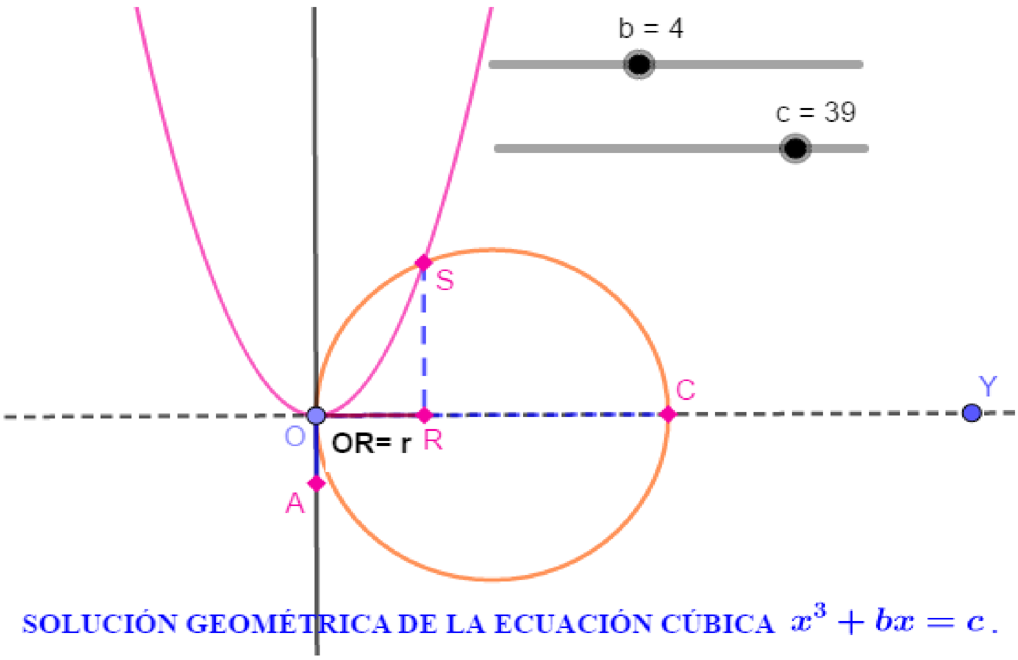
Ilustración 1: Dar una solución geométrica de una ecuación de la forma $x^3 + bx = c$ considerando $b > 0, c > 0$.

El problema consiste en construir un segmento de longitud r a partir de dos segmentos dados de longitudes b y c de manera que se satisfaga la igualdad $r^3 + br = c$.

Se consideran los segmentos MN y EF que representan los valores de b y c, para cada uno de los cuales construimos un deslizador. Para realizar esta construcción Al Khayyam procede de la siguiente manera:

Para representar los valores de b y c, construimos, para cada uno de ellos, un deslizador. De acuerdo a Al Khayyam la construcción procede de la siguiente manera:

1. Se trazan dos rectas perpendiculares en un punto O.
2. Sobre una de estas rectas se construye un segmento $OA = \sqrt{b}$ y sobre la otra un segmento $OC = \frac{c}{b}$.
3. Se construye la circunferencia de diámetro OC.
4. Se construye la parábola de vértice O y longitud del lado recto es $OA = \sqrt{b}$, (Ver ilustración 2, sección 2.4).
5. Si S es la intersección de la parábola con la circunferencia y R es el pie de la perpendicular al diámetro desde S entonces $= r$ es una solución de la ecuación.



Gráfica 183: La solución de la ecuación $x^3 + bx = c$.

Podemos demostrar que $= r$ es una solución de la ecuación $x^3 + bx = c$ de la siguiente manera. Establecemos un sistema de coordenadas rectangulares con origen en O eje x sobre OC y eje y sobre OA.

En estas condiciones el punto F foco de la parábola, tiene por coordenadas, $(0, \frac{\sqrt{b}}{4})$, las coordenadas del punto C son $(\frac{c}{b},0)$ y el centro de la circunferencia de diámetro OC es $M\,(\frac{c}{2b},0)$, así la parábola de vértice O, lado recto AO=$\sqrt{b}$ y eje, el eje y tiene por ecuación

$$x^2 = \sqrt{b}y$$

y la ecuación de la circunferencia es

$$\left(x - \frac{c}{2b}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{c}{2b}\right)^2.$$

Puesto que el punto $R(r,s)$ está sobre la circunferencia y la parábola entonces

$$\left(r - \frac{c}{2b}\right)^2 + s^2 = \left(\frac{c}{2b}\right)^2 \text{ y } r^2 = \sqrt{b}s.$$

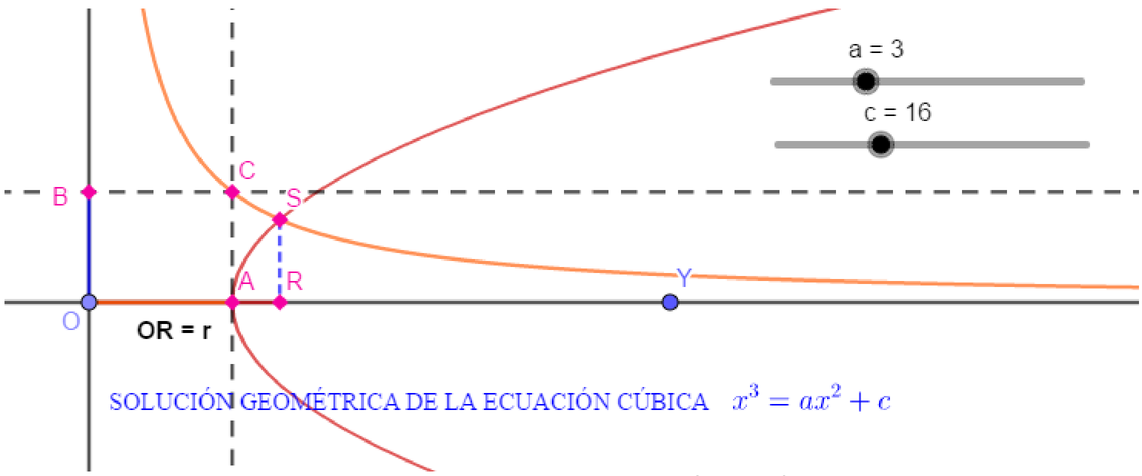
Al eliminar s de este par de ecuaciones se obtiene $r^3 - \frac{c}{b}r + \frac{r^4}{b} = 0$ o de manera equivalente $r^3 + br = c$ y por tanto $x = r$ es una raíz de la ecuación $x^3 + bx = c$

Ilustración 2: Dar una solución geométrica de una ecuación de la forma $x^3 = ax^2 + c$ en la cual $a > 0, c > 0$.

El problema consiste en construir un segmento de longitud r a partir de dos segmentos dados de longitudes a y c de manera que se satisfaga la igualdad $r^3 = ar^2 + c$.

Se definen, para representar los valores de a y c, dos deslizadores. Para realizar esta construcción Al Khayyam procede de la siguiente manera:

1. Se construye un segmento OA de longitud $OA = a$.
2. Se traza por O una perpendicular a OA en A y sobre ella un segmento OB tal que $OB = \sqrt{\frac{c}{a}}$.
3. Trazamos por A una paralela a OB y por B una paralela a OA sea C su punto de corte.
4. Construimos la hipérbola equilátera de asíntotas OA y OB, que pase por C. (Ver ilustración 6, sección 2.4).
5. Construimos la parábola de eje OA, vértice A y lado recto a.
6. Si S es la intersección de la hipérbola con la parábola y R es la proyección perpendicular a OA desde S entonces $=\ r$ es una solución de la ecuación.



Gráfica 184: La slución de la ecucación $x^3 = ax^2 + c$.

Para demostrar que $=\ r$ es una solución de la ecuación $x^3 = ax^2 + c$ consideramos un sistema de coordenadas cartesianas con origen en O eje x sobre OA y eje y sobre OB.

En estas condiciones los puntos A y C tienen por coordenadas $(a,0)$, $\left(\sqrt{\frac{c}{a}}, a\right)$ respectivamente, la parábola de vértice A, lado recto a y eje, el eje x tiene por ecuación

$$y^2 = a(x - a)$$

La hipérbola equilátera requerida tiene por ecuación $xy = k$ y debe pasar por $C\left(\sqrt{\frac{c}{a}}, a\right)$ por lo que $k = \sqrt{ac}$ y así la ecuación de la hipérbola es $xy = \sqrt{ac}$.

Puesto que el punto $S(r, s)$ está sobre la hipérbola y la parábola entonces

$$rs = \sqrt{ac} \ y \ s^2 = a(r - a)$$

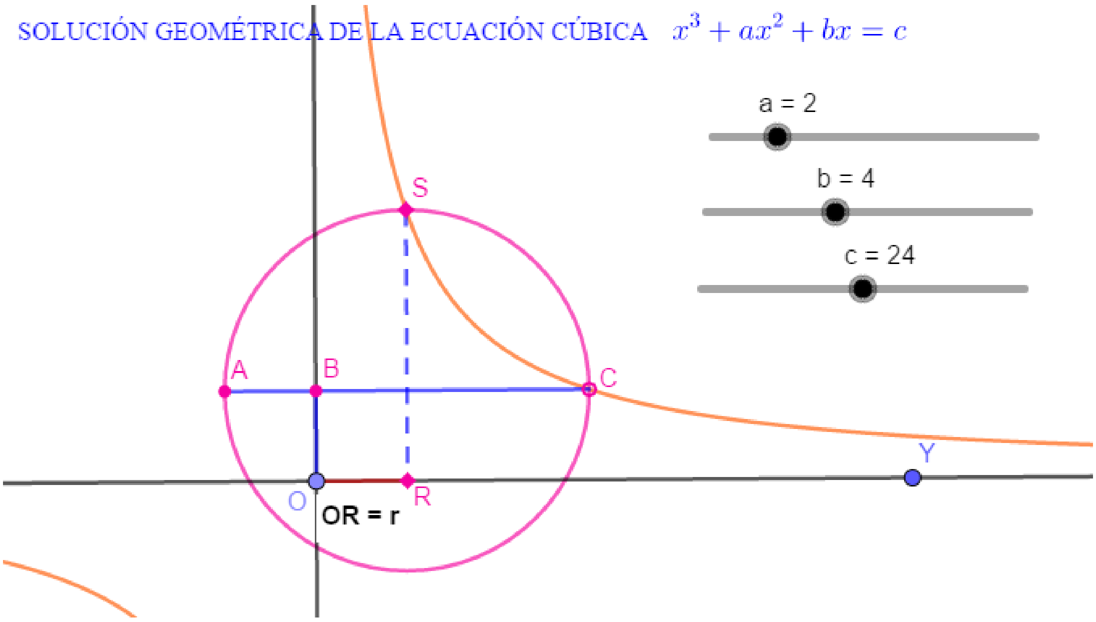
Al eliminar s de este par de ecuaciones se obtiene $\frac{ac}{r^2} = a(r - a)$ o de manera equivalente $r^3 = ar^2 + c$y por tanto $x = r$ es una raíz de la ecuación $x^3 = ax^2 + c$.

Ilustración 3: Dar una solución geométrica de una ecuación de la forma $x^3 + ax^2 + bx = c$ con $a > 0, b > 0, c > 0$.

El problema consiste en construir un segmento de longitud r a partir de tres segmentos dados de longitudes a, b y c de manera que se satisfaga la igualdad $r^3 + ar^2 + br = c$.

Se construyen tres deslizadores para representar los valores de a, b y c. Para realizar esta construcción Al Khayyam procede de la siguiente manera:

1. Traza dos rectas perpendiculares en un punto O.
2. Sobre una de estas rectas construye un segmento OB talque $OB = \sqrt{b}$.
3. Por B traza una paralela a la otra recta y sobre ella selecciona dos puntos A y C colineales con B, A a la izquierda de B y C a la derecha de B tales que $BA = a$ y $BC = \frac{c}{b}$.
4. Traza la circunferencia de diámetro AC.
5. Construye la hipérbola equilátera de asíntotas OB y OD, que pase por C. (Ver ilustración 6, sección 2.4).
6. Si S es la segunda intersección de la hipérbola con la circunferencia y R es la proyección perpendicular a OD desde S entonces $=\ r$ es una solución de la ecuación.



Gráfica 185: La solución de la ecuación $x^3 + ax^2 + bx = c$.

Podemos demostrar que $=\ r$ es una raíz de la ecuación $x^3 + ax^2 + bx = c$ de la siguiente manera. Se establece un sistema de coordenadas cartesianas con origen en O, eje x sobre OD y eje y sobre OB.

De las consideraciones anteriores se sigue que las coordenadas de los puntos A, B, C son respectivamente $(-a, \sqrt{b}), (0, \sqrt{b}), (\frac{c}{b}, \sqrt{b})$. El centro M de la circunferencia de diámetro $AC = \frac{c+ab}{b}$ es $(\frac{c-ab}{2b}, \sqrt{b})$, por lo que la ecuación de esta circunferencia es

$$(x - \frac{c-ab}{2b})^2 + (y - \sqrt{b})^2 = (\frac{c+ab}{2b})^2.$$

La hipérbola equilátera requerida tiene por ecuación $xy = k$ y debe pasar por $C(\frac{c}{b}, \sqrt{b})$ por lo que $k = \frac{c}{\sqrt{b}}$ y así la ecuación de la hipérbola es $xy = \frac{c}{\sqrt{b}}$.

El punto $R(r, s)$ está sobre la hipérbola y la circunferencia entonces

$$(r - \frac{c-ab}{2b})^2 + (s - \sqrt{b})^2 = (\frac{c+ab}{2b})^2, \quad rs = \frac{c}{\sqrt{b}}$$

y eliminando s de estas igualdades, resulta, la ecuación de cuarto grado en r,

$$br^4 + (ab^2 - bc)r^3 + (b^3 - abc)r^2 - 2b^2cr + bc^2 = 0$$

Pero la hipérbola y la circunferencia se cortan en R y en C luego, la abscisa de C satisface esta ecuación, por tanto la ecuación tiene como factor a $r - \frac{c}{b}$ y al efectuar la correspondiente división se obtiene $b^2r^3 + ab^2r^2 + b^3r - b^2c = 0$ es decir $r^3 + ar^2 + br - c = 0$ y por tanto $x = r$ es una raíz de la ecuación $x^3 + ax^2 + bx = c$.

Observaciones complementarias

En esta sección se presentan algunas observaciones que complementan lo considerado en las diferentes secciones.

a. En la escuela, en general, se considera que el mundo de la geometría es el de las representaciones geométricas de figuras que describen: puntos, rectas, triángulos, circunferencias y demás, y en el mundo del álgebra se piensa en objetos tales como: variables, polinomios, ecuaciones, raíces y otros; y estos mundos se consideran separados uno del otro, lo cual no necesariamente es correcto; GeoGebra es una muestra de la interrelación entre estas dos áreas, toda relación geométrica tiene una contrapartida algebraica y recíprocamente.

b. Para profundizar en GeoGebra, conocer su desarrollo, consultar foros, wikis y otros, lo adecuado es consultar la página oficial: www.GeoGebra.org. Complementariamente, existen otros sitios web con diversas construcciones realizadas con GeoGebra, clasificadas temáticamente y preparadas para usar en nuestras clases. Uno de los más destacados es el Proyecto Gauss del Instituto Nacional de Tecnologías Educativas y de Formación del Profesorado, en España (Proyecto Gauss, 2012). Los Institutos GeoGebra pueden ser un buen punto de partida para encontrar más sitios. Por ejemplo, en Ibagué y en Cali se tienen sedes, a nivel nacional, de Institutos GeoGebra. Adicionalmente a lo anterior, en la red se encuentran disponibles numerosas construcciones elaboradas por personas interesadas en la utilización pedagógica de este software que Ud. puede adaptar, de acuerdo a sus necesidades en el aula.

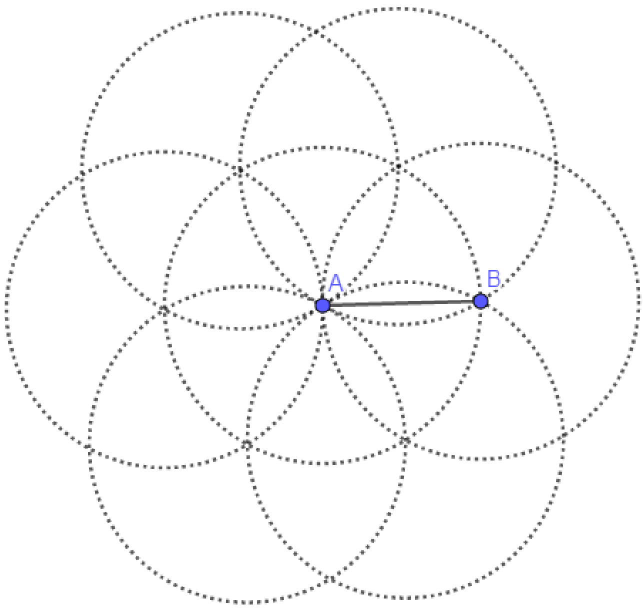
c. Colega y amigo, se espera que, con el uso de GeoGebra, Ud. se vea inmerso en tareas en las que asuma el papel del alumno que aprende matemáticas. Esto puede ser, hasta cierto punto novedoso, porque al utilizar un software, posiblemente, diferente a los que utilizó en su época de estudiante, se sienta en un terreno desconocido. Pero, a su vez, el mismo aprendizaje de la matemática le resulte motivador y desafiante. En este sentido, consideramos que es importante promover vivencias de aprendizaje mediado por la tecnología en los docentes, porque de lo contrario no es razonable pretender que más adelante el docente sea capaz de generar propuestas didácticas que utilicen las TIC, asentadas en una metodología de trabajo que les resulta original, si ellos nunca la han experimentado desde el lugar del estudiante. Se puede afirmar así, que el profesor vive un proceso de recreación de la matemática a partir de la forma en que es ofrecida al alumno, desde la posibilidad de exploración y reconstrucción, y esto es un factor convincente para luego considerar que el uso adecuado de las TIC en las propuestas del aula es capaz de generar oportunidades de aprendizaje novedosas y por ello vale la pena esforzarse en su incorporación.

d. Por último, aunque este texto puede ser utilizado por cualquier persona interesada en conocer y experimentar con GeoGebra, se pretende que sea útil fundamentalmente para docentes en formación y en ejercicio y aunque su objetivo es ilustrar el uso del software, Ud. no debe olvidar que lo esencial es su utilización didáctica y por ello, si no es un usuario asiduo de la tecnología, debe tener presente que la calidad de su propuesta pedagógica no se basa únicamente en el dominio de la herramienta y los docentes que sí lo son, deben recordar que con ella puede complementar la organización de sus actividades docentes, desde su dimensión didáctica, puesto que de acuerdo a la Unesco (2008), "Los docentes deben tener habilidades en TIC y conocimiento de los recursos Web, necesarios para hacer uso de las TIC en la adquisición de conocimientos complementarios sobre sus asignaturas, además de la pedagogía, que contribuyan a su propio desarrollo profesional".

Ejercicios propuestos

En esta sección se proponen algunos problemas para que sean resueltos con el uso de las herramientas que trae incorporadas GeoGebra y que se espera sean adecuados para afianzar el dominio de las mismas.

1. Construir un rectángulo, un rombo y un paralelogramo.
2. Repetir estas construcciones sin la utilización de la herramienta paralela.
3. Trazar un cuadrado, un rectángulo, un rombo y un paralelogramo a partir de una de sus diagonales. Calcule el perímetro y el área de cada uno de estos objetos y coloque un texto dinámico que permita observar la variación del perímetro y el área al mover los objetos.
4. Construir tres triángulos equiláteros que visualmente parezcan equiláteros pero que verdaderamente solo uno de ellos lo sea.
5. Repetir el ejercicio anterior con ocho cuadrados.
6. Trazar la mediatriz de un segmento sin la utilización de las herramientas mediatriz y punto medio.
7. Construir la bisectriz de un ángulo sin la utilización de la herramienta bisectriz.
8. A partir de una circunferencia trazar un triángulo equilátero de manera que tenga como vértices el centro de la circunferencia y dos puntos de la circunferencia.
9. Dada una recta y dos puntos A y B fuera de ella, determinar sobre la recta un punto C tal que el triángulo formado por estos puntos sea isósceles en A. Discuta la existencia y unicidad de este punto.
10. Dado un polígono cualquiera construir otro polígono que tenga la misma área, pero un lado menos.
11. A partir de un segmento AB repita la siguiente figura de manera que se conserve su estructura al mover A o B.

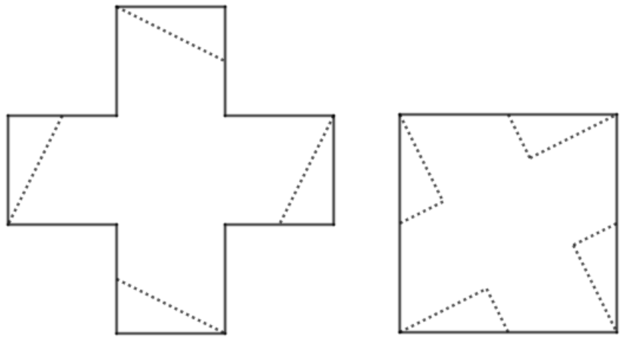


Gráfica 186: Una figura simétrica creada a partir de un segmento

12. La cadena de almacenes éxito desea construir, en la ciudad de Pasto, un supermercado a los barrios Santa Mónica, Miraflores y Chile. ¿Cuál es el sitio adecuado para que el supermercado esté a la misma distancia de los tres barrios y de esta forma el coste del suministro sea mínimo para la cadena?
13. La Alcaldía municipal de Pasto desea construir una fuente que se encuentre a la misma distancia de la calle 16 y la carrera 27. ¿DÓnde se debe ubicar la fuente?
14. Dada una circunferencia, y un punto en su exterior construir una circunferencia de centro en este punto y tangente a la circunferencia.
15. Dada una circunferencia, un punto sobre la circunferencia y un punto en su interior construir la circunferencia que pase por el punto interior y sea tangente a la circunferencia dada en el punto dado de la circunferencia.
16. Dada una circunferencia de centro C y dos puntos A y B sobre ella, hallar el lugar geométrico del circuncentro (incentro, baricentro) del triángulo cuando el punto B se mueve sobre la circunferencia.
17. ¿Es posible construir infinitos rectángulos que posean un área dada A, por ejemplo 16 u^2?
18. A partir de dos segmentos dados construir un rectángulo y un rombo de manera que el primer segmento sea un lado y el segundo la diagonal. ¿Existe alguna relación entre las áreas de estas figuras?
19. Dada una circunferencia, un punto A sobre ella y un punto P en el interior, diferente del centro. Construya la recta l perpendicular al segmento AP en el punto A. Hallar el lugar geométrico de la recta l cuando el punto A se mueve sobre la circunferencia. ¿Qué sucede si el punto P es exterior?
20. Considere una circunferencia de centro O y radio OB, A un punto sobre la circunferencia y M un punto del radio OB. Sea P el punto de intersección del segmento OA y de la mediatriz del segmento AM. Hallar el lugar geométrico descrito por el punto P, cuando A recorre la circunferencia. Demostrar que P es un punto de la cónica que se obtiene.
21. Sean l y m dos rectas dadas, que se cortan perpendicularmente en un punto O. Sea A un punto que se encuentra a una distancia dada de O. Trazar las tangentes desde el punto O a todas las circunferencias que pasan por A y su centro está en OA. Determinar el lugar geométrico de los puntos de tangencia.
22. Considere una recta dada y un punto A qué, no pertenece a la recta. Hallar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias que pasan por el punto A y son tangentes a la recta.
23. Hallar el lugar geométrico de los centros de los rectángulos inscritos en un triángulo dado. Con base en la observación de la figura construida enuncie, dos propiedades de este lugar. Demuestre sus afirmaciones.
24. Construya una tangente a una circunferencia en un punto de la misma. Por un punto exterior a la circunferencia trace una perpendicular a la tangente y llame P el pie de esta perpendicular. Trace una recta cualquiera y halle el lugar geométrico de la reflexión de P sobre la recta cuando se mueve el punto de tangencia sobre la circunferencia.
25. Construya una tangente a una circunferencia en un punto de la misma. Por un punto exterior a la circunferencia trace una perpendicular a la tangente y llame P el pie de esta perpendicular. Tome un punto cualquiera y halle el lugar geométrico del simétrico de P respecto del punto seleccionado cuando se mueve el punto de tangencia sobre la circunferencia.
26. Construya una tangente a una circunferencia en un punto de la misma. Por un punto exterior a la circunferencia trace una perpendicular a la tangente y llame P el pie de esta perpendicular. Halle el lugar geométrico del inverso de P respecto de la circunferencia, cuando se mueve el punto de tangencia sobre la circunferencia.
27. Considere un segmento AB, un punto C en él y construir con longitudes AC BC triángulos equiláteros ACE y BCD sobre los lados opuestos del segmento. Hallar el lugar geométrico del punto medio del segmento DE cuando el punto C se mueve sobre el segmento AB.
28. Considere una circunferencia y un punto sobre ella. Hallar el lugar geométrico de la reflexión

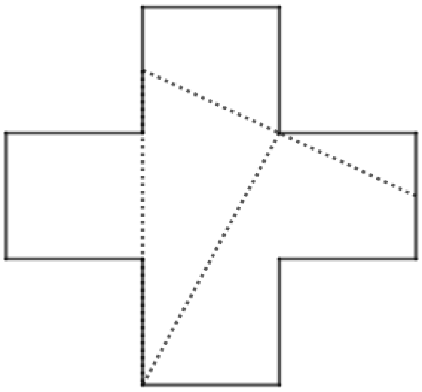
sobre la recta tangente a la circunferencia en un punto de la misma.

29. Hallar el lugar geométrico de una circunferencia que rueda exteriormente, sin deslizarse, sobre otra circunferencia. Considere diferentes casos de acuerdo con los radios de las mismas.
30. Hallar el lugar geométrico de una circunferencia que rueda interiormente, sin deslizarse, sobre otra circunferencia. Considere diferentes casos de acuerdo con los radios de las mismas.
31. Construir una parábola dados el foco y dos puntos de la misma.
32. **El Teorema de Ceva**. Utilizar un texto dinámico para verificar que, si AP, BQ y CR son tres cevianas concurrentes de un triángulo ABC, entonces $\frac{AR}{RB}\frac{BP}{PC}\frac{CQ}{QA} = 1$. Compruebe que al mover los vértices del triángulo la relación se mantiene.
    Una **ceviana** es un segmento que, une un vértice del triángulo con un punto del lado opuesto.
33. Si O es el punto de concurrencia de las cevianas del triángulo ABC, verificar que $\frac{OP}{AP} + \frac{OQ}{BQ} + \frac{OR}{CR} = 1$.
34. Dadas dos mediatrices l y m y un vértice A de un triángulo ABC determinar los otros dos vértices.
35. Dadas las bisectrices de los ángulos A y B de un triángulo ABC, determinar el triángulo.
36. Sea P un punto sobre la circunferencia circunscrita a un triángulo ABC. Verifique que los pies de las perpendiculares trazadas desde P a los lados del triángulo son colineales. Esta recta se llama **recta de Simson**.
37. Sea P un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita a un triángulo. Verificar que los puntos simétricos del punto P, con respecto a cada uno de los lados del triángulo, son colineales. Esta recta, se denomina **recta de Steiner,** verificar además que esta recta es paralela a la recta de Simson.
38. Verificar el **Teorema de Pascal.** En un hexágono inscrito en una cónica, los tres puntos en los que se intersecan los lados opuestos son colineales. Esta recta se llama **Recta de Pascal.**
39. Verificar el **Teorema de Brianchon.** En un hexágono circunscrito en una cónica, las rectas que unen los pares de lados opuestos son concurrentes. tres puntos en los que se intersecan los lados opuestos son concurrentes. Este punto se denomina **Punto de Brianchon**.
40. Construir un triángulo, dados un vértice y el punto medio del lado opuesto.
41. Construir un triángulo, dados un vértice y su mediana.
42. Dado un ángulo y un punto en su interior construir un segmento talque el punto dado sea el punto medio del segmento.
43. Considere un cuadrilátero cualquiera. Verifique que los puntos medios de los lados del cuadrilátero forman un paralelogramo, que el perímetro del paralelogramo es igual a la suma de las longitudes de las diagonales del cuadrilátero y que el área del paralelogramo es la mitad del área del paralelogramo. Compruebe que al mover los vértices del cuadrilátero la relación se mantiene.
44. Sean H y O el ortocentro y circuncentro de un triángulo ABC, verificar que $AH^2 + BC^2 = 4OA^2$.
45. Dada una circunferencia, construir un cuadrilátero cuyos lados sean tangentes a la circunferencia y verificar que: La suma de las longitudes de los pares de lados opuestos son iguales.
46. Construir (consultar) una disección de un cuadrado en cuatro partes de manera que con ellas se configure un triángulo isósceles e implementarlo en GeoGebra.
47. Construir (consultar) una disección de un hexágono regular en dos partes de manera que con ellas se configure un paralelogramo e implementarlo en GeoGebra.
48. Construir (consultar) una disección de un pentágono regular en seis partes de manera que con ellas se configure un triángulo isósceles e implementarlo en GeoGebra.
49. Consultar sobre disección de figuras geométricas e implementar en GeoGebra por lo menos tres de ellas.
50. El ***Problema Hindú*** consiste en dividir la cruz griega en cinco partes de manera que con ellas se configure un cuadrado, como se ilustra en la siguiente gráfica. Implementar esta descomposición en GeoGebra.



Gráfica 187: El problema hindú

51. En el Siglo XIX se plantea el problema de dividir la cruz griega en cuatro partes de manera que con ellas también se configure un cuadrado. H. Dudeney resolvió este problema en este siglo, consultar esta disección e implementarla en GeoGebra.
52. Diseñar (consultar) otras divisiones de la cruz griega en cuatro o cinco partes de manera que con ellas se configure un cuadrado.
53. La disección de la cruz griega que se ilustra a continuación puede reconfigurarse para construir un cuadrado, un triángulo rectángulo, un romboide, un trapecio isósceles, un pentágono y un trapezoide.



Gráfica 188: La disección de la cruz griega

Implementar cada una de estos casos en GeoGebra.

54. Consulte los métodos, diseñados por Al Khayyam u otros geómetras, para resolver una ecuación de segundo grado e implemente, por lo menos tres, en GeoGebra.
55. Construir una elipse y una hipérbola, conocidas las longitudes a y b de sus dos semiejes.
56. Construir una elipse y una hipérbola, conocidas las longitudes de su semieje a y de su semidistancia focal c.
57. Construir una parábola conocidos el vértice, el eje de la parábola y un punto de ella.
58. Construir una parábola conocidos el vértice, el eje de la parábola y una tangente.
59. Consulte la demostración del caso 10, del Problema de Apolonio, realizada por Jacob Steiner (1796-1863) que utiliza inversión e impleméntela en GeoGebra.
60. Seleccione tres de los casos, diferentes a los tratados en el texto, considerados por Al Khayyam en la tabla de la sección 2.8 e impleméntelos en GeoGebra.
61. Considere por lo menos cuatro maneras, diferentes a las tratadas en el texto, para construir un cuadrado sin el uso de la herramienta polígono regular e impleméntelas en GeoGebra.
62. Dado un cuadrado, una manera de construir, dentro de él, un polígono cuya área sea la mitad consiste en tomar los puntos medios de dos lados opuestos y unirlos con un segmento. Diseñar por lo menos 10 procedimientos que consigan el mismo resultado.

Referencias bibliográficas

Adams, L. y Aguilar, A. (2006). Consecuencias de las TIC en la educación. Universidad de las Américas. Puebla. México.

Boyer, C. B. (1986). Historia de la Matemática. Madrid: Alianza.

Llamas, I., Carrillo, A., Parrado, E. y Chacón, J. M. (2017). Materiales GeoGebra. Curso virtual.

Dorrie, H. (1965), 100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution. Dover Publications. New York.

Dudeney, H. E. (1907). The Canterbury Puzzles. London: Nelson. Reprinted Mineola, NY: Dover, 1958. En Project Gutenberg: http://www.gutenberg.org/ebooks/27635 En archive.org: https://archive.org/stream/117770747#page/n5/mode/2up

Espinosa M. C. (2014). La Solución de la ecuación de tercer grado según Omar Al Khayyam. Potencialidades de su uso en la formación profesional de un profesor de matemáticas. Universidad del Valle.

Eves, H. (1985). Estudio de las Geometrías (Tomo I). México, Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

GeoGebra en la Enseñanza de las Matemáticas. (2012). http://GeoGebra.es/cvg/index.html

GeoGebra. (2019). http://www.GeoGebra.org

Landaverde, F. J. (1968). Curso de geometría. Bogotá, Editorial Andes.

Loomis, E. (1968). The Pythagorean proposition. Recuperado de https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED037335.pdf

Luque, C. J., Mora, L. C., Torres, J. A. (2005). Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia. Disponible en Internet en:

https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Moreno, R. (2002). Omar Jayyam, Poeta y Matemático. Nívola. España. proyecto1

Soto, F. y Mosquera, S. (2017). La División de un segmento en partes iguales. (Documento inédito). Universidad de Nariño.

UNESCO. (2008). Estándares de competencia en TIC para docentes. Recuperado de: http://www.eduteka.org/pdfdir/UNESCOEstandaresDocentes.pdf

Índice de gráficas

Índice de tablas

El autor

Saulo Mosquera López

Licenciado en Matemáticas y Física de la Universidad de Nariño. Realizó estudios de especialización en "Enseñanza de la Matemática" en esta institución y de maestría en "Matemáticas" en la Universidad del Valle. Entre 2009 y 2017 fue director del Dpto. de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño y Coordinador del grupo de investigación GESCAS. Se desempeñó como docente de tiempo completo de dicha unidad académica entre 1978 y 2017, año en el cual se pensionó en la categoría de profesor Titular. Autor de textos y artículos relacionados con matemáticas y/o Educación Matemática, en el año 2021, en colaboración con el Dr. Gustavo Marmolejo, publicaron el texto "Razonamiento cuantitativo y demanda Semiótico – Cognitiva en las guías de orientación de las pruebas Saber"; es investigador del grupo GESCAS en la línea "Comunicación, transformación y objetivación de objetos vinculados a registros semióticos bidimensionales". Considera como objetos de interés los fenómenos que subyacen a la utilización de Software educativo para promover el desarrollo de pensamiento matemático en el aula. Ha ejercido como Par Académico del CNA para la evaluación de programas académicos, de Pregrado y Posgrado, relacionados con Educación Matemática.

Editorial
Universidad de **Nariño**

Fecha de publicación: 24 de marzo de 2021
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Construcciones geométricas con GeoGebra

GeoGebra es un software de código abierto y gratuito para apoyo en la enseñanza de las matemáticas, cuyo desarrollo inició en el 2001 y, en la actualidad, continúa bajo la orientación de un grupo de desarrolladores de diferentes países.

El objetivo central de este texto es presentar un conjunto de ilustraciones que permitan al lector, utilizar de manera apropiada las herramientas básicas de GeoGebra 2D. Está constituido básicamente por dos capítulos, a lo largo de los cuales se presentan ejemplos que permiten conocer y afianzar las diferentes herramientas de este software. El primer capítulo, se desarrolla en once secciones, y presenta las herramientas fundamentales de GeoGebra, su utilización y potencialidad, sin desconocer que no representa una descripción exhaustiva del mismo. El segundo, contiene nueve secciones y en él se desarrollan, 68 construcciones de geometría con GeoGebra, que abarcan diferentes temáticas de esta área de las matemáticas. El texto finaliza con una sección de problemas propuestos, en las diferentes temáticas tratadas, que se espera sean resueltos por el lector para complementar lo expuesto y afianzar de modo conceptual lo desarrollado en el mismo.

El texto puede ser utilizado, en diferentes niveles educativos, por cualquier persona interesada en conocer y experimentar con GeoGebra, pero se espera que sea útil fundamentalmente para docentes en formación y en ejercicio.

ISBN 978-628-7509-23-8

9 786287 509238

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Editorial
Universidad de **Nariño**