# INGENIERÍA ECONÓMICA

## ¡PARA TODOS!

Edinson Ortíz Benavides

Editorial
Universidad de Nariño

Editorial
Universidad de **Nariño**

# Ingeniería Económica
## ¡Para Todos!

# Ingeniería Económica
## ¡Para Todos!

Edinson Ortiz Benavides

Editorial
Universidad de Nariño

Ortíz Benavides, Edinson
Ingeniería económica ¡ para todos !/ Edinson Ortíz Benavides.—1ª.-ed.-Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2021.
309p.

Incluye bibliografía
ISBN 978-958-5123-51-9 (digital)
ISBN 978-958-5123-50-2 (Impresa)

1. Ingeniería económica 2. Matemáticas financieras 3. Análisis de costos 4. Evaluación financiera.

332.0151 O775 – SCDD – ed.22 Biblioteca Alberto Quijano

## Ingeniería Económica ¡Para Todos!

© Edinson Ortiz Benavides
edinsoneconomia@gmail.com



**ISBN:** 978-958-5123-51-9
Primera Edición

**Corrección de Estilo:** Vanesa Bolaños
**Diseño y Diagramación:** Cidia Fernanda Rodríguez L.
Centro de Publicaciones Universidad de Nariño

Fecha de Publicación: 23 de noviembre 2020
San Juan de Pasto-Nariño-Colombia

*A la memoria de mis padres,*
*Nicolas Ortiz y Porfilia Benavides*

# Agradecimientos

Agradezco a Dios en primer lugar, a mi esposa e hijas por su apoyo incondicional. A Luz Eliana Valencia Valencia por su acompañamiento sincero y haber creído en este proyecto.

# CONTENIDO


**PRÓLOGO** 18
**INTRODUCCIÓN** 21

**1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES** 23

**PREÁMBULO** 23

1.1 Valor del dinero en el tiempo 24
1.2 El interes 25
1.3 Equivalencia 26
1.4 Diagramas de lineas de tiempo 26

**RESUMEN CAPÍTULO 1** 27
**EJERCICIOS CAPÍTULO 1** 28

**2. NOCIONES DE MATEMÁTICAS BÁSICAS** 30

**PREÁMBULO** 30

2.1 Orden de las operaciones 31
2.2 Potenciación, Radicación y Logaritmación 32
2.3 Paréntesis 33
2.4 Redondeo de decimales 33
2.5 Operaciones con decimales utilizando potencias 34
2.6 Calculadoras 35
2.7 Conceptos de Álgebra 36
2.8 La Ecuación 37
2.9 Razón 39
2.10 Proporciones 41
2.11 Progresión Aritmética 42
2.12 Progresión Geométrica 44

**RESUMEN CAPÍTULO 2** 47
**EJERCICIOS CAPÍTULO 2** 48

**3. EL INTERÉS SIMPLE** 52

**PREÁMBULO** 52

3.1 Definiciones 53
3.2 El Monto a Interés Simple 56
3.3 El Interés Exacto e Interés Ordinario 58
3.4 Tiempo Exacto y Tiempo Aproximado 59
3.5 La Práctica Comercial 61
3.6 Valor Actual a Interés Simple 66
3.7 Cálculo de la Tasa de Interés Simple 66
3.8 Cálculo del Tiempo de la Negociación 68
3.9 El Descuento Bancario, Interés Adelantado 69
3.10 Equivalencia entre Interés Simple y Descuento Bancario 71
3.11 Las Ecuaciones de Valor a Interés Simple 74
3.12 Análisis de Inversión a Interés Simple 78

**RESUMEN CAPÍTULO 3** 85
**EJERCICIOS CAPÍTULO 3** 86

**4. EL INTERÉS COMPUESTO** 89

**PREÁMBULO** 89

4.1 Definiciones 90
4.2 El Monto a Interés Compuesto 92
4.3 Interés para Fracciones del Periodo Básico 97
4.4 Monto a Tasas Variables de Interés 99
4.5 Valor Actual a Interés Compuesto 100
4.6 Cálculo de la Tasa de Interés Compuesta 103
4.7 Cálculo del Número de Periodos 104
4.8 Tasas de Interés Efectivas, Anticipadas y Vencidas 106
4.9 Ecuaciones de Valor a Interés Compuesto 118
4.10 Análisis de Inversiones 121

**RESUMEN CAPÍTULO 4** 126
**EJERCICIOS CAPÍTULO 4** 127

| | | | |
|---|---|---|---|
| **5.** | **SERIES FINANCIERAS FIJAS: ANUALIDADES** | | **131** |
| | **PREÁMBULO** | | **131** |
| | 5.1 | Definiciones | 132 |
| | 5.2 | Anualidades Vencidas | 134 |
| | 5.3 | Anualidades Indefinidas o Perpetuas | 154 |
| | 5.4 | Anualidades Anticipadas | 157 |
| | 5.5 | Anualidades Diferidas | 160 |
| | **RESUMEN CAPÍTULO 5** | | **164** |
| | **EJERCICIOS CAPÍTULO 5** | | **165** |
| **6.** | **SERIES FINANCIERAS VARIABLES: GRADIENTES** | | **168** |
| | **PREÁMBULO** | | **168** |
| | 6.1 | Definiciones | 169 |
| | 6.2 | Gradiente Aritmético Vencido | 171 |
| | 6.3 | Gradiente Aritmético Infinito | 176 |
| | 6.4 | Gradiente Aritmético Anticipado | 178 |
| | 6.5 | Gradiente Aritmético Diferido | 180 |
| | 6.6 | Gradiente Geométrico o Exponencial | 183 |
| | 6.7 | Gradiente Geométrico Infinito | 189 |
| | 6.8 | Gradiente Escalonado o en Escalera | 191 |
| | **RESUMEN CAPÍTULO 6** | | **198** |
| | **EJERCICIOS CAPÍTULO 6** | | **201** |
| **7.** | **SALDOS Y AMORTIZACIONES** | | **204** |
| | **PREÁMBULO** | | **204** |
| | 7.1 | Definiciones | 205 |
| | 7.2 | Saldos de Deuda | 205 |
| | 7.3 | Sistemas de Amortización | 218 |
| | **RESUMEN CAPÍTULO 7** | | **232** |
| | **EJERCICIOS CAPÍTULO 7** | | **233** |

**8. TASAS ESPECIALES DE INTERÉS** **236**

**PREÁMBULO** **236**

8.1 Definiciones 237

8.2 Tasas Especiales 237

8.3 Tasas Especiales Compuestas 250

**RESUMEN CAPÍTULO 8** **258**

**EJERCICIOS CAPÍTULO 8** **259**

**9. EVALUCIÓN DE ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN** **262**

**PREÁMBULO** **262**

9.1 Definiciones 263
9.2 Tasa de Descuento 264
9.3 Valor Actual Neto (VAN) 264
9.4 Tasa Interna de Retorno (TIR) 266
9.5 Costo Anual Uniforme Equivalente (CAUE) 270
9.6 Relación Beneficio Costo (RCB) 274
9.7 Ordenamiento de Proyectos 275
9.8 TIR Verdadera (TIRV) 280
9.9 Análisis de Sencibilidad del Proyecto 282

**RESUMEN CAPÍTULO 9** **284**
**EJERCICIOS CAPÍTULO 9** **286**

**10. INGENIERÍA ECONÓMICA DE SOFTWARE** **289**

**PREÁMBULO** **289**

10.1 Definiciones 290
10.2 Tablas Financieras 290
10.3 Calculadoras Científicas 291
10.4 Calculadoras Financieras 291

| | | |
|---|---|---|
| 10.5 | Aplicativos Informáticos Para Móviles (APP) | 291 |
| 10.6 | Excel | 292 |
| 10.7 | Sofware Especializado | 292 |

**RESUMEN CAPÍTULO 10** **293**

**RESPUESTA A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS** **294**

*Respuesta Ejercicios Impares* 294

*Respuesta Ejercicios Pares* 300

**BIBLIOGRAFÍA** **306**

# PRÓLOGO

¿Cuál es el valor futuro de una inversión? ¿Cuál es el costo de oportunidad de estudiar una profesión? ¿Qué profesión debes escoger? ¿debes comprar o no una vivienda? Estas y muchas otras preguntas tienen que ver con la ingeniería económica. Esta disciplina enseña a pensar como tomar decisiones de inversión. Para algunas personas los interrogantes planteados no tienen solución, sin embargo, con la aplicación de las ma-temáticas a los temas económicos se puede decir que la afirmación es incorrecta porque siempre existe una solución. Quizás, las respuestas encontradas se tornen más complejas debido a la incertidumbre y el alto riesgo asociado en cada una de ellas, pero la ingeniería económica esta para facilitar su cálculo porque el análisis incorpora el valor del dinero en el tiempo, el costo de oportunidad y el riesgo ligado a cada decisión que permite valorarla hasta el punto de aceptarla o rechazarla.

La economía con apoyo de las matemáticas permite valorar la me-jor alternativa de inversión porque eleva el nivel de comprensión de los factores involucrados en el proceso de toma de decisiones, es decir, al final es posible con un alto grado de confianza aceptar o rechazar una iniciativa. O sea, no se puede ni aceptar o rechazar nada antes de tener un juicio valorativo entre alternativas de inversión mutuamente exclu-yentes basadas en el análisis financiero de cada una de los proyectos de inversión.

Los profesionales en el campo de la economía, administración e ingenierías encuentran en este texto la oportunidad de aprender a evaluar como tomar decisiones financieras que pueden optimizar el uso del capital a través de conocimientos en matemáticas financieras y el algebra. Este texto está dirigido a audiencias de pregrado relacionados con negocios y ciencias sociales aplicadas. El texto expone y explica los temas centrales de las matemáticas financieras, junto con las formulaciones algebraicas correspondientes. Desde lo básico, se avanza rápidamente hasta la evalua-ción de alternativas de inversión o al modelado económico relacionado con la evaluación financiera de proyectos de inversión y con la resolución de problemas del mundo de los negocios. De manera didáctica el autor explica la temática, resuelve ejemplos y modelos. El texto es particularmente adecuado para el autoaprendizaje mediante la resolución de ejercicios programados por su autor.

La ingeniería económica es el área del conocimiento de las ciencias matemáticas que permite tomar decisiones de inversión de manera racional. Además, es una asignatura de apoyo a la gestión de empresas debido al proceso iterativo de toma de decisiones. En efecto, cada decisión de inversión es relacionada con su cambiante e incierto entorno empresarial en temas como ingresos, gastos y costos. Los emprendedores o empresarios cuando toman decisiones lo hacen con altas sumas de dinero esperando que su retorno compense el costo de oportunidad de la inversión. Por eso, cada alternativa de inversión debe basarse en un análisis de costo beneficio que permita entender que es bueno o que es malo, no solo para la empresa, sino para el empresario desde el punto de vista financiero. Este texto se ocupa de la evaluación sistemática de los beneficios y costos de los proyectos simulados de tal manera, que la capacitación se realiza de manera fácil y natural.

El proceso de cuantificación de beneficios y costos asociados con los proyectos de inversión esta orientado a determinar si es factible (viable y rentable) ejecutar un proyecto, es decir, si se justifica invertir capital. Se espera que utilizando la ingeniería económica se pueda evaluar las alternativas que generen una maximización de los recursos invertidos. El texto permite realizar una secuenciación del proceso de toma de decisiones que se inician con el planteamiento y definición de la alternativa de inversión, la búsqueda de alternativas potencialmente factibles, propone la elaboración de flujos de caja, considera el largo plazo y permite evidenciar si conviene o no su ejecución. Igualmente, permite identificar usos alternos de los recursos limitados.

He tenido la oportunidad de estudiar varios textos relacionado, no solo con la ingeniería económica, sino con la evaluación financiera de proyectos, pero la facilidad de escritura de este texto me llena de satisfacción y optimismo porque su tarea ha consistido en volver fácil lo difícil y no al contrario. El texto aporta de una manera pedagógica todos los elementos requeridos para plantear una solución a un problema de inversión. En los temas relacionados con la economía y las matemáticas siempre los textos han tratado de profundizar, pero sin utilizar un lenguaje que sea comprensible para todos, por eso, el autor tiene el mérito de brindar conocimiento, pero al mismo tiempo, generar empatía con el tema por la interacción entre los conceptos teóricos y la aplicación de los mismos. En efecto, los conceptos de interés, del valor del dinero en el tiempo, del costo de oportunidad y de rentabilidad en la toma de decisiones están explicados de una manera tan fácil que el texto se convierte en un manual que presenta los pasos a seguir en cada alternativa de inversión, sin embargo, el texto descubre la importancia del tema tratado. El anhelo del autor por explicar de manera sencilla conceptos y técnicas complejas en la ingeniería económica da una idea del arduo trabajo realizado porque comienza con lo más básico hasta lo más complejo, pero su estudio inmediatamente origina en el lector un efecto de ancla, es decir, se estudia hasta su final. La complejidad nunca abruma, al contrario, abre el ánimo para estudiar todas sus páginas. A pesar de tratarse de un texto con formulas y ejemplos, me sentí enriquecido por la experiencia de estudiar la "Ingeniería Económica para Todos". Se lo recomendaría a cualquiera.

Creo que el autor desde el comienzo introduce al lector en lo que está por venir y en aquello que necesita saber para estudiar todo el texto. Eso orienta al lector y despierta su interés en continuar estudiando. El estudio del texto supera con creces el tiempo invertido y las expectativas sobre el tema. El estilo de escritura es sencillo pero contundente porque nunca se excede en temas que no son requeridos para aparentar mayor conocimiento que el lector. En consecuencia, este texto ayuda en los procesos de toma de decisiones financieras que son vitales para el mundo empresarial y económico.

En conclusión, este es uno de esos textos que se disfruta en su estudio porque esta orientado tanto para expertos como para neófitos en el tema de las decisiones económicas y de inversión. El estudio del texto es fácil y atractiva desde el principio a fin. Este texto temático vale tenerlo porque puede uno aprender de su sencillez y, al mismo tiempo, profundidad en temas tan complejos como el costo de oportunidad, tasas de interés, etc., que es el lenguaje diario en el mundo de los negocios.

No quiero finalizar este escrito sin antes decir que el autor el profesor Édinson Ortiz Benavides es el prototipo del profesional inteligente y exitoso formado en los mejores centros académicos del país y Europa. En todo su trabajo como consultor, profesor y agente de cambio en su natal Tumaco se destaca por su compromiso y su alta sensibilidad social. Felicitaciones por este gran aporte al mundo académico.

**Arturo Fidel Diaz Terán, PhD**

# INTRODUCCIÓN

En términos generales la ingeniería económica implica formular, estimar y evaluar los resultados económicos y financieros cuando existan alternativas disponibles para llevar a cabo un propósito definido. Su estudio ofrece los conocimientos básicos necesarios para la toma de decisiones, y constituye una herramienta fundamental, actualizada y equilibrada para manejar las finanzas eficientemente teniendo en cuenta los factores de tiempo, rentabilidad y oportunidades de inversión.

Ingeniería Económica, ¡para todos!, pretende que estudiantes, docentes y profesionales de las áreas de ingeniería, economía, administración y finanzas conozcan, aprendan y apliquen las diferentes técnicas que contempla esta disciplina para el adecuado proceso de toma de decisiones financieras en los asuntos cotidianos que puedan presentárseles. En este sentido, se constituye en una herramienta de aprendizaje e inserción efectiva en cada uno de los ítems que integran la temática desde el nivel más básico hasta llegar a uno más avanza-do, detallando para el efecto su desagregación algebraica.

El texto se compone de 10 capítulos que buscan dar cobertura total a las diferentes temáticas de interés en el mundo de la ingenie-ría económica iniciando con los conceptos básicos, pasando por el análisis de los tipos de interés, las series financieras, hasta llegar al análisis de las alternativas de inversión. Cada capítulo ofrece el desarrollo matemático del ítem estudiado, ejercicios de profundización y ejercicios propuestos para su mayor aprehensión.

# 1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

## PREÁMBULO

En este capítulo se analizan los principales conceptos sobre los cuales se apoya el estudio de la Ingeniería Económica o Matemáticas Financieras. Su entendimiento es necesario para una efectiva aprehensión de las temáticas abordadas a lo largo del texto, y la solución lógica – no mecánica – de los diferentes problemas propuestos como adaptaciones de la teoría a la realidad con soluciones factibles.

## 1.1. Valor del dinero en el tiempo

No será necesario centrarnos en la definición de Dinero, ni en la importancia que representa para el avance de la economía moderna. Sin embargo, para fines didácticos es preciso explicar, porqué no es lo mismo recibir un millón de unidades monetarias (₡ 1.000.000) hoy, que dentro de un año. En este momento es cuando la economía hace su aporte al estudio de la Ingeniería Económica o Matemáticas Financieras, pues de ella se derivan los conceptos que integran su estructura temática.

Conceptos como el de *inflación, costo de oportunidad, riesgo y, bien económico* dan sentido al estudio de la Ingeniería económica y dan argumentos para pensar porqué *el tiempo es dinero, o porqué el dinero tiene valor en el tiempo.*

**La inflación** es un fenómeno económico conocido como el crecimiento generalizado de los precios de bienes y servicios, que hace que el dinero pierda día a día poder adquisitivo o poder de compra. Con ₡1.000.000 hoy se puede adquirir determinada cantidad de bienes y servicios, pero dentro de un año, ese mismo ₡ 1.000.000 podrá adquirir una cantidad menor de esos bienes y servicios, pues el precio de éstos se habrá incrementado en términos generales.

El **costo de oportunidad** es el mejor uso alterno de los recursos, es decir, es aquello que sacrificamos cuando tomamos una decisión. Por ejemplo con ₡1.000.000 actualmente una persona puede obtener un rendimiento del 5% en un banco, cuando decide retirarlo para invertirlo en un negocio, está renunciando a este rendimiento en busca de un rendimiento mayor que no solo lo proteja de la inflación sino que también le produzca una utilidad adicional. Aquí el costo de oportunidad de esa persona es de 5%.

El **riesgo** entendido como la probabilidad de ocurrencia de un evento que afecte el retorno de una inversión, es un costo que las personas asumen en toda actividad económica. De esto se entiende que actividades más riesgosas generan mayor beneficio. Al dar en préstamo ₡1.000.000 hoy se asume un riesgo al no poder garantizar completamente su retorno en el futuro. Mientras mayor sea el riesgo, entonces mayor será el rendimiento que de él se espere.

El dinero como toda mercancía o **bien económico,** tiene la capacidad intrínseca de generar más dinero, por ejemplo si se deposita ₡1.000.000 en un banco al cabo de un año se podría retirar una cantidad mayor.

Conforme lo anterior, si se tuviere que decidir entre recibir ₡1.000.000 dentro de un año, en vez de hacerlo hoy, habrá que recibirlo solamente si se recibiera una suma adicional de dinero que compense las razones aquí expuestas. Este cambio de dinero en un tiempo determinado es lo que se denomina **valor del dinero en el tiempo**, y se manifiesta a través del interés. Este concepto clarifica porqué en operaciones económicas y financieras no podemos operar sumas de dinero en diferentes periodos de tiempo, hacerlo constituye el error de mayor frecuencia en Ingeniería Económica o Matemáticas Financieras. En términos financieros una misma unidad monetaria colocada en diferentes fechas, tiene un valor diferente.

## 1.2. El interes

El concepto de valor del dinero en el tiempo nos lleva al concepto de **INTERÉS,** pues el uso del dinero por las razones expuestas no puede ser gratuito, se necesita compensar los efectos de la inflación, costo de oportunidad y riesgo, y generalmente esta compensación se da a través del *interés.* Así entonces, el interés es la medida del dinero en el tiempo, es el valor adicional por el uso del dinero.

Si prestamos hoy ₡1.000.000 y después de un tiempo determinado se recibe ₡1.100.000, la variación del valor del dinero entre ₡1.000.000 y ₡1.100.000 se llama valor del dinero en el tiempo, y la diferencia ₡1.100.000 – ₡1.000.000 = ₡100.000 es el interés. Generalmente al valor presente o valor de hoy se simboliza con P, al valor futuro o valor posterior con F, y al interés con I. De esta manera en el ejemplo expuesto P=₡1.000.000, F=₡1.100.000, I=₡100.000. En adelante se llamará interés a la diferencia entre valor futuro y valor presente.

$$\boxed{I=F-P} \quad (1.1)$$

Para efectos prácticos, el interés suele utilizarse como una tasa o valor relativo antes que un valor absoluto. En el ejemplo anterior las ₡100.000 de interés representan el 10% del valor prestado. Este 10% representa la tasa de interés (i) que se cobró por el préstamo y se obtiene de dividir (₡100.000/₡1.000.000) y luego multiplicarlo por 100 para que quede expresado en porcentaje. De esto se obtiene que:

$$\boxed{i=\frac{I}{P}} \quad (1.2)$$

En nuestro caso: $$i= \frac{I}{p} = \frac{₡\,100.000}{₡\,1.000.000} = 0,10*100=10\%$$

# 1.3. Equivalencia

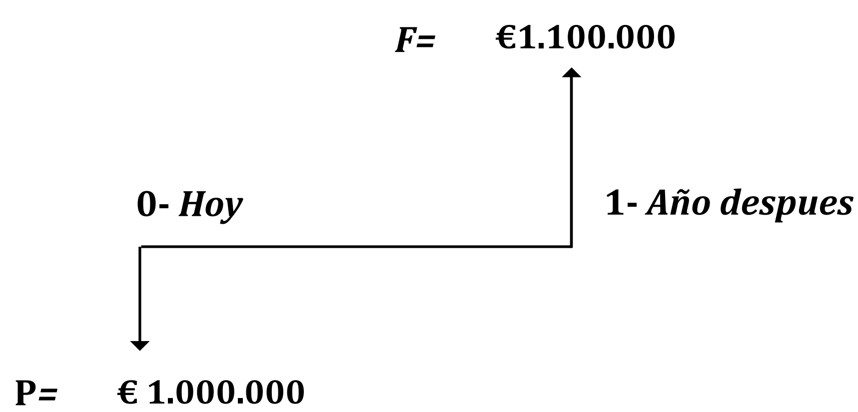
Este concepto involucra los dos conceptos anteriores, pues dos cantidades de dinero en distintas fechas son equivalentes, aunque diferentes, si el valor futuro cubre el valor presente más los intereses, es decir, si tiene en cuenta el valor del dinero en el tiempo. Para un inversionista ₡1.000.000 hoy son equivalentes a ₡1.100.000 dentro de un año, aunque diferentes, porque han cubierto su expectativa de rendimiento. Cada inversionista tendrá su propia expectativa de rendimiento o de tasa de interés, la que se conoce también como *tasa de interés de oportunidad* (TIO).

# 1.4. Diagramas de lineas de tiempo

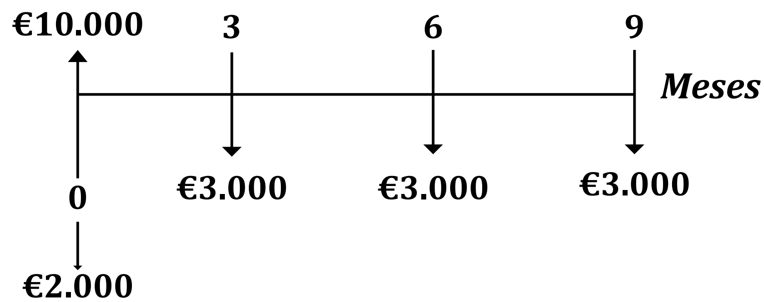
Los **DIAGRAMAS DE LÍNEAS DE TIEMPO** también conocidos como flujos de caja, son la representación gráfica de un problema financiero. Su importancia radica en que permiten visualizar el problema, facilitando de paso su definición y análisis. Debido a que en toda operación financiera existen ingresos y egresos, los primeros se representan con flechas hacia arriba y los segundos con flechas hacia abajo sobre una recta que va indicando las fechas en que dichos eventos suceden. Debe tenerse mucho cuidado a la hora de la representación de un problema financiero, pues para lo que algunos representan un ingreso, para otros representa un egreso y viceversa.

En la solución de problemas de Ingeniería Económica o Matemáticas Financieras, el primer paso y quizás el más importante es la elaboración correcta del diagrama de línea de tiempo, porque además de mostrar claramente el problema también ayuda a identificar las fórmulas que se deben aplicar para su solución.

*Ejemplo 1.1* El ejemplo hasta ahora descrito puede representarse de la siguiente manera:



*Ejemplo 1.2* El Señor A decide comprar una casa por ₡10.000 y se compromete a pagar de la siguiente manera: una cuota inicial de ₡2.000 y el saldo en 3 cuotas iguales en los meses 3, 6 y 9 por valor de ₡3.000 cada una. Construir el diagrama de tiempo.




# 1.5. Regla de oro

Para obtener éxito en la solución de problemas financieros, es necesario atender cada una de estas reglas: Elabore el Diagrama de Líneas de tiempo del problema referido, atendiendo estrictamente las fechas en que se lleven a cabo los eventos financieros.

- **I.** En una operación financiera, el número de periodos o plazo y la tasa de interés deben estar expresados en la misma unidad de tiempo, ya sea meses, años, trimestres, etc.
- **II.** En finanzas no es posible sumar unidades monetarias de distintos plazos sin la debida consideración del valor del dinero en el tiempo.
- **III.** En toda operación financiera, la sumatoria de ingresos debe ser igual a la sumatoria de egresos, llevados a una misma fecha conocida como *fecha focal (ff)*. Esto indica que, en el diagrama de líneas de tiempo, los ingresos deben estar en correspondencia con los egresos, manteniendo el diagrama equilibrado como cualquier sistema. Esta última regla es conocida como el Teorema Fundamental de la Ingeniería Económica.

# RESUMEN CAPÍTULO 1: Conceptos Fundamentales

El estudio efectivo de la Ingeniería Económica, también conocida como Matemáticas Financieras, requiere el manejo de diferentes conceptos propios de la Teoría Económica que allanan el camino hacia una comprensión y aprehensión de las diferentes situaciones de decisiones financieras a las que personas, hogares y empresas se enfrentan cotidianamente.

En ingeniería Económica es imperativo dominar conceptos como *inflación, costo de oportunidad, riesgo y, bien económico* que dan sentido a su estudio y a su vez, dan argumentos para pensar porqué *el tiempo es dinero*, o porqué *el dinero tiene valor en el tiempo.*

En la solución de problemas financieros, este texto recomienda la utilización de diagramas esquemáticos de líneas de tiempo con total apego a las *Reglas de Oro* y la consecuente aplicación del *Teorema Fundamental de la Ingeniería Económica.*

En este capítulo se han utilizado las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{I=F-P} \quad (1.1) \qquad\qquad \boxed{i=\frac{I}{P}} \quad (1.2)$$

Dónde: **I**= Interés ; **F**=Val or Futur o; **P**=Val or Presente ; **i**=Tasa de interés por período .

…………. ⟡ ………….

## EJERCICIOS CAPÍTULO 1: Conceptos Fundamentales

1. Expresar como numero decimal las siguientes tasas de interés.

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** | 25% bimestral | **d.** | 14% cuatrimestral |
| **b.** | 4% mensual | **e.** | 19,63% semestral |
| **c.** | 8,3% trimestral | **f.** | 20% anual |

2. Una inversión inicial de ₡550 produce después de cuatro meses un resultado de ₡800. Calcular:

   **a.** Valor de los intereses generados.
   **b.** Tasa de interés de la operación.

3. Qué capital es capaz de generar un valor final de ₡750 e intereses por ₡125.
4. Calcular la tasa de interés que produce un capital de ₡200 si el valor final obtenido es de:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a.** | ₡250 | **d.** | ₡450 |
| **b.** | ₡300 | **e.** | ₡480 |
| **c.** | ₡320 | **f.** | ₡500 |

5. Si depositamos hoy ₡500 en una cuenta de ahorros y esperamos recibir por concepto de intereses ₡65 anuales, ¿Cuánto se tendrá al final del año?
6. Usted le presta a un amigo ₡300 a una tasa de interés del 2% mensual, quien le propone cancelar mensualmente ₡6. ¿Cuándo terminará de pagarle la deuda? Si le propone cancelar mensualmente ₡5, ¿la deuda aumenta o disminuye?

***Para los siguientes ejercicios, construir el diagrama de línea de tiempo.***

7. Usted compra un electrodoméstico que tiene un valor de contado de ₡100 y lo paga de la siguiente forma: cuota inicial del 10% y el resto en 6 cuotas mensuales iguales de ₡20 cada una. A la luz del principio del valor del dinero en el tiempo. ¿usted puede decir que pagó por el electrodoméstico realmente ₡130?

8. Un vehículo que vale ₡300 se financia de la siguiente forma: cuota inicial igual al 10%, 12 cuotas mensuales igual de ₡20 y cuota extra en el mes 6 de ₡30 ¿Qué negocio hizo la empresa que financió el vehículo?

9. Una vivienda tiene un valor ₡70.000 y se desea financiar con un pago por valor de ₡30.000 dentro de 6 meses y un pago por valor de ₡50.000 dentro de 8 meses. Construya el flujo de caja desde el punto de vista del comprador.

10. Un préstamo por ₡1.000 se paga con 6 cuotas mensuales iniciando con una cuota al final del primer mes de ₡180 y cada mes las cuotas aumentan en ₡20. Construya el flujo de caja desde el punto de vista del prestamista.

# 2. NOCIONES DE MATEMÁTICAS BÁSICAS

## PREÁMBULO

La Ingeniería Económica o Matemáticas Financieras combina elementos de la economía, las finanzas y las matemáticas básicas en su componente aritmético. Tanto es así, que algunos autores coinciden en afirmar que bien podría llamarse Aritmética Financiera, ya que para su manejo y comprensión solo es necesario aplicar las operaciones fundamentales de la aritmética, algo de sentido común y capacidad de análisis (Meza, 2004).

Conforme lo anterior, y el poco amor por las matemáticas de algunos lectores, sin prejuicios, se exponen en este capítulo en forma resumida, los conceptos de matemáticas básicas que contribuirán a una mayor aprehensión de los temas abordados en el texto.

## 2.1. Orden de las operaciones

Los problemas en economía y finanzas por lo general presentan varios pasos y pueden incluir más de una operación matemática, el orden en que se realicen las operaciones no es importante si solo es necesario realizar sumas, restas o multiplicaciones. Sin embargo, el orden afectará la respuesta en una serie de divisiones o de operaciones mixtas.

*Ejemplo 2.1* Observe las siguientes Operaciones:

Suma:

$$4+12+7+5=28$$
$$7+4+5+12=28$$

Resta:

$$100-20-10-3=67$$
$$100-10-3-20=67$$

Multiplicación:

$$3 \times 2 \times 8 \times 5=240$$
$$8 \times 3 \times 5 \times 2=240$$

Para una serie de divisiones u operaciones mixtas existen reglas definidas que se deben seguir.

**División:** Una serie de divisiones debe resolverse en el orden escrito. Por consiguiente.

$$100 \div 10 \div 2 = 10 \div 2 = 5$$

Este resultado sería distinto e incorrecto si se hiciera primero la segunda división:

$$100 \div 5 = 20$$

*(Esto es incorrecto).*

**Operación Mixta:** En una serie de operaciones mixtas, la multiplicación y división se llevan a cabo antes de la suma y la resta, observe, por ejemplo:

$$100+20 \times 2-8 \div 4 = 100+40-2=138$$

Si las operaciones se hicieran en el orden descrito, la respuesta sería diferente e incorrecta.

## 2.2. Potenciación, Radicación y Logaritmación

Sean las constantes ***a, b*** y ***c,*** se pueden combinar de distintas maneras dando como resultado diferentes temas de mucho interés para el buen manejo de las matemáticas.

Cuando tenemos la expresión de la forma $a^b=c$ nos referimos a la **POTENCIACIÓN**, donde ***a*** representa la base, ***b*** representa el exponente y ***c*** representa la potencia. Estas operaciones son frecuentes cuando la base y el exponente son conocidos. Algunas propiedades de la potenciación se muestran a continuación:

$$a^b=c$$
$$a^b*a^c=a^{b+c}$$
$$\frac{a^b}{a^c}=a^{b-c}$$

$$a^1=a \;;\; a^0=1$$
$$a^{-b}=\frac{1}{a^b}$$
$$\left(\frac{a^c}{b}\right)=\frac{a^c}{b^c}=a^c b^{-c}$$
$$(a^b)^c=a^{b*c} \quad \text{etc., etc.}$$

Un ejemplo con números seria: $2^3=8$

Cuando tenemos la expresión de la forma $\sqrt[b]{c}=a$, nos referimos a la **RADICACIÓN**, donde la base conocida ***a*** representa la raíz, el exponente conocido ***b*** representa el índice y la potencia conocida ***c*** representa el radicando. Estas operaciones son frecuentes cuando la potencia y el exponente son conocidos. Las raíces son potencias con exponentes fraccionarios y por tanto aplican las mismas propiedades. Por ejemplo

$$\sqrt[3]{8}=8^{1/3} \quad ; \quad \sqrt[7]{a^3}=a^{3/7}$$

También podemos decir que la radicación es una operación inversa de la potenciación. Por ejemplo, si $2^3=8 \rightarrow \sqrt[3]{8}=2$

Cuando tenemos la expresión de la forma $\log_a c=b$ nos referimos a la **LOGARITMACIÓN,** donde la base conocida ***a*** conserva su nombre, el exponente conocido ***b*** representa el logaritmo y la potencia conocida ***c*** representa la variable o numero a operar. Estas operaciones son frecuentes cuando la potencia y la base son conocidas. Algunas propiedades de la logaritmación se muestran a continuación:

$$\log_a a = 1 \;\; \textit{porque} \;\; a^1 = a$$
$$\log_a 1 = 0 \;\; \textit{porque} \;\; a^0 = 1$$
$$\log A^n = n \log A$$

$$\log(A*B)= \log A+\log B$$
$$\log(A/B)= \log A-\log B$$
$$\log \sqrt[n]{A} = \frac{\log A}{n}$$

Un ejemplo con números seria: $\mathbf{2^3=8 \rightarrow \log_2 8=3}$

La potenciación tiene dos operaciones inversas en lugar de una, a diferencia de la suma y la resta o de la multiplicación y la división. Esto es porque en la potenciación la base y el exponente no son siempre conmutables. Ejemplo.

*En la suma* **a+b = b+a**
*En la multiplicacion* **a*b = b*a**
*En la potenciacion* $\mathbf{a^b \neq b^a}$ *Solo hay un caso:* $\mathbf{2^4= 4^2=16}$

Mientras que: $\mathbf{2^3 \neq 3^2 ; 8 \neq 9}$

## 2.3. Paréntesis

Los Paréntesis se utilizan para encerrar uno o más números que deben ser considerados como una cantidad. En ocasiones la cantidad encerrada en paréntesis se multiplica por un número que aparece frente a ella. Si frente al paréntesis no existe número alguno, se sobreentiende que la cantidad que se encuentra adentro se debe multiplicar por 1.

Aunque los paréntesis se pueden eliminar multiplicando cada número que aparece adentro por el número que está afuera, será más sencillo realizar primero todas las transacciones dentro del paréntesis.

Si los paréntesis incluyen un grupo de operaciones mixtas, se debe seguir el procedimiento del orden de las operaciones vistos.

*Ejemplo 2.2*

$$\mathbf{100\left(1+0{,}09*\frac{1}{2}\right)=104{,}5} \qquad \mathbf{400\left(1-0{,}12*\frac{5}{12}\right)=420}$$

## 2.4. Redondeo de decimales

Muchos problemas en las Matemáticas Financieras dan como resultado números con varios decimales o, cuando se trata de una división se obtiene un número indefinido de decimales. Con frecuencia, la respuesta a los problemas de negocios se redondea a dos decimales para unidades monetarias enteras y centavos, pero esto es sólo un caso de una regla general.

Una regla bastante utilizada para redondeo es la “regla del computador” que dice:

Cualquier decimal que desee aproximarse hasta cierto número de cifras convencionalmente fijado, debe:

a Incrementarse en una unidad el último dígito fijado, si los que siguen exceden el valor 500.

b No cambiar el último dígito, si los que siguen son menores que el valor 500.

c Si los dígitos que siguen al último fijado son exactamente el valor 500 y el último es impar, incrementarse en una unidad.

*Ejemplo 2.3* Redondear a 4 decimales

| | |
|---|---|
| ✓ **3,5614326** | **R/ 3,5614** |
| ✓ **7,6166501** | **R/ 7,6167** |
| ✓ **0,751450** | **R/ 0,7514** |
| ✓ **0,1937500** | **R/ 0,1938** |

## 2.5. Operaciones con decimales utilizando potencias

Recordando las operaciones con potencias:

$$1/10=10^{-1}=0,1$$
$$1/100=10^{-2}=0,01$$
$$1/1000=10^{-3}=0,001$$

$$\frac{1}{(1000....)}=10^{-n}=0,000\underbrace{..........}_{n\text{ – veces}}1$$

Así: $0,43712= 43712 \times 10^{-5}$

$432,6725= 4326725 \times 10^{-4}$

Productos de decimales, utilizando potencias de 10.

$$\begin{aligned}0{,}326 * 6{,}37 &= 326 * 10^{-3} * 637 * 10^{-2}\\ &= 326 * 637 * 10^{-3+(-2)}\\ &= 207662 * 10^{-5}\\ &= 2{,}07662\end{aligned}$$

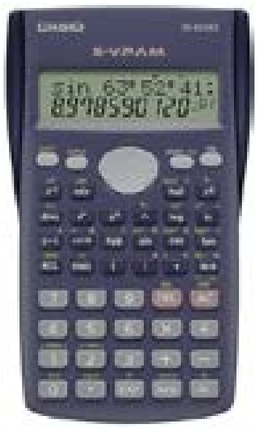
División entre decimales, utilizando potencias de 10.

$$\begin{aligned}30{,}3267 / 2{,}61 &= (303267 \times 10^{-4}) \ / \ (261 \times 10^{-2})\\ &= (303267 \times 261) \ \times \ (10^{-4-(-2)})\\ &= 1161{,}94 \times 10^{-2}\\ &= 11{,}6194\end{aligned}$$

## 2.6. Calculadoras

En economía y finanzas, así como en la vida diaria, las personas utilizan calculadoras de mano para muchos cálculos de rutina, que agilizan dichos cálculos. En los inicios, cuando las calculadoras no eran muy difundidas, se acostumbraba la utilización de *tablas* para el desarrollo de ciertas operaciones, pues dichas tablas presentaban en forma matricial el resultado de algunas combinaciones de variables, por ejemplo, con un determinado valor presente, número de periodos y tasa de interés, la tabla ofrecía el valor futuro, así con operaciones más complicadas. Este principio es el mismo que se utilizaba en el pasado para el cálculo de logaritmos, donde era necesario calcular de antemano la *mantiza.* Pero el desarrollo de las *calculadoras científicas* volvió innecesaria la utilización de dichas tablas.

En la actualidad se cuenta con *calculadoras financieras* de marcas como la Hewlett Packard o Casio, que vienen con software especializados para la obtención de resultados financieros con solo introducir ciertos parámetros. Algunas aplicaciones se pueden obtener virtualmente para teléfonos de gama media y alta. Así mismo el software computacional Excel cuenta con las rutinas necesarias para la solución de problemas de Ingeniería Económica o Matemáticas Financieras.



Bajo la premisa de ofrecer orientación para una efectiva inmersión en el mundo de la Ingeniería Económica o Matemáticas Financieras ¡para todos!, el texto solo requerirá del lector una calculadora científica de las que se consiguen fácilmente en el mercado para que pueda manejar todos los temas básicos y esenciales del mismo. Una vez que se domine cada una de las temáticas del texto, el lector podrá con mayor facilidad agilizar sus cálculos con la utilización de herramientas más sofisticadas y modernas.

Lo primordial a la hora de solucionar problemas financieros, es no perder decimales por redondeos parciales, pues debe tenerse en cuenta que se está trabajando con unidades monetarias (₡), donde todo centavo cuenta. La recomendación es introducir *toda* la formulación en la calculadora científica, o en su defecto utilizar la memoria (M+) de la cual viene provista.

Toda calculadora científica cuenta con teclas esenciales para la solución de problemas financieros, por ejemplo, las de potencia (X^), de inversa ($X^{-1}$), logaritmos (log), fracción (Y/X), raíz ( √ ), entre otras.

La combinación efectiva de las teclas ofrece la solución a muchos de los problemas que se presentan frecuentemente en la Ingeniería Económica.

*Ejemplo 2.4* Para la solución de la siguiente ecuación $0{,}3\ (1+0{,}03)^8/1-0{,}03$ se debe utilizar la siguiente secuencia de teclas para la obtención del resultado:

> Fraccionarios → 0 → tecla punto decimal, y → el 3 → paréntesis, y → escribe la operación indicada (1+0,03), → cierra paréntesis y → oprimimos la tecla potencia, en este caso pondríamos el número 8, → finalmente con la tecla replay nos desplazamos hacia debajo de la fracción, donde pondremos la operación indicada (1-0,03) y finalizamos con la tecla de igual. Esta operación particular da como resultado: 0,3917845613.

## 2.7. Conceptos de Álgebra

El álgebra es una herramienta que le ayudará a pensar y resolver problemas de Ingeniería Económica.  Se utiliza para expresar un problema en su forma más sencilla, eliminando todas las palabras que no sean importantes y expresando la parte esencial en números y símbolos. La mayor parte de los símbolos y reglas del álgebra ya se conocen desde la aritmética de primaria.

**En Aritmética:** **9+3=3+9**
**En Álgebra:** **a+b=b+a**

Observe que en el ejemplo aritmético sólo se ha hecho una afirmación sobre dos números específicos definidos. Sin embargo, el ejemplo de álgebra hace una afirmación sobre dos números generales y sigue siendo cierto sin importar cuales sean los valores que se asignen a ***a*** y ***b.***

Cuando se combinan constantes, números generales y signos de operaciones forman una **EXPRESIÓN ALGEBRAICA.** Cada expresión algebraica representa una cantidad, aunque puede estar compuesta de más de un número o símbolo.

La expresión algebraica **4a+bc-ac** representa una cantidad de un valor desconocido hasta que se asigne valores a cada una de las letras. Si en un problema en particular **a=7,b=2 y c=5,** se puede determinar el valor de la expresión colocado los números en el lugar de las letras correspondiente; es decir, se sustituye para encontrar el valor:

$$4a+bc-ac=3$$

# 2.8. La Ecuación

Quizás la herramienta más importante en álgebra sea la ecuación, que es la afirmación de que dos expresiones algebraicas son iguales. Las dos expresiones quedan conectadas por un signo de igual (=). Se pueden afectar ambos lados de la ecuación en la misma proporción y la igualdad se mantiene, por ejemplo, sumando, restando, multiplicando, dividiendo, etc., por un número igual.

En una ecuación es común encontrar uno o varios términos desconocidos en uno de los lados, llamados **INCÓGNITAS,** los cuales deben hallarse a través de la solución de la ecuación.

*Ejemplo 2.5*

$$\frac{W}{5}=9 \quad \rightarrow \quad \frac{W}{5} \times 5=9 \times 5 \quad \rightarrow \quad W=45$$

En este ejemplo, cuando W toma el valor de 45, la igualdad es válida.

El **GRADO** de una ecuación viene determinado por el mayor exponente de la incógnita en la ecuación. Así la ecuación: $2X + 3 = 11$, es una ecuación de primer grado, porque el mayor exponente de X es 1. La ecuación: $2X^2-4X+12=0$, es una ecuación de segundo grado, porque el mayor exponente de X es 2.

También es común encontrar un sistema de ecuaciones de primer grado o lineales que presentan más de una incógnita, las más usuales son las ecuaciones lineales 2 x 2, que comprenden 2 ecuaciones y 2 incógnitas.

*Ejemplo 2.6* Lea el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2X+3Y&=21 \quad (1) \\ X-2Y&=-7 \quad (2) \end{aligned}$$

Uno de los métodos más usuales que ofrece la aritmética para la solución de este tipo de ecuaciones, es el de **ELIMINACIÓN,** el cual se consigue multiplicando la ecuación **(2)** por -2, y esta nueva ecuación **(3)** se suma a la ecuación **(1).**

$$[X-2Y=-7\ \ ]*(-2)= -2X+4Y=14 \ (3)$$

Ahora sumamos las ecuaciones **(1)** y **(3)**

$$\begin{array}{l} 2X+3Y=21 \ \ (1) \\ \underline{-2X+4Y=14 \ \ (3)} \\ \\ \ \ 0X+7Y=35 \\ 7Y=35 \ \rightarrow \ Y=5 \end{array}$$

Reemplazamos el valor encontrado de Y, en la ecuación **(2)** y obtenemos

$$\begin{array}{l} X-2Y=-7 \\ X=2Y-7 \\ X=2*5-7 \\ X=10-7 \ \rightarrow X=3 \end{array}$$

Así encontramos que los valores de X=3 y Y=5, satisfacen las condiciones descritas en las ecuaciones **(1)** y **(2)** de manera simultánea.

*Ejemplo 2.7* Resolver la ecuación $2X^2-3X-2=0$

Esta es una ecuación cuadrática, donde la incógnita tiene dos soluciones posibles, y la forma más sencilla de resolverlas es uti-lizando la fórmula general, que establece:

$$\boxed{X=\frac{-b\pm\sqrt[2]{b^2-4ac}}{2a}} \quad (2.1)$$

En la ecuación a resolver: a=2; b=-3 y c=-2, de tal manera que al aplicar la ecuación (2.1) se obtiene:

$$X=\frac{-b\pm\sqrt[2]{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3\pm\sqrt[2]{9+16}}{4}=\frac{3\pm5}{4}$$

Por lo que X puede tomar los valores de 2 y $-\frac{1}{2}$

## 2.9. Razón

Es el cociente entre dos cantidades.

(**q** Es la razón entre **X** y **Y**) $\boldsymbol{X / Y = q}$

$$\boldsymbol{X \div Y = q}$$

Al aumentar X, *q* aumenta en la misma proporción:

**2X / Y =2q; nX/Y=nq:** En matemáticas, esto se expresa diciendo que el valor de q es directamente proporcional al valor de **X .** Al aumentar el valor de **Y,** el valor de *q* dismi-nuye en la misma proporción, así:

$$\frac{X}{2y}=\frac{q}{2} \;;\quad \frac{X}{ny}=\frac{q}{n}$$

Lo que se expresa diciendo que el valor de q es inversamente proporcional al valor de ***Y.***

Ampliando varios factores:

$$q = \frac{abc}{de}$$

El valor de ***q*** es directamente proporcional a los valores de: ***a,b,c e*** inversamente proporcional a los valores de ***e*** y ***d.***

## CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD:

Si se tiene la igualdad:

$$q = \frac{a}{b}k$$

El valor de ***q*** es directamente proporcional al valor de ***a,*** inversamente proporcional al valor de ***b*** y depende del valor de la constante de proporcionalidad ***K.*** Conociendo el valor de ***q,*** para ciertos valores de ***a y b,*** queda determinado el valor de ***k.***

*Ejemplo 2.8* Si 20 obreros construyen 50 metros de una carretera en 10 días. ¿Cuántos obreros se requieren para construir 1.200 mts, en 60 días?

El número de obreros es directamente proporcional a los metros que deben construirse, e inversamente proporcional al tiempo en que deban construirse, si designamos por **O** el número de obreros, por **M** los metros y por **T** el tiempo, tendremos:

$$O = \frac{M}{T}K$$

$$20 = \frac{50}{10}K$$

Cálculo de K:

Para:

$$K = \frac{200}{50} = 4$$

$$O = 20; \quad M = 50; \quad t = 10$$

$$O=\frac{(M)}{T}=4 \qquad O=\frac{(1.200)}{60}\ 4 = 80$$

$$X=\frac{20 * 1.200 * 10}{50 * 60}=80$$

*Ejemplo 2.9* Si 8 obreros tejen 12 metros de tela de 0,5 m de ancho en cada semana, ¿Cuántos metros de la misma tela de 0,7 m de ancho, producen en una semana 35 obreros?

$$\boxed{M=\frac{n}{A}\ K}$$

Designando por ***M*** los metros, por ***A*** el ancho y por n el número de obreros, se tiene:

El número de metros es proporcional al número de obreros e inversamente proporcional al ancho de la tela.

Calcular **K:** $12=\frac{8}{0,5}\ K$ Para: $M=12,\ n=8,\ A=0,5$

$$K=\frac{12\ (0.5)}{8}=0,75$$

$$M=\frac{35}{0,7}\ (0,75)$$

## 2.10. Proporciones

Definición: Una proporción es la igualdad de dos razones.

Si: $\frac{a}{b}=q$ y $\frac{c}{d}=q$ Entonces: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Que se lee ***a*** es a ***b*** como ***c*** es a ***d***; puede escribirse también: ***a/b =c/d.***

***a y c*** son los antecedentes, ***b y d***, los consecuentes de la proporción.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

*Extremos:* ***a y d***
*Medios:* ***b y c***

Desde hace mucho tiempo, se acostumbra llamar extremos al antecedente de la primera razón y la consecuente de la segunda razón. Y medios al consecuente de la primera razón y al antecedente de la segunda razón.

Multiplicando ambos miembros por ***bd,*** se tiene: ***ad=bc***

**TEOREMA:** En toda proporción el producto de los medios es igual al producto de los extremos.

## 2.11. Progresión Aritmética

Es una sucesión finita de números llamados términos, en la que cualquiera de ellos difiere del anterior en una cantidad fija ***d,*** denominada incremento o diferencia, por ejemplo, **1, 4, 7, 10, 13…**

Aquí cada término se obtiene sumando 3 al término anterior.

$$a_2=a_1+3 \qquad a_3=a_2+3$$

Si designamos por $a_1$ al primer término, por ***d*** la diferencia constante y por n el número de términos, la progresión que se genera es de la siguiente forma:

$$a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots,a_n$$

Dónde:

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_1\\
&a_2 = a_1 +d\\
&a_3 = a_2 +d=(a_1 +d+d)=a_1 +2d\\
&a_4 = a_3 +d=(a_1 +2d)+d=a_1 +3d\\
&....\\
&a_n=a_{n-1}+d=a_1+(n-2)d+d=a_1+(n-1)d \rightarrow \textit{n-ésimo termino}
\end{aligned}$$

**El último o n-ésimo término** acostumbra a designarse por $a_n$ y su expresión en función del primer término, el número de términos y la diferencia común, es dada por:

$$\boxed{a_n = a_i + (n-1)\,d} \quad (2.2)$$

De esta ecuación se pueden derivar ecuaciones más generales que permitan encontrar cualquier término (x) a partir del último término $(a_n)$ y la diferencia común (d) y viceversa:

$$\boxed{a_n = a_x + (n-x)d} \quad (2.3) \qquad \boxed{d = \frac{a_n - a_x}{(n-x)}} \quad (2.4)$$

$$\boxed{a_x = a_n - (n-x)d} \quad (2.5)$$

**Suma de los términos de una progresión aritmética.** En Ingeniería Económica, así como es importante hallar el último término de una progresión aritmética, también se requiere con frecuencia, hallar la suma de los primeros n-términos $(S_n)$. Sea la progresión:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$$

Dónde: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

Luego sustituyendo los valores, se tiene: $S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \ldots + a_n \qquad \boxed{1}$

Cambiando el orden de esta sumatoria, es decir, comenzando por $a_n$, se tiene: $S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \ldots + a_1 \qquad \boxed{2}$

Sumando las ecuaciones $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ se tiene: $S_n + S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n + d - d) + (a_1 + a_n + 2d - 2d) + \ldots + (a_1 + a_n)$

Entonces, $2\,S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_1 + a_n)}_{\text{n-veces}}$

De lo anterior, se obtiene: $2S_n = n(a_1 + a_n)$

Entonces, $$\boxed{S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}} \quad (2.6)$$

*Ejemplo 2.10* Si 3, 7 y 11 son los primeros tres términos de una progresión aritmética, encontrar el noveno término.

En este caso, $a_1 = 3$, $d = 4$, y $n = 9$, entonces $a_n$ o $a_9$ se obtiene aplicando la fórmula (2.2).

$$a_9 = 3 + (9-1)*4 = 35$$

*Ejemplo 2.11* Encontrar la suma de todos los enteros pares de 2 a 500, incluyendo los extremos.

$$d=2, \quad a_1=2, \quad n=250 \quad y \quad a_n=500$$

Aplicando la fórmula (2.2), obtenemos:

$$Sn = \frac{250(2+500)}{2} = 125*(502) = 62.750$$

# 2.12. Progresión Geométrica

Es una sucesión finita de números llamados términos, en la que el cociente o razón entre dos términos sucesivos es constante.

De otra manera, una progresión geométrica es una sucesión de números formada de tal manera que cada número que pasa del segundo es producto del número anterior por una constante. Ejemplo, **2, 8, 32, 128, 512…**

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}\ldots$$

Sea: $a_1$ = El primer término de la progresión.
$r$ = La razón constante (el número por el cual se multiplica cada término).
$n$ = Número de términos considerados.
$a_n$ = El n-ésimo término
$Sn$ = La suma de los primeros n – términos.

Lo mismo que en una progresión aritmética es importante hallar fórmulas que nos permitan encontrar el último término y la suma de los primeros n términos de la progresión geométrica.

De acuerdo con la definición si $a_1$ es el primer término y $r$ es la razón tenemos:

$$a_1=a_1$$
$$a_2=a_1\ r$$
$$a_3=a_2\ r=(a_1\ r)r=a_1\ r^2$$
$$a_4=a_3\ r=(a_1\ r^2)r=a_1\ r^3$$
$$....$$
$$a_n=a_{n-1}\ r=a_1\ r^{n-2}\ r=a_1\ r^{n-1} \quad \to n\text{-ésimo término}$$

Aquí, **EL ÚLTIMO O N-ÉSIMO** término también acostumbra a designarse por $a_n$ y su expresión en función del primer término, el número de términos y la razón constante, es dada por:

$$\boxed{a_n=a_1 r^{n-1}} \quad (2.7)$$

De esta ecuación también se pueden derivar ecuaciones más generales que permitan encontrar cualquier término (x) a partir del último término ***($a_n$)*** y la razón ***(r)*** y viceversa:

$$a_n=a_x\ r^{n-x} \quad (2.8) \qquad\qquad r=\sqrt[n-x]{\frac{a_n}{a_x}} \quad (2.9)$$

$$\boxed{a_x=\frac{a_n}{r^{n-x}}} \quad (2.10)$$

Si se **SUMAN** los términos de una progresión geométrica se tiene:

$$Sn=a_1+a_2\ +a_3+...+a_n$$

$$Sn=a_1+a_1\ r+a_1\ r^{2}+...+a_1\ r^{n-1} \qquad \boxed{1}$$

Podemos abreviar la expresión anterior $\boxed{1}$ multiplicando ambos miembros por:

$$Sn\ r=a_1 r+a_1\ \ r^2+a_1 r^3+...a_1\ \ r^n \qquad \boxed{2}$$

Ahora restando miembro a miembro la expresión $\boxed{2}$ de la $\boxed{1}$ nos queda:

$$n\text{-}Sn\ r=a_1\text{-}a_1\ \ r^n$$

Factorizando:

$$Sn\ (1\text{-}\ r)=a_1\ (1\text{-}\ r^{\ n}\ )$$

Despejando:

$$Sn = \frac{a_1\ (1\text{-}\ r^{\ n}\ )}{(1\text{-}r)} \qquad (2.11)$$

La anterior ecuación, también se puede expresar de la siguiente manera:

$$\boxed{Sn\ = \frac{a_1(\ r^n - 1)}{(\ r - 1)}} \qquad (2.12)$$

*Ejemplo 2.12* Encontrar el décimo término de la progresión geométrica: 36, -12, 4 ....

En este caso, $\boldsymbol{a_1=36,}$ $\boldsymbol{r=-1/3,}$ y $\boldsymbol{n=10,}$ entonces $a_n$ o $a_{10}$ se obtiene aplicando la fórmula (2.).

$$a_{10} = (36)\left(\frac{-1}{3}\right)^{10-1} = \frac{-3^2 * 4}{3^9} = \frac{-4}{3^7} = \frac{-4}{2.187}$$

*Ejemplo 2.13* Encuentre la suma de los primeros siete términos de la progresión geométrica $\frac{1}{2}$,**1**,**2 ...**

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad r = 2 \qquad n = 7$$

$$Sn = \frac{1}{2}\ \frac{(1-27)}{(1-2)} = \frac{1}{1}\ \frac{(1-128)}{-1} = \frac{1}{2}\ \frac{(-127)}{-1} = \frac{127}{2}$$

## RESUMEN CAPÍTULO 2: Nociones de Matemáticas Básicas

La **Ingeniería Económica** combina elementos de la economía, las finanzas y las matemáticas, por ello, así como es importante el dominio de conceptos básicos de Teoría Económica y Finanzas, se hace también indispensable el correcto manejo de las principales herramientas que ofrecen las matemáticas para abordar de manera eficiente la solución de problemas financieros a los que diariamente se enfrentan las personas, hogares y empresas.

El abordaje efectivo de problemas financieros requiere que el lector tenga un dominio importante de temas como: el orden de las operaciones, las ecuaciones, logaritmos, las progresiones aritméticas y las progresiones geométricas, entre otros conceptos desarrollados en este capítulo.

En este capítulo se han utilizado las siguientes ecuaciones:

$$X = \frac{-b \pm \sqrt[2]{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2.1)$$

$$a_n = a_i + (n-1)\,d \quad (2.2)$$

$$a_n = a_x + (n-x)d \quad (2.3)$$

$$d = \frac{a_n - a_x}{(n-x)} \quad (2.4)$$

$$a_x = a_n - (n-x)d \quad (2.5)$$

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (2.6)$$

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad (2.7)$$

$$a_n = a_x \; r^{n-x} \quad (2.8)$$

$$r = \sqrt[n-x]{\frac{a_n}{a_x}} \quad (2.9)$$

$$a_x = \frac{a_n}{r^{n-x}} \quad (2.10)$$

$$Sn = \frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)} \quad (2.11)$$

$$Sn = \frac{a_1(r^n-1)}{(r-1)} \quad (2.12)$$

Dónde: $a_n$=último término; $a_1$=primer término; $a_x$=x-ésimo término; $n$=número de total de términos; $d$=distancia aritmética entre términos; $r$=razón; $Sn$= suma de los n-términos.

## EJERCICIOS CAPÍTULO 2: Nociones de Matemáticas Básicas

1. Efectuar las operaciones indicadas:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **a.** | 5+(-3) | **f.** | 9 (-12) | **k.** | −30/(-3) |
| **b.** | 6-(-2) | **g.** | 5 (9) | **l.** | -80/(5) |
| **c.** | −8 (-6) | **h.** | (-8) (-10) | **m.** | 5+10*3-16/2 |
| **d.** | −10- (-4) | **i.** | (-3) (-7)(-5) | **n.** | −7(-2)+0+(-5) |
| **e.** | 125/5/5 | **j.** | 15/(-5) | | |

2. Redondear cada una de las cantidades siguientes a dos cifras decimales:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **a.** | 11,3825 | **e.** | 8,295 | **i.** | 0,1160 |
| **b.** | 9,6427 | **f.** | 0,0826 | **j.** | 205,951 |
| **c.** | 185,245 | **g.** | 15,2653 | **k.** | 79,0551 |
| **d.** | 22,255 | **h.** | 1,7958 | **l.** | 14,246 |

3. Evalúe lo siguiente:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **a.** | $(5/4)\ Y^3-(1/2)XY+32$ | *Si* | Y=1/7, | X=-3 |
| **b.** | $(0{,}83/2X)+(1/3)\ X^Y-4Y/3$ | *Si* | Y=-1/4, | X=2/5 |
| **c.** | $((3/7)/\ (1/X))+((7/9)Y)^{2/3}$ | *Si* | Y=1/2, | X=3/9 |

4. Resuelva mediante la incógnita y compruébelo.

   **a.** $4X/5=32+8X$
   **b.** $8Y=6Y+14$
   **c.** $Z+0{,}5Z=14$
   **d.** $874\ (1-0{,}04*(1/t))=883{,}99$
   **e.** $450\ (1-0{,}09*(m/180))=460{,}125$
   **f.** $50.000=500\ ((1+0{,}105/12)^n-1)/\ (0{,}105/12)\ (1+0{,}105/12)^n$

5. Resuelva mediante la constante de Proporcionalidad o por Regla de Tres compuesta:

   **a.** En un viaje una persona recorre en auto 2.400 *Km.* Viajando 6 horas diarias durante 8 días. ¿Cuántas horas diarias debería viajar para recorrer 3.000 *Km.* En 6 días?

   **b.** 8 personas tardaron 8 días trabajando 5 horas diarias para realizar una obra. ¿cuántos días demorarían 20 personas trabajando 4 horas diarias para realizar la misma obra?

   **c.** Un hotel que alberga 750 personas en total tiene provisión de alimentos para 15 días a razón de 3 comidas diarias. ¿Durante cuantos días se podrían alimentar 450 personas si se reducen a 2,5 las comidas diarias?

***Resuelva las siguientes progresiones aritméticas:***

6. El primer término de una progresión aritmética es -8, el último término es 256 y la suma es 5.580. Encontrar el número de términos y la diferencia común.

7. los términos quinto y noveno de una progresión aritmética son -22 y -59 respectivamente, encontrar el decimonoveno término.

8. Durante el primer año de trabajo un comerciante ahorra ₡580. A partir de entonces ahorra cada año ₡325 más que el año anterior. ¿Cuánto ahorró el año 10? ¿Cuánto habrá ahorrado al cabo de 13 años?

9. Los ahorros de 3 años de un hombre están en progresión aritmética. Si en los tres años ha ahorrado ₡2.400 y el primer ahorró la mitad de lo que ahorró el segundo. ¿Cuánto ahorró cada año?

10. El 2° y los 4 ° términos de una progresión aritmética suman 22 y el 3° y los 7 ° términos suman 34. ¿Cuáles son esos cuatro términos?

11. Las ganancias anuales de un comerciante durante 11 años están en progresión aritmética. El primer año ganó ₡1.180 y el último ₡6.180. ¿Cuánto más ganó en cada año a contar del segundo año, que en el anterior?

12. Las pérdidas de 5 años de una casa de comercio están en progresión aritmética. El último año perdió ₡3.000, y la pérdida de cada año fue de ₡300 menos que en el año anterior. ¿Cuánto perdió el primer año?

13. En una progresión aritmética de 12 términos el 1° y el 12° término suma 53 ½ ¿Cuál es la suma del 3° y el 10° término?

14. ¿Cuál es el 6° término de una progresión aritmética de 11 términos si su 1er. Término es –2 y el último –52?

***Resuelva las siguientes progresiones geométricas:***

15. Calcular la suma de los primeros 15 términos de la progresión 3,-6,12,-24,48…

16. En una progresión geométrica el tercero y quinto término son 3 y 27 respectivamente, hallar el noveno término y la suma de ellos.

17. Un padre promete dar a cada hijo ₡200 el primer día, ₡400 el segundo día y continúa doblando la cantidad cada día, durante un total de 14 días. ¿Qué cantidad le ha dado a cada hijo durante esos 14 días?

18. El producto del 3° y el 7° término de una progresión geométrica de 9 términos es 1/216. ¿Cuál es el producto del 1er. término por el último?

19. En una progresión geométrica de 5 términos el cuadrado del 3er termino es 4/81 Si el último término es 8/81, ¿cuál es el primero?

20. El 4° término de una progresión geométrica es ¼ y el 7° término 1/82. Hallar el 6° término.

21. Un hombre que ahorra cada año los 2/3 de lo que ahorró el año anterior, ahorró el 5° año ₡1.600. ¿Cuánto ha ahorrado en los 5 años?

22. La población de una ciudad ha aumentado en progresión geométrica de 59.049 almas que eran hace 20 años a 100.000 almas en el presente año. ¿Cuál es la razón de crecimiento por año?

23. Una persona ha ganado en cada año 1/3 de lo que ganó el año anterior. Si el 1er año ganó ₡24.300, ¿Cuánto ha ganado en 6 años?

# 3. EL INTERÉS SIMPLE

## PREÁMBULO

Este capítulo representa el primer contacto que tendrá el lector con los temas de Ingeniería Económica. Los capítulos precedentes, en forma sintética, abonan el terreno para que la inserción se lleve de manera efectiva. En el primer capítulo se validó la existencia del valor del dinero en el tiempo y por ello en las actividades financieras y personales donde se involucra manejo de dinero, se acostumbra a pagar un interés por el dinero prestado.

El **INTERÉS SIMPLE,** donde no existe capitalización de intereses, es de alguna manera un interés llevado a cabo de manera informal, pues no hace parte de las transacciones registradas en la contabilidad nacional. Las transacciones del interés simple corresponden a operaciones entre amigos, familiares, prestamistas de barrio (agiotistas) y con muy pocas empresas comerciales, como compraventas, tiendas de barrio, ventas de electrodomésticos, entre otros.

# 3.1. Definiciones

En todas las actividades económicas y financieras se acostumbra pagar un rédito por el uso del dinero prestado. La mayor parte de los ingresos de bancos y compañías inversionistas se deriva de los intereses sobre préstamos o del retorno de utilidades por inversiones. En general todas las operaciones comerciales están relacionadas con los réditos sobre los capitales en juego.

De acuerdo a lo anterior y tal como se estudió en el primer capítulo, el **INTERÉS** se entiende como el alquiler o rédito que se conviene pagar por un dinero tomado en préstamo, es decir, el precio que se debe pagar por el uso de éste. Cuando se trata del **INTERÉS SIMPLE,** los intereses causados o pagados no ganan a su vez interés (no se capitalizan), pues en este caso, no hay reinversión. Sus características son las siguientes:

***a.*** La tasa de interés ***(r)*** siempre se aplicará sobre el mismo capital inicial.

***b.*** Los intereses causados $(I_t)$ serán iguales en cada período.

***c.*** El capital inicial o valor presente ***(P)*** no varía durante todo el tiempo ***(t)*** de la operación financiera, pues los intereses $(I_t)$ no se le agregan

***d.*** Para obtener la fórmula que permitirá el cálculo del interés simple en una operación financiera, es preciso remontarnos a la ecuación (1.1) donde: r=I/P . Esta ecuación permitía encontrar la tasa de interés r a partir de un interés ***(I)*** y un valor presente ***(P)***, asumiendo que el periodo o tiempo de la operación ***(t)*** era de ***t=1***. Entonces para periodos de tiempo diferentes de uno (1) la ecuación (1.1) se puede expresar de la forma: ***r*t=I/P.*** De aquí se deriva la ecuación para obtener el interés simple,

$$\boxed{I=Prt} \quad (3.1)$$

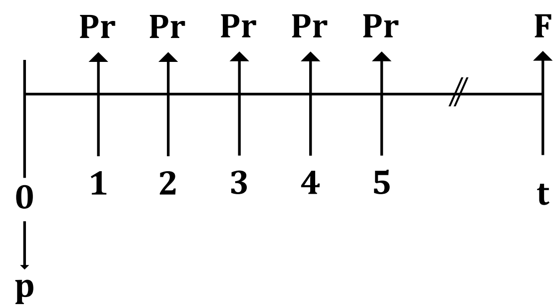
Dónde:
***I=*** Interés a pagar.
***P=*** Capital inicial o principal
***r=*** Tasa de interés por periodo.
***t=*** Tiempo

Desde otro punto de vista, dado un capital ***P,*** una tasa de interés ***r*** y un periodo de negociación ***t,*** el interés simple de cada periodo de tiempo $I_t$ se muestra en la siguiente tabla:

**TABLA 3.1. CALCULO DEL INTERÉS SIMPLE**

| *Periodo* | *Capital al principio del periodo* | *Intereses en el periodo ($I_t$)* | *Capital más intereses a final del periodo* |
|---|---|---|---|
| 1 | P | Pr | $P+Pr=P(1+r)$ |
| 2 | P | Pr | $P(1+r) + Pr=P(1+r+r)=P(1+2r)$ |
| 3 | P | Pr | $P(1+2r) + Pr=P(1+2r+r)=P(1+3r)$ |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| t | P | Pr | $P(1+(t-1)r) + Pr=P(1+(t-1)r+r)=P(1+rt)$ |

En forma gráfica se obtiene:




El interés total de la negociación ***I*** correspondería a la sumatoria de todos los intereses parciales $I_t$ Es decir.

$$I= \underbrace{Pr+Pr+Pr+Pr+...+Pr}_{t\text{- veces}}$$

Lo anterior, configura la sumatoria $S_n$ de una progresión aritmética donde:

$$a_1 =Pr,\ d= 0 \text{ y } n= t.$$

Aplicando la ecuación (2.1) del último término, se obtiene que $a_1 =a_n$, por cuanto $d=0$. Entonces, aplicando la ecuación (2.2) se tiene:

$$S_n = \frac{n2a_1}{2} \rightarrow S_n = a_1 n$$

Retomando los valores del ejemplo se tiene que ***I = Prt***, llegando a la ecuación (3.1).

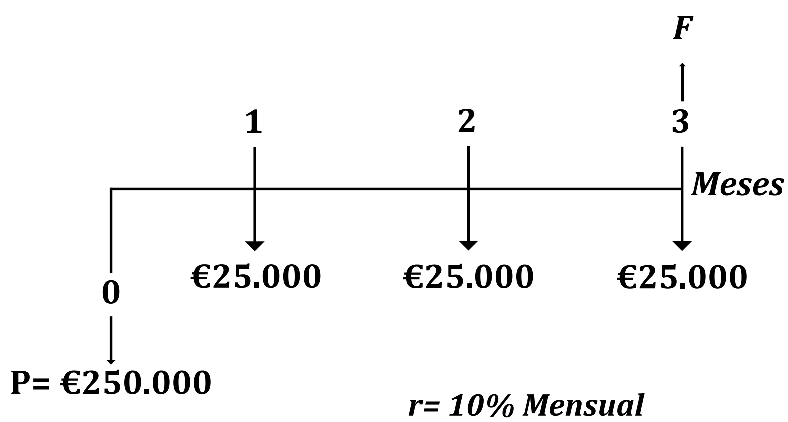
*Ejemplo 3.1* ¿Qué interés recibirán ₡250.000 prestados al 10% de interés simple mensual durante 3 meses?

Para la solución de este y cualquier ejercicio de Ingeniería Económica se recomienda la siguiente secuencia de pasos:

**PASO 1:** identificación de variables.

En este caso **P=₡250.000, r=0,10 y t=3**

**PASO 2:** elaboración diagrama de líneas de tiempo .




**PASO 3:** selección de fórmulas.

En este caso se utiliza la ecuación (3.1), ***I= Prt***

**PASO 4:** aplicación de fórmulas.

Se obtiene:

***I= Prt*=₡250.000*0,10*3=₡25.000+₡25.000+₡ 25.000 =₡ 75.000**

**Paso 5:** respues ta.

R/. ₡250.000 prestados al 10% de interés simple mensual durante 3 meses, recibirán ₡75.000 por concepto de interés.

## 3.2. El Monto a Interés Simple

El planteamiento de los problemas económico- financieros se desarrolla en torno a dos conceptos básicos: **Capitalización** y **Actualización.** El concepto de capitalización se refiere al estudio del valor en fecha futura o monto que se obtendrá o en que se convertirán los capitales colocados en fechas anteriores. El concepto de actualización se refiere al estudio del valor en la fecha actual o presente de capitales que se recibirán en fecha futura. En otras palabras, **Capitalizar** es trasladar capitales del presente al futuro, **Actualizar** es traer capitales del futuro al presente.

Entonces, **Monto** es la suma del capital inicial y los intereses generados en la operación, designado por la letra ***F,*** el cual conocimos también como **Valor Futuro** en el capítulo 1. De la ecuación (1.1) se obtiene que:

$$\boxed{F=P+I} \quad (3.2)$$

Como: $I= Prt$
según la ecuación (3.1),

Entonces: $F= P+ Prt$ ,
obteniendo la ecuación del Monto o Valor Futuro a interés simple:

$$\boxed{F=P\,(1 + rt)} \quad (3.3)$$

En esta ecuación, la tasa de interés ***(r)*** y el tiempo ***(t)*** deben estar expresados en la misma unidad de tiempo, en cumplimiento de la segunda regla de oro. En caso de diferencias, se recomienda ajustar la unidad de medida del tiempo a la unidad de medida de la tasa de interés, por presentar mayor facilidad. Así mismo, es importante tener en cuenta que, si la tasa de interés se da sin especificar explícitamente la unidad de tiempo, se supone que se trata de una tasa de interés anual.

*Ejemplo 3.2* ¿Una persona solicita un préstamo de ₡350.000 a pagar en 6 meses a una tasa de interés simple del 8% anual. ¿Qué monto deberá pagar?

**Paso 1:** identificación de variables.

***P=* ₡350.000**

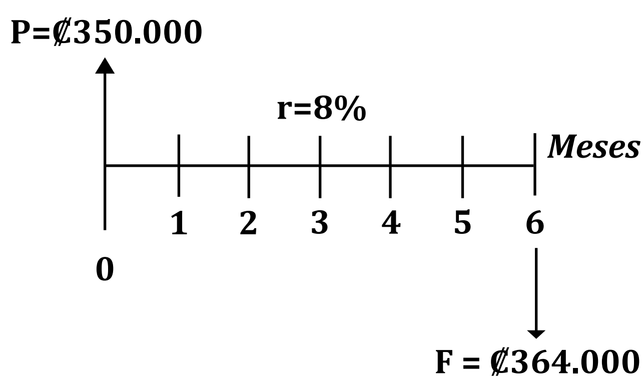
***r=* 0,08 *anual***

$$t = \frac{1}{2}\ \textit{años}$$

Expresamos 6 meses como medio año, por cuanto

$$t = 6\ \cancel{\text{meses}} * \frac{1\ \text{año}}{12\ \cancel{\text{meses}}} = \frac{1}{2}\ \text{año}$$

**Paso 2:** elaboración diagrama de líneas de tiempo.



**PASO 3:** selección de fórmulas.

En este caso se utiliza la ecuación (3.3), ***F= P (1+rt)***

**PASO 4:** aplicación de fórmulas.

Se obtiene:

$$F= P(1+rt)= ₡350.000\ (1*0{,}08*\tfrac{1}{2})=₡364.000$$

**PASO 5:** respuesta.

R/. La persona que solicita un préstamo de ₡350.000 a pagar en 6 meses a una tasa de interés simple del 8% anual, deberá pagar un monto de ₡364.000.

# 3.3. El Interés Exacto e Interés Ordinario

Cuando el plazo de una transacción a interés simple está dado en días y la tasa de interés es anual, es necesario convertir los días en términos de fracción de año para aplicar las fórmulas de interés simple, en cumplimiento de la segunda regla de oro. Cuando el interés se calcula utilizando un divisor de 360, se le denomina **INTERÉS ORDINARIO.** Cuando el divisor es de 365 o 366, se le **LLAMA INTERÉS EXACTO.**

*Ejemplo 3.3* Determinar el interés exacto y ordinario sobre un préstamo de ₡300.000 a 60 días, si la tasa es del 8% anual.

Interés Ordinario=

$$₡300.000*0{,}08*\frac{60}{360}=₡4.000$$

Interés Exacto=

$$₡300.000*0{,}08*\frac{60}{365}=₡3.950$$

## 3.4. Tiempo Exacto y Tiempo Aproximado

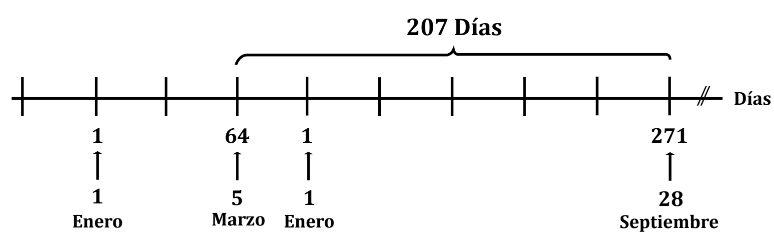
En operaciones financieras cuando la tasa de interés ***(r)*** está medida en años y el tiempo ***(t)*** está medido en días, en cumplimiento de la segunda regla de oro, se hace necesario calcular el tiempo en término de fracción de años. Para ello, es indispensable calcular los días exactos o aproximados entre las fechas calendario referidas. Días exactos o **Tiempo Exacto** es el tiempo real comprendido entre dos fechas calendario. Para su cálculo se debe acudir a la tabla 3.2 ubicada al final de este capítulo, donde el primero de enero representa el día número 1 del año y el 31 de diciembre representa el día 365 del año, o 366 cuando se trata de año bisiesto. Días aproximados o **Tiempo Aproximado** es el tiempo comprendido entre dos fechas calendario bajo el supuesto de que todos los meses tienen 30 días. Para su cálculo el número de meses se multiplica por 30 y se le agrega el número exacto de días que restan en el plazo de la operación.

La lógica para el cálculo de los tiempos es hacer la representación de estos sobre una recta numérica, donde el 31 de diciembre del año anterior representa el momento cero de la recta y los tiempos se calculan como intervalos entre fechas, dependiendo si se requiere tiempo exacto o tiempo aproximado.

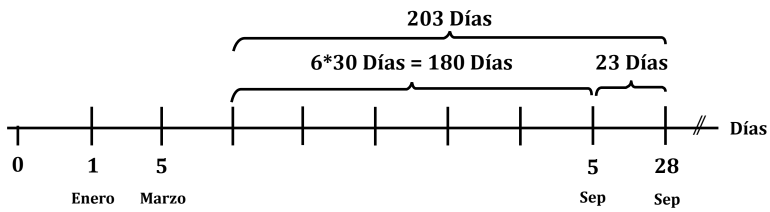
*Ejemplo 3.4* Determine el tiempo exacto y aproximado entre el 5 de marzo y el 28 de septiembre del mismo año.

Tiempo exacto: 28 de septiembre es el # 271 en la tabla 3.2
5 de marzo es el # 64 en la tabla 3.2

Tiempo exact o = 271 – 64 = 207 días



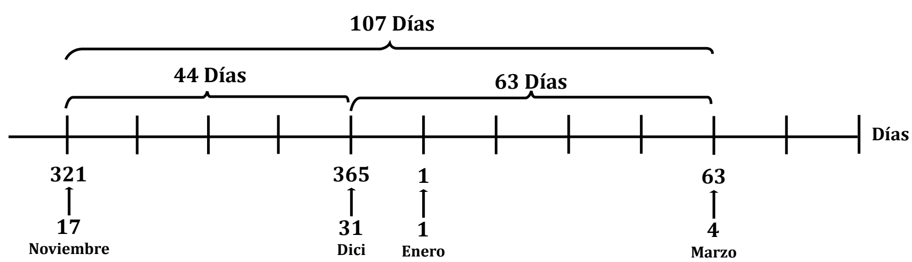

Tiempo apr oximado = 6 * 30 + (28-5) = 180 + 23 = 203 días.



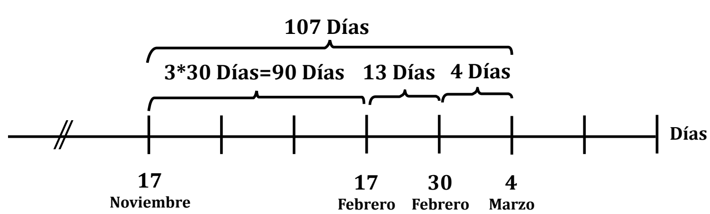

*Ejemplo 3.5* Determine el tiempo exacto y aproximado entre el 17 de noviembre de este año y el 4 de marzo del año entrante.

Tiempo exacto: 17 de noviembre es el # 321 en la tabla 3.2
4 de marzo es el # 63 en la tabla 3.2

Tiempo exact o = (365- 321) +63 = 107 días



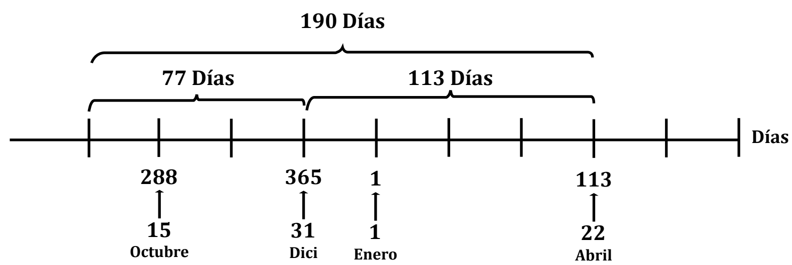

Tiempo apr oximado = 3 * 30 + (30-17) +4 = 90 +13+4 = 107 días.



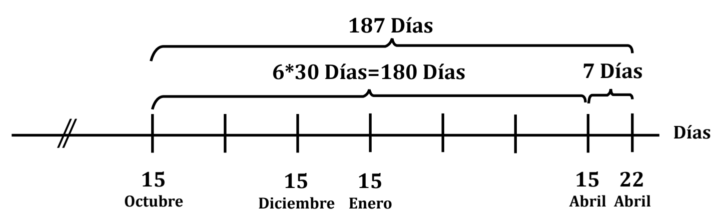
*Ejemplo 3.6* Determine el tiempo exacto y aproximado entre el 15 de octubre de este año y el 22 de abril del año entrante el cual es bisiesto.

Tiempo exacto: 15 de octubre es el # 288 en la tabla 3.2
22 de abril es el # 112 +1 =113 en la tabla 3.2

Tiempo exact o =(365- 288) +113 = 190 días




Tiempo apr oximado = 6 * 30 + (22-15) = 180 +7 = 187 días.




# 3.5. La Práctica Comercial

Debido a que el cálculo del Interés involucra el tiempo de la negociación, y es preciso ajustarlo a la misma unidad de medida de la tasa de interés, los temas 3.3 y 3.4 nos ofrecen cuatro posibilidades para un mismo problema financiero establecido entre dos fechas calendario, veamos el ejemplo.

*Ejemplo 3.7* El 15 de noviembre del año pasado, una señora solicitó en préstamo ₡500.000 al 25% de interés simple anual. La deudora liquidó la obligación el 20 de febrero de este año. Encuentre el interés simple.

Tiempo exacto: 15 de noviembre es el día # 319 de la tabla 3.2
20 de febrero es el día # 51 de la tabla 3.2

Tiempo exacto = (365- 319) +51 = 97 días

Tiempo aproximado = 3 * 30 + 5 = 90 +5 = 95 días.

A continuación, se presentan las cuatro combinaciones posibles:

$$\boldsymbol{I= Prt}\begin{cases} \textit{Interés Ordinario } (\div 360) & \begin{cases} \textit{Con Tiempo Exacto, } & I=500.00*0{,}25*\frac{97}{360} = 33.681 \Rightarrow \textit{Interés Bancario} \\ \textit{Con Tiempo Aproximado, } & I=500.00*0{,}25*\frac{95}{360} = 32.987 \Rightarrow \textit{Interés Comercial} \end{cases} \\ \textit{Interés Exacto } (\div 365)\ (\div 366) & \begin{cases} \textit{Con Tiempo Exacto, } & I=500.00*0{,}25*\frac{97}{365} = 33.219 \Rightarrow \textit{Interés Racional} \\ \textit{Con Tiempo Aproximado, } & I=500.00*0{,}25*\frac{95}{365} = 32.534 \Rightarrow \textit{Interés Ideal} \end{cases} \end{cases}$$

Como se aprecia, el Interés Bancario es el más costoso y por tanto el de más amplio uso en la actualidad, constituyéndose en La Práctica Comercial, al utilizar interés ordinario con tiempo exacto. Este interés favorece ampliamente al prestamista. El Interés Comercial , era muy utilizado en la antigüedad, por que facilitaba los cálculos manuales, al permitir simplificaciones. El Interés Racional, Real o Verdadero, produce un resultado exacto, y es equitativo entre agentes. El Interés que se ha denominado Ideal, en realidad no tiene nombre, sólo existe en teoría, pero es el más barato de todos, favoreciendo al acreedor. En los ejercicios subsiguientes, se trabajará entonces con La Práctica Comercial.

# 3.6. Valor Actual a Interés Simple

El Val or Actu al a interés simple se obtiene a partir de la ecuación (3.3) del Mont o con tan sólo despejar ***P*** de la fórmula, así:

$$F = P\,(1+rt)$$

Entonces

$$\boxed{P = \frac{F}{(1+rt)}} \quad (3.4)$$

**El Valor Actual o Valor Presente** de una suma, que vence en fecha futura es aquel capital que, a una tasa dada y en el período comprendido hasta la fecha de vencimiento, alcanzará un monto igual a la suma establecida.

La **Ingeniería Económica o Matemáticas** Financieras, pueden aplicarse para la obtención de la mejor respuesta a múltiples problemas financieros. Por ejemplo ¿Es preferible pagar al contado o a plazos? ¿Qué es mejor comprar o rentar un bien? ¿Se pagará sola esta máquina nueva con el rendimiento que produzca?, etc.

Un buen camino para elegir entre diferentes alternativas, consiste en comparar los valores actuales de los capitales asociados a tales alternativas.

*Ejemplo 3.8* Una persona puede adquirir una propiedad por ₡5.000 al contado o ₡5.400 dentro de un año. El posible comprador dispone los ₡5.000 para pagar en efectivo y duda en hacerlo o invertirlo al 7%. ¿Qué alternativa de pago le conviene y en qué medida?

**Identificación de variables:**

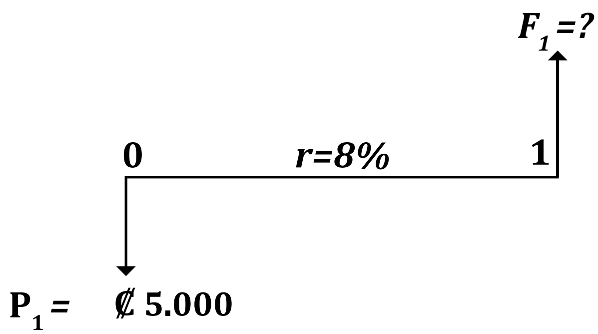
$$P_1 = ₡5.000$$
$$r = 0{,}07 \text{ anual}$$
$$t = 1 \text{ año} \quad F_2 = ₡5.400$$

En este caso se presentan dos alternativas, identificadas con los subíndices.

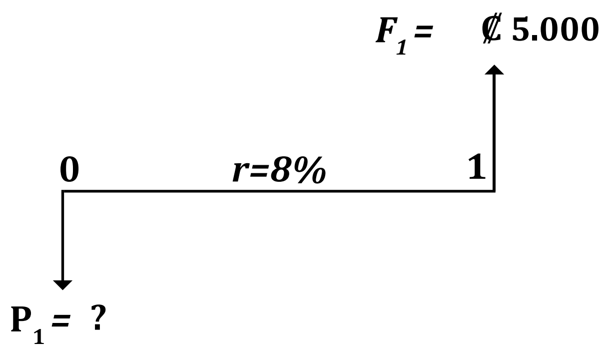
*Alternativa 1:* Comprar la propiedad hoy
*Alternativa 2:* Comprar la propiedad dentro de un año

Elaboración diagrama de líneas de tiempo.

**Alternativa 1.**




**Alternativa 2.**




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

En este caso se utiliza la ecuación (3.4),

$$P = \frac{F}{(1 + rt)}$$

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

Se obtiene:

$$P_2 = \frac{F}{(1+rt)} = \frac{\text{₡}5.400}{(1+0{,}07*1)} = \text{₡}5.046{,}73$$

**Respuesta.** R/. La alternativa de pago que conviene es comprar de contado, es decir, la alternativa 1. Este resultado significa que el comprador tendría que invertir ₡5.046,73 en este momento al 7% para obtener ₡5.400 al cabo de 1 año (alternativa 2). Por tanto, si paga al contado el comprador se ahorra ₡46,73 (₡5.046,73- ₡5.400) en el momento actual.

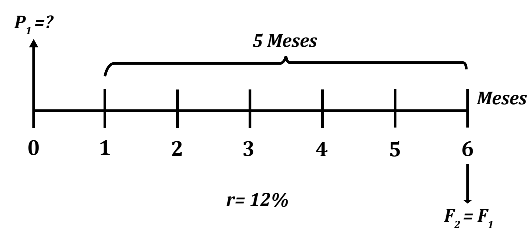
*Ejemplo 3.9* Una persona acepta un crédito de ₡2.000 a pagar en 6 meses, con interés del 9%. Un mes después que se formalizó el contrato, su poseedor decide venderlo a un tercero, quien decide calcular el valor actual del vencimiento del crédito a una tasa de interés simple del 12%. ¿Qué cantidad recibirá por el documento su poseedor?

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES:**

$$P_1 = ₡2000;$$
$$F_1 = F_2 = ?;$$
$$t_1 = 6 \text{ Meses} * \frac{1 \text{ año}}{12 \text{ meses}} = \frac{1}{2} \text{ años};$$
$$t_2 = 5 \text{ Meses}$$
$$P_2 = ?;$$
$$r_1 = 0{,}09;$$
$$r_2 = 0{,}12;$$

**ELABORACIÓN DIAGRAMA DE LÍNEAS DE TIEMPO.**

(Punto de vista del prestamista)




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

En este caso se utilizan las ecuaciones (3.3) y (3.4) para hallar F2 y P2 respectivamente.

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

Se obtiene:

$$F_1 = F_2 = P(1+rt) = ₡2.000\ (1+0{,}09*\tfrac{1}{2}) = ₡2.090$$

$$P_2 = \frac{F_2}{1+rt} = \frac{₡2.090}{(1+0{,}12*\frac{5}{12})} = ₡1.990{,}48$$

**Respuesta.** R/. El comprador del título "Presta" ₡1.990,48 a su poseedor, a cambio de recibir ₡2090 después de 5 meses, si la tasa de interés es del 12% simple anual.

# 3.7. Cálculo de la Tasa de Interés Simple

En algunas operaciones financieras es conveniente hallar la tasa de interés ***(r)*** a la cual una inversión producirá su determinado Monto. Esta variable se puede obtener a partir de la fórmula original del Monto (3.3), como se observa a continuación:

$F = P\ (1 + rt)$ → Despejando r, Tenemos:

$$\frac{F}{P} = (1+rt);$$

$$\frac{F}{P} - 1 = rt; \quad \rightarrow$$

$$\boxed{r = \frac{(\frac{F}{P} - 1)}{t}} \quad (3.5)$$

*Ejemplo 3.10* ¿Qué tasa de interés simple se requiere para que ₡500 se conviertan en ₡600 en 6 meses?

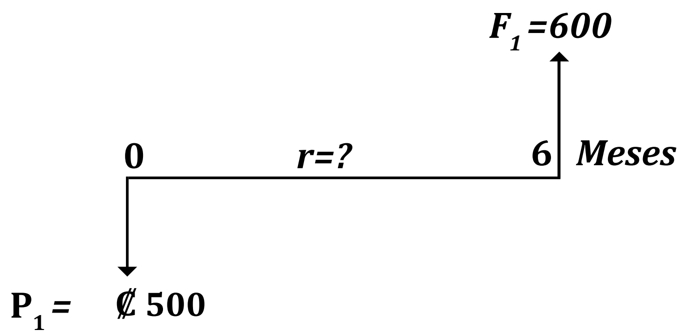
**Identificación de variables:**

$P =\ ₡500\ ;$

$F =\ ₡600\ ;$

$$t = \frac{6\ \textit{Meses} * (1\ \textit{año})}{12\ \textit{meses}} = \frac{1}{2}\ \textit{años}$$

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

En este caso se utiliza la ecuación (3.5), $r = \frac{\left(\frac{F}{P} - 1\right)}{t}$

**Aplicación de fórmulas.**

Se obtiene:

$$r = \frac{\left(\frac{₡\,600}{₡\,500} - 1\right)}{\frac{1}{2}\,\textit{Años}} = \frac{0{,}2}{\frac{1}{2}\,\textit{Años}} = \frac{0{,}4}{\textit{Años}} = 40\%\ \textit{Anual}$$

**Respuesta.**

R/. La tasa de interés simple que se requiere es del 40% anual

# 3.8. Cálculo del Tiempo de la Negociación

De la misma manera que para el cálculo de la tasa de interés, algunas operaciones financieras requieren hallar el tiempo ***(t)*** que requiere un capital ***(P)*** para que se convierta en un valor futuro ***(F)*** dada una tasa de interés ***(r).*** Esta variable se puede obtener a partir de la fórmula original del Monto (3.3), como se observa a continuación:

$F=P\,(1+rt)$ → Despejando t,Tenemos:

$$\frac{F}{P}=(1+rt) \qquad \frac{F}{P}=-1=rt)$$

$$\boxed{t=\frac{\left(\frac{F}{P}-1\right)}{r}} \quad (3.6)$$

*Ejemplo 3.11* ¿En cuánto tiempo ₡3.000 se convertirán en ₡3.600 si la tasa de interés simple pactada es del 10%?

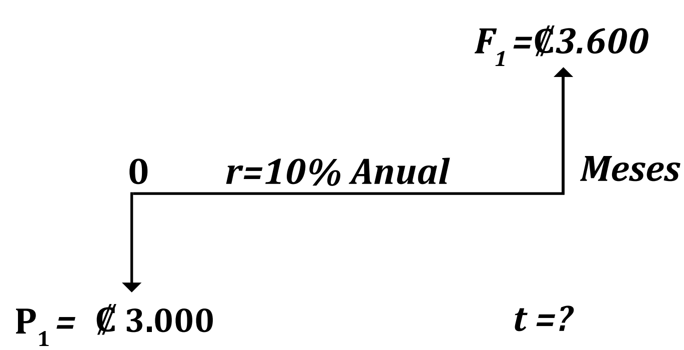
**Identificación de variables:**

***P=*** ***₡ 3.000 ;***

***F=*** ***₡ 3.600 ;***

***r=*** ***10% Anual*** $\frac{0.1}{\text{Años}}$

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**



**Selección de fórmulas.**

En este caso se utiliza la ecuación (3.6), $t = \frac{(\frac{F}{P} - 1)}{r}$

**Aplicación de fórmulas.**

Se obtiene:

$$t = \frac{(\frac{₡\,3.600}{₡\,3.600} - 1)}{\frac{0,1}{Años}} = \frac{0,2}{\frac{0,1}{Años}} = 2 \text{ años}$$

**Respuesta.**

R/. ₡3.000 se convertirán en ₡3.600 en 2 años, si la tasa de interés simple pactada es del 10%.

## 3.9. El Descuento Bancario, Interés Adelantado

En muchas operaciones financieras, el cálculo de los intereses se efectúa con base en el Mont o o val or Final *(F)*, en lugar de hacerlo sobre el valor actual como se ha hecho hasta ahora. El recargo así obtenido se denomina Descuent o Bancario o simplemente Descuent o *(D).* El dinero que recibe la persona quien solicita el préstamo se conoce con el nombre de Val or Descont ado *(P).* A la tasa porcentual utilizada en el cálculo del descuento se le denomina Tasa de Descuent o Bancaria *(d)*. Entonces, aplicando lo anterior se obtiene que:

$$\boxed{D = Fdt} \quad (3.7)$$

De otro lado,

$$\boxed{P = F - D} \quad (3.8) \qquad \boxed{P = F\,(1 - dt)} \quad (3.9)$$

Valor actual del Préstamo

Ahora, despejando F de la ecuación (3.9) se obtiene el valor del Monto:

$$\boxed{F=\frac{P}{1-dt}} \quad \text{(3.10)}$$

*Ejemplo 3.12* Una persona desea disponer mediante un crédito de ₡2.000 al contado en este momento y pagarlos al cabo de 6 meses. Si solicita el dinero a un banco que carga a sus préstamos una tasa de descuento del 6%. ¿Qué capital debe solicitar en préstamo?

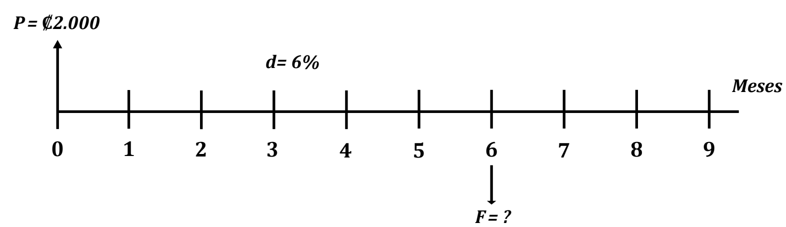
### Identificación de variables:

***P= ₡ 2.000 ;***

***t= 6 meses ;***

***d= 6% Anual***

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

En este caso se utiliza la ecuación (3.7), (3.8) y (3.10)

$$D= Fdt \qquad P= F-D \qquad F=\frac{P}{1-dt}$$

### Aplicación de fórmulas.

Se obtiene:

$$F=\frac{₡\ 2.000}{1-0{,}06*\frac{1}{2}} = ₡\ 2.061{,}86$$

$$D = ₡\ 2.061,86 * 0,06 * \frac{1}{2} = ₡\ 61,86$$

$$P = ₡\ 2.061,86 - ₡\ 61,86 = ₡\ 2.000$$

**Respuesta.**

R/. El capital que debe solicitar en préstamo para disponer hoy de ₡2.000 y pagarlos en 6 meses con una tasa de descuento del 6% es de ₡2.061.

## 3.10. Equivalencia entre Interés Simple y Descuento Bancario

Establecer relaciones entre estos temas, es como establecer una relación entre Interés Vencido e Interés Anticipado. Esta relación se puede materializar entonces entre Tasa de Interés Vencido y Tasa de Interés Anticipado.

En interés simple, la tasa vencida u ordinaria es aquella en la cual el pago de intereses se hace al final del período, y se la representa por ***r.*** En la tasa anticipada en cambio, los intereses se pagan anticipadamente, o sea al principio del período. Se representa por ***d*** y en este caso los intereses se cobran sobre el valor final del documento.

Podemos encontrar equivalencia entre estas tasas, de tal manera que ambos conlleven al mismo resultado.

Puesto que la tasa de interés ***r*** es igual al interés pagado sobre el capital inicial ***P,*** de la ecuación (3.5) tenemos:

$$r = \frac{\left(\frac{F}{P} - 1\right)}{t} \rightarrow \frac{F}{P} = rt + 1 \qquad \boxed{1}$$

Cuando se cobra interés anticipado, por definición, los intereses se calculan sobre el valor final del documento, tal como se observó en el descuento bancario, esto es:

$$P = F\,(1 - dt) \rightarrow \frac{F}{P} = \frac{1}{1 - dt} \qquad \boxed{2}$$

Combinando las ecuaciones $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ se tiene que:

$$rt + 1 = \frac{1}{1-dt} \rightarrow rt - rtd^2 + 1 - dt = 1$$

$$rt - rdt^2 = dt \rightarrow$$ simplificando por ***t***,se tiene:

$$r - rdt = d \quad \boxed{3}$$

De $\boxed{3}$ se obtiene que:

$$r\,(1-dt) = d$$

entonces,

$$\boxed{r = \frac{d}{1-dt}} \quad (3.11)$$

Así mismo, de $\boxed{3}$ se tiene que:

$$r = rdt + d \rightarrow r = d(1+rt)$$

entonces,

$$\boxed{d = \frac{r}{1+rt}} \quad (3.12)$$

*Ejemplo 3.13* Hallar una tasa ordinaria o vencida que produzca el mismo resultado que el 3% mensual anticipado.

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES:**

***d*= 3% mensual ;**

***r*= ? ;**

***t*= 1**

**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

En este caso se utiliza la ecuación (3.11)

$$r = \frac{d}{1-dt}$$

### Aplicación de fórmulas.

Se obtiene:

$$r = \frac{0{,}03}{1 - 0{,}03} = 3{,}09\%$$

### Respuesta.

R/. Una tasa del 3,09% mensual produce el mismo resultado que una tasa del 3% mensual adelantado.

*Ejemplo 3.14* ¿Qué tasa anticipada produciría el mismo valor futuro para un capital de ₡500 invertidos al 4% durante 9 meses? Hallar una tasa ordinaria o vencida que produzca el mismo resultado que el 3% mensual anticipado.

### Identificación de variables:

$r =$ 4% anual;

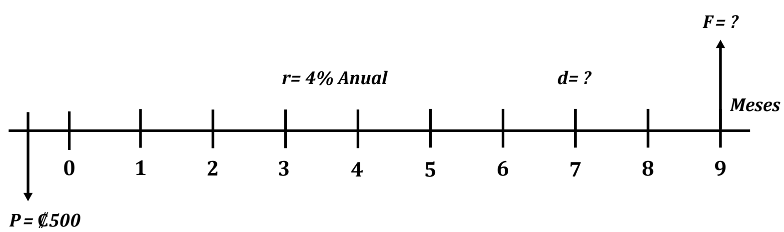
$P =$ ₡500;

$t =$ $9\,meses = 9\cancel{meses} * \frac{1 año}{12\cancel{meses}} = \frac{3}{4}$ años;

$d = ?$;

$F = ?$

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

En este caso se utilizan las ecuaciones (3.3), (3.12) y (3.10)

### Aplicación de fórmulas.

Aplicando la ecuación (3.12) Se obtiene:

$$d=\frac{0{,}04}{1+0{,}04*\frac{3}{4}}=3{,}88\%$$

Ahora comparamos las equivalencias:

Según la ecuación (3.3):

$$F=P(1+rt)=₡500\left(1+0{,}04*\tfrac{3}{4}\right)=₡515$$

Ahora utilizando ***d*** en la ecuación (3.10) se tiene:

$$F=\frac{P}{1-dt}=\frac{₡500}{1-0{,}0388*\frac{3}{4}}=₡515$$

**RESPUESTA.**

R/. La tasa anticipada que produciría el mismo valor futuro para un capital de ₡500 invertidos al 4% durante 9 meses, es 3,88%.

## 3.11. Las Ecuaciones de Valor a Interés Simple

Es común en el mundo de los negocios que una persona decida en determinado momento, ponerse de acuerdo con su acreedor y cambiar la forma de pagar una obligación (u obligaciones) que haya pactado inicialmente, mediante el pago de otras obligaciones (u obligación) en fechas diferentes, con la condición de que ambos conjuntos de obligaciones sean equivalentes en valor. Desde luego, que para efectuar este cambio, tanto deudor como acreedor deben ponerse de acuerdo con la tasa de interés (r) que ha de utilizarse en la transacción y en los plazos en que se llevará a cabo dicha combinación de capitales.

En atención a la segunda y tercera regla de oro, vistas en el primer capítulo, es muy importante tener en cuenta que siempre que se desee combinar diferentes capitales ubicados en diferentes periodos de tiempo, éstos deberán trasladarse a una misma fecha, conocida como fecha local (***ff***) o punto de comparación. Cuando todos y cada uno de los capitales se hayan trasladado a esta fecha focal, entonces se puede plantear una Ecuación de Val or y determinar así los capitales de cuantía desconocida.

En las Ecuaciones de Val or, se encuentran los principales conceptos de la Ingeniería Económica vistos hasta el momento. Las mismas, se fundamentan en el valor del dinero en el tiempo y el concepto de equivalencia, haciéndose indispensable para su cálculo que la ∑ de las obligaciones sea igual a la ∑ de los pagos en fecha focal. El lector podrá verificar a cuenta de la práctica, que para el caso del interés simple, la ubicación de la fecha focal determina variaciones aunque pequeñas, en los capitales de cuantías desconocidas a calcular, volviendo importante el acuerdo sobre ella.

*Ejemplo 3.15* En la fecha de hoy el Señor W debe al Señor Z ₡1.000 pagaderos dentro de 6 meses, sin interés y ₡2.500 con interés simple del 12% anual por año y medio, con vencimiento de 9 meses. El señor Z está de acuerdo en recibir 3 pagos iguales así: uno de inmediato, otro dentro de 6 meses y el tercero dentro de doce meses. Determinar el valor de cada pago, utilizando como fecha focal dentro de seis meses y suponiendo que se espera un rendimiento del 15% anual en la operación.

**Identificación de variables:**

Designaremos por $O_n$ las obligaciones y por $PG_n$ los pagos, entonces tenemos:

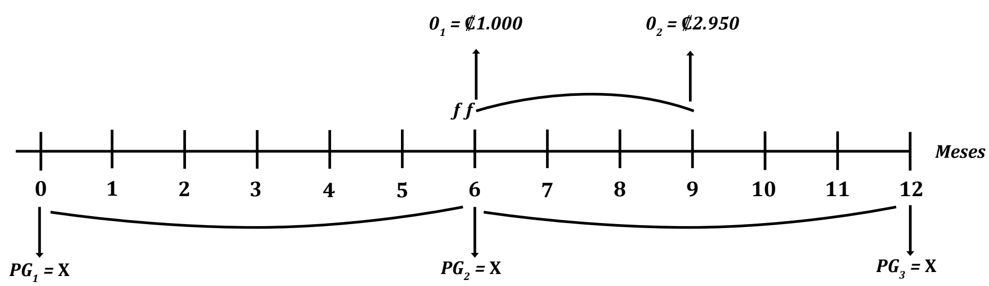
$$O_1 = ₡1.000\ ;$$

$$O_2 = ₡2.500(1+0{,}12*1{,}5) = ₡2.950;$$

$$r = 15\%\ \text{anual};$$

$$PG_1 = PG_2 = PG_3 = X$$

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

En este caso se utilizan las ecuaciones (3.3) y (3.4)

**Aplicación de fórmulas.**

*(Planteamiento de la Ecuación de Valor)*

Bajo la condición de que ∑*Obligaciones*=∑*Pagos,*en *fecha focal* se tiene:

$$O_1+\frac{O_2}{(1+0{,}15*\frac{3}{12})}= PG_1\ (1+0{,}15*\frac{3}{12})+PG_2+\frac{PG_3}{(1+0{,}15*\frac{6}{12})}\rightarrow$$

Reemplazando valores tenemos:

$$₡1.000+\frac{₡2.950}{(1{,}0375)}=X(1{,}075)+X+\frac{X}{(1{,}075)}\rightarrow$$

Despejando X,se tiene que X=

***₡1.278,89***

**Respuesta.**

R/. El valor de los tres pagos que reemplaza la obligación inicial es de ₡1.278,89 cada uno.

*Ejemplo 3.16* Una persona obtuvo un préstamo de ₡2.000 al 15% de interés simple el día 1° de enero de este año, que debe restituir mediante dos pagos de igual cuantía uno dentro de seis meses y otro al cabo de un año. Si se acordó utilizar como fecha focal el 1° de junio de este año (seis meses después de pactada la obligación), determinar la cuantía de los pagos.

**Identificación de variables:**

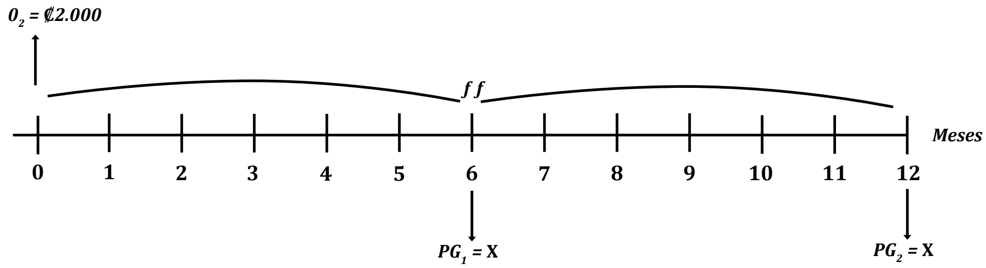
Designaremos por $O_n$ las obligaciones y por $PG_n$ los pagos, entonces tenemos:

$$O_1=₡2.000$$

$$r=15\%\ anual;$$

$$PG_1 = PG_2 = X$$

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

En este caso se utilizan las ecuaciones (3.3) y (3.4)

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

*(Planteamiento de la Ecuación de Valor)*

Bajo la condición de que ∑*Obligaciones*=∑*Pagos,*en *fecha focal* se tiene:

$$O_1 = PG_1 + \frac{PG2}{(1+0{,}15*\frac{6}{12})} \rightarrow$$

Reemplazando valores tenemos:

$$₡2.000 = X + \frac{X+}{(1{,}075)} \rightarrow$$

Despejando X, se tiene que

$$X= ₡1.036{,}14$$

**RESPUESTA.**

R/. El valor de los dos pagos que reemplaza la obligación inicial es de ₡1.036,14 cada uno.

# 3.12. Análisis de Inversión a Interés Simple

Las ecuaciones de valor se emplean a menudo en la valuación de activos. Adquirir un activo implica un desembolso inmediato por su costo de adquisición, seguido de un flujo de ganancias y gastos en el tiempo. Antes de tomar alguna decisión respecto a cualquier inversión, es importante tratar de predecir los resultados favorables o negativos de la misma. El análisis de los flujos de caja es una útil y poderosa técnica para estudiar los problemas de inversión. Tanto la localización en el tiempo como la cuantía de los flujos de caja deben tenerse en cuenta al momento de efectuar decisiones de inversión (Cissell, et. al., 96).

Existen dos métodos fundamentales de utilizar los flujos de caja para el análisis de inversiones. El primero es el *Valor Actual Neto (VAN)* o *Valor Presente Neto (VPN)* consistente en actualizar todos los valores del flujo de caja. Si VAN >Ø, la inversión es rentable, si VAN < Ø la inversión no es recomendable. El segundo es la Tasa Interna de Retorno (TIR), que corresponde a aquella tasa de interés donde el VAN del proyecto es igual a cero. Para su cálculo se utiliza el método de ensayo y error. Si TIR>TIO el proyecto es rentable, si TIR < TIO la Inversión no es atractiva. TIO representa la Tasa de Interés de Oportunidad para el inversionista, vista en el primer capítulo.

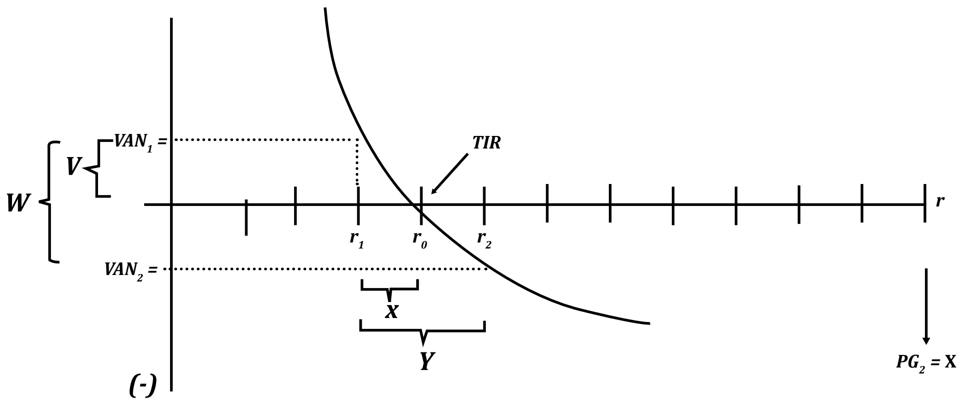
La manera más fácil de obtener el VAN es a través de la siguiente ecuación:

$$\boxed{VAN= -I_0 + \frac{\sum_{t=1}^{T} Y_t}{(1+rt)} - \frac{\sum_{t=1}^{T} C_t}{(1+rt)}} \quad (3.13)$$

Dónde:

***VAN=*** Valor Actual Neto
$I_o$= Inversión Inicial
$Y_t$= Ingresos en el periodo t
$t$= periodo de tiempo donde ocurre el hecho económico
$C_t$= Egresos o Costos en el Periodo t
$r$= tasa de interés de oportunidad o TIO
$T$= Tiempo total de duración del proyecto

Para el cálculo de la TIR en este momento de la temática, se utilizará el método de ensayo y error. En este método se proponen tasas de interés y se encuentran diferentes VAN, hasta encontrar los dos VAN más cercanos a cero tanto por la derecha como por la izquierda, es decir un VAN < 0 y un VAN >0, los más cercanos posibles y luego interporlar estos valores, bajo la relación que existe entre los VAN y las tasas de interés que los generan. Gráficamente, es lo siguiente:




Dónde:

X es la distancia entre $r_1$ y $r_0$
Y es la distancia entre $r_1$ y $r_2$
V es la distancia entre 0 y $VAN_1$,
W es la distancia entre $VAN_1$ y $VAN_2$

Una vez obtenidos $VAN_1$ con $r_1$ y $VAN_2$ con $r_2$, se procede a realizar la interpolación para obtener $r_0$ que corresponde a la TIR donde VAN≅0.

Interpolación:

***Tasa*** ***VAN***

$$Y\left\{\begin{array}{l} X\left\{\begin{array}{l} r_1 \\ r_0 \end{array}\right. \\ \\ r_2 \end{array}\right.\qquad \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} VAN_1 \\ \emptyset \end{array}\right\} V \\ \\ VAN_2 \end{array}\right\} W$$

Siguiendo el concepto de proporciones y la relación que guarda el VAN con su respectiva tasa, se tiene:

$$\frac{X}{Y} = \frac{V}{W}$$

Como los valores de V, W, e Y son conocidos, se procede a despejar X

$$X = \frac{V*Y}{W}$$

Ahora tenemos que

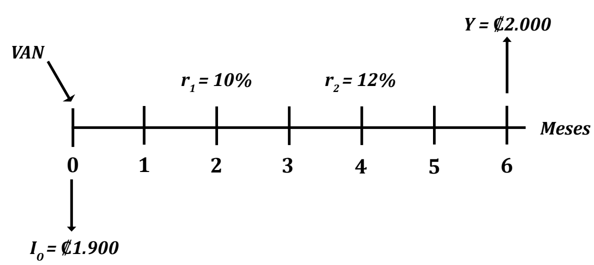
$$r_1 + X = r_0 = TIR$$

*Ejemplo 3.17* Se espera que un proyecto que necesita una inversión de ₡1.900 produzca un ingreso de ₡2.000 al cabo de 6 meses. ¿Cuál será el VAN si r=10%, o r=12%?¿Cuál será la TIR?

**Identificación de variables:**

| | |
|---|---|
| $I_0 = ₡1.900;$ | $VAN_{10\%} = ?;$ |
| $Y_t = ₡2.000;$ | $VAN_{12\%} = ?;$ |
| $t = 6 \text{ meses} = \frac{1}{2} \text{ año}$ | $TIR = ?$ |
| $r_1 = 10\%;$ | |
| $r_2 = 12\%;$ | |

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

En este caso se utiliza la ecuación (3.13)

$$VAN= -I_0 + \frac{\sum_{t=1}^{T} Y_t}{(1+rt)} - \frac{\sum_{t=1}^{T} C_t}{(1+rt)}$$

y la ecuación (3.5)

$$r = \frac{\left(\frac{F}{P}-1\right)}{t}$$

**Aplicación de fórmulas.**

Se obtiene:

$$VAN_{10\%} = -₡1.900 + \frac{₡2.000}{\left(1+0{,}10*\frac{1}{2}\right)} - 0 = ₡4{,}76$$

$$VAN_{12\%} = -₡1.900 + \frac{₡2.000}{\left(1+0{,}12*\frac{1}{2}\right)} - 0 = -₡13{,}21$$

Como se observa en la gráfica, dado que este ejemplo no reviste mucha complejidad, el cálculo de la TIR se remite a calcular una tasa de interés dado un valor inicial, un monto y un tiempo establecido, es decir,

$$r= TIR = \frac{\left(\frac{F}{P}-1\right)}{t} = \frac{\left(\frac{₡\,2.000}{₡\,1.900}-1\right)}{0{,}5} = 10{,}53\%$$

**Respuesta.**

R/. Si el inversionista tiene una TIO=10%, entonces el proyecto es atractivo porque su VAN=₡4,76, pero si tiene una TIO=12%, entonces el proyecto no resulta ser atractivo por cuanto produce una VAN=-₡13,21, es decir, le produciría una pérdida neta en fecha actual. Lo anterior está indicando claramente que el proyecto genera una TIR entre el 10% y el 12%, y en efecto TIR=10,53%, pues es la tasa que permite que en 6 meses ₡1.900 se conviertan en ₡2.000.

*Ejemplo 3.18* Una compañía puede destinar ₡3.600 a una inversión de la que espera un ingreso de ₡1.000 en 6 meses y de ₡3.000 dentro de 1 año. Calcular la tasa de rendimiento interno de la inversión.

### Identificación de variables:

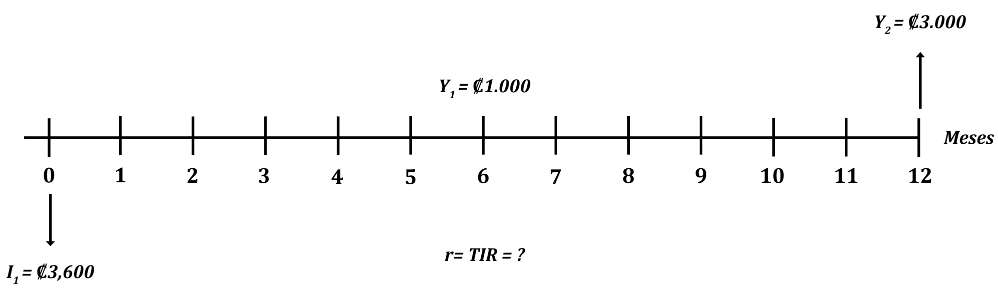
$I_0 = ₡3.600;$ $t_2 = 1 \text{año};$

$Y_1 = ₡1.000;$ $TIR = ?$

$Y_2 = ₡3.000;$

$t_1 = \frac{1}{2} \text{año};$

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

En este caso se utiliza la ecuación (3.13)

$$VAN = -I_0 + \frac{\sum_{t=1}^{T} Y_t}{(1 + rt)} - \frac{\sum_{t=1}^{T} C_t}{(1 + rt)}$$

y el procedimiento de ensayo y error para el cálculo de la TIR.

### Aplicación de fórmulas.

Se obtiene:

$$VAN_{12\%} = -₡3.600 + \frac{₡1.000}{(1 + 0,12 * \frac{1}{2})} + = \frac{₡\,3,000}{(1 + 0,12*1)} = ₡21,57$$

$$VAN_{14\%} = -₡3.600 + \frac{₡1.000}{(1 + 0,14 * \frac{1}{2})} + = \frac{₡\,3,000}{(1 + 0,14*1)} = -₡33,84$$

Con estos valores procedemos a realizar la interpolación:

$$\begin{array}{lcc} & \textbf{Tasa} & \textbf{VAN} \end{array}$$

$$2\%\left[\begin{array}{ll} X\left[\begin{array}{l}12\% \\ r\end{array}\right. & \left.\begin{array}{r}21,57 \\ ø\end{array}\right]21,57 \\ 14\% & -33,84\% \end{array}\right]55,51$$

$$\frac{X}{2\%} = \frac{21,57}{55,41} \quad \rightarrow \quad d=0,78\%$$

$$12\%+X = r = TIR = 12\%+0,78 = 12,78\%$$

**Respuesta.**

R/. La TIR que permite que una inversión de ₡3.600 genere ₡1.000 al cabo de seise meses, y ₡3.000 dentro de un año, es 12,78%. Con esta tasa el inversionista no tendría utilidades pero tampoco pérdidas traídas a valor presente, indicando un VAN≅0.

**TABLA 3.2. TABLA PARA CALCULAR EL NÚMERO EXACTO DE DÍAS**

| *Día Mes* | *Ene* | *Feb* | *Mar* | *Abr* | *May* | *Jun* | *Jul* | *Ago* | *Sep* | *Oct* | *Nov* | *Dic* |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 32 | 60 | 91 | 121 | 152 | 182 | 213 | 244 | 274 | 305 | 335 |
| 2 | 2 | 33 | 61 | 92 | 122 | 153 | 183 | 214 | 245 | 275 | 306 | 336 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | 3 | 34 | 62 | 93 | 123 | 154 | 184 | 215 | 246 | 276 | 307 | 337 |
| 4 | 4 | 35 | 63 | 94 | 124 | 155 | 185 | 216 | 247 | 277 | 308 | 338 |
| 5 | 5 | 36 | 64 | 95 | 125 | 156 | 186 | 217 | 248 | 278 | 309 | 339 |
| 6 | 6 | 37 | 65 | 96 | 126 | 157 | 187 | 218 | 249 | 279 | 310 | 340 |
| 7 | 7 | 38 | 66 | 97 | 127 | 158 | 188 | 219 | 250 | 280 | 311 | 341 |
| 8 | 8 | 39 | 67 | 98 | 128 | 159 | 189 | 220 | 251 | 281 | 312 | 342 |
| 9 | 9 | 40 | 68 | 99 | 129 | 160 | 190 | 221 | 252 | 282 | 313 | 343 |
| 10 | 10 | 41 | 69 | 100 | 130 | 161 | 191 | 222 | 253 | 283 | 314 | 344 |
| 11 | 11 | 42 | 70 | 101 | 131 | 162 | 192 | 223 | 254 | 284 | 315 | 345 |
| 12 | 12 | 43 | 71 | 102 | 132 | 163 | 193 | 224 | 255 | 285 | 316 | 346 |
| 13 | 13 | 44 | 72 | 103 | 133 | 164 | 194 | 225 | 256 | 286 | 317 | 347 |
| 14 | 14 | 45 | 73 | 104 | 134 | 165 | 195 | 226 | 257 | 287 | 318 | 348 |
| 15 | 15 | 46 | 74 | 105 | 135 | 166 | 196 | 227 | 258 | 288 | 319 | 349 |
| 16 | 16 | 47 | 75 | 106 | 136 | 167 | 197 | 228 | 259 | 289 | 320 | 350 |
| 17 | 17 | 48 | 76 | 107 | 137 | 168 | 198 | 229 | 260 | 290 | 321 | 351 |
| 18 | 18 | 49 | 77 | 108 | 138 | 169 | 199 | 230 | 261 | 291 | 322 | 352 |
| 19 | 19 | 50 | 78 | 109 | 139 | 170 | 200 | 231 | 262 | 292 | 323 | 353 |
| 20 | 20 | 51 | 79 | 110 | 140 | 171 | 201 | 231 | 263 | 293 | 324 | 354 |
| 21 | 21 | 52 | 80 | 111 | 141 | 172 | 202 | 233 | 264 | 294 | 325 | 355 |
| 22 | 22 | 53 | 81 | 112 | 142 | 173 | 203 | 234 | 265 | 295 | 326 | 356 |
| 23 | 23 | 54 | 82 | 113 | 143 | 174 | 204 | 235 | 266 | 296 | 327 | 357 |
| 24 | 24 | 55 | 83 | 114 | 144 | 175 | 205 | 236 | 267 | 297 | 328 | 358 |
| 25 | 25 | 56 | 84 | 115 | 145 | 176 | 206 | 237 | 268 | 298 | 329 | 359 |
| 26 | 26 | 57 | 85 | 116 | 146 | 177 | 207 | 238 | 269 | 299 | 330 | 360 |
| 27 | 27 | 58 | 86 | 117 | 147 | 178 | 208 | 239 | 270 | 300 | 331 | 361 |
| 28 | 28 | 59 | 87 | 118 | 148 | 179 | 209 | 240 | 271 | 301 | 332 | 362 |
| 29 | 29 | (60) | 88 | 119 | 149 | 180 | 210 | 241 | 272 | 302 | 333 | 363 |
| 30 | 30 | | 89 | 120 | 150 | 181 | 211 | 241 | 273 | 303 | 334 | 364 |
| 31 | 31 | | 90 | | 151 | | 212 | 243 | | 304 | | 365 |
| | | | | | | | | | | | | (366) |

## RESUMEN CAPÍTULO 3: El Interés Simple

El **Interés Simple,** es el primer contacto que tiene el lector con los temas específicos de Ingeniería Económica. Este tipo de interés donde no existe capitalización de intereses, es de alguna manera un interés informal, pues no hace parte de las transacciones registradas en la contabilidad nacional, pero si hace parte de miles de transacciones diarias que se llevan a cabo en los sectores comunitarios y comercios minoritarios.

Este capítulo desarrolla los elementos esenciales en la solución de problemas financieros como el valor presente, el monto, las ecuaciones de valor y la TIR entre otros, aun cuando no se haya tenido en cuenta la capitalización de intereses. De esta manera, se constituye en un capítulo introductorio y de preparación al verdadero mundo de la Ingeniería Económica.

En este capítulo se han utilizado las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{I=Prt} \quad (3.1)$$

$$\boxed{F=P+I} \quad (3.2)$$

$$\boxed{F=P\,(1+rt)} \quad (3.3)$$

$$\boxed{P=\frac{F}{(1+rt)}} \quad (3.4)$$

$$\boxed{r=\frac{(\frac{F}{P}-1)}{t}} \quad (3.5)$$

$$\boxed{t=\frac{(\frac{F}{P}-1)}{r}} \quad (3.6)$$

$$\boxed{D=Fdt} \quad (3.7)$$

$$\boxed{P=F-D} \quad (3.8)$$

$$\boxed{P=F\,(1-dt)} \quad (3.9)$$

$$\boxed{F=\frac{P}{1-dt}} \quad (3.10)$$

$$\boxed{r=\frac{d}{1-dt}} \quad (3.11)$$

$$\boxed{d=\frac{r}{1-rt}} \quad (3.12)$$

Dónde: I=Interés; P=Valor Presente; r=tasa de interés nominal anual; t=tiempo en años; D=Descuento; F=Valor Futuro; d=tasa de descuento;

…………… ✧ ……………

## EJERCICIOS CAPÍTULO 3: El Interés Simple

1. Calcular el interés simple bancario de:

   **a.** ₡2.500 durante 8 meses al 8%
   **b.** ₡60.000 durante 63 días al 9%
   **c.** ₡12.000 durante 3 meses al 8 ½ %
   **d.** ₡15.000 al 10% en el tiempo transcurrido entre el 4 de abril y el 18 de septiembre del mismo año.

2. Calcular el interés simple bancario de:

   **a.** ₡5.000 durante 3 años, 2 meses, 20 días al 0,75% mensual.
   **b.** ₡8.000 durante 7 meses, 15 días al 1.5% mensual.

3. El propietario de una casa recibe el 15 de mayo de este año las tres ofertas que se detallan a continuación. ¿Cuál es la mejor, si el rendimiento es del 9% simple?

   **a.** ₡60.000 al contado y un pagaré al 10 de septiembre del mismo año por ₡32.600
   **b.** ₡30.000 a 120 días y ₡63.500 a 180 días
   **c.** ₡20.000 al contado y un pagaré con intereses del 8% por ₡71.000 a 120 días

4. Un inversionista recibió un pagaré por valor de ₡120.000 a un interés simple del 8% el 15 de julio con vencimiento a 150 días. El 20 de octubre del mismo año lo ofrece a otro inversionista que desea ganar el 10% simple. ¿Cuánto recibe por el pagaré el primer inversionista? ¿Qué tasa de interés simple le corresponde?

5. ¿Cuánto se necesita depositar hoy en una corporación que reconoce el 3% mensual simple para disponer de ₡5.000 al cabo de un año?

6. Un ahorrador piensa hacer los siguientes depósitos en una cuenta de ahorros

que le reconoce el 1% mensual simple: dentro de 4 meses la suma de ₡500, dentro de 8 meses la suma de ₡1.000. Calcular el valor disponible en la cuenta al final del año.

7. Hallar la tasa de interés mensual simple que se obtiene al invertir ₡210.000 y al cabo de 10 meses se puede retirar ₡311.650.

8. Se invirtieron ₡2.000 y después de 3 años se recibieron ₡3.600. ¿Qué tasa trimestral simple arrojó la operación financiera?

9. ¿En cuánto tiempo se triplica un capital si la tasa de interés es del 16% anual?

10. ¿Cuánto tiempo debo esperar para que se duplique mi inversión en una corporación que paga el 2,5% simple mensual?

11. El valor final de un documento que vence el 28 de abril del siguiente año es de ₡83.000. Si un banco lo descuenta el 15 de noviembre de este año al 8%, determinar el descuento (D) y el valor descontado (P) de esta transacción.

12. Un banco cobra una tasa anticipada del 10% sobre el valor de los préstamos. De terminar el valor del documento que queda en poder del banco, si el prestatario recibe ₡17.000 por un préstamo a 60 días.

13. ¿Qué tasa anticipada anual es equivalente a una tasa de interés simple que permite convertir en 8 meses, un capital de ₡550 en ₡720?

14. Una persona recibe ₡1.500 por un préstamo a 6 meses. Si al documento el banco le aplicó un descuento de ₡300, halle la tasa de interés anual simple equivalente.

15. Una persona debe ₡2.000 con vencimiento a 3 meses y ₡1.600 con vencimiento a 8 meses. Propone pagar su deuda mediante 2 pagos iguales con vencimiento a 6 meses y un año, respectivamente. Determinar el valor de los nuevos pagarés al 8% de rendimiento simple. (Fecha focal dentro de un año).

16. Una persona debe los siguientes pagarés con el 8% simple, ₡6.000 exigibles dentro de 3 meses firmado a 6 meses de plazo; ₡8.000 exigibles dentro de 6 meses y firmado a 1 año de plazo; y otro de ₡5.000 si intereses, exigibles dentro de 9 meses. Su acreedor acepta recibir 3 pagos iguales con el 9% de rendimiento simple, a cambio de las anteriores obligaciones así: el primer pago de contado, el segundo a 6 meses y el tercero a 1 año de plazo. Determinar el valor de estos pagos iguales. (Fecha focal dentro de 6 meses).

17. Una deuda de ₡2.500 con vencimiento en 15 meses sin interés, y otra de ₡1.500 con vencimiento en 24 meses e interés simple del 15% van a cancelarse mediante 2 pagos iguales con vencimiento en 12 meses y 18 meses respectivamente. De termine el valor de estos pagos si se espera un rendimiento simple del 14%. (Fecha focal dentro de 18 meses).

18. Una persona dispone de ₡100.000, los que desea invertir en dos fondos, uno que le reditúa el 10% y otro el 15%. ¿Qué cantidad debe destinar a cada fondo si al cabo de un año aspira disponer de ₡13.000 por concepto de intereses?

19. Un proyecto requiere una inversión inicial de ₡4.000 y desembolsos adicionales de ₡300 y ₡500 a los 12 y 30 meses respectivamente. Si el proyecto genera ingresos por ₡1.500, ₡2.000 y ₡3.000 en los meses 6, 18 y 24, halle la TIR simple de este proyecto.

20. El 7 de octubre del año anterior una compañía compró un activo por ₡400.000 y lo vendió el 15 de agosto de este año en ₡470.000 suma que será cancelada así: ₡200.000 de contado, ₡100.000 el 20 de septiembre y ₡170.000 el 10 de diciembre del año en curso. Halle la TIR simple de esta negociación.

# 4. EL INTERÉS COMPUESTO

## PREÁMBULO

En el capítulo anterior, se analizó el Interés Simple donde los intereses en cada periodo se calculaban siempre sobre el mismo capital, sea que éstos se retiraran o no. Ahora, cuando los intereses en cada periodo no son retirados, éstos pasan a formar parte del capital (esto se denomina capitalización), de tal manera que los intereses subsiguientes se calculan sobre el capital y los intereses capitalizados con anterioridad. En este momento es cuando se habla de Interés Compuesto.

El **Interés Compuesto** o interés sobre el interés, es el de mayor uso en las transacciones registradas por la Contabilidad Nacional, y se constituye en el interés utilizado de manera formal en la economía. Su comprensión es de vital importancia para la toma de decisiones financieras, pues es punto de partida para la gran mayoría de los temas de la Ingeniería Económica.

# 4.1. Definiciones

El **Interés Compuesto** es aquel donde los intereses de cada periodo se calculan sobre el capital y los intereses capitalizados precedentemente, siguiendo un patrón de Progresión Geométrica, y configurándose como una bola de nieve.

En Interés Compuesto sigue siendo válida la ecuación (1.1) donde ***I=F-P,*** pero las demás ecuaciones sufren modificaciones significativas debido a que el patrón de formación cambia de una Progresión Aritmética a una Progresión Geométrica, y es el Mont o o Val or Final ***(F)*** el que cobra verdadera importancia. Además, la tasa de interés cambia de una nominal o de referencia ***(r)*** a una tasa por periodo de capitalización o conversión ***(i)*** y el periodo de negociación ***(t)*** cambia a número total de periodos de capitalización o conversión ***(n).***

Se entenderá por periodo de capitalización o conversión, al tiempo transcurrido entre cómputos sucesivos de interés, es decir, la frecuencia con que los intereses son calculados y agregados al capital, pudiendo ser diario, mensual, bimestral, trimestral, cuatrimestral, semestral o inclusive anual.

Convenientemente en los capítulos anteriores en la mayoría de los casos la tasa nominal ***(r)*** y el tiempo de negociación ***(t)*** se han tomado de forma anual, aunque pueden tener otra unidad de medida temporal. La manera de hacer equivalencias entre los parámetros del Interés Simple con los parámetros del Interés Compuesto, es a través de las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{n = t*m} \quad (4.1)$$

$$\boxed{i = \frac{r}{m}} \quad (4.2)$$

Dónde ***t*** y ***r*** están en años, y ***m*** representa el número de periodos de conversión en un año. Veamos los ejemplos.

*Ejemplo 4.1* Halle la tasa de interés por periodo de un interés nominal del 10% convertible:

a. Diariamente
b. Mensualmente
c. Trimestralmente
d. Cuatrimestralmente
e. Semestralmente

**Identificación de variables:**

$r_a$ = 10%; $m_a$ = 360 (Un año tiene 360 días en la práctica comercial)
$r_b$ = 10%; $m_b$ = 12 (Un año tiene 12 meses)
$r_c$ = 10%; $m_c$ = 4 (Un año tiene 4 trimestres)
$r_d$ = 10%; $m_d$ = 3 (Un año tiene 3 cuatrimestres)
$r_e$ = 10%; $m_e$ = 2 (Un año tiene 2 semestres)

**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (4.2) $i_x = \frac{r_x}{m_x}$

**Aplicación de fórmulas.**

$$i_a = \frac{r_a}{m_a} = \frac{0{,}10}{360} = 0{,}028\%\ \text{diario}$$

$$i_b = \frac{r_b}{m_b} = \frac{0{,}10}{12} = 0{,}83\%\ \text{mensual}$$

$$i_c = \frac{r_c}{m_c} = \frac{0{,}10}{4} = 2{,}5\%\ \text{trimestral}$$

$$i_d = \frac{r_d}{m_d} = \frac{0{,}10}{3} = 3{,}33\%\ \text{cuatrimestral}$$

$$i_e = \frac{r_e}{m_e} = \frac{0{,}10}{2} = 5\%\ \text{semestral}$$

**Respuesta.**

R/. Una tasa nominal del 10% anual es equivalente a una tasa del 0,028% diaria, 0,83% mensual, 2,5% trimestral, 3,33% cuatrimestral o 5% semestral.

*Ejemplo 4.2* Halle el número total de periodo de capitalización de una transacción que dura año y medio si los intereses se calculan y abonan al capital de manera:

a. Diaria
b. Mensual
c. Trimestral
d. Cuatrimestral
e. Semestral

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES:**

$t_a$ = 1,5 años; $m_a$ = 360 (Un año tiene 360 días en la práctica comercial)
$t_b$ = 1,5 años; $m_b$ = 12 (Un año tiene 12 meses)
$t_c$ = 1,5 años; $m_c$ = 4 (Un año tiene 4 trimestres)
$t_d$ = 1,5 años; $m_d$ = 3 (Un año tiene 3 cuatrimestres)
$t_e$ = 1,5 años; $m_e$ = 2 (Un año tiene 2 semestres)

**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

Se utilizará la ecuación (4.1) $n_x = t_x * m_x$

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

$$n_a = t_a * m_a = 1{,}5 * 360 = 540 \text{ días}$$
$$n_b = t_b * m_b = 1{,}5 * 12 = 18 \text{ meses}$$
$$n_c = t_c * m_c = 1{,}5 * 4 = 6 \text{ trimestres}$$
$$n_d = t_d * m_d = 1{,}5 * 3 = 4{,}5 \text{ cuatrimestres}$$
$$n_e = t_e * m_e = 1{,}5 * 2 = 3 \text{ semestres}$$

**RESPUESTA.**

R/. Un tiempo de negociación de año y medio es equivalente a 540 días, 18 meses, 6 trimestres, 4,5 cuatrimestres o 3 semestres.

## 4.2. El Monto a Interés Compuesto

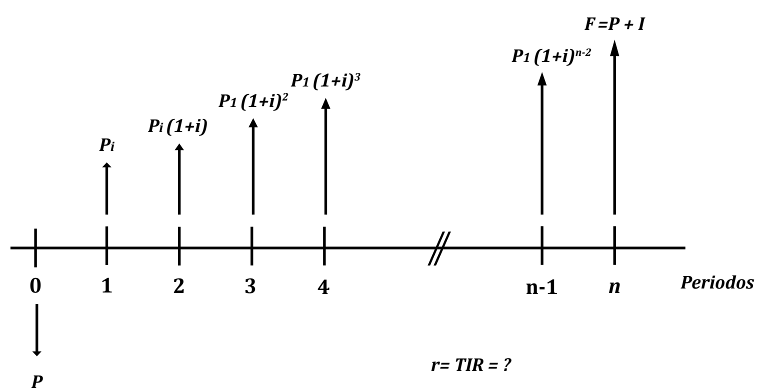
Tal como en el interés simple, el **MONTO** es la suma del capital inicial y los intereses generados en la operación, designado por la letra ***F***, salvo que en esta ocasión los intereses se calculan sobre una base diferente en cada periodo, debido al proceso de capitalización de intereses visto con anterioridad.

Para la obtención de la fórmula del Monto a interés compuesto tomaremos el capital ***P*** prestado al interés ***i*** por período de capitalización durante n períodos de capitalización, esquematizado en la siguiente tabla:

**TABLA 4.1. CÁLCULO DE INTERÉS COMPUESTO**

| *Periodo* | *Capital al principio del periodo* | *Intereses en el periodo (I)* | *Capital más intereses a final del periodo* |
|---|---|---|---|
| 1 | $P$ | $Pi$ | $P+Pi=P(1+i)$ |
| 2 | $P(1+i)$ | $P(1+i)i$ | $P(1+i) + P(1+i)i=P(1+i)(1+i)=P(1+i)^2$ |
| 3 | $P(1+i)^2$ | $P(1+i)^2i$ | $P(1+i)^2+ P(1+i)^2i= P(1+i)2(1+i)=P(1+i)^3$ |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| n | $P(1+i)^{n-1}$ | $P(1+i)^{n-1}i$ | $P(1+i)^{n-1} + P(1+i)^{n-1}i = P(1+i)^{n-1}(1+i)=P(1+i)^n$ |

En forma gráfica se obtiene:




Como se observa el interés total ***I,*** será la sumatoria de todos los intereses en cada periodo ***In***, es decir,

$$I=Pi+P(1+i)i+P(1+i)^2i+P(1+i)^3 i+...+P(1+i)^{n-1}i$$

Lo anterior, configura la sumatorio Sn de una progresión geométrica, donde:

$$I=Sn;\ a_1=Pi;\ a_n=P(1+i)^{n-1}\,i;\ r=(1+i);$$

Entonces, aplicando la ecuación (2.5)

$$S_n=\frac{a_1\,(r^n-1)}{(r-1)}$$

tenemos: $$S_n=\frac{a_1\,(r^n-1)}{(r-1)}=\frac{P\cancel{i}\,[(1+i)^n-1]}{[(\cancel{1}+\cancel{i})-\cancel{1}]}=P\,[(1+i)^n-1]$$

Obteniendo entonces:

$$\boxed{I=P\,(1+i)^n-P} \quad (4.3)$$

Ahora utilizando la ecuación (3.1) ***F=P+I,*** y utilizando la ecuación (4.3) se tiene:

$$F=P+I=P+P(1+i)^n-P$$

de tal manera que:

$$\boxed{F=P\,(1+i)^n} \quad (4.4)$$

En esta ecuación, la tasa de interés por periodo *(i)* y el número total de periodos *(n)* deben estar expresados en la misma unidad de tiempo, en cumplimiento de la segunda regla de oro. Nuevamente, en caso de diferencias, se recomienda ajustar la unidad de medida del número total de periodos a la unidad de medida de la tasa de interés. Es probable que en ocasiones algunos problemas financieros a resolver nos ofrezcan directamente la tasa de interés por periodo, pero en otros, habrá que deducirla a partir de la tasa de interés nominal *(r)* capitalizable ***m*** veces al año.

Si analizamos con números el cuadro anterior y deseáramos calcular el interés compuesto de ₡1.000 invertidos al 6% durante 3 años, obtendríamos:

| | | |
|---|---|---|
| Capital Inicial | ₡1.000 | Interés obtenido a interés compuesto |
| Interés primer año al 6% | ₡ 60 | ***I= F-P = P(1+i)$^n$ -P = ₡191,02*** |
| Capital inició 2° año | ₡1.060 | Interés obtenido a interés simple: |
| Interés segundo año al 6% | ₡ 63 | ***I= P(1+rt) = ₡180*** |
| Capital inició 3° año | ₡1.123,6 | Esta diferencia de ₡11,02 es el interés |
| Interés tercer año al 6% | ₡67,42 | generado por el propio interés |
| Monto al final de 3 años | ₡1.191,02 | |

*Ejemplo 4.3* Una persona depositó ₡2.000 en una institución de crédito que otorga el 5% de interés capitalizable semestralmente por un período que según sus planes sería de 5 años. Sin embargo, al final de 2 años y medio tuvo que retirar ₡1.000 de su cuenta. ¿Cuál era el saldo de la cuenta al finalizar el período original de 5 años?

### Identificación de variables:

***P1=*** ₡2.000;

***P2=*** ₡1.000;

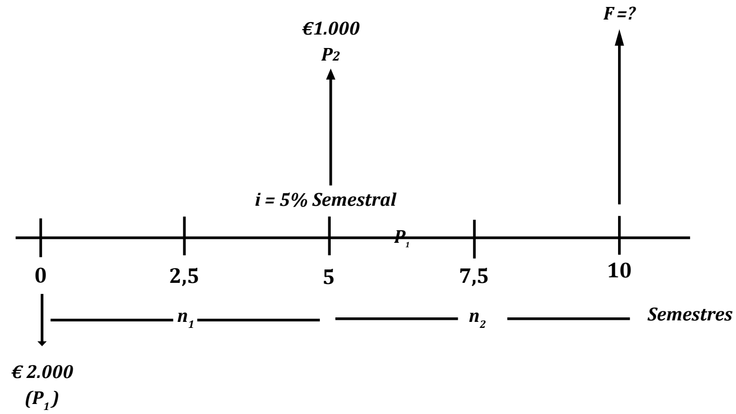
***r=*** 5% capitalizable semestralmente;

***m=*** 2;

***i=*** 2,5% semestral, n1=n2=2,5*2=5 semestres;

***F=*** ?

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.



### Selección de fórmulas.

Se utilizará la ecuación (4.4)

$$F= P\,(1+i)^{n}$$

### Aplicación de fórmulas.

$$F=[(₡2.000(1+0{,}025)^{5})-₡1.000](1+0{,}025)^{5}=₡2.000\,(1+0{,}025)^{10}-₡1.000\,(1+0{,}025)^{5}=₡1.428{,}76$$

### Respuesta

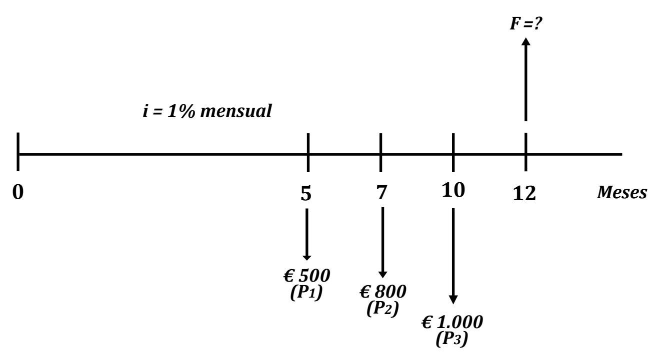
R/. El saldo de la cuenta al finalizar el período original de 5 años era de ₡1.428,76

*Ejemplo 4.4* Una persona hizo los siguientes depósitos en una institución de crédito que otorga el 1% de interés mensual: ₡500 dentro de 5 meses, ₡800 dentro de 7 meses y ₡1.000 dentro de 10 meses. ¿Cuál será el saldo de la cuenta al final del año?

### Identificación de variables:

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***P1=*** | ₡500; | ***$n_1$=*** | 7 meses; |
| ***P2=*** | ₡800; | ***$n_2$=*** | 5 meses; |
| ***P3=*** | ₡1.000; | ***$n_3$=*** | 2 meses; |
| ***i=*** | 1% mensual; | ***F=*** | ? |

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.



**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (4.4)

$$F= P\,(1+i)^{n}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$F=[(₡500(1+0{,}01)^{7})-(₡800(1+0{,}01)^{5})+(1.000\,(1+0{,}01)^{2})]=₡2.396{,}976$$

**Respuesta**

R/. El saldo de la cuenta al final del año será de ₡2.396,976

## 4.3. Interés para Fracciones del Periodo Básico

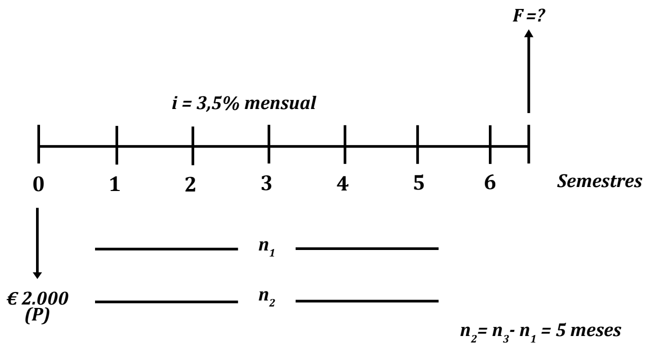
Al obtener la fórmula del interés compuesto, supimos que generalmente se cuenta con un número entero de períodos de capitalización. Cuando no es así, la práctica usual es, emplear interés simple para la fracción del período no entera, basándose en el monto compuesto que se tiene del último período completo. Sin pérdida de generalidad, se puede utilizar número de periodos fraccionarios en la ecuación 4.4, y el resultado un tanto inferior, variará muy poco respecto al método usual.

*Ejemplo 4.5* A una tasa del 7% capitalizable semestralmente? ¿Cuál será el monto sobre ₡2.000 al cabo de 3 años y 5 meses?

**Identificación de variables:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $P=$ | ₡2.000; | $n_1=$ | 6 meses; |
| $r=$ | 7% capitalizable semestralmente; | $n_2=$ | 5 meses; |
| | | $t=$ | 5/12; |
| $m=$ | 2; | $n_3=$ | 41/6 semestres; |
| $i=$ | 3,5% mensual; | $F=$ | ?; |

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

Se utilizará la ecuación (4.4) y (3.2)

$$F = P\,(1+i)^{n}$$

$$F = P\,(1+rt)$$

### Aplicación de fórmulas.

Forma Usual

$$F=[(₡2.000(1+0{,}035)^{6})](1+0.07*\frac{5}{12})=₡2.530{,}217$$

Forma Propuesta

$$F=[(₡2.000(1+0{,}035)^{\frac{41}{6}})]=₡2.530{,}011$$

### Respuesta

R/. El monto sobre ₡2.000 al cabo de 3 años y 5 meses será de ₡2.530,011

## 4.4. Montos a Tasas Variables de Interés

En caso de que la tasa de interés de alguna inversión sea variable, su monto final puede calcularse obteniendo el monto parcial cada vez que se presente un cambio en la tasa y aplicar ese factor hasta que se produzca otro cambio, y así sucesivamente.

*Ejemplo 4.6* Un capital de ₡900 produce un rendimiento del 6% capitalizable trimestralmente durante 4 años y 3 meses y luego de un 7% convertible semestralmente durante 17 meses más. Calcular el monto final.

**Identificación de variables:**

***P=*** ₡900;

***$r_1$=*** 6% capitalizable trimestralmente;

***$r_2$=*** 7% capitalizable semestralmente;

***$m_1$=*** 4;

***$m_2$=*** 2;

***$i_1$=*** 1,5%trimestral;

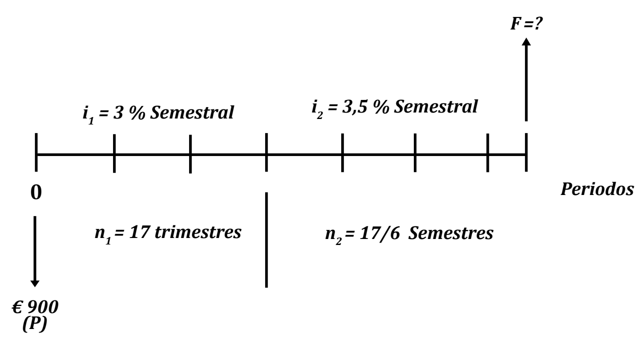
***$i_2$=*** 3,5% semestral;

***$n_1$=*** 17 trimestres;

***$n_2$=*** 17/6 semestres;

***F=*** ?;

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (4.4)

$$F = P\,(1+i)^{n}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$F=[(₡900(1+0{,}015)^{17})][((1+0{,}035)^{\frac{17}{6}})=₡1.277{,}898$$

**Respuesta**

R/. El monto sobre un capital de ₡900 invertidos al 6% capitalizable trimestralmente durante 4 años y 3 meses y luego al 7% convertible semestralmente durante 17 meses más, será de ₡1.277,898

## 4.5. Valor Actual a Interés Compuesto

Valor actual ó presente a interés compuesto de un dinero que se reciba en fecha futura es aquel capital que, a interés compuesto, tendrá en el mismo tiempo un monto equivalente a la suma de dinero que se reciba en la fecha convenida. Es decir, se busca obtener un valor presente ***P*** a partir de una suma futura ***F*** en un número ***n*** de periodos, a una tasa de interés compuesta ***i***. Para obtener dicha suma, lo que hacemos es despejar ***P*** a partir de la ecuación (4. 4).

$$F= P\,(1+i)^{n} \rightarrow$$

$$\boxed{P=\frac{F}{(1+i)^{n}}} \quad (4.5)$$

También se expresa como:

$$P= F\,(1+i)^{n}$$

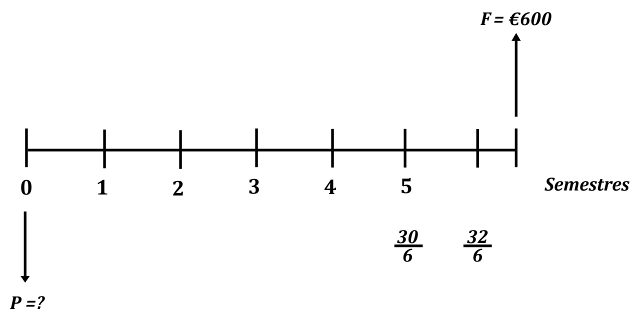
*Ejemplo 4.7* ¿Cuál es el valor presente de un pagaré de ₡600 pagaderos dentro de 2 años, 8 meses, si la tasa es del 8% capitalizable semestralmente?

**Identificación de variables:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***F=*** | ₡600; | ***i=*** | 4% Semestral; |
| ***r=*** | 8% cap. semestralmente; | ***n=*** | 32/6 semestres; |

***m=*** 2; ***P=*** ?;

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (4.5)

$$P=\frac{F}{(1+i)^n}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P=\frac{F}{(1+i)^n}=\frac{₡600}{(1,04)^{32/6}}=₡486,751$$

**Respuesta**

R/. El valor presente de un pagaré de ₡600 pagaderos dentro de 2 años, 8 meses, si la tasa es del 8% capitalizable semestralmente es de ₡486,751.

*Ejemplo 4.8* Calcular 3 años antes de su vencimiento, el valor presente, al 8% capitalizable semestralmente, de un pagaré de ₡100 firmado a 5 años plazo, con el 6% de interés capitalizable anualmente.

**Identificación de variables:**

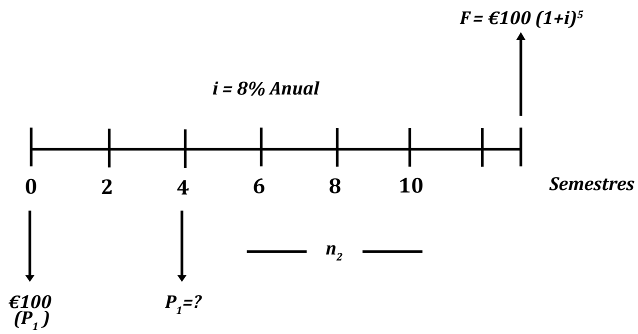
***P=*** ₡100; $r_2=$ 8% Cap. Semestral;

$r_1=i_1=$ 6% cap. Anualmente; $m_2=$ 2;

***$i_2$=4% $n_1$=5 años;*** ***$n_2$= 6 semestres;***

***$P_2$= ?;***

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (4.4)

$$F= P\,(1+i)^{n}$$

y (4.5)

$$P=\frac{F}{(1+i)^{n}}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P_2=\frac{F}{(1+i)^{n}}= \frac{(₡100(1+0{,}06)^{5})}{(1{,}04)^{6}} = ₡105{,}762$$

**Respuesta**

R/. 3 años antes de su vencimiento, el valor presente, al 8% capitalizable semestralmente, de un pagaré de ₡100 firmado a 5 años plazo, con el 6% de interés capitalizable anualmente es de ₡105,762.

## 4.6. Cálculo de la Tasa de Interés Compuesta

En ocasiones se requiere saber la tasa de interés compuesta que rinde un capital invertido durante cierto periodo de tiempo. Cuando solo existe una única cantidad invertida y una única cantidad recibida, la tasa de interés se puede calcular a partir de la ecuación básica (4.4) $F=P\ (1+i)^n$. Pero cuando están involucrados varios ingresos y egresos el problema se resuelve utilizando el método de ensayo y error visto en el subcapítulo 3.12 de análisis de inversiones a interés simple, y retomado en el subcapítulo 4.10 de análisis de inversiones, pero a interés compuesto. Para obtener la tasa de interés, lo que hacemos es despejar $i$ a partir de la ecuación (4. 4).

$$F=P\ (1+i)^n. \rightarrow$$

$$\boxed{i=\sqrt[n]{F/P}-1} \quad (4.6)$$

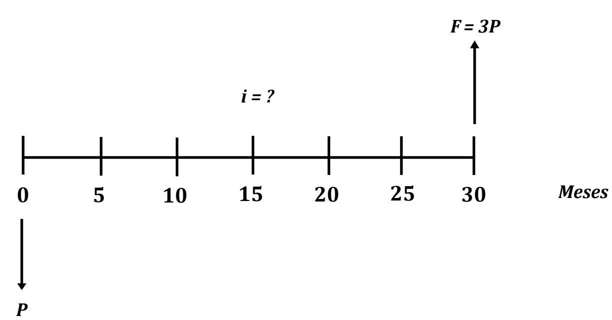
*Ejemplo 4.9* Hallar la tasa mensual, a la cual un capital se triplicaría en 2 años y 6 meses.

**Identificación de variables:**

$F/P=$ 3; $i=$ ?;

$n=$ 30 Meses;

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**



**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (4.6)

$$i=\sqrt[n]{F/P}-1$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$i=\sqrt[30]{3}-1=3{,}73\%$$

**Respuesta**

R/. Un capital se triplicará en 2 años y 6 meses si es invertido a una tasa de 3,73% mensual.

## 4.7. Cálculo del Número de Periodos

Así como es válido despejar ***P, F, i*** de la ecuación (4.4), también se hace preciso en ocasiones obtener el número de periodos o tiempo transcurrido ***n*** para que un capital rinda el interés acordado. Para obtener el número de periodos, lo que hacemos es despejar ***n*** a partir de la ecuación (4. 4).

$$F=P\,(1+i)^{n}\rightarrow$$

$$\boxed{n=\frac{Log\,(F/P)}{Log\,(1+i)}}\quad(4.7)$$

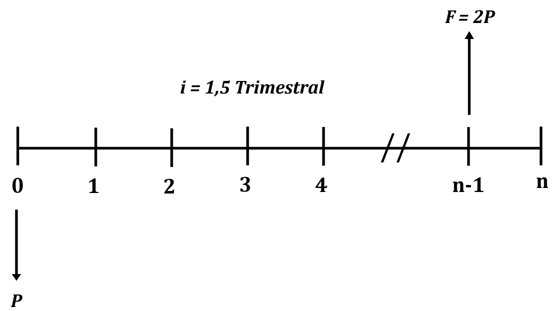
*Ejemplo 4.10* ¿En cuánto tiempo se duplica un capital si la tasa de interés es del 6% capitalizable trimestralmente?

**Identificación de variables:**

***F/P=*** 2; ***i=*** 1,5% Trimestral;

***n=*** ?;

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (4.7)

$$n=\frac{Log\ (F/P)}{Log\ (1+i)}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$n=\frac{Log\ (F/P)}{Log\ (1+i)}=\frac{Log\ 2}{Log\ (1+0{,}015)}=46{,}55\ \ Trimetres$$

**Respuesta**

R/. Un capital se duplicará a una tasa de 6% capitalizable trimestralmente en 46,55 trimestres, equivalentes a 11 años, 7 meses y 20 días. ¿De dónde se obtiene este último resultado?

$$46{,}55552563\ \cancel{\text{trimestres}} * \frac{3\ \text{meses}}{1\ \cancel{\text{trimestre}}} = 139{,}6665769\ \text{meses.}$$

De aquí tomo 139 meses

$$139\ \cancel{\text{meses}} = \frac{1\ \text{Año.}}{12\ \cancel{\text{Meses}}} = 11{,}58333333\ \text{años.}$$

De aquí tomo los 11 años

$$0{,}58333333 \cancel{\text{años}} = \frac{12 \text{ meses.}}{1\cancel{\text{año}}} = 7 \text{ meses.}$$

De aquí tomo los 7 meses

$$0{,}6665769 \cancel{\text{meses}} = \frac{30 \text{ días.}}{1 \cancel{\text{mes}}} = 20 \text{ días}$$

De aquí tomo los 20 días

# 4.8. Tasas de Interés Efectivas, Anticipadas y Vencidas

Debido a que en interés compuesto los intereses obtenidos en cada periodo son objeto de cálculo para periodos siguientes, se configura una gran variedad de interpretaciones y aplicaciones de lo que hasta ahora conocemos como el pago por el uso del dinero. En este capítulo además de la tasa de interés nominal (***r***) vista en capítulos anteriores, se agregó el concepto de tasa de interés por periodo de capitalización (***i***), pero éstas se constituyen en base conceptual para nuevas interpretaciones y aplicaciones de la tasa de interés, de las cuales algunas serán abordadas en este capítulo y otras más elaboradas quedarán para capítulos posteriores.

*A continuación, se retomarán con mayor detalle las principales interpretaciones y aplicaciones del concepto tasa de interés y se abordarán otros que contribuirán a un mejor entendimiento de los temas que involucra el interés compuesto.*

### 1. TASA DE INTERÉS NOMINAL (r)

Es la tasa pactada para un periodo determinado (generalmente un año) que representa solo una tasa de referencia, como lo veremos adelante. En la denominación se deben especificar la frecuencia de liquidación de interés (diaria, mensual, trimestral, semestral u otra) y la modalidad de liquidación (vencida o anticipada). Veamos un ejemplo de denominación de la tasa de interés nominal:

20% nominal anual con capitalización semestral
20% anual capitalizable semestralmente
20% capitalizable semestralmente
20% semestre vencido (20% SV)

Las denominaciones anteriores son equivalentes, unas con mayores detalles que otras, pero expresan una operación financiera donde el valor de la tasa pactada es del 20% anual con una frecuencia de liquidación de intereses cada 6 meses (2 veces por año) una vez éstos hayan concluido (vencidos).

## 2. TASA DE INTERÉS POR PERIODO (i)

Representa la tasa de interés que será cobrada ya no en forma anual, sino cada vez que se haga la respectiva capitalización. En el ejemplo anterior la tasa nominal expresa que los intereses se deben capitalizar cada 6 meses, es decir, 2 veces por año (m=2). Así las cosas, la tasa de interés por periodo i será igual a la mitad de la tasa nominal (r). En términos generales podemos acudir a la ecuación (4.2)

$$i = \frac{r}{m}$$

vista anteriormente. Para el caso en estudio tenemos:

$$i = \frac{r}{m} = \frac{20\%}{2} = 10\% \text{ semestral}$$

m- representa el número de capitalizaciones en el tiempo definido por la tasa nominal, el cual hemos fijado en un año en forma general.

## 3. TASA DE INTERÉS EFECTIVA (r*)

Es aquella tasa capitalizable anualmente que produce la misma cantidad de interés durante un año que una tasa nominal r capitalizable ***m*** veces al año.
Supongamos que se hace un crédito por ₡1.000 a una tasa del 36% capitalizable trimestralmente (36% TV) durante un año. Aplicando la ecuación (4.4) al cabo de 1 año se tendrían acumulado:

$$F=P\,(1+i)^n= ₡1.000(1+0{,}09)^4= ₡1.411{,}58161$$

En este ejemplo, el banco presta ₡1.000 y después de 1 año tiene acumulado ₡1.411,58161, producto de los intereses y reinversión de los mismos, por lo tanto, su rendimiento efectivo aplicando las ecuaciones (1.1) y (1.2) es:

$$i = \frac{I}{p} = \frac{F-P}{p} = \frac{F}{p} - 1 = \frac{₡1.411,58161}{₡1.000} - 1 = 0,4116 = 41,16\%$$

Efectivo Anual (EA).

El resultado de 41,16% que expresa el rendimiento efectivo anual para el banco, así como el costo efectivo anual para el prestatario, permite hacer una consideración preliminar entre lo que es una tasa nominal (la que se pacta en una operación financiera), en este caso el 36% anual con pago de intereses cada trimestre (m=4), y una tasa efectiva (la que realmente se paga), en este caso el 41,16% (Meza, 2004). Una manera práctica de encontrar equivalencia entre estas tasas es a través de la siguiente ecuación:

$$r^* = (1+i)^m - 1 \rightarrow$$

$$\boxed{r^* = (1+r/m)^m - 1} \quad (4.8)$$

Esta ecuación se obtiene debido a que existe una equivalencia entre el interés con capitalización anual y el interés capitalizable m veces al año, es decir:

$$P+Pr^*=P(1+i)^m$$

entonces,

$$P(1+r^*)=P(1+i)^m$$

donde,

$$(1+r^*)=(1+i)^m$$

Obteniéndose la ecuación (4.8) si despejamos a r*.

$$r^*+1=(1+i)^m \rightarrow$$

$$\boxed{i = \sqrt[m]{(1+r^*)} - 1} \quad (4.9)$$

Si aplicamos la ecuación (4.8) en el ejemplo anterior obtenemos:

$$r^*=(1+r/(m))^m-1=(1+0{,}36/(4))^4-1=0{,}4116=41{,}16\%\ \text{EA}$$

En ocasiones se suele utilizar la tasa efectiva para periodos inferiores a un año, como la tasa por periodo (i), en cuyo caso son equivalentes. Es decir, una tasa efectiva del 3% semestral (3% ES), es lo mismo que tener una tasa por periodo del 3% semestral.

*Ejemplo 4.11* Determinar la tasa de interés efectiva equivalente al 8% capitalizable semestralmente. Compruébelo para un capital de ₡1.000 en un tiempo de 2 años

**Identificación de variables:**

***r=*** 8% capitalizable semestralmente;
***m=*** 2;
***i=*** r/m=4% semestral;
***t=*** 2;
***n=*** t*m=4;
***P=*** ₡1.000;
***r*=*** ?

**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (4.8)

$$r^* = (1 + i)^m - 1$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$r^*=(1+i)^m - 1= (1+0{,}04)^2 - 1= 8{,}16\%\ \text{EA}$$

**Respuesta**

R/. La tasa de interés efectiva equivalente al 8% capitalizable semestralmente es 8,16% EA. Prueba:

*Si suponemos que:*

$$P=₡1.000 \quad y \quad t=2\ \text{años} \rightarrow n=4$$
$$F_1=₡1.000\ (1+0{,}04)^4 =₡1.169{,}859$$
$$F_2=₡1.000\ (1+0{,}0816)^2 =₡1.169{,}859$$

## 4. TASA DE INTERÉS ANTICIPADA (ia)

Tal como se miró en el capítulo anterior, lo que hasta ahora hemos venido trabajando ha sido la tasa vencida u ordinaria, como aquella en la cual el cálculo y abono de intereses se hace al final de cada período, y se la ha representado indistintamente por ***i***. En la tasa anticipada en cambio, los intereses se calculan y abonan anticipadamente, o sea al principio del período y se representa por $i_a$.
Podemos encontrar equivalencia entre estas tasas, de tal manera que ambos conlleven al mismo resultado.
Puesto que la tasa de interés i es igual al interés pagado sobre el capital inicial ***P,*** de la ecuación (1.2) tenemos:

$$i=\frac{I}{P} \qquad \boxed{1}$$

Cuando se cobra interés anticipado, por definición, los intereses se calculan sobre el valor final del documento, tal como se observó en el descuento bancario, esto es:

$$i = Fi_a \qquad \boxed{2}$$

También por la ecuación (1.1) sabemos que ***P=F-I,*** entonces:

Combinando las ecuaciones $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ se tiene que:

$$i=\frac{I}{P}=\frac{Fi_a}{F-Fi_a}=\frac{Fi_a}{F(1-i_a)}=\frac{i_a}{1-i_a}$$

por tanto,

$$\boxed{i=\frac{i^a}{1-i_a}} \quad (4.10)$$

Reordenando la anterior ecuación se obtiene también que:

$$\boxed{i_a=\frac{i}{1+i}} \quad (4.11)$$

Debido a que en casi todas las fórmulas de ingeniería económica se utiliza la tasa de interés vencida i, entonces cuando se presentan operaciones con tasas anticipadas, éstas deben convertirse a vencidas.

La ecuación $\boxed{2}$ también nos permite deducir la fórmula de monto a interés compuesto utilizando interés anticipado:

$$\boxed{F = P(1-i_a)^{-n}} \quad (4.12)$$

$I=Fi_a$ pero como $P=F-I$ entonces, $P=F(1-i_a)$, ahora bien, como estamos en interés compuesto, para $n$ periodos de tiempo, $P=F(1-i_a)^n$, obteniéndose la ecuación (4.12).

*Ejemplo 4.12* Hallar una tasa mensual vencida la cual debe producir el mismo resultado que el 3% mensual anticipado. Compruébelo para un capital de ₡1.000 en un tiempo de 2 años

**Identificación de variables:**

$i_a=$ 3%mensual;
$i=$ ?

**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (4.10)

$$i = \frac{i^a}{1-i_a}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$i = \frac{i^a}{1-i_a} = \frac{0,03}{1-0,03} = 0,030928 = 3,0928\%$$

**Respuesta**

R/. La tasa mensual vencida que produce el mismo resultado que el 3% mensual anticipado es 3,0928%. Prueba:

*Si suponemos que:*

$$P=₡1.000 \quad y \quad t=2 \text{ años}, m=12 \rightarrow n=24$$
$$F_1=₡1.000\,(1+0,030928)^{24}=₡2.077,20$$
$$F_2=₡1.000\,(1-0,03)^{-24}=₡2.077,20$$

## 5. CONVERSIONES ENTRE TASAS

En ingeniería económica es muy frecuente realizar conversiones entre tasas debido a la exigencia de las operaciones financieras. La clave para ello es tener en cuenta que casi todas las fórmulas utilizan tasas vencidas, y que la tasa efectiva se constituye en el puente entre todas las tasas vistas. Antes de seguir con conversiones es preciso ponerse de acuerdo en la nomenclatura a utilizar.

**TABLA 4.2. NOMENCLATURA A UTILIZAR EN LA IDENTIFICACIÓN DE TASAS DE INTERÉS**

| *Frecuencia* | *Vencida* | *Anticipada* | *Vencida* | *Anticipada* |
|---|---|---|---|---|
| | *Nominal* | | *Efectiva* | |
| *Diaria* | *DV* | *DA* | *ED* | *EDA* |
| *Mensual* | *MV* | *MA* | *EM* | *EMA* |
| *Trimestral* | *TV* | *TA* | *ET* | *ETA* |
| *Semestral* | *SV* | *SA* | *ES* | *ESA* |
| *Anual* | *AV* | *AA* | *EA* | *EAA* |

### CONVERSIONES SIMPLES

Son aquellas donde solo se involucra una sola ecuación y generalmente es entre tipos de tasas. Estas conversiones ya las hemos utilizado en el texto, siendo algunos ejemplos:

Nominal ⟷ Periódica; Nominal ⟷ Efectiva;
Periódica ⟷ Efectiva; Vencida ⟷ Anticipada.

### CONVERSIONES MÚLTIPLES

Son aquellas donde se involucra más de una ecuación y generalmente se obtienen cuando se requiere cambios de Frecuencia o Modalidad de liquidación de intereses. Por ejemplo, cuando deseamos pasar una tasa con frecuencia mensual a una con frecuencia trimestral, o una anticipada a una vencida, o combinaciones entre frecuencia y modalidad de liquidación, cuando deseamos pasar una tasa semestral vencida a una trimestral anticipada. Esto es lo que otros autores denominan tasas equivalentes , como aquellas que, operando en condiciones diferentes, producen la misma tasa efectiva anual o el mismo valor futuro (García, 1997).

Bajo este precepto muchos autores recomiendan pasar por la tasa de interés efectiva anual ante cualquier conversión múltiple. Sin embargo, este procedimiento puede resultar extenso en algunas situaciones. En este texto se recomienda acudir al principio que establece igualdad de montos entre tasas equivalentes, permitiendo establecer una única ecuación que vincula la tasa ofrecida ***(r1)*** y la tasa a encontrar ***(r2)***. Establezcamos ***r1*** y ***r2*** como tasas nominales con capitalizaciones m1 y m2 veces al año respectivamente, pudiendo ser en forma anticipada (-) o vencida (+). La ecuación (4.13) nos ayuda a la conversión referida.

$$\left(1 \pm \frac{r_1}{m_1}\right)^{\pm m_1} = \left(1 \pm \frac{r_2}{m_2}\right)^{\pm m_2} \qquad (4.13)$$

En esta ecuación se podrá reemplazar ***r1*** o ***r2*** por su respectiva tasa por periodo ***(i)*** cuando sea ésta quien se ofrezca en el ejercicio.

*Ejemplo 4.13* ¿Qué tasa nominal capitalizable trimestralmente (TV) produce el mismo rendimiento que una tasa del 8% capitalizable semestralmente (SV)?. Compruébelo para un capital de ₡1.000 en un tiempo de 2 años

**Identificación de variables:**

***r1=*** 8% capitalizable semestralmente;
***m1=*** 2;
***m2=*** 4;
***i1=*** 4%semestral;
***i2=*** r2/4;
***r2=*** i2*4 = ?% capitalizable trimestralmente?

**Selección de fórmulas.**

Se utilizarán las ecuaciones (4.8)

$r^* = (1 + i)^m - 1$ , (4.9)

$i = \sqrt[m]{(1+r^*)} - 1$

$$\left(1 \pm \frac{r_1}{m_1}\right)^{\pm m_1} = \left(1 \pm \frac{r_2}{m_2}\right)^{\pm m_2}$$

Y también (4.2) $i = \dfrac{r}{m}$

#### Aplicación de fórmulas.

$r^*=\quad(1+0{,}04)^2-1=8{,}16\%$ EA
$i_2=\sqrt[4]{(1+0{,}0816)}-1=1{,}98\%$ trimestral
$r_2=\quad 4^*0{,}019803902=7{,}92\%$ capitalizable trimestralmente

Este resultado sería utilizando el procedimiento de la tasa de interés efectiva anual. Pero podemos utilizar directamente la ecuación (4.13) así:

$$\left(1+\frac{0{,}08}{2}\right)^2=\left(1+\frac{r_2}{4}\right)^4$$

y de aquí despejamos

***$r2 = 7{,}92\%$ TV***

#### Respuesta

R/. Una tasa nominal de 7,92% capitalizable trimestralmente es equivalente a una tasa nominal de 8% capitalizable semestralmente.

*Si suponemos que:*

$$P=₡1.000 \text{ y } t=2 \text{ años}, m_1=2;\ m_2=4; \rightarrow n_1=4;\ n_2=8$$
$$F_1=₡1.000\,(1+0{,}08/2)^4=₡1.169{,}86$$
$$F_2=₡1.000\,(1+0{,}0792/4)^8=₡1.169{,}86$$

*Ejemplo 4.14* ¿Qué tasa efectiva trimestral (ET) produce el mismo rendimiento que una tasa efectiva del 7% trimestral anticipada (ETA)?. Compruébelo para un capital de ₡1.000 en un tiempo de 2 años

#### Identificación de variables:

$i_1=r^*_1=7\%$ ETA;
$m_1=m_2=4$;
$i_2=r^*_2=$ __ET?

#### Selección de fórmulas.

Se utilizará la ecuación (4.10)

$$i=\frac{i_a}{1+i_a}$$

### Aplicación de fórmulas.

$$i_2=\frac{i_1}{1-i_1}=\frac{0{,}07}{1-0{,}07}=7{,}527\%\ ET$$

### Respuesta

R/. Una tasa efectiva trimestral de 7,527% es equivalente a una tasa efectiva trimestral anticipada de 7%.

*Si suponemos que:*

$$P=₡1.000 \text{ y } t=2 \text{ años}, m_1=m_2=4; \rightarrow n_1=n_2=8$$

$$F_1=₡1.000\ (1-0{,}07)^{-8}=₡\ 1.787{,}05$$

$$F_2=₡1.000\ (1+0{,}07527)^{8}=₡1.787{,}05$$

*Ejemplo 4.15* ¿Qué tasa efectiva trimestral anticipada (ETA) produce el mismo rendimiento que una tasa efectiva del 2% mensual anticipada (EMA)? Compruébelo para un capital de ₡1.000 en un tiempo de 2 años

### Identificación de variables:

**$i1=$** $r^*1=2\%$ EMA;
**$m1=$** 12;
**$m2=$** 4;
**$i2=$** $r^*2=$ _?%_ETA?

### Selección de fórmulas.

Se utilizarán las ecuaciones (4.10)

$$i=\frac{i_a}{1-i_a}$$

(4.11) $$i_a=\frac{i}{1-i}$$

(4.8) $$r^*=(1+i)^m-1$$

y (4.13)

$$\left(1\pm\frac{r_1}{m_1}\right)^{\pm m_1}=\left(1\pm\frac{r_2}{m_2}\right)^{\pm m_2}$$

**Aplicación de fórmulas.**

Cálculo 2% EMA a EM

$$i=\frac{i_1}{1-i_1}=\frac{0{,}02}{1-0{,}02}=2{,}04082\%\ EM$$

Calculo Tasa ET

$$r^*=(1+0{,}020482)^3-1=6{,}248\%\ ET$$

Calculo Tasa ETA

$$i_2=\frac{i}{1+i}=\frac{0{,}06248}{1+0{,}06248}=5{,}881\%\ ETA$$

Ahora utilicemos directamente la ecuación (4.13) así:

$$(1-0{,}02)^{-12}=(1-i_2)^{-4}$$

y de aquí despejamos

$$i_2=5{,}881\%\ ETA$$

**Respuesta**

R/. Una tasa efectiva trimestral anticipada de 5,881%ETA produce el mismo rendimiento que una tasa efectiva del 2% mensual anticipada.

*Si suponemos que:*

$$P=₡1.000 \text{ y } t=2 \text{ años}, m_1=12;\ m_2=4;\ \rightarrow n_1=24;\ n_2=8$$
$$F_1=₡\,1.000\ (1-0{,}02)^{-24}=₡\,1.623{,}96$$
$$F_2=₡1.000\ (1-0{,}058808)^{-8}=₡1.623{,}96$$

*Ejemplo 4.16* ¿Qué tasa nominal capitalizable semestralmente anticipada (SA) produce el mismo rendimiento que una tasa nominal del 13% capitalizable trimestralmente del (TV)?. Compruébelo para un capital de ₡1.000 en un tiempo de 2 años

**Identificación de variables:**

***r1=*** 3% TV;
***m1=*** 4;
***m2=*** 2;
***r2=*** ?%SA?

**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (4.13)

$$\left(1 \pm \frac{r_1}{m_1}\right)^{\pm m_1} = \left(1 \pm \frac{r_2}{m_2}\right)^{\pm m_2}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$\left(1+\frac{0,13}{4}\right)^{4} = \left(1-\frac{r_2}{2}\right)^{-2}$$

y de aquí despejamos

$$r_2 = 12,39\%\ SA$$

**Respuesta**

R/. Una tasa nominal del 12,39% capitalizable semestralmente anticipada (SA) produce el mismo rendimiento que una tasa nominal del 13% capitalizable trimestralmente del (TV).

*Si suponemos que:*

$$P=₡1.000 \text{ y } t=2 \text{ años}, m_1=4;\ m_2=2;\ \rightarrow n_1=8;\ n_2=4$$
$$F_1 = ₡1.000\ (1+0,13/4)^{8} = ₡\ 1.136,48$$
$$F_2=₡1.000(1-0,1239263876/2)^{-4}=₡1.136,48$$

## 4.9. Ecuaciones de Valor a Interés Compuesto

En esta ocasión, los mismos principios utilizados para las ecuaciones de valor a interés simple, aplican para el interés compuesto, con la salvedad de utilizar la ecuación (4.4) en vez de la (3.3).

Los problemas básicos que deben analizarse son dos:

1. Establecer el valor que debe pagarse, en determinada fecha, equivalente al valor de un conjunto de obligaciones, que vencen en diferentes fechas.
2. Determinar la fecha de vencimiento promedio en que se puede cancelar mediante un pago único igual a la suma de los valores de un conjunto de obligaciones que tienen distintas fechas de vencimiento. El tiempo por transcurrir hasta la fecha de vencimiento promedio se define como tiempo equivalente. El cálculo del tiempo equivalente se efectúa planteando ecuaciones de valor y determinando arbitrariamente la fecha focal.

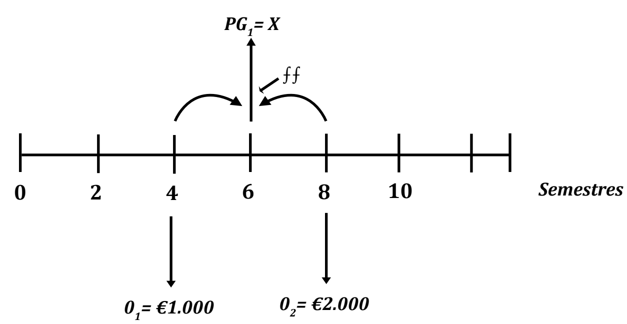
*Ejemplo 4.17* Una persona debe ₡1.000 pagaderos dentro de 2 años y ₡2.000 a 5 años de plazo. Con su acreedor pacta un pago único al final de 3 años a la tasa del 8%, capitalizable semestralmente. Calcular el valor único del pago.

**Identificación de variables:**

Designaremos por On las obligaciones y por PGn los pagos, entonces tenemos:

***$O_1$*=** ₡1.000 ;
***$O_2$*=** ₡2.000;
***r*=** 8% capitalizable semestralmente;
***m*=** 2;
***i*=** 4% semestral;
***$PG_1$*=** X Escojamos al año 3 como la fecha focal (ff).

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**



**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

Se utilizarán las ecuaciones (4.4)

$$F = P(1+i)^n$$

y (4.5)

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

Bajo la condición de que ∑ *Obligaciones*= ∑ *Pagos, en fecha focal* se tiene:

$$O_1 (1+0,04)^2 + \frac{O_2}{(1+0,04)^4} = X \rightarrow$$

Reemplazando valores tenemos:

$$₡1.000(1+0,04)^2 + \frac{₡2.000}{(1+0,04)^4} = X = ₡2.791,208$$

**RESPUESTA**

R/. Un pago de ₡2.791,208 reemplaza en 3 años una obligación de ₡1.000 a pagarse dentro de dos años más una obligación de ₡2.000 a pagarse dentro de 5 años, considerando una tasa de interés del 8% capitalizable semestralmente y escogiendo el año 3 como fecha focal.

*Ejemplo 4.18* ¿Cuál es el tiempo equivalente para que un pago de ₡4.500 reemplace una deuda de ₡1.500 con vencimiento en un año y otra de ₡3.000, con vencimiento a 2 años, asumiendo un rendimiento del 10% anual convertible trimestralmente? Escojamos el día de hoy como la fecha focal (ff).

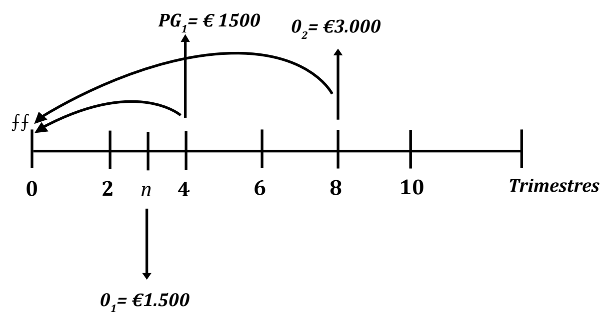
**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES:**

Designaremos por $O_n$ las obligaciones y por $PG_n$ los pagos, entonces tenemos:

$O_1$= ₡1.500 ;
$O_2$= ₡3.000;
$PG_1$= ₡4.500;
$r$= 10% capitalizable trimestralmente;

***m=*** 4;
***i=*** 2,5% trimestral;
***n=*** ?

**ELABORACIÓN DIAGRAMA DE LÍNEAS DE TIEMPO.**




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

Se utilizarán las ecuaciones (4.4)

$$F= P\,(1+i)^{n}$$

y (4.5)

$$P=\frac{F}{(1+i)^{n}}$$

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

Bajo la condición de que ∑ *Obligaciones* =∑ *Pagos,en fecha focal* se tiene:

$$\frac{O_1}{(1+0{,}025)^4} + \frac{O_2}{(1+0{,}025)^8} = PG_1\,(1+0{,}025)^{-n} \rightarrow$$

Reemplazando valores tenemos:

$$\frac{₡1.500}{(1+0{,}025)^4} + \frac{₡3.000}{(1+0{,}025)^8} = ₡4.500\,(1+0{,}025)^{-n} \rightarrow$$

Despejando n se tiene:

$$(1{,}025)^{-n} = 0{,}8491479 \rightarrow \; -n = \frac{\text{Log}\,(0{,}8491479)}{\text{Log}\,(1{,}025)} \rightarrow \; n = 6{,}62 \text{ trimestres}$$

**Respuesta**

R/. El tiempo equivalente para que un pago de ₡4.500 reemplace una deuda de ₡1.500 con vencimiento en un año y otra de ₡3.000, con vencimiento a 2 años, asumiendo un rendimiento del 10% anual convertible trimestralmente es de 6,62 trimestres, equivalentes a 1 año, 7 meses y 26 días. ¿De dónde se obtiene este último resultado?

$$6{,}622299215 \; \cancel{\text{trimestres}} * \frac{(3 \text{ meses})}{(1 \; \cancel{\text{trimestre}})} = 19{,}866897644 \text{ meses.}$$

De aquí tomo 19 meses

$$19 \; \cancel{\text{meses}} * \frac{1 \text{ año}}{12 \; \cancel{\text{meses}}} = 1{,}58333333 \text{ años.}$$

De aquí tomo 1 año

$$0{,}58333333 \; \cancel{\text{años}} * \frac{12 \text{ meses}}{1 \; \cancel{\text{año}}} = 7 \text{ meses.}$$

De aquí tomo los 7 meses

$$0{,}866897644 \; \cancel{\text{meses}} * \frac{30 \text{ días}}{1 \; \cancel{\text{mes}}} = 26 \text{ días.}$$

De aquí tomo los 26 días

## 4.10. Análisis de Inversiones

El uso del Valor Actual Neto (VAN) y la Tasa Interna de Retorno (TIR) como instrumentos de Análisis de Inversiones, vistos en el capítulo anterior, tienen mayor aplicación en el interés compuesto que en el simple. Aquí siguen siendo válidas las interpretaciones sobre sus resultados, sin embargo, para su cálculo se emplea la ecuación (4.4) de interés compuesto en vez de la ecuación (3.3) de interés simple, a saber:

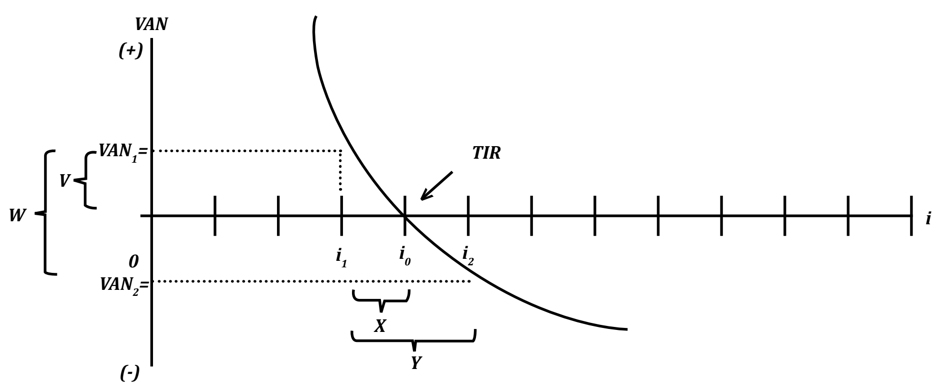
El VAN se obtiene a través de la siguiente ecuación:

$$VAN = -I_0 + \frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n} - \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n} \quad (4.13)$$

Dónde:

***VAN =*** Valor Actual Neto
***Io =*** Inversión Inicial
***Yn=*** Ingresos en el periodo n
***n=*** periodo de tiempo donde ocurre el hecho económico
***Cn=*** Egresos o Costos en el Periodo n
***i=*** tasa de interés de oportunidad o TIO
***T=*** Tiempo total de duración del proyecto

Para el cálculo de la **TIR** se sigue utilizando el método de ensayo y error, donde proponemos tasas de interés y encontramos diferentes **VAN**, hasta encontrar los dos VAN más cercanos a cero tanto por la derecha como por la izquierda, es decir un VAN < 0 y un VAN >0, los más cercanos posibles y luego interporlar estos valores, bajo la relación que existe entre los VAN y las tasas de interés que los generan. Nuevamente, gráficamente se aprecia así:




Dónde:

X es la distancia entre $i_1$ e $i_0$
Y es la distancia entre $i_1$ e $i_2$
V es la distancia entre 0 y $VAN_1$,
W es la distancia entre $VAN_1$ y $VAN_2$

Una vez obtenidos $VAN_1$ con $i_1$ y $VAN_2$ con $i_2$, se procede a realizar la interpolación para obtener i0 que corresponde a la TIR donde VAN≅0.

**INTERPOLACIÓN:** ***Tasas*** ***VAN***

$$Y\left\{\begin{array}{l} X\left\{\begin{array}{l} i_1 \\ i_0 \end{array}\right. \\ \\ i_2 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} VAN_1 \\ \varnothing \end{array}\right\}V \\ \\ VAN_2\end{array}\right\}W$$

Siguiendo el concepto de proporciones y la relación que guarda el VAN con su respectiva tasa, se tiene:

$$\frac{X}{Y} = \frac{V}{W}$$

Como los valores de V, W, e Y son conocidos, se procede a despejar X

$$X = \frac{V*Y}{W}$$

Ahora tenemos que $i_1 + X = i_0 = TIR$

Una manera práctica de encontrar la TIR en interés compuesto es a través de los siguientes pasos:

1. Encontrar una tasa tentativa

$$\text{Tasa Tentativa (TT)} = \left[ \frac{\sum Flujos\ (+) - \sum Flujos(-)}{\sum Flujos\ (-) + \#\ años} \right] * 0{,}75 \quad (4.14)$$

2. Aplicar ensayo y error
3. Utilizar la interpolación

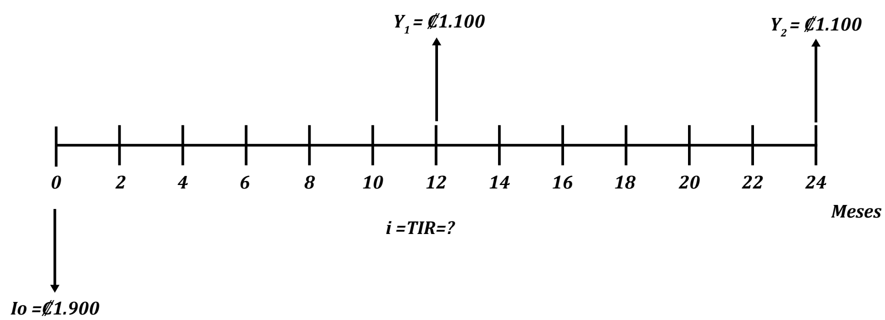
$$TIR = \text{Tasa menor} + \frac{\text{Diferencia de tasas}*VAN(+)}{(|VAN(+)| + |VAN(-)|} \quad (4.15)$$

*Ejemplo 4.19* Una compañía puede destinar ₡1.900 a una inversión de la que espera un ingreso de ₡1.100 al cabo de 12 y 24 meses respectivamente. Calcular la tasa de rendimiento interno de la inversión (TIR).

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES:**

$I_0=$ ₡1.900;
$Y_1=$ ₡1.100;
$Y_2=$ ₡1.100;
$n_1=$ 1 año;
$n_2=$ 2 años;
$TIR=$ ?

**ELABORACIÓN DIAGRAMA DE LÍNEAS DE TIEMPO.**




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

En este caso se utiliza la ecuación (4.13)

$$VAN= -I_0 + \frac{\sum_{n=1}^{T} Y_n}{(1+i)^n} - \frac{\sum_{n=1}^{T} C_n}{(1+i)^n}$$

(4.14)

$$\text{Tasa Tentativa (TT)}=\frac{\left[\sum \text{Flujos}(+)-\sum \text{Flujos}(-)\right] * 0{,}75}{\sum \text{Flujos}(-)+\#\ \text{años}}$$

(4.15)

$$TIR=\text{Tasa menor} + \frac{\text{Diferencia de tasas} * VAN(+)}{(|VAN(+)| + |VAN(-)|}$$

**Aplicación de fórmulas.**

1. Tasa Tentativa:

$$(TT)=\left[\frac{(\sum Flujos\ (+)-\sum Flujos(-)}{\sum Flujos\ (-)+\#\ años}\right]*0{,}75=\left[\frac{₡2.200-₡1.900}{₡1.900+2}\right]*0{,}75=11{,}08\%$$

2. Ensayo y error:

$$VAN_{10\%}=-₡1.900+\frac{₡1.100}{(1+0{,}10)^1}+\frac{₡1.100}{(1+0{,}10)^2}=₡9{,}091$$

$$VAN_{12\%}=-₡1.900+\frac{₡1.100}{(1+0{,}12)^1}+\frac{₡1.100}{(1+0{,}12)^2}=-₡40{,}944$$

3. Interpolación:

$$TIR=Tasa\ menor+\frac{Diferencia\ de\ tasas*VAN(+)}{|VAN(+)|+|VAN(-)|}=10\%+\frac{(2*(₡9{,}091)}{₡9{,}091+₡40{,}944}$$

$$=10\%+0{,}36\%=10{,}36\%$$

**Respuesta**

R/. La TIR que permite que una inversión de ₡1.900 genere ₡1.100 al cabo de 12 y 24 meses es 10,36%. Con esta tasa el inversionista no tendría utilidades pero tampoco pérdidas traídas a valor presente, indicando un VAN≅0.

## RESUMEN CAPÍTULO 4: El Interés Compuesto

El **Interés Compuesto** o interés sobre el interés, es el de mayor uso en las transacciones registradas por la Contabilidad Nacional, y se constituye en el interés utilizado de manera formal en la economía. Su comprensión es de vital importancia para la toma de decisiones financieras, pues es punto de partida para la gran mayoría de los temas de la Ingeniería E conómica.

El Interés Compuesto ofrece los lineamientos esenciales para una correcta interpretación del mundo financiero, toda vez, que la capitalización de intereses está presente en sus transacciones. Este capítulo desarrolla de manera esquemática y metódica todos los temas que el lector requiere para una inserción efectiva en la Ingeniería Económica, tales como Valor Presente, Monto, Interés, Ecuaciones de Valor y TIR, pero ahora considerando la capitalización de los intereses. *La tasa de interés en los ejercicios financieros siempre se considera vencida a no ser que se explicite lo contrario.*

En este capítulo se han utilizado las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{n = t*m} \quad (4.1)$$

$$\boxed{i = \frac{r}{m}} \quad (4.2)$$

$$\boxed{I = P\,(1+i)^n - P} \quad (4.3)$$

$$\boxed{F = P\,(1+i)^n} \quad (4.4)$$

$$\boxed{P = \frac{F}{(1+i)^n}} \quad (4.5)$$

$$\boxed{i = \sqrt[n]{F/P} - 1} \quad (4.6)$$

$$\boxed{n = \frac{Log\,(F/P)}{Log\,(1+i)}} \quad (4.7)$$

$$\boxed{r^* = (1+r/m)^m - 1} \quad (4.8)$$

$$\boxed{i = \sqrt[m]{(1+r^*)} - 1} \quad (4.9)$$

$$\boxed{i = \frac{i^a}{1+i}} \quad (4.10)$$

$$\boxed{i_a = \frac{i}{1+i}} \quad (4.11)$$

$$\boxed{F = P\,(1-i_a)^{-n}} \quad (4.12)$$

$$\left(1 \pm \frac{r_1}{m_1}\right)^{\pm m_1} = \left(1 \pm \frac{r_2}{m_2}\right)^{\pm m_2} \quad (4.13)$$

$$(TT) = \left[\frac{\sum Flujos\,(+) - \sum Flujos(-)}{\sum Flujos\,(-) + \#\ años}\right] * 0{,}75 \quad (4.14)$$

$$TIR = Tm + \frac{Diferencia\ de\ tasas * VAN(+)}{|VAN(+)| + |VAN(-)|} \quad (4.15)$$

Dónde: n=número total de periodos; t=tiempo en años; m=número de periodos en un año; i=Tasa de interés por periodo; r*=Tasa de interés efectiva anual; $i_a$=tasa de interés anticipada; F=Valor Futuro; P= Valor Presente; r=tasa de interés nominal anual; TT=Tasa Tentativa; Tm=Tasa menor; TIR=Tasa Interna de Retorno.

…………… ✧ ……………

## EJERCICIOS CAPÍTULO 4: El Interés Compuesto

1. Hallar el valor futuro a interés compuesto de:

   **a.** ₡5.000 al 6% capitalizable semestralmente en 20 años
   **b.** ₡4.000 al 7% capitalizable semestralmente en 70 año
   **c.** ₡9.000 al 7.5% capitalizable trimestralmente en 12 año
   **d.** ₡8.000 al 6.5% capitalizable mensualmente en 30 años.

2. Hallar el valor futuro de ₡1.000 depositados al 8% capitalizable trimestralmente durante 32 años, 7 meses y 22 días.

3. Una persona deposita ₡3.000 el 22 de abril de hace 7 años, en una corporación de

ahorros que paga el 6% capitalizable semestralmente el 30 de junio y el 31 de diciembre de cada año. ¿Cuánto podría retirar el 14 de noviembre de este año?

4. Un banco pagaba el 5% de interés compuesto capitalizable trimestralmente. El primero de enero de este año modificó la tasa elevándola al 7% capitalizable semestralmente. Calcular el monto compuesto que tendrá el primero de enero del próximo año, un depósito de ₡1.000 efectuado el primero de abril del año pasado?.

5. Una señora hace los siguientes depósitos en una cuenta de ahorros que le recono ce una tasa del 1% mensual: ₡500 dentro de 5 meses, ₡800 dentro de 7 meses y ₡1.000 dentro de 10 meses. Calcular

   **a.** Saldo en la cuenta al final del año
   **b.** El valor de un depósito único en el día de hoy para tener el mismo saldo al final del año.

6. Se adquiere una máquina financiada y se pacta cubrir en tres pagos de ₡6.000, ₡8.000 ₡10.000 en los meses 6, 8 y 12 respectivamente. Hallar el valor de contado sabiendo que la financiación contempla una tasa de interés sobre saldo del 2,5% mensual para los 6 primeros meses y del 9% trimestral de allí en adelante.

7. Una persona deposita hoy ₡450 en una corporación de ahorro que paga el 28% TV. Tres años después deposita ₡620, un año más tarde deposita ₡500 y dos años después decide retirar la cuarta parte del total acumulado hasta ese momento. Hallar el saldo en la cuenta de ahorros cinco meses después del retiro.

8. Un señor está vendiendo su casa y recibe las siguientes ofertas:

   **a.** Un empleado del gobierno le ofrece ₡100.000 de contado
   **b.** Un familiar le ofrece pagarle dentro de un año la suma de ₡137.000
   **c.** Un amigo le ofrece pagarle hoy ₡70.000 y dentro de 10 meses la suma de ₡39.000

   Si el señor puede invertir su dinero a una tasa del 2,5% mensual, ¿cuál oferta le conviene?

9. Calcular la tasa de interés mensual compuesta equivalente a una tasa del 6% mensual simple, durante 2,5 años

10. ¿Cuánto tiempo debe esperar un inversionista para que una inversión de ₡5.000 se convierta en ₡16.310,1889, si el rendimiento es del 3% mensual?

11. ¿Cuánto tiempo se debe esperar para que una inversión al 1,89% mensual se incremente en un 40%?

12. ¿Dentro de cuántos trimestres se tendrá en una cuenta de ahorros un saldo de ₡910,66, sabiendo que hoy se hace un depósito de ₡400 y luego retiros así: ₡80 dentro de 9 meses, ₡120 dentro de 12 meses, si la cuenta de ahorros abona un interés del 9,5% trimestral?

13. Hallar:

    **a.** Una tasa nominal SV equivalente al 24%TV
    **b.** Una tasa nominal TA equivalente al 2,5% periódica mensual

14. Hallar:

    **a.** Una tasa EA equivalente al 25% EAA
    **b.** Una tasa EAA equivalente al 36% EA
    **c.** Una tasa EAA equivalente al 2,5% periódica mensual

15. ¿Qué será mejor, invertir en el agro, lo cual me garantiza un rendimiento anual del dinero del 30%; o invertir en el comercio, que me garantiza duplicar el capital invertido cada 3 años?

16. ¿A qué tasa nominal TA se triplica un capital en 4 años?

17. A partir de una tasa nominal del 34% TA, calcular:

    **a.** Tasa nominal TV
    **b.** Tasa nominal MV
    **c.** Tasa nominal MA
    **d.** Tasa efectiva trimestral

18. Una persona debe ₡2.000 a 3 años de plazo al 10% capitalizable semestralmente y ₡3.000 sin intereses a 2 años de plazo. Propone la siguiente operación comercial a la tasa efectiva del 9%. Pagar ₡1.000 al contado, ₡2.500 a 2 años de plazo y el saldo a 3 años. Hallar el monto del último pago.

19. Se ha pactado cubrir la siguiente obligación: ₡1.550 a pagar hoy, ₡2.100 dentro de 6 meses y ₡1.800 dentro de 15 meses, con un interés del 36%MV; se desea sus tituir por tres pagos así: ₡2.000 dentro de 3 meses, ₡1.500 dentro de un año, y un último pago dentro de año y medio. Determinar el valor de este último pago si para este caso si para este caso la tasa de interés es del 3,2% MV (Utilice el

valor presente como fecha focal).

20. Dos capitales suman ₡2.000 y se colocan al 16% anual, pero el primero capitaliza intereses trimestralmente (TV) y el segundo semestralmente en forma anticipada (SA). Si al cabo de 10 años los montos son iguales. ¿Cuál es el valor de cada capital?

21. Una deuda con vencimiento el día de hoy por ₡12.000 se va a cancelar de la siguiente forma: ₡3.000 dentro de un mes y dos pagos de ₡4.000 dentro de dos y tres meses respectivamente. Suponiendo un interés del 10% MV, ¿dentro de cuánto tiempo debo pagar ₡4.769,82?

22. ¿Cuántos días será necesario invertir un dinero a una tasa del 18% de modo que produzca unos intereses equivalentes a la mitad del capital invertido? Asuma un año de 360 días.

23. Sustituir una obligación que se financió al 3% mensual por medio de tres pagos así: Uno por ₡1.000 para hoy, otro por ₡1.500 para dentro de 5 meses y otro por ₡1.800 para dentro de año y medio, por su equivalente en cuatro pagos a 8, 10, 15 y 20 meses tales que cada uno sea la mitad del anterior, sabiendo que para este caso la tasa de interés es del 3,2% mensual. Hallar el valor de cada uno de los pagos.

24. Que tasa de interés (TIR) le reconocen a un inversionista, si deposita hoy en una corporación financiera ₡2.000, retira en cada uno de los 3 meses siguientes la cuarta parte de lo depositado y todavía en el mes 6 tiene un saldo de ₡646?

25. Una inversión que requiere de un desembolso inicial de ₡5.000 origina ingresos de ₡3.000, ₡2.000, ₡1.000 y ₡500 durante los primeros 4 años respectivamente. Al quinto y sexto año requiere de dos desembolsos adicionales de ₡700 y ₡800 para finalmente generar ingresos por ₡600 durante los años 7 y 8. Hallar la TIR de la operación.

# 5. SERIES FINANCIERAS FIJAS: ANUALIDADES

## PREÁMBULO

En este capítulo se analizan los procedimientos necesarios para la atención de situaciones financieras donde se dispone de un conjunto de pagos sucesivos o no pero que se caracterizan por tener cuantías iguales. En las operaciones financieras cotidianas, las series financieras ocupan un lugar preponderante y es menester su comprensión y eficiente atención en aras de contribuir a un mejor razonamiento financiero por parte de los lectores.

## 5.1. Definiciones

En ingeniería económica las series financieras corresponden a una sucesión de pagos o capitales a determinados intervalos de tiempo. La cuantía de los capitales y las características de los intervalos determina el tipo de serie a que refiere la operación financiera. Las series financieras fijas o anualidades, se emplean para indicar el sistema de pago de cuantías fijas a intervalos iguales de tiempo. En finanzas, anualidad no significa pagos anuales sino pagos a intervalos iguales. Por consiguiente, se consideran anualidades los dividendos sobre acciones, los fondos de amortización, los pagos a plazos, los pagos periódicos de las compañías de seguros y en forma más general, los sueldos y todo tipo de rentas. Los factores financieros que intervienen en las anualidades y sus formas de pago determinan diferentes tipos de anualidades.

Para que una serie de pagos periódicos se considere una anualidad, debe cumplir con las siguientes condiciones:

- Todos los pagos deben ser iguales
- Todos los pagos deben ser periódicos
- La serie de pagos debe tener un valor presente (P) equivalente y un valor futuro (F) equivalente
- El número de periodos debe ser igual al número de pagos

Los elementos que intervienen en una serie fija o Anualidad son los siguientes:

#### RENTA PERIÓDICA (R):

Corresponde al valor o cuantía de cada uno de los pagos o capitales que intervienen en la operación financiera.

#### PERÍODO DE LA RENTA O INTERVALO DE PAGO:

Es el lapso comprendido entre cada uno de los pagos sucesivos. Generalmente los intervalos de tiempo tienden a ser discretos como es el caso de los periodos anual, semestral, trimestral, mensual o cualquier otro intervalo fijo, pero también existen los periodos continuos donde la amplitud de los intervalos es infinitesimal, y de los cuales se hablará posteriormente.

#### TÉRMINO (n):

Es el tiempo transcurrido entre el comienzo del primer período y el final del último. El término vincula la sumatoria del número de pagos o capitales vinculados en la operación financiera. *Sin embargo, en el caso de las anualidades diferidas estos dos valores no necesariamente coinciden.*

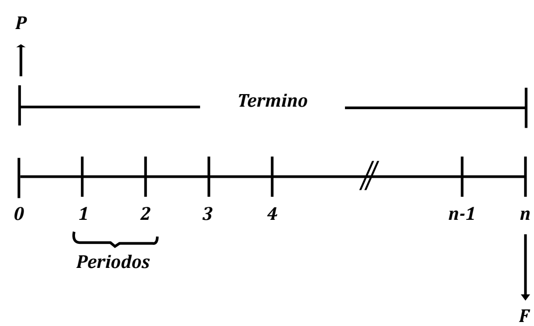
#### VALOR PRESENTE (P):

Corresponde al valor en tiempo actual o momento cero (0) de todos los capitales vinculados en la operación financiera.

#### MONTO (F):

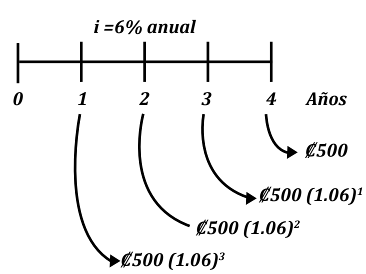
Es el valor final o monto de una serie fija o anualidad. Corresponde a la suma de todos los pagos periódicos y su correspondiente interés compuesto, acumulados al final del término (n) de la operación.

Los elementos aquí descritos se pueden observar en el siguiente diagrama:




*Ejemplo 5.1* Desde hace un año una persona deposita ₡500 anuales en una cuenta, que le paga el 6% de interés capitalizable anualmente. ¿Cuál será el monto acumulado en la cuenta de un modo inmediato, después que se efectúe el cuarto depósito?

### DESCRIPCIÓN GRÁFICA:



**Solución Numérica:**

| | |
|---|---|
| Cuarto Pago: | ₡500,00 |
| Tercer pago: | ₡530,00 |
| Segundo pago: | ₡561,80 |
| Primer pago: | ₡595,51 |
| **Monto de la Anualidad** | **₡2.187,31** |

**Respuesta**

R/. Depósitos fijos de ₡500 al final de cada año con reconocimiento de intereses del 6% capitalizable anualmente, producen un monto de ₡2.187,31 al cabo de cuatro años.

## 5.2. Anualidades Vencidas

Una anualidad vencida es aquella en la que los pagos se efectúan al final del período, por ejemplo, el pago de sueldos de un empleado.

Para calcular el valor presente y el valor futuro de una anualidad vencida, es preciso recurrir a la ecuación (2.12) sobre progresiones geométricas. Como se observa en el ejemplo anterior, el monto corresponde a la suma de una progresión geométrica donde ₡500 es el primer término, 1,06 es la razón, y 4 corresponde al número de periodos. La ecuación (2.12) expresa lo siguiente:

$$Sn = \frac{a1(r^n-1)}{(r-1)}$$

En términos financieros podemos reemplazar *Sn* por *F, a1* por *R, (1+i)* por *r,* y *n* sigue siendo *n.* Con estos cambios la ecuación (2.5) se transforma en:

$$F = \frac{R(\,(1+i)^n-1)}{(\,1+i-1)}$$

entonces

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n-1)}{i}\right] \quad (5.1)$$

De la ecuación (5.1) podemos obtener la ecuación de la Renta a partir del monto:

$$R = \left[\frac{F\,i}{(1+i)^n-1)}\right] \quad (5.2)$$

De conformidad con la ecuación (4.5) $P = \frac{F}{(1+i)^n}$

al reemplazar el monto por el obtenido en la ecuación (5.1) tenemos:

$$P = \left[\frac{\frac{R[(1+i)^n-1)]}{i}}{(1+i)^n}\right] =$$

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \quad (5.3)$$

De la ecuación (5.3) podemos obtener la ecuación de la Renta a partir del valor presente:

$$R = P\left[\frac{i\,(1+i)n}{(1+i)^n-1}\right] \quad (5.4)$$

De la ecuación (5.1) podemos despejar el número de periodos n a partir de F:

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] \rightarrow \frac{Fi}{R} = (1 + i)^n - 1 \rightarrow (1 + i_R)^n + 1$$

por tanto:

$$n = \frac{Log\left(\frac{Fi}{R}+1\right)}{Log\,(1+i)} \qquad (5.5)$$

Así mismo, de la ecuación (5.3) podemos despejar el número de periodos n a partir de P:

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1)}{i(1+i)^n}\right] \rightarrow \frac{Pi}{R} = \frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n} \rightarrow \frac{Pi}{R} = 1 - \frac{1}{(1+i)^n} \rightarrow (1+i)^{-n} = 1 - \frac{Pi}{R}$$

por tanto:

$$n = \frac{Log\left(1-\frac{Pi}{R}\right)}{Log\,(1+i)} \qquad (5.6)$$

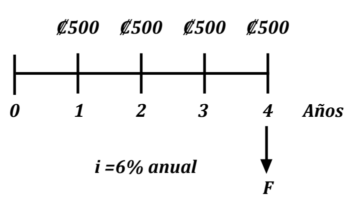
Este grupo de seis ecuaciones constituyen las herramientas esenciales para abordar la solución de problemas financieros que vinculan series fijas vencidas. El cálculo de las tasas de interés vinculadas a estas operaciones financieras, puede obtenerse a partir de la metodología de ensayo y error vista con anterioridad.

*Ejemplo 5.2* Resolver el ejemplo 5.1 mediante la aplicación de fórmulas.

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES.**

***R=*** ₡500;
***i=*** 6% anual;
***n=*** años;
***F=*** ?

**ELABORACIÓN DIAGRAMA DE LÍNEAS DE TIEMPO.**




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

Se utilizará la ecuación (5.1)

$$F = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1)}{i}\right]$$

### Aplicación de fórmulas.

$$F = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1)}{i}\right] = F = ₡500\left[\frac{(1+0,06)^{4}-1)}{0,06}\right] = ₡2.187,31$$

### Respuesta.

R/. Depósitos fijos de ₡500 al final de cada año con reconocimiento de intereses del 6% capitalizable anualmente, producen un monto de ₡2.187,31 al cabo de cuatro años.

*Ejemplo 5.3* El señor A compra un vehículo con una cuota inicial de ₡5.000 y 36 cuotas iguales de ₡300. La agencia cobra el 2,5% mensual sobre saldos.

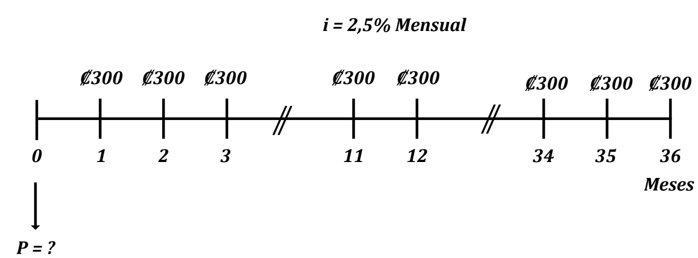
**a.** ¿Cuánto debe el señor A en el momento de realizar la compra?
**b.** Si paga la deuda en el último mes, ¿Cuánto deberá pagar?
**c.** Si paga toda la deuda al final del primer año ¿Cuánto debe pagar?

### *Sol ución Literal a.*

### Identificación de variables.

***R=*** ₡300;
***i=*** 0,025% mensual;
***n=*** 36 meses;
***P=*** ?

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.



**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.3)

$$P= R\left[\frac{(1+i)^n-1)}{i(1+i)^n}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] = P = 300\left[\frac{(1+0{,}025)^{36}-1}{0{,}025(1+0{,}025)^{36}}\right] = ₡7.066{,}88$$

**Respuesta.**

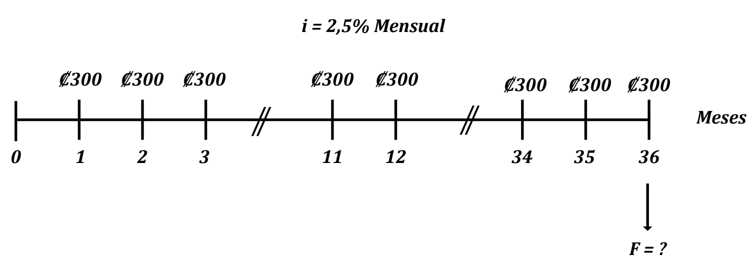
R/. En el momento de realizar la compra el señor A debe ₡7.066,88.

***Sol ución Literal b.***

**Identificación de variables.**

***R=*** ₡300;
***i=*** 2,5% mensual;
***n=*** 36 meses;
***F=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.1)

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] = F = ₡300\left[\frac{(1+0,025)^{36}-1}{0,025}\right] = ₡17.190,42$$

**Respuesta.**

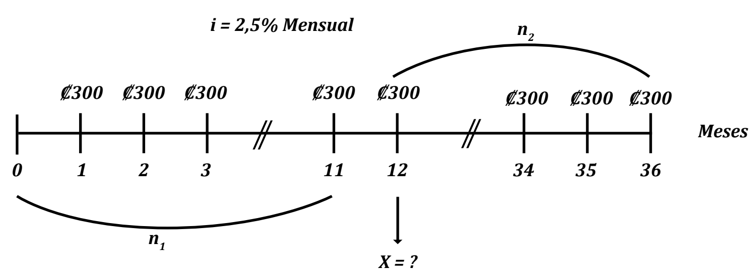
R/. Si el señor A paga la deuda en el último mes, deberá pagar ₡17.190,42.

***Solución Literal c.***

**Identificación de variables.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***R=*** | ₡500; | ***F1=*** | ?; |
| ***i=*** | 2,5% anual; | ***P2=*** | ?; |
| ***n1=*** | 12 meses; | ***X=*** | ? |
| ***n2=*** | 24 meses; | | |

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.1)

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right]$$

y la ecuación (5.3)

$$P= R \left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$$

*Aplicación de fórmulas.*

$$X = F_1 + P_2 = R\left[\frac{(1+i)^{n1}-1}{i}\right] + R\left[\frac{(1+i)^{n2}-1}{i(1+i)^{n2}}\right] = ₡300\left[\frac{(1+0,025)^{12}-1}{0,025}\right] +$$

$$₡300\left[\frac{(1+0,025)^{12}-1}{0,025}\right]+₡300\left[\frac{(1+0,25)^{24}-1)}{0,025(1+0,025)^{24}}\right]= ₡9.504,16$$

**Respuesta.**

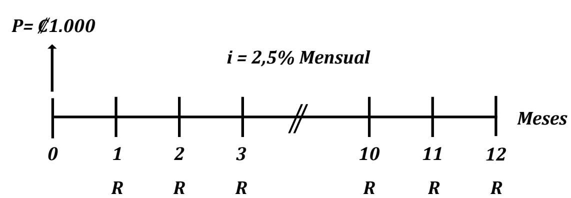
R/. Si el señor A paga la deuda al final del primer año, deberá pagar ₡9.504,16.

*Ejemplo 5.4* Una persona desea contar con ₡1.000 en un año. Su intención para obtener esta suma es ahorrar una cantidad igual cada mes, empezando el próximo mes en una Corporación Financiera que paga el 30% de interés capitalizable mensualmente. ¿A cuánto ascienden los depósitos iguales que deberá ahorrar cada mes, hasta completar las ₡1.000 al cabo de un año?

**Identificación de variables.**

***F=*** ₡1.000;
***r=*** 30%;
***m=*** 12;
***i=*** 0,30/12=2,5% mensual;
***n=*** 12 meses;
***R=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.2)

$$R = F\left[\frac{i}{(1+i)^n-1)}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$R = F\left[\frac{i}{(1+i)^n-1)}\right] = R = ₡1.000\left[\frac{0{,}025}{(1+0{,}025)^{12}-1}\right] = ₡72{,}49$$

**Respuesta.**

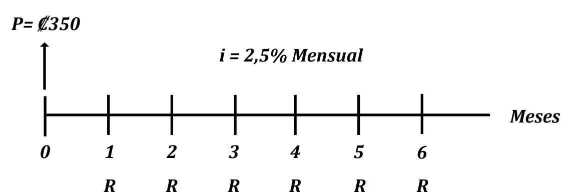
R/. Depósitos mensuales de ₡72,49 con un interés del 30% capitalizable mensualmente, permiten a una persona obtener ₡1.000 al cabo de un año.

*Ejemplo 5.5* Una señora compró un electrodoméstico por ₡350 y propuso pagarlo en 6 cuotas mensuales iguales, haciendo el primer pago un mes después de haber adquirido el electrodoméstico a un interés del 27% anual capitalizable mensualmente ¿A cuánto ascienden los pagos mensuales iguales que deberán hacerse, de tal forma que con el último pago se liquide totalmente la deuda?

**Identificación de variables.**

***P=*** ₡350;
***r=*** 27%;
***m=*** 12;
***i=*** 0,27/12=2,25% mensual;
***n=*** 6 meses;
***R=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.4)

$$R = P\left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$R= P\left[\frac{i\,(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}\right] =R=₡350\left[\frac{0,0225(1+0,0225)^{6}}{(1+0,0225)^{6}-1}\right] =₡63,01$$

**Respuesta.**

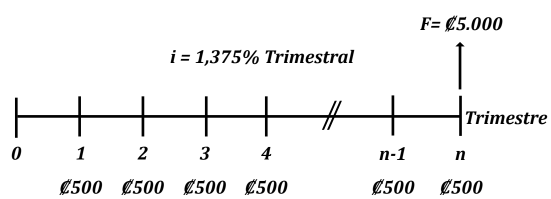
R/. Depósitos mensuales vencidos de ₡63,01 con un interés del 27% capitalizable mensualmente, permiten a una señora cancelar un electrodoméstico que actualmente cuesta ₡350.

*Ejemplo 5.6* ¿Cuál será el número de pagos trimestrales de₡500 para acumular ₡5.000, si la tasa de interés es de 5 ½ % convertible trimestralmente?

**Identificación de variables.**

***F=*** ₡5.000;
***r=*** 5,5%;
***m=*** 4;
***i=*** 0,055/4=1,375% trimestral;
***R=*** ₡500;
***n=*** ? trimestres

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.5)

$$n= \frac{Log\left(\frac{Fi}{R}+1\right)}{Log\,(1+i)}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$n= \frac{Log(\frac{Fi}{R}+1)}{Log\ (1+i)} \ =n= \frac{log\left(\frac{1+0{,}01375}{\text{₡}500}+1\right)}{log(1+0{,}01375)}\ 9{,}4\ pagos$$

**Respuesta.**

R/. Se requieren 9,4 pagos trimestrales de ₡500 para acumular ₡5.000 con una tasa de interés de 5 ½ % convertible trimestralmente. En efecto, se requieren 9 pagos completos más uno de menor valor.

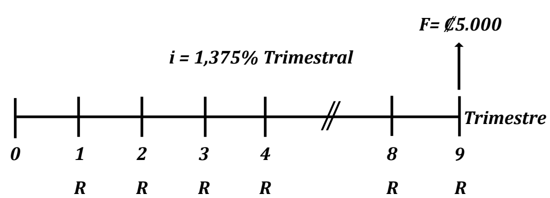
Debido a que en la práctica no se suelen utilizar periodos incompletos, en la situación anterior se pueden utilizar una de las siguientes opciones:

**a.** Redondear el número de pagos a 9 y recalcular la cuota.

**Identificación de variables.**

***F=*** ₡5.000;
***r=*** 5,5%;
***m=*** 4;
***i=*** 0,055/4=1,375% trimestral;
***n=*** 9 trimestres;
***R=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.2)

$$R=F\left[\frac{i}{(1+i)^n-1)}\right]$$

### Aplicación de fórmulas.

$$R = \left[\frac{Fi}{(1+i)^{n}-1}\right] = R = ₡5.000\left[\frac{0,01375}{(1+0,01375)^{9}-1}\right] = ₡525,7$$

### Respuesta.

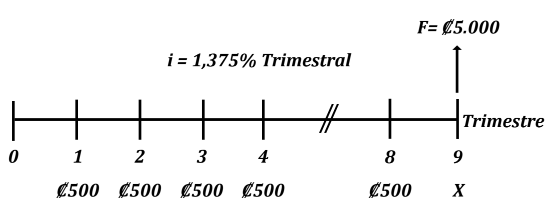
R/. Se requieren 9 pagos trimestrales de ₡525,7 para acumular ₡5.000 con una tasa de interés de 5 ½ % convertible trimestralmente.

**b.** Hacer 8 pagos iguales de ₡500 y uno de mayor valor en el periodo 9.

### Identificación de variables.

***F=*** ₡5.000;
***r=*** 5,5%;
***m=*** 4;
***i=*** 0,055/4=1,375% trimestral;
***R=*** ₡500;
***n=*** 8 trimestres;
***X=*** ?

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

Se utilizará la ecuación (5.1)

$$F = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]$$

### Aplicación de fórmulas.

$$X=F-R\left[\frac{(1+i)^{n}-1)}{i}\right](1+i)^{1}=X=$$

$$₡5.000-₡500\left[\frac{(1+0{,}01375}{0.01375}{}^{8}-1\right](1+0{,}01375)^{1}=₡744{,}39$$

### Respuesta.

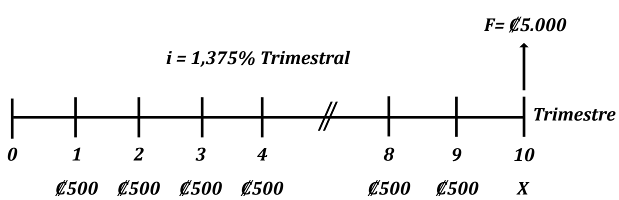
R/. Se requieren 8 pagos trimestrales de ₡500 y uno de ₡744,39 en el periodo 9 para acumular ₡5.000 con una tasa de interés de 5 ½ % convertible trimestralmente.

**c.** Hacer 9 pagos iguales de ₡500 y uno de menor valor en el periodo 10.

### Identificación de variables.

***F=*** ₡5.000;
***r=*** 5,5%;
***m=*** 4;
***i=*** 0,055/4=1,375% trimestral;
***R=*** ₡500;
***n=*** 9 trimestres;
***X=*** ?

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

Se utilizará la ecuación (5.1)

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$X = F - R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right](1+i)^1 = X =$$

$$\text{₡}5.000 - \text{₡}500\left[\frac{(1+0{,}01375)^9 - 1}{0.01375}\right](1+0{,}01375)^1 = \text{₡}179$$

**Respuesta.**

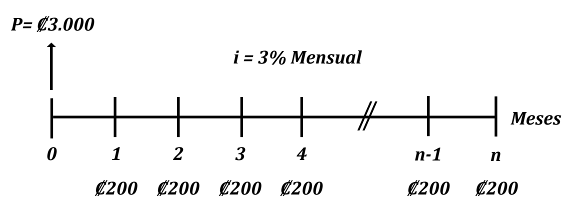
R/. Se requieren 9 pagos trimestrales de ₡500 y uno de ₡179 en el periodo 10 para acumular ₡5.000 con una tasa de interés de 5 ½ % convertible trimestralmente.

*Ejemplo 5.7* El señor B hizo un préstamo por ₡3.000 mediante cuotas iguales de ₡200. La tasa de interés pactada fue del 3% mensual. ¿Cuál fue el plazo?

**Identificación de variables.**

***P=*** ₡3.000;
***i=*** 3% mensual;
***R=*** ₡200;
***n=*** ? meses

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.5)

$$n = -\frac{Log\left(1 - \frac{Pi}{R}\right)}{Log\,(1+i)}$$

### Aplicación de fórmulas.

$$n=-\frac{Log(1-\frac{Pi}{R})}{Log\ (1+i)}\ =n=-\frac{Log\left(1-\frac{\text{₡}3.000*0,03}{\text{₡}200}\right)}{log(1+0,03)}\ =20,2\ pagos$$

### Respuesta.

R/. Se requieren 20,2 pagos mensuales de ₡200 para acumular ₡3.000 con una tasa de interés de 3 % mensual. En efecto, se requieren 20 pagos completos más uno de menor valor.

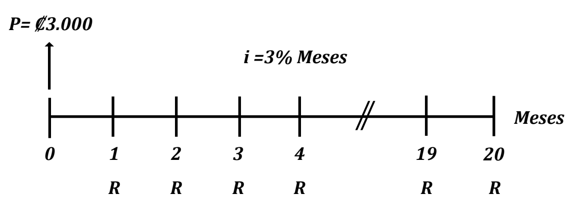
Nuevamente, dado que en la práctica no se suelen utilizar periodos incompletos, en esta situación se pueden utilizar una de las siguientes opciones:

**a.** Redondear el número de pagos a 20 y recalcular la cuota.

### Identificación de variables.

***P=*** ₡3.000;
***i=*** 3% mensual;
***n=*** 20 meses;
***R=*** ?

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

Se utilizará la ecuación (5.4)

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

### Aplicación de fórmulas.

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] = R = ₡3.000\left[\frac{0{,}03(1+0{,}03)^{20}}{(1+0{,}03)^{20}-1}\right] = ₡201{,}65$$

### Respuesta.

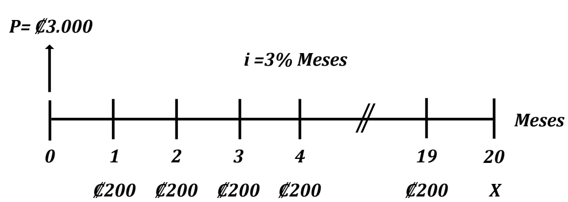
R/. Se requieren 20 pagos mensuales de ₡201,65 para obtener hoy ₡3.000 con una tasa de interés de 3% mensual.

**b.** Hacer 19 pagos iguales de ₡200 y uno de mayor valor en el periodo 20

### Identificación de variables.

***P=*** ₡3.000;
***i=*** 3% mensual;
***R=*** ₡200;
***n=*** 19 meses;
***X=*** ?

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

Se utilizará la ecuación (5.3)

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n-1)}{i(1+i)^n}\right]$$

y (4.5)

$$P=\frac{F}{(1+i)^n}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$3.000=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]+\frac{X}{(1+i)^{n+1}}\rightarrow\frac{X}{(1+0,03)^{20}}=₡3.000-200\left[\frac{(1+0,03)^{19}-1}{0,03(1+0,03)^{19}}\right]$$

por tanto, ***X = 244,26***

**Respuesta.**

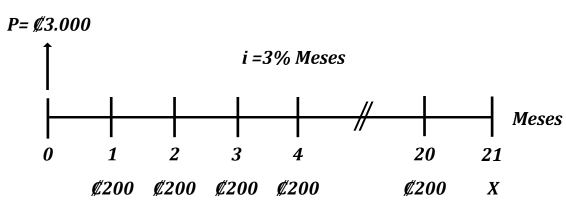
R/. Se requieren 19 pagos mensuales de ₡200 y uno de ₡244,26 en el periodo 20, para obtener hoy ₡3.000 con una tasa de interés de 3% mensual.

**c.** Hacer 20 pagos iguales de ₡200 y uno de menor valor en el periodo 21.

**Identificación de variables.**

***P=*** ₡3.000;
***i=*** 3% mensual;
***R=*** ₡200;
***n=*** 20 meses;
***X=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.3)

$$P= R\left[\frac{(1+i)^{n}-1)}{i(1+i)^{n}}\right]$$

y (4.5)

$$P=\frac{F}{(1+i)^{n}}$$

### Aplicación de fórmulas.

$$3.000= R\left[\frac{(1+i)^{n}-1)}{i(1+i)^{n}}\right]+\frac{X}{(1+i)^{n+1}} \rightarrow \frac{X}{(1+0,03)^{21}} =₡3.000-200\left[\frac{(1+0,03)^{20}-1}{0,03(1+0,03)^{20}}\right]$$

por tanto, X=45,59

### Respuesta.

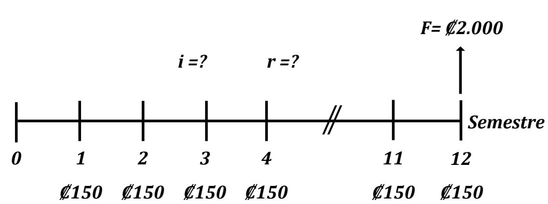
R/. Se requieren 20 pagos mensuales de ₡200 y uno de ₡45,59 en el periodo 21, para obtener hoy ₡3.000 con una tasa de interés de 3% mensual.

*Ejemplo 5.8* Encuentre la tasa de interés por período y la tasa nominal convertible semestralmente, mediante la cual pagos de ₡150 cada 6 meses acumularán un monto de ₡2.000 en 6 años.

### Identificación de variables.

***F=*** ₡2.000;
***R=*** ₡150;
***t=*** 6 año;
***m=*** 2;
***n=*** t*m=12 semestres;
***r=*** ?;
***i=*** ?

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.



**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

Se utilizará la ecuación (5.1)

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n-1)}{i}\right]$$

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

Técnicamente, se requiere despejar la variable i, a partir de la siguiente igualdad:

$F = R\left[\frac{(1+i)^n-1)}{i}\right]$ De aquí obtenemos lo siguiente:

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n-1)}{i}\right] \rightarrow \frac{F}{R} = \left[\frac{(1+i)^n-1}{i}\right] = factor.$$

Por tanto: ₡2.000=

$$₡150\left[\frac{(1+i)^{12}-1)}{i}\right] \rightarrow \frac{₡2.000}{₡150} = \left[\frac{(1+i)^{12}-1}{i}\right] = 13{,}333$$

Se trata de proponer valores para i, que acerquen el lado entre corchetes de la ecuación al factor F/R, tanto por arriba como por abajo. Con los valores aquí obtenidos se plantea la interpolación y se obtiene por aproximación el valor para i, como una simil de la TIR vista en el capítulo anterior.

$$\text{Para } i=5\%, \left[\frac{(1+0{,}05)^{12}-1}{0{,}05}\right] = 15{,}917$$

$$\text{Para } i=3\%, \left[\frac{(1+0{,}03)^{12}-1}{0{,}03}\right] = 14{,}192$$

$$\text{Para } i=1\%, \left[\frac{(1+0{,}01)^{12}-1}{0{,}01}\right] = 12{,}683$$

Con los dos valores más cercanos al factor, interpolamos:

| | | *Tasas* | *FACTOR* | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ***2%*** | ***d*** | *1%* | *12,683* | *0,6508* | *1,509* |
| | | *i* | *13,333* | | |
| | | *3%* | *14,192* | | |

Apelando al concepto de proporciones, se tiene:

$$\frac{d}{2\%} = \frac{0{,}650}{1{,}509} \rightarrow d = 0{,}008615.$$

Se sabe que ***i=1%+d→i=0,01+0,008615***

Por tanto, ***i=1,86%.*** De tal manera que ***r=i*m=3,72%.***

### Respuesta.

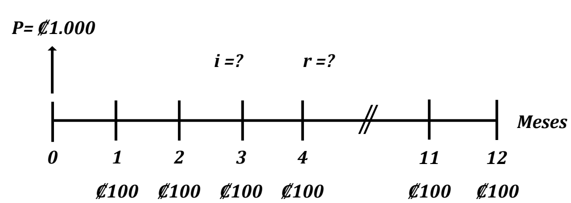
R/. Una tasa de 1,86% semestral, equivalente a una tasa nominal de 3,72% convertible semestralmente, permite que pagos de ₡150 cada 6 meses acumulen ₡2.000 en 6 años.

*Ejemplo 5.9* El ganador de una lotería puede escoger entre tomar ₡1.000 en efectivo o ₡100 cada mes durante 12 meses, con el primer pago a efectuarse dentro de 1 mes. Si se opta por los pagos mensuales, ¿qué tasa de interés por periodo y nominal comprende?

### Identificación de variables.

***P=*** ₡1.000;
***R=*** ₡100;
***m=*** 12;
***n=*** 12 meses;
***i=*** ?;
***r=*** ?

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.



#### Selección de fórmulas.

Se utilizará la ecuación (5.3)

$$P= R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$$

#### Aplicación de fórmulas.

Nuevamente de lo que se trata es de despejar la variable i, a partir de la siguiente igualdad:

$$P= R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$$ De aquí obtenemos lo siguiente:

$$P= R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] \rightarrow \frac{F}{R}=\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] = factor.$$

Por tanto: ₡1.000=

$$₡100\ \frac{[(1+i)^{12}-1)]}{i} \rightarrow \frac{₡1.000}{₡100} = \frac{[(1+i)^{12}-1]}{i} = 10$$

Igual que en el caso anterior, se trata es de proponer valores para i, que acerquen el lado entre corchetes de la ecuación al factor F/R, tanto por arriba como por abajo. Con los valores aquí obtenidos se plantea la interpolación y se obtiene por aproximación el valor para i, como una simil de la TIR vista en el capítulo anterior.

$$\text{Para } i=5\%, \left[\frac{(1+0,05)^{12}-1}{0,05\ (1+0,05)^{12}}\right] = 8,863$$

$$\text{Para } i=3\%, \left[\frac{(1+0,03)^{12}-1}{0,03\ (1+0,03)^{12}}\right] = 9,954$$

$$\text{Para } i=2\%, \left[\frac{(1+0,02)^{12}-1}{0,02\ (1+0,02)^{12}}\right] =10,575$$

Con los dos valores más cercanos al factor, interpolamos:

| ***Tasas*** | ***FACTOR*** |
|---|---|

$$1\%\left[\begin{array}{ll} d\left[\begin{array}{l} 3\% \\ i \end{array}\right. & \left.\begin{array}{r} 9{,}954 \\ 10 \end{array}\right] 0{,}046 \\ 2\% & 10{,}575 \end{array}\right] 0{,}621$$

Apelando al concepto de proporciones, se tiene:

$$\frac{d}{1\%} = \frac{0{,}046}{0{,}0621} \rightarrow d=0{,}0007407$$

Se sabe que $i=3\%-d \rightarrow i=0{,}03-0{,}0007407$

Por tanto, $i=2{,}926\%$. De tal manera que $r=i*m=35{,}11\%$.

**Respuesta.**

R/. Una tasa de 2,93% mensual, equivalente a una tasa nominal de 35,11% convertible mensualmente, permite que pagos de ₡100 cada mes sean equivalentes a ₡1.000 hoy.

## 5.3. Anualidades Indefinidas o Perpetuas

Una serie fija o anualidad que tiene infinito número de pagos, se denomina anualidad indefinida, perpetua o infinita. Aunque en la realidad no existen, se supondrá que una anualidad es infinita cuando el número de pagos es muy grande, o cuando no se sabe cuántos pagos son, pero se sospecha que son muchos. Este tipo de anualidad se presenta cuando se coloca un capital y únicamente se retiran los intereses.

De la ecuación (5.4) se tiene que:

$$R= P\left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

dividiendo numerador y denominador del lado derecho de esta ecuación por $(1+i)^n$ se tiene:

$$R= P\left[\frac{i}{1-(1+i)^{-n}}\right] \rightarrow R= P\left[\frac{i}{1-\frac{1}{(1+i)^n}}\right]$$

pero como $n \to \infty$, entonces tenemos:

$$R = \lim_{n \to \infty} P \left[ \frac{\frac{i}{1}}{1-(1+i)^{n}} \right] = P\left[ \frac{i}{1-0} \right] = Pi$$

por lo tanto:

$$\boxed{R = Pi} \quad (5.7)$$

De aquí se puede despejar el valor presente a partir de una renta perpetua.

$$\boxed{P = \frac{R}{i}} \quad (5.8)$$

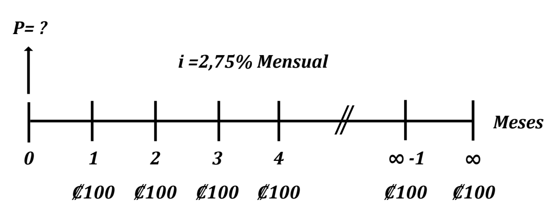
Puede verse entonces que el valor de la cuota es igual a los intereses periódicos.

*Ejemplo 5.10* Hallar el valor presente de una renta perpetua de ₡100 mensuales, suponiendo un interés del 33% capitalizable mensualmente.

**Identificación de variables.**

***R=*** ₡100;
***r=*** 33% MV;
***m=*** 12;
***i=*** 0,33/12=2,75% mensual;
***P=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.8)

$$P = \frac{R}{i}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P = \frac{R}{i} = \frac{₡100}{0{,}0275} = ₡3.636{,}36$$

**Respuesta.**

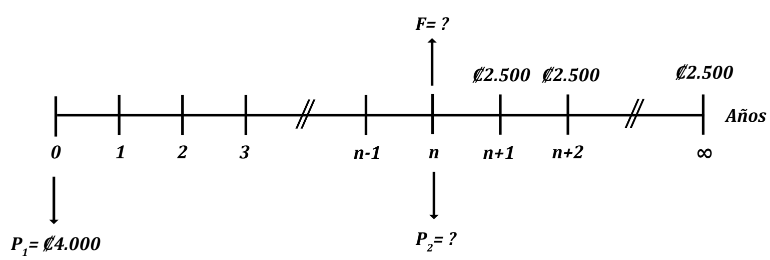
R/. Una renta perpetua de ₡100 mensuales a una tasa de interés de 2,75% mensual, requiere un capital inicial de ₡3.636,36.

*Ejemplo 5.11* Una persona desea constituir un fondo para otorgar un estímulo anual de ₡ 2.500 en forma indefinida. Para ello se deposita hoy la suma de ₡4.000 en una Corporación Financiera que reconoce el 20% EA. Cuánto tiempo debe dejar en depósito el dinero, antes de empezar a retirar la suma de ₡ 2.500 indefinidamente?

**Identificación de variables.**

***R=*** ₡2.500;
***P=*** ₡4.000;
***i=*** 20% anual;
***n=*** ?;
***F=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.8)

$$P = \frac{R}{i}$$

y la ecuación (4.7)

$$n=\frac{Log\ (F/P)}{Log\ (1+i)}$$

**Aplicación de fórmulas.**

Teniendo en cuenta que el valor presente de la renta perpetua se obtendrá en un tiempo futuro no determinado (n), entonces se constituye en un valor futuro (F) al cual deberá llegar los ₡4.000 invertidos hoy. Por tanto:

$$F=\frac{R}{i}=\frac{(₡2.500)}{0,2}=₡12.500$$

$$n=\frac{Log\ (F/P)}{Log\ (1+i)}=\frac{Log\ (₡12.500/₡4.000)}{Log\ (1+0,2)}=6,24\ años$$

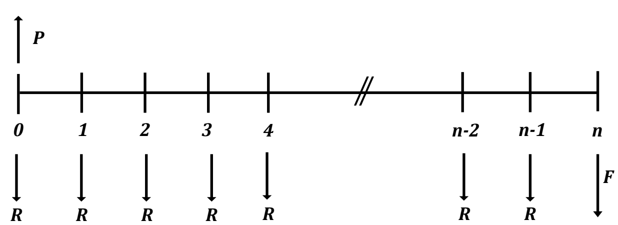
**Respuesta.**

R/. Un depósito de ₡4.000 dejados en una Corporación Financiera durante 6,24 años, permiten retiros anuales de ₡2.500 en forma indefinida, si ésta reconoce un interés del 20% EA sobre saldos.

## 5.4. Anualidades Anticipadas

En este tipo de anualidades, los pagos se efectúan al principio del período, por ejemplo el pago mensual de un canon de arrendamiento. Gráficamente se observa de la siguiente manera:

**Gráfica de anualidad anticipada**



Se hace notar que el número de cuotas en una anualidad anticipada es igual al número de cuotas en una anualidad vencida.  Sin embargo, en la anualidad anticipada las cuotas se desplazan un período hacía la izquierda; esto es, la primera cuota está en el punto cero, pero el valor presente queda ubicado en el periodo ***-1***, por cuanto se hace necesario trasladarlo al momento cero multiplicándolo por ***(1+i)***. De conformidad con la ecuación (5.3) se tiene:

$$P= R\left[\frac{(1+i)^{n}-1)}{i(1+i)^{n}}\right] \rightarrow P=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1)}{i(1+i)^{n}}\right] \quad (1+i)\rightarrow$$

$$\boxed{P=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}-1)}\right]} \quad (5.9)$$

y de aquí:

$$\boxed{R=P\left[\frac{i(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n-1}}\right]} \quad (5.10)$$

Otra manera de ver el valor presente es que al correrse todos los pagos un periodo hacia la izquierda, éste queda igual a P-R, y el número de periodos que restan es n-1. Con esto en mente se tiene:

$$P\text{-}R=R\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1)}{i(1+i)^{n-1}}\right] \rightarrow$$

$$\boxed{P=R+R\left[\frac{(1+i)^{n-1}-1)}{i(1+i)^{n-1}}\right]} \qquad (5.11)$$

Para calcular el valor futuro de la obligación en términos de la cuota uniforme, se debe observar que cada cuota se desplaza a la izquierda en un período con respecto a las cuotas vencidas, y por lo tanto, hay que desplazarlas a la derecha un período. Entonces, de conformidad con la ecuación (5.1) se tiene:

$$F=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right] \rightarrow \quad F=R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i}\right]\ (1+i)\rightarrow$$

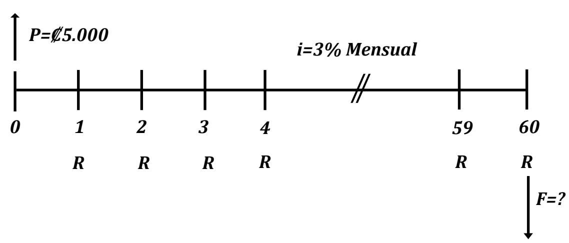
$$\boxed{F=R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)}{i}\right]} \quad (5.12)$$

*Ejemplo 5.12* Una Corporación de Ahorro y Vivienda le presta a una persona la suma de ₡5.000 a 5 años y a una tasa del 36% anual con capitalización mensual. ¿Cuál será el valor de la cuota si esta debe entregarse en forma anticipada?. ¿Cuál es su valor futuro?

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES.**

***P=*** ₡5.000;
***r=*** 36% MV;
***m=*** 12;
***i=*** 0,36/12=3% mensual;
***n=*** 60;
***R=*** ?;
***F=*** ?

**ELABORACIÓN DIAGRAMA DE LÍNEAS DE TIEMPO.**




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

Se utilizará la ecuación (5.10):

$$R=P\left[\frac{i(1+i)^{n-1})}{(1+i)^{n-}1}\right]$$

y (5.12)

$$F=R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)}{i}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$R=P\left[\frac{i(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n}-1}\right]=₡5.000\left[\frac{0,03\ (1+0,03)^{59}}{(1+0,03)^{60}-1}\right]=₡175,403$$

$$P=R\left[\frac{(1+i)^{n+1}-(1+i)}{i}\right]=₡175,403\left[\frac{(1+0,03)^{61}-(1+0,03)}{0,03}\right]$$

$$=₡29.458,015$$

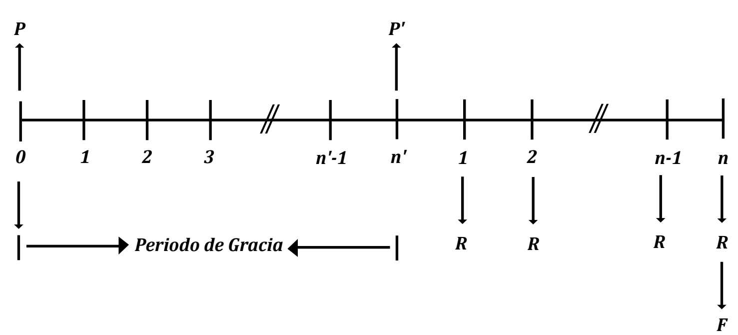
**Respuesta.**

R/. Una persona que recibe en préstamo la suma de ₡5.000 a 5 años y a una tasa del 36% anual con capitalización mensual, deberá cancelar una cuota mensual de ₡175,403 y habrá acumulado ₡29.458,015 al final del periodo.

## 5.5. Anualidades Diferidas

Son anualidades diferidas aquellas donde el primer pago se realiza unos periodos después de realizada la operación financiera. Estos períodos donde no hay amortización de capital se conocen con el nombre de período de gracia o también llamado tiempo muerto ***(n')***. Se debe aclarar que si bien durante el período de gracia no se entrega ni reciben anualidades si se generan unos intereses que finalmente se suman al capital inicial ***(P')***. En el caso de periodos de gracia donde los intereses se causan y se van cancelando, el capital inicial ***(P)*** sigue igual y tiene el mismo tratamiento de una anualidad vencida o anticipada.

Gráficamente es como sigue:



La ecuación aplicada en casos de anualidades diferidas es la siguiente:

$$P' = P(1+i)^{n'} = R\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right] \quad (5.13)$$

y de aquí:

$$R = P(1+i)^{n'}\left[\frac{i(1+i)^{n}}{(1+i)^{n}-1}\right] \quad (5.14)$$

$$P = \frac{R}{(1+i)^{n'}}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right] \quad (5.15)$$

$F=P'(1+i)^{n}$ entonces $F=P(1+i)^{n'}(1+i)^{n}$ por tanto

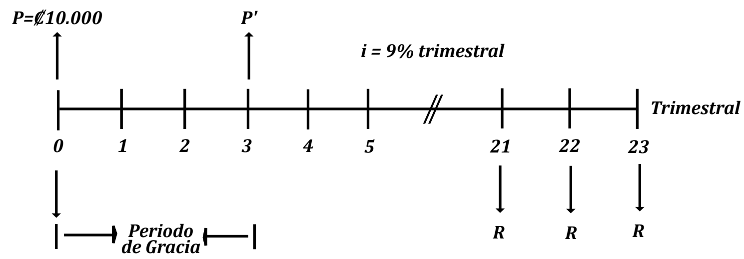
$$P= \quad F = P\,(1+i)^{n+n'} \quad (5.16)$$

*Ejemplo 5.13* Un comerciante ha solicitado a un banco que le preste ₡10.000 para ser cancelado en 20 pagos trimestrales iguales, de manera que le permitan efectuar el primer pago un año después de la concesión del crédito. Calcular el valor del pago trimestral si el banco maneja una tasa del 36% anual capitalizable trimestralmente.

**Identificación de variables.**

***P=*** ₡10.000;
***r=*** 36% TV;
***m=*** 4;
***i=*** 0,36/4=9% trimestral;
***n=*** 20;
***n'=*** 3;
***R=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (5.13)

$$R=P(1+i)^{n'}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$R=P(1+i)^{n'}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]=₡10.000\ \ (1+0,09)^3\left[\frac{0,09(1+0,09)^{20}}{(1+0,09)^{20}-1}\right]$$

$$=₡1.418,66$$

**Respuesta.**

R/. Un comerciante que recibe en préstamo la suma de ₡10.000 a pagar mediante 20 pagos trimestrales un año de haber transcurrido la recepción del crédito y a una tasa del 36% anual con capitalización trimestral, deberá cancelar una cuota trimestral de ₡1.418,66.

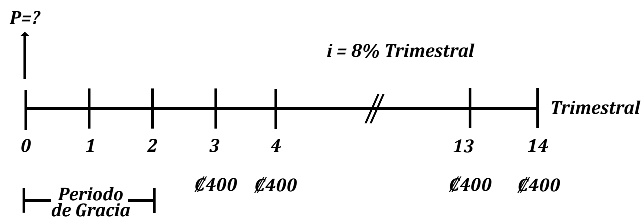
*Ejemplo 5.14* Una Corporación ofrece a una persona un crédito para pagarlo en 3 años con cuotas trimestrales de ₡400. Si cobra el 32% anual capitalizable trimestralmente y otorga un semestre de período de gracia. ¿Cuál es el valor del crédito?.

**Identificación de variables.**

***R=*** ₡400;
***r=*** 32% TV;
***m=*** 4;
***i=*** 0,32/4=8% trimestral;

***t=*** 3;
***n=*** t*m=3*4=12;
***n'=*** 2;
***P=*** ?

**ELABORACIÓN DIAGRAMA DE LÍNEAS DE TIEMPO.**




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

Se utilizará la ecuación (5.14)

$$P=\frac{R}{(1+i)^{n'}}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right]$$

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

$$P=\frac{R}{(1+i)^{n'}}\left[\frac{(1+i)^{n}-1}{i(1+i)^{n}}\right]=\frac{₡400}{(1+0,08)^{2}}\left[\frac{(1+0,08i)^{12}-1}{0,08(1+0,08)^{12}}\right]=₡2.584,39$$

**RESPUESTA.**

R/. Una persona que debe cancelar 12 cuotas trimestrales de ₡400, es porque recibió en préstamo la suma de ₡2.584,39 a una tasa del 36% anual con capitalización trimestral y dos periodos de gracia.

## RESUMEN CAPÍTULO 5: Series Financieras Fijas: Anualidades

Este capítulo estudia las series financieras fijas, que corresponden a una sucesión de pagos o capitales fijos a intervalos iguales de tiempo. La cuantía de los capitales y las características de los intervalos determina el tipo de serie a que refiere la operación financiera. Este texto se introduce en el estudio de las anualidades vencidas, perpetuas, anticipadas y diferidas, con la correspondiente derivación y explicación de fórmulas.

Las series financieras fijas o anualidades, se encuentran a diario en las transacciones de las personas, hogares y empresas, en los pagos de cuotas de créditos, seguros, mantenimientos, salarios, arrendamientos, etc.

En este capítulo se han utilizado las siguientes ecuaciones:

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right] \quad (5.1)$$

$$R = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \quad (5.2)$$

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n}\right] \quad (5.3)$$

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right] \quad (5.4)$$

$$n = \frac{Log\left(\frac{Fi}{R} + 1\right)}{Log\,(1+i)} \quad (5.5)$$

$$n = -\frac{Log\left(1 - \frac{Pi}{R}\right)}{Log\,(1+i)} \quad (5.6)$$

$$R = Pi \quad (5.7)$$

$$P = \frac{R}{i} \quad (5.8)$$

$$P = R\left[\frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^{n-1}}\right] \quad (5.9)$$

$$R = P\left[\frac{(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}\right] \quad (5.10)$$

$$P = R + R\left[\frac{(1+i)^{n-1} - 1}{i(1+i)^{n-1}}\right] \quad (5.11)$$

$$F = R\left[\frac{(1+i)^{n+1} - (1+i)}{i}\right] \quad (5.12)$$

$$P' = P(1+i)^{n'} = R\,\frac{[(1+i)^n-1]}{i(1+i)^n} \quad (5.13)$$

$$P = \frac{R}{(1+i)^{n'}}\,\frac{[(1+i)^n-1]}{i(1+i)^n} \quad (5.15)$$

$$R = P(1+i)^{n'}\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] \quad (5.14)$$

$$P = \quad F = P\,(1+i)^{n+n'} \quad (5.16)$$

Dónde: P= Valor Presente; F= Valor Futuro; R=Renta Fija; i= Tasa de interés por periodo; n=número total de periodos; P'=Capital más intereses del periodo de gracia; n'=número de periodos de gracia. Las ecuaciones 5.1 a 5.6 corresponden a anualidades vencidas, las ecuaciones 5.7 a 5.8 corresponden a anualidades perpetuas, las ecuaciones 5.9 a 5.12 corresponden a anualidades anticipadas, y las ecuaciones 5.13 a 5.15 corresponden a anualidades diferidas.

## EJERCICIOS CAPÍTULO 5: Series Financieras Fijas: Anualidades

1. ¿Cuánto debe depositarse anualmente durante 10 años para poder retirar ₡1.500 al final de los años 11,12,13 y 14? Considere una tasa de interés del 26,5%.

2. ¿A cuánto equivalen hoy los siguientes depósitos: ₡50 al cabo de cuatro meses, ₡80 un mes después, ₡120 tres meses más adelante y ₡200 mensuales durante cinco meses a partir del décimo mes?. Considere una tasa del 3% mensual.

3. Una deuda de ₡80.000 va a ser cancelada en pagos trimestrales de ₡780 durante tanto tiempo como sea necesario. Suponiendo una tasa de 30% convertible tri mestralmente. ¿Cuántos pagos deben hacerse?

4. Un grupo de estudiantes desea reunir ₡60.000 mediante depósitos mensuales de ₡1.000 a un fondo que paga 36% convertible mensualmente.

**a.** Cuántos depósitos de ₡1.000 deben hacerse?
**b.** Qué depósito adicional hecho conjuntamente con el último depósito de ₡1.000 completará los ₡60.000?
**c.** Qué depósito adicional efectuado un mes después del último depósito de ₡1.000 completará los ₡60.000?

5. Un electrodoméstico puede ser comprado por ₡449,5 al contado o ₡49,5 de cuota inicial y ₡27,5 mensuales durante 18 meses.

   **a.** Qué tasa nominal de interés se está cargando.
   **b.** Qué tasa de interés efectiva anual se está cargando.

6. Un fondo para empleados presta a un socio la suma de ₡2.000 para ser pagado en 3 años, mediante cuotas iguales mensuales vencidas, con intereses sobre saldos al 2% mensual. Si en el momento de pagar la sexta cuota, decide pagar en forma anticipada las cuotas 7, 8 y 9, ¿cuál debe ser el valor a cancelar en ese momento?

7. Usted asume un préstamo para vivienda a 15 años por valor de ₡70.000 a una tasa de interés del 3% mensual pagando cuotas fijas. Piensa ser propietario de la casa durante cinco años y luego venderla, liquidando el préstamo con un pago final. ¿Cuál será el monto de este pago final?

8. Está construyéndose un restaurante que entrará en servicio dentro de un año. Su pongamos que las utilidades sean de ₡6.500 mensuales durante cuatro años de servicio. Si usted desea comprar este restaurante, ¿cuál será el valor en unidades monetarias de hoy, que debe ofrecer para que al cabo de los cinco años usted tenga una ganancia neta de ₡30.000, si la tasa de interés es del 32% EA?.

9. Las directivas de un colegio estiman que se requerirán ₡800 de mantenimiento al final de cada año, por la ampliación del edificio por los próximos 10 años y posteriormente ₡1.500 al final de cada año indefinidamente. ¿Qué donativo se hace necesario para asegurar el mantenimiento del nuevo edificio suponiendo un interés del 7%?

10. Un puente de una ciudad tiene unos costos de mantenimiento cada tres años por valor de ₡1.250. ¿Cuál será el aporte en cuotas uniformes que el gobierno de la ciudad deberá depositar anualmente en una Corporación que pagará un interés del 28% EA durante los diez primeros años y del 32% EA de ahí en adelante, de tal manera que este fondo sea suficiente para sufragar los gastos de mantenimiento del puente, suponiendo que éste tendrá vida útil perpetua?

11. Una corporación reserva ₡1.000 al principio de cada año para crear un fondo de futura expansión. Si el fondo gana el 15% anual ¿cuál será el monto al término del décimo año?

12. Dentro de 10 años una compañía necesitará ₡12.000 para reemplazar equipo desgastado. Cuál es el depósito semestral que tendrá que hacer desde ahora en un fondo que paga el 18% convertible semestralmente, durante 10 años, para acumular dicha suma.

13. Un terreno avaluado en ₡15.000 es vendido con ₡5.000 de cuota inicial. El comprador acuerda pagar el saldo con intereses del 20% convertible semestralmente, mediante 10 pagos semestrales iguales, el primero a efectuarse dentro de 4 años. Hallar el valor del pago semestral.

14. Con el objeto de poder hacer 20 retiros trimestrales de ₡34,105, se deposita hoy un capital en una cuenta de ahorros que paga el 5,25% trimestral. ¿Si el primer retiro lo hace al cabo de un año, cuál es el valor del depósito?

15. Un artículo tiene un valor de contado de ₡585 y puede adquirirse financiado con el siguiente plan: cuota inicial del 30% del valor de contado y el resto a 18 cuotas mensuales iguales; la primera cuota debe pagarse dentro de 8 meses y un último pago por ₡80 tres meses más tarde de la última cuota mensual. Si la tasa de interés es del 2,58% mensual durante los siete primeros meses y del 2,91% mensual de allí en adelante, hallar el valor de las cuotas uniformes mensuales.

# 6. SERIES FINANCIERAS VARIABLES: GRADIENTES

## PREÁMBULO

A diferencia del capítulo anterior, este capítulo ofrece las herramientas técnicas para el tratamiento de operaciones financieras que vinculan series crecientes o decrecientes en cada periodo, de conformidad con alguna regla de formación. Estas series también denominadas Gradientes, hacen parte de la realidad económica de los países y constituyen un elemento importante en las operaciones financieras de las personas, las empresas y el Estado, que periodo a periodo ven cambios en sus capitales (ingresos o egresos) siguiendo reglas aritméticas o geométricas.

## 6.1. Definiciones

Una serie variable o Gradiente corresponde a una sucesión de pagos que varían conforme una regla de formación, bien sea siguiendo los principios de las progresiones aritméticas o geométricas. Esto es, que los pagos pueden aumentar o disminuir, con relación al pago anterior, en una cantidad constante en unidades monetarias o en un porcentaje. Los Gradientes pueden ser Aritméticos si su regla de formación sigue los lineamientos de las progresiones aritméticas, y pueden ser geométricos si su regla de formación sigue los lineamientos de las progresiones geométricas.

Para que una serie de pagos periódicos se considere un sistema de gradientes, debe cumplir con las siguientes condiciones:

- Los pagos deben tener una regla de formación
- Los pagos deben ser periódicos
- La serie de pagos debe tener un valor presente (P) equivalente y un valor futuro (F) equivalente
- El número de periodos debe ser igual al número de pagos

Estas condiciones son las mismas que deben cumplir las anualidades, salvo la primera condición. Mientras que en las anualidades los pagos son iguales, en los gradientes los pagos tienen una regla de formación. Una anualidad entonces, es un caso especial de gradientes en el cual la variación de una cuota respecto a la otra es cero. Por esta razón el tratamiento que se le da a los gradientes es prácticamente igual al de las anualidades.

Los elementos que intervienen en una serie variable o Gradiente son los siguientes:

#### BASE DE LA SERIE (K):

Corresponde al valor o cuantía inicial de la serie financiera.

#### GRADIENTE (G):

Corresponde al valor en que aumenta o disminuye la serie a partir del valor inicial. Si la serie aumenta entonces G toma un valor positivo, y si la serie disminuye, G toma un valor negativo.

#### TÉRMINO (N):

Es el tiempo transcurrido entre el comienzo del primer período y el final del último. El término vincula la sumatoria del número de pagos o capitales vinculados en la operación financiera.

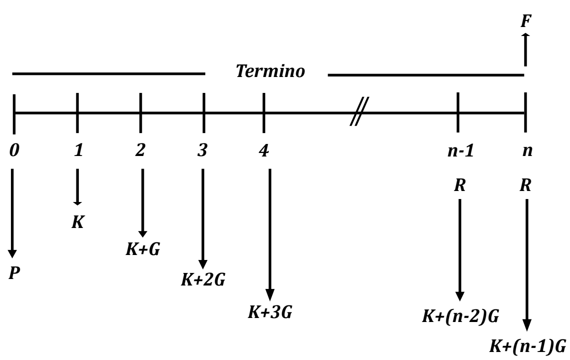
**VALOR PRESENTE (P):**

Corresponde al valor en tiempo actual o momento cero (0) de todos los capitales vinculados en la operación financiera.

**MONTO (F):**

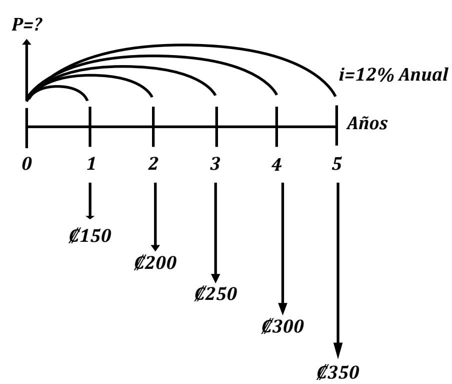
Es el valor final o monto de una serie variable o gradiente. Corresponde a la suma de todos los pagos periódicos y su correspondiente interés compuesto, acumulados al final del término (n) de la operación.

Los element os aquí descrit os se pueden obser var en el siguiente dia grama:




*Ejemplo 6.1* Una persona adquirió un auto y espera que el costo de mantenimiento del mismo sea de ₡150 al finalizar el primer año y que en los subsecuentes aumenta a razón de ₡50 por año. Si la tasa de intereses es 12% capitalizada cada año, ¿cuál es el valor actual de esta serie de pagos durante un periodo de 5 años?

**DESCRIPCIÓN GRÁFICA:**



**Solución Numérica:**

| | |
|---|---|
| Primer Pago: | ₡133,93 |
| Segundo pago: | ₡159,44 |
| Tercer pago: | ₡177,94 |
| Cuarto pago: | ₡190,66 |
| Quinto pago: | ₡198,60 |
| **Valor Actual del Gradiente** | **₡860,57** |

**Respuesta.**

R/. El valor presente de una serie de pagos que inicia con ₡150 y cada año aumenta en ₡50 durante cinco años, es de ₡860,57 si se reconocen intereses del 12% capitalizable anualmente.

## 6.2. Gradiente Aritmético Vencido

El gradiente aritmético vencido es una sucesión de valores que aumenta o disminuye de manera uniforme al final de cada periodo. Estos valores que pueden ser egresos o ingresos constituyen el flujo de caja. Cuando la cantidad constante es positiva, se genera el gradiente aritmético creciente, pero cuando la cantidad constante es negativa, se genera el gradiente aritmético decreciente.

Estos gradientes son de mucha utilidad para:

- Elaborar presupuestos
- Analizar costos y evaluar proyectos.

Para derivar la fórmula de valor presente, valor uniforme y valor futuro de un gradiente aritmético observemos el desglose del ejemplo anterior en términos generales. El valor presente se puede obtener de la siguiente manera:

A parir de la ecuación (4.5)

$$P=\frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P=\frac{K}{(1+i)^1}+\frac{K+G}{(1+i)^2}+\frac{K+2G}{(1+i)^3}+\frac{K+3G}{(1+i)^4}+\frac{K+4G}{(1+i)^5}+\ldots+\frac{K+(n-1)G}{(1+i)^n}$$

De aquí se puede desagregar P de conformidad con los numeradores en

$$P=P_1+P_2$$

donde:

$$P_1=\frac{K}{(1+i)^1}+\frac{K}{(1+i)^2}+\frac{K}{(1+i)^3}+\frac{K}{(1+i)^4}+\frac{K}{(1+i)^5}+\cdots+\frac{K}{(1+i)^n}\ \text{y}$$

$$P_2=\frac{G}{(1+i)^2}+\frac{2G}{(1+i)^3}+\frac{3G}{(1+i)^4}+\frac{4G}{(1+i)^5}+\ldots+\frac{(n-1)G}{(1+i)^n}$$ De aquí:

$$P_1=K\left[\frac{1}{(1+i)^1}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\frac{1}{(1+i)^4}+\frac{1}{(1+i)^5}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

$$P_1=\frac{K}{(1+i)}\left[1+\frac{1}{(1+i)^1}+\frac{1}{(1+i)^2}+\frac{1}{(1+i)^3}+\frac{1}{(1+i)^4}+\ldots+\frac{1}{(1+i)^{n-1}}\right]$$

Lo que se tiene al interior de corchetes es la suma ***(Sn)*** de una progresión geométrica donde el primer término

$a_1=1$, la razón $r=\frac{1}{(1+i)}$

y el número de pagos sigue siendo ***n.***

Al reemplazar la ecuación (2.11)

$$Sn=\frac{a_1(1-r^n)}{(1-r)}$$

en la anterior expresión se tiene:

$$P_1 = \frac{K}{(1+i)}\left[\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{1-\frac{1}{(1+i)}}\right] = \frac{K}{(1+i)}\left[\frac{\frac{(1+i)^n-1}{(1+i)^n}}{\frac{1+i-1}{(1+i)}}\right] = \frac{K}{(1+i)}\left[\frac{(1+i)[(1+i)^n-1]}{i(1+i)^n}\right] \rightarrow P_1 = K\left[\frac{[(1+i)^n-1]}{i(1+i)^n}\right]$$

Como se observa corresponde al valor presente de una anualidad de Renta K.

$$P_2 = \frac{G}{(1+i)}\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{2}{(1+i)^2} + \frac{3}{(1+i)^3} + \frac{4}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^{n-1}}\right] \boxed{1}$$

Al multiplicar ambos lados de la expresión anterior por ***(1+i)*** se tiene:

$$P_2(1+i) = G\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{2}{(1+i)^2} + \frac{3}{(1+i)^3} + \frac{4}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{(n-1)}{(1+i)^{n-1}}\right] \boxed{2}$$

Ahora restamos $\boxed{2}$-$\boxed{1}$:

$$P_2 + P_2 i - P_2 = G\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{2-1}{(1+i)^2} + \frac{3-2}{(1+i)^3} + \frac{4-3}{(1+i)^4} + \ldots - \frac{(n-1)}{(1+i)^n}\right]$$

$$P_2 i) = G\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \cdots + \frac{1}{(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$P_2 = \frac{G}{i}\left[\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \ldots + \frac{1}{(1+i)^n} - \frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$P_2 = \frac{G}{i}\left[\frac{(1+i^n-1]}{i(1+i)}\right] \frac{-G}{i}\left[\frac{n}{(1+i)}\right]$$

ahora retomamos ***P***

$$P = P_1 + P_2 = K\left[\frac{[(1+i)^n-1]}{i(1+i)^n}\right] + \frac{G}{i}\left[\frac{[(1+i)^n-1]}{i(1+i)^n}\right] - \frac{G}{i}\left[\frac{n}{(1+i)^n}\right]$$

$$P=\frac{K[(1+i)^n-1]+(G/i)[(1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n}\rightarrow$$

$$P=\frac{[[K+G/i]\,(1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n} \quad (6.1)$$

Para obtener la Renta o pago uniforme equivalente a la serie gradiente nos remitimos a la ecuación (5.4)

$$R=P\left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

de tal manera que:

$$R=\left[\frac{K+G/i][(1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n}\right]\left[\frac{[i(1+i)^n]}{(1+i)^n-1}\right]=\left[\frac{[K+G/i][(1+i)^n-1]-Gn)}{(1+i)^n-1}\right]=$$

$$[K+G/i]-\frac{Gn}{(1+i)^n-1}\rightarrow$$

$$R=K+G\,[\,1/i-n\,/[(1+i)^n-1]] \quad (6.2)$$

Ahora para hallar el valor futuro y de conformidad con la ecuación (4.4)

$$F=P\,(1+i)^n$$

se tiene:

$$F=\left[\frac{[K+G/i][(1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n}\right](1+i)^n\rightarrow$$

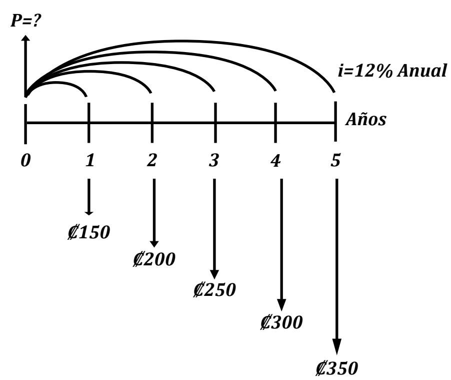
$$F=\left[\frac{[K+G/i][(1+i)^n-1]-Gn}{i}\right] \quad (6.3)$$

*Ejemplo 6.2* Resuelva el ejemplo 6.1 utilizando las fórmulas de gradientes, y adicionalmente encuentre el valor de la renta fija equivalente y el valor futuro.

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES.**

***K=*** ₡150;
***G=*** ₡50;
***i=*** 12% anual;
***n=*** 5;
***P=*** ?;
***R=*** ?;
***F=*** ?

**ELABORACIÓN DIAGRAMA DE LÍNEAS DE TIEMPO.**




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

Se utilizarán las ecuaciones (6.1)

$$P = \frac{[K + G/i]\,[(1+i)^n - 1] - Gn}{i(1+i)^n}$$

(6.2)

$$R = K + G\left[\,1/i - n/[(1+i)^n - 1]\right]$$

y (6.3)

$$F = \left[\frac{[K+G/i][(1+i)^n - 1] - Gn}{i}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P= \frac{[K + G/i]\,[(1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n} =$$

$$\frac{[₡150+₡50/0{,}12][(1+0{,}12)^5-1]-₡150*5}{0{,}12(1+0{,}12)^5} =₡860{,}57$$

$$R= K + G\,[\,1/i - n\,/[(1+i)^n-1]] =$$

$$₡150+₡50[1/0{,}12-5/[(1+0{,}12)^5-1]]=₡238{,}73$$

$$F= \left[\frac{[K+G/i][(1+i)^n-1]-Gn}{i}\right] =$$

$$\left[\frac{[₡150+₡50/0{,}12][(1+0{,}12)^5-1]-₡50*5}{0{,}12}\right]=₡1.516{,}61$$

**Respuesta.**

R/. Una serie de pagos que inicia con ₡150 y cada año aumenta en ₡50 durante cinco años y si se reconocen intereses de 12% capitalizable anualmente, es equivalente a ₡860,57 de valor presente, ₡238,73 de valor uniforme y ₡1.516,61 de valor futuro.

## 6.3. Gradiente Aritmético Infinito

Un gradiente aritmético infinito es aquel cuya sucesión de pagos crecientes o decrecientes siguiendo una regla de formación, se hace de forma indefinida o perpetua, al menos teóricamente. De la misma manera que en las anualidades indefinidas, solo tiene sentido el cálculo del valor presente.

De la ecuación (6.1) se tiene que:

$$P=\frac{[[K+G/i]\,(1+i)^{n}-1]-Gn}{i(1+i)^{n}}$$

desagregándola queda en:

$$P=\frac{[K+G/i]}{i}\,\frac{[(1+i)^{n}-1]}{(1+i)^{n}}-\frac{G}{i}\,\frac{n}{(1+i)^{n}}=\frac{[K+G/i]}{i}\,\frac{\left[1-\frac{1}{(1+i)^{n}}\right]}{1}-\frac{G}{i}\,\frac{1}{n^{-1}(1+i)^{n\,\prime}}$$

pero como n→∞, entonces tenemos:

$$P=\frac{[K+G/i]}{i}\,\lim_{(n\to\infty)}\frac{\left[1-\frac{1}{(1+i)^{n}}\right]}{1}-\frac{G}{i}\,\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{-1}(1+i)^{n}}=\left[\frac{K}{i}+\frac{G}{i^{2}}\right]\left[\frac{1-0}{1}\right]-\frac{G}{1}\,0$$

por lo tanto:

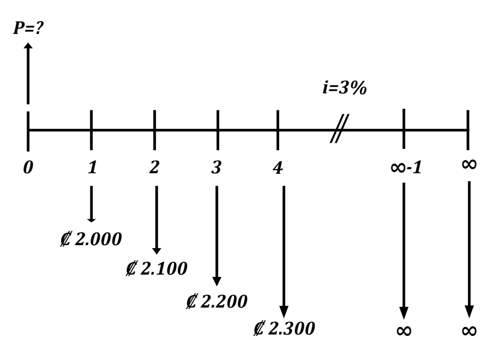
$$\boxed{P=\left[\frac{K}{i}+\frac{G}{i^{2}}\right]}\quad (6.4)$$

*Ejemplo 6.3* Calcular el valor presente de una serie de pagos perpetuos que crecen ₡100 cada periodo, si el primer pago vale ₡2.000 y la tasa es del 3% por periodo.

**Identificación de variables.**

***K=*** ₡2.000;
***G=*** ₡100;
***i=*** 3% por periodo;
***P=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**



**Selección de fórmulas.**

Se utilizarán las ecuaciones (6.4)

$$P=\left[\frac{K}{i}+\frac{G}{i^2}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P=\left[\frac{K}{i}+\frac{G}{i^2}\right]=P=\left[\frac{₡2.000}{0,03}+\frac{₡100}{0,03^2}\right]=₡177,78$$

**Respuesta.**

R/. El valor presente de una serie de pagos que inicia con ₡2.000 y cada año aumenta en ₡100 de manera perpetua y si se reconocen intereses de 3% por periodo, es ₡177,78.

## 6.4. Gradiente Aritmético Anticipado

En los gradientes aritméticos anticipados los pagos crecen o decrecen en una cantidad constante con respecto al pago anterior, pero el primer pago o base (K) se realiza en el mismo momento en que se lleva a cabo la negociación.

Este tipo de gradientes reciben el mismo tratamiento que una anualidad anticipada. Debido a que en un gradiente anticipado todos los pagos se desplazan un periodo hacia la izquierda, el valor presente queda en el periodo -1 haciéndose necesario retornarlo al periodo cero multiplicándolo por (1+i). Así mismo, el valor futuro debe trasladarse un periodo posterior. Como regla general, el valor presente y futuro anticipado de cualquier sistema de pagos, es igual al valor presente o futuro vencido multiplicado por (1+i). Así las cosas:

$$P=\frac{[K+G/i][(1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n}(1+i)\rightarrow$$

$$P=\frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i(1+i)^{n-1}} \quad (6.5)$$

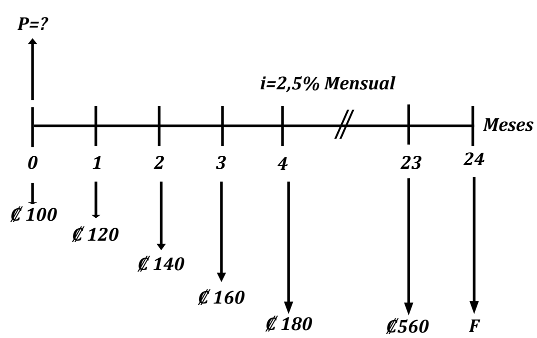
$$F=\left[\frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i}\right](1+i) \quad (6.6)$$

*Ejemplo 6.4* ¿Cuál será el valor presente de un artefacto que se está financiado con 24 cuotas mensuales anticipadas, que crecen cada mes en ₡20, si la primera cuota tiene un valor de ₡100 y se paga el mismo día de la negociación? Asuma una tasa de interés del 2,5% mensual. ¿Cuál es el valor futuro?

**Identificación de variables.**

***K=*** ₡100;
***G=*** ₡20;
***i=*** 2,5% mensual;
***n=*** 24;
***P=*** ?;
***F=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizarán las ecuaciones (6.5)

$$P=\frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i(1+i)^{n-1}}$$

y (6.6)

$$F=\left[\frac{K+G/i][(1+i)^{n}-1]-G}{i}\right](1+i)$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P=\frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i(1+i)^{n-1}}=$$

$$\frac{[₡100+₡20/0,025][(1+0,025)24-1]-₡20*24}{0,025(1+0,025)^{23}}=₡5.618,312$$

$$F=\left[\frac{K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i}\right](1+i)$$

$$=\left[\frac{₡100+₡20/0,025][(1+0,025)^{24}-1]-₡20*24}{0,025}\right](1+0,025)$$

$$=₡10.161,99$$

**Respuesta.**

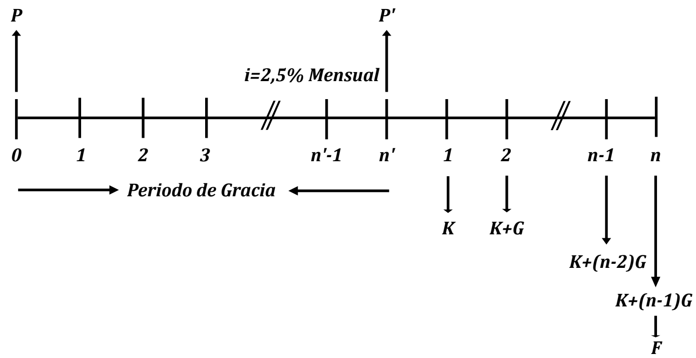
R/. El valor presente de un artefacto que se está financiado con 24 cuotas mensuales anticipadas, que crecen cada mes en ₡20, si la primera cuota tiene un valor de ₡100 y se paga el mismo día de la negociación es ₡5.618,312 y su valor futuro es ₡10.161,99.

## 6.5. Gradiente Aritmético Diferido

En los gradientes aritméticos diferidos los pagos crecen o decrecen en una cantidad constante con respecto al pago anterior, pero el primer pago o base (K) se realiza algunos periodos después de llevada a cabo la negociación.

Igual que en anualidades diferidas, los períodos donde no hay amortización de capital se conocen con el nombre de período de gracia o también llamado tiempo muerto (n’). En el caso de periodos de gracia donde los intereses se causan y se van cancelando, el capital inicial (P) sigue igual y tiene el mismo tratamiento de un gradiente aritmético vencido o anticipado. Pero si éstos no se pagan, se capitalizan formando un capital mayor sobre el cual se realizan los cálculos (P’).

Gráficamente es como sigue:




La ecuación aplicada en casos de gradientes aritméticos diferidos es la siguiente:

$$P'=P(1+i)^{n'} = \frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i\,(1+i)^{n}} \quad (6.7)$$

De aquí:

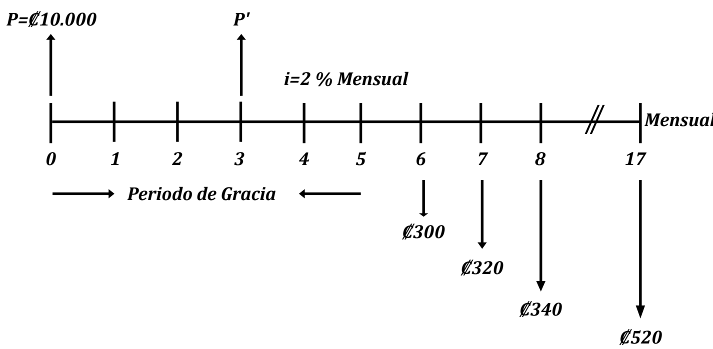
$$P = \frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i\,(1+i)^{n+n'}} \quad (6.8)$$

*Ejemplo 6.5* Calcular el valor de un préstamo que se está cancelando con 12 pagos mensuales que aumentan cada mes en ₡20, pero el primer pago por valor de ₡300 se realizó en 6 meses después de la fecha de la negociación y la tasa de interés es del 2% mensual.

**Identificación de variables.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***K=*** | ₡300; | ***n=*** | 12; |
| ***G=*** | ₡20; | ***n´=*** | 5; |
| ***i=*** | 2% mensual; | ***P=*** | ? |

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

Se utilizará la ecuación (6.8)

$$P = \frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i\,(1/i)^{n+n'}}$$

### Aplicación de fórmulas.

$$P = \frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i\,(1/i)^{n+n'}}$$

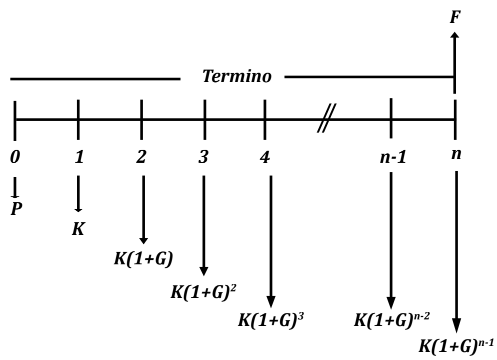
$$= \frac{[\text{₡}300+\text{₡}20/0{,}02][(1+0{,}02)^{12}-1]-\text{₡}20*12}{0{,}02(1+0{,}02)^{17}} = \text{₡}3.881{,}99$$

### Respuesta.

R/. El valor presente de un préstamo que se está cancelando con 12 pagos mensuales que aumentan cada mes en ₡20, pero el primer pago por valor de ₡300 se realiza 6 meses después de la fecha de la negociación y la tasa de interés es del 2% mensual, es de ₡3.881,99.

# 6.6. Gradiente Geométrico o Exponencial

El gradiente geométrico es una sucesión de pagos donde cada uno a partir del primero (K) es igual al anterior multiplicado por una constante representada por (1+g). En este tipo de gradientes g representa la tasa de crecimiento o de decrecimiento de la serie donde si g>0 el gradiente será creciente; si g<0 el gradiente será decreciente y si g=0 el gradiente se convierte en una anualidad. Para derivar la fórmula de valor presente, valor futuro y valor uniforme de un gradiente geométrico observemos el siguiente diagrama y desglose de fórmulas:




A parir de la ecuación (4.5)

$$P=\frac{F}{(1+i)^n}$$

$$P=\frac{K}{(1+i)^n}+\frac{K\,(1+g)}{(1+i)^2}+\frac{K\,(1+g)^2}{(1+i)^3}+\frac{K(1+g)^3}{(1+i)^4}+\frac{K(1+g)^4}{(1+i)^5}+\dots+\frac{K(1+g)^{n-1}}{(1+i)^n}\ \boxed{1}$$

Si multiplicamos la anterior expresión por $\frac{(1+g)}{(1+i)}$ tenemos:

$$P\,\frac{(1+g)}{(1+i)}=\frac{K(1+g)}{(1+i)^2}+\frac{K(1+g)^2}{(1+i)^3}+\frac{K(1+g)^3}{(1+i)^4}+\frac{K(1+g)^4}{(1+i)^5}+\frac{K(1+g)^5}{(1+i)^6}+\dots+\frac{K(1+g)^n}{(1+i)^{n+1}}\ \boxed{2}$$

Efectuando la diferencia $\boxed{2}$ - $\boxed{1}$ se tiene

$$P\,\frac{(1+g)}{(1+i)} - P = \frac{K(1+g)^n}{(1+i)^{n+1}} - \frac{K}{(1+i)^1} \rightarrow P\left[\frac{(1+g)}{(1+i)} - 1\right] = \frac{K}{(1+i)}\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n} - 1\right]$$

entonces:

$$P = \frac{\frac{K}{(1+i)}\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}-1\right]}{\left[\frac{(1+g)}{(1+i)}-1\right]} \rightarrow P = \frac{\frac{K}{(1+i)}\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}-1\right]}{\left[\frac{1+g-1-i}{(1+i)}\right]} \rightarrow P = \frac{K\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}-1\right]}{g-i}$$

Por tanto:

$$\boxed{P=K\left[\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{(g-i)(1+i)^n}\right]} \quad (6.9)$$

si g≠i

Cuando g=i, se presenta una indeterminación, la cual puede ser removida utilizando la Regla de L´lopital (derivando con respecto a ***i***)

$$P = \lim_{g\to i}\frac{K\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}-1\right]}{g-i} = K\lim_{g\to i}\frac{\frac{\partial}{\partial i}\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}-1\right]}{\frac{\partial}{\partial i}[g-i]} = K\lim_{g\to i}\frac{\left[\frac{-n(1+g)^n}{(1+i)^{n+1}}\right]}{-1} = \frac{Kn(1+i)^n}{(1+i)^{n+1}} \text{ Por tanto:}$$

$$P = \frac{Kn}{(1+i)} \quad \text{si g=i} \quad (6.10)$$

si g=i

Para hallar el valor futuro y de conformidad con la ecuación (4.4)

$$F= P\,(1+i)^n$$

y los valores obtenidos para el valor presente se tiene:

$$F= K\left[\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{(g-i)\,(1+i)^n}\right](1+i)^n \rightarrow$$

$$\boxed{F = \frac{k[(1+g)^n - (1+i)^n]}{g-i}} \quad (6.11)$$

si g≠i

$$F = \frac{Kn}{(1+i)}(1+i)^n \rightarrow$$

$$\boxed{F = Kn(1+i)^{n-1}} \quad (6.12)$$

si g=i

Para obtener la Renta o pago uniforme equivalente a un gradiente geométrico nos remitimos a la ecuación (5.2)

$$R = F\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1)}\right]$$

de tal manera que:

$$R = \left[\frac{K[(1+g)^n - (1+i)^n}{g-i}\right]\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \rightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{Ki[(1+g)^n - (1+i)^n]}{(g-i)[(1+i)^n - 1]}} \quad (6.13)$$

si g≠i

$$R = Kn(1+i)^{n-1}\left[\frac{i}{(1+i)^n - 1}\right] \rightarrow$$

$$\boxed{R = \frac{Kni(1+i)^{n-1}}{(1+i)^n - 1}} \quad (6.14)$$ si g=i

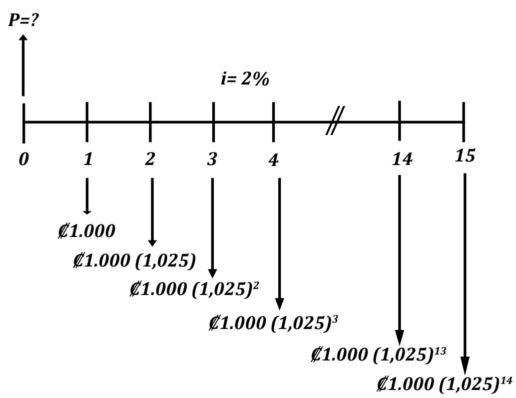
*Ejemplo 6.6* Hallar el valor presente de 15 pagos que crecen un 2,5%, si el primer pago es ₡1.000 y la tasa de interés es 2% por periodo.

**Identificación de variables.**

***K=*** ₡1.000;

***g=*** 2,5%;
***i=*** 2%;
***n=*** 15;
***P=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Debido a que g≠i , se utilizará la ecuación (6.9)

$$P=K\left[\frac{(1+g)^n\ (1+i)^n}{(g-i)(1+i)^n}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P=K\left[\frac{(1+g)^n\ (1+i)^n}{(g-i)(1+i)^n}\right]=₡1.000\left[\frac{(1+0,025)^{15}-(1+0,02)^{15})}{(0,025-0,02)\ (1+0,02)^{15})}\right]$$

***=₡15.221,37***

**Respuesta.**

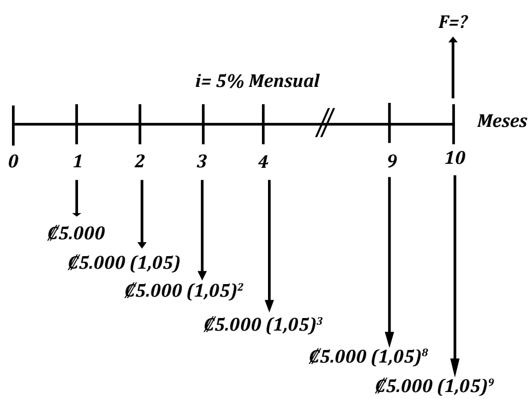
R/. El valor presente de 15 pagos que aumentan 2,5% cada periodo donde el primer pago es de ₡1.000 y la tasa de interés es del 2% por periodo, es de ₡15.221,37.

*Ejemplo 6.7* Hallar el valor futuro de 10 pagos anuales, si el primer pago es ₡5.000 y cada pago subsiguiente crece en un 5%. Suponga una tasa de interés del 5% anual.

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES.**

***K=*** ₡5.000;
***g=*** 5% anual;
***i=*** 5% anual;
***n=*** 10;
***F=*** ?

**ELABORACIÓN DIAGRAMA DE LÍNEAS DE TIEMPO.**




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS.**

Debido a que g=i , se utilizará la ecuación (6.12)

$$F=Kn(1+i)^{n-1}$$

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

$$F=Kn(1+i)^{n-1}= ₡5.000*10(1+0,05)^{9} =₡77.566,41$$

**RESPUESTA.**

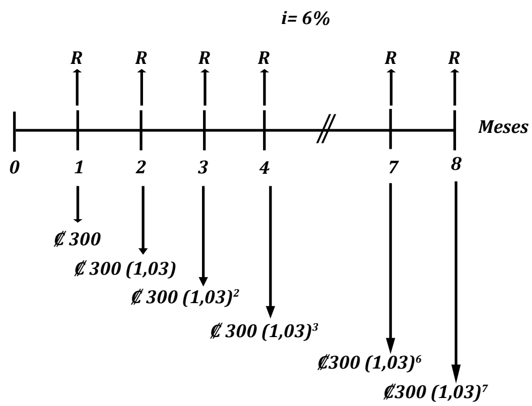
R/. El valor futuro de 10 pagos que aumentan 5% anualmente donde el primer pago es de ₡5.000 y la tasa de interés es igualmente del 5% anual, es de ₡77.566,41.

*Ejemplo 6.8* Hallar el valor del pago uniforme de 8 pagos que crecen un 3%, si el primer pago es ₡300 y la tasa de interés es 6% por periodo.

**Identificación de variables.**

***K=*** ₡300;
***g=*** 5%;
***i=*** 6%;
***n=*** 8;
***R=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Debido a que g≠i , se utilizará la ecuación (6.13)

$$R=Ki\left[\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{(g-i)\,(1+i)^n-1}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$R=\frac{Ki[(1+g)^n-(1+i)^n]}{(g-i)\,(1+i)^n-1}$$

$$=\frac{(₡300*0,06[(1+0,03)^8-(1+0,06)^8]}{(0,03-0,06)[(1+0,06)^8-1]}$$

$$=₡330,47$$

**RESPUESTA.**

R/. El valor futuro de 8 pagos que aumentan 3% cada periodo donde el primer pago es de ₡300 y la tasa de interés es del 6% por periodo, es de ₡330,47.

## 6.7. Gradiente Geométrico Infinito

Un gradiente geométrico infinito, al igual que el gradiente aritmético se caracteriza porque el número de pagos es muy grande (n→∞), y por tanto, solo tiene sentido el análisis del valor presente.

Cuando si g≠i de la ecuación (6.13) se tiene que :

$$P=K\left[\frac{\frac{(1+g)^n-1}{(1+i)^n}}{(g-i)}\right] \qquad P=\lim_{n\to\infty}\frac{K\left[\frac{(1+g)^n-1}{(1+i)^n}\right]}{g-i}=\frac{K}{g-i}\lim_{n\to\infty}\frac{[(1+g)^n-1]}{(1+i)^n}=\infty$$

pero como n→∞ entonces tenemos:

$$P=\lim_{n\to\infty}\frac{K\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}-1\right]}{g-i}\ \frac{K}{g-i}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}-1\right],$$

Si g>i, la expresion $\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}>1$ y por tanto: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}\right]=0$ luego:

Si g>i, la expresion $\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}<1$ y por tanto: $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}\right]=0$ luego:

$$\boldsymbol{P}=\left[\frac{K}{g-i}\right]\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(1+g)^n}{(1+i)^n}-1\right]\to\boldsymbol{P}=\left[\frac{K}{g-i}\right][0-1]\to\boxed{\boldsymbol{P}=\left[\frac{K}{i-g}\right]}\quad \text{si } g<i \quad (6.15)$$

Por otra parte, cuando g=i, según la ecuación (6.10)

$$P=\frac{Kn}{(1+i)}$$

y como n→∞ entonces:

$$P=\lim_{n\to\infty} \frac{Kn}{(1+i)} = \infty$$

lo que establece un valor

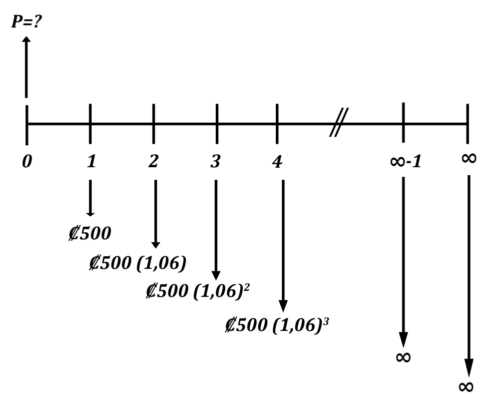
$\boxed{P = \infty}$ si g≥i.

*Ejemplo 6.9* Hallar el valor presente de una serie infinita de pagos que crecen un 5%, si el primer pago es ₡500 y la tasa de interés es 6% por periodo.

**Identificación de variables.**

***K=*** ₡500;
***g=*** 5%;
***i=*** 6%;
***R=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Debido a que g<i , se utilizará la ecuación (6.15)

$$P=\left[\frac{K}{i-g}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P=\left[\frac{K}{i-g}\right]=\left[\frac{₡500}{0{,}06-0{,}05}\right]= ₡50.000$$

**Respuesta.**

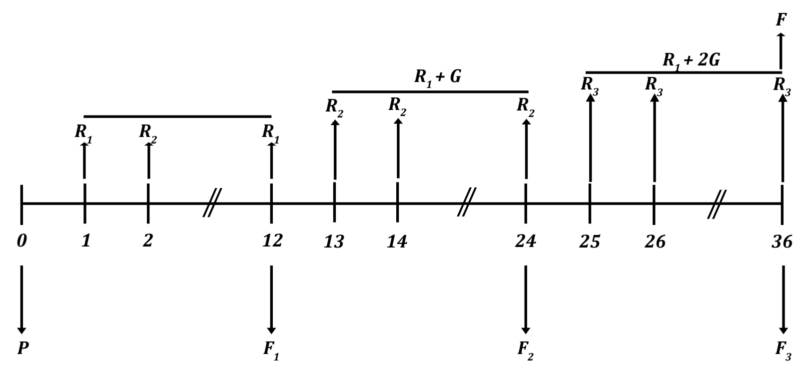
R/. El valor presente de una serie infinita de pagos que crecen un 5%, si el primer pago es ₡500 y la tasa de interés es 6% por periodo es de ₡50.000.

## 6.8. Gradiente Escalonado o en Escalera

Este tipo de gradientes corresponde a una serie de pagos (R) que permanecen iguales durante un tiempo (generalmente un año) y luego aumentan o disminuyen en una cantidad fija (G) o en un porcentaje (1+g), cada periodo. Si el gradiente aumenta cada periodo (año) en una cantidad fija, entonces nos referimos a un gradiente aritmético escalonado, y si lo hace en porcentaje entonces nos referimos a un gradiente geométrico escalonado.

#### GRADIENTE ARITMÉTICO ESCALONADO:

Para derivar la fórmula de valor presente y valor futuro de este tipo de gradientes observemos el siguiente diagrama y desglose de fórmulas:




Para hallar solución a estos gradientes, a partir de la Renta fija ($R_1$) durante el periodo, anual generalmente, se obtiene el valor futuro de esa serie periódica el cual se constituye en el primer término ($K=F_1$) del gradiente superior que en este caso es aritmético, es decir, que a partir de allí, el siguiente término aumenta o disminuye en una cantidad fija (G). Para el análisis del primer escalón (anualidad) se utilizan la tasa de interés por periodo (i) y el número de periodos en un año (m), pero para el gradiente ($F_1$, $F_2$, $F_3$) se utiliza la tasa de interés efectiva (r*) y el número de años (t).

Con esto en mente y a partir de la ecuación (5.1)

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n-1)}{i}\right]$$

y la ecuación (6.1)

$$P=\frac{[K+G/i]\ (1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n}$$

obtenemos lo siguiente:

$$P=\frac{[R[\frac{(1+i)^m-1}{i}]+G/r^*][(1+r^*)^t-1]-Gt}{r^*(1+r^*)^t} \qquad (6.16)$$

Ahora para hallar el valor futuro y de conformidad con la ecuación (4.4)

$F=P\ (1+i)^n$ se tiene:

$$F=\frac{[R[\frac{(1+i)^m-1}{i}]+G/r^*][(1+r^*)^t-1]-Gt)}{r^*(1+r^*)^t}\quad(1+r^*)^t\rightarrow$$

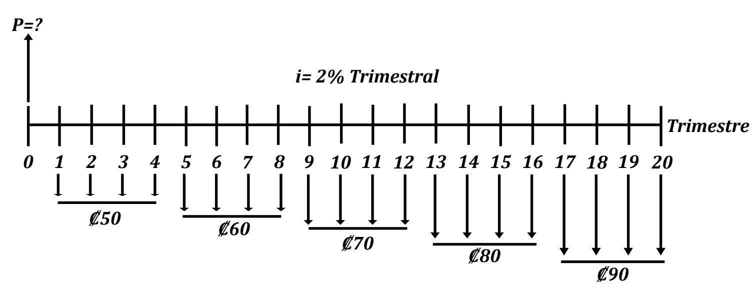
$$F=\left[\frac{R[\frac{(1+i)^m-1}{i}]+G/r^*][(1+r^*)^t-1]-Gt}{r^*}\right] \qquad (6.17)$$

*Ejemplo 6.10* Una obligación es cancelada mediante 20 pagos trimestrales de ₡50 que crecen en ₡10 cada año. Si la tasa de interés aplicada es del 2% trimestral, halle el valor presente de esta obligación.

**Identificación de variables.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **R=** | ₡50; | **t=** | n/m=20/4=5 años; |
| **G=** | ₡10; | **i=** | 2%; |
| **m=** | 4; | **r*=** | 8,243216% EA; |
| **n=** | 20; | **P=** | ? |

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**



**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (6.16)

$$P=\left[\frac{R\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]+G/r^*][(1+r^*)^t-1]-Gt}{r^*(1+r^*)^t}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P=\frac{[R\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]+G/r^*][(1+r^*)^t-1]-Gt}{r^*(1+r^*)^t}=$$

$$\frac{[₡50\left[\frac{(1+0,02)^4-1}{0,04}\right]+₡10/0,08243216][(1+0,08243216)^5-1]-₡10*5)}{0,08243216(1+0,08243216)^5}=₡481,86$$

**Respuesta.**

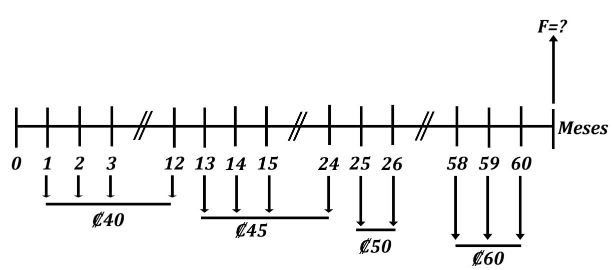
R/. El valor presente de una obligación que es cancelada mediante 20 pagos trimestrales de ₡50 que crecen en ₡10 cada año y si la tasa de interés aplicada es del 2% trimestral, es ₡481,86.

*Ejemplo 6.11* Una vivienda es cancelada mediante 60 pagos mensuales de ₡40 que crecen en ₡5 cada año. Si la tasa de interés aplicada es del 1% mensual, halle el valor futuro de esta vivienda.

**Identificación de variables.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***R=*** | ₡40; | ***t=*** | n/m=60/12=5 años; |
| ***G=*** | ₡5; | ***i=*** | 1%; |
| ***m=*** | 12; | ***r*=*** | 12,68250301% EA; |
| ***n=*** | 60; | ***F=*** | ? |

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**



**Selección de fórmulas.**

Se utilizará la ecuación (6.17)

$$F=\left[\frac{R[\frac{(1+i)^m-1}{i}]+G/r^*][(1+r^*)^t-1]-Gt}{r^*}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$F=\left[\frac{R[\frac{(1+i)^m-1}{i}]+G/r^*][(1+r^*)^t-1]-Gt)}{r^*}\right]=$$

$$\left[\frac{[₡40[\frac{(1+0,01)^{12}-1}{0,01}]+₡5/0,1268250301][(1+0,1268250301)^5-1]-₡5*5]}{0,1268250301}\right]$$

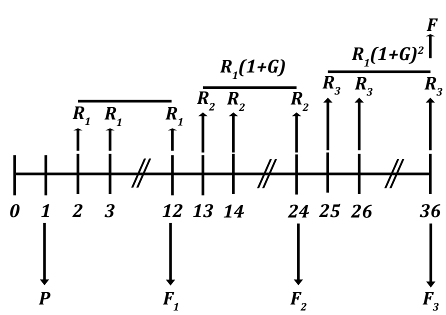
$$=₡3.323,54$$

**Respuesta.**

R/. El valor futuro de una vivienda que es cancelada mediante 60 pagos trimestrales de ₡40 que crecen en ₡5 cada año y si la tasa de interés aplicada es del 1% mensual, es ₡3.323,54.

#### GRADIENTE GEOMÉTRICO ESCALONADO:

Nuevamente para derivar la fórmula de valor presente y valor futuro de este tipo de gradientes observemos el siguiente diagrama y desglose de fórmulas:



Para hallar solución a estos gradientes, a partir de la Renta fija ($R_1$) durante el periodo, anual generalmente, se obtiene el valor futuro de esa serie periódica el cual se constituye en el primer término ($K=F_1$) del gradiente superior que en este caso es geométrico, es decir, que a partir de allí, el siguiente término aumenta o disminuye en un porcentaje (1+g). Para el análisis del primer escalón se utilizan la tasa de interés por periodo (i) y el número de periodos en un año (m), pero para el gradiente ($F_1$, $F_2$, $F_3$) se utiliza la tasa de interés efectiva (r*) y el número de años (t).

Con esto en mente y a partir de la ecuación (5.1)

$$F = R\left[\frac{(1+i)^n-1)}{i}\right]$$

y las ecuaciones (6.9)

$$P=K\left[\frac{(1+g)^n-(1+i)^n}{(g-i)(1+i)^n}\right]$$

si g≠i y (6.10)

$$P=\frac{Kn}{(1+i)}$$

si g=i, obtenemos lo siguiente:

$$P=R\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\left[\frac{[(1+g)^t-(1+r^*)^t}{(g-r^*)(1+r^*)^t}\right] \quad (6.18) \text{ si } g\neq i$$

$$\boxed{P=Rn\left[\frac{[(1+i)^m-1]}{i\,(1+r^*)}\right]} \quad (6.19) \text{ si } g=i$$

Ahora para hallar el valor futuro y de conformidad con la ecuación (4.4)

$F= P\,(1+i)^n$ se tiene:

$$F=R\left[\frac{(1+i)^m-1)}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^t-(1+r^*)^t]}{(g-r^*)\,(1+r^*)^t}\right](1+r^*)t \rightarrow$$

$$F=R\left[\frac{(1+i)^m-1)}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^t-(1+r^*)^t}{(g-r^*)}\right] \quad (6.20) \quad \text{si } g\neq i$$

$$F=Rn\left[\frac{[(1+i)^m-1]}{i(1+r^*)}\right](1+r^*)^t \rightarrow$$

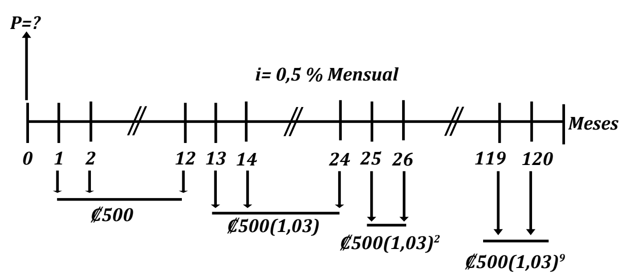
$$F=Rn\left[\frac{(1+i)^m-1}{i(1+r^*)^{1-t}}\right] \quad (6.21) \quad \text{si } g=i$$

*Ejemplo 6.12* Una obligación hipotecaria es cancelada mediante 120 pagos mensuales de ₡500 que crecen un 3% cada año. Si la tasa de interés aplicada es del 0,5% mensual, halle el valor presente de esta obligación.

### Identificación de variables.

***R=*** ₡500;
***g=*** 3%;
***m=*** 12;
***n=*** 120;
***t=*** n/m=120/12=10 años;
***i=*** 0,5% mensual;
***r*=*** 6,167781186% EA;
***P=*** ?

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

Debido a que g≠i se utilizará la ecuación (6.18)

$$P=R\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^t-(1+r^*)^t}{(g-r^*)(1+r^*)^t}\right]$$

### Aplicación de fórmulas.

$$P=R\left[\frac{(1+i)^{m}-1}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^{t}-(1+r^{*})^{t}}{(g-r^{*})(1+r^{*})^{t}}\right]=$$

$$₡500\left[\frac{(1+0,005)^{12}-1}{0,005}\right]\left[\frac{(1+0,03)^{10}-(1+0,06167781186)^{10}}{(0,03-0,06167781186)\ (1+0,06167781186)^{10}}\right]$$

$$=₡50.762,73$$

### Respuesta.

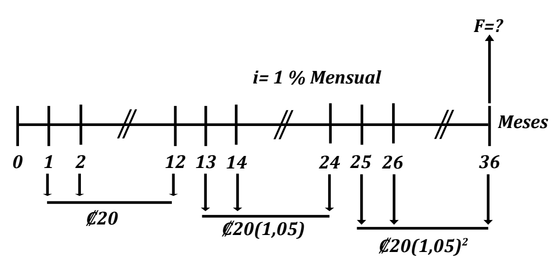
R/. El valor presente de una obligación hipotecaria que es cancelada mediante 120 pagos mensuales de ₡500 que crecen un 3% cada año y si la tasa de interés aplicada es del 0,5% mensual, es ₡50.762,73.

*Ejemplo 6.13* Un artículo es cancelado mediante 36 pagos mensuales de ₡20 que crecen un 5% cada año. Si la tasa de interés aplicada es del 1% mensual, halle el valor futuro de este artículo.

### Identificación de variables.

***R=*** ₡20;
***g=*** 5%;
***m=*** 12;
***n=*** 36;
***t=*** n/m=36/12=3 años;
***i=*** 1% mensual;
***r*=*** 12,68250301% EA;
***F=*** ?

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.



**Selección de fórmulas.**

Debido a que g≠i se utilizará la ecuación (6.20)

$$F=R\left[\frac{(1+i)^{m}-1)}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^{t}-(1+r^{*})^{t}}{(g-r^{*})}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$F=R\left[\frac{(1+i)^{m}-1)}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^{t}-(1+r^{*})^{t}}{(g-r^{*})}\right]$$

$$=₡20\left[\frac{(1+0,01)^{12}-1}{0,01}\right]\left[\frac{(1+0,05)^{3}-(1+0,1268250301)^{3}}{(0,05-0,1268250301)}\right]=₡901,83$$

**Respuesta.**

R/. El valor futuro de un artículo que es cancelado mediante 36 pagos mensuales de ₡20 que crecen un 5% cada año y si la tasa de interés aplicada es del 1% mensual, es ₡901,83.

# RESUMEN CAPÍTULO 6: Series Financieras Variables: Gradientes

En este capítulo se estudiaron los Gradientes o Series Variables, correspondientes a una sucesión de pagos donde el siguiente varía respecto al anterior siguiendo los principios de las progresiones aritméticas o geométricas, de donde toman el nombre correspondiente.

En este capítulo se estudian los Gradientes Aritméticos o Geométricos del tipo vencido, infinito, anticipado, diferido y escalonado, con la correspondiente derivación y explicación de fórmulas. Las series financieras variables o Gradientes, al igual que las anualidades, también se encuentran a diario en las transacciones de las personas, hogares y empresas que ven periodo tras periodo crecer o decrecer sus capitales bien a nivel de ingresos o egresos.

En este capítulo se han utilizado las siguientes ecuaciones:

$$P= \frac{[[K + G/i]\,(1+i)^{n}-1]-Gn}{i(1+i)^{n}} \tag{6.1}$$

$$R= K + G\,[\,1/i - n/[(1+i)^{n}-1]] \tag{6.2}$$

$$F=\left[\frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i}\right] \tag{6.3}$$

$$P=\left[\frac{K}{i}+\frac{G}{i^{2}}\right] \text{ Sí } n=\infty \tag{6.4}$$

$$P= \frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i(1+i)^{n-1}} \tag{6.5}$$

$$F=\left[\frac{K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i}\right](1+i) \tag{6.6}$$

$$P'=P(1+i)^{n'} = \frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i\,(1/i)^{n}} \tag{6.7}$$

$$P = \frac{[K+G/i][(1+i)^{n}-1]-Gn}{i\,(1+i)^{n+n}} \tag{6.8}$$

$$P=K\,\frac{[\,(1+g)^{n}\,(1+i)^{n}\,]}{(g-i)(1+i)^{n}} \tag{6.9}$$

$$P= \frac{Kn}{(1+i)} \tag{6.10}$$

$$F= \frac{k[(1+g)^{n}-(1+i)^{n}]}{g-i} \tag{6.11}$$

$$F=Kn(1+i)^{n-1} \text{ Si } g = i \tag{6.12}$$

$$R= \frac{Ki[(1+g)^{n}-(1+i)^{n}]}{(g-i)\,[(1+i)^{n}-1]} \text{ Si } g \neq i \tag{6.13}$$

$$R=\frac{Kni(1+i)^{n-1}}{(1+i)^{n}-1} \text{ Si } g = i \tag{6.14}$$

$$P=\left[\frac{K}{i-g}\right] \text{ Si } g < i \tag{6.15}$$

$$P= \frac{[R[\frac{(1+i)^m-1}{i}]+G/r^*][(1+r^*)^t-1]-Gt}{r^*(1+r^*)^t} \quad (6.16)$$

$$F=\left[\frac{R[\frac{(1+i)^m-1}{i}]+G/r^*][(1+r^*)^t-1]-Gt)}{r^*}\right] \quad (6.17)$$

$$P=R\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^t-(1+r^*)^t}{(g-r^*)(1+r^*)^t}\right] \quad (6.18)$$

$$P=Rn\left[\frac{(1+i)^m-1}{i\,(1+r^*)}\right] Si\ g = i \quad (6.19)$$

$$F=R\left[\frac{(1+i)^m-1)}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^t-(1+r^*)^t}{(g-r^*)}\right] \quad (6.20)$$

$$F=Rn\left[\frac{(1+i)^m-1}{i(1+r^*)^{1-t}}\right] Si\ g = i \quad (6.21)$$

Dónde: P= Valor Presente; F= Valor Futuro; R=Renta Periódica o fija; i= Tasa de interés por periodo; n=número total de periodos; K= Primer término del Gradiente; G=Gradiente Aritmético; g= Gradiente Geométrico; P'=Capital más intereses del periodo de gracia; n'=número de periodos de gracia; m= número de periodos en un año; r*= tasa de interés efectiva anual; t= número de años. Las ecuaciones 6.1 a 6.3 corresponden al gradiente aritmético vencido, la ecuación 6.4 corresponde al gradiente aritmético infinito, las ecuaciones 6.5 y 6.6 corresponden al gradiente aritmético anticipado, las ecuaciones 6.7 y 6.8 corresponden al gradiente aritmético diferido. Las ecuaciones 6.9 a 6.14 corresponden al gradiente geométrico vencido, la ecuación 6.15 corresponde al gradiente geométrico infinito, las ecuaciones 6.16 a 6.21 corresponden al gradiente escalonado aritmético y geométrico.

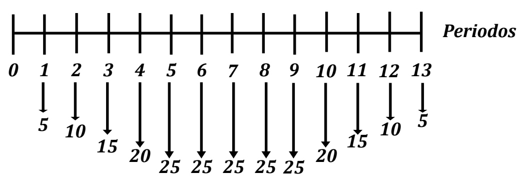
## EJERCICIOS CAPÍTULO 6: Series Financieras Variables: Gradientes

1. Un documento exige hacer 12 pagos mensuales vencidos, si el primer pago es de ₡10.000 y cada uno disminuye en ₡600.

   **a.** Cuál será el valor del último pago?
   **b.** Cuál será el valor final de todos ellos, suponiendo interés de 36% convertible mensualmente?

2. Hallar el valor presente de 15 pagos que crecen linealmente en ₡500 si el primer pago es de ₡7.000 y la tasa efectiva por periodo es del 4%, Hallar además la cuota uniforme equivalente y el valor futuro.

3. Calcular valor presente, valor futuro y pago uniforme de la siguiente serie. Su ponga un interés del 2,5% por periodo.




4. Un estudiante debe comprar una motocicleta que actualmente cuesta ₡4.000, para tal fin sus padres deciden establecer un fondo mediante depósitos mensuales crecientes en un porcentaje igual a la tasa de interés. Si el primer depósito es de ₡60 que se hace al final del mes. ¿Cuánto tiempo le llevará reunir el dinero necesario para la compra, si la motocicleta sube de precio cada mes un 1%, y suponemos una tasa del 4% efectiva mensual?

5. Hallar el primer pago de un gradiente lineal creciente en ₡300 que tenga 50 pagos y que sea equivalente a 50 pagos que crecen un 20% con primer pago de ₡1.000, suponga una tasa del 5% periodo.

6. Hallar el valor presente de una serie infinita de pagos si el primero vale $4.000 y son crecientes en un 10% suponga una tasa efectiva del 9%.

7. Cuál es el valor presente de una serie infinita de pagos mensuales que crecen cada mes en ₡2.000 y cuyo primer pago es de ₡15.000, suponer una tasa de interés del 1.5 % efectivo mensual.

8. Un padre de familia desea reunir cierta cantidad de dinero para la educación de su hijo mediante depósitos anuales, durante 6 años contados a partir de hoy en un fondo que paga el 12% SV. Si el hijo comienza a estudiar exactamente después de 6 años y el costo actual es de ₡1.000 el cual se incrementa en un 5% cada semestre, calcular el valor de los depósitos anuales si la carrera dura 5 años.

9. Una corporación otorga a un cliente un cupo de crédito por ₡5.000 con un interés del 36% anual convertible mensualmente. El deudor tiene un plazo de 10 años para amortizar la deuda, mediante pagos mensuales. Si la primera cuota es de ₡100 y vence el final de cada mes, ¿cuál debe ser el reajuste mensual de la cuota para cancelar la deuda?

10. Se ofrece la administración de un restaurante durante un año y se garantiza que comprarán exactamente 6.000 almuerzos mensuales durante ese año, los cuales serán pagaderos en un solo contado a razón de ₡500 cada uno, pero su valor total será cancelado al final de un año, la persona calcula que el costo de los insumos de cada almuerzo será de ₡200 los cuales deberán ser adquiridos y pagados al principio de cada mes y su valor aumentará cada mes un 5%. El costo mensual de la mano de obra se considera estable en ₡250.000 y además se requerirá una inversión inicial de ₡1 millón para la adecuación del restaurante. Suponiendo un interés mensual del 3%. Calcular cuál será el valor de su ganancia:

    **a.** ¿En unidades monetarias de hoy?
    **b.** ¿En unidades monetarias futuras?

11. Una empresa produce y vende productos eléctricos los cuales le generan ingresos de ₡930 en el primer mes aumentando en 5% cada mes hasta terminar el tercer año; de allí en adelante permanecen constantes. Los costos de producción ascienden a ₡620 mensuales durante los primeros cuatro años, y de ahí en adelante crecerán en ₡25 mensuales. La mitad de las utilidades mensuales se depositarán en una cuenta de ahorros que paga una tasa de interés del 15,20% Nominal Trimestre Anticipado (T. A). Si en estas condiciones la empresa opera durante 6 años, hallar el total acumulado en la cuenta de ahorros al final del sexto año.

12. Un activo puede adquirirse financiado con el siguiente plan: cuota inicial del 30% del valor de contado y el resto a 24 cuotas mensuales que aumentan una cantidad igual a ₡5.000 cada una; la primera cuota tiene un valor de ₡21.000 y debe de pagarse dentro de 8 meses. Determinar el valor de contado del activo, si el

interés que se cobra es del 2,35% mensual durante los 8 primeros meses y del 2,5% mensual de allí en adelante.

13. Se ha pactado pagar una deuda con una serie perpetua de pagos trimestrales de ₡48.000 debiéndose realizar el primer pago dentro de 1 año, con un interés del 6,8% trimestral. Se quiere sustituir esta forma de pago con otra serie de 16 pagos anuales, crecientes en un 12% por año, realizando el primero de estos pagos dentro de 3 años y con una tasa de interés del 36% anual. Hallar el séptimo pago a realizar en la serie anual.

14. Una entidad bancaria le hace un préstamo a un cliente por ₡15.000 para adquirir vivienda y le cobra un interés del 2,8% mensual. El contrato inicial estipula un tiempo de 15 años para pagar la deuda con cuotas mensuales que aumenten cada mes en 3%. Con otra opción, se acepta que el deudor empiece pagando en el mes 25 una cuota de ₡165,704 y así sucesivamente creciendo el 3% mensual hasta completar los 15 años. Al cabo de 2 años, el deudor solicita que le sea revisado el sistema de financiación.

    **a.** Determinar el valor de la cuota 25 de seguir con las condiciones pactadas inicialmente
    **b.** De haber tomado la otra opción, ¿habría pagado el equivalente a que deuda inicial?

15. Financiar una deuda de ₡5.000 de hoy a cinco años con cuotas mensuales que aumenten en ₡10 cada mes durante los primeros cuatro años y luego se mantengan constantes. La tasa de interés es del 3% mensual durante los cuatro primeros años y del 4% mensual de ahí en adelante. Halle la primera cuota e interprete la respuesta.

16. Un crédito por valor de ₡45.000 se financió a una tasa de interés del 2% mensual, por medio de 60 cuotas mensuales que crecen 3% cada mes. Después de pagada la cuota 24 se hace un abono de ₡5.000 y se decide pagar el saldo en cuatro años, con cuotas mensuales iguales que aumentan un 6% al final del año. Calcular el valor de las nuevas cuotas mensuales por año.

# 7. SALDOS Y AMORTIZACIONES

## PREÁMBULO

Hasta ahora se han analizado situaciones financieras que concluyen su proceso de negociación, bien sea con las condiciones pactadas inicialmente o con algunos cambios propuestos a posteriori como es el caso de las ecuaciones de valor. En este capítulo, sin embargo, se analizará lo que sucede con una obligación o negociación financiera en cualquier momento a lo largo de su término. En consecuencia, se estudia los saldos insolutos de deuda y el proceso de amortización que entraña dicha obligación.

Este capítulo no ofrece teoría adicional sobre ecuaciones financieras, sino que hace acopio de los temas vistos en los capítulos precedentes para desarrollar una temática de mucho interés y aplicación en la vida financiera de las personas, hogares y empresas en todo el mundo.

# 7.1. Definiciones

La Amortización, desde el punto de vista financiero, es el proceso de pago o cancelación de una deuda y sus correspondientes intereses mediante una serie de cuotas generalmente periódicas, en un tiempo determinado. A nivel de empresas, esta Amortización financiera tiene efectos contables, pues los intereses pagados hacen parte los gastos financieros y el abono a capital hace parte de la Amortización de Pasivos. Igualmente, existe una Amortización de corte netamente contable que no implica flujos de capital, como el caso de la Amortización de Activos, Diferidos e Intangibles, pero que si tiene importantes efectos en la tributación de la empresa. En este capítulo, se hará énfasis únicamente en la Amortización Financiera o de pasivos.

# 7.2. Saldos de Deuda

El saldo de una deuda es lo que se está debiendo en cualquier momento dentro de su plazo. Conocer su monto es importante por cuestiones presupuestales, para hacer proyecciones y control financiero, hacer abonos parciales a la deuda, o conocerlo para cancelarla totalmente (Meza, 2004).

Para conocer el monto de dicho saldo (S) se puede encontrar el valor presente de las cuotas pendientes de pago ($n_1$) a la tasa de interés convenida, o hallar la diferencia entre el valor futuro original de la obligación (a partir del valor presente) y el valor futuro de las cuotas pagadas ($n_2$) hasta ese momento.

En este punto podemos describir dos ecuaciones de conformidad con los procedimientos señalados arriba:

$$\boxed{S_{n1} = R\frac{[(1+i)^{n1}-1]}{i(1+i)\ n1}} \quad (7.1)$$

$$\boxed{S_{n2} = P(1+i)^{n2}-R\left[\frac{(1+i)^{n2}-1}{i}\right]} \quad (7.2)$$

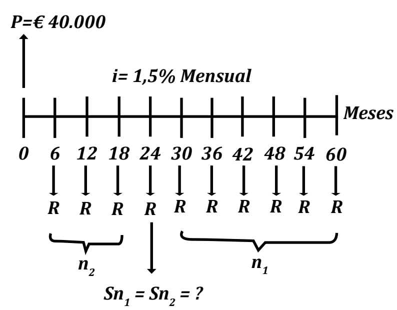
Estas ecuaciones aplican para el caso de las anualidades, pero se pueden utilizar sus símiles para los casos de los gradientes. Evidentemente, el saldo está ligado al proceso de amortización que haya convenido la obligación. En términos generales, aunque puede haber infinidad de maneras a la hora de cancelar una obligación, lo usual es que dichos sistemas estén configurados como anualidades, gradientes aritméticos, gradientes geométricos o alguna combinación o variación de éstas.

*Ejemplo 7.1* Se consigue un préstamo bancario por ₡40.000 a ser cancelado en 60 cuotas mensuales. ¿Cuál es el saldo de esta obligación una vez cancelada la cuota 24 si se cobra un interés del 1,5% EV?

## Identificación de variables.

***P=*** ₡40.000;
***n=*** 60;
***n1=*** 36;
***n2=*** 24;
***i=*** 1,5% mensual;
***R=*** ?;
***Sn1=*** ?;
***Sn2=*** ?

## Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




## Selección de fórmulas.

Se utilizarán las ecuaciones (5.4)

$$R= P\left[\frac{i\,(1+i)n}{(1+i)^n-1}\right]$$

(7.1)

$$S_{n1} = R\left[\frac{(1+i)^{n1}-1}{i(1+i)\ n1}\right]$$

y (7.2)

$$S_{n2} = P(1+i)^{n2}-R\left[\frac{(1+i)^{n2}-1}{i}\right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$R= P\left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]=₡40.000\left[\frac{0{,}015(1+0{,}015)^{60}}{(1+0{,}015)^{60}-1)}\right]$$

$$=₡1.015{,}7371$$

$$S_{n1} = R\left[\frac{(1+i)^{n1}-1}{i(1+i)\ n1}\right]$$

$$=₡1.015{,}7371\left[\frac{(1+0{,}015)^{36}-1}{0{,}015(1+0{,}015)^{36}}\right]=₡28.095{,}983$$

$$Sn2 = P(1+i)n2-R\left[\frac{(1+i)^{n2}-1}{i}\right]$$

$$=₡40.000\ (1+0{,}015)^{24}-₡1.015{,}7371\left[\frac{(1+0{,}015)^{24}-1}{0{,}015}\right]$$

$$=₡28.095{,}983$$

**Respuesta.**

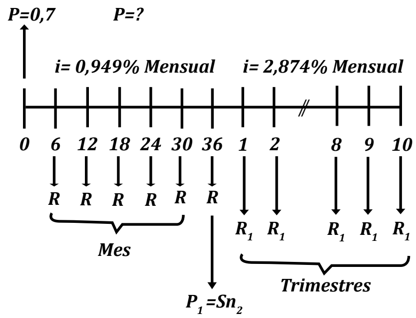
R/. El saldo de un préstamo bancario de ₡40.000 a ser cancelado en 60 cuotas mensuales una vez cancelada la cuota 24 es de ₡28.095,983, utilizando cualquiera de los dos métodos propuestos para el efecto.

*Ejemplo 7.2* Una vivienda es financiada con el 70% de su valor y debe pagarse con cuotas mensuales iguales de ₡500. Luego de cancelada la cuota 36 el saldo se canceló con 10 cuotas trimestrales de ₡1.000, calcular el valor de contado de la vivienda, con una tasa del 12% EA.

**Identificación de variables.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***R=*** | ₡500; | ***i2=*** | 0,949% mensual; |
| ***R1=*** | ₡1.000; | ***i1=*** | 2,874% trimestral; |
| ***n2=*** | 36; | ***P=*** | ?; |
| ***n1=*** | 10; | ***P1=*** | Sn2=?; |
| ***r*=*** | 12%EA; | ***P2=*** | 0,7*P=? |

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

Se utilizarán las ecuaciones (7.2)

$$S_{n2} = P(1+i)^{n2}-R\left[\frac{(1+i)^{n2}-1}{i}\right]$$

y (5.3)

$$P= R\left[\frac{(1+i)^{n}-1)}{i(1+i)^{n}}\right]$$

### Aplicación de fórmulas.

$$P1=R1\left[\frac{(1+i1)^{n1}-1}{i1(1+i1)^{n1}}\right] = \text{₡}1.000\left[\frac{(1+0,02874)^{10}-1}{0,02874(1+0,02874)^{10}}\right]$$

***=₡8.585,43;*** pero ***P1=Sn2→***

$$S_{n2} = P2(1+i)^{n2}-R\left[\frac{(1+i2)^{n2}-1}{i2}\right]$$

$$\rightarrow \text{₡}8.585,43=P2(1+0,00949)^{36}-\text{₡}500\left[\frac{(1+0,00949)^{36}-1}{0,00949}\right]$$

por tanto, ***P2= ₡29.641,341***, Pero este valor solo corresponde al 70% del valor de la vivienda, siendo el valor total ***P=P2/0,7,*** por tanto, ***P= ₡29.641,341/0,7=₡42.344,773***

### Respuesta.

R/. El valor de contado de una vivienda financiada con el 70% de su valor que debe pagarse con cuotas mensuales iguales de ₡500 y que cancelada la cuota 36 el saldo es equivalente a 10 cuotas trimestrales de ₡1.000 a una tasa del 12% EA, es de ₡42.344,773.

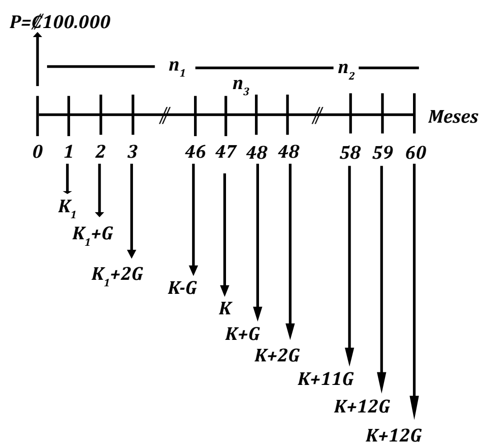
## SALDO EN UN GRADIENTE ARITMÉTICO

*Ejemplo 7.3* Un inmueble que posee un valor de contado de ₡100.000 se financia a una tasa de interés del 3% mensual con 60 pagos que aumentan ₡15 cada mes. ¿Cuál es el saldo de la deuda después de cancelada la cuota 46?

### Identificación de variables.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***P=*** | ₡100.000; | ***i=*** | 3% mensual; |
| ***n=*** | 60; | ***K1=*** | ?; |
| ***n1=*** | 14; | ***K=*** | ?; |
| ***n2=*** | 46; | ***Sn1=*** | ?; |
| ***n3=*** | 47; | ***Sn2=*** | ? |
| ***G=*** | ₡15; | | |

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas.

Se utilizarán las ecuaciones (2.2)

$$a_n = a_i + (n-1)\ d$$

(4.4)

$$F= P\,(1+i)^n$$

(6.1)

$$P= \frac{[[K + G/i]\,(1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n}$$

y (6.3)

$$F=\left[\frac{[K+G/i][(1+i)^n-1]-Gn}{i}\right]$$

Debe hallarse el valor del primer término general del gradiente (K1), y luego hallar el primer término (K) del saldo de las cuotas que recae en el puesto 47 ($n_3$).

**Aplicación de fórmulas.**

$$P= \frac{[[K + G/i]\,(1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n}$$

$$\rightarrow ₡100.000=\frac{[K1+₡15/0,03][(1+0,03)^{60}-1]-₡15*60}{0,03(1+0,03)^{60}}$$

por tanto

$$K1=₡3.297,285$$

$$K=K1+(n_3-1)G\rightarrow K=₡3.987,285+(47-1)₡15\rightarrow K=$$

$$₡3.987,285$$

$$Sn_1= \frac{[K + G/i]\,(1+i)^{n1}-1]-Gn1}{i(1+i)^{n1}} =$$

$$\frac{[₡3.987,285+₡15/0,03][(1+0,03)^{14}-1]-₡15*14)}{0,03(1+0,03)^{14}} =₡46.060,871$$

$$S_{n2} = P\,(1+i)^{n2} - \left[\frac{[K1 + \frac{G}{i}][\,(1+i)^{n2} - 1] - Gn2}{i}\right] = ₡\;100.000(1+0,03)^{46} -$$

$$\left[\frac{[₡3.297,285 + \frac{₡15}{0,03}\;][(1+0,03)^{46} - 1] - ₡15*46}{0,03}\right] = ₡46.060,871$$

### Respuesta.

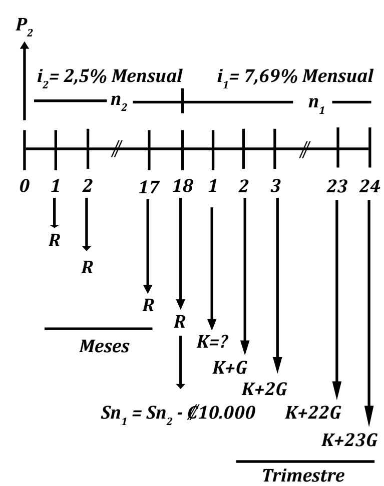
R/. El saldo de un inmueble de ₡100.000 financiado a una tasa del 3% mensual y ser cancelado en 60 cuotas mensuales, que aumentan ₡15 cada mes, una vez cancelada la cuota 46 es de ₡46.060,871, utilizando cualquiera de los dos métodos propuestos para el efecto

*Ejemplo 7.4* De una obligación de ₡45.000 se financia el 80% por medio de 36 cuotas mensuales iguales, a una tasa de interés del 2,5% mensual. Después de pagada la cuota 18 se hace un abono de ₡10.000 y el saldo se cancela con 24 cuotas trimestrales que aumentan cada trimestre en ₡10. Calcular el valor de la primera cuota del nuevo plan de pagos (Meza, 2004).

### Identificación de variables.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***P=*** | ₡45.000; | ***i2=*** | 2,5% mensual; |
| ***P2=*** | ₡45.000*0,8=₡36.000 | ***i1=*** | 7,69% trimestral; |
| ***X=*** | ₡10.000; | ***K=*** | ?; |
| ***n=*** | 36; | ***R=*** | ?; |
| ***n2=*** | 18; | ***Sn1=*** | ?; |
| ***n1=*** | 24; | ***Sn2=*** | ? |
| ***G=*** | ₡10; | | |

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.



**Selección de fórmulas.**

Se utilizarán las ecuaciones (4.4)

$$F= P\,(1+i)^n$$

(5.4)

$$R= P\left[\frac{i\,(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]$$

(6.1)

$$P= \frac{[[K + G/i]\,(1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n}$$

(6.3)

$$F= \left[\frac{[K+G/i][(1+i)^n-1]-Gn}{i}\right]$$

y (7.1)

$$S_{n1} = R\left[\frac{(1+i)^{n1}-1}{i(1+i)\ n1}\right]$$

Debe hallarse el valor de la Renta Fija (R) a partir del valor a financiar que corresponde al 80% de la obligación es decir P2=₡45.000*0,8= ₡36.000. Luego se calcula el saldo de la obligación (Sn1) y a partir de allí el primer término (K) del nuevo plan de pagos.

**Aplicación de fórmulas.**

$$R=P_2\left[\frac{i1(1+i2)^n}{(1+i2)^n-1}\right]=₡36.000\left[\frac{0{,}025(1+0{,}025)^{36}}{(1+0{,}025)^{36}-1)}\right]=₡1.528{,}257$$

$$S_{n1}= R\left[\frac{(1+i2)^{n1}-1}{i1(1+i2)^{n1}}\right]=₡1.528{,}257\left[\frac{(1+0{,}025)^{18}-1}{0{,}025(1+0{,}025)^{18}}\right]=₡21.935{,}625$$

Sobre este valor se descuenta el abono de los ₡10.000, por tanto el nuevo saldo a financiar será:

$S_{n2}$= ₡21.935,625-₡10.000=₡11.935,625,
ahora obtenemos K:

$$S_{n2}=\frac{[K+G/i1][(1+i1)^{n2}-1]-Gn2}{i2(1+i1)^{n2}}\rightarrow \text{₡}11.935,625=$$

$$\frac{[K+\text{₡}10/0,0769][(1+0,0769)^{24}-1]-\text{₡}10*24)}{0,0769(1+0,0769)^{24}}\rightarrow K=\text{₡}1.023,219$$

### Respuesta.

Para una obligación de ₡45.000 que se financia el 80% por medio de 36 cuotas mensuales iguales, a una tasa de interés del 2,5% mensual y que después de pagada la cuota 18 se hace un abono de ₡10.000 y el saldo se cancela con 24 cuotas trimestrales que aumentan cada trimestre en ₡10, el valor de la primera cuota de este nuevo plan de pagos es ₡1.023,219.

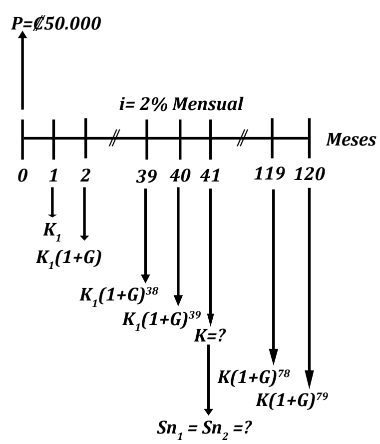
## SALDO EN UN GRADIENTE GEOMÉTRICO

*Ejemplo 7.5* Un inmueble que posee un valor de contado de ₡50.000 se financia a una tasa de interés del 2% mensual con 120 pagos que crecen 1% cada mes. ¿Cuál es el saldo de la deuda después de cancelada la cuota 40?

### Identificación de variables.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***P=*** | ₡50.000; | ***i=*** | 2% mensual; |
| ***n=*** | 120; | ***K1=*** | ?; |
| ***n1=*** | 80; | ***K=*** | ?; |
| ***n2=*** | 40; | ***Sn1=*** | ?; |
| ***n3=*** | 41; | ***Sn2=*** | ? |
| ***g=*** | 1%; | | |

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.



**Selección de fórmulas.**

Se utilizarán las ecuaciones (2.7)

$$a_n=a_1r^{\ n-1}$$

(4.4)

$$F= P\ (1+i)^n$$

(6.9)

$$P=K\left[\frac{(1+g)^n\ (1+i)^n}{(g\text{-}i)(1+i)^n}\right]\quad Si\ g \neq 1$$

si g≠i ; y (6.11)

$$F= \frac{k[(1+g)^n\text{-}(1+i)^n]}{g\text{-}i}\qquad Si\ g \neq 1$$

si g≠i Debe hallarse el valor del primer término general del gradiente (K1), y luego hallar el primer término (K) del saldo de las cuotas que recae en el puesto 47.

**Aplicación de fórmulas.**

$$P=K1\left[\frac{(1+g)^n\ (1+i)^n}{(g\text{-}i)(1+i)^n}\right]\rightarrow ₡50.000=$$

$$K1\left[\frac{(1+0,01)^{120}\text{-}(1+0,02)^{120}}{(0,01\text{-}0,02)\ (1+0,02)^{120}}\right]$$

por tanto

$$K1=₡721,064$$

$$K=k1(1+g)^{n\text{-}1}\rightarrow K=₡721,064*(1+0,01)^{41\text{-}1}\rightarrow K=₡1.073,566$$

$$S_{n1}=K\left[\frac{(1+g)^{n1}\text{-}(1+i)^{n1}}{(g\text{-}i)\ (1+i)^{n1}}\right]=₡1.073,566\left[\frac{(1+0,01)^{80}\text{-}(1+0,02)^{80}}{(0,01\text{-}0,02)\ (1+0,02)^{80}}\right]$$

$$=₡58.544,794$$

$$S_{n2}=P(1+i)^{n2}-\frac{K1[(1+g)^{n2}-(1+i)^{n2}]}{g-i}=$$

$$₡50.000(1+0,02)^{40}-\frac{₡721,064[(1+0,01)^{40}-(1+0,02)^{40}]}{0,01-0,02}$$

$$=₡58.544,794$$

**Respuesta.**

R/. El saldo de un inmueble de ₡50.000 financiado a una tasa del 2% mensual y a ser cancelado en 120 cuotas mensuales, que crecen un 1% cada mes, una vez cancelada la cuota 40 es de ₡58.544,794, utilizando cualquiera de los dos métodos propuestos para el efecto.

### SALDO EN UN GRADIENTE ESCALONADO

Encontrar el saldo en este tipo de gradientes se convierte en todo un reto para el lector, toda vez que deberá establecer en primer medida la sección de escalones en que éste se ubica. De conformidad con Meza (2004), el gradiente se divide en secciones o bloques periódicos anuales, por ejemplo, si el plazo es de 3 años y los pagos son mensuales, existirán tres bloques, así:

- Primer bloque 0 a 12 meses
- Segundo bloque 13 a 24 meses
- Tercer bloque 25 a 36 meses

Posteriormente, se deberá encontrar el valor presente al inicio del bloque donde se ubique el pago solicitado en saldo, por ejemplo, si se requiere hallara el saldo una vez pagada la cuota 28, entonces se halla primero el valor presente en el momento cero del tercer bloque (24), el primer término de este bloque (25) y a partir de esta anualidad hallamos con los procedimientos conocidos el saldo hasta el pago (28), que se traduce en el pago 4 de este nuevo gradiente.

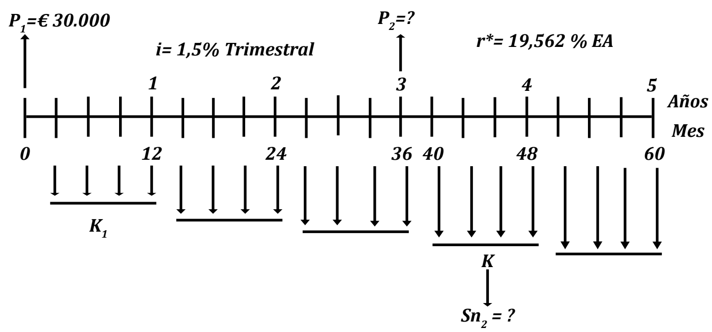
*Ejemplo 7.6* Un crédito por valor de ₡30.000 se financia a una tasa de interés del 1,5% mensual con 60 pagos mensuales iguales que crecen 10% cada año. ¿Cuál es el valor de la primera cuota y el saldo de la deuda después de cancelada la cuota 40?

**Identificación de variables.**

***P=*** ₡30.000;
***n=*** 60;

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***n1=*** | 8; | ***t1=*** | 4; |
| ***n2=*** | 4; | ***t2=*** | 2; |
| ***g=*** | 10%; | ***K1=*** | ?; |
| ***i=*** | 1,5% mensual; | ***K=*** | ?; |
| ***r*=*** | 19,562% EA | ***Sn1=*** | ?; |
| ***m=*** | 12; | ***Sn2=*** | ? |
| ***t=*** | n/m=60/12=5 años; | | |

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

Se utilizarán las ecuaciones (2.7)

$$at_1=a_1r^{t1-1}$$

(4.4)

$$F= P\,(1+i)^n$$

(6.18)

$$P=R\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^t-(1+r^*)^t}{(g-r^*)(1+r^*)^t}\right] \quad si\ g \neq i$$

si g≠i; y

$$S_{n2} = P(1+i)^{n2}-R\left[\frac{(1+i)^{n2}-1}{i}\right]$$

Debe hallarse el valor del primer término general del gradiente (K1), y luego hallar el primer término (K) de la sección donde está el saldo solicitado (Sn2).

**Aplicación de fórmulas.**

Primero se encuentra el valor inicial (K1) de todo el gradiente escalonado:

$$P=K1\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^t-(1+r^*)^t}{(g-r^*)\ (1+r^*)^t}\right]\rightarrow ₡30.000=$$

$$K1\left[\frac{(1+0,015)^{12}-1}{0,015}\right]\left[\frac{(1+0,10)^5-(1+0,19562)^5}{(0,10-0,19562)\ (1+0,19562)5}\right]$$

por tanto: ***K1=₡645,378***

Ahora se halla el primer valor (K) de la anualidad donde está el saldo solicitado:

$$K=k1(1+g)^{t1-1}\rightarrow K=₡645,378*(1+0,10)^{4-1}\rightarrow K=₡858,998$$

Luego se encuentra el valor presente del gradiente en el momento cero de la sección donde se halla el saldo solicitado en el puesto 36. Este corresponde al valor presente de un gradiente geométrico escalonado con 2 años pendientes:

$$P_2=K\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^{t2}-(1+r^*)^{t2}}{(g-r^*)\ (1+r^*)^t}\right]=$$

$$₡858,998\left[\frac{(1+0,015)^{12}-1}{0,015}\right]\left[\frac{(1+0,10)^2-(1+0,19562)^2)}{(0,10-0,19562)\ (1+0,19562)^2}\right]\rightarrow$$

$$P_2=₡17.989,693$$

Ahora se encuentra el saldo en la cuota 40, que corresponde a la cuota 4 (n2) de esta anualidad:

$$S_{n2}=P\ (1+i)^{n2}-K\left[\frac{(1+i)^{n2}-1}{i}\right]=S_{n2}=₡17.989,693\ (1+0,015)^4-$$

$$₡858,998\frac{[(1+0,015)^4-1]}{0,015}=₡15.579,527$$

**Respuesta.**

R/. El valor de la primera cuota y el saldo de la deuda después de cancelada la cuota 40 de un crédito por valor de ₡30.000 que se financia a una tasa de interés del 1,5% mensual con 60 pagos mensuales iguales que crecen 10% cada año, son ₡645,378 y ₡15.579,527 respectivamente.

# 7.3. Sistemas de Amortización

En el pago de una obligación financiera cualquiera, el deudor se compromete a cubrir dos rubros: primero, el costo financiero (pago de intereses) y segundo, la restitución del capital recibido en préstamo. Aunque, en teoría, pueden existir infinitos sistemas para amortizar una deuda dependiendo de la creatividad del deudor y el acreedor, este capítulo se centrará en aquellos relacionados con la teoría vista hasta ahora, referida a anualidades y gradientes.

Al diseñar un plan de amortización, para efectos prácticos y académicos se acostumbra a construir una tabla de amortización, que registra periodo a periodo la forma como va evolucionando el pago de la deuda. Esta tabla debe contener como mínimo 5 columnas: la primera muestra los periodos de pago (j), la segunda muestra el valor de la cuota periódica (Cj), la tercera el valor de los intereses (Ij), la cuarta muestra el abono a capital (Aj) y la quinta columna muestra el saldo de la deuda (Sj) (Meza, 2004).

A continuación, se muestra los sistemas de amortización más usuales.

### AMORTIZACIÓN CON ABONO CONSTANTE A CAPITAL

Este es un sistema muy usual en créditos comerciales, ordinarios y de consumo y también en créditos de vivienda. Aunque los intereses pueden ser cobrados anticipadamente o en forma vencida, la amortización ($A=A_j$) a capital es constante, es decir, en cada periodo se abona al capital una cantidad constante igual al monto solicitado (P) dividido por el número de cuotas (n). El valor de la Cuota ($C_j$) es igual entonces a la suma de la Amortización más los intereses correspondientes ($I_j$) en el periodo indicado. A su vez, los intereses son iguales al Saldo ($S_j$) multiplicado por la tasa de interés (i) de la negociación.

Para este tipo de sistema podemos establecer las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{A=\frac{P}{n}} \quad (7.3) \qquad \boxed{C_j= A+S_{j-1}\,i} \quad (7.5) \text{ cuota vencida}$$

$$\boxed{S_j= P\left(1-\frac{j}{n}\right)} \quad (7.4) \qquad \boxed{C_j= A+S_j\,i} \quad (7.6) \text{ cuota anticipada}$$

*Ejemplo 7.7* Una persona recibe un crédito por ₡10.000 a una tasa de interés del 3% TV, con plazo de 1 año. La restitución del capital se efectuará en 4 cuotas iguales cada trimestre. Calcular el valor de las cuotas y construir la tabla de amortización.

### Identificación de variables.

**P=** ₡10.000;
**n=** 4;
**A=** P/n=₡10.000/4=₡2.500
**i=** 3% TV;
**Cj=** ?;
**Sj=** ?;

### Selección de fórmulas.

Se utilizarán las ecuaciones (7.3)

$$A=\frac{P}{n}$$

(7.4)

$$S_j= P\left(1-\frac{j}{n}\right)$$

y (7.5)

$$C_j= A+S_{j-1}\,i$$

### Aplicación de fórmulas.

$$A=\frac{P}{n} =₡\frac{10.000}{4}=₡2.500;$$

$$S_j= P\left(1-\frac{j}{n}\right)\rightarrow S_1=₡10.000\left(1-\frac{1}{4}\right)=₡7.500;$$

$$C_j = A + S_{j-1} i \rightarrow C_1 = ₡2.500 + ₡10.000 * 0{,}03 =$$
$$₡2.500 + ₡300 = ₡2.800$$

### Tabla de Amortización

| *Periodo* | *Cuota* | *Interés* | *Amortización* | *Saldo* |
|---|---|---|---|---|
| *o* | *0* | *0* | *o* | *₡10.000* |
| *1* | *₡2.800* | *₡300* | *₡2.500* | *₡7.500* |
| *2* | *₡2.725* | *₡225* | *₡2.500* | *₡5.000* |
| *3* | *₡2.650* | *₡150* | *₡2.500* | *₡2.500* |
| *4* | *₡2.575* | *₡75* | *₡2.500* | *o* |

### Respuesta.

R/. Una persona que recibe un crédito por ₡10.000 a una tasa de interés del 3% TV, con plazo de 1 año y cuya restitución del capital se efectuará en 4 cuotas iguales cada trimestre, debe cancelar cuotas de ₡2.800, ₡2.725, ₡2.650 y ₡2.575. La tabla de amortización está descrita atrás.

*Ejemplo 7.8* Una persona recibe un crédito por ₡10.000 a una tasa de interés del 3% TA, con plazo de 1 año. La restitución del capital se efectuará en 4 cuotas iguales cada trimestre. Calcular el valor de las cuotas y construir la tabla de amortización.

### Identificación de variables.

**P=** ₡10.000;
**n=** 4;
**A=** P/n=₡10.000/4=₡2.500
**i=** 3% TV;
**Cj=** ?;
**Sj=** ?;

### Selección de fórmulas.

Se utilizarán las ecuaciones (7.3)

$$A = \frac{P}{n}$$

(7.4)

$$S_j = P\left(1 - \frac{j}{n}\right)$$

y (7.6)

$$C_j = A + S_j\, i$$

### Aplicación de fórmulas.

$$A = \frac{P}{n} = \frac{₡10.000}{4} = ₡2.500;$$

$$S_j = P\left(1 - \frac{j}{n}\right) \rightarrow S_1 = ₡10.000\left(1 - \frac{1}{4}\right) = ₡7.500;$$

$$C_j = A + S_j\, i \rightarrow C_1 = ₡2.500 + ₡7.500 * 0{,}03 =$$

$$₡2.500 + ₡225 = ₡2.725$$

### Tabla de Amortización

| Periodo | Cuota | Interés | Amortización | Saldo |
|---|---|---|---|---|
| o | ₡300 | ₡300 | o | ₡10.000 |
| 1 | ₡2.275 | ₡225 | ₡2.500 | ₡7.500 |
| 2 | ₡2.650 | ₡150 | ₡2.500 | ₡5.000 |
| 3 | ₡2.575 | ₡75 | ₡2.500 | ₡2.500 |
| 4 | ₡2.500 | **0** | ₡2.500 | o |

### Respuesta.

R/. Una persona que recibe un crédito por ₡10.000 a una tasa de interés del 3% TA, con plazo de 1 año y cuya restitución del capital se efectuará en 4 cuotas iguales cada trimestre, debe cancelar cuotas de ₡300, ₡2.725, ₡2.650, ₡2.575 y ₡2.500 La tabla de amortización está descrita atrás.

### AMORTIZACIÓN GRADUAL O CON CUOTA CONSTANTE (ANUALIDAD)

En este sistema conocido también como de cuota fija, los pagos configuran una anualidad o serie uniforme vista anteriormente. Es un sistema muy utilizado en créditos comerciales e hipotecarios y tiene la particularidad que desde el inicio efectúa abonos a capital. Para la realización de la tabla de amortización, se calcula el pago periódico (R=-$C_j$=C) como cualquier anualidad, y a partir de allí se aplican las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{A_j = C - S_{j-1} i} \quad (7.7) \qquad \boxed{S_j = S_{j-1}(1+i) - C} \quad (7.8)$$

*Ejemplo 7.9* Un vehículo que tiene un valor de contado de ₡20.000 se financia con una cuota inicial equivalente al 10% y el saldo a 6 cuotas mensuales iguales. Si la tasa de interés que se cobra es del 2,5%, calcule el valor de las cuotas y construya la tabla de amortización.

**Identificación de variables.**

***P1=*** ₡20.000;
***P=*** ₡18.000;
***n=*** 6;
***i=*** 2,5% MV;
***R=*** C=?;
***Aj=*** ?;
***Sj=*** ?;

**Selección de fórmulas.**

Se utilizarán las ecuaciones: (5.4)

$$R = P\left[\frac{i(1+i)n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

(7.7)

$$A_j = C - S_{j-1} i$$

y (7.8)

$$S_j = S_{j-1}(1+i) - C$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$R = P\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$=C=₡18.000\left[\frac{0,025(1+0,025)^6}{(1+0,025)^6-1)}\right]= ₡3.267,9;$$

$$S_0=P=₡18.000;$$

$$A_j=C-S_{j-1}i \rightarrow A_1=₡3.267,9-₡18.000*0,025=₡2.817,9;$$

$$S_j=S_{j-1}(1+i)-C\rightarrow S_1=S_0(1+i)-C=₡18.000(1+0,025)-₡3.267,9 = ₡15.182,1$$

### Tabla de Amortización

| *Periodo* | *Cuota* | *Interés* | *Amortización* | *Saldo* |
|---|---|---|---|---|
| *o* | *₡2.000* | *0* | *₡2.000* | *₡18.000* |
| *1* | *₡3.267,9* | *₡450* | *₡2.817,9* | *₡15.182,1* |
| *2* | *₡3.267,9* | *₡379,55* | *₡2.888,35* | *₡12.293,75* |
| *3* | *₡3.267,9* | *₡307,34* | *₡2.960,56* | *₡9.333,19* |
| *4* | *₡3.267,9* | *₡233,33* | *₡3.034,57* | *₡6.298,62* |
| *5* | *₡3.267,9* | *₡157,47* | *₡3.110,43* | *₡3.188,19* |
| *6* | *₡3.267,9* | *₡79,71* | *₡3.188,18* | *0* |

### Respuesta.

R/. Un vehículo que tiene una valor de contado de ₡20.000 y se financia al 2,5% mensual con una cuota inicial equivalente al 10%, registra 6 cuotas mensuales iguales por valor de ₡3.267,9, y su tabla de amortización se describe arriba.

#### AMORTIZACIÓN CON CUOTA VARIABLE LINEALMENTE (GRADIENTE ARITMÉTICO)

En este sistema, las cuotas configuran un gradiente aritmético, donde cada una aumenta periodo a periodo en una cantidad fija (G). Este sistema es poco usual en los sistemas financieros. Sin embargo, resulta factible en las negociaciones financieras y justifica su análisis. Para la realización de la tabla de amortización, se calcula cada cuota a partir de la primera ($K=C_1$) y posteriormente se aplican las ecuaciones (7.7) y (7.8) vistas arriba.

*Ejemplo 7.10* Una deuda por valor de ₡10.000 a una tasa del 2,5% MV se cancelará mediante 6 cuotas mensuales que crecen ₡10 cada mes. Calcule el valor de las cuotas y construya la tabla de amortización.

**Identificación de variables.**

**P=** ₡10.000;
**n=** 6;
**i=** 2,5% MV;
**G=** ₡10;
**K=** C1=?;
**Aj=** ?;
**Sj=** ?;

**Selección de fórmulas.**

Se utilizarán las ecuaciones: (6.1)

$$P= \frac{[[K + G/i]\ (1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n}$$

(7.7)

$$A_j=C_j-S_{j-1}i$$

y (7.8)

$$S_j=S_{j-1}\ (1+i)-C$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P= \frac{[[K + G/i]\ (1+i)^n-1]-Gn}{i(1+i)^n}$$

$$\rightarrow ₡10.000= \frac{C_1+₡10/0,025][(1+0,025)^6-1]-₡10*6}{0,025(1+0,025)^6} \rightarrow C_1$$

$$=₡1.791,22;$$

$$S_0=P=₡10.000;$$

$$A_j=C_j-S_{j-1}i \rightarrow A_1=₡1.791,22-₡10.000*0,025=₡1.541,22;$$

$$S_j=S_{j-1}(1+i)-C_j \rightarrow S_1=S_0(1+i)-C_1=$$
$$₡10.000(1+0,025)-₡1.791,22=₡8.458,78$$

### Tabla de Amortización

| *Periodo* | *Cuota* | *Interés* | *Amortización* | *Saldo* |
|---|---|---|---|---|
| *o* | *0* | *0* | *0* | *₡10.000* |
| *1* | *₡1.791,22* | *₡250* | *₡1.541,22* | *₡8.458,78* |
| *2* | *₡1.801,22* | *₡211,47* | *₡1.589,75* | *₡6.869,03* |
| *3* | *₡1.811,22* | *₡171,72* | *₡1.639,49* | *₡5.229,54* |
| *4* | *₡1.821,22* | *₡130,74* | *₡1.690,48* | *₡3.539,06* |
| *5* | *₡1.831,22* | *₡88,48* | *₡1.742,75* | *₡1.796,31* |
| *6* | *₡1.841,22* | *₡44,91* | *₡1.796,31* | *0* |

### Respuesta.

R/. Una deuda por valor de ₡10.000 que se financia al 2,5% mensual mediante 6 cuotas mensuales que crecen ₡10 cada mes, presenta una cuota inicial por valor de ₡1.791,22 , y su tabla de amortización se describe arriba.

#### AMORTIZACIÓN CON CUOTA VARIABLE EXPONENCIALMENTE (GRADIENTE GEOMÉTRICO)

En este sistema, las cuotas configuran un gradiente geométrico, donde cada una aumenta periodo a periodo en un porcentaje (1+g). Cuando el plazo del crédito es muy largo, las primeras cuotas son bajas en comparación con el costo financiero lo que implica la capitalización de intereses. Este sistema se aplicó en lo que se conoció como el UPAC (Unidad de Poder Adquisitivo Constante) para la financiación de viviendas en Colombia y otros países del mundo. Para la realización de la tabla de amortización, se calcula cada cuota a partir de la primera (K=C1) y posteriormente se aplican las ecuaciones (7.5) y (7.6) vistas anteriormente.

*Ejemplo 7.11* Una deuda por valor de ₡10.000 a una tasa del 2% MV se cancelará mediante 6 cuotas mensuales que crecen 1% cada mes. Calcule el valor de las cuotas y construya la tabla de amortización.

**Identificación de variables.**

***P=*** ₡10.000;
***n=*** 6;
***i=*** 2% MV;
***g=*** 1%;
***K=*** C1=?;
***Aj=*** ?;
***Sj=*** ?;

**Selección de fórmulas.**

Se utilizarán las ecuaciones: (6.9)

$$P=K\left[\frac{(1+g)^n\,(1+i)^n}{(g-i)(1+i)^n}\right] \quad Si\ g \neq i$$

si g≠i; (7.7)

$$A_j= C_j-S_{j-1}i$$

y (7.8)

$$S_j=S_{j-1}\,(1+i)-C$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P=K\left[\frac{(1+g)^n\,(1+i)^n}{(g-i)(1+i)^n}\right]$$

$$\rightarrow ₡10.000=C_1\left[\frac{(1+0{,}01)^6-(1+0{,}02)^6}{(0{,}01-0{,}02)\,(1+0{,}02)^6}\right]\rightarrow C_1=$$

***₡1.742,15;***

$$S_0=P=₡10.000;$$

$$A_j=C_j-S_{j-1}i \rightarrow A_1=₡1.742{,}15-₡10.000*0{,}02$$

$$=₡1.542{,}15$$

$$S_j=S_{j-1}\,(1+i)-C_j$$

$\rightarrow S_1 = S_0\,(1+i) - C_1 = ₡10.000(1+0{,}02) - ₡1.742{,}15$
$= ₡8.457{,}85$

### Tabla de Amortización

| *Periodo* | *Cuota* | *Interés* | *Amortización* | *Saldo* |
|---|---|---|---|---|
| *o* | *0* | *0* | *0* | *₡10.000* |
| *1* | *₡1.742,15* | *₡200* | *₡1.542,15* | *₡8.457,85* |
| *2* | *₡1.759,57* | *₡169,16* | *₡1.590,41* | *₡6.867,44* |
| *3* | *₡1.777,17* | *₡137,35* | *₡1.639,82* | *₡5.227,62* |
| *4* | *₡1.794,94* | *₡104,55* | *₡1.690,39* | *₡3.537,23* |
| *5* | *₡1.812,88* | *₡70,74* | *₡1.742,14* | *₡1.795,10* |
| *6* | *₡1.831,01* | *₡35,90* | *₡1.795,10* | *0* |

### Respuesta.

R/. Una deuda por valor de ₡10.000 que se financia al 2% mensual mediante 6 cuotas mensuales que crecen 1% cada mes, presenta una cuota inicial por valor de ₡1.742,15 , y su tabla de amortización se describe arriba.

## AMORTIZACIÓN CON CUOTA ESCALONADA (GRADIENTE ESCALONADO)

En este sistema, las cuotas configuran un gradiente escalonado, que combina cuotas fijas mensuales durante un año, que crecen aritmética o geométricamente en los años posteriores. Para la realización de la tabla de amortización, se calcula cada cuota a partir de la primera ($R=C_1$) y posteriormente se aplican las ecuaciones (7.5) y (7.6) vistas anteriormente.

*Ejemplo 7.12* Una propiedad por valor de ₡30.000 se financia con una tasa del 3% mensual a dos años, con cuotas mensuales iguales que crecen al final del año un 10%. Calcule el valor de las cuotas y construya la tabla de amortización (meza, 2004).

### Identificación de variables.

***P=*** ₡30.000;
***n=*** 24;
***m=*** 12;
***t=*** 2;

***i=*** 3% MV;
***r*=*** 42,58% EA;
***g=*** 10%;
***R=*** C1=?;
***Aj=*** ?;
***Sj=*** ?;

### Selección de fórmulas.

Se utilizarán las ecuaciones: (6.18)

$$P=R\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^t-(1+r^*)^t}{(g-r^*)(1+r^*)^t}\right] \quad Si\ g \neq i$$

si g≠i ; (7.7)

$$A_j=C_j-S_{j-1}i$$

y (7.8)

$$S_j=S_{j-1}(1+i)-C_j$$

### Aplicación de fórmulas.

$$P=R\left[\frac{(1+i)^m-1}{i}\right]\left[\frac{(1+g)^t-(1+r^*)^t}{(g-r^*)(1+r^*)^t}\right]$$

$$\rightarrow ₡30.000=C_1\left[\frac{(1+0,03)^{12}-1}{0,03}\right]\left[\frac{(1+0,1)^2-(1+0,4258)^2)}{(0,1-0,4258)\ (1,4258)^2}\right]$$

$$\rightarrow C_1=₡1.701,36;$$

Este es el valor de las cuotas durante el primer año, para el segundo año se cancelarán cuotas por ₡1.701,36*1,10 =₡1.871,49.

$$S_0=P=₡30.000;$$

$$A_j=C_j-S_{j-1}i \rightarrow A_1=₡1.701,36-₡30.000*0,03=₡801,36;$$

$$S_j=S_{j-1}(1+i)-C_j \rightarrow S_1=S_0(1+i)-C_1=$$

***₡30.000(1+0,03)-₡1.701,36=₡29.198,64***

### Tabla de Amortización

| *Periodo* | *Cuota* | *Interés* | *Amortización* | *Saldo* |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 30000 |
| 1 | 1701,36 | 900,00 | 801,36 | 29198,64 |
| 2 | 1701,36 | 875,96 | 825,40 | 28373,25 |
| 3 | 1701,36 | 851,20 | 850,16 | 27523,09 |
| 4 | 1701,36 | 825,69 | 875,66 | 26647,43 |
| 5 | 1701,36 | 799,42 | 901,93 | 25745,50 |
| 6 | 1701,36 | 772,36 | 928,99 | 24816,51 |
| 7 | 1701,36 | 744,50 | 956,86 | 23859,65 |
| 8 | 1701,36 | 715,79 | 985,57 | 22874,08 |
| 9 | 1701,36 | 686,22 | 1013,13 | 21858,95 |
| 10 | 1701,36 | 655,77 | 1045,59 | 20813,36 |
| 11 | 1701,36 | 624,40 | 1076,95 | 19736,41 |
| 12 | 1701,36 | 592,09 | 1109,26 | 18627,14 |
| 13 | 1871,49 | 558,81 | 1312,68 | 17314,47 |
| 14 | 1871,49 | 519,43 | 1352,06 | 15962,41 |
| 15 | 1871,49 | 478,87 | 1392,62 | 14569,79 |
| 16 | 1871,49 | 437,09 | 1434,40 | 13135,39 |
| 17 | 1871,49 | 394,06 | 1477,43 | 11657,96 |
| 18 | 1871,49 | 349,74 | 1521,75 | 10136,21 |
| 19 | 1871,49 | 304,09 | 1567,40 | 8568,81 |
| 20 | 1871,49 | 257,06 | 1614,43 | 6954,38 |
| 21 | 1871,49 | 208,63 | 1662,86 | 5291,52 |
| 22 | 1871,49 | 158,75 | 1712,75 | 3578,78 |
| 23 | 1871,49 | 107,36 | 1764,13 | 1814,65 |
| 24 | 1871,49 | 54,44 | 1814,65 | 0,00 |

### Respuesta.

R/. Una propiedad por valor de ₡30.000 que se financia con una tasa del 3% mensual a dos años, con cuotas mensuales iguales que crecen al final del año un 10%, presenta una cuota uniforme por valor de ₡1.701,36 para el primer año, y por valor de ₡1.871,49 para el segundo año , y su tabla de amortización se describe arriba.

### AMORTIZACIONES ESPECIALES

Los tipos de amortización solo son superados por la creatividad de acreedores y deudores a la hora de establecer la negociación financiera. Hasta ahora hemos visto tipos tradicionales de amortización respaldados con la teoría de ingeniería económica vista. Sin embargo, para aquellas situaciones especiales que involucran cuotas extraordinarias, periodos de gracia, pagos anticipados o cualquier otra excepcionalidad, consideramos que el texto brinda los elementos necesarios para que el lector pueda afrontar con toda serenidad este tipo de situaciones. Dos temas que se vuelven importantes en estos casos son las ecuaciones de valor y los diagramas de tiempo, vistos ampliamente en el texto.

*Ejemplo 7.13* Un vehículo que tiene un valor de contado de ₡20.000 se piensa financiar de la siguiente manera: una cuota inicial equivalente al 10% y el saldo a 12 cuotas mensuales iguales a partir del quinto mes, con una tasa de interés del 3%. El interesado en la compra del vehículo solo tiene capacidad para cancelar ₡1.500 mensuales y 2 cuotas extraordinarias en los meses 6 y 12 después de pagar la primera cuota inclusive. Calcule el valor de las cuotas extraordinarias y construya la tabla de amortización.

**Identificación de variables.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***P1=*** | ₡20.000; | ***n2=*** | 12; |
| ***P=*** | ₡18.000; | ***i=*** | 3% MV; |
| ***P'=*** | ₡20.259,16; | ***R=*** | C=₡1.500; |
| ***n=*** | 12; | ***X=*** | ?; |
| ***n'=*** | 4; | ***Aj=*** | ?; |
| ***n1=*** | 6; | ***Sj=*** | ?; |

**Selección de fórmulas.**

Se utilizarán las ecuaciones: (4.5)

$$P=\frac{F}{(1+i)^n}$$

(5.13)

$$P'=P(1+i)^{n'}=R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$$

(7.7)

$$A_j=C_j-S_{j-1}i$$

y (7.8)

$$S_j=S_{j-1}(1+i)-C$$

### Aplicación de fórmulas.

$$P' = P(1+i)^{n'} = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right]$$

$$\rightarrow P' = R\left[\frac{(1+i)^n-1}{i(1+i)^n}\right] + \frac{X}{(1+i)^{n1}} + \frac{X}{(1+i)^{n2}} \rightarrow$$

$$₡20.259,16 = ₡1.500\left[\frac{(1+0,03)^{12}-1}{0,03(1+0,03)^{12}}\right] + \frac{X}{(1+0,03)^{6}} + \frac{X}{(1+0,03)^{12}}$$

$$\rightarrow X = ₡3.462,39;$$

$$S_4 = P' = ₡20.259,16;$$

$$A_j = C - S_{j-1}\, i \rightarrow A_5 = ₡1.500 - ₡20.259,16*0,03 = ₡892,23;$$

$$S_j = S_{j-1}(1+i) - C \rightarrow S_5 = S_4(1+i) - C =$$

$$₡20.259,16(1+0,03) - ₡1.500 = ₡19.366,93$$

### Tabla de Amortización

| *Periodo* | *Cuota* | *Interés* | *Amortización* | *Saldo* |
|---|---|---|---|---|
| *0* | *2000* | *0.00* | *0.00* | *18000.00* |
| *1* | | | | *18540.00* |
| *2* | | | | *19096.20* |
| *3* | | | | *19669.09* |
| *4* | *.00* | *0.00* | *0.00* | *20259.16* |
| *5* | *1500.00* | *607.77* | *892.23* | *19366.93* |
| *6* | *1500.00* | *581.01* | *918.99* | *18447.94* |
| *7* | *1500.00* | *553.44* | *946.56* | *17501.38* |
| *8* | *1500.00* | *525.04* | *974.96* | *16526.42* |
| *9* | *1500.00* | *495.79* | *1004.21* | *15522.21* |
| *10* | *4962.39* | *465.67* | *4496.72* | *11025.49* |
| *11* | *1500.00* | *330.76* | *1169.24* | *9856.25* |
| *12* | *1500.00* | *295.69* | *1204,31* | *8651.94* |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *13* | *1500.00* | *259.56* | *1240.44* | *7411.50* |
| *14* | *1500.00* | *222.35* | *1277.65* | *6133.85* |
| *15* | *1500.00* | *184.02* | *1315.98* | *4817.86* |
| *16* | *4962.39* | *144.54* | *4817.85* | *0.00* |

**RESPUESTA.**

R/. Un vehículo que tiene un valor de contado de ₡20.000 y que se piensa financiar de la siguiente manera: una cuota inicial equivalente al 10% y el saldo a 12 cuotas mensuales iguales a partir del quinto mes, con una tasa de interés del 3%. Si el interesado en la compra del vehículo solo tiene capacidad para cancelar ₡1.500 mensuales y 2 cuotas extraordinarias en los meses 6 y 12 después de pagar la primera cuota inclusive, el valor de las cuotas extraordinarias es ₡3.462,39 y su tabla de amortización se describe arriba.

## RESUMEN CAPÍTULO 7: Saldos y Amortizaciones

En este capítulo se analizó lo que acontece con una obligación o negociación financiera en cualquier momento a lo largo de su término, es decir, se estudió los saldos insolutos de deuda y el proceso de amortización que entraña dicha obligación. Este capítulo complementa las ecuaciones de valor vistas en capítulos anteriores donde se efectúan cambios en las condiciones de una negociación, resultando muy útil en el proceso de toma de decisiones financieras de personas, hogares y empresas.

En este capítulo se han utilizado las siguientes ecuaciones:

$$S_{n1} = R\left[\frac{(1+i)^{n1}-1}{i(1+i)\ n1}\right] \quad (7.1)$$

$$A = \frac{P}{n} \quad (7.3)$$

$$S_{n2} = P(1+i)^{n2} - R\left[\frac{(1+i)^{n2}-1}{i}\right] \quad (7.2)$$

$$S_j = P\left(1 - \frac{j}{n}\right) \quad (7.4)$$

$\boxed{C_j = A + S_{j-1}\, i}$ *Cuota vencida* (7.5) $\boxed{A_j = C - S_{j-1}\, i}$ (7.7)

$\boxed{C_j = A + S_j\, i}$ *Cuota anticipada* (7.6) $\boxed{S_j = S_{j-1}(1+i) - C}$ (7.8)

Dónde: $S_{n1}=S_{n2}$=Saldos; A=Amortización o abono a Capital Fijo; $S_j$=Saldo en el periodo j; $S_{j-1}$= Saldo en el periodo anterior; $C_j$=Valor de la Cuota en el periodo j; C=R=Valor de Cuota Fija; $A_j$= Amortización o abono a Capital en el periodo j; P= Valor Presente; F= Valor Futuro; i= Tasa de interés por periodo; n=número total de periodos; j= número de periodo. Las ecuaciones 7.1 y 7.2 corresponden a Saldos y las ecuaciones 7.3 a 7.8 corresponden a Amortización.

## EJERCICIOS CAPÍTULO 7: Saldos y Amortizaciones

1. Hallar el valor de la cuota de amortización de una deuda de ₡1.000 la cual va a ser cancelada en las siguientes condiciones:

   **a.** Número de pagos ordinarios: 4
   **b.** Número de periodos de gracia muertos (sin pago de capital ni intereses): 2
   **c.** Tasa del 10% efectiva para el periodo
   **d.** Elabore la tabla de amortización

2. Resolver el problema anterior suponiendo que el plazo de gracia es de cuota reducida (plazo en el que solo se pagan los intereses). Elabore la tabla de amortización.

3. Una deuda de ₡2.000.000 esta siendo amortizado mediante pagos mensuales uniformes, durante 15 años, con un interés del 27,6% MV. Determinar qué parte del pago número 64 se utiliza para pagar intereses y cuánto a amortización.

4. Para un activo que tiene un valor de contado de ₡160.000 y que se amortiza con cuotas iguales mensuales, se sabe que el saldo al final del séptimo mes es de

₡1042.000. Sabiendo que se cobra un interés del 26% MV, ¿cuál es la cuota que se pagó en dicho mes?

5. Una persona invierte hoy ₡2.000.000 en una entidad financiera, donde cada mes retira la tercera parte de los intereses devengados en ese mes; a su vez, la entidad le descuenta mensualmente ₡15.000 por concepto de administración y seguros. Si la entidad paga un interés del 33% anual durante los tres primeros años y del 38% anual de ahí en adelante, determinar el saldo del inversionista al cabo de cinco años. (utilizar una hoja de cálculo).

6. Una persona tiene una obligación para pagar en 15 años con cuotas que crecen el 2% cada mes y primera cuota de ₡50. al final del quinto año decide cambiar el sistema de pagos por cuotas mensuales iguales y terminar dos años antes de lo previsto inicialmente. Hallar el valor de estas nuevas cuotas sabiendo que el interés sobre el saldo es del 2% mensual durante los tres primeros años y del 3% mensual para los 12 años siguientes.

7. Una empresa recibe hoy ₡4.500 en calidad de préstamo por un banco comercial. Esta deuda debe pagarse en cuotas mensuales iguales durante cuatro años. La empresa a su vez obtiene unas utilidades mensuales de ₡235 por la venta de sus productos; con estas utilidades se paga cada mes la cuota del banco y el resto se deposita en una cuenta que paga un interés del 2,5% mensual. Hallar los saldos en el banco y en la cuenta de ahorros dentro de tres años, sabiendo que el banco cobra un interés por el préstamo del 39% anual.

8. Un activo de contado vale ₡1,500. Se adquiere a crédito para ser pagado así: cuota inicial del 35% del valor de contado y al resto financiado en 24 cuotas mensuales iguales; la primera cuota debe pagarse dentro de cuatro meses con un interés del 3% mensual. Una vez pagada la cuota 15 se solicita que el saldo sea refinanciado en 20 cuotas mensuales iguales y una tasa de interés, para la refinanciación, del 3,5% mensual. Hallar el valor de estas nuevas cuotas.

9. Una deuda de un apartamento estaba pactada inicialmente para ser amortizada en cuotas mensuales de ₡550 durante el primer año y de ahí en adelante creciendo anualmente el 8% pero dentro de cada año permaneciendo constantes, a una tasa de interés del 12% N.M.V. Si al final del séptimo año se desea refinanciar la deuda y continuar de ahí en adelante cancelando una cuota fija pero con tasa variable desde ese momento hasta el final, equivalente al 1,1% E.M. durante los primeros 3 años de la refinanciación y del 1,2% E.M. de ahí hasta el final, cuál debe ser el valor de dicha cuota sabiendo que el plazo total de la operación financiera fue de 15 años.

10. Un buldózer por valor de ₡94.500 se adquiere financiado a ocho años en cuotas mensuales que aumentan el 2% cada mes, y una tasa de interés del 2,60% mensual durante los tres primeros años y del 2,80% mensual de allí en adelante. Al cabo de cuatro años y medio se hace un abono adicional (no pactado) de ₡22.000 y a partir de ese momento, el saldo se refinancia a cinco años y medio con 6 meses de periodo de gracia muerto y cuotas trimestrales que aumentan una cantidad igual a ₡45. Hallar el valor de la primera de esas nuevas cuotas si para la refinanciación se toma una tasa del 9,20% trimestral.

11. El deudor de un crédito recibió la suma de ₡70.000 al 19% E.A. de interés, para cancelarla con cuotas mensuales que aumenten en el 1% cada mes. Al cabo de dos años el saldo es la mitad del crédito original. Se solicita:

    **a.** El plazo del préstamo
    **b.** El valor de la cuota número 18.
    **c.** La composición de la cuota número 25.

12. Una vivienda que cuesta ₡50.000 se financió a una tasa de interés del 1,5% mensual con un plazo de 20 años, con cuotas mensuales iguales que aumentan 10% cada año. Calcular el valor de las cuotas del tercer año y el saldo al final del décimo año.

# 8. TASAS ESPECIALES DE INTERÉS

## PREÁMBULO

Hasta ahora se han analizado situaciones financieras en escenarios de estabilidad económica, al interior de las fronteras nacionales y sin gobierno. Es decir, se ha estudiado casos en ausencia de variación de precios (inflación), únicamente entre nacionales (sin comercio exterior) y sin cargas impositivas.

Evidentemente, los capítulos precedentes siembran las bases para una interpretación y manejo eficiente de las técnicas de ingeniería económica. En adelante, se analizarán situaciones un tanto más realistas, vinculando los fenómenos económicos que afectan los resultados financieros de personas, hogares y empresas.

# 8.1. Definiciones

Para este capítulo se hace necesario revisar los conceptos de infla ción, tipo de cambio e impuest os, que hacen parte de la realidad económica a la que personas, hogares y empresas se enfrentan día a día en sus decisiones y transacciones financieras. La vinculación de estos conceptos complementa y refuerza el eficiente manejo que el lector debe tener en cuenta a la hora de solucionar los problemas de la ingeniería económica.

La **INFLACIÓN,** vista en el capítulo 1, se refiere al crecimiento generalizado de los precios de bienes y servicios, que hace que el dinero pierda día a día poder adquisitivo o poder de compra. La inflación es una importante variable económica que tiene efectos impredecibles en las inversiones. Si un inversionista intenta contrarrestar la tasa de inflación anual con un incremento en los precios puede afectar la demanda del producto. Si un inversionista eleva sus de precios por menos de la tasa de inflación, los beneficios caerán. Así mismo, la inflación afecta el coste del financiamiento. En general, así como se elevan las tasas de inflación se eleva el costo de capital. Por tanto, la ingeniería económica en su análisis de inversiones bajo contextos más realistas debe tomar en cuenta los efectos de la inflación.

El **TIPO DE CAMBIO**, es el precio que se paga en moneda nacional por cada una de las monedas extranjeras. En general, las monedas extranjeras reciben el nombre de divisas, por tanto, el tipo de cambio establece la relación entre la moneda nacional y las divisas de países con quienes entabla relaciones comerciales. Aunque existen muchas divisas en el mundo, el consenso internacional es comparar sus monedas nacionales con el dólar. En nuestro caso trabajaremos la relación o tipo de cambio entre unidades monetarias (₡) y dólares ($). Cuando una moneda nacional pierde valor respecto a una divisa, diremos que sufre un proceso de *devaluación,* y si presenta lo contrario, diremos que dicha moneda nacional se está revaluando.

Los Impuestos, por su parte, representan el principal ingreso que tienen los gobiernos para financiar sus actividades. Para generalizar, diremos que los impuestos afectan a personas, hogares y empresas en su cotidianidad y que el impuesto más extendido es el de la renta, que grava utilidades e ingresos en un porcentaje fijo cada año.

# 8.2. Tasas Especiales

#### TASA DE INTERÉS CONTINUO ($IK$)

Habrá notado el lector que a medida que el número de capitalizaciones ($m$) durante un año de una tasa nominal ($r$) se hace más grande, la tasa efectiva ($r^*$) capitalizable anualmente, también aumenta. En estas condiciones, se va obteniendo un monto cada vez mayor, a medida que *m* tiende a infinito. Mediante el uso de las matemáticas se puede demostrar que existe un punto más allá del cual la tasa efectiva de interés ya no aumenta, sin importar la frecuencia con que se capitalice el interés. Esta tasa efectiva, la denominaremos tasa de interés continuo (*ik*).

De conformidad con las ecuaciones (4.1) $n=t*m$ y (4.2) $i=r/m$ , al pretender hallar el valor futuro o monto de una cuantía invertida a una tasa de interés (*r*) capitalizable continuamente *(m→∞)*, nos encontramos con que *ik=0, y n=*∞. Ante esta situación, se recomienda encontrar la tasa efectiva anual equivalente (r*) a esta capitalización continua (*ik*) y seguir con la aplicación de ecuaciones aquí estudiadas.

Para utilizar la ecuación (4.4) $F=P\,(1+i)^n$ , se requiere ajustar el número de periodos (n) y la tasa de interés por periodo (i) por lo arriba expuesto. En este caso se trabaja con el tiempo en años (t) y la tasa de interés efectiva anual (r*), con lo cual se tiene:

$$\boxed{F=P\,(1+i_k)^t} \quad (8.1)$$

Para la utilización de la ecuación (8.1) se debe hallar el límite de la tasa efectiva equivalente a la capitalización continua cuando m tiende a infinito, es decir, a partir de la ecuación (4.8) $r^*=(1+r/(m)^m-1$ , se tiene:

$$i_k=r^*=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1,$$

pero de acuerdo con la identidad de Euler:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e,$$

tenemos: $$i_k=r^*=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1$$

reacomodando:

$$i_k=r^*=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{r}{m}\frac{(1/r)}{(1/r)}\right)^{m(1/r)}-1 \to i_k=r^*=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{(m/r)}\right)^{(mr/r)r}-1 \to$$

$$\boxed{i_k=e^r-1} \quad (8.2)$$

$$\boxed{r^* = e^r - 1} \quad (8.3)$$

A partir de la ecuación (8.1) también tenemos:

$$F = P\,(1 + i_k)^t \rightarrow F = P\,(1 + e^r - 1)^t \rightarrow F = P\,(e^r)^t$$

de donde:

$$\boxed{F = P\,e^{rt}} \quad (8.4)$$

Para efectos prácticos el lector podrá verificar que de las ecuaciones anteriores se pueden también obtener las siguientes:

$$\boxed{r = \ln(r^* + 1)} \quad (8.5) \qquad \boxed{P = \frac{F}{e^{rt}}} \quad (8.6)$$

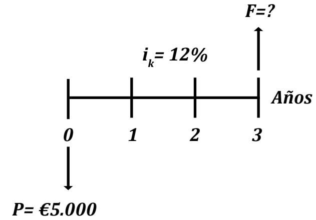
$$\boxed{r = \frac{\ln(F/P)}{t}} \quad (8.7) \qquad \boxed{t = \frac{\ln(F/P)}{r}} \quad (8.8)$$

*Ejemplo 8.1* Encuentre el valor futuro de ₡5.000 invertidos al 12% capitalizable continuamente durante 3 años.

**Identificación de variables.**

| | |
|---|---|
| ***P=*** | ₡5.000; |
| ***r=*** | 12% continuo; |
| ***t=*** | 3 años; |
| ***F=*** | ? |

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**



**SELECCIÓN DE FÓRMULAS**

Se utilizará la ecuación (8.4) $F = P\,e^{rt}$

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

$$F = P\,e^{rt} \rightarrow: F = ₡5.000\,e^{0{,}12*3} = ₡7.166{,}647$$

**RESPUESTA.**

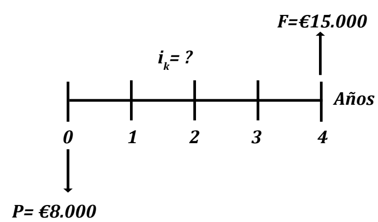
R/. El valor futuro de ₡5.000 invertidos al 12% capitalizable continuamente durante 3 años es ₡7.166,647.

*Ejemplo 8.2* Que tasa capitalizable continuamente, permite que ₡8.000 se conviertan en ₡15.000, durante 4 años.

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES.**

***P=*** ₡8.000;
***F=*** ₡15.000;
***t=*** 4 años;
***r=*** ?

**ELABORACIÓN DIAGRAMA DE LÍNEAS DE TIEMPO.**




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS**

Se utilizará la ecuación (8.7)

$$r = \frac{\ln\left(F/P\right)}{t}$$

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

$$r = \frac{\ln(₡15.000/₡8.000)}{4} = 15{,}715\%$$

**Respuesta.**

R/. Una tasa del 15,715% capitalizable continuamente, permite que ₡8.000 se conviertan en ₡15.000, durante 4 años.

### TASA DE INFLACIÓN ( *If* )

La tasa de inflación se define como la medida porcentual del incremento continuo y generalizado de los precios de bienes y servicios en un país, o simplemente, representa la pérdida porcentual del poder adquisitivo del dinero. La tasa de inflación se calcula o se determina sobre un precio inmediatamente anterior, por tal motivo, opera como una tasa de interés compuesto, lo que permite calcular el costo futuro de un artículo mediante la fórmula vista del Valor Futuro. Así por ejemplo, si la tasa de inflación promedio mensual en 6 meses (n), en un año cualquiera es de 3% (*if*) y un artículo que al inicio del primer mes costaba ₡500 (P) tendrá un valor al final (F) del sexto mes equivalente a:

$$F=P\,(1+i_f)^n=₡500(1+0{,}03)^6=₡597{,}026$$

Para efectos prácticos se utilizará una tasa de inflación igual para los periodos en estudio al mismo estilo de las tasas de interés, pero en la realidad la inflación es distinta para cada mes y lo que se suele utilizar es una tasa de inflación promedio ponderada como si se estuviese trabajando con montos a tasas variables de interés y de tasas efectivas. En estos casos se suele utilizar la ecuación (4.8) de tasa efectiva de interés o la detallada a continuación:

$$\boxed{F=P(1+i_{f1})(1+i_{f2})(1+f_{f3})....(1+i_{fn})=P\prod_{m=1}^{n}(1+i_{fm})} \quad (8.9)$$

$$\boxed{P=\frac{F}{\prod_{m=1}^{n}(1+i_{fm})}} \quad (8.10)$$

Al valor futuro (F) que vincula la inflación en su cálculo se conoce como valor a **PRECIOS CORRIENTES O NOMINALES**. Al valor presente (P) una vez descontada la inflación (deflactación) se conoce como valor a **PRECIOS CONSTANTES O REALES**. Estos conceptos son importantes en ingeniería económica toda vez que a las personas les interesa conocer el valor adquisitivo que tiene el dinero (valor real) más que el valor nominal.

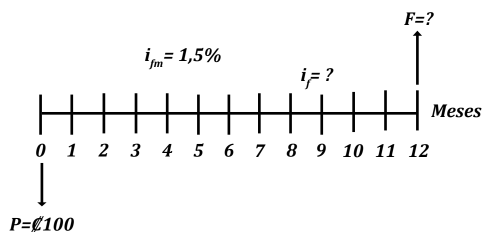
Para entender mejor, si usted presta ₡1.000 a un amigo con lo que podría comprar a precio de hoy determinada cantidad de bienes y servicios, y al cabo de un año usted recibe ₡1.200 pero por efecto de la inflación usted solo puede comprar una cantidad menor con esa cantidad, entonces usted ha perdido dinero pues lo que recibe tiene menor poder adquisitivo de lo que prestó. Considerar que obtuvo una ganancia de ₡200 comúnmente se conoce como **ILUSIÓN MONETARIA** (Meza, 2004).

*Ejemplo 8.3* La inflación del mes de enero en un año fue del 1,5%. Si esta tasa se mantiene constante los meses sucesivos, ¿Cuál es la tasa de inflación de todo el año? ¿Cuál es el valor en diciembre de un producto que en enero valía ₡100?

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES.**

***P=*** ₡100;
***$i_{fm}$=*** 1,5%;
***m=*** 12;
***n=*** 1;
***$i_f$=*** ?;
***F=*** ?

**ELABORACIÓN DIAGRAMA DE LÍNEAS DE TIEMPO.**




**SELECCIÓN DE FÓRMULAS**

Se utilizarán las ecuaciones (4.4)

$$F = P\,(1+i_f)^n$$

y (4.8)

$$if = (1+ifm)^m - 1$$

**APLICACIÓN DE FÓRMULAS.**

$$i_f=(1+i_{fm})^m-1=(1+0,015)^{12}-1= 19,562\%\ \text{anual}$$

$$F=P\,(1+i)^n=₡100\,(1+0,19562)^1= ₡119,562$$

### Respuesta.

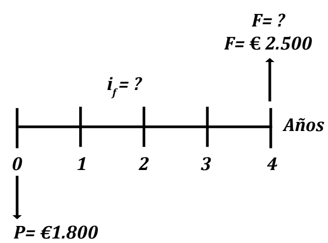
R/. La tasa de inflación anual para una tasa promedio mensual de 1,5% es de 19,562%. El valor a final de año o precios corrientes para un producto que en enero costaba ₡100, es de ₡119,562.

*Ejemplo 8.4* Una persona gana actualmente ₡2.500 mensuales y hace cuatro años se ganaba ₡1.800. Si la inflación de los 4 años fue respectivamente del 8%, 10,5%, 7,3% y 9%, ¿Cuál debería ser el sueldo actual? ¿En términos reales el sueldo ha aumentado o disminuido?

### Identificación de variables.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***P=*** | ₡1.800; | ***n=*** | 4; |
| ***if1=*** | 8%; | ***if=*** | ?; |
| ***if2=*** | 10,5%; | ***F'=*** | ₡2.500 |
| ***if3=*** | 7,3%; | ***F=*** | ? |
| ***if4=*** | 9%; | | |

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas

Se utilizarán las ecuaciones (8.9)

$$F = P\prod_{m=1}^{n}(1+i_{fm})$$

(8.10)

$$P = \frac{F}{\prod_{m=1}^{n}(1+i_{fm})}$$

y (4.4)

$$F = P\,(1+i_f)^n$$

### Aplicación de fórmulas.

$$F= P\prod_{m=1}^{n}(1+i_{fm})$$

$$=₡1.800(1+0,08)(1+0,105)(1+0,073)(1+0,09) =₡2.512,38$$

$$P=\frac{F}{\prod_{m=1}^{n}(1+i_{fm})}$$

$$=\frac{₡2.500}{(1+0,08)(1+0,105)(1+0,073)(1+0,09)}=₡1.791,13$$

Otra manera de llegar a resultados es encontrando la inflación promedio, y la valorización promedio del salario y ver cuál es más alto:

$F=P(1+i_f)^n$ de aquí ) $₡2.512,38 =₡1.800 (1+i_f)^4$ entonces $i_f=8,69\%$

$F=P(1+i)^n$ de aquí ) $₡2.500 =₡1.800 (1+i)^4$ entonces $i=8,6\%$

### Respuesta.

R/. El sueldo actual de esta persona debería ser ₡2.512,38. Por tanto, en términos reales su sueldo ha disminuido. La inflación es mayor que la valorización de su sueldo haciéndole perder poder adquisitivo.

## TASA DE DEVALUACIÓN (*id*)

De conformidad con lo planteado anteriormente, la devaluación es la pérdida del valor de la moneda de un país con respecto a una divisa o moneda extranjera. Esta devaluación se presenta por diversos motivos resultantes generalmente del comercio internacional entre países y por algunas características o coyunturas internas. En ausencia de distorsiones macroeconómicas una tasa de cambio de equilibrio representaría el costo de un producto en unidades monetarias (ejemplo ₡100) que en Estados Unidos cuesta $ 1 dólar. Con esto en mente, es fácil entender que la tasa de devaluación (*id*) está mediada por las tasas de inflación respectivas de los países en estudio, no con la resta aritmética entre ellas sino como producto de una operación un tanto más estructurada. Con el siguiente ejemplo quedará claro que la tasa de devaluación se puede obtener como se describe a continuación

$$i_d = \frac{i_{finit} - i_{fext}}{1+i_{fext}} \quad (8.11)$$

Donde: *id*: tasa de devaluación; *ifint*: tasa de inflación interna; *ifext*: tasa de inflación externa.

A partir de esta ecuación se podrá despejar cualquiera de las variables vinculadas. Con la obtención de esta tasa de devaluación se podrán aplicar las fórmulas de interés compuestos ya vistas donde el valor futuro (F) representaría el tipo de cambio a final de periodo ($T_{cn}$), el valor presente (P) representaría el tipo de cambio inicial ($T_{c0}$), y la tasa de interés por periodo ($i$) representaría la tasa de devaluación ($i_d$). Así las cosas:

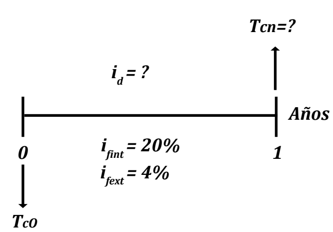
$$T_{cn} = T_{c0}\,( 1+i_d)^n \quad (8.12)$$

*Ejemplo 8.5* ¿Cuál será la tasa de devaluación entre nuestro país y Estados Unidos si al cabo de un año las inflaciones esperadas son respectivamente 20% y 4%?. Suponga una tasa de cambio de equilibrio inicial de ₡100.

**Identificación de variables.**

***Tc0=*** ₡100;
***ifint=*** 20%;
***ifext=*** 4%;
***n=*** 1;
***id=*** ?;
***Tcn=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas**

Se utilizarán las ecuaciones (8.11) ;

$$i_d = \frac{i_{finit} - i_{fext}}{1+i_{fext}}$$

y (8.12)

$$T_{cn} = T_{c0}\,(1+i_d)^n$$

### Aplicación de fórmulas.

$$i_d = \frac{i_{finit} - i_{fext}}{1+i_{fext}} = \frac{0{,}20-0{,}04}{1+0{,}04} = 0{,}1538 = 15{,}38\%\ \text{anual}$$

$$T_{cn} = T_{c0}\,(1+i_d)^n = ₡100\,(1+0{,}1538)^1 = ₡115{,}38$$

Otra manera de llegar al resultado es encontrando la valorización por inflación del producto en cada país y luego encontrar el tipo de cambio de equilibrio entre sus cocientes.

| | |
|---|---|
| Producto nuestro dentro de 1 año: | $=₡100\,(1+0{,}20)^1=₡120$ |
| Producto Americano dentro de 1 año: | $=\$1\,(1+0{,}04)^1=\$1{,}04$ |
| Paridad cambiaria dentro de un año: | $=\frac{₡120}{\$1{,}04}=₡115{,}38$ |

### Respuesta.

R/. Dentro de un año, la tasa de devaluación entre nuestro país y Estados Unidos si las inflaciones esperadas son respectivamente 20% y 4% y suponiendo una tasa de cambio de equilibrio inicial de ₡100 será de ₡115,38.

#### TASA DE IMPUESTOS (*it*)

La tasa de impuestos (*it*) es un porcentaje que recauda el Gobierno sobre las operaciones económicas de personas, hogares y empresas, para su propio sostenimiento y para la ejecución de obras y actividades que redunden en mayor bienestar de sus gobernados. Los impuestos constituyen la principal fuente de ingresos para los gobiernos de cualquier nivel y por ende las administraciones procuran su efectivo recaudo. En específico nos referimos al impuesto sobre la Renta que grava las utilidades e ingresos de personas, hogares y empresas en forma indistinta. Al final del periodo fiscal se grava las utilidades con el total del impuesto sobre las Rentas que generalmente oscila alrededor del 30% en los países, pero en periodos parciales suele utilizarse un anticipo de este impuesto conocido como Retención en la Fuente y que oscila alrededor del 7%.

Cuando los sujetos de gravamen obtienen rendimient os fin ancier os sobre sus inversiones, por ejemplo recibo de intereses, se los grava con la retención en la fuente ($i_t$=0,07). Así mismo, cuando ellos toman un crédito, los intereses que se pagan ($i_t$=0,3) son deducibles, como gast os fin ancier os, de la utilidad operativa (UO) permitiendo un menor pago de impuestos (T), lo que se traduce en que el gobierno asuma parte del costo de la deuda (Meza, 2004).

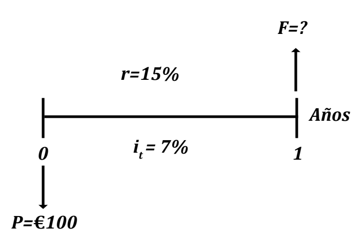
Como se aprecia, los impuestos actúan como si fuesen tasas de descuentos, tanto para inversionistas como para tomadores de créditos, pues reduce los rendimientos como el costo financiero respectivamente.

*Ejemplo 8.6* Una persona coloca ₡100 durante 90 días en un instrumento financiero que promete pagarle el 15% efectivo anual. Si la autoridad tributaria de su país descuenta un 7% como anticipo del impuesto a la Renta sobre los rendimientos financieros, ¿Qué valor termina recibiendo la persona por concepto de intereses y qué porcentaje representa sobre su inversión?

### Identificación de variables.

***P=*** ₡100;
***r*=*** 15%;
***m=*** 4%;
***n=*** 1;
***$i_t$=*** 7%;
***F=*** ?;
***$F_t$=*** F-T;
***T=*** (F-P)*it=valor del impuesto.

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas

Se utilizarán las ecuaciones (4.4)

$$F= P\,(1+i)^n$$

y (4.9)

$$i= \sqrt[m]{(1+r^*)}-1$$

**Aplicación de fórmulas.**

$i= \sqrt[m]{(1+r^*)}- 1= \sqrt[4]{(1+0,15)} - 1=3,56\%$ *trimestral*

$F=P\,(1+i)^n=₡100(1+0,0355580763416)^1=₡103,56$

$T=(F-P)*i_t=(₡103,56-₡100)*0,07=₡0,25$

$F_t=F-T=₡103,67- ₡0,25=₡103,31$

Rendimiento final $= (F_t-P)/P=3,31\%$

**Respuesta.**

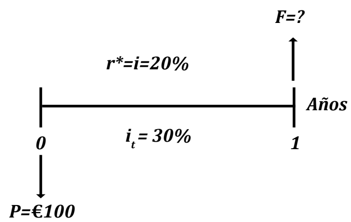
R/. Una persona que coloca ₡100 durante 90 días en un instrumento financiero que promete pagarle el 15% efectivo anual y si la autoridad tributaria de su país le descuenta un 7% como anticipo del impuesto a la Renta sobre los rendimientos financieros, termina recibiendo ₡3,31 por concepto de intereses que representan un 3,31% sobre su inversión.

*Ejemplo 8.7* Una empresa decide tomar un préstamo por ₡100 a pagar en un año y su banco le cobra una tasa del 20% efectivo anual. Si la autoridad tributaria de su país cobra el 30% por concepto del impuesto a la Renta sobre la utilidad operativa. Asuma una utilidad operativa de ₡50 y que el capital prestado se reembolsa al Banco al final del año. ¿Qué valor termina recibiendo la empresa por concepto de Utilidad una vez pagado el impuesto y qué porcentaje termina pagando sobre el crédito?

**Identificación de variables.**

$P=$ ₡100;
$i=$ 20%;
$n=$ 1;
$i_t=$ 30%;
$F=$ ?;
$F_t=$ F-T;
$T=$ (F-P)*it=valor del impuesto;
$UO=$ ₡50

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




### Selección de fórmulas

Se utilizarán las ecuaciones (4.4)

$$F= P\,(1+i)^n$$

### Aplicación de fórmulas.

$$F=P\,(1+i)^n=₡100(1+0{,}2)^1=₡120$$
$$T=(F-P)*i_t=(₡120-₡100)*0{,}3=₡6$$
$$F_t=F-T=₡120-₡6=₡114$$
Costo final $= (F_t-P)/P=14\%$

Otra manera de llevar a estos resultados y entender mejor el planteamiento es realizar el ejercicio y hallar la Utilidad Neta en el supuesto de que la empresa tome el crédito y en ausencia de éste:

| Concepto | Con deuda | Sin deuda |
|---|---|---|
| Utilidad Operativa (UO) | ₡50 | ₡50 |
| Intereses (P*i) | (₡20) | 0 |
| Utilidad Antes de Impuestos (UAI) | ₡30 | ₡50 |
| Impuesto ($i_t$ *UAI) | (₡9) | (₡15) |
| Utilidad Neta UT | ₡21 | ₡35 |

Como se observa, la empresa termina pagando por impuesto de Renta ₡15 al no contratar deuda, ₡6 por encima de lo que pagaría si la contratase (₡6=(P*i)*$i_t$). Así mismo, termina recibiendo ₡14 menos por concepto de Utilidad

Neta, valor que justamente es lo que termina pagando realmente por el crédito contratado (₡14=(P*i)-(P*i)*$i_t$). Este valor de ₡14 también resulta de la resta de Utilidades Netas en las dos situaciones.

**Respuesta.**

R/. Una empresa que decide tomar un préstamo por ₡100 a pagar en un año y su banco le cobra una tasa del 20% efectivo anual, y si la autoridad tributaria de su país cobra el 30% por concepto del impuesto a la Renta sobre la utilidad operativa termina pagando 14% efectivo anual por concepto de intereses. Al asumir una utilidad operativa de ₡50 y que el capital prestado se reembolsa al Banco al final del año, la empresa termina recibiendo ₡21 por concepto de Utilidad Neta.

## 8.3. Tasas Especiales o Compuestas

Entenderemos como tasas especiales o compuestas aquellas que vinculan para su cálculo dos o más tasas de interés, así lo hagan en condiciones diferentes pero guardando la unidad de tiempo. A continuación detallamos algunas:

### TASA NETA ($i_N$)

Hasta ahora lo que conocemos son las tasas efectivas, o rendimientos efectivos para el caso de los inversionistas o de costo efectivo (i) para el caso de los acreedores, en ausencia de inflación e impuestos. Sin embargo, la realidad obliga a vincular algunos fenómenos económicos a fin de obtener una mejor aproximación a ella. Entenderemos por tasa neta ($i_N$) aquella rentabilidad o costo efectivo (i) corregido por los impuestos ($i_t$). En los ejercicios 8.6 y 8.7 se puede seguir el siguiente razonamiento matemático a fin de obtener una formulación para la Tasa Neta:

$$i_N = \frac{F_t - P}{P} = \frac{F - T - P}{P} = \frac{F - (F-P)\, i_t - P}{P} = \frac{(F-P) - (F-P)\, i_t}{P}$$

$$i_N = \frac{(F-P)\,(1-i_t)}{P}$$ ,entonces

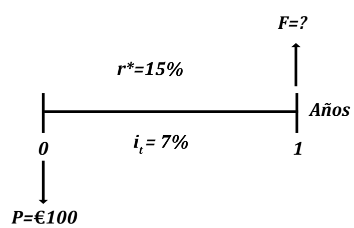
$$\boxed{i_N = i\,(1-i_t)} \quad (8.13)$$

*Ejemplo 8.8* Resuelva el ejercicio 8.6 aplicando la formula encontrada sobre tasa neta.

### Identificación de variables.

**P=** ₡100;
**r*=** 15%;
**m=** 4%;
**n=** 1;
**it=** 7%;
**F=** ?;
**Ft=** F-T;
**T=** (F-P)*it=valor del impuesto.

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas

Se utilizarán las ecuaciones: (4.9)

$$i = \sqrt[m]{(1+r^*)}-1$$

y (8.13)

$$i_N = i\,(1-i_t)$$

### Aplicación de fórmulas.

$$i = \sqrt[m]{(1+r^*)}-1=\sqrt[4]{(1+0,15)}-1=3,56\%$$ trimestral

$$i_N = i\,(1-i_t) =0,056(1-0,07)=3,31\%$$

**RESPUESTA.**

R/. Una persona que coloca ₡100 durante 90 días en un instrumento financiero que promete pagarle el 15% efectivo anual y si la autoridad tributaria de su país le descuenta un 7% como anticipo del impuesto a la Renta sobre los rendimientos financieros, termina recibiendo una rentabilidad neta del 3,31%.

### TASA REAL ($i_R$)

Entenderemos por tasa real ($i_R$) aquella rentabilidad o costo neto ($i_N$) corregido por la inflación (*if*). En ausencia de impuestos (*it*) se utilizaría la tasa efectiva (*i*). Esta tasa Real debe ser preocupación constante de inversionistas en la medida en que sus rendimientos deberían superar el pago de impuestos e inflación. Como veremos a continuación la tasa Real es un tanto más compleja de hallar, que la simple resta aritmética entre tasa neta (o efectiva) y la inflación.

Supondremos que una persona invierte un capital P, a un único periodo y una tasa neta por periodo de $i_N$. Encontremos el valor de la tasa Real ante una inflación *if*.

Este capital P rendiría $F=P(1+i_N)^1$ en ausencia de inflación. Pero con la inflación los precios subirían $(1+i_f)$, restándole capacidad de compra al monto obtenido, es decir, su capacidad se reduciría a: $F'=P(1+i_N)^1/(1+i_f)$. Por lo tanto, podríamos hallar el rendimiento Real ($i_R$) de la siguiente manera:

$$i_R=\frac{F'}{P}-1=\frac{\frac{P(1+i_N)^1}{(1+i_F)}}{P}-1=\frac{(1+i_N)-(1+i_f),}{(1+i_f)}$$

por tanto

$$\boxed{i_R=\frac{(i_N-i_f)}{(1+i_f)}} \quad (8.14)$$

En ausencia de impuestos, la tasa Real sería

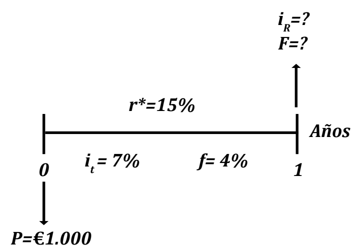
$$\boxed{i_R=\frac{(i-i_f)}{(1+i_f)}} \quad (8.15)$$

*Ejemplo 8.9* ¿Al cabo de un año, qué rendimiento real y qué monto, termina recibiendo una persona que invierte ₡1.000 en una entidad financiera que le reconoce el 15% efectivo anual, si su país cobra una retención en la fuente del 7% y la inflación esperada está fijada en 4%?

**Identificación de variables.**

***P=*** ₡1.000;
***r*=*** 15%;
***n=*** 1;
***it=*** 7%;
***F=*** ?;
***if =*** 4%;
$i_N=$ ?
$i_R=$ ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas**

Se utilizarán las ecuaciones (4.4)

$$F= P\,(1+i)^n$$

(8.13)

$$i_N = i\,(1-i_t)$$

y (8.14)

$$i_R = \frac{(i_N-i_f)}{(1+i_f)}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$i_N = i\,(1-i_t) =0{,}15(1-0{,}07)=13{,}95\%$$

$$i_R = \frac{(i_N-i_f)}{(1+i_f)} =\frac{(0{,}1395-0{,}04)}{(1+0{,}04)}=9{,}57\%$$

$$F= P\ (1+i)^n = ₡1.000(1+0{,}0956730769231)^1 = ₡1.095{,}673$$

**Respuesta.**

R/. Al cabo de un año, la persona que invirtió P=₡1.000 en una entidad financiera que le reconoció el 15% efectivo anual y si su país cobró una retención en la fuente del 7% y la inflación fue del 4%, entonces recibió una rentabilidad Real del 9,57% y recibió ₡1.095,673 por concepto de monto.

### TASA EXTERNA ($i_E$)

A demás de las empresas multinacionales, existen empresas locales con cierta capacidad de operar en el mercado financiero internacional, obteniendo créditos en monedas extranjeras, generalmente dólares, si sus previsiones sobre la devaluación y las tasas de intereses del país extranjero le resultan favorables en comparación con los costos del dinero local. Entenderemos entonces como tasa Externa *($i_E$)* aquella que resulta de aplicarle los efectos de la devaluación *($id$)* a la tasa efectiva *($i$)*. Como veremos a continuación la tasa Externa también resulta un tanto más compleja de hallar, que la simple suma aritmética entre tasa de devaluación y la tasa efectiva del crédito.

Supondremos que una persona solicita el día de hoy un crédito por $ P, a un interés del *$i$%* anual. El tipo de cambio hoy es $T_{c0}$. Se estima que la devaluación dentro de un año será de *$id$%.* Calcular el costo efectivo *($i_E$)* en la Modena local *(₡)*.

El préstamo P en dólares ($) se convertiría al final del año en $F=P(1+i)^1$. Pero en moneda local el crédito a precios de hoy es $P^* T_{c0}$. Al estimar la devaluación en una tasa *$id$%*, el tipo de cambio dentro de un año sería $T_{cn}= T_{c0}(1+ i_d)$. Entonces el valor a pagar dentro de un año en moneda local sería $F^*T_{cn}$. Con estos datos podríamos obtener el costo efectivo del crédito o tasa externa *($i_E$)* de la siguiente manera:

$$iE= \frac{F^*T_{cn}}{P^*T_{c0}}-1 \quad \frac{P(1+i)\ T_{cn}}{PT_{c0}}-1 = \frac{P(1+i)T_{co}\,(1+i_d)}{PT_{c0}}-1 \ = id+i+i^*id$$

y reorganizando tenemos:

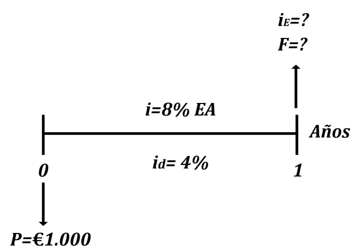
$$\boxed{iE =(i + i\,d\,)+ (i^*\ id)} \quad (8.16)$$

*Ejemplo 8.10* ¿Qué costo efectivo o externo y qué monto en moneda local, termina pagando una empresa que solicita un crédito por $1.000 a una tasa del 8% EA y se espera una devaluación del 4% de su moneda local respecto al país extranjero? El crédito se concede por un año.

### Identificación de variables.

***P=*** ₡1.000;
***i=*** 8%;
***n=*** 1;
***id=*** 4%;
***F=*** ?;
$i_E$= ?

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




### Selección de fórmulas

Se utilizarán las ecuaciones (4.4)

$$F= P\,(1+i)^n$$

y (8.16)

$$iE =(i + i_d )+ (i^* i_d)$$

### Aplicación de fórmulas.

$$iE =(i + i_d )+ (i^* i_d)$$
$$=(0,08+0,04)+(0,08*0,04)=12,32\%\ EA$$

$$F= P\,(1+i)^n =₡1.000(1+0,1232)^1=₡1.123,2$$

### Respuesta.

R/. Al cabo de un año, una empresa que solicita un crédito por $1.000 a una tasa del 8% EA y se espera una devaluación del

4% de su moneda local respecto al país extranjero, termina pagando ₡1.123,2 en moneda local, lo que representa un costo efectivo o tasa externa del 12,32% EA.

### TASA DE INTERÉS PROMEDIO PONDERADO (K)

La tasa de interés promedio ponderado (k) es como su nombre lo indica la tasa promedio que recibe un inversionista conforme un portafolio de sus inversiones que rinden diferentes tasas a proporciones diferentes. En finanzas se recomienda no poner los capitales en una única inversión, pues está demostrado que la diversificación aumenta el valor esperado de los mismos.

Un ejemplo de (k) podría ser lo que en Colombia se denomina Depósito a Término Fijo o DTF, el cual es un indicador económico que representa el promedio de las tasas de interés que los Bancos, las Corporaciones Financieras y las Compañías de Financiamiento Comercial reconocen a sus ahorradores. Es la tasa promedio ponderada de captación de los intermediarios financieros, calculada con base en los Certificados de Depósito a Término (CDT) a 90 días. En términos concretos, es el costo del dinero para el sistema financiero (Meza, 2004).

La tasa de interés k, se manifiesta generalmente en términos efectivo anual, ante lo cual, las tasas parciales que la constituyen deberán llevarse a un periodo común para luego converger en un periodo anual. Una vez llevadas las tasas parciales a tasa efectivas anuales, k podría obtenerse de la siguiente manera:

$$\boxed{K = \sum_{j=1}^{J} w_j \, i_j = 1} \quad (8.17)$$

con $\sum_{j=1}^{J} w_j = 1$

Donde:

j= 1, 2, 3 …J Total de tasas parciales

wj= Ponderador de las tasas parciales

*Ejemplo 8.11* ¿Qué monto y qué tasa promedio ponderada termina recibiendo un capital de ₡1.000 invertido de la siguiente manera: 25% en una entidad financiera que le reconoce el 15% efectivo anual, un 35% en un fondo

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES.**

***P=*** ₡1.000;

***i1=*** 15%;

de inversión que reconoce el 12% efectivo anual, y el saldo en una corporación que reconoce el 13% efectivo anual?

***i2=*** 12%; ***w2=*** 35%;
***i3=*** 13%; ***w3=*** 40%;
***w1=*** 25%; ***k=*** ?

**Selección de fórmulas**

Se utilizarán las ecuaciones (4.4)

$$F= P\,(1+k)^n$$

(8.17)

$$K= \sum_{j=1}^{J} w_j\, i_j$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$K= \sum_{j=1}^{J} w_j\, i_j$$

$$=0{,}25*0{,}15+0{,}35*0{,}12+0{,}40*0{,}13=13{,}15\%\ EA.$$

$$F= P\,(1+k)^n$$

$$=₡1.000(1+0{,}1315)^1=₡1.131{,}15$$

**Respuesta.**

R/. Un capital de ₡1.000 invertido 25% en una entidad financiera que le reconoce el 15% efectivo anual, un 35% en un fondo de inversión que reconoce el 12% efectivo anual, y el saldo en una corporación que reconoce el 13% efectivo anual, termina por recibir un monto de ₡1.131,15, dando como resultado un interés promedio ponderado de 13,15% EA.

## RESUMEN CAPÍTULO 8: Tasas Especiales de Interés

En este capítulo se analizaron situaciones financieras un tanto más realista que las vistas hasta ahora. Se estudiaron los casos de personas, hogares y empresas en presencia de variación de precios (inflación), comercio exterior e impuestos.

Se resolvieron situaciones que involucraban tasa continua, tasa de inflación, tasa de devaluación, tipo de cambio, tasas impositivas y combinaciones entre ellas como tasa neta, tasa real, tasa externa, tasa promedio ponderado. Estos conceptos permitirán al lector tener una visión más amplia del mundo de las finanzas y entender mejor los fenómenos sociales y económicos que afectan su quehacer diario.

En este capítulo se han utilizado las siguientes ecuaciones:

$$F=P\,(1+i_k)^t \quad (8.1)$$

$$i_k= e^r-1 \quad (8.2)$$

$$r^*= e^r-1 \quad (8.3)$$

$$F= P\,e^{rt} \quad (8.4)$$

$$r = \ln(r^*+1) \quad (8.5)$$

$$P=\frac{F}{e^{rt}} \quad (8.6)$$

$$r=\frac{\ln(F/P)}{t} \quad (8.7)$$

$$t=\frac{\ln(F/P)}{r} \quad (8.8)$$

$$P=\frac{F}{\prod_{m=1}^{n}(1+i_{fm})} \quad (8.10)$$

$$i_d = \frac{i_{finit} - i_{fext}}{1+i_{fext}} \quad (8.11)$$

$$T_{cn}= T_{c0}\,(1+i_d)^n \quad (8.12)$$

$$i_N = i\,(1-i_t) \quad (8.13)$$

$$i_R = \frac{(i_N-i_f)}{(1+i_f)} \quad (8.14)$$

$$i_R = \frac{(i-i_f)}{(1+i_f)} \quad (8.15)$$

$$F=P(1+i_{f1})(1+i_{f2})(1+f_{f3})....(1+i_{fn})=P\prod_{m=1}^{n}(1+i_{fm}) \quad (8.9)$$

$$\boxed{iE = (i + i\,d) + (i^{*}\,id)} \quad (8.16)$$

$$\boxed{K = \sum_{j=1}^{J} w_j\, i_j} \quad (8.17)$$

Dónde: P= Valor Presente; F= Valor Futuro; $\boldsymbol{i_k}$= Tasa de interés continuo; t= tiempo en años; r= tasa de interés nominal; r* = tasa de interés efectiva anual; e=número de Euler; i= Tasa de interés por periodo; $i_{fn}$= tasa de inflación en el periodo n; $i_{fint}$=Tasa de inflación interna; $i_{fext}$=Tasa de inflación externa; n=número total de periodos; $i_d$=tasa de devaluación; $T_{c0}$= Tipo de cambio inicial; $T_{cn}$= tipo de cambio periodo n; $i_N$= Tasa de interés Neta; $i_R$= Tasa de interés Real; $i_t$= Tasa impositiva; k= Tasa promedio ponderado; $i_j$= Tasas parciales de interés; $w_j$= ponderador de tasas parciales de interés. Las ecuaciones 8.1 a 8.8 corresponden a interés continuo, las ecuaciones 8.9 y 8.10 corresponden a tasa de inflación, las ecuaciones 8.11 y 8.12 corresponden a tasa de devaluación, la ecuación 8.13 corresponde a tasa neta, las ecuaciones 8.14 y 8.15 corresponde a tasa real, la ecuación 8.16 corresponde a tasa externa y la ecuación 8.17 corresponde a tasa promedio ponderado.

## EJERCICIOS CAPÍTULO 8: Tasas Especiales de Interés

1. ¿Qué tasa continua (ik) permite obtener el mismo interés de un capital invertido durante 2 años a una tasa del 15% MV?

2. Una propiedad fue comprada hace 5 años en ₡35.000. Si hoy esa misma propiedad es vendida por ₡50.000 sabiendo que la inflación promedio es esos años ha sido del 8%, ¿qué podemos decir sobre la valorización de dicha propiedad, y en qué cuantía?

3. ¿Qué tasa de cambio se puede esperar entre las monedas de nuestro país y Estados

Unidos si al cabo de un año se esperan inflaciones de 6,5% y 4% promedio anual respectivamente? Suponga un tipo de cambio inicial de ₡100 por dólar.

4. ¿Qué tasa de interés efectiva anual termina recibiendo una persona que invierte su capital durante 6 meses en una institución financiera que reconoce el 9% SV y, si la autoridad tributaria de su país descuenta un 7% como anticipo del impuesto sobre los rendimientos financieros?

5. ¿Qué tasa de interés neta termina pagando un inversionista que solicita un crédito a una tasa del 15% EA y, si la autoridad tributaria de su país le cobra un 30% por concepto del impuesto a la renta sobre utilidad operativa?

6. Usted le presta ₡50.000 a un amigo por 4 meses sin cobrarle intereses. La inflación de los 4 meses fue: 0,9%, 1,2%, 2,2% y 1,5% respectivamente. Calcular:

   **a.** Valor Real pagado
   **b.** Pérdida de dinero, expresada como tasa de interés

7. Usted deposita ₡2.000 en una entidad financiera que le reconoce el 18% TV durante 90 días. Si la retención en la fuente es del 7% y la inflación del trimestre fue del 4,5%, calcular:

   **a.** Valor de los intereses trimestrales
   **b.** Valor de los intereses netos
   **c.** Rendimiento neto
   **d.** Rendimiento Real.

8. Una persona desea constituir un CDT a un año por ₡100.000 y explora diferentes alternativas en el mercado financiero local. Acude a 4 entidades financieras y recibe las siguientes ofertas:

   **a.** Banco de Crédito: 31% Mes anticipado (MA)
   **b.** Banco Real: 35% EA
   **c.** Banco Ganadero: Rendimiento real del 6% anual, esperando una inflación del 28% anual
   **d.** Banco del Pueblo: constituir 2 CDT´s uno por valor de ₡60.000 a una tasa del 32% TA y otro por ₡40.000 a una tasa del 28% MA

   ¿Qué oferta debe aceptar?

9. a) Demuestre que al hacerle un banco un préstamo al 24,3% EA y si la inflación es igual al 10% anual, la tasa real del crédito es del 13% y no del 14,3%. b) Después de calculada la tasa real del crédito, demuestre por medio de un ejercicio numérico que es equivalente aplicarle a un capital la tasa del 24,3% EA, que aplicarle al mismo capital la tasa de inflación y luego la tasa real.

10. Una comercializadora desea obtener una utilidad real del 7% sobre la venta de un producto que le cuesta ₡20.000. Si la inflación es del 9%, ¿en cuánto debe venderlo?

11. ¿Qué costo efectivo o externo termina pagando una empresa que solicita un crédito internacional por un año al 7% EA y se espera una devaluación del 16% de su moneda local respecto al país extranjero?

12. ¿Qué costo efectivo o externo termina pagando una empresa que solicita un crédito internacional por un año al 11% MV y se espera una inflación interna del 8% y una inflación externa del 3%?

13. Un evaluador de proyectos requiere conocer la tasa de interés promedio ponderado que debe aplicar en una situación cuya empresa solicita un crédito a una institución financiera que carga el 13% EA a sus préstamos. Así mismo, solicita en préstamo el 20% de la inversión a una cooperativa financiera que cobra el 3,5% trimestral. Si la empresa posee fondos equivalentes al 30% de la inversión y su costo de oportunidad es del 10% MV, ¿qué interés debe aplicar al flujo de caja neto para sus cálculos?

# 9. EVALUACIÓN DE ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN

## PREÁMBULO

Los capítulos precedentes ofrecen las herramientas necesarias para el análisis de proyectos o alternativas de inversión, tanto en valoración como en comparación con otros proyectos. En adición, este capítulo desarrolla los mecanismos en detalle de dicho análisis, ofreciendo a los inversionistas los elementos más eficientes para su toma final de decisiones.

Si bien el mundo de los proyectos en general es muy amplio, pasando desde la concepción de la idea, los fines que persigue y la financiación utilizada, en este capítulo nos limitaremos a los proyectos o alternativas de inversión de iniciativa privada, entendidos como "el conjunto de actividades planificadas, ejecutadas y supervisadas que con recursos finitos, tiene como objeto crear un producto o servicio único" (Domingo, 2000). En este tipo de proyectos, el énfasis está en identificar una necesidad o una oportunidad en la sociedad y estudiar cómo satisfacer esa necesidad o aprovechar la oportunidad de tal manera que se logre un rendimiento atractivo sobre la inversión requerida.

La evaluación financiera de proyectos o alternativas de inversión constituye el último aspecto que integra los componentes básicos, de mercado, técnicos, administrativos, de financiación y de presupuestos del proyecto, con el fin de proporcionar a las entidades financieras y a sus gestores, los indicadores de rentabilidad desde una perspectiva privada y económica que les permita de una manera más eficiente tomar la decisión de aprobar, modificar, postergar o descartar la respectiva inversión (Méndez, 2010).

## 9.1. Definiciones

En la mente de cualquier inversionista, el esquema que se plantea para tomar la decisión de invertir es: **¿Convendrá la inversión?** Una inversión conviene solo si se puede recuperar con intereses y deja un excedente. Esto significa que el inversionista necesita, en primer lugar, recuperar la inversión inicial que realiza y obtener sobre ella unos beneficios que satisfagan sus expectativas de rendimiento y quede un excedente para que aumente su riqueza. Para tomar esta importante decisión de inversión, el inversionista debe contar:

- Con una tasa de interés que le sirva como referencia para poder decidir si invierte o no. Esta tasa de interés se conoce como tasa de interés de oportunidad del inversionista (TIO), entendida como aquella tasa máxima que podría obtener dentro de las diversas posibilidades que se le presentan para invertir su dinero.

- Con técnicas o métodos de análisis que le permitan comprobar que con la inversión que hace en el presente y los beneficios futuros, se va a ganar, al menos, la tasa de interés que él ha fijado como mínima para hacer su inversión, o sea su TIO. Estas técnicas se analizan en este capítulo (Meza, 2004).

Las técnicas de evaluación financiera examinan el proyecto en función de su rendimiento financiero y persiguen como objetivos básicos: determinar la viabilidad de atender oportunamente los costos y gastos; medir qué tan rentable es el proyecto para sus gestores; y aportar elementos de juicio para comparar el proyecto con otras alternativas de inversión. El nivel de profundidad y de desagregación depende de los intereses y requerimientos de quienes intervienen en la ejecución del proyecto, así como de las exigencias de las entidades que lo financian (Méndez, 2010).

Una vez agotados los estudios básico, de mercado, técnico, administrativo, de financiación y de presupuesto del proyecto se genera el flujo de caja neto del proyecto que reporta bien sea ingresos o gastos en cada periodo de operación del proyecto, y se representa un diagrama de flujo, a partir del cual se calculan los indicadores de evaluación financiera entre los que se destacan el Valor Actual Neto (VAN), la Tasa Interna de Retorno (TIR), TIR Verdadera, Costo Anual Uniforme Equivalente (CAUE) y la Relación Beneficio-Costo (RBC).

La selección de uno u otro indicador suele depender de las exigencias de los organismos de financiación y de los intereses de los gestores del proyecto. La aplicación de estos indicadores implica examinar alternativas cuantificables en términos económicos, a las que se les puede asociar una serie de ingresos y egresos netos en unidades monetarias.

# 9.2. Tasa de Descuento

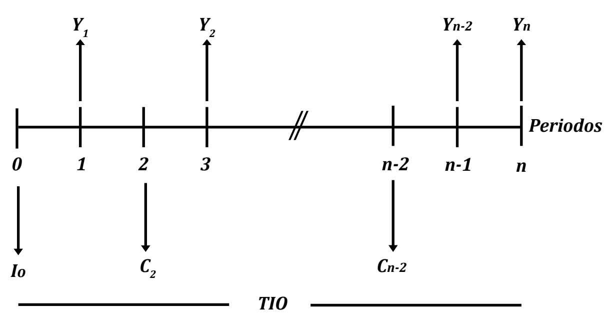
Luego de los estudios correspondientes, y establecido el flujo de caja neto del proyecto bien a precios corrientes o constantes, es menester la utilización de una tasa de descuento (i), entendida como el costo de la inversión inicial, y con ella efectuar el traslado de los ingresos y egresos al momento cero.

Cuando los fondos requeridos para hacer la inversión inicial provienen de recursos propios, la tasa de descuento a utilizar es la TIO. Cuando los fondos provienen de préstamos a terceros, la tasa de descuento corresponde a la tasa de interés pagada por el crédito. Cuando se presenta una combinación de créditos a terceros y recursos propios, la tasa de descuento sería la tasa promedio ponderado (k) de dicha combinación, conocida aquí como Costo de Capital.

# 9.3. Valor Actual Neto (VAN)

El Valor Actual Neto conocido también como Valor Presente Neto (VPN) visto en el análisis de inversiones del capítulo 4, representa una cifra monetaria que resulta de comparar el valor presente de los ingresos con el valor presente de los egresos y la inversión inicial. El VAN implica comparar la rentabilidad del proyecto con otras alternativas de inversión; es decir, comparar el posible beneficio del proyecto con el beneficio que se obtendría si el dinero se invirtiera en el mejor proyecto alternativo.

Si se tiene una inversión inicial $(I_0)$ y unos flujos netos de efectivo por periodo que pueden ser ingresos $(Y_n)$ o egresos $(C_n)$ el flujo de caja sería como sigue:




De conformidad con la ecuación (4.13) el VAN se obtiene así:

$$VAN = -Io + \frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n} - \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n} \quad (9.1)$$

| | | |
|---|---|---|
| Dónde: | VAN = | Valor Actual Neto |
| | $I_0$ = | Inversión Inicial |
| | $Y_n$= | Ingresos en el periodo n |
| | n= | periodo de tiempo donde ocurre el hecho económico |
| | $C_n$= | Egresos o Costos en el Periodo n |
| | i= | tasa de interés de oportunidad o TIO |
| | T= | Tiempo total de duración del proyecto |

La decisión de inversión se tomará entonces siempre que el VAN>0, indicando que la inversión supera el costo de oportunidad del inversionista y además los ingresos generados en el futuro superan los gastos, traídos todos al presente. En caso de tener que decidir entre dos o más proyectos se debería escoger el de mayor VAN siempre que ésta sea mayor que cero.

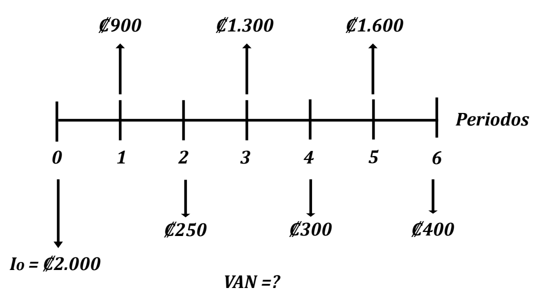
*Ejemplo 9.1*

A dos inversionistas, en forma independiente, se les plantea la posibilidad de emprender un proyecto de inversión, que requiere de una inversión inicial de ₡2.000 y que arroja el siguiente flujo de caja durante los periodos subsiguientes: ₡350, -₡250, ₡380, -₡300, ₡800, -₡400. La tasa de interés de oportunidad del inversionista A es del 10% y del inversionista B es del 15%. ¿Qué decisión debe tomar cada inversionista?

**Identificación de variables:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| **$I_0$=** | ₡2.000; | **$C_6$=** | ₡400; |
| **$Y_1$=** | ₡900; | **T=** | 6; |
| **$Y_3$=** | ₡1.300; | **$i_A$=** | 0,10; |
| **$Y_5$=** | ₡1.600; | **$i_B$=** | 0,15; |
| **$C_2$=** | ₡250; | **$VAN_A$=** | ?; |
| **$C_4$=** | ₡300; | **$VAN_B$=** | ? |

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas:**

En este caso se utiliza la ecuación (9.1)

$$VAN = -Io + \frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n} - \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$VAN_{10\%} = -₡2.000 + \frac{₡900}{(1+0,10)^1} - \frac{₡250}{(1+0,10)^2} + \frac{₡1.300}{(1+0,10)^3} -$$

$$\frac{₡300}{(1+0,10)^4} + \frac{₡1.600}{(1+0,10)^5} - \frac{₡400}{(1+0,10)^6} = ₡137,33$$

$$VAN_{15\%} = -₡2.000 + \frac{₡900}{(1+0,15)^1} - \frac{₡250}{(1+0,15)^2} + \frac{₡1.300}{(1+0,15)^3} -$$

$$\frac{₡300}{(1+0,15)^4} + \frac{₡1.600}{(1+0,15)^5} - \frac{₡400}{(1+0,15)^6} = ₡87,50$$

**Respuesta.**

R/. El inversionista A al tener una TIO del 10% debería abordar el proyecto toda vez que éste cubre su interés de oportunidad y genera un VAN positivo de ₡137,33. Por su parte el inversionista B al tener una TIO del 15% no debería abordar el proyecto toda vez que éste no cubre su interés de oportunidad y genera un VAN negativo de ₡87,50.

## 9.4. Tasa Interna de Retorno (TIR)

La TIR vista también en el análisis de inversiones del capítulo 4, expresa la tasa de interés que hace el VAN=0, así como el rendimiento de los dineros que aún permanecen invertidos en el proyecto y no sobre la inversión inicial, tal como el VAN expresa los beneficios de dichos dineros. Pero en el caso de la TIR los dineros se reinvierten a la tasa TIR y en el VAN los dineros se reinvierten a la TIO.

Matemáticamente la TIR corresponde a aquella tasa de interés (i) que efectivamente lleva el VAN=0, es decir:

A partir de la ecuación (9.1) tenemos:

$$VAN = -Io + \frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n} - \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n}$$

entonces:

$$\frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n} = Io + \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n};$$

$$\frac{Y_1}{(1+i)^1} + \frac{Y_2}{(1+i)^2} + \frac{Y_3}{(1+i)^3} + .. + \frac{Y_T}{(1+i)^T} = I_0 + \frac{C_1}{(1+i)^1} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + \frac{C_3}{(1+i)^3} + .. + \frac{C_T}{(1+i)^T}$$

De este polinomio de rango T se despeja i, la cual corresponde a la TIR.

Esta ecuación resulta fácil de resolver con los software computacionales actuales, sin embargo, de conformidad con el capítulo 4, se sigue utilizando el método analítico o de ensayo y error, donde proponemos tasas de interés y encontramos diferentes VAN, hasta encontrar los dos VAN más cercanos a cero tanto por la derecha como por la izquierda, y luego interporlar estos valores, bajo la relación que existe entre los VAN y las tasas de interés que los generan.

### Interpolación:

$$\begin{array}{cc} \textit{Tasas} & \textit{VAN} \end{array}$$

$$Y\left\{\begin{array}{l} X\left\{\begin{array}{l} i_1 \\ i_0 \end{array}\right. \\ \quad i_2 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} VAN_1 \\ \varnothing \end{array}\right\}V \\ VAN_2 \end{array}\right\}W$$

Siguiendo el concepto de proporciones y la relación que guarda el VAN con su respectiva tasa, se tiene:

$$\frac{X}{Y} = \frac{V}{W}$$

Como los valores de V, W, e Y son conocidos, se procede a despejar X

$$X = \frac{V*Y}{W}$$

Ahora tenemos que

$$i_1 + X = i_0 = TIR$$

Una manera práctica de encontrar la TIR es a través de los siguientes pasos:

1. Encontrar una tasa tentativa

$$\text{Tasa Tentativa (TT)} = \left[\frac{\sum Flujos\,(+) - \sum Flujos(-)}{\sum Flujos\,(-) + \#\,años}\right] * 0{,}75 \qquad (9.2)$$

2. Aplicar ensayo y error
3. Utilizar la interpolación

$$(TIR) = \text{Tasa Menor} + \frac{\text{Diferencia de Tasas} * VAN(+)}{|VAN(+)| + |VAN(-)|} \qquad (9.3)$$

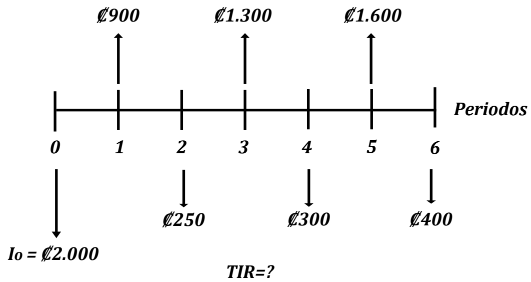
Mediante la TIR un proyecto es elegible toda vez que sea mayor que la tasa de oportunidad del inversionista. En caso de TIR=TIO la decisión es indiferente.

*Ejemplo 9.2* Calcular la TIR para el caso del ejemplo 9.1.

**Identificación de variables:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $I_0$= | ₡2.000; | $C_6$= | ₡400; |
| $Y_1$= | ₡900; | $T$= | 6; |
| $Y_3$= | ₡1.300; | $i_A$= | 0,10; |
| $Y_5$= | ₡1.600; | $i_B$= | 0,15; |
| $C_2$= | ₡250; | $TIR$= | ? |
| $C_4$= | ₡300; | | |

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

En este caso se utiliza la ecuación (9.1)

$$VAN = -Io + \frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^{n}} - \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^{n}}$$

(9.2)

$$\text{Tasa Tentativa (TT)} = \left[\frac{\sum \text{Flujos } (+) - \sum \text{Flujos} (-)}{\sum \text{Flujos } (-) + \#\text{ años}}\right] * 0{,}75$$

y (9.3)

$$\text{(TIR)} = \text{Tasa Menor} + \frac{\text{Diferencia de Tasas} * VAN(+)}{|VAN(+)| + |VAN(-)|}$$

**Aplicación de fórmulas.**

1. Tasa Tentativa:

$$\text{(TT)} = \left[\frac{\sum \text{Flujos } (+) - \sum \text{Flujos} (-)}{\sum \text{Flujos } (-) + \#\text{ años}}\right] * 0{,}75$$

$$= \left[\frac{\text{₡}3.800 - \text{₡}2.950}{\text{₡}2.950 + 6}\right] * 0{,}75 = 21{,}57\%$$

2. Ensayo y error:

$$VAN_{10\%} = -\text{₡}2.000 + \frac{\text{₡}900}{(1+0{,}10)^1} - \frac{\text{₡}250}{(1+0{,}10)^2} + \frac{\text{₡}1.300}{(1+0{,}10)^3} -$$

$$\frac{\text{₡}300}{(1+0{,}10)^4} + \frac{\text{₡}1.600}{(1+0{,}10)^5} - \frac{\text{₡}400}{(1+0{,}10)^6} = \text{₡}137{,}33$$

$$VAN_{13\%} = -\text{₡}2.000 + \frac{\text{₡}900}{(1+0{,}15)^1} - \frac{\text{₡}250}{(1+0{,}15)^2} + \frac{\text{₡}1.300}{(1+0{,}15)^3} -$$

$$\frac{\text{₡}300}{(1+0{,}15)^4} + \frac{\text{₡}1.600}{(1+0{,}15)^5} - \frac{\text{₡}400}{(1+0{,}15)^6} = \text{₡}5{,}37$$

3. Interpolación:

$$(TIR) = \text{Tasa Menor} + \frac{\text{Diferencia de Tasas}*VAN(+)}{|VAN(+)| + |VAN(-)|}$$

$$= 10\% + \frac{3*(\text{₡}137{,}33)}{\text{₡}137{,}33 + \text{₡}5{,}37} = 10\% + 2{,}89\% = 12{,}89\%$$

**Respuesta.**

R/. La TIR asociada al flujo de caja del ejemplo 9.1 es del 12,89%. Esto explica que el inversionista A obtenga un VAN positivo, pues el rendimiento interno del proyecto es mayor que su tasa de oportunidad, en cambio el inversionista B al tener una tasa alternativa del 15% obtiene un VAN negativo pues el proyecto rinde menos que esa tasa.

## 9.5. Costo Anual Uniforme Equivalente (CAUE)

El Costo anual uniforme equivalente es otro de los indicadores útiles a la hora de tomar decisiones frente a diferentes alternativas de inversión. El proyecto convencional, requiere una inversión inicial, genera ingresos y egresos a lo largo de su vida útil e inclusive puede requerir nuevas inversiones. Sin embargo, se presentan ocasiones en que solo son perceptibles de manera explícita los costos y gastos asociados, pues sus ingresos resultan de difícil cálculo. Ejemplos de esta situación resultan las adquisiciones de nuevas maquinarias en una empresa.

Ante cualquier caso de estudio, la metodología del CAUE plantea obtener los flujos netos asociados, calcular el VAN y a partir de éste calcular la Renta Fija (R) distribuida a lo largo de su vida útil. En caso que el proyecto vincule ingresos entonces se recomienda elegir el proyecto de mayor CAUE, tal como sucede con el VAN, pero en caso de que el proyecto solo contemple costos y gastos, entonces se recomienda el proyecto de menor CAUE.

De conformidad con lo anterior y aplicando la ecuación (5.4) podemos obtener el CAUE de la siguiente manera:

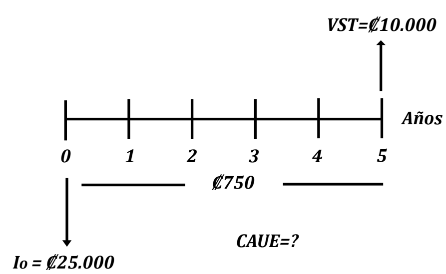
$$\boxed{CAUE = VAN\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right]} \quad (9.4)$$

*Ejemplo 9.3* Una empresa que tiene una tasa de oportunidad del 15% anual, desea conocer los gastos a cargar, dentro de sus gastos operacionales anuales, de una nueva máquina que compró por ₡25.000 y tiene una vida útil de 5 años. Se estima un valor de salvamento (VST) al final de la vida útil de ₡10.000 y unos gastos anuales de mantenimiento (RC) de ₡750. Calcular el costo anual de gastos del equipo.

**Identificación de variables:**

| | |
|---|---|
| $I_0$= | ₡25.000; |
| $VS_5$= | ₡10.00; |
| $R_C$= | ₡750; |
| *i=* | 0,15; |
| *T=* | 5; |
| *CAUE=* | ? |

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




**Selección de fórmulas.**

En este caso se utiliza la ecuación (9.1)

$$VAN = -Io + \frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n} - \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n}$$

y (9.4)

$$CAUE = VAN \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1} \right]$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$VAN_{15\%} = ₡25.000 - \frac{₡10.000}{(1+0,15)^5} = ₡20.028,233$$

$$CAUE = ₡20.028,233 \left[ \frac{0,15(1+0,15)^5}{(1+0,15)^5-1)} \right] + ₡750 = ₡6.724,733$$

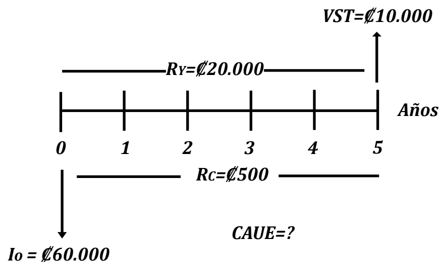
**Respuesta.**

R/. El costo anual uniforme equivalente de una máquina que cuesta ₡25.000 que tiene un valor de salvamento al final de su vida útil de 5 años por ₡10.000 y unos gastos de mantenimiento de ₡750 anuales para una empresa que tiene una tasa de oportunidad del 15% anual, es de ₡6.724,733.

*Ejemplo 9.4* Una máquina cuesta ₡60.000, tiene una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de ₡10.000; el costo anual de operación es de alrededor de ₡500 y genera ingresos anuales del orden de ₡20.000. Determinar si la compra de la máquina es aconsejable, cuando se utiliza una tasa de a) 25% y b) 15%.

**Identificación de variables:**

| | |
|---|---|
| $I_0$= | ₡60.000; |
| $VS_5$= | ₡10.000; |
| $R_C$= | ₡500; |
| $i_a$= | 0,25; |
| $i_b$= | 0,15; |
| $T$= | 5; |
| $R_Y$= | ₡20.000; |
| *CAUEa*= | ?; |
| *CAUEb*= | ? |




**Selección de fórmulas.**

En este caso se utiliza la ecuación (9.1)

$$VAN = -Io + \frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n} - \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n}$$

y (9.4)

$$CAUE = VAN \frac{[i(1+i)^n]}{(1+i)^n-1}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$VAN_{25\%} = \text{₡}60.000 - \frac{\text{₡}10.000}{(1+0,25)^5} = \text{₡}56.723,2$$

$$CAUE_a = \text{₡}20.000 - \text{₡}56.723,2 \frac{[0,25(1+0,25)^5]}{(1+0,25)^5-1} - \text{₡}500 = -\text{₡}1.592,337$$

$$VAN_{15\%} = \text{₡}60.000 - \frac{\text{₡}10.000}{(1+0,15)^5} = \text{₡}56.723,2$$

$$CAUE_b = \text{₡}20.000 - \text{₡}55.028,233 \frac{[0,15(1+0,15)^5]}{(1+0,15)^5-1} - \text{₡}500 =$$

$$\text{₡}3.084,222$$

**Respuesta.**

R/. Una máquina que cuesta ₡60.000, tiene una vida útil de 5 años y un valor de salvamento de ₡10.000, el costo anual de operación es de alrededor de ₡500 y genera ingresos anuales del orden de ₡20.000, es aconsejable su compra cuando la tasa de oportunidad es del 15%, pero si la tasa es del 25% entonces se desaconseja su compra.

## 9.6. Relación Beneficio Costo (RCB)

Este indicador representa el cociente entre los ingresos actualizados sobre los costos actualizados incluida la inversión inicial utilizando una tasa de descuento. Si la RBC es mayor que 1, indica que los ingresos actualizados del proyecto son mayores que sus costos actualizados y por tanto se recomienda su inversión. Si la RBC es menor que 1, incluso negativa, el proyecto no se recomienda. Si la RBC es igual a 1, entonces es indiferente la realización o rechazo del proyecto, pues indica que los beneficios apenas compensan el costo de oportunidad del dinero.

Matemáticamente se puede obtener de la siguiente manera:

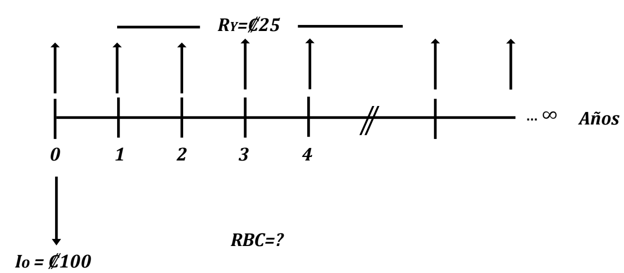
$$RCB = \frac{\dfrac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n}}{Io + \dfrac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n}} \quad (9.5)$$

*Ejemplo 9.5* El costo de una carretera alterna es de ₡100 millones y producirá un ahorro en combustible para los vehículos de unos ₡2 millones al año; por otra parte, se incrementará el turismo, estimando el aumento de ganancias en los hoteles, restaurantes y otros en ₡28 millones al año. Pero los agricultores se quejan de porque van a tener unas pérdidas en la producción estimadas, de unos ₡5 millones al año. Usando una tasa de oportunidad del 22%, ¿es aconsejable realizar el proyecto? Asuma perpetuidad en la vida útil de la carretera.

**Identificación de variables:**

$I_0=$ ₡100;
$R_Y=$ ₡28+₡2-₡5=₡25;
$i=$ 0,22;
$T=$ ∞;
$RBC=$ ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**



**Selección de fórmulas.**

En este caso se utiliza la ecuación (5.8)

$$P = \frac{R}{i}$$

y (9.5) $$RCB = \frac{\frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n}}{Io + \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n}}$$

**Aplicación de fórmulas.**

$$P = \frac{R}{i} = \frac{₡25}{0,22} = ₡113,636364$$

$$RCB = \frac{\frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n}}{Io + \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n}} = \frac{₡113,636364}{₡100} = 1,136$$

**Respuesta.**

R/. De conformidad con los resultados, se recomienda la construcción de la carretera pues su RBC es mayor que 1.

## 9.7. Ordenamiento de Proyectos

Cuando se presentan limitaciones, por ejemplo, de recursos de inversión, y se cuenta con una canasta de proyectos o alternativas de inversión, desde el punto de vista de rentabilidad, es posible establecer un orden de prioridades para su ejecución.

En general, para efectos de establecer un ordenamiento y comparación de proyectos, se pueden evaluar en un par de alternativas cuatro posibles relaciones:

### ALTERNATIVAS INDEPENDIENTES.

El proyecto A es independiente del proyecto B, si ambos se pueden ejecutar sin que la inversión en A afecte la inversión en B o la rentabilidad de B. La única razón, después de elegir una alternativa, para no elegir las demás la determina la disponibilidad de recursos. En tal sentido, los valores actuales de cada proyecto se pueden sumar para calcular la ganancia de realizar el conjunto de proyectos independientes: VAN (A y B) = $VAN_A+VAN_B$.

### ALTERNATIVAS COMPLEMENTARIAS.

Los proyectos son complementarios si la ejecución de un proyecto mejora la rentabilidad del otro proyecto, es decir: VAN (A y B) > $VAN_A+VAN_B$.

### ALTERNATIVAS PARCIALMENTE EXCLUYENTES.

Los proyectos se consideran en esta condición cuando la realización de uno reduce la rentabilidad de otro. En este caso: VAN (A y B) < $VAN_A+VAN_B$.

### ALTERNATIVAS MUTUAMENTE EXCLUYENTES.

Dos o más proyectos son mutuamente excluyentes cuando, independientemente de la disponibilidad de recursos, si se elige una, la otra debe descartarse. En este caso si se acomete el proyecto A, el VAN de B es cero, o viceversa.

Si los proyectos siempre fueran independientes y no hubiera escasez de recursos de inversión, ordenarlos sería una tarea relativamente sencilla, debido a que se podría hacer en función de la rentabilidad aplicando cualquiera de los indicadores aquí detallados. Sin embargo, cuando los proyectos son mutuamente excluyentes, pero los recursos de inversión son limitados, se deben establecer escenarios de ordenamiento de una manera más cuidadosa (Méndez, 2010).

Generalmente los tomadores de decisiones son quienes deciden qué indicadores utilizar a la hora de llevar a cabo sus inversiones. Lo que se espera es que sea cual sea el criterio de selección no se generen inconsistencias entre sí. El VAN y sus indicadores asociados como el CAUE y RBC, generalmente suelen ser muy útiles en este tipo de ordenamientos, pero no presentan inconsistencias, ya que todos utilizan la tasa de interés de oportunidad del inversionista. Sin embargo, se presentan algunos inconvenientes con la TIR por problemas que analizaremos y ajustaremos más adelante en la TIR Verdadera o Modificada.

Al evaluar alternativas de inversión, cualquiera sea su ordenamiento, existe una situación especial en la cual, no obstante contar con los recursos para emprender el proyecto de inversión, ninguna de las alternativas resulta atractiva desde el punto de vista financiero y económico, y por lo tanto, no se elige ninguna de ellas. Esta situación se conoce como alternativa *no hacer nada,* que de hecho es la primera que se debe analizar. Esto aplica para proyectos en los cuales son conocidos los ingresos y los egresos. En el caso de conocer solo los gastos, la alternativa *no hacer nada* no se puede considerar, vale decir, obligatoriamente se tendrá que seleccionar la alternativa de menor CAUE, porque se trata de escoger la de menor costo (Meza, 2004).

Como se analizó en el apartado sobre CAUE, cuando se conocen los ingresos y egresos del proyecto y las vidas útiles son iguales se recomienda ejecutar el de mayor CAUE. Cuando solo se conocen los egresos del proyecto y las vidas útiles son iguales se recomienda ejecutar el de menor CAUE. Pero cuando se presentan las ocasiones anteriores con vidas útiles diferentes, no existe consenso sobre qué procedimiento utilizar para hacerlas comparables y poder tomar una decisión. Muchos proponen unificar las vidas útiles de los proyectos calculando su mínimo común múltiplo, bajo el supuesto de que al vencerse la vida útil de cada equipo éste se reemplaza por otro exactamente igual en inversión, costos y valor de salvamento, lo cual resulta bastante inverosímil. Una opción importante es utilizar el método propuesto por Baca (1994), que consiste en fijar un horizonte de planeación (T) que puede ser cualquiera de las vidas útiles de las alternativas inclusive una diferente a ellas. Si entre las alternativas hay equipos con una vida útil mayor o menor, habrá que recalcular su valor de salvamento para ajustarlo exactamente al periodo de planeación T, utilizando la siguiente expresión:

$$VS_T = I_0 - \left[\frac{I_0 - VS_n}{n}\right] T \qquad (9.6)$$

| | | |
|---|---|---|
| Dónde: | $VS_T$= | Valor de Salvamento recalculado |
| | $I_0$= | Inversión inicial o costo del equipo |
| | $VS_n$= | Valor de Salvamento inicial |
| | n= | Vida útil del equipo |
| | T= | horizonte de planeación |

*Ejemplo 9.6* Cierta empresa que utiliza para sus inversiones una tasa de oportunidad del 30% anual, desea conocer cuál de las alternativas siguientes debe seleccionar:

| *Características* | *Máquina A* | *Máquina B* |
|---|---|---|
| *Costo del equipo* | *₡10.000* | *₡12.000* |
| *Gatos operativos/año* | *₡1.800* | *₡1.500* |
| *Valor de Salvamento* | *₡6.000* | *₡8.000* |
| *Vida útil* | *5 años* | *7 años* |

### IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES:

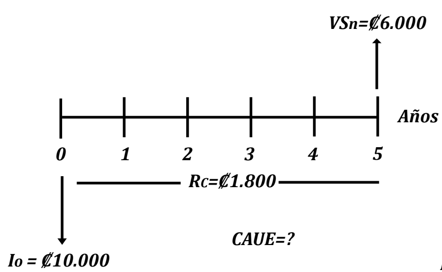
Máquina A:

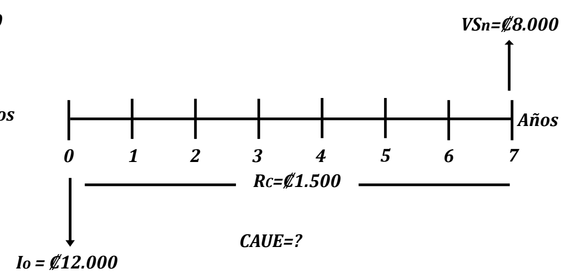
$I_0=$ ₡10.000;
$R_C=$ ₡1.800;
$VS_n=$ ₡6.000;
$i=$ 0,3;
$n=$ 5 años;
$T=$ 5 años;
$CAUE_A=$ ?

Máquina B:

$I_0=$ ₡12.000;
$R_C=$ ₡1.500;
$VS_0=$ ₡8.000;
$i=$ 0,3;
$n=$ 7 años;
$T=$ 5 años:
$VS_T=$ ?:
$CAUE_B=$ ?

### ELABORACIÓN DIAGRAMA DE LÍNEAS DE TIEMPO.




**MÁQUINA A:** **MÁQUINA B:**

### SELECCIÓN DE FÓRMULAS.

En este caso se utiliza la ecuación (9.6)

$$VS_T = I_0 - \left[\frac{I_0 - VS_n}{n}\right] T$$

y (9.4)

$$CAUE = VAN\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

### APLICACIÓN DE FÓRMULAS.

Igualaremos el horizonte de planeación a 5 años, por tanto se debe recalcular el valor de salvamento de la máquina B.

$$VS_1 = I_0 - \left[\frac{I_0 - VS_n}{n}\right]$$

$$T = ₡12.000 - \left[\frac{₡12.000 - ₡8.000}{7}\right] * 5 = ₡9.142,8571$$

Ahora se calculan los respectivos CAUE.

$$CAUE_A = VAN\left[\frac{i(1+i)^n}{n}\right]$$

$$₡10.000 - \left[\frac{₡6.000}{(1+0,3)^5}\right] * \left[\frac{0,3(1+0,3)5}{(1+0,3)5-1)}\right] + ₡1.800 = ₡5.242,3$$

$$CAUE_B = VAN\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1}\right]$$

$$= \left[₡12.000 - \frac{₡9.142,8571}{(1+0,3)^5}\right] * \left[\frac{0,3(1+0,3)^5}{(1+0,3)^5-1)}\right] + ₡1.500 = ₡5.415,947$$

### RESPUESTA.

R/. Se selecciona la máquina A por tener menor CAUE.

## 9.8. TIR Verdadera (TIRV)

Utilizar la TIR a la hora de seleccionar un proyecto o alternativa de inversión puede resultar en ocasiones problemático, sobre todo cuando tenemos que decidir sobre proyectos no convencionales, es decir, proyectos cuyo flujo de caja no consta de una única inversión inicial y sucesivos flujos netos positivos a lo largo de su vida útil, sino que pueden ser proyectos inclusive que inician con flujos netos positivos y luego con flujos netos que cambian varias veces de signo. Pues bien, dado que la TIR se calcula a partir de un polinomio de grado n, expresado por las veces en que su flujo de caja cambia de signo, entonces nos enfrentaremos ante situaciones de TIR múltiples, es decir, tendremos tantas TIR como raíces o cambios de signo presente su flujo, inclusive se presentarán ocasiones en que la ecuación no tenga solución.

Dadas las características anteriores, al decidir entre alternativas, encontraremos ocasiones que la TIR reporta una sugerencia de decisión contraria a los demás indicadores para ciertos tramos de tasas de interés. Esta diferencia se debe a los supuestos en que cada indicador está basado. Mientras que el cálculo de la TIR supone que los fondos generados por el proyecto pueden ser reinvertidos a la misma TIR, los otros indicadores suponen una reinversión de fondos a la tasa de oportunidad del inversionista.

La Tasa Interna de Retorno Verdadera (TIRV) recalcula la TIR suponiendo que los fondos (valores positivos) liberados por el proyecto se reinvierten a la TIO, pero las inversiones posteriores de capital (valores negativos) se financian a la tasa TIR, por tanto, matemáticamente se obtiene de la siguiente manera:

$$[I_0+\sum_{n=1}^{T} C_n\,(1+TIR)\text{^}(-n)]\,(1+TIRV)^T=\sum_{n=1}^{T} Y_n\,(1+i)^{T-n}$$

por tanto:

$$TIRV = \left[\frac{\sum_{n=1}^{T} Y_n\,(1+i)^{T-n}}{Io+\sum_{n=1}^{T} C_n\,(1+TIR)^{-n}}\right]^{\frac{1}{T}}-1 \qquad (9.7)$$

| | | |
|---|---|---|
| Dónde: | TIRV = | Tasa Interna de Retorno Verdadera o Modificada |
| | Io = | Inversión Inicial |
| | Yn= | Ingresos en el periodo n |
| | n= | Periodo de tiempo donde ocurre el hecho económico |
| | Cn= | Egresos o Costos en el Periodo n |
| | i= | Tasa de interés de oportunidad o TIO |
| | TIR= | Tasa Interna de Retorno |
| | T= | Tiempo total de duración del proyecto |

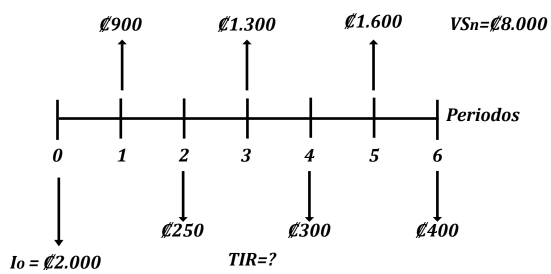
$$TIRV = \left[\frac{\sum_{n=1}^{T} Yn\,(1+i)^{T-n}}{Io+\sum_{n}^{T=1} Cn\,(1+TIR)^{-n}}\right]^{\frac{1}{T}}-1 \qquad (9.7)$$

*Ejemplo 9.7* Calcular la TIRV para el ejemplo 9.1. Utilice la tasa de oportunidad del 10%.

### Identificación de variables:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $I_0=$ | ₡2.000; | $C_6=$ | ₡400; |
| $Y_1=$ | ₡900; | $T=$ | 6; |
| $Y_3=$ | ₡1.300; | $i=$ | 0,10; |
| $Y_5=$ | ₡1.600; | $TIR=$ | 0,1289; |
| $C_2=$ | ₡250; | $TIRV=$ | ? |
| $C_4=$ | ₡300; | | |

### Elaboración diagrama de líneas de tiempo.




En este caso se utiliza la ecuación (9.7)

$$TIRV = \left[\frac{\sum_{n=1}^{T} Y_n (1+i)^{T-n}}{Io + \sum_{n}^{T}=1\ C_n (1+TIR)-n}\right]^{\frac{1}{T}} -1$$

### Aplicación de fórmulas.

$$TIRV = \left[\frac{\sum_{n}^{T}=_1 Yn (1+i)^{T-n}}{Io + \sum_{n}^{T}=1\ Cn (1+TIR)^{-n}}\right]^{\frac{1}{T}} -1$$

$$= \left[\frac{₡900(1,1)^5+₡1.300(1,1)^3+₡1.600(1,1)^1}{₡2.000+₡250(1,1)^{-2}+₡300(1,1)^{-4}+₡400(1,1)^{-6}}\right]^{\frac{1}{6}} -1=11,48\%$$

### Respuesta.

R/. La TIR Verdadera asociada al flujo de caja del ejemplo 9.1 es del 11,48%.

## 9.9. Análisis de Sensibilidad del Proyecto

Gran parte de lo visto hasta ahora en la evaluación financiera de alternativas de inversión se ha limitado a la toma de decisiones en condiciones de certeza, es decir, con probabilidad 1 de ocurrencia. Sin embargo, el proceso de globalización de la economía y los movimientos sociales y políticos del mundo actual, aunque han ampliado el espectro de oportunidades para el desarrollo de nuevos proyectos empresariales y sociales, simultáneamente ha traído consigo nuevos riesgos e incertidumbres que afectan los resultados del flujo de caja pronosticado a futuro.

En consecuencia de lo anterior, una vez terminada la evaluación financiera del proyecto, conviene hacer el respectivo análisis de sensibilidad, consistente en identificar aquellas variables del proyecto con mayor peso relativo tanto en el periodo pre-operativo como operativo y aplicarle variaciones porcentuales para señalar los efectos en los resultados del proyecto, mediante el recalculo de los flujos de caja neto y los correspondientes indicadores de decisión vistos aquí.

Es recomendable aplicar análisis de sensibilidad en los rubros de mayor peso en las inversiones, en los ingresos y componentes de costos y gastos de mayor participación en el estado de resultados. Las variaciones porcentuales suelen oscilar entre el 5% y el 20% y los cálculos se efectúan nuevamente ante cada variación de ítem particular o haciéndolos variar conjuntamente. Los resultados de estas variaciones o escenarios escogidos se deben comparar con los resultados obtenidos originalmente y, entonces efectuar los respectivos análisis. Si se observan diferencias sustanciales, eso indica que el proyecto es muy sensible al cambio en la variable o variables modificadas. En tal sentido, se deben hacer las respectivas provisiones para atenuar los riesgos del proyecto. En caso contrario, si los cambios son muy leves, eso significa que la variable o variables modificadas no afectan sustancialmente el proyecto y por lo tanto el nivel de control es menos riguroso (Méndez, 2010).

*Ejemplo 9.8* Calcular el VAN, TIR y TIRV para el flujo de caja del ejemplo 9.1. Utilice la tasa de oportunidad del 10% y compárelo con las siguientes variaciones:

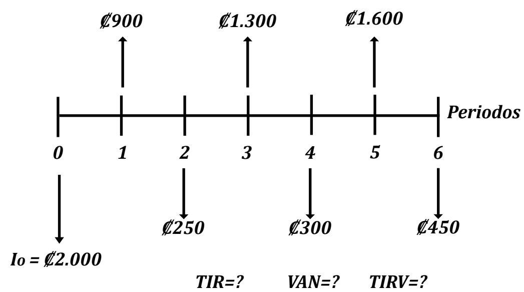
**a.** Incremente 5% los ingresos y mantenga constantes la Inversión inicial y los egresos.
**b.** Reduzca 5% los ingresos y mantenga constantes la Inversión inicial y los egresos.
**c.** Incremente 5% la Inversión inicial y los egresos y mantenga constantes los ingresos.
**d.** Reduzca 5% la Inversión inicial y los egresos y mantenga constantes los ingresos.
**e.** Incremente 5% la Inversión inicial y los egresos y reduzca 5% los ingresos.

**IDENTIFICACIÓN DE VARIABLES:**

$I_0=$ ₡2.000;
$Y_1=$ ₡900;
$Y_3=$ ₡1.300;
$Y_5=$ ₡1.600;
$C_2=$ ₡250;
$C_4=$ ₡300;
$C_6=$ ₡400;
$T=$ 6;
$i=$ 0,10;

***VAN=*** ?;
***TIR=*** ?;
***TIRV=*** ?

**Elaboración diagrama de líneas de tiempo.**




y (9.7)

$$TIRV= \left[\frac{\sum_{n=1}^{T} Yn\,(1+i)^{T-n}}{Io + \sum_{n=1}^{T} Cn\,(1+TIR)^{-n}}\right]^{\frac{1}{T}} -1$$

**Selección de fórmulas.**

En este caso se utiliza la ecuación (9.1)

$$VAN = -Io + \frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n} - \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n}$$

(9.3)

$$(TIR)= Tasa < + \frac{Diferencia\ de\ Tasas*VAN(+)}{|VAN(+)|+|VAN(-)|}$$

y (9.7)

$$TIRV= \left[\frac{\sum_{n=1}^{T} Y_n\,(1+i)}{Io + \sum_{n=1}^{T} C_n\,(1+TIR)}\right]^{\frac{1}{T}} -1$$

**Aplicación de fórmulas.**

En este ejemplo utilizaremos le herramienta informática Excel, de la cual hablaremos en el capítulo siguiente:

| *Caso* | *TIO* | *VAN* | *TIR* | *TIRV* |
|---|---|---|---|---|
| *Inicial* | *10%* | *₡137,33* | *12,88%* | *11,47%* |
| *a.* | *10%* | *₡265,07* | *15,44%* | *12,74%* |
| *b.* | *10%* | *₡10,58* | *10,23%* | *10,12%* |
| *c.* | *10%* | *₡17,45* | *10,35%* | *10,18%* |
| *d.* | *10%* | *₡257,20* | *15,57%* | *12,81%* |
| *e.* | *10%* | *(₡109,29)* | *7,73%* | *8,80%* |

**Respuesta.**

R/. El análisis de sensibilidad muestra que el proyecto es consistente ante la mayoría de escenarios propuestos (a, b, c y d) y que solo presenta un cambio en la decisión de adelantar o no el proyecto, ante un escenario muy pesimista (e).

## RESUMEN CAPÍTULO 9: Evaluación de Alternativas de Inversión

En este capítulo se analizaron las diferentes temáticas para abordar de manera eficiente la evaluación financiera de proyectos o alternativas de inversión, la cual constituye el último aspecto que integra los componentes básicos, de mercado, técnicos, administrativos, de financiación y de presupuestos del proyecto, con el fin de proporcionar a las entidades financieras y a sus gestores, los distintos indicadores que les lleve a una mejor toma de decisiones. Se analizaron los indicadores de VAN, TIR, TIRV, CAUE, RBC y el análisis de sensibilidad, entendiendo la situación de riesgo e incertidumbre que afectan los resultados del flujo de caja pronosticado de los proyectos.

En este capítulo se han utilizado las siguientes ecuaciones:

$$VAN = -Io + \frac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n} - \frac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n} \quad (9.1)$$

$$\textit{Tasa Tentativa (TT)}=\left[\frac{\sum Flujos(+)-\sum Flujos(-)}{\sum Flujos(-)+\#\text{ años}}\right]*0{,}75 \quad (9.2)$$

$$(TIR)= Tasa < + \frac{\text{Diferencia de Tasas}*VAN(+)}{|VAN(+)|+|VAN(-)|} \quad (9.3)$$

$$CAUE = VAN\left[\frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n-1}\right] \quad (9.4)$$

$$RCB = \frac{\dfrac{\sum_{n=1}^{T} Yn}{(1+i)^n}}{Io + \dfrac{\sum_{n=1}^{T} Cn}{(1+i)^n}} \quad (9.5)$$

$$VS_T = I_0 - \left[\frac{I_0 - VSn}{n}\right] T \quad (9.6)$$

$$TIRV = \left[\frac{\sum_{n=1}^{T} Yn(1+i)^{T-n}}{I_0 + \sum_{n=1}^{T} C_n(1+TIR)^{-n}}\right]^{\frac{1}{T}} -1 \quad (9.7)$$

Dónde: P= Valor Presente; F= Valor Futuro; $I_0$= Inversión inicial; $Y_n$= Ingresos; $C_n$= Egresos; VAN= Valor actual neto; TT: Tasa tentativa de interés; TIR= Tasa interna de retorno; CAUE= Costo anual uniforme equivalente; i= Tasa de interés por periodo; n=número total de periodos; T= tiempo total de duración del proyecto; RBC= Relación beneficio costo; $VS_T$= Valor de salvamento recalculado; $VS_n$=Valor de salvamento inicial; TIRV= TIR Verdadera. La ecuación 9.1 corresponde al VAN, las ecuaciones 9.2 y 9.3 corresponden a la TIR, la ecuación 9.4 corresponde al CAUE, la ecuación 9.5 corresponde a la RBC, la ecuación 9.6 a la ordenación de proyectos y la ecuación 9.7 corresponde la TIRV.

# EJERCICIOS CAPÍTULO 9: Evaluación de Alternativas de Inversión

1. Un proyecto requiere una inversión hoy de ₡4.000, y nuevas reinversiones en los meses 3, 4 y 5 de ₡500; se obtienen unos ingresos de ₡850 mensuales a partir del sexto mes hasta finales del año en el que el proyecto se termina con un valor de salvamento de ₡1.500. Si la tasa de oportunidad del inversionista es del 17.3% nominal semestre anticipado (S.A) durante los cinco primeros meses y del 26.825% E.A. de allí en adelante, analizar el proyecto mediante el criterio del valor actual neto y del costo anual uniforme equivalente.

2. Una compañía minera ha hecho exploraciones durante cierto tiempo en la búsqueda de una veta aurífera. Finalmente, al cabo de 27 meses de iniciadas las actividades encontró un yacimiento. Los datos de sus costos se muestran en la tabla siguiente:

| *Mes* | *Concepto* | *Costo (₡ miles)* |
|---|---|---|
| *0* | *Compra del equipo* | *102* |
| *1-15* | *Mantenimiento mensual de exploración* | *21* |
| *16-20* | *Mantenimiento mensual de exploración* | *25,5* |
| *20* | *Equipo adicional* | *62,8* |
| *21-27* | *Mantenimiento mensual de la exploración* | *26,6* |
| *28* | *Evaluación de yacimiento* | *10,8* |
| *29* | *Costos de instalaciones de explotación* | *1005* |

Las estimaciones hechas por expertos señalan que es posible obtener una cantidad mensual del metal con un valor neto de ₡32.000 por un periodo de 8 años a partir del mes 30, al cabo de los 8 años la veta se agotaría. El valor de salvamento de todos los equipos e instalaciones se estima en ₡250.000. Determinar la TIR anual de la inversión a lo largo de la vida del proyecto.

3. Un proyecto minero requiere una inversión inicial de ₡1 millón y producirá ingresos de ₡500 mil por los próximos 6 años, en el año 7 existirá un equilibrio entre ingresos y egresos y en el año 8 se habrá agotado la mina y al devolver el terreno será necesario dejarlo en condiciones aptas para la agricultura lo cual se puede hacer a un costo estimado de ₡1,5 millones.

   **a.** Hallar la rentabilidad del proyecto.

**b.** La TIRV suponiendo una tasa de financiación del 30% y una tasa de rein versión del 25%.

4. Se requiere un equipo para hacer el mantenimiento de los ascensores de un edificio de oficinas para los próximos ocho años y se han encontrado dos alternativas en el mercado local. La primera es utilizar una maquina electromecánica que tiene una vida útil de cuatro años, un costo inicial de ₡2.500 el valor del equipo nuevo aumentará cada año un 25%. El costo de operación del equipo es ₡50 el primer mes, el cual aumentará un 3% mensualmente durante los ocho años; se requiere de un operario con un salario de ₡310 mensuales durante el primer año, creciendo un 8% anual pero constante dentro de cada año. El valor de salvamento es el 20% del valor de compra. La segunda alternativa es contratar un servicio de mantenimiento que tiene un costo semestral de ₡1.020 durante los primeros cuatro años y ₡2.300 para los restantes cuatro años. Los materiales a utilizar tienen un costo de ₡4.650 anuales, los cuales se pagan por anticipado. Si se ha establecido una tasa de oportunidad del 23% SV. ¿Cuál alternativa debe elegirse?

5. Un proyecto agrícola requiere de una inversión hoy de ₡25.000 y luego inversiones así: ₡5.000 en un año y ₡3.000 en dos años. Los ingresos mensuales se estiman en ₡1.800 el primer mes y luego aumentarán en el 1,5% cada mes, y tendrá un valor de mercado de ₡10.000 al cabo de tres años, los egresos se estiman en ₡1.000 mensuales. Si el inversionista tiene una tasa de oportunidad del 28,5% anual, determinar el valor presente neto del proyecto y decidir si se debe llevar a cabo, suponiendo que el inversionista tiene como meta ganar, en pesos de hoy, al menos el 25% del valor de las inversiones actuales.

6. Un proyecto de producción de jugo natural está estudiando la posibilidad de construir una planta para producir los envases plásticos que requiere anualmente ₡1.000 en promedio aproximadamente a un precio determinado el cual crecerá cada año en un 5% según la inflación estimada. La inversión inicial requerida para esta planta será de ₡500.000; su valor de salvamento después de 10 años será de ₡200.000 y sus gastos anuales de materias primas y mantenimiento son de ₡25.000 el primer año y luego se incrementan cada año el 8%; los costos de mano de obra se estiman en ₡1.500 mensuales el primer año aumentando en ₡200 anualmente pero constantes en cada año. Si la tasa de oportunidad de la fábrica es del 26,82% anual bimestre vencido, ¿para qué precio de envase debería la fábrica de jugo natural construir la planta? Analice la respuesta.

7. Un inversionista dispone de un capital de ₡500.000 para realizar una de estas dos alternativas:

*	Comprar una fábrica a un costo de ₡460.000 y venderla al cabo de 4 años por ₡1,05 millones. La fábrica producirá ingresos de ₡100.000 el primer año, los cuales crecerán un 25% anual. El dinero restante se utilizará para abrir un fondo de inversión que reconoce una tasa de interés del 10% nominal semestre vencido (N.S.V.) y al final de los 4 años recibe el capital más los intereses.

*	Comprar un parqueadero por valor de ₡400.000; el cual se pondrá al servicio del público durante 4 años con ingresos de ₡200.000 anuales vencidos, los cuales crecerán un 20% anual. El parqueadero se podrá vender al final de los 4 años por un valor de ₡100.000. El dinero restante se invertirá en un fondo de inversión en las mismas condiciones de la primera alternativa.

Suponiendo que el inversionista espera obtener un rendimiento del 8% E.A.

**a.** Calcule las utilidades o pérdidas a pesos de hoy para cada alternativa y decida en cual alternativa invertir.
**b.** Calcule las utilidades o pérdidas anuales equivalentes de cada alternativa y establezca que inversión realizar.
**c.** Calcule la TIR y establezca que inversión realizar
**d.** Calcule la tasa verdadera de rentabilidad para cada alternativa y verifique la decisión a tomar.

# 10. INGENIERÍA ECONÓMICA DE SOFTWARE

## PREÁMBULO

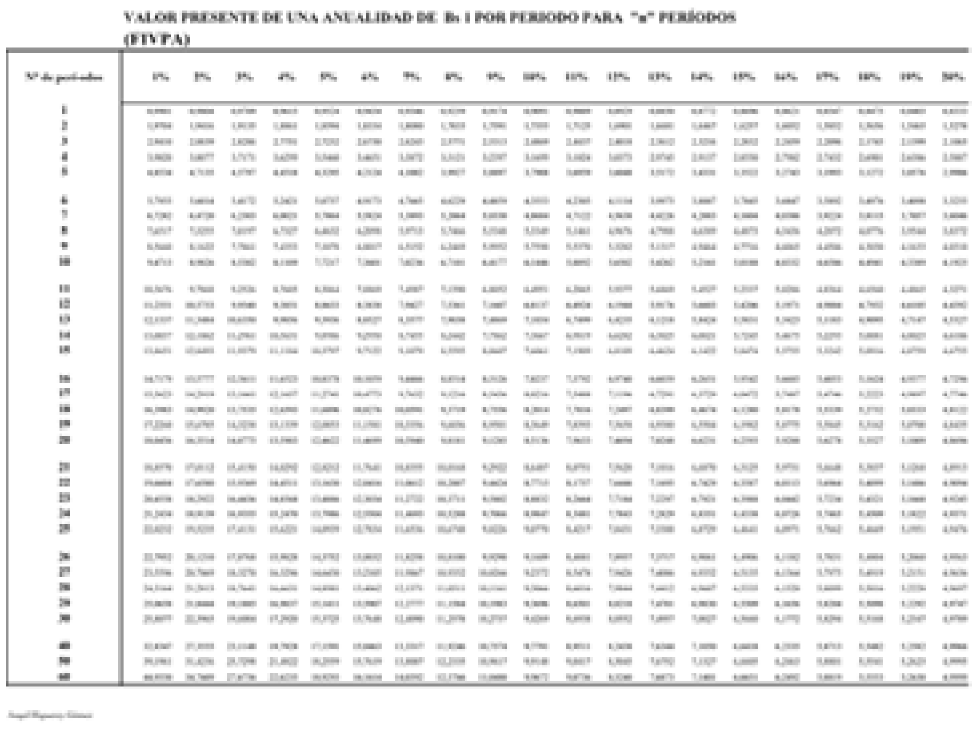
Los temas de ingeniería económica vistos en este texto se pueden desarrollar con cualquier calculadora científica, sin embargo puede resultar dispendioso adelantar ciertas operaciones como amortizaciones y análisis de inversiones dependiendo del número de periodos o situaciones a analizar. Ante este escenario y con el desarrollo de los instrumentos informáticos, muchas de estas operaciones quedan reducidas a la introducción de unos cuantos parámetros y en pocos segundos obtener el resultado.

En este texto hemos dejado de último la posible utilización de herramientas de software informático, pues se privilegia el desarrollo cognitivo de los lectores, analizando fórmula a fórmula cada uno de los temas que comprenden la materia. Las herramientas informáticas son justamente eso, una ayuda para el lector en la solución de las múltiples situaciones financieras que se le puedan presentar, pero es él quien en primera instancia, debe realizar el proceso mental de planteamiento del problema, y es allí donde consideramos que el presente texto hace su mejor aporte.

## 10.1. Definiciones

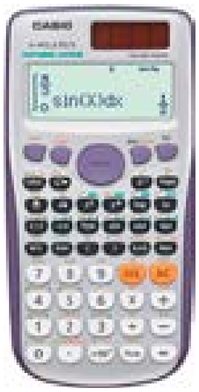
El desarrollo de la ingeniería económica ha pasado por diferentes niveles tecnológicos a la hora de resolver las situaciones financieras que se presentan rutinariamente a personas, hogares y empresas. Primero fueron las Tablas Financieras, luego las calculadoras científicas, las calculadoras financieras, Excel, Softwares especializados y finalmente las App. Todas ellas con sus especificidades constituyen herramientas valiosas para la ingeniería económica.

## 10.2. Tablas Financieras



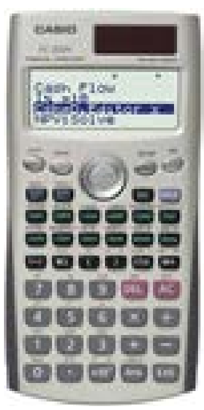

Previo al desarrollo y uso frecuente de las calculadoras científicas, la solución de problemas financieros se llevaba a cabo mediante el uso de tablas financieras como la mostrada arriba, a través de la cual era posible hallar valores puntuales de valores presentes, valores futuros, amortizaciones, anualidades, entre otros, tomando como factor, la intersección entre la tasa de interés (i) y el número de periodos (n). En la actualidad su uso está descontinuado, dado el número limitado de opciones que presentaba y la masificación de las calculadoras científicas.

## 10.3. Calculadoras Científicas



En el apartado 2.6 de este texto, se hizo una importante alusión al uso de las calculadoras científicas en la solución de todo tipo de problemas financieros. Al final de cuentas, cada situación lleva a resolver una o varias ecuaciones a la que se ingresan parámetros (variables) y se despejan los valores solicitados. Pero las calculadoras científicas también presentan limitaciones, en el sentido de ser ineficientes a la hora de obtener operaciones extensas e iteraciones como en anualidades, gradientes, amortizaciones, saldos y análisis de inversiones principalmente, a partir de lo cual se desarrolló y extendió el uso de calculadoras financieras

## 10.4. Calculadoras Financieras

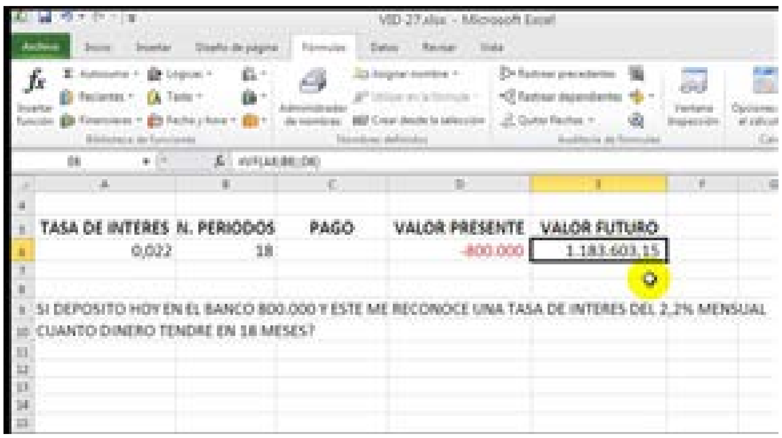


Ante las limitaciones de las calculadoras científicas en el cálculo de algunos temas de interés para la ingeniería económica, surgen las calculadoras financieras y agilizan dichas operaciones mediante el desarrollo de software específico. Por ejemplo, basta con oprimir algunas teclas y encontrar el valor exacto de la TIR luego de múltiples iteraciones ejecutadas por los algoritmos internos de la calculadora. Así mismo facilita en pocos segundos el cálculo de amortizaciones, saldos y otros conceptos de mayor complejidad. Sin embargo, con el desarrollo de los teléfonos inteligentes y la posibilidad de tener los aplicativos virtuales de calculadoras financieras mediante app´s, éstas entran en desuso

## 10.5. Aplicativos Informáticos Para Móviles (APP)

Con el desarrollo de los Smartphone o teléfonos de última generación de tecnología táctil, también sobreviene el desarrollo de múltiples aplicativos para celulares incluyendo las aplicaciones financieras o app´s financieras, independiente del sistema operativo que utilicen. Estos aplicativos informáticos vienen a reemplazar, sin superar las ya descritas calculadoras financieras en la solución de problemas de este tipo.

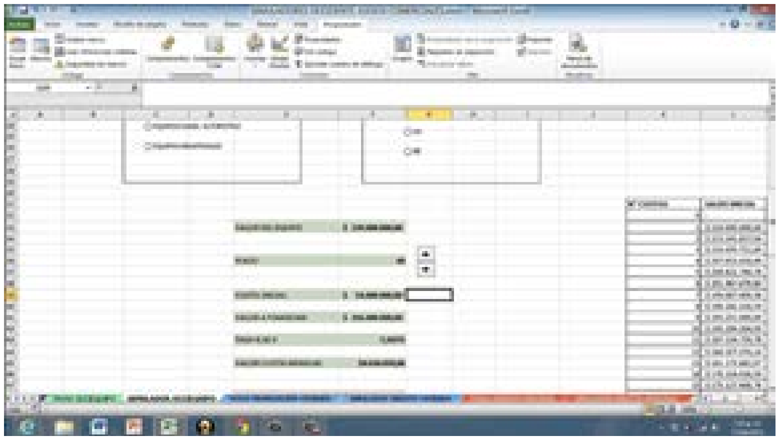
## 10.6. Excel




Paralelo al desarrollo de las calculadoras científicas y financieras, también se desarrolla los softwares computacionales, entre ellas las hojas de cálculo, y quien logra sobresalir es el programa informático Excel, visualizado arriba. A través de Excel y utilizando el menú de fórmulas financieras puede obtenerse los resultados para todos los temas de la ingeniería económica. Mediante el estudio juicioso de los manuales de Excel y de este texto, el lector tendrá la capacidad de resolver sin ambigüedades cualquier situación financiera en un tiempo prudente. Sin embargo, muchas empresas y entidades bancarias requerían hallar soluciones financieras específicas más allá de las generalidades ofrecidas por Excel, ante lo cual desarrollan sus propios sistemas informáticos. Que ofrezca mayor agilidad y facilidad de uso para sus empleados y eficiencia en la atención de sus usuarios.

## 10.7. Sofware Especializado

Como se menciona arriba, muchas empresas y entidades financieras deciden desarrollar sus propios aplicativos informáticos para dar respuesta oportuna a sus clientes. Por ejemplo, todas las entidades financieras cuentan con software para la simulación de las cuotas que un solicitante de crédito debe cancelar cada periodo según tasa y término escogidos.



Queda claro el importante avance tecnológico suscitado en la solución de problemas financieros cotidianos de personas, hogares y empresas. Pero todos ellos no superan la condición de herramienta, debiendo ser el lector, quien desarrolle el proceso mental de planteamiento del problema y utilice la herramienta que tenga a disposición o manejo para su eficiente solución.

## RESUMEN CAPÍTULO 10: ingeniería Económica de Sofware

En este capítulo se analizaron los diferentes niveles tecnológicos por los que se ha atravesado en la solución de problemas de ingeniería económica, desde las tablas financieras hasta los softwares especializados. Hemos insistido en que con una sencilla calculadora científica, el lector podrá dar solución a todas las situaciones que se le puedan presentar, sin embargo, reconocemos que herramientas como el Excel o las aplicaciones financieras para móviles pueden ayudarle a optimizar tiempo y esfuerzo.

Se ha relegado el uso de estas herramientas informáticas al último capítulo del texto, de manera intencional, por cuanto se ha privilegiado el desarrollo cognitivo de los lectores, analizando fórmula a fórmula cada uno de los temas que comprenden la materia.

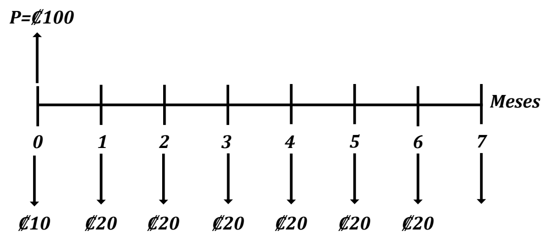
# RESPUESTA A LOS EJERCICIOS PROPUESTOS

## Respuesta Ejercicios Impares

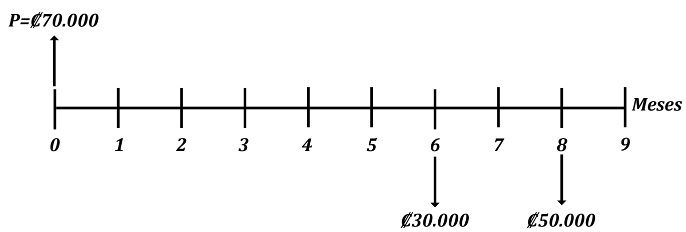
### CAPÍTULO I: CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1. R/.
   a) 0,25;
   b) 0,04;
   c) 0,083;
   d) 0,14;
   e) 0,1963;
   f) 0,2

3. R/. P= ₡625
5. R/. F= ₡565
7. R/. No, porque no se deben sumar capitales de diferentes periodos de tiempo.




9. R/.




## CAPÍTULO 2: NOCIONES DE MATEMÁTICAS BÁSICAS

1. R/. a) 2; b) 8; c) 48; d) -6; e) 5; f) -108; g) 45; h) 80; i) -105; j) -3; k) 10; l) -16; m) 27; n) 9

3. R/. a) 32,21793003; b) 1,78997781; c) 0,67564014

5. R/. a) 10 horas diarias; b) 4 días: c) 30 días

7. R/. a19=-151,5

9. R/. $a_1$=400; $a_2$=800; $a_3$=1.200;

11. R/. d=₡500
13. R/. $a_3+a_{10}$=53½
15. R/. $S_{15}$=32.769
17. R/. $S_{14}$==₡32.769
19. R/. $a_1$=½
21. R/. $S_5$=₡21.100
23. R/. $a_6$=₡36.400

#### CAPÍTULO 3: EL INTERÉS SIMPLE

1. R/. a) I=₡133,33:
b) I=₡945;
c) I=₡255;
d) I=₡695,83

3. R/. La mejor oferta es la a)

a) P=₡91.665,86
c) P=₡89.891,76
b) P=₡90.770,23

5. R/. P=₡3.676,47
7. R/. r=4,84% mensual
9. R/. t=12,5 años

11. R/. D=₡3.024,89;
P=₡79.975,11

13. R/. r=46,36% anual;
d=35,42% anual

15. R/. X=₡1.844,44
17. R/. X=₡2.130,4
19. R/. TIR=31,18%

#### CAPÍTULO 4: EL INTERÉS COMPUESTO

1. R/. a) F=₡16.310,19; c) F=₡21.952,72;
b) F=₡493.979,54; d) F=₡55.934,38

3. R/. F=₡4.693,38

5. R/. a) F=₡2.396,98;
b) P=₡2.127,20

7. R/. F=₡3.809,78
9. R/. i=3,49% mensual
11. R/. n=17,9 meses

13. R/. a) r=24,72% SV;
b) r=28,56% TA

15. R/. Se recomienda invertir en el agro que genera un 30% EA de interés, mientras que el comercio solo garantiza un 26%EA de rendimiento.

17. R/. a) r=37,16% TV; c) r=35,05% MA;
b) r=36,06% MV; d) r=9,29% ET

19. R/. X=₡2.755,56
21. R/. n= 5 meses
23. R/. $X_1$=₡2.341,6 ; $X_3$=₡585,4;
$X_2$=₡1.170,8 ; $X_4$=₡292,7

25. R/. TIR=12,18%

**CAPÍTULO 5: SERIES FINANCIERAS FIJAS: ANUALIDADES**

1. R/. R=₡96,304
3. R/. n=20,28 Trimestres (5 años, 25 días)

5. R/. a) r=28,81% MV;
b) r=32,94% EA

7. R/. F=₡68.317,412
9. R/. P=₡16.512,064
11. R/. F=₡23.349,276
13. R/. R=₡3.171,45
15. R/. R=₡32,155

**CAPÍTULO 6: SERIES FINANCIERAS VARIABLES: GRADIENTES**

1. R/. a) a12= ₡3.400;
   b) F= ₡98.079,70439

3. R/. P=₡189,1852803;
   R= ₡17,225;
   F= ₡260,794

5. R/. K=₡284.870,4146
7. R/. P= ₡9'.888.888,89
9. R/. G=₡1,83
11. R/. F=₡160.087,08
13. R/. $a_7$=₡531.498,6
15. R/. K= -₡22,431

**CAPÍTULO 7: AMORTIZACIÓN Y SALDOS**

1. R/. C= ₡381,7197

| *Periodo* | *Cuota* | *Interés* | *Amortización* | *Saldo* |
|---|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *0* | *1000* |
| *1* | *0* | *0* | *0* | *1100* |
| *2* | *0* | *0* | *0* | *1210* |
| *3* | *381.72* | *121.00* | *260.72* | *949.28* |
| *4* | *381.72* | *94.93* | *286.79* | *662.49* |
| *5* | *381.72* | *66.25* | *315.47* | *347.02* |
| *6* | *381.72* | *34.70* | *347.02* | *0.00* |

3. R/. $I_{64}$= ₡43.510,12;
   $A_{64}$= ₡3.270,52.

5. R/. $S_{60}$= ₡4'640.945,31

7. R/. $S_3$ Bancos= ₡1' 828,08;
   $S_3$ Ahorros= ₡2.784,60

9. R/. C= ₡1' 274,76
11. R/. a) n= 38,3 meses;
b) C18= ₡2.387,718;
c) I25= Intereses=₡511,059;
$A_{25}$= ₡2.048,898

**CAPÍTULO 8: TASAS ESPECIALES DE INTERÉS**

1. R/. ik= 16,075%
3. R/. ₡102,4
5. R/. iN= 10,5%

7. R/. a) R/. I= ₡90; c) iN=4,19% trimestral;
b) IN = ₡83,7; d) iR=negativo

9. R/. a) $i_R = \frac{(i-i_f)}{(1+i_f)} = \frac{(0,243-0,10)}{(1+0,10)} = 0,13;$

b) 24,3%=(1,10)(1,13)

11. R/. $i_E$= 24,12%
13. R/. k= 12,592% EA.

**CAPÍTULO 9: ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN**

1. R/. VAN= ₡6.514,08;
CAUE= ₡189,57

3. R/. a) TIR=38,769%;
b) TIRV=28,49%

5. R/. VAN= ₡5.097,60. El 25% del valor de las inversiones en pesos de hoy es de ₡7.676,97, por lo tanto no debe llevar a cabo el proyecto.

7. R/. a) $VAN_1$= ₡761.645,42;
$VAN_2$= ₡607.126,74;
b) $CAUE_1$= ₡229.956,60;
$CAUE_2$= ₡183.304,19;
c) $TIR_1$= 46,4%;

TIR2= 56,5%;
d) TIRV1= 39,6%;
TIRV2= 37,7%

# Respuesta Ejercicios Pares

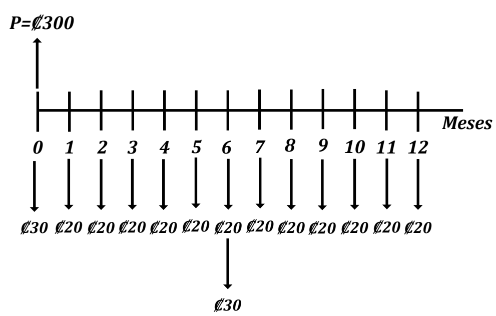
### CAPÍTULO I: CONCEPTOS FUNDAMENTALES

2. R/. a) I= ₡250;
b) i= 45,45% Cuatrimestral

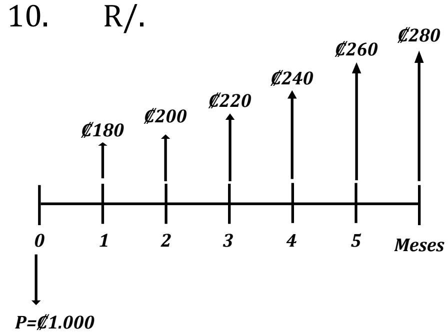
4. R/. a) i= 25%; d) i= 125%;
b) i= 50%; e) i= 140%;
c) i= 60%; f) i= 150%

6. R/. La deuda no termina de pagarse nunca, y si solo le paga ₡5 mensuales, la deuda aumenta.

8. R/. No hizo ningún negocio, pues desconoció el valor del dinero en el tiempo y perdió la oportunidad del cobro de intereses.




10. R/.



**CAPÍTULO 2: NOCIONES DE MATEMÁTICAS BÁSICAS**

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2. | R/. | a) 11,38; | g) 15,27; |
| | | b) 9,64; | h) 1,80; |
| | | c) 185,24; | i) 0,12; |
| | | d) 22,26; | j) 205,95; |
| | | e) 8,30; | k) 79,06; |
| | | f) 0,08; | l) 14,25; |
| 4. | R/. | a) X=-4,4444; | d) t=-3,5; |
| | | b) Y=7; | e) m=-45; |
| | | c) Z=9,33; | f) n=238,69 |
| 6. | R/. | n=45; d=6 | |
| 8. | R/. | $a_{10}$= ₡3.505; | |
| | | $S_{13}$= ₡32.890 | |
| 10. | R/. | $a_2$=8; | $a_4$=14; |
| | | $a_3$=11; | $a_7$=23 |
| 12. | R/. | $a_1$=₡4.200 | |
| 14. | R/. | $a_6$=-27 | |
| 16. | R/. | $a_9$=₡2.187; | |
| | | $S_9$=₡3.280,3333 | |
| 18. | R/. | $a_1$* $a_9$=1/216 | |
| 20. | R/. | $a_6$=0,033376241 | |
| 22. | R/. | r=1,028114407 (tasa de crecimiento 2,81% anual) | |

**CAPÍTULO 3: EL INTERÉS SIMPLE**

| | | |
|---|---|---|
| 2. | R/. | a) ₡1.450; |
| | | b) ₡900 |
| 4. | R/. | P=₡122.220,93; |
| | | r=6,8% |
| 6. | R/. | F=₡1.580 |
| 8. | R/. | r=6,67% trimestral |
| 10. | R/. | t=40 meses |

12. R/. F=₡17.288,14
14. R/. r=40% anual
16. R/. X=₡6.632,51

18. R/. *Fondo 1* (10%)=₡40.000;
*Fondo 2* (15%)=₡60.000

20. R/. TIR=17,51% anual

**CAPÍTULO 4: EL INTERÉS COMPUESTO**

2. R/. F=₡13.273,68
4. R/. F=₡1.111,89
6. R/. P=₡20.218,23

8. R/. La mejor oferta es la b)
a) P=₡100.000;
b) P=₡101.867,16;
c) ₡100.466,73

10. R/. n=40 meses
12. R/. n=14 trimestres

14. R/. La mejor oferta es la b)
a) r*=33,33% EA;
b) r*=26,47% EAA;
c) r*=25,64% EAA

16. R/. r=35% TA
18. R/. X=₡1.930,16

20. R/. $X_1$=₡985,2;
$X_2$=₡1.014,8

22. R/. n=811,13 días
24. R/. TIR=2,27% EA

**CAPÍTULO 5: SERIES FINANCIERAS FIJAS: ANUALIDADES**

2. P=₡910.155,007

4. R/. La mejor oferta es la b)
a) n=34,83 pagos de ₡1.000;
b) X=₡2.269,82 efectuado conjuntamente con el pago 34;
c) X=₡537,92 efectuado en el mes 35

6. R/. F=₡304,752
8. R/. P=₡151.876,599,15
10. R/. R=₡309,189
12. R/. R=₡215,191
14. R/. P=₡356,936

### CAPÍTULO 6: SERIES FINANCIERAS VARIABLES: GRADIENTES

2. R/. P=₡112.696,4607;
F=₡202.960;
R=₡10.136,04368

4. R/. n= 69,33 meses
6. R/. P= ∞
8. R/. R=₡3.382,494027

10. R/. a) ¿En unidades monetarias de hoy?
R/ ₡5.719.285,12;
b) ¿En unidades monetarias futuras?
R/ ₡8.154.333,583

12. R/. P= ₡1'579.278,41

14. R/. a) d25=₡120,986;
b) P= ₡34.703,46

16. R/. Cuotas primer año: ₡1.315,465582;
Cuotas segundo año: ₡1.394,393517;
Cuotas tercer año: ₡1.478,057128;
Cuotas cuarto año: ₡1.566,740555

### CAPÍTULO 7: AMORTIZACIÓN Y SALDOS

2. R/. C= ₡315,4708

| *Periodo* | *Cuota* | *Interés* | *Amortización* | *Saldo* |
|---|---|---|---|---|
| *0* | *0* | *0* | *0* | *1000* |
| *1* | *0* | *100* | *0* | *1000* |
| *2* | *0* | *100* | *0* | *1000* |
| *3* | *315.47* | *100.00* | *215.47* | *784.53* |
| *4* | *315.47* | *78.45* | *237.02* | *547.51* |
| *5* | *315.47* | *54.75* | *260.72* | *286.79* |
| *6* | *315.47* | *28.68* | *286.79* | *0.00* |

4. R/. C= ₡10.426,67.
6. R/. C= ₡367,85
8. R/. C= ₡34,46
10. R/. $C_1$= ₡15.800,53

12. R/. $C_3$= ₡546,827;
$S_{10}$= ₡90.405,045

**CAPÍTULO 8: TASAS ESPECIALES DE INTERÉS**

2. R/. La propiedad se desvalorizó en ₡1.426, equivalente 0,61 puntos porcentuales (8%-7.395) por año.
4. R/. r*=8,55% EA.

6. R/. a) ₡47.160,21;
b) 5,68% cuatrimestral.

8. R/. Primera opción.
10. R/. ₡23.326
12. R/. $i_E$= 16,99%

**CAPÍTULO 9: ANÁLISIS DE ALTERNATIVAS DE INVERSIÓN**

2. R/. TIR= 10,68% E.A.
4. R/. VAN (comprar maquina)= - ₡29.610,80;
VAN (contratar servicio)= - ₡26.495,91. Se debe contratar el servicio de mantenimiento.
6. R/. Precio= ₡14,507. Produce un VAN=0.

# BIBLIOGRAFÍA

Baca Currea, Guillermo (1994). Ingeniería Económica. Tercera Edición. Editorial Educativa. Bogotá, Colombia.

Cissel, Robert, Cissell, Hellen & Flaspohler, David C. (1996). Matemáticas Financieras. Novena Edición. Compañía Editorial Continental. México.

Domingo Ajenjo, Alberto (2000). Dirección y Gestión de proyectos: un enfoque práctico. RAMA Editorial. Madrid, España.

García, Jaime A. (1997). Matemáticas Financieras. Tercera Edición

Méndez Lozano, Rafael (2010). Formulación y Evaluación de Proyectos: Enfoque para emprendedores. Sexta Edición. JCV Ediciones. Bogotá, Colombia.

Meza Orozco, Jhonny de Jesús (2004). Matemáticas Financieras Aplicadas. Segunda Edición. Ecoe Ediciones. Bogotá, Colombia.

Editorial
Universidad de Nariño

Fecha de Publicación: 23 de noviembre 2020
San Juan de Pasto-Nariño-Colombia

*Ingeniería Económica ¡para todos!* es un texto que busca la inserción efectiva de estudiantes, docentes y profesionales en el interesante mundo de las decisiones financieras. Para el efecto, provee los conocimientos básicos necesarios y, se constituye en una herramienta fundamental, actualizada y equilibrada para manejar las finanzas de manera eficiente teniendo en cuenta los factores de tiempo, rentabilidad y oportunidades de inversión.

El presente libro es producto de más de 20 años de experiencia de su autor en la respectiva temática y su interés por contribuir en su fácil aprehensión, tras observar su ponderada importancia en la mayoría de carreras económicas, administrativas, contables y de ingenierías y la inoficiosa complejidad que se agrega a su proceso de enseñanza y aprendizaje.

El texto en sus 10 capítulos, recorre los elementos esenciales de la ingeniería económica iniciando con los conceptos básicos, pasando por el análisis de los tipos de interés y las series financieras, hasta llegar al análisis de alternativas de inversión, aportando la rigurosidad matemática de cada ítem, la solución pormenorizada de ejercicios de profundización y ejercicios de repaso.

Se espera que *Ingeniería Económica ¡para todos!* sea la fuente predilecta de consulta y guía en la enseñanza de una disciplina transversal y de mucha aplicación en la cotidianidad de personas, hogares y empresas en todo el mundo.

Editorial
Universidad de Nariño