

**ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN UN SISTEMA ANISOTROPO  
UNIAXICO UNIDIMENSIONALMENTE PERIODICO**

**FRANCIS ARMANDO SEGOVIA CHAVES**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO  
2003**

**ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN UN SISTEMA ANISÓTROPO  
UNIAXICO UNIDIMENSIONALMENTE PERIODICO**

**FRANCIS ARMANDO SEGOVIA CHAVES**

**Trabajo de grado para optar el titulo de Físico**

**Director**

**Alvaro Rugeles Pérez**

**Doctor en Ciencias Físicas**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA  
SAN JUAN DE PASTO  
2003**

**Nota de aceptación**

---

---

---

---

**Presidente del Jurado**

---

**Jurado**

---

**Jurado**

---

**Ciudad y fecha (día, mes, año)**

## **AGRADECIMIENTOS**

Es un deber presentar mis agradecimientos a las personas que confiaron en mí para hacer posible la culminación de este trabajo:

A mi madre, a pesar de todas las dificultades seguirá siendo un estímulo en mi vida para alcanzar un futuro mejor.

Alvaro Rugeles, Doctor en Ciencias Físicas y director de tesis, por su dedicación a mí fundamentación teórica y las incansables horas de estudio compartidas y sobre todo, por la amistad brindada en el transcurso de mi carrera para que pudiera salir adelante en los momentos más difíciles.

Al profesor German Ramos, Sandra Ramos, y Carolina Villota porque me colaboraron académica y personalmente.

## **CONTENIDO**

RESUMEN	
INTRODUCCION	
1. OBJETIVOS	
2. PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN MEDIOS ANISOTROPOS	
2.1 RELACIONES FUNDAMENTALES DE LA ELECTRODINAMICA	13
2.1.1 Ecuaciones de Maxwell.	13
2.1.2 Relaciones constitutivas.	14
2.1.3 Relaciones energéticas.	15
2.2 PROPAGACION DE ONDAS MONOCROMATICAS PLANAS EN MEDIOS ANISOTROPOS	15
2.2.1 Campos monocromáticos.	16
2.2.2 Medios anisótropos.	17
2.2.3 El tensor dieléctrico.	17
2.2.4 Definición de onda plana.	18
2.2.5 Estructura de la onda plana en un medio anisótropo.	19
2.2.6 Ecuación de ondas planas y relación de dispersión.	20
2.2.7 Vectores de onda.	22
2.2.8 Vectores de campo eléctrico $E_1$ y $E_2$ .	23
2.2.9 Ortogonalidad de los vectores de inducción eléctrica $D_1$ y $D_2$ .	25
2.2.10 Velocidad de fase y velocidad de energía.	28
3. SISTEMA ANISOTROPO UNIAXICO UNIDIMENSIONAL PERIODICO.	
3.1 FENOMENO DE DOBLE REFRACCION	32
3.2 RELACIONES DE DISPERSION	35
3.2.1 Relación de dispersión del medio dieléctrico isótropo.	35
3.2.2 Relación de dispersión del medio dieléctrico anisótropo.	36
3.3 CALCULO DE LOS VECTORES DE ONDA.	38
3.4 VECTORES DE CAMPO DE LAS ONDAS ORDINARIA	

Y EXTRAORDINARIA.	41
3.5 PROPAGACION DE UNA ONDA PLANA EN UN SISTEMA ANISOTROPO UNIAXICO CON VARIACION UNIDIMENSIONAL PERIODICA DEL TENSOR DE PERMITIVIDAD DIELECTRICA EN LA DIRECCION DEL EJE OPTICO	
3.5.1 Onda incidente con $E_i$ perpendicular al plano XOZ.	45
3.5.2 Onda incidente con $E_i$ paralelo al plano XOZ.	51
3.5.3 Reflectancia y Transmitancia.	52
4. CONCLUSIONES.	57
BIBLIOGRAFIA	59

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
<b>Figura 1.</b> Estructura de una onda plana en un medio anisótropo.	19
<b>Figura 2.</b> Cortes de las superficies de vectores de onda: a) en el plano YOZ; b) en el plano XOY; c) en el plano XOZ.	23
<b>Figura 3.</b> Ortogonalidad de los vectores $D_1$ y $D_2$ .	26
<b>Figura 4.</b> Representación esquemática de un sistema unidimensionalmente periódico.	30
<b>Figura 5.</b> Representación gráfica del fenómeno de doble refracción.	33
<b>Figura 6.</b> Cortes del elipsoide y esfera de vectores de onda en el plano XOZ: a) cuando $\varepsilon_{\perp} < \varepsilon_{\parallel}$ . b) cuando $\varepsilon_{\perp} > \varepsilon_{\parallel}$ .	37
<b>Figura 7.</b> Vectores de onda en un sistema unidimensionalmente anisótropo uniaxial.	38
<b>Figura 8.</b> Representación de un periodo $L$ compuesto por las capas 1 y 2.	49
<b>Figura 9.</b> a) curvas de $R$ y $T$ cuando $E_i$ es perpendicular al plano de incidencia. b) curvas de $R$ y $T$ cuando $E_i$ es paralelo al plano de incidencia. La ley de la conservación de la energía $R+T=1$ esta dada por la recta.	54
<b>Figura 10.</b> Comparación de las curvas de $T$ en función de $\frac{l}{\lambda}$ cuando $E_i$ es perpendicular al plano de incidencia y cuando $E_i$ es paralelo al plano de incidencia.	54
<b>Figura 11.</b> Comparación de las curvas de $R$ en función del ángulo de incidencia (radianes) cuando $E_i$ es perpendicular al plano de incidencia y cuando $E_i$ es paralelo al plano de incidencia .	55

## GLOSARIO

**Anisotropía:** dependencia de los parámetros constitutivos de un medio con la dirección del campo electromagnético aplicado.

**Cristales:** estructuras atómicas formadas por la ordenación regular de átomos y con propiedades de simetría bien definidas.

**Dispersión:** dependencia del módulo del vector de onda con la frecuencia.

**Eje óptico:** dirección de propagación de una sola onda.

**Periodicidad:** repetición regular una y otra vez de un fenómeno en el espacio, tiempo o ambos.

**Uniaxiales:** cristales con solo un eje óptico.

## RESUMEN

Se describe la propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas planas a través de un sistema anisotrópico de extensión finita con variación unidimensional periódica del tensor de permitividad dieléctrica. Aplicando un método matricial se obtiene la matriz característica del sistema que permite cuantificar las propiedades de polarizador del sistema y se construyen curvas de reflectancia y transmitancia en función del espesor de las capas periódicas.

## **ABSTRACT**

The propagation of flat monochromatic electromagnetic waves is described, to travel through a system anisotropic of finite extension, with periodic inidimensional variation of the tensor of dielectric. Applying the method of matrix the first characteristic of the system is obtained, that allows to quantify the properties of the polarizer of the system and to construct curves of reflectance and transmittance in function of the thickness of the periodic layers.

## INTRODUCCION

El presente trabajo de pregrado del Programa de Física de la Universidad de Nariño titulado "Ondas Electromagnéticas en un Sistema Anisótropo Uniaxial Unidimensionalmente Periódico" desarrolla los objetivos enunciados mas adelante en dos partes. En la primera se exponen los principios que rigen la propagación de una onda electromagnética monocromática plana en un dieléctrico no magnético y eléctricamente anisótropo de extensión infinita. En la segunda parte se describe la propagación de una onda electromagnética monocromática plana a través de un sistema anisótropo de extensión finita con variación unidimensional periódica del tensor de permitividad dieléctrica. Este trabajo reviste de importancia ya que permite esclarecer los efectos de la combinación simultanea de factores de anisotropía y periodicidad.

## 1. OBJETIVOS

### 1.1 OBJETIVO GENERAL

Investigar las propiedades de propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas planas en un sistema anisótropo uniaxial con variación unidimensionalmente periódica del tensor de permitividad dieléctrica.

### 1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

1.2.1 Investigar los principios y métodos utilizados en la electrodinámica para el estudio de ondas en sistemas anisótropos y periódicos.

1.2.2 Determinar las propiedades de propagación de ondas electromagnéticas en un sistema anisótropo uniaxial unidimensionalmente periódico, cuyo tensor de permitividad dieléctrica está dado por:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix},$$

siendo este tensor función periódica de la coordenada  $Z$ .

$$\varepsilon(z) = \varepsilon(z + \Lambda).$$

## **2. PROPAGACION DE ONDAS ELECTROMAGNETICAS EN MEDIOS ANISOTROPOS**

En este capítulo se examinan los principios que rigen la propagación de una onda electromagnética monocromática plana en un dieléctrico no magnético y eléctricamente anisótropo de extensión infinita. En la primera parte se presenta algunas relaciones fundamentales de la electrodinámica las cuales se aplican en la segunda parte, en el análisis de la propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas planas en medios anisótropos. Este análisis es importante ya que sirve de fundamento para el estudio de sistemas compuestos, como el sistema examinado en el tercer capítulo.

### **2.1 RELACIONES FUNDAMENTALES DE LA ELECTRODINAMICA**

Los conceptos básicos de la teoría electromagnética se describen con ayuda de una serie de relaciones fundamentales como son: las ecuaciones de Maxwell, las relaciones constitutivas y las relaciones de energía.

**2.1.1 Ecuaciones de Maxwell.** El estudio macroscópico de los campos electromagnéticos se fundamenta en las ecuaciones de Maxwell[4,11,21]:

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho, \\
\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \\
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\
\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.1}$$

donde  $E, D, H$  y  $B$  son respectivamente los vectores: intensidad de campo eléctrico, inducción eléctrica, intensidad de campo magnético e inducción magnética; estas cantidades caracterizan el campo electromagnético. Las cantidades  $J$  y  $\rho$  son respectivamente: la densidad de corriente total y la densidad de carga eléctrica, estas cantidades representan las fuentes del campo electromagnético.

**2.1.2 Relaciones constitutivas.** Las ecuaciones de Maxwell (1.1):

Constituyen un conjunto de ocho ecuaciones que relacionan las componentes de los campos  $E, D, H$  y  $B$ , las cuatro ecuaciones homogéneas pueden resolverse formalmente expresando  $E$  y  $B$  en función del potencial escalar  $\phi$  y del potencial vectorial  $A$ , pero las ecuaciones no homogéneas no pueden ser resueltas hasta que los campos  $D$  y  $B$  sean conocidos en función de  $E$  y  $H$ . Estas relaciones se conocen con el nombre de relaciones constitutivas[11].

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= \vec{D} \left[ \vec{E}, \vec{B} \right], \\
\vec{B} &= \vec{B} \left[ \vec{E}, \vec{H} \right],
\end{aligned}
\tag{2.2}$$

además, para medios conductores debe considerarse la ley de Ohm generalizada.

$$J = J [E, B]. \quad (2.3)$$

Los corchetes significan que las relaciones no son necesariamente simples.

**2.1.3 Relaciones energéticas.** El campo electromagnético almacena energía siendo necesario establecer la relación entre esta energía y los vectores del campo electromagnético.

Las densidades de energía eléctrica y magnética están dadas por[19,21]:

$$\begin{aligned} w_E &= \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}, \\ w_H &= \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

La ley de la conservación de la energía se expresa:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \frac{\partial w}{\partial t} = - \vec{J} \cdot \vec{E}, \quad (2.5)$$

donde  $\vec{S}$  se llama vector de Poynting y  $w$  es la densidad de energía electromagnética.

## 2.2 PROPAGACION DE ONDAS MONOCROMATICAS PLANAS EN MEDIOS ANISOTROPOS

El estudio de la propagación de ondas electromagnéticas en medios dieléctricos (conductividad cero) se fundamenta en las ecuaciones de Maxwell

(2.1) sin fuentes, es decir, con  $J$  y  $\rho$  cero.

**2.2.1 Campos monocromáticos.** Cuando en cada punto del espacio el campo electromagnético realiza oscilaciones armónicas de frecuencia  $\omega$ , el campo se denomina monocromático[7,15]. En lo sucesivo se centra la atención en esta clase de campos, para los cuales, según la definición anterior, cada vector de campo se escribe de la forma:

$$F_C(r,t) = F(r) \cos(\omega t + f(r)), \quad (2.6)$$

donde  $F(r)$  y  $f(r)$  funciones reales de  $r$ .

El tratamiento de estos campos se facilita al introducir la notación compleja [21]. Según esta notación, (2.6) se escribe así:

$$F_C(r,t) = \Re e(F_\omega(r)e^{-i\omega t}), \quad (2.7)$$

donde  $F_\omega(r) = F(r)e^{if(r)}$ .

Por lo tanto las expresiones de los vectores de los campos electromagnéticos monocromáticos son:

$$\begin{aligned} \vec{E}(r,t) &= \Re e(\vec{E}_\omega(r)e^{-i\omega t}), \\ \vec{H}(r,t) &= \Re e(\vec{H}_\omega(r)e^{-i\omega t}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Las cantidades  $\vec{E}_\omega(r)$  y  $\vec{H}_\omega(r)$  se denominan amplitudes complejas.

Al reemplazar (2.8) en (2.1) se obtienen las ecuaciones de Maxwell para las amplitudes complejas:

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E}_\omega &= i\omega \vec{B}_\omega, \\ \nabla \times \vec{H}_\omega &= -i\omega \vec{D}_\omega, \\ \nabla \cdot \vec{D}_\omega &= 0, \\ \nabla \cdot \vec{B}_\omega &= 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Aplicando el operador de divergencia a las dos primeras ecuaciones en (2.9) se obtienen las otras dos, por lo tanto, estas ultimas no son independientes.

**2.2.2 Medios anisótropos.** Las ecuaciones (2.9) se complementan con las ecuaciones constitutivas (2.2) que dependen de las propiedades electromagnéticas del medio. En lo sucesivo se consideran medios lineales, homogéneos y eléctricamente anisótropos, siendo validas las siguientes ecuaciones constitutivas[7,12,14]:

$$\begin{aligned} \vec{D}_{\omega i} &= \varepsilon_{ij} \vec{E}_{\omega j}, \\ \vec{B}_{\omega} &= \mu \vec{H}_{\omega}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $\varepsilon_{ij}$  y  $\mu$  son respectivamente: el tensor de permitividad dieléctrica y la permeabilidad magnética escalar. Para medios dieléctricos lineales y homogéneos estas dos cantidades son reales y no dependen de los vectores de campo ni de las coordenadas espaciales. La primera relación de (2.10) describe la anisotropía eléctrica del medio, ya que los vectores de intensidad de campo eléctrico e inducción eléctrica no son paralelos entre si.

En el tratamiento de campos monocromáticos la dependencia de  $\hat{\varepsilon}$  y  $\mu$  con respecto a la frecuencia no es necesario considerarla.

**2.2.3 El tensor dieléctrico.** El tensor de permitividad dieléctrica describe las propiedades de anisotropía eléctrica del medio y se expresa así[2,5,23]:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Se puede demostrar que el cumplimiento de la ley de la conservación de la energía exige que el tensor real (2.11) sea simétrico[3]:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}. \quad (2.12)$$

Teniendo en cuenta la propiedad (2.12), el tensor (2.11) se diagonaliza en el sistema de coordenadas de sus ejes principales:

$$\hat{\varepsilon} \equiv \varepsilon_i \delta_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{pmatrix} \quad (i = x, y, z), \quad (2.13)$$

donde  $\delta_{ij}$  es la matriz unidad,  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  y  $\varepsilon_z$  son los valores principales de la permitividad dieléctrica. En los desarrollos subsiguientes se utilizara este sistema de coordenadas. Siendo así, la primera relación constitutiva de (2.10) se escribe:

$$\begin{aligned} D_{\omega x} &= \varepsilon_x E_{\omega x}, \\ D_{\omega y} &= \varepsilon_y E_{\omega y}, \\ D_{\omega z} &= \varepsilon_z E_{\omega z}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

y la densidad de energía eléctrica (2.4) mediante (2.14) se expresa:

$$w_E = \frac{1}{2} \left( \frac{D_x^2}{\varepsilon_x} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_y} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_z} \right). \quad (2.15)$$

**2.2.4 Definición de onda plana.** Un campo monocromático se denomina onda plana si los vectores de campo, además de cumplir la forma (2.8), satisfacen la condición adicional para las amplitudes complejas[4,7,22]

$$\begin{aligned} \vec{E}_\omega(\vec{r}) &= E \vec{e}^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}, \\ \vec{H}_\omega(\vec{r}) &= H \vec{e}^{i\vec{\kappa} \cdot \vec{r}}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

donde  $E = \text{const.}$  y  $H = \text{const.}$  son amplitudes y  $\kappa = \text{const.}$  es el vector de onda. Estas cantidades se determinan a partir de las ecuaciones de Maxwell (2.9) y las relaciones constitutivas (2.10).

**2.2.5 Estructura de la onda plana en un medio anisótropo.** A continuación se establece la estructura de la onda plana, es decir, las direcciones mutuas entre  $E, D, H$  y  $\kappa$ . Para tal efecto, se reemplazan las amplitudes complejas de los vectores de campo (2.16) en las ecuaciones de Maxwell (2.9):

$$\begin{aligned} \omega \vec{D} &= -\kappa \times \vec{H}, \\ \mu \omega \vec{H} &= \kappa \times \vec{E}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Estas relaciones junto con la definición del vector de Poynting[19,21]:

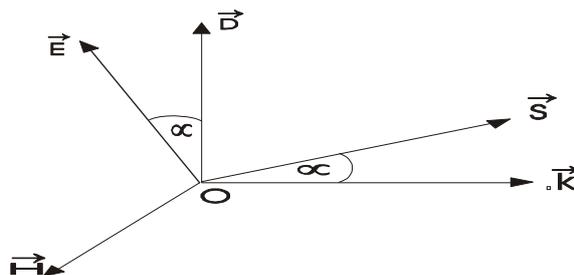
$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (2.18)$$

determinan las direcciones mutuas de los vectores implicados[14]:

- I. Forman dos grupos ortogonales entre sí: uno es  $D, H$  y  $\kappa$ , y otro  $E, H$  y  $S$ .
- II.  $H$  es perpendicular a  $E, D, S$  y  $\kappa$ , por lo tanto, estos últimos son coplanarios.
- III.  $S$  y  $\kappa$  no son paralelos entre sí.

Con los resultados anteriores queda establecida la estructura de una onda plana en un medio anisótropo, la cual se muestra en la figura 1.

**Figura 1. Estructura de una onda plana en un medio anisótropo.**



### 2.2.6 Ecuación de ondas planas y relación de dispersión. De las

ecuaciones de Maxwell para las amplitudes complejas (2.9) se deduce una ecuación de ondas para el vector de campo eléctrico. Se aplica el rotacional a la primera ecuación en (2.9):

$$\nabla \times (\nabla \times E_\omega) = i\omega \nabla \times B_\omega. \quad (2.19)$$

Combinando (2.19) con las relaciones constitutivas (2.10) y la segunda ecuación de Maxwell (2.9), se obtiene la ecuación de onda[5]:

$$\nabla \times (\nabla \times E_\omega) - \omega^2 \mu \hat{\epsilon} \cdot E_\omega = 0 \quad (2.20)$$

A continuación se examina la solución de (2.20) para un medio con  $\hat{\epsilon}$  y  $\mu$  constantes y reales.

Se reemplaza (2.10) en el segundo término de (2.20):

$$\nabla \times (\nabla \times E_\omega) - \omega^2 \mu D_\omega = 0. \quad (2.21)$$

Sustituyendo (2.16) en (2.21) y efectuando las operaciones necesarias, se escribe:

$$\vec{D} = \frac{1}{\omega^2 \mu} \left[ \kappa^2 \vec{E} - (\kappa \nabla \nabla \cdot) \vec{E} \right]. \quad (2.22)$$

Al igualar las componentes de la anterior expresión vectorial con  $D_i = \epsilon_{ij} E_j$  se tiene:

$$\left[ \epsilon_{ij} + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} (u_j u_i - \delta_{ij}) \right] E_j = 0, \quad (2.23)$$

donde  $\delta_{ij}$  se define como el delta de Kronecker y  $\kappa$  se representa por:

$$\kappa = \kappa u, \quad (2.24)$$

siendo  $u$  un vector unitario en la dirección de  $\kappa$ .

Utilizando el sistema de coordenadas de los ejes principales del tensor dieléctrico, se reemplaza (2.13) en (2.23) y se desarrolla el resultado en forma explícita:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} (u_x^2 - 1) & \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_x u_y & \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_x u_z \\ \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_x u_y & \varepsilon_y + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} (u_y^2 - 1) & \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_y u_z \\ \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_x u_z & \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_y u_z & \varepsilon_z + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} (u_z^2 - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = 0. \quad (2.25)$$

El sistema de tres ecuaciones algebraicas (2.25) contiene información sobre la amplitud  $E$  y el vector de onda  $\kappa$  que aparecen en la definición de onda plana (2.16).

La condición de existencia de soluciones no triviales de (2.25) con respecto a  $E$ , exige la igualdad a cero del determinante:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} (u_x^2 - 1) & \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_x u_y & \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_x u_z \\ \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_x u_y & \varepsilon_y + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} (u_y^2 - 1) & \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_y u_z \\ \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_x u_z & \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} u_y u_z & \varepsilon_z + \frac{\kappa^2}{\omega^2 \mu} (u_z^2 - 1) \end{vmatrix} = 0. \quad (2.26)$$

Desarrollando (2.26) se obtiene:

$$\begin{aligned} \kappa^4 \left[ \varepsilon_x u_x^2 + \varepsilon_y u_y^2 + \varepsilon_z u_z^2 \right] - \kappa^2 \omega^2 \mu \left[ u_x^2 \varepsilon_x (\varepsilon_y + \varepsilon_z) + u_y^2 \varepsilon_y (\varepsilon_x + \varepsilon_z) + u_z^2 \varepsilon_z (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right] + \\ \omega^4 \mu^2 \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Esta relación determina  $\kappa$  en función de la frecuencia  $\omega$  y los parámetros del medio anisótropo  $\hat{\varepsilon}$  y  $\mu$  y se conoce como relación de dispersión.

**2.2.7 Vectores de onda.** A partir de (2.27), considerando fija la dirección  $u$  del vector de onda  $\kappa$  dado en (2.24), se determina su módulo. Como (2.27) es cuadrática con respecto a  $\kappa^2$  se obtienen dos soluciones:

$$\kappa_{1,2}^2 = \frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad (2.28)$$

donde:

$$A = \varepsilon_x u_x^2 + \varepsilon_y u_y^2 + \varepsilon_z u_z^2,$$

$$B = \omega^2 \mu \left[ u_x^2 \varepsilon_x (\varepsilon_y + \varepsilon_z) + u_y^2 \varepsilon_y (\varepsilon_x + \varepsilon_z) + u_z^2 \varepsilon_z (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right],$$

$$C = \omega^4 \mu^2 \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z.$$

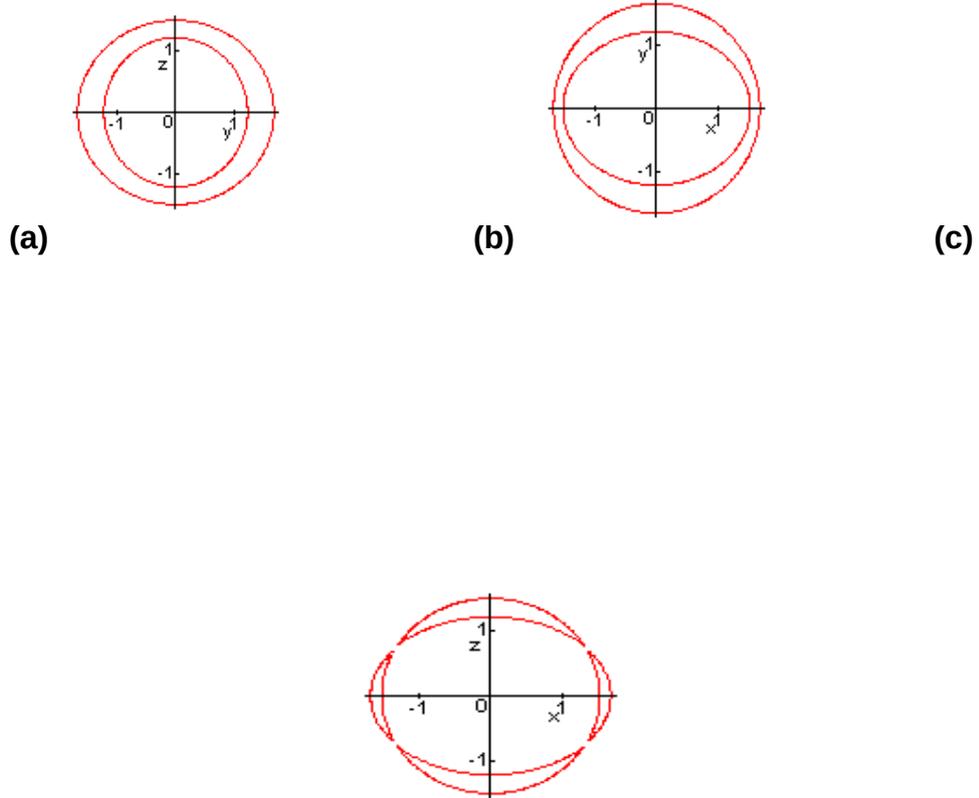
Con las soluciones anteriores se construyen dos vectores de onda:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= \kappa_1 u_1 \\ \kappa_2 &= \kappa_2 u_2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

es decir, en cada dirección  $u$  se pueden propagar dos ondas planas con vectores de onda diferentes y vectores de campo eléctrico  $E_1$  y  $E_2$  [3].

La relación de dispersión (2.27) geoméricamente representa una superficie en el espacio  $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z)$  de los vectores de onda[3]. En la figura 2 se muestran cortes de esta superficie con los planos YOZ, XOY y XOZ, para un conjunto dado de valores de frecuencia, permitividad dieléctrica y permeabilidad magnética. En cada corte se observan dos superficies por lo tanto, la relación de dispersión (2.27) determina una superficie doble. En la figura 2 (c) se observan cuatro puntos de contacto entre las dos superficies, que determinan dos direcciones conocidas como ejes ópticos[15]. En la dirección de cada eje óptico las dos soluciones  $\kappa_{1,2}$  de (2.29) coinciden.

Figura 2. Cortes de las superficies de vectores de onda: (a) en el plano YOZ; (b) en el plano XOY; (c) en el plano XOZ.



**2.2.8 Vectores de campo eléctrico  $E_1$  y  $E_2$ .** Para cada valor  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  en (2.28), pertenecientes a una misma dirección  $u$ , se determinan a partir de

(2.25) las relaciones entre las componentes de  $E$ :  $\frac{E_y}{E_x}$  y  $\frac{E_z}{E_x}$ . Reemplazando

(2.28) en (2.25) se tiene:

$$\left[ \epsilon_x + \frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} (u_x^2 - 1) \right] E_{x1,2} + \frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} u_x u_y E_{y1,2} + \frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} u_x u_z E_{z1,2} = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} u_x u_y E_{x1,2} + \left[ \varepsilon_y + \frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} (u_y^2 - 1) \right] E_{y1,2} + \frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} u_y u_z E_{z1,2} = 0, \quad (2.31)$$

$$\frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} u_x u_z E_{x1,2} + \frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} u_y u_z E_{y1,2} + \left[ \varepsilon_z + \frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} (u_z^2 - 1) \right] E_{z1,2} = 0. \quad (2.32)$$

Se despeja  $E_{y1,2}$  y  $E_{z1,2}$  del sistema de ecuaciones anteriores y se obtiene:

$$\frac{E_{y1,2}}{E_{x1,2}} = - \frac{u_y \frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} - \varepsilon_x}{\frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} - \varepsilon_y} u_x, \quad (2.33)$$

$$\frac{E_{z1,2}}{E_{x1,2}} = \frac{u_z \frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} - \varepsilon_x}{\frac{\kappa_{1,2}^2}{\omega^2 \mu} - \varepsilon_z} u_x. \quad (2.34)$$

De (2.33) y (2.34) se deduce que las relaciones  $\frac{E_y}{E_x}$  y  $\frac{E_z}{E_x}$  son cantidades reales. Como el tensor dieléctrico es real, estas mismas relaciones para el vector de inducción eléctrica  $D_{1,2}$  también son reales.

Se examina a continuación el significado físico de que las relaciones entre las componentes de los vectores del campo de la onda plana definida en (2.16) sean reales. En (2.16)  $E$  es un vector complejo:  $E_1 + iE_2$ , con  $E_1$  y  $E_2$  reales.

Por componentes se escribe:

$$\begin{aligned} E_{1x} + iE_{2x} &= E e^{i\phi_x}, \\ E_{1y} + iE_{2y} &= E e^{i\phi_y}, \\ E_{1z} + iE_{2z} &= E e^{i\phi_z}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Las relaciones  $\frac{E_y}{E_x} = \frac{E_y e^{i\phi_y}}{E_x e^{i\phi_x}}$  y  $\frac{E_z}{E_x} = \frac{E_z e^{i\phi_z}}{E_x e^{i\phi_x}}$  son reales si y solo si  $\phi_x = \phi_y = \phi_z = \phi$ ,

siendo  $E$  de la forma:

$$E = E' e^{i\phi}, \quad (2.36)$$

donde  $E'$  es real y constante. Pasando de la notación compleja al campo real se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \Re \left\{ \vec{E}' e^{i(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi)} \right\}, \\ \vec{E}(\vec{r}, t) &= E' \cos(\vec{\kappa} \cdot \vec{r} - \omega t + \phi), \end{aligned} \quad (2.37)$$

por lo tanto, en (2.37) significa que las oscilaciones del campo real  $E(\vec{r}, t)$  para todo  $\vec{r}$  y  $t$  están en una dirección determinada. Las ondas que presentan esta propiedad se denominan linealmente polarizadas[3,15]. Por lo tanto, se ha establecido un resultado importante:

Un medio anisótropo es bastante selectivo con relación a la propagación de ondas planas: en cada dirección  $u$  pueden existir solo dos ondas planas polarizadas linealmente en direcciones diferentes y con vectores de onda diferentes  $\kappa_1 u$  y  $\kappa_2 u$  con  $\kappa_1$  y  $\kappa_2$  dados por (2.28).

### 2.2.9 Ortogonalidad de los vectores de inducción eléctrica $D_1$ y $D_2$ .

Las direcciones de  $D_1$  y  $D_2$  se determinan de la siguiente manera. Realizando las sustituciones

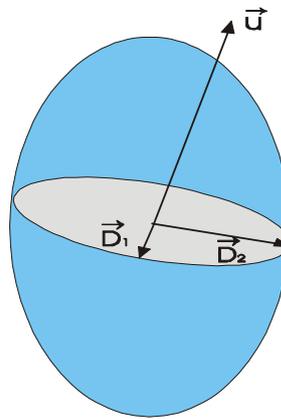
$$x = \frac{D_x}{\sqrt{2w_E}}, y = \frac{D_y}{\sqrt{2w_E}} \text{ y } z = \frac{D_z}{\sqrt{2w_E}}, \quad (2.38)$$

en (2.15), se obtiene la ecuación de un elipsoide:

$$\frac{x^2}{\epsilon_x} + \frac{y^2}{\epsilon_y} + \frac{z^2}{\epsilon_z} = 1. \quad (2.39)$$

Este elipsoide se utiliza en la construcción geométrica que se muestra en la figura 3. Se traza la dirección  $u$  del vector de onda de tal manera que pase por el centro del elipsoide; se corta este ultimo con un plano que también pasa por el centro del elipsoide y es perpendicular a  $u$ . Este corte representa una

**Figura 3. Ortogonalidad de los vectores  $D_1$  y  $D_2$ .**



elipse dada por el cumplimiento simultaneo de (2.39) y las ecuaciones:

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (2.40)$$

$$r \cdot u = 0. \quad (2.41)$$

Se demostrara que las direcciones de  $D_1$  y  $D_2$  coinciden con los ejes principales de la elipse los cuales son perpendiculares entre si.

La ecuación (2.40) con las condiciones (2.41) y (2.39) representa la distancia del centro del elipsoide a cualquier punto de la elipse, siendo los semiejes

principales el máximo y el mínimo de esta distancia[17]. Se designan los semiejes principales por:

$$r_{1,2} = \sqrt{x_{1,2}^2 + y_{1,2}^2 + z_{1,2}^2}, \quad (2.42)$$

Para encontrar  $x_{1,2}, y_{1,2}$  y  $z_{1,2}$  se aplica el método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange [16], según el cual se introducen dos factores  $2\lambda_1$  y  $\lambda_2$  que intervienen en la construcción de la función:

$$F = x^2 + y^2 + z^2 + 2\lambda_1(xu_x + yu_y + zu_z) + \lambda_2 \left( \frac{x^2}{\varepsilon_x} + \frac{y^2}{\varepsilon_y} + \frac{z^2}{\varepsilon_z} \right). \quad (2.43)$$

Los extremos de  $F$  coinciden con  $x_{1,2}, y_{1,2}$  y  $z_{1,2}$ . La condición de existencia de extremos de (2.43) consiste en la igualdad a cero de sus derivadas en  $x, y$  y  $z$ :

$$x + \lambda_1 u_x + \frac{\lambda_2 x}{\varepsilon_x} = 0, \quad y + \lambda_1 u_y + \frac{\lambda_2 y}{\varepsilon_y} = 0, \quad z + \lambda_1 u_z + \frac{\lambda_2 z}{\varepsilon_z} = 0. \quad (2.44)$$

A partir de (2.39) , (2.41) y (2.44) se obtiene:

$$\begin{aligned} x \left( 1 - \frac{r^2}{\varepsilon_x} \right) + u_x r^2 \left( \frac{xu_x}{\varepsilon_x} + \frac{yu_y}{\varepsilon_y} + \frac{zu_z}{\varepsilon_z} \right) &= 0, \\ y \left( 1 - \frac{r^2}{\varepsilon_y} \right) + u_y r^2 \left( \frac{xu_x}{\varepsilon_x} + \frac{yu_y}{\varepsilon_y} + \frac{zu_z}{\varepsilon_z} \right) &= 0, \\ z \left( 1 - \frac{r^2}{\varepsilon_z} \right) + u_z r^2 \left( \frac{xu_x}{\varepsilon_x} + \frac{yu_y}{\varepsilon_y} + \frac{zu_z}{\varepsilon_z} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Las soluciones de (2.45) son los extremos  $x_{1,2}, y_{1,2}$  y  $z_{1,2}$  de la función  $F$ .

Haciendo en (2.45) las sustituciones (2.38) se puede mostrar que este sistema de ecuaciones se diferencia de la ecuación(2.25) para el vector  $E$  únicamente por la notación. Por lo tanto, existe una relación entre las soluciones

$E_{1,2x}$ ,  $E_{1,2y}$  y  $E_{1,2z}$  de (2.25) y las soluciones de  $x_{1,2}$ ,  $y_{1,2}$  y  $z_{1,2}$  de (2.45). Para precisar la naturaleza de esta relación se comparan los radio vectores

$$r_{1,2} = (x_{1,2}, y_{1,2}, z_{1,2}), \quad (2.46)$$

de los semiejes de la elipse con los vectores de inducción eléctrica

$$D_{1,2} = (D_{1,2x}, D_{1,2y}, D_{1,2z}). \quad (2.47)$$

Estos últimos se obtienen a partir de  $E_{1,2}$  con ayuda de (2.14).

Al hacer las sustituciones (2.38) en (2.46) se tiene:

$$\vec{r}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2w_e}} (D_{1,2x}, D_{1,2y}, D_{1,2z}), \quad (2.48)$$

es decir,

$$\vec{r}_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2w_E}} \vec{D}_{1,2}. \quad (2.49)$$

Con (2.49) queda demostrado que las direcciones de  $D_{1,2}$  coinciden con los

ejes principales  $r_{1,2}$  de la elipse de la figura 3 y por lo tanto  $D_{1,2}$  son ortogonales entre sí:

$$D_1 \cdot D_2 = 0. \quad (2.50)$$

Además, según la ecuación (2.49) los módulos de  $D_{1,2}$  son proporcionales a los semiejes de la elipse.

**2.2.10 Velocidad de fase y velocidad de energía.** Para finalizar este capítulo es importante señalar la relación entre la velocidad de propagación de fase y la

velocidad de propagación de energía de una onda plana en un medio anisótropo.

Se denomina fase el ángulo  $\kappa \cdot r - \omega t + \phi$  que aparece en la ecuación (2.37) para el vector de campo eléctrico de la onda plana. La dirección de la velocidad de propagación de fase es la misma de  $\kappa$  y su magnitud es:

$$v_f = \frac{\omega}{\kappa}. \quad (2.51)$$

De otra parte, la velocidad de energía tiene la misma dirección del vector de Poynting  $S$  y su modulo es:

$$v_E = \frac{S}{W}. \quad (2.52)$$

En un medio anisotropo como se muestra en la figura 1 estas velocidades están en direcciones diferentes siendo

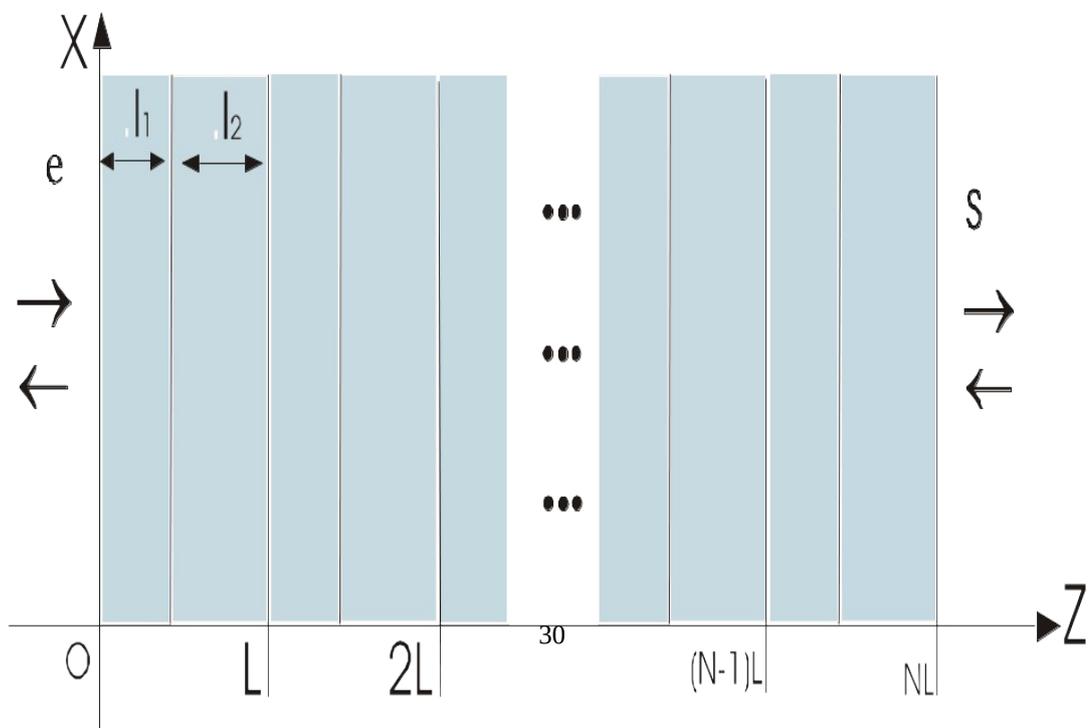
$$v_E = v_f \cos \alpha, \quad (2.53)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo entre  $\kappa$  y  $S$ .

### 3. SISTEMA ANISOTROPO UNIAXICO UNIDIMENSIONALMENTE PERIODICO

El objetivo de este capítulo consiste en establecer las propiedades de propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas planas en un sistema anisótropo unidimensionalmente periódico como el que se muestra en la figura 4.

**Figura 4. Representación esquemática de un sistema unidimensionalmente periódico.**



Las propiedades electromagnéticas del sistema son funciones únicamente de la coordenada  $z$  y se definen así:

La permitividad dieléctrica:

$$\varepsilon(z) = \begin{cases} \varepsilon_e & z < 0 \\ \hat{\varepsilon}_1 & 0 < z < l_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 & l_1 < z < L \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \hat{\varepsilon}_1 & (N-1)L < z < (N-1)L + l_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 & (N-1)L + l_1 < z < NL \\ \varepsilon_s & z > NL \end{cases} \quad (3.1)$$

La permeabilidad magnética:

$$\mu(z) = \begin{cases} \mu_e & z < 0 \\ \mu_1 & 0 < z < l_1 \\ \mu_2 & l_1 < z < L \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \square & \square \\ \mu_1 & (N-1)L < z < (N-1)L + l_1 \\ \mu_2 & (N-1)L + l_1 < z < NL \\ \mu_s & z > NL \end{cases} \quad (3.2)$$

Los medios son dieléctricos, es decir, la conductividad es igual a cero. En (3.1) y (3.2) las cantidades escalares  $\varepsilon_e, \mu_e, \mu_1, \mu_2, \varepsilon_s$  y  $\mu_s$  y las cantidades tensoriales  $\hat{\varepsilon}_1$  y  $\hat{\varepsilon}_2$  son reales y constantes. Las regiones  $z < 0$  y  $z > NL$  representan medios isótropos. La región  $0 < z < NL$  es periódica y esta

conformada por las capas anisótropas 1 y 2 con espesores  $l_1$  y  $l_2$  que se intercalan  $N$  veces. Los ejes principales de  $\hat{\epsilon}_1$  y  $\hat{\epsilon}_2$  coinciden con los ejes  $X, Y, Z$

del sistema de coordenadas de la figura 4 , por lo cual, según (1.13), en este sistema de coordenadas  $\hat{\epsilon}_1$  y  $\hat{\epsilon}_2$  se expresan en forma diagonalizada:

$$\hat{\epsilon}_{1,2} = \begin{pmatrix} \epsilon_{1,2\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{1,2\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{1,2\parallel} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

De acuerdo con (3.3) y (2.13), dos valores principales de la permitividad dieléctrica son iguales:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x1,2} = \epsilon_{y1,2} = \epsilon_{\perp 1,2}, \\ \epsilon_{z1,2} = \epsilon_{\parallel 1,2} \neq \epsilon_{\perp 1,2}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para establecer las propiedades de la propagación de ondas electromagnéticas a través del sistema anisótropo unidimensionalmente periódico definido anteriormente, se considera que desde la región  $z < 0$  una onda plana dada por:

$$E_i e^{i(\kappa_x \bar{r} - \omega t)}, \quad (3.5)$$

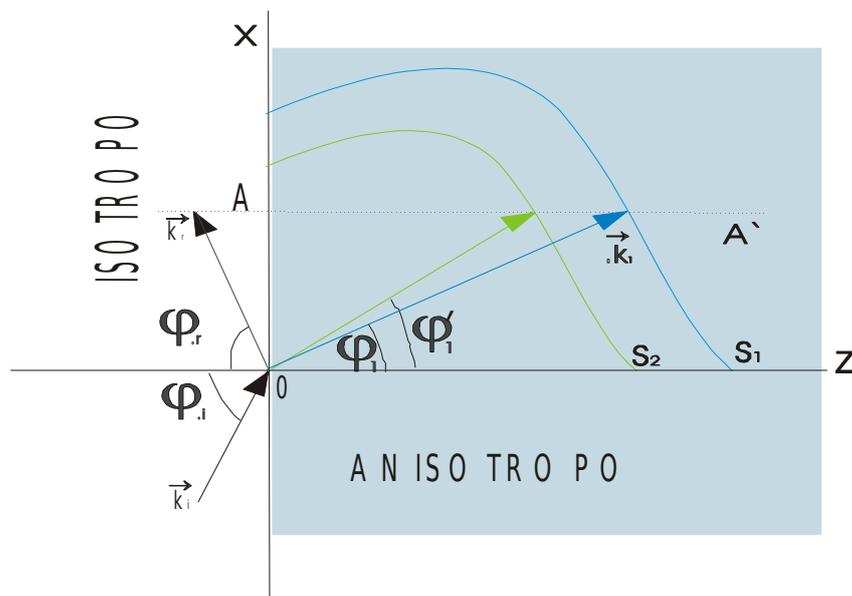
incide sobre este sistema y se examinan los campos que se originan. La solución de este problema se fundamenta en los conceptos del capítulo 2.

### 3.1 FENOMENO DE DOBLE REFRACCION

El experimento muestra que cuando sobre un medio anisótropo incide una onda plana, se observa no una sino dos ondas refractadas, fenómeno conocido como doble refracción. Este fenómeno juega un papel importante en el análisis subsiguiente y se explica a continuación.

En la figura 5 se muestra dos medios: uno isótropo y otro anisótropo. La frontera de separación entre los medios es el plano XOY. Una onda plana dada por (2.5) incide desde el medio isótropo sobre un medio anisótropo;  $\varphi_i$  es el ángulo de incidencia y el plano XOZ es el plano de incidencia.

**Figura 5. Representación gráfica del fenómeno de doble refracción.**



La onda incidente da origen a una onda reflejada y a una onda refractada:

$$\begin{aligned} E_r e^{i(\kappa_r \cdot r - \omega t)}, \\ E_i e^{i(\kappa_i \cdot r - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

En (3.6) se ha supuesto que en el medio anisótropo existe una sola onda refractada. Los vectores de onda  $\kappa_r$  y  $\kappa_1$ , cada uno forman con la normal a la frontera de separación los ángulos de reflexión  $\varphi_r$  y refracción  $\varphi_1$  respectivamente. Para establecer las relaciones entre las ondas incidente, reflejada y refractada se aplican las condiciones de frontera para los vectores de campo, las cuales serán de gran importancia en el desarrollo ya que estas condiciones exigen la continuidad de las componentes tangenciales de los vectores de intensidad eléctrica y magnética en la frontera de separación entre dos medios:

$$\begin{aligned} E_{\tau i} &= E_{\tau 1}, \\ H_{\tau i} &= H_{\tau 1}. \end{aligned} \quad r \in \text{frontera}. \quad (3.7)$$

El subíndice  $\tau$  sirve para designar las componentes tangenciales. El campo en el primer medio es la suma de los campos de las ondas incidente y reflejada, y en el segundo, el campo de la onda refractada.

Se reemplaza (3.5) y (3.6) en (3.7):

$$E_{i\tau} e^{i(\kappa_i \cdot r - \omega t)} + E_{r\tau} e^{i(\kappa_r \cdot r - \omega t)} = E_{1\tau} e^{i(\kappa_1 \cdot r - \omega t)}, \quad r \in \text{frontera}. \quad (3.8)$$

El cumplimiento de (3.8) requiere que  $\kappa_i \cdot r = \kappa_r \cdot r = \kappa_1 \cdot r$  para  $r \in \text{frontera}$ , o sea:

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot (\vec{\kappa}_i - \vec{\kappa}_r) &= 0, \\ \vec{r} \cdot (\vec{\kappa}_i - \vec{\kappa}_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

De las ecuaciones (3.9) se deduce que las diferencias de vectores de onda  $\kappa_i - \kappa_r$  y  $\kappa_i - \kappa_1$  es perpendicular a la frontera XOY de separación entre los medios. Gráficamente esto se muestra en la figura 5: la recta AA' que pasa por los extremos de los vectores de onda es perpendicular al eje X en el punto A.

Con  $S1$  y  $S2$  se representa la superficie doble de los vectores de onda en el medio anisótropo definida por (2.27). Se observa que la recta  $AA'$  intercepta la superficie doble en dos puntos, indicando así la existencia de dos vectores de onda diferentes en el medio anisotropo, que satisfacen la segunda condición de frontera en (3.9). Por lo tanto existe no una, sino dos ondas refractadas, es decir, se presenta el fenómeno de doble refracción.

Por último, se observa en la figura 5 que todas las componentes en  $X$  de los vectores de onda implicados son iguales entre sí:

$$\kappa_{ix} = \kappa_{rx} = \kappa_{1x} = \kappa'_{1x}, \quad (3.10)$$

donde

$$\kappa_{ix} = \kappa_i \text{sen} \varphi_i, \quad \kappa_{rx} = \kappa_r \text{sen} \varphi_r, \quad \kappa_{1x} = \kappa_1 \text{sen} \varphi_1, \quad \kappa'_{1x} = \kappa'_1 \text{sen} \varphi'_1. \quad (3.11)$$

Las relaciones (3.10) y (3.11) se aplican mas adelante en los cálculos subsiguientes.

## 3.2 RELACIONES DE DISPERSION

La solución del problema planteado requiere un análisis de las relaciones de dispersión de los medios que conforman el sistema. Estos medios son dieléctricos isótropos para  $z < 0$  y  $z > NL$  y dieléctricos anisótropos para  $0 < z < NL$ .

**3.2.1 Relación de dispersión del medio dieléctrico isótropo.** Para un medio isótropo la dependencia del vector de onda  $\kappa$  con la frecuencia  $\omega$  y los parámetros del medio  $\epsilon, \mu$  es[21]:

$$\kappa = \omega \sqrt{\epsilon \mu}, \quad (3.12)$$

es decir, el módulo del vector de onda no depende de su dirección. En el espacio de los vectores de onda la ecuación (3.12) describe una esfera de radio  $\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ .

**3.2.2 Relación de dispersión del medio dieléctrico anisótropo.** Los tensores de permitividad dieléctrica definidos en (3.3) son de la forma:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{\perp} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{\perp} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{\parallel} \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

expresado en el sistema de ejes principales. A continuación se deduce la relación de dispersión, considerando (3.13).

Se reemplazan las componentes (3.13) en la relación de dispersión (2.27):

$$\kappa^2 \left[ \varepsilon_{\perp} (\kappa_x^2 + \kappa_y^2) + \varepsilon_{\parallel} \kappa_z^2 \right] - \omega^2 \mu \left[ \varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}) (\kappa_x^2 + \kappa_y^2) + 2\kappa_z^2 \varepsilon_{\perp} \varepsilon_{\parallel} \right] + \omega^4 \mu^2 \varepsilon_{\parallel}^2 \varepsilon_{\perp} = 0. \quad (3.14)$$

Esta ecuación es cuadrática con respecto a  $\kappa^2$  y se factoriza así:

$$\left( \kappa^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} \right) \left[ \frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\kappa_z^2}{\varepsilon_{\perp}} - \omega^2 \mu \right] = 0. \quad (3.15)$$

Por lo tanto, se obtienen dos ecuaciones de segundo grado para  $\kappa$ :

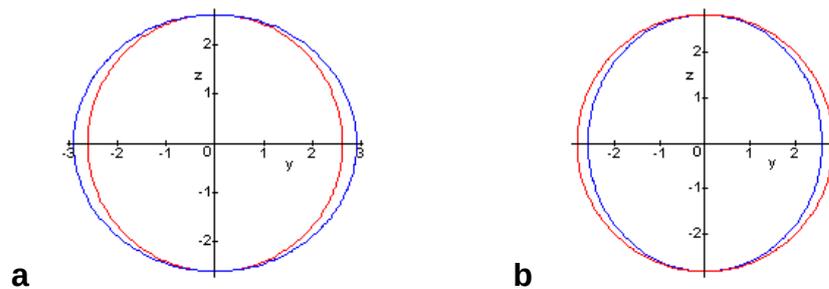
$$\begin{aligned} \kappa^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp}, \\ \frac{\kappa_x^2 + \kappa_y^2}{\varepsilon_{\parallel}} + \frac{\kappa_z^2}{\varepsilon_{\perp}} &= \omega^2 \mu, \end{aligned} \quad (3.16)$$

las cuales describen en el espacio de los vectores de onda una esfera y un elipsoide respectivamente. En la esfera,  $\kappa$  representa el radio y es

independiente de la dirección. Las ondas planas construidas con estos vectores de onda se denominan ondas ordinarias y los vectores de onda se designan por  $\kappa^o$ . En el elipsoide,  $\kappa$  representa la distancia desde su centro hasta cada punto de su superficie. En estas soluciones  $\kappa$  varia con la dirección. Las ondas correspondientes se denominan extraordinarias y los vectores de onda se designan por  $\kappa^e$ . En la figura 6 se muestran dos superficies de vectores de onda: la primera corresponde a un medio con  $\epsilon_{\perp} < \epsilon_{\parallel}$  y el segundo, con  $\epsilon_{\perp} > \epsilon_{\parallel}$ . En ambos casos se observan dos puntos de contacto entre la esfera y el

**Figura 6. Cortes del elipsoide y esfera de vectores de onda en el plano**

**XOZ: a) Cuando  $\epsilon_{\perp} < \epsilon_{\parallel}$  . b) Cuando  $\epsilon_{\perp} > \epsilon_{\parallel}$ .**



elipsoide, los cuales determinan un solo eje óptico; estos medios se denominan medios anisótropos uniaxiales. Analíticamente los puntos de contacto se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (3.14) y sus primeras derivadas parciales respecto  $\kappa_x, \kappa_y$  y  $\kappa_z$  igualadas a cero.

$$\begin{aligned}
\kappa_x \left[ \varepsilon_{\perp} \kappa_x^2 + \varepsilon_{\perp} \kappa_y^2 + \varepsilon_{\parallel} \kappa_z^2 + \varepsilon_{\perp} \kappa^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}) \right] &= 0, \\
\kappa_y \left[ \varepsilon_{\perp} \kappa_x^2 + \varepsilon_{\perp} \kappa_y^2 + \varepsilon_{\parallel} \kappa_z^2 + \varepsilon_{\perp} \kappa^2 - \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp} (\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_{\parallel}) \right] &= 0, \\
\kappa_z \left[ \varepsilon_{\perp} \kappa_x^2 + \varepsilon_{\perp} \kappa_y^2 + \varepsilon_{\parallel} \kappa_z^2 + \varepsilon_{\parallel} \kappa^2 - 2\omega^2 \mu \varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp} \right] &= 0.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

De (3.17) se tiene:

$$\begin{aligned}
\kappa_x^2 &= -\kappa_y^2, \\
\kappa_z^2 &= \omega^2 \mu \varepsilon_{\perp}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

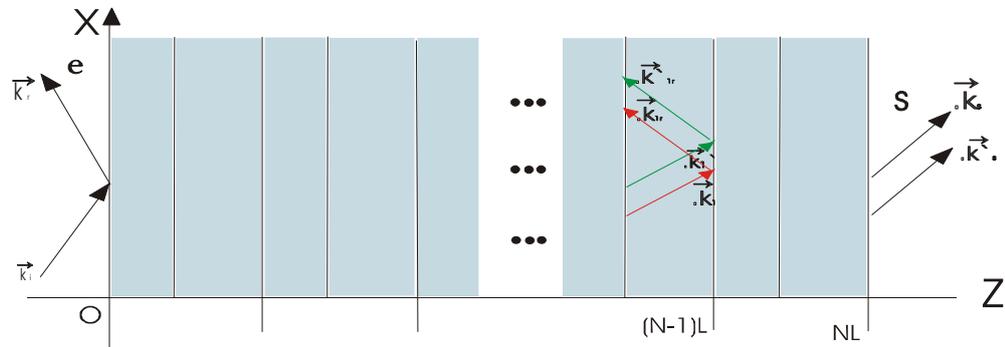
De donde  $\kappa_x = \kappa_y = 0$  y  $\kappa_z = \omega \sqrt{\mu \varepsilon_{\perp}}$ . Por lo tanto, los dos puntos de contacto entre el elipsoide y la esfera son  $(0, 0, \pm \omega \sqrt{\mu \varepsilon_{\perp}})$ ; estos puntos se encuentran en el eje Z y son simétricos con respecto al origen. El eje óptico pasa por estos dos puntos y coincide con el eje Z. Si la dirección de propagación esta en el eje óptico, la onda ordinaria y la onda extraordinaria se propaga con el mismo valor de  $\kappa$ .

La primera ecuación en la relación de dispersión (3.16) sirve para calcular los vectores de onda  $\kappa^o$  de las ondas ordinarias y la segunda, los vectores de onda  $\kappa^e$  de las ondas extraordinarias.

### 3.3 CALCULO DE LOS VECTORES DE ONDA

En la figura 7 se muestra se muestra los vectores de onda de las ondas

**Figura 7. Vectores de onda en un sistema unidimensionalmente anisótropo uniaxial.**



planas que se propagan en el sistema de la figura 4.

En la región  $z < 0$  se propagan una onda incidente y otra reflejada con vectores de onda  $\kappa_i$  y  $\kappa_r$  respectivamente.

La región  $0 < z < NL$  se considera una capa  $n$  ( $n=1,2$ ). Debido a la doble refracción examinada en la sección 3.1, en esta capa se originan dos ondas en la dirección  $z$  positiva. De acuerdo con la sección 3.2, una de estas ondas es ordinaria con vector de onda  $\kappa_n^o$  y la otra extraordinaria con vector de onda  $\kappa_n^e$ . Igualmente, en esta capa existen las correspondientes ondas reflejadas con  $\kappa_n^o$  y  $\kappa_n^e$ . En la región  $z > NL$  dos ondas viajan en el sentido positivo del eje  $z$  con vectores de onda  $\kappa_s$  y  $\kappa_s'$ , las cuales provienen de la onda ordinaria y la onda extraordinaria en la región  $0 < z < NL$ , respectivamente.

A continuación se determinan los vectores de onda enumerados anteriormente.

Se parte de los aspectos comunes a estos vectores:

Todos los vectores de onda se encuentran en el plano de incidencia XOZ, lo que se expresa con la igualdad a cero de sus componentes en Y:

$$K_{iy} = K_{iry} = K_{ny}^o = K_{nry}^o = K_{ny}^e = K_{nry}^e = K_{sy} = K_{sy}' = 0. \quad (3.19)$$

Según (3.10), las componentes en X de todos los vectores de onda son iguales entre sí:

$$K_{ix} = K_{rx} = K_{nx}^o = K_{nrx}^o = K_{nx}^e = K_{nrx}^e = K_{sx} = K_{sx}'. \quad (3.20)$$

Conociendo las componentes X y Y de los vectores de onda (3.19) y (3.20), falta calcular sus módulos y sus componentes en Z.

En la región  $z < 0$ , se utiliza la relación de dispersión (3.12) y las ecuaciones (3.19) y (3.20) para obtener el modulo y la componente z:

$$\begin{aligned} K_i = K_r &= \omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e}, \\ K_{iz} = K_{ir} &= \omega \sqrt{\varepsilon_e \mu_e - K_{ix}^2}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

En la capa  $n$  de la región  $0 < z < NL$  el modulo y la componente z del vector de onda ordinario se calcula a partir de la primera ecuación en la relación de dispersión (3.16) y considerando (3.19), (3.20):

$$\begin{aligned} K_n^o &= \omega \sqrt{\varepsilon_{\perp n} \mu_n}, \\ K_{nz}^o &= \sqrt{\omega^2 \mu_n \varepsilon_{\perp n} - K_{ix}^2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Análogamente, a partir de la segunda ecuación (3.16) y (3.19) se obtiene para la onda extraordinaria:

$$\begin{aligned} K_n^e &= \sqrt{\omega^2 \mu_n \varepsilon_{\perp n} + \left(1 - \frac{\varepsilon_{\perp n}}{\varepsilon_{\parallel n}}\right) K_{ix}^2}, \\ K_{nz}^e &= \sqrt{\omega^2 \mu_n \varepsilon_{\perp n} - \frac{\varepsilon_{\perp n}}{\varepsilon_{\parallel n}} K_{ix}^2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

En la región  $z > NL$ , utilizando la relación de dispersión (3.12) y con (3.19), (3.20) se tiene:

$$\begin{aligned} \kappa_s &= \kappa'_s = \omega \sqrt{\epsilon_s \mu_s}, \\ \kappa_{sz} &= \kappa'_s = \omega \sqrt{\epsilon_s \mu_s - \kappa_{ix}^2}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Conviene señalar que si dos ondas tienen el mismo vector de onda, como en el caso de las ondas en la región  $z > NL$ , no significa que sean iguales entre sí.

Las componentes en  $z$  de los vectores onda de las ondas que viajan en la dirección  $z$  negativa son iguales en magnitud pero de sentido contrario a las

componentes en  $z$  de los vectores onda de las ondas que viajan en la dirección  $z$  positiva.

De esta manera con las ecuaciones (3.19) a (3.24) quedan determinados todos los vectores de onda en función de la frecuencia, la permitividad dieléctrica, la permeabilidad magnética y la componente  $X$  del vector de onda de la onda incidente  $\kappa_{ix}$ .

### **3.4 VECTORES DE CAMPO DE LAS ONDAS ORDINARIA Y EXTRAORDINARIA**

Es importante examinar las direcciones de los vectores de campo de las ondas ordinaria y extraordinaria. Para esto se utilizan las formulas de la secciones 2.2.3 y 2.2.7, haciendo que:  $E_1, D_1$  y  $\kappa_1$  pertenezcan a la onda ordinaria,

$E_2, D_2$  y  $\kappa_2$  a la onda extraordinaria y  $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_{\perp}$  y  $\varepsilon_z = \varepsilon_{\parallel}$ . Además, teniendo en cuenta que todos los vectores de onda cumplen con (3.19), estos se encuentran en el plano  $XOY$  y la componente  $u_y$  del vector unitario  $u$  es igual a cero,  $u_y = 0$ .

De este examen se obtienen los siguientes resultados para las ondas extraordinarias que se propagan en el sistema de la figura 4:

Las relaciones (2.33) y (2.34) para las componentes del campo eléctrico sirven solo para el campo  $E_2$  de cualquier onda extraordinaria ya que el factor

$\frac{\kappa_1^2}{\omega^2 \mu} - \varepsilon_x$  con  $\kappa_1$  de la primera ecuación en (2.26), se hace cero para la onda ordinaria.

El campo  $E_2$  se encuentra en el plano  $OXY$ , lo cual se obtiene de (2.33) y (2.34), teniendo en cuenta que  $u_y = 0$ . Por lo tanto:

$$E_2 = E_{2x} \hat{x} + E_{2z} \hat{z}. \quad (3.25)$$

El campo  $D_2$  también se encuentra en el plano  $XOZ$ , ya que este se obtiene a partir de  $E_2$  con ayuda de (2.14):

$$D_2 = D_{2x} \hat{x} + D_{2z} \hat{z}. \quad (3.26)$$

Para las ondas ordinarias se obtienen los siguientes resultados:

El vector  $D_1$  es perpendicular al plano  $XOZ$ , ya que según (2.50) y la figura 1,  $D_1$  es perpendicular a  $D_2$  y al vector de onda, los cuales están en el plano  $XOZ$ . Por lo tanto:

$$D_1 = D_{1y} \hat{y} \quad (3.27)$$

El vector  $E_1$  también es perpendicular al plano  $XOZ$ , de acuerdo con (2.10), por lo tanto:

$$E_1 = E_{1y} \hat{y}. \quad (3.28)$$

En la sección siguiente se encuentran los campos de las ondas que se propagan en el sistema, en función del vector de onda y los campos de la onda incidente, las permitividades dieléctricas y las permeabilidades magnéticas que intervienen en el sistema de la Figura 4.

### **3.5 PROPAGACION DE UNA ONDA PLANA EN UN SISTEMA ANISOTROPO UNIAXICO CON VARIACIÓN UNIDIMENSIONAL PERIÓDICA DEL TENSOR DE PERMITIVIDAD DIELECTRICA EN LA DIRECCIÓN DEL EJE OPTICO**

Se considera un sistema anisótropo uniaxico con variación unidimensional periódica del tensor de permitividad dieléctrica en la dirección del eje óptico, con las propiedades electromagnéticas dadas por (3.1) a (3.3). Este sistema se puede representar con ayuda de la figura 4.

El objetivo es determinar el mecanismo de propagación de una onda plana que incide sobre el sistema descrito anteriormente. En la figura 7 se muestra, en  $z < 0$  la onda plana incidente dada por (3.5):

$$E_i e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)},$$

La onda (3.5) esta linealmente polarizada, es decir,  $E_i$  es de la forma (2.36); la componente en Y del vector de onda incidente es cero (3.19).

En  $z < 0$  esta onda da origen a la onda reflejada (3.6):

$$E_r e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)},$$

En la región  $z > 0$  (3.5) da origen a dos ondas planas transmitidas:

$$\begin{aligned} & E_s e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}, \\ & \vec{E}_s e^{i(k_x x - k_z z - \omega t)}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Se plantea expresar los campos de las ondas reflejada (3.6) y transmitidas (3.29), en función del vector de onda y los campos de la onda incidente (3.5), y de las permitividades dieléctricas y permeabilidades magnéticas de los medios

que conforman el sistema.

Para establecer esta relación se consideran dos casos:

**Caso 1.** En la onda incidente (3.5)  $E_i$  es perpendicular al plano XOZ:

$$E_i = E_{iy} \hat{y}. \quad (3.30)$$

Aplicando las condiciones de frontera (3.7) en  $z=0$ , se deduce que en el medio anisótropo  $z > 0$  la componente perpendicular del campo eléctrico debe ser diferente de cero. De acuerdo con (3.28), esta condición la cumple la onda ordinaria. Por lo tanto, una onda incidente con  $E_i$  perpendicular al plano XOZ

origina en el medio anisótropo una onda ordinaria con  $E_1$  también perpendicular al plano XOZ.

Análogamente las condiciones de frontera (3.7) establecen que la onda ordinaria al propagarse a través de la frontera entre dos medios anisótropos del sistema de la figura 4, mantiene su condición de onda ordinaria y  $E$  continua perpendicular al plano XOZ.

**Caso 2.** En la onda incidente (3.5)  $E_i$  es paralelo al plano XOZ:

$$E_i = E_{ix}\hat{x} + E_{iz}\hat{z}. \quad (3.31)$$

De las condiciones de frontera (2.7) en  $z=0$ , se deduce que en el medio anisótropo  $Z>0$  la componente en X del campo eléctrico debe ser diferente de cero. Según (3.25) esta condición la cumple la onda extraordinaria. Por lo tanto, una onda incidente con  $E_i$  paralelo al plano XOZ origina en el medio anisótropo una onda extraordinaria con  $E_2$  también paralelo al plano XOZ.

De igual manera, la onda extraordinaria al propagarse a través de la frontera entre dos medios anisótropos del sistema de la figura 4, mantiene su condición de onda extraordinaria y  $E$  continua perpendicular al plano XOZ.

Con lo anterior se concluye que la onda plana incidente (3.5) produce dos ondas transmitidas en el sistema anisótropo considerado: una onda ordinaria y otra extraordinaria, originadas por la componente perpendicular y la componente paralela al plano XOZ del vector  $E_i$ . Además, estas dos ondas se

propagan en el sistema de manera independiente, manteniendo su condición de onda ordinaria o extraordinaria. Por lo tanto, es válido examinar por separado los dos casos enunciados anteriormente.

### 3.5.1 Onda incidente con $E_i$ perpendicular al plano XOZ. En esta sección

se trata la propagación de la onda plana incidente (3.5) cuando  $E_i$  es perpendicular al plano XOZ. En este caso el campo eléctrico en cualquier punto del sistema es perpendicular al plano XOZ y se puede expresar como:

$$E(x, z) = E_y(x, z)\hat{y} \quad (3.32)$$

Ya que los vectores de onda de las ondas que intervienen en el problema se encuentran en el plano XOZ según (3.19), el campo eléctrico es función solo de X y Z .

El sistema de la figura 4 presenta  $2N + 1$  fronteras de separación entre medios diferentes ubicadas en  $z = 0, L, 2L, \dots, NL$ . A continuación se trata en forma general una de estas fronteras.

Sea la frontera ubicada en  $z = z_j$ . En  $z < z_j$  se propagan dos ondas ordinarias (una incidente y otra reflejada), siendo el campo resultante:

$$E_{yj}(x, z) = E_{j,i} e^{i(k_{ix}x + k_{jz}z)} + E_{j,r} e^{i(k_{ix}x - k_{jz}z)}. \quad (3.33)$$

En (3.23) y en lo sucesivo, se tiene en cuenta (3.20) donde las componentes en X de los vectores de onda son iguales a las componentes  $\kappa_{ix}$  del vector de onda incidente.

En la región  $z > z_j$  también existen dos ondas y el campo resultante es:

$$E_{y,j+1}(r) = E_{j+1,i} e^{i(k_{ix}x + k_{j+1,z}z)} + E_{j+1,r} e^{i(k_{ix}x - k_{j+1,z}z)}. \quad (3.34)$$

Los campos (3.33) y (3.34) se pueden escribir de forma unificada:

$$E_y(x, z) = [A(z) + B(z)] e^{ik_{ix}x} \quad (3.35)$$

donde:

$$A(z) = \begin{cases} E_{j,i} e^{ik_{jz}z}, & \text{para } z < z_j \\ E_{j+1,i} e^{ik_{j+1,z}z}, & \text{para } z > z_j \end{cases} \quad (3.36)$$

$$B(z) = \begin{cases} E_{j,r} e^{-ik_{jz}z}, & \text{para } z < z_j \\ E_{j+1,r} e^{-ik_{j+1,z}z}, & \text{para } z > z_j \end{cases} \quad (3.37)$$

Las condiciones de frontera exigen que las componentes tangenciales de los campos eléctrico y magnético en  $z=z_j$  sean continuas:

$$\begin{aligned} E_\tau(x, z_j^-) &= E_\tau(x, z_j^+), \\ H_\tau(x, z_j^-) &= H_\tau(x, z_j^+). \end{aligned} \quad (3.38)$$

En (3.38)  $\tau$  indica la componente tangencial del campo,  $z_j^-$  y  $z_j^+$  los valores de  $z$  a la izquierda y a la derecha de  $z=z_j$ . De (2.9) y (2.10) se calcula la componente tangencial del vector de intensidad del campo magnético que coincide con su componente en  $X$ , con ayuda de (3.36) se tiene:

$$H_x(x, z) = \begin{cases} \frac{\kappa_{jz}}{\mu_j} [A(z) - B(z)] & \text{para } z < z_j \\ \frac{\kappa_{j+1,z}}{\mu_{j+1}} [A(z) - B(z)] & \text{para } z > z_j \end{cases} \quad (3.39)$$

Se reemplaza (3.35) y (3.39) en (3.38):

$$\begin{aligned} A(z^-) + B(z^-) &= A(z^+) + B(z^+), \\ \frac{\kappa_{jz}}{\mu_j} [A(z^-) - B(z^-)] &= \frac{\kappa_{j+1,z}}{\mu_{j+1,z}} [A(z^+) - B(z^+)]. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Introduciendo en (3.40) la notación:

$$\begin{aligned} A(z_j^-) &= A_j, \\ A(z_j^+) &= A'_j \\ B(z_j^-) &= B_j, \\ B(z_j^+) &= B'_j, \end{aligned} \quad (3.41)$$

se obtiene la siguiente representación matricial del sistema de ecuaciones (3.40):

$$D_j \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = D_{j+1} \begin{pmatrix} A'_{j+1} \\ B'_{j+1} \end{pmatrix}, \quad (3.42)$$

donde  $D_j$  es la matriz:

$$D_j = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\kappa_{jz}}{\mu_j} & -\frac{\kappa_{jz}}{\mu_j} \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Despejando  $D_j$  de (3.42) se obtiene:

$$\begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = D_j^{-1} D_{j+1} \begin{pmatrix} A'_{j+1} \\ B'_{j+1} \end{pmatrix} = D_{j,j+1} \begin{pmatrix} A'_{j+1} \\ B'_{j+1} \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

donde la matriz  $D_{j,j+1} = D_j^{-1} D_{j+1}$  se conoce como matriz de transmisión dada por:

$$D_{j,j+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu_j \kappa_{j+1,z}}{\mu_{j+1} \kappa_{jz}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\mu_j \kappa_{j+1,z}}{\mu_{j+1} \kappa_{jz}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\mu_j \kappa_{j+1,z}}{\mu_{j+1} \kappa_{jz}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\mu_j \kappa_{j+1,z}}{\mu_{j+1} \kappa_{jz}} \end{pmatrix}. \quad (3.45)$$

Para el tratamiento del sistema de la figura 4 se requiere cuatro matrices de transmisión:

$D_{e1}$  –de transmisión del medio  $e$  ( $z < 0$ ) al primer medio (capa 1,  $0 < z < l1$ ).

$D_{12}$  – matriz de transmisión de la capa 1 a la capa 2.

$D_{21}$  – matriz de transmisión de la capa 2 a la capa 1.

$D_{2s}$  - matriz de transmisión de la capa 2 al medio  $s$  ( $z > NL$ ).

Estas matrices se obtienen de la ecuación (3,45) al tomar en cada caso  $\kappa_{jz}$  de las formulas de la sección 3.3 y la permeabilidad magnética de (3.2).

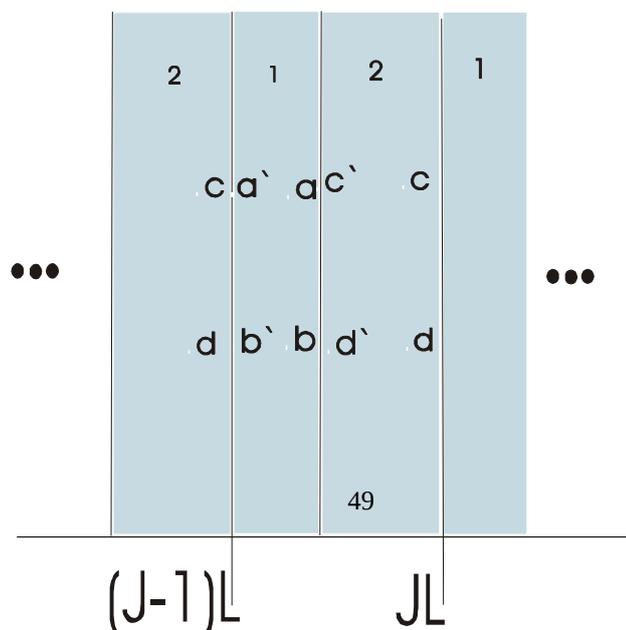
A continuación se examina un periodo  $L$  del sistema periódico, compuesto por las capas 1 y 2 de espesores  $l_1$  y  $l_2$ , comprendido entre  $z = (j-1)L$  y

$z = jL$ , como se muestra en la figura 8. Se modifica la notación de las

cantidades  $A_j, B_j, A'_j$  y  $B'_j$ . en (3.41): en la capa 1 se toma  $a_j$  y  $a'_j$  para la onda

incidente;  $b_j$  y  $b'_j$  para la onda reflejada.

**Figura 8. Representación de un periodo  $L$  compuesto por las capas 1 y 2.**



En la capa 2:  $c_j$  y  $c_j'$  para la onda incidente;  $d_j$  y  $d_j'$  para la onda reflejada. Al atravesar la capa 1, las ondas experimentan un cambio de fase  $\psi_1 = \kappa_{1z}^o l_1$  a lo largo de la dirección  $z$ , que será positivo para la onda incidente y negativo para la onda reflejada. Este cambio se expresa en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} a_1' \\ b_1' \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}, \quad (3.46)$$

donde la matriz:

$$P_1 = \begin{pmatrix} e^{-i\psi_1} & 0 \\ 0 & e^{i\psi_1} \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

se conoce como matriz de propagación.

De manera análoga para la capa 2 se obtiene la matriz de propagación  $P_2$ :

$$P_2 = \begin{pmatrix} e^{-i\psi_2} & 0 \\ 0 & e^{i\psi_2} \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

donde  $\psi_2 = \kappa_{2z}^o l_2$ .

Ahora se construye una matriz para caracterizar el paso de las ondas a través de un periodo  $L$  de la figura 8. Para esto, se examina el paso de las ondas desde el lado izquierdo de la frontera  $(j-1)L$ , donde se tiene  $c_{j-1}'$  y  $d_{j-1}'$ , hasta el lado izquierdo de la frontera  $jL$  con  $c_j$  y  $d_j$ . Haciendo uso en cadena de matrices de transmisión y de propagación se escribe la expresión para el paso de las ondas a través de un periodo:

$$\begin{pmatrix} c_{j-1} \\ d_{j-1} \end{pmatrix} = D_{21} P_1 D_{12} P_2 \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix}, \quad (3.49)$$

donde  $M_1$  es la matriz para un periodo:

$$M_1 = D_{21} P_1 D_{12} P_2.$$

Por ultimo se construye la matriz para todo el sistema desde el lado izquierdo de la primera frontera en  $z=0$ , donde se tiene  $A_e$  y  $B_e$ , hasta el lado izquierdo de la última frontera en  $z=NL$  con  $A'_s$  y  $B'_s$ :

$$\begin{pmatrix} A_e \\ B_e \end{pmatrix} = D_{e1} P_1 D_{12} P_2 M_1^{N-1} D_{2s} \begin{pmatrix} A'_s \\ B'_s \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A'_s \\ B'_s \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

donde

$$M = D_{e1} P_1 D_{12} P_2 M_1^{N-1} D_{2s}, \quad (3.51)$$

es la matriz característica del sistema. El conocimiento de esta matriz permite expresar la amplitud de la onda reflejada en  $z<0$  y la amplitud de la onda transmitida en  $z>NL$ , en términos de la amplitud de la onda incidente en  $z<0$ .

**3.5.2 Onda incidente con  $E_i$  paralelo al plano XOZ.** Siguiendo un procedimiento análogo al de la sección anterior, se construye la matriz característica del sistema cuando el vector eléctrico de la onda incidente es paralelo al plano XOZ de la figura 4.

En este caso el significado de  $A(z)$  y  $B(z)$  esta dado por la expresión para el campo magnético que ahora es perpendicular a XOZ:

$$H_y(x, z) = [A(z) + B(z)] e^{ik_x x} \quad (3.52)$$

con:

$$A(z) = \begin{cases} H_{j,i} e^{ik_{jz}z}, & \text{para } z < z_j \\ H_{j+1,i} e^{ik_{j+1z}z}, & \text{para } z > z_j \end{cases} \quad (3.53)$$

$$B(z) = \begin{cases} H_{j,r} e^{-ik_{jz}z}, & \text{para } z < z_j \\ H_{j+1,r} e^{-ik_{j+1z}z}, & \text{para } z > z_j \end{cases} \quad (3.54)$$

Como resultado se obtiene una relación entre el campo de la onda incidente en  $z < 0$  con los campos de la onda reflejada en  $z < 0$  y la onda transmitida en  $z > NL$  completamente similar a (3.50) con una matriz característica del sistema dada por (3.51). Sin embargo, en el caso en que  $E_i$  es paralelo al plano XOZ ( $H_i$  perpendicular al plano XOZ), en (3.51) la matriz de transmisión esta dada por:

$$D_{j,j+1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{j\perp} K_{j+1,z}}{\varepsilon_{j+1,\perp} K_{jz}} & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{j\perp} K_{j+1,z}}{\varepsilon_{j+1,\perp} K_{jz}} \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{j\perp} K_{j+1,z}}{\varepsilon_{j+1,\perp} K_{jz}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_{j\perp} K_{j+1,z}}{\varepsilon_{j+1,\perp} K_{jz}} \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

y en las matriz de propagación  $P_{1,2}$  (3.47) y (3.48), se toma  $\psi'_{1,2} = \kappa_{1,2z}^e l_{1,2}$ .

**3.5.3 Reflectancia y transmitancia.** La matriz característica del sistema (3.51) contiene información básica sobre las propiedades de propagación de ondas electromagnéticas monocromáticas planas en el sistema anisótropo uniaxial unidimensionalmente periódico definido en (3.1) y (3.2).

Si  $M$  se representa como:

$$M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

de (3.50) se obtiene el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A_e &= M_{11}A'_s + M_{12}B'_s, \\ B_e &= M_{21}A'_s + M_{22}B'_s. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Cuando la onda plana (3.5) incide sobre el sistema desde la izquierda ( $z < 0$ ), en (3.57)  $B'_s$  es igual a cero. En este caso, la reflectancia  $R$  del sistema, definida como la relación entre las amplitudes de la onda reflejada en  $z < 0$  y de la onda incidente en  $z < 0$ , es:

$$R = \left( \frac{M_{21}}{M_{11}} \right)^2, \quad (3.58)$$

y la transmitancia  $T$  expresada por el cociente entre las amplitudes de la onda transmitida en  $z > NL$  y la onda incidente en  $z < 0$  es:

$$T = \frac{\kappa_{sz}}{\kappa_{iz}} \left( \frac{1}{M_{11}} \right)^2, \quad (3.59)$$

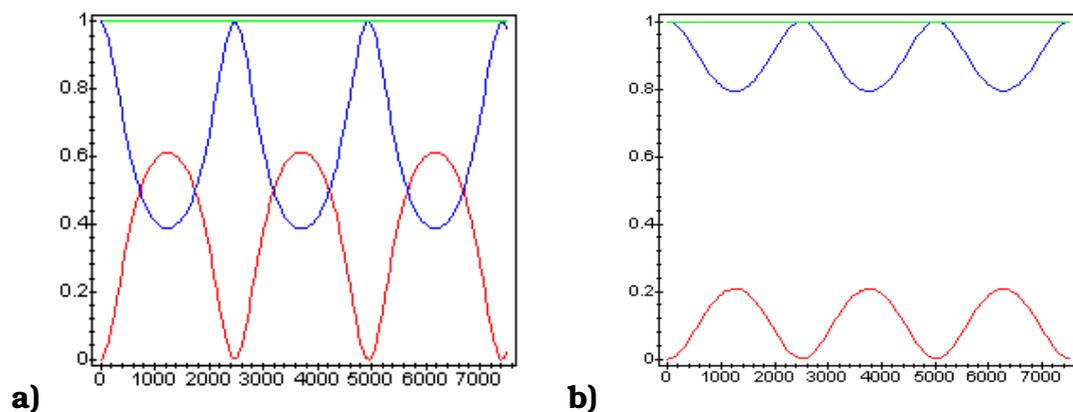
las cuales expresan las propiedades de transmisión de ondas monocromáticas planas del sistema.

Como ilustración de la utilidad y consistencia de los resultados (3.50) y (3.51), en las figuras 9, 10 y 11 se presenta una serie de curvas de  $R$  y  $T$ .

Las figuras 9 y 10 corresponden a un sistema conformado de una capa 1 de *cuarzo* con  $\epsilon_{\perp} = 2.38$ ,  $\epsilon_{\parallel} = 2.35$  y una capa 2 de *rutilo* con  $\epsilon_{\perp} = 6.84$ ,  $\epsilon_{\parallel} = 8.42$  ambos materiales anisótropos uniáxicos. Los valores principales del tensor de permitividad dieléctrica son relativos al vacío y válidos para una longitud de onda  $\lambda = 589 \text{ nm}$ . Las capas 1 y 2 se alternan 50 veces ( $N=50$ ). Para  $z < 0$  y  $z > NL$  se toma como medio el vacío. Los espesores de las capas son iguales ( $l_1 = l_2 = l$ ). En las figuras 9, (a) y (b), se muestran las curvas de reflectancia  $R$

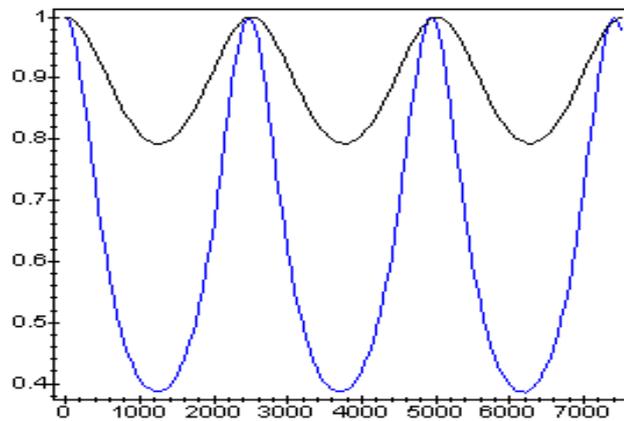
y transmitancia  $T$  en función de  $\frac{l}{\lambda}$  cuando  $E_i$  es perpendicular o paralelo al plano de incidencia respectivamente;  $\frac{l}{\lambda}$  representa el espesor de las capas en unidades de longitud de onda  $\lambda = 589nm$ . En la figura 10 se comparan las curvas de  $T$  vs  $\frac{l}{\lambda}$  cuando  $E_i$  es perpendicular al plano de incidencia y cuando  $E_i$  es paralelo al plano de incidencia. En las figuras anteriores, las curvas de  $R$  y  $T$  presentan máximos y mínimos que se repiten de manera periódica.

**Figura 9. (a) Curvas de  $R$  (color rojo) y  $T$  (color azul) cuando  $E_i$  es perpendicular al plano de incidencia. (b) Curvas de  $R$  y  $T$  cuando  $E_i$  es paralelo al plano de incidencia. La ley de la conservación de la energía  $R+T=1$  esta dada por la recta (color verde).**



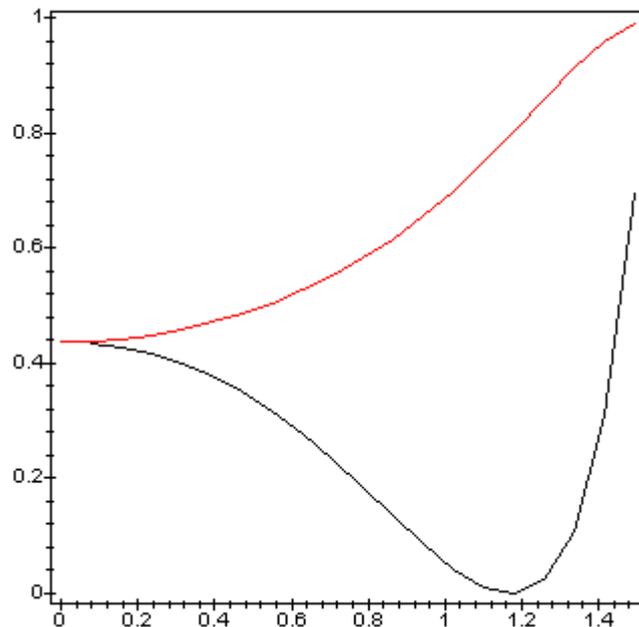
Un máximo de  $R$  (mínimo de  $T$ ) indica que la onda incidente es reflejada por el sistema en grado considerable, lo cual está relacionado con el fenómeno de reflexión de Bragg.

**Figura 10. Comparación de las curvas de  $T$  en función de  $\frac{l}{\lambda}$  cuando  $E_i$  es perpendicular al plano de incidencia (color azul) y cuando  $E_i$  es paralelo al plano de incidencia (color negro).**



En la figura 11 se muestra las curvas de  $R$  en función del ángulo de incidencia cuando  $E_i$  es perpendicular al plano de incidencia y cuando  $E_i$  es paralelo al plano de incidencia. En el primer caso  $R$  crece con el ángulo de manera monótona; en el segundo caso  $R$  presenta un mínimo igual a cero para un ángulo aproximado de 1.2 rad., correspondiente al ángulo de Brewster.

**Figura 11. Comparación de las curvas de  $R$  en función del ángulo de incidencia (radianes) cuando  $E_i$  es perpendicular al plano de incidencia (color rojo) y cuando  $E_i$  es paralelo al plano de incidencia (color negro).**



Cuando el vector  $E_i$  de la onda incidente linealmente polarizada forma un ángulo  $\alpha$  con el plano de incidencia, se procede a descomponerlo en:

$$E_{i\perp} = E_i \operatorname{sen} \alpha,$$

$$E_{i\parallel} = E_i \cos \alpha,$$

y se considera cada componente por separado. Sea  $R_1$  y  $T_1$  las cantidades correspondientes a  $E_{i\perp}$  y  $R_2$  y  $T_2$  a  $E_{i\parallel}$ . La reflectancia y transmitancia resultantes se obtienen teniendo en cuenta el ángulo  $\alpha$ :

$$R = R_1 \operatorname{sen}^2 \alpha + R_2 \cos^2 \alpha,$$

$$T = T_1 \operatorname{sen}^2 \alpha + T_2 \cos^2 \alpha.$$

Realizando la suma  $R$  Y  $T$  se obtiene la unidad:

$$R + T = 1,$$

de acuerdo con la ley de la conservación de la energía.

Por ultimo, conviene señalar que el sistema examinado en el presente trabajo, debido a su naturaleza anisótropa, también produce un efecto sobre la polarización de la onda incidente. Independientemente del tipo de polarización de la onda incidente en  $z < 0$ , en la salida  $z > NL$  siempre se producen dos ondas linealmente polarizadas: una con  $E_{s\perp}$  perpendicular y otra con  $E_{s\parallel}$  paralela al plano de incidencia. Estas dos componentes presentan una diferencia de fase ya que sus velocidades de fase y recorridos son diferentes a lo largo del sistema anisótropo.

#### 4. CONCLUSIONES

Se estableció el mecanismo de propagación de una onda monocromática plana linealmente polarizada en un sistema anisótropo uniáxico con variación unidimensional periódica del tensor de permitividad dieléctrica en la dirección del eje óptico.

El trabajo ha permitido establecer el rol que juega el fenómeno de la doble refracción característico de los medios anisótropos. Se encontró que cuando el vector eléctrico de la onda incidente es perpendicular al plano de incidencia, las ondas transmitidas por el sistema son ondas ordinarias. De otra parte, si el vector eléctrico es paralelo al plano de incidencia, las ondas transmitidas son ondas extraordinarias.

Aplicando un método matricial se determinó la relación entre los campos de la onda incidente con los campos de las ondas reflejada y transmitida.

Se obtuvieron las curvas de reflectancia y transmitancia en función del espesor de las capas que conforman el sistema periódico y en función del ángulo de incidencia. Las curvas obtenidas son semejantes a las curvas que aparecen en la literatura sobre ondas en sistemas periódicos [ 10,20].

Los resultados obtenidos son de importancia práctica y teórica: sirven para realizar cálculos numéricos con valores determinados de los parámetros del sistema y de la onda incidente; igualmente, el conocimiento del mecanismo de propagación de una onda incidente monocromática plana es suficiente para examinar la propagación de campos incidentes más complejos.

El presente trabajo se puede ampliar a medios anisótropos biáxicos teniendo en cuenta anisotropías de origen eléctrico o magnético.

## **BIBLIOGRAFIA**

[1] ANDERSON B. Oilfield Anisotropy, 2. ed. Bogota: Limusa, 1994. 242p.

[2] BALANIS Constantine. Advanced engineering electromagnetics. New York: Jhon Wiley & Sons, 1989. 38p.

- [3] BORN Max. Principles of optics. New York: Pergamon Press, 1968. 1600p.
- [4] CABRERA José y López Fernando. Optica electromagnética, 2. ed. Madrid:: Adisson-Wesley, 1998.493p.
- [5] CABRERA J. Optica electromagnética, 2 ed. Madrid : Adisson-Wesley, 1998. 500p.
- [6] CORSON Dale and Lorrain Paul. Introduction to electromagnetic fields and waves. San Francisco and London: W.H. Freeman and company, 1962. 800p.
- [7] FIODOROV N.N. Fundamentos de electrodinámica. Moscú: Mir, 1982. 100p.
- [8] GESHEV Julián. Anisotropía. Porto Alegre Brasil: Freeman, 2001. p1-4.
- [9] GOWARD Jhon. Optical communication systems. Moscú: Mir, 1989. p8.
- [10] GUDZENKO A. , Rugeles A. and Sotin V. Surface electromagnetic waves at an interface between two dielectrics with small periodic one-dimensional modulations of their indices of refraction. Soviet: Mir, 1990. p122-129.
- [11] JACKSON J.D. Classical Electrodynamics. New York: Jhon Wiley, 1980.1000p.
- [12] LAKE L. The Origins of Anisotropy. New York: Jhon Wiley, 1992.100p.
- [13] LANDAU and Lifshitz. Electrodynamics of continuous media. Massachusetts: Adisson- Wesley, 1960.400p.
- [14] LANDSBERG G.S. Principles of optics. Moscú: Mir, 1976. p15.
- [15] LARSON. Calculo II. 2 ed. México: MC Graw Hill, 2000. p108.
- [16] LEHMANN Charles. Geometría Analítica. New York: Jhon Wiley and Sons,1978. 100p.

[17] OHANIAN Hans. Classical Electrodynamics. Massachusetts: Allyn and Bacon, 1988. p.108.

[18] PANOFSKY W.K. and Philips M. Classical Electricity and magnetism: Massachusetts: Addison – Wesley, 1962.1200p.

[19] REITZ J.R., Milford F.J. y Christy R.W. Fundamentos de la teoría electromagnética. México: Addison Wesley,1996.p.105.

[20] ROUSSEAU M. and Mathieu G. Problems in optics. New York: Pergamon Press,1976. 100p.

