Modelo de Thirring con simetría de Gauge

Luis Alberto Rozo Ortega

Asesor: Germán Ramos

Universidad de **Nariño**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Programa de Física

3 de marzo de 2022

Contenido

Introducción

En esta presentación se dan a conocer las principales características del modelo de Thirring con simetría de gauge y su análisis canónico mediante la aplicación del método de Dirac.

Características del modelo de Thirring

- Describe una autointeracción de un campo fermiónico no masivo en dimensión $D = 1 + 1$.
- No presenta simetría de gauge local a nivel clásico.
- Cuando el campo fermiónico es masivo, existe una equivalencia con un sector del modelo *Sine-Gordon*.

Densidad Lagrangiana asociada al MT

Clásicamente, la densidad lagrangiana que caracteríza el modelo de Thirring no masivo es:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}_a \gamma^{\mu}_{ab} \partial_{\mu} \psi_b - \partial_{\mu} \bar{\psi}_a \gamma^{\mu}_{ab} \psi_b\right] - \frac{g}{2}\left(\bar{\psi}_a \gamma^{\mu}_{ab} \psi_b\right)\left[\bar{\psi}_c \left(\gamma_{\mu}\right)_{cd} \psi_d\right], \tag{1}$$

donde,

- g es la constante de acoplamiento adimensional.
- γ^{μ} matrices de Dirac en dos dimensiones.
- $\psi_a, \bar{\psi}_a$ componentes de los campos fermiónicos.

Ecuaciones de Movimiento vía Euler-Lagrange

Se emplean las expresiones:

$$\frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial \psi_a(\mathbf{x}, t)} - \partial_\mu \frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a(\mathbf{x}, t)\right)} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, t)} - \partial_\mu \frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a(\mathbf{x}, t)\right)} = 0, \tag{3}$$

Ecuaciones de Movimiento vía Euler-Lagrange

Obteniendo las ecuaciones de movimiento:

$\psi(x)$

- $$i\partial_\mu \bar{\psi}_c \gamma^\mu + g\bar{\psi}\gamma_\mu \left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) = 0. \tag{4}$$

$\bar{\psi}(x)$

- $$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - g\gamma_\mu \psi \left(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi\right) = 0. \tag{5}$$

Modelo de Thirring con simetría de Gauge

Características

- Itoh et. propone un modelo de simetría de gauge, empleando el método de *Hidden local simmetry* (HLS).
  Aparece el campo vectorial auxiliar A_μ
- Se reformula $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \theta$, de manera que el modelo sea invariante clásicamente.
- El lagrangiano adquiere un término cinético a nivel clásico.

Modelo de Thirring con simetría de Gauge

Características

- Kondo propuso reformular el MT, siguiendo el formalismo de *Fradkin-Batalin*.
  Introduce un término cinético asociado a campo electromagnético.
- Para ciertos límites de las constantes de acoplamiento q y g se obtienen los modelos de *Schwinger* y **Thirring**
- Permite estudiar la generación dinámica de masa para fermiones.

Modelo de Kondo

En un espacio-tiempo $D = 1 + 1$, la dinámica del MTG es descrita por la densidad lagrangiana:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}_{TG} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - \partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right] - m\bar{\psi}\psi + eA_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi \\ + \frac{1}{2g}\left(A_{\mu} - \partial_{\mu}\theta\right)^{2} - \frac{1}{4q^{2}}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},\end{aligned} \tag{6}$$

Invariabilidad ante una transformación de gauge

La densidad lagrangiana (6) presenta invariancia ante la transformación de gauge $U(1)$ local,

Campo fermiónico

$$\psi \to e^{i\in}\psi \quad , \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi}e^{-i\in}$$

Campo bosónico

$$A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \in (x) \quad , \quad \theta(x) \to \theta(x) + \in (x)$$

Corriente de Noether conservada

La invariancia de (6) implica la existencia de una corriente de Noether que se conserva en el tiempo, la cual se calcula a partir de la expresión:

$$j^{\mu} = \frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \psi_a\right)} \delta\psi_a + \frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \bar{\psi}_a\right)} \delta\bar{\psi}_a + \frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)} \delta A_\nu + \frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \theta\right)} \delta\theta, \tag{7}$$

obteniendo el resultado:

$$j^{\mu} = \bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi. \tag{8}$$

Formalismo Lagrangiano

Las ecuaciones de movimientos se derivan de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

Asociadas a campos fermiónicos ψ, $\bar{\psi}$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial \psi_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \psi_a \right)} \right) &= 0 \\
\frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}_a} - \partial_\mu \left(\frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \bar{\psi}_a \right)} \right) &= 0
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Formalismo Lagrangiano

Asociadas a campos bosonicos A_ν, θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu A_\nu \right)} \right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\partial_\mu \theta \right)} \right) = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Ecuaciones de movimiento

Las expresiones anteriores conllevan a los resultados:

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\rightarrow (i\partial_\mu - eA_\mu)\,\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0 \\
\bar{\psi}(x) &\rightarrow \gamma^\mu\,(i\partial_\mu + eA_\mu)\,\psi - m\psi = 0 \\
A_\mu(x) &\rightarrow \Box A^\mu - \partial^\mu(\partial\cdot A) + eq^2\bar{\psi}\gamma^\mu\psi + \frac{q^2}{g}A^\mu - \frac{q^2}{g}\partial^\mu\theta = 0 \\
\theta(x) &\rightarrow \partial_\mu A^\mu(x) - \Box\theta(x) = 0
\end{aligned} \tag{11}$$

Aproximación al modelo de Thirring

Al considerar el límite en el gauge unitario $\theta(x) = 0$ y que la constante de acoplamiento $q \to \infty$, de la ecuación de movimiento asociada a $A_\mu(x)$ se deriva:

$$e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi + \frac{1}{g}A^\nu = 0, \tag{12}$$

$$\Rightarrow A^\nu = -g\left(e\bar{\psi}\gamma^\nu\psi\right). \tag{13}$$

Aproximación al modelo de Thirring

Al sustituir (13) en las ecuaciones de movimiento asociadas a campo fermiónico se deduce que:

$$\gamma^{\mu}\left[i\partial_{\mu}-g\left(e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi\right)\right]\psi-m\psi = 0, \tag{14}$$

$$\left[i\partial_{\mu}+g\left(e\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi\right)\right]\bar{\psi}\gamma^{\mu}+m\bar{\psi} = 0, \tag{15}$$

Se obtienen las ecuaciones de movimiento del modelo de Thirring masivo, que se deducen de la densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L}_{TG}\rightarrow\mathcal{L}_{TM}=\frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi-\frac{i}{2}\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi-m\bar{\psi}\psi-\frac{g}{2}\left(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi\right)\left(\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right). \tag{16}$$

Formalismo Hamiltoniano

Espacio de fase

- La dinámica del sistema físico estará determinada en el espacio de fase y la evolución temporal se escribe en términos de las ecuaciones de Hamilton.
- La dimensión del espacio fase completo es $2N = 2(7) = 14$, dado que inicialmente se tienen $N = 7$ grados de libertad.

$$\Gamma : \left(\psi_a, \bar{\psi}_a, A_\mu, \theta, \bar{p}_a, p_a, \pi^\mu, \pi_\theta\right), \tag{17}$$

Momentos canónicos conjugados

Los momentos canónicos conjugados para cada una de las variables se definen de la siguiente manera:

$$\psi_a(x) \rightarrow \bar{p}_a(x) \equiv \frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi_a)} = -\frac{i}{2}\bar{\psi}_b \gamma^0_{ba} \quad (18)$$

$$\bar{\psi}_a(x) \rightarrow p_a(x) \equiv \frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \bar{\psi}_a)} = -\frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b \quad (19)$$

$$A_\nu(x) \rightarrow \pi^\nu(x) \equiv \frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} = \frac{1}{q^2}F^{\nu 0} \quad (20)$$

$$\theta(x) \rightarrow \pi_\theta(x) \equiv \frac{\partial_R \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \theta)} = -\frac{1}{g}A^0 + \frac{1}{g}\partial^0\theta \quad (21)$$

Paréntesis fundamentales de Berezin

A nivel hamiltoniano, en el análisis canónico se introducen los paréntesis de Possion, los cuales se denominan paréntesis de Berezin, cuando se trabaja en un espacio de fase conformado por campos fermiónicos y bosónicos.
Si $F(x)$ y $B(x)$ representan variables dinámicas de carácter fermiónico y bosónico respectivamente:

$$F\left(x\right)\equiv F\left[\psi_a\left(x\right),\bar{\psi}_a\left(x\right),A_\mu\left(x\right),\theta\left(x\right),\bar{p}_a\left(x\right),p_a\left(x\right),\pi^\mu\left(x\right),\pi_\theta\left(x\right)\right]$$

$$B\left(x\right)\equiv B\left[\psi_a\left(x\right),\bar{\psi}_a\left(x\right),A_\mu\left(x\right),\theta\left(x\right),\bar{p}_a\left(x\right),p_a\left(x\right),\pi^\mu\left(x\right),\pi_\theta\left(x\right)\right]$$

Paréntesis fundamentales de Berezin

Dos variables bosónicas

$$\{B_1(x), B_2(y)\}_B = \int dz^1 \left\{ \left[\left(\frac{\delta_R B_1(x)}{\delta \psi_c(z)} \frac{\delta_R B_2(y)}{\delta \bar{p}_c(z)} - \frac{\delta_R B_2(y)}{\delta \psi_c(z)} \frac{\delta_R B_1(x)}{\delta p_c(z)} \right) + \left(\frac{\delta_R B_1(x)}{\delta \bar{\psi}_c(z)} \frac{\delta_R B_2(y)}{\delta p_c(z)} - \frac{\delta_R B_2(y)}{\delta \bar{\psi}_c(z)} \frac{\delta_R B_1(x)}{\delta p_c(z)} \right) \right] + \left(\frac{\delta_R B_1(x)}{\delta A_\alpha(z)} \frac{\delta_R B_2(y)}{\delta \pi^\alpha(z)} - \frac{\delta_R B_2(y)}{\delta A_\alpha(z)} \frac{\delta_R B_1(x)}{\delta \pi^\alpha(z)} \right) + \left(\frac{\delta_R B_1(x)}{\delta \theta(z)} \frac{\delta_R B_2(y)}{\delta \pi_\theta(z)} - \frac{\delta_R B_2(y)}{\delta \theta(z)} \frac{\delta_R B_1(x)}{\delta \pi_\theta(z)} \right) \right\}, \quad (22)$$

Paréntesis fundamentales de Berezin

Entre una variable bosónica y fermiónica

$$
\begin{aligned}
\{F(x), B(y)\}_B = \int dz^1 \Bigg\{ - \Bigg[\left(\frac{\delta_R F(x)}{\delta \psi_c(z)} \frac{\delta_R B(y)}{\delta \bar{p}_c(z)} + \frac{\delta_R B(y)}{\delta \psi_c(z)} \frac{\delta_R F(x)}{\delta p_c(z)} \right) \\
+ \left(\frac{\delta_R F(x)}{\delta \bar{\psi}_c(z)} \frac{\delta_R B(y)}{\delta p_c(z)} + \frac{\delta_R B(y)}{\delta \bar{\psi}_c(z)} \frac{\delta_R F(x)}{\delta p_c(z)} \right) \Bigg] \\
+ \left(\frac{\delta_R F(x)}{\delta A_\alpha(z)} \frac{\delta_R B(y)}{\delta \pi^\alpha(z)} - \frac{\delta_R B(y)}{\delta A_\alpha(z)} \frac{\delta_R F(x)}{\delta \pi^\alpha(z)} \right) \\
+ \left(\frac{\delta_R F(x)}{\delta \theta(z)} \frac{\delta_R B(y)}{\delta \pi_\theta(z)} - \frac{\delta_R B(y)}{\delta \theta(z)} \frac{\delta_R F(x)}{\delta \pi_\theta(z)} \right) \Bigg\}, \qquad (23)
\end{aligned}
$$

Paréntesis fundamentales de Berezin

Par de variables fermiónicas

$$
\begin{aligned}
\{F_1(x), F_2(y)\}_B = \int dz^1 \Bigg\{ - \Bigg[\Bigg(& \frac{\delta_R F_1(x)}{\delta \psi_c(z)} \frac{\delta_R F_2(y)}{\delta \bar{p}_c(z)} + \frac{\delta_R F_2(y)}{\delta \psi_c(z)} \frac{\delta_R F_1(x)}{\delta p_c(z)} \Bigg) \\
+ \Bigg(& \frac{\delta_R F_1(x)}{\delta \bar{\psi}_c(z)} \frac{\delta_R F_2(y)}{\delta p_c(z)} + \frac{\delta_R F_2(y)}{\delta \bar{\psi}_c(z)} \frac{\delta_R F_1(x)}{\delta p_c(z)} \Bigg) \Bigg] \\
+ \Bigg(& \frac{\delta_R F_1(x)}{\delta A_\alpha(z)} \frac{\delta_R F_2(y)}{\delta \pi^\alpha(z)} + \frac{\delta_R F_2(y)}{\delta A_\alpha(z)} \frac{\delta_R F_1(x)}{\delta \pi^\alpha(z)} \Bigg) \\
+ \Bigg(& \frac{\delta_R F_1(x)}{\delta \theta(z)} \frac{\delta_R F_2(y)}{\delta \pi_\theta(z)} - \frac{\delta_R F_2(y)}{\delta \theta(z)} \frac{\delta_R F_1(x)}{\delta \pi_\theta(z)} \Bigg) \Bigg\} . \qquad (24)
\end{aligned}
$$

Paréntesis fundamentales de Berezin

La expresiones anteriores permiten obtener los paréntesis de Berezin no nulos para el modelo de Thirring con simetría de gauge:

$$\{\psi_a(x), \bar{p}_b(y)\}_B = -\delta_{ab}\delta\left(x^1 - y^1\right), \tag{25}$$

$$\{\bar{\psi}_a(x), p_b(y)\}_B = -\delta_{ab}\delta\left(x^1 - y^1\right), \tag{26}$$

$$\{A_\mu(x), \pi^\nu(y)\}_B = \delta^\nu_\mu\delta\left(x^1 - y^1\right), \tag{27}$$

$$\{\theta(x), \pi_\theta(y)\}_B = \delta\left(x^1 - y^1\right). \tag{28}$$

Hamiltoniano Canónico

El hamiltoniano canónico para el modelo de Thirring con simetría de gauge es definido en función de los momentos canónicos conjugados por medio de la transformación de Legendre,

$$H_C = \int dx^1 \left[\pi^\mu \left(\partial_0 A_\mu\right) + \pi_\theta \left(\partial_0 \theta\right) + \left(\partial_0 \bar{\psi}_a\right) p_a + \left(\partial_0 \psi_a\right) \bar{p}_a - \mathcal{L}_{TG}\right], \quad (29)$$

$$\Rightarrow H_C = \int dx^1 \mathcal{H}_C,$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}_C = \pi^\mu \left(\partial_0 A_\mu\right) + \pi_\theta \left(\partial_0 \theta\right) + \left(\partial_0 \bar{\psi}_a\right) p_a + \left(\partial_0 \psi_a\right) \bar{p}_a - \mathcal{L}_{TG}. \quad (30)$$

Hamiltoniano Canónico

Empleando la densidad lagrangiana asociada al MTG (6) y los momentos canónicos conjugados correspondientes a cada uno de los campos, la densidad Hamiltoniana adquiere la forma:

$$\mathcal{H}_C = \frac{g}{2}(\pi_\theta)^2 + \frac{1}{2}q^2\left(\pi^1\right)^2 + \frac{1}{2g}(A_1)^2 - \frac{1}{g}A_1(\partial_1\theta) + \frac{1}{2g}(\partial_1\theta)^2$$
$$+\pi^1(\partial_1 A_0) + A_0\pi_\theta - \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^1\partial_1\psi + \frac{i}{2}\partial_1\bar{\psi}\gamma^1\psi + m\bar{\psi}\psi - eA_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu\psi. \tag{31}$$

Análisis de vínculos

La singularidad del Lagrangiano que describe el modelo de Thirring con simetría de gauge implica a nivel Hamiltoniano que las variables dinámicas que definen el espacio de fase Γ no sean independientes entre si, debido a la existencia de vínculos primarios, los cuales surgen de la definición de los momentos canónicos.

- De campo fermiónico se derivan cuatro vínculos primarios:

$$\bar{\phi}_a \equiv \bar{p}_a + \frac{i}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba}, \tag{32}$$

$$\phi_a \equiv p_a + \frac{i}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b. \tag{33}$$

Análisis de vínculos

- De la expresión (20) se obtiene el vínculo primario bosónico:

$$\phi^1 \equiv \pi^0 = \frac{1}{q^2} F^{00}, \tag{34}$$

- Además de (20) y (21) se obtienen las relaciones dinámicas:

$$\pi^1 = \frac{1}{q^2} F^{10} = \frac{1}{q^2} \left(\partial^1 A^0 - \partial^0 A^1 \right), \tag{35}$$

y

$$\dot{A}_1 = \partial_1 A_0 + q^2 \pi^1 . \tag{36}$$

Análisis canónico mediante el formalismo de Dirac

- Los vínculos primarios reducen la dimensión del espacio de fase inicial Γ a un espacio de fase reducido Γ^* de dimension $2N - M = 14 - 5 = 9$:

$$\Gamma^* : \left(\psi_a, \bar{\psi}_a, A_\mu, \theta, \pi^1, \pi_\theta\right) . \tag{37}$$

Los vínculos primarios asociados al MTG son:

$$\bar{\phi}_a \equiv \bar{p}_a + \frac{1}{2}\bar{\psi}_b \gamma^0_{ba} \approx 0, \tag{38}$$

$$\phi_a \equiv p_a + \frac{1}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b \approx 0, \tag{39}$$

$$\phi^1 \equiv \pi^0 \approx 0. \tag{40}$$

Hamiltoniano Primario

En el método de Dirac, la dinámica del MTG en el espacio de fase completo, está determinada por el Hamiltoniano Primario.

$$H_P \equiv H_C + \int dx^1 \left\{ \bar{\phi}_a (x) \lambda_a (x) + \bar{\lambda}_a (x) \phi_a (x) + \lambda^1 (x) \phi^1 (x) \right\} . \quad (41)$$

Así, la evolución temporal de una variable dinámica $A(x)$ es mediada por:

$$\dot{A} (x) \approx \{ A (x) , H_P \}_B . \quad (42)$$

Análisis de consistencia

El exigir consistencia a cada uno de los vínculos primarios implica que estos permanezcan constantes en el tiempo, de manera que:

$$\dot{\phi}_a(x) \approx 0, \tag{43}$$
$$\dot{\bar{\phi}}_a(x) \approx 0, \tag{44}$$
$$\phi^1(x) \approx 0. \tag{45}$$

Análisis de consistencia

Posibles casos:

1. Una expresión que involucre multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos primarios, por lo que es posible determinar alguno de estos multiplicadores.
2. Una ecuación que no involucra multiplicadores pero si se anula, es decir se reduce a la identidad $0 \approx 0$.
3. Una relación que es independiente de los multiplicadores de Lagrange, pero enlaza algunas variables del espacio de fase. Este tipo de ecuaciones constituye un nuevo conjunto de vínculos denominados secundarios.

Análisis de consistencia

Empleando los paréntesis de Berezin:

$$
\begin{aligned}
\left\{\bar{\phi}_a(x), H_C\right\}_B &= i\partial_1^x\bar{\psi}_c\gamma^1_{ca} + m\bar{\psi}_a(x) - eA_\mu(x)\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu_{ca}, \\
\left\{\phi_a(x), H_C\right\}_B &= i\gamma^1_{ac}\partial_1^x\psi_c(x) - m\psi_a(x) + eA_\mu(x)\gamma^\mu_{ac}\psi_c, \\
\left\{\phi^1(x), H_C\right\}_B &= \partial_1^x\pi^1(x) - \pi_\theta(x) + e\bar{\psi}_c(x)\gamma^0_{cb}\psi_b(x),
\end{aligned}
$$

$$
\left\{\phi_a(x), \bar{\phi}_b(y)\right\}_B = -i\gamma^0_{ab}\delta\left(x^1 - y^1\right).
$$

Análisis de consistencia

La consistencia de los vínculos primarios se reduce a:

$$\dot{\phi}_a(x) \approx \{\phi_a, H_P\}_B = i\gamma^1_{ac}\partial^x_1\psi_c(x) - m\psi_a + eA_\mu\gamma^\mu_{ac}\psi_c - \gamma^0_{ab}\lambda_b \approx 0,$$

$$\dot{\bar{\phi}}_a(x) \approx \{\bar{\phi}_a, H_P\}_B = i\partial^x_1\bar{\psi}_c(x)\gamma^1_{ca} + m\bar{\psi}_a - eA_\mu\bar{\psi}_c\gamma^\mu_{ca} + i\bar{\lambda}_b\gamma^0_{ba} \approx 0,$$

$$\dot{\phi}^1(x) \approx \{\phi_1(x), H_P\}_B = \partial^x_1\pi^1(x) - \pi_\theta(x) + e\bar{\psi}_c(x)\gamma^0_{cb}\psi_b(x) \approx 0.$$

Análisis de consistencia

De las dos primeras relaciones de consistencia, la condición **1** garantiza la posibilidad de hallar una relación para λ_a y $\bar{\lambda}_a$:

$$\lambda_d(x) \approx \gamma^0_{da}\gamma^1_{ac}\partial^x_1\psi_c(x) + im\gamma^0_{da}\psi_a(x) - ieA_\mu(x)\gamma^0_{da}\gamma^\mu_{ac}\psi_c(x), \tag{46}$$

$$\bar{\lambda}_d(x) \approx -\partial^x_1\bar{\psi}_c(x)\gamma^1_{ca}\gamma^0{}_{ad} + im\bar{\psi}_a(x)\gamma^0{}_{ad} - ieA_\mu(x)\bar{\psi}_c(x)\gamma^\mu{}_{ca}\gamma^0{}_{ad}. \tag{47}$$

Se garantiza que no surgen más vínculos secundarios asociados a ϕ_a y $\bar{\phi}_a$.

Análisis de consistencia

Del análisis de consistencia asociado a ϕ_1 se genera un vínculo secundario:

$$G(x) \equiv \partial_1^x \pi^1(x) - \pi_\theta(x) + e\bar{\psi}_c \gamma^0_{cb} \psi_b \approx 0, \tag{48}$$

Al exigir su consistencia se obtiene:

$$\dot{G}(x) \approx \{G(x), H_P(y)\}_B \approx 0, \tag{49}$$

por lo tanto, no surgen más vínculos asociados a $G(x)$.

Conjunto de vínculos

En el modelo de Thirring con simetría de gauge existen tres vínculos primarios:

$$\phi_a = p_a + \frac{1}{2}\gamma^0_{ab}\psi_b \approx 0, \tag{50}$$

$$\bar{\phi}_a = \bar{p}_a + \frac{1}{2}\bar{\psi}_b\gamma^0_{ba} \approx 0, \tag{51}$$

$$\phi^1 = \pi^0 \approx 0, \tag{52}$$

y un vínculo secundario

$$G = \partial^x_1\pi^1 - \pi_\theta + e\bar{\psi}\gamma^0\psi \approx 0. \tag{53}$$

Clasificación de Vínculos

- Se define un vínculo en el espacio de fase como de *primera clase* si tiene paréntesis de Berezin debilmente cero con todos los vínculos de la teoría y consigo mismo, en caso contrario este se denomina vínculo de *segunda clase*
- Los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos de segunda clase se determinen de manera única y los de primera clase permanezcan indeterminados y arbitrarios.

Clasificación de Vínculos

Teniendo presente los paréntesis de Berezin:

$$\left\{\phi^1(x), \phi_a(y)\right\}_B = \left\{\phi^1(x), \bar{\phi}_a(y)\right\}_B = \left\{\phi^1(x), \phi^1(y)\right\}_B = 0, \tag{54}$$

y

$$\left\{\phi^1(x), G(y)\right\}_B = 0, \tag{55}$$

$$\left\{\phi_a(x), G(y)\right\}_B = -e\gamma^0_{ad}\psi_d(y)\,\delta\left(x^1 - y^1\right), \tag{56}$$

$$\left\{\bar{\phi}_a(x), G(y)\right\}_B = e\bar{\psi}_c(y)\,\gamma^0_{ca}\delta\left(x^1 - y^1\right). \tag{57}$$

Entonces, ϕ^1 es un vínculo de primera clase.

Clasificación de Vínculos

Para determinar que vínculos son de segunda clase, se construye la matriz:

$$C^{ij}(x,y)=\left\{\Xi^{i}(x),\Xi^{j}(y)\right\}_{B}, \tag{58}$$

donde

$$\Xi^{1}\equiv G \quad , \quad \Xi^{2}_{a}\equiv\bar{\phi}_{a} \quad , \quad \Xi^{3}_{a}\equiv\phi_{a}, \tag{59}$$

$$C^{ij}(x,y)=\begin{array}{c|ccc} & G(y) & \bar{\phi}_{b}(y) & \phi_{b}(y) \\ \hline G(x) & 0 & -e\bar{\psi}_{c}(x)\gamma^{0}_{cb} & e\gamma^{0}_{bd}\psi_{d}(x) \\ \bar{\phi}_{a}(x) & e\bar{\psi}_{c}(y)\gamma^{0}_{ca} & 0 & -i\gamma^{0}_{ba} \\ \phi_{a}(x) & -e\gamma^{0}_{ad}\psi_{d}(y) & -i\gamma^{0}_{ab} & 0 \end{array}\;\delta\left(x^{1}-y^{1}\right). \tag{60}$$

Clasificación de Vínculos

- Al analizar las teorías libres, asociado a campo bosónico existen dos vínculos de primera clase, mientras que para campo fermiónico se presentan dos vínculos de segunda clase.
- Se propone construir una combinación lineal de los vínculos G, $\bar{\phi}_a$ y ϕ_a, con el fin de generar un vínculo de primera clase.

$$\int dy^1 C^{ij}(x,y)\, V^j(y) = 0, \tag{61}$$

Clasificación de Vínculos

Se obtiene:

$$V^j(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ ie\psi_a(x) \\ -ie\bar{\psi}_a(x) \end{pmatrix}. \tag{62}$$

Por consiguiente, la combinación lineal que se formula para generar un vínculo de primera clase es:

$$\phi^2 \equiv \Xi^i V^i \quad , \quad i = 1, 2, 3, \tag{63}$$

$$\phi^2 = G + ie\bar{\phi}_a\psi_a - ie\phi_b\bar{\psi}_b, \tag{64}$$

$$\phi^2 = \partial_1\pi^1 - \pi_\theta + ie\bar{p}_a\psi_a + ie\bar{\psi}_b p_b. \tag{65}$$

Clasificación de Vínculos

Vínculos de Primera clase

$$\phi^1 \quad , \quad \phi^2$$

Vínculos de Segunda clase

$$\phi_a \quad , \quad \bar{\phi}_a$$

Paréntesis de Dirac

- Los vínculos de segunda clase son eliminados redefiniendo los paréntesis de Berezin, introduciendo los paréntesis de Dirac.

Paréntesis de Dirac (NP):

$$\{F(x), G(y)\}_D \equiv \{F(x), G(y)\}_B \tag{66}$$

$$-\int du^1 dv^1 \{F(x), \Sigma_a^i(u)\}_B \left(M_{ab}^{ij}(u,v)\right)^{-1} \left\{\Sigma_b^j(v), G(y)\right\}_B,$$

donde $i, j = 1, 2$.

Se definen:

$$\Sigma_a^1 \equiv \phi_a = p_a + \frac{1}{2}\gamma_{ab}^0 \psi_b,$$
$$\Sigma_a^2 \equiv \bar{\phi}_a = \bar{p}_a + \frac{1}{2}\bar{\psi}_b \gamma_{ba}^0,$$

y la matriz de vínculos de segunda clase:

$$M_{ab}^{ij}(u,v) = \left\{\Sigma_a^i(u), \Sigma_b^j(v)\right\}_B, \tag{67}$$

$$\Rightarrow \left(M_{ab}^{ij}(u,v)\right)^{-1} = i\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{ba}^0 \\ \gamma_{ab}^0 & 0 \end{pmatrix}\delta\left(u^1 - v^1\right).$$

Reemplazando la forma explicita de la matriz, se demuestra que:

$$\{F(x), G(y)\}_D = \{F(x), G(y)\}_B \tag{68}$$

$$-i\left(\gamma^0_{ab}\right)\int dv^1 \left\{F(x), \bar{\phi}_a(v)\right\}_B \left\{\phi_b(v), G(y)\right\}_B$$
$$-i(-1)^{(P_F+1)(1+P_G)}\left(\gamma^0_{ba}\right)\int dv^1 \left\{\bar{\phi}_b(v), G(y)\right\}_B \left\{F(x), \phi_a(v)\right\}_B .$$

Todas la relaciones dinámicas del modelo se formulan en términos del paréntesis de Dirac.

$$\dot{F}(x) \approx \{F(x), H_P(y)\}_D . \tag{69}$$

Hamiltoniano Extendido

Los vínculos de primera clase son generadores de transformaciones de gauge locales.

La dinámica del espacio de fase estará determinada por el Hamiltoniano Extendido.

$$H_E = H_C + \int dx^1 \left[\lambda^1(x)\,\phi^1(x) + \lambda^2(x)\,\phi^2(x)\right], \tag{70}$$

Hamiltoniano Extendido

$$
\begin{aligned}
H_E \;=\; & \int dx^1 \left\{ \frac{1}{2} g \left(\pi_\theta\right)^2 + \frac{1}{2} q^2 \left(\pi^1\right)^2 + \frac{1}{2g} \left(A_1\right)^2 - \frac{1}{g} A_1 \left(\partial_1 \theta\right) \right. \qquad (71)\\
& + \frac{1}{2g} \left(\partial_1 \theta\right)^2 + \pi^1 \left(\partial_1 A_0\right) + A_0 \pi_\theta - \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^1 \partial_1 \psi \\
& \left. + \frac{i}{2} \partial_1 \bar{\psi} \gamma^1 \psi + m \bar{\psi} \psi - e A_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi + \lambda^1 \phi^1 + \lambda^2 \phi^2 \right\},
\end{aligned}
$$

Hamiltoniano Extendido

La evolución temporal de una variable dinámica

$$F(x) = F\left(\psi_a(x), \bar{\psi}_a(x), A_\mu(x), \theta(x), \pi^\mu(x), \pi_\theta(x)\right),$$

se escribe en términos de H_E como:

$$\dot{F}(x) \approx \{F(x), H_E\}_D, \tag{72}$$

Ecuaciones de movimiento de Hamilton

Campos fermiónicos

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi}_a(x) &\approx \{\psi_a(x), H_E\}_D, \\
&\approx i\gamma^0_{ac}\left[i\gamma^1_{cb}\partial^x_1\psi_b(x) + eA_\mu(x)\gamma^\mu_{cb}\psi_b(x) - m\psi_c(x)\right. \\
&\quad \left. -e\lambda^2(x)\gamma^0_{cb}\psi_b(x)\right].
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\bar{\psi}}_a(x) &\approx \{\bar{\psi}_a(x), H_E(y)\}_D, \\
&\approx i\left[i\partial^x_1\bar{\psi}_b(x)\gamma^1_{bc} - eA_\mu(x)\bar{\psi}_b(x)\gamma^\mu_{bc} + m\bar{\psi}_c(x)\right. \\
&\quad \left. +e\lambda^2(x)\bar{\psi}_b(x)\gamma^0_{bc}\right]\gamma^0_{ca}.
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de movimiento de Hamilton

Campos Bosónicos

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_0(x) &\approx \{A_0(x), H_E(y)\}_D \approx \lambda^1(x), \\
\dot{\pi}^0(x) &\approx \{\pi^0(x), H_E(y)\}_D \approx \partial_1^x \pi^1(x) - \pi_\theta(x) + e\bar{\psi}_a(x)\gamma^0_{ab}\psi_b(x), \\
\dot{A}_1(x) &\approx \{A_1(x), H_E\}_D \approx q^2\pi^1(x) + \partial_1^x\left[A_0(x) - \lambda^2(x)\right], \\
\dot{\pi}_1(x) &\approx \{\pi^1(x), H_E\}_D \approx -\frac{1}{2g}A_1(x) + \frac{1}{g}\partial_1^x\theta(x) + e\bar{\psi}_a(x)\gamma^1_{ab}\psi_b(x), \\
\dot{\theta}(x) &\approx \{\theta(x), H_E\}_D \approx g\pi_\theta(x) + A_0(x) - \lambda^2(x), \\
\dot{\pi}_\theta(x) &\approx \{\pi_\theta(x), H_E\}_D \approx -\frac{1}{g}\partial_1^x A_1(x) + \frac{1}{g}\partial_1^x\partial_1^x\theta(x).
\end{aligned}
$$

Condiciones de gauge

- El numero de condiciones de guage introducidas debe ser igual al número de vínculos de primera clase existentes.
- Las condiciones de gauge son vínculos introducidos de manera arbitraria y relacionan las variables dinámicas de la teoría

$$\Omega^{i}(x) = \Omega^{i}\left(\psi_a, \bar{\psi}_a, A_\mu, \theta, \pi^\mu, \pi_\theta\right) \approx 0. \tag{73}$$

- Las condiciones de gauge deben permanecer constantes en el tiempo, es decir, se debe exigir consistencia sobre $\Omega^{i}(x) \approx 0$, esto es

$$\dot{\Omega}^{i}(x) \approx \left\{\Omega^{i}(x), H_E\right\}_D \approx 0. \tag{74}$$

Condiciones de gauge

- Las condiciones de gauge $\Omega^{i}\left(x\right)\approx 0$, y los vínculos de primera clase $\phi^{i}\left(x\right)\approx 0$; deben formar un conjunto de vínculos de segunda clase.

$$\det\left\{\Omega^{i}\left(x\right),\phi^{j}\left(y\right)\right\}_{D}\not\approx 0. \tag{75}$$

Condición de gauge de radiación

$$\Omega^{1}\left(x\right) \equiv A_{0}\left(x\right)\approx 0, \tag{76}$$

$$\Omega^{2}\left(x\right) \equiv \partial_{1}^{x}A_{1}\left(x\right)\approx 0. \tag{77}$$

Nuevo conjunto de vínculos de segunda clase

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= A_0(x) \approx 0, \\
\Phi_2(x) &= \partial_1^x A_1(x) \approx 0, \\
\Phi_3(x) &= \pi^0(x) \approx 0, \\
\Phi_4(x) &= \partial_1^x \pi^1(x) - \pi_\theta(x) + ie\bar{p}_a(x)\psi_a(x) + ie\bar{\psi}_b(x)p_b(x) \approx 0.
\end{aligned}
$$

Análisis de Vínculos $\Phi_i(x)$

Se emplean los paréntesis de Berezin

$$\begin{aligned}
\{\Phi_1(x), \Phi_3(y)\}_D &= \delta\left(x^1 - y^1\right), \\
\{\Phi_2(x), \Phi_4(y)\}_D &= -\partial_1^x \partial_1^x \delta\left(x^1 - y^1\right), \\
\{\Phi_3(x), \Phi_1(y)\}_D &= -\delta\left(x^1 - y^1\right), \\
\{\Phi_4(x), \Phi_2(y)\}_D &= \partial_1^x \partial_1^x \delta\left(x^1 - y^1\right),
\end{aligned}$$

Y se construye la matriz de vínculos de segunda clase:

$$P_{mn}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta\left(x^1 - y^1\right),$$

Análisis de Vínculos $\Phi_i(x)$

Dado que el determinante de $P_{mn}(x,y)$ es diferente de cero, el conjunto de vínculos $\Phi_i(x)$ es de segunda clase y se logran eliminar redefiniendo los paréntesis de Dirac (66). Considerando dos variables dinámicas:

$$F(x)=F\left[\psi_a(x),\bar{\psi}_a(x),A_\mu(x),\theta(x),\pi^\mu(x),\pi_\theta(x)\right]$$

$$G(y)=G\left[\psi_a(y),\bar{\psi}_a(y),A_\mu(y),\theta(y),\pi^\mu(y),\pi_\theta(y)\right]$$

$$\Longrightarrow \{F(x),G(y)\}_D^* = \{F(x),G(y)\}_D \tag{78}$$

$$-\int du^1 dv^1 \{F(x),\Phi_m(u)\}_D P^{-1}_{mn}(u,v)\{\Phi_n(v),G(y)\}_D$$

Análisis de Vínculos $\Phi_i(x)$

donde,

$$P^{-1}_{mn}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{\nabla^2_x} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\nabla^2_x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta\left(x^1 - y^1\right).$$

Se satisface la ecuación diferencial

$$\frac{1}{\nabla^2_x}\delta\left(x^1 - y^1\right) = G\left(x^1 - y^1\right), \tag{79}$$

siendo $\frac{1}{\nabla^2_x}$ el inverso del operador ∇^2_x y $G\left(x^1 - y^1\right)$ la correspondiente función de Green.

Análisis de Vínculos $\Phi_i(x)$

Bajo esta definición de paréntesis de Dirac, los vínculos de segunda clase $\Phi_m(x)$ son fuertemente nulos.

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(x) &= A_0 = 0,\\
\Phi_2(x) &= \partial_1 A_1 = 0,\\
\Phi_3(x) &= \pi^0 = 0,\\
\Phi_4(x) &= \partial_1 \pi^1 - \pi_\theta + ie\bar{p}_a\psi_a + ie\bar{\psi}_b p_b = 0.
\end{aligned}
$$

- Las últimas cuatro relaciones determinan que el número de grados de libertad del modelo que actualmente es 10, se reduzca a 8.

$$\Longrightarrow \left(\psi_a, \bar{\psi}_a, A_1, \theta, \pi^1, \pi_\theta\right)$$

$$\begin{aligned}
\left\{A_1(x), \pi^1(y)\right\}_D^* &= \left[1 - \frac{\partial_1^x \partial_1^x}{\nabla_x^2}\right] \delta\left(x^1 - y^1\right), \\
\left\{\pi^1(x), A_1(y)\right\}_D^* &= -\left[1 - \frac{\partial_1^x \partial_1^x}{\nabla_x^2}\right] \delta\left(x^1 - y^1\right), \\
\left\{\theta(x), \pi_\theta(y)\right\}_D^* &= \delta\left(x^1 - y^1\right), \\
\left\{\pi_\theta(x), \theta(y)\right\}_D^* &= -\delta\left(x^1 - y^1\right), \\
\left\{\psi_a(x), \bar{p}_b(y)\right\}_D^* &= -\frac{1}{2}\delta_{ab}\delta\left(x^1 - y^1\right), \\
\left\{\bar{\psi}_a(x), p_b(y)\right\}_D^* &= -\frac{1}{2}\delta_{ab}\delta\left(x^1 - y^1\right).
\end{aligned}$$

Estructura canónica del MTG

La evolución temporal de una variable dinámica $F(x)$ en el espacio de fase completo esta determinada por el hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H &= \int dy^1 \left(\frac{1}{2} g \left(\pi_\theta\right)^2 + \frac{1}{2} q^2 \left(\pi^1\right)^2 + \frac{1}{2g} \left(A_1\right)^2 - \frac{1}{g} A_1 \partial_1 \theta \right. \\ &+ \frac{1}{2g} \left(\partial_1 \theta\right)^2 + \pi^1 \partial_1 A_0 + A_0 \pi_\theta - \frac{i}{2} \bar{\psi}_a \gamma^1_{ab} \partial_1 \psi_b \\ &\left. + \frac{i}{2} \partial_1 \bar{\psi}_a \gamma^1_{ab} \psi_b + m \bar{\psi}_a \psi_a - e A_1 \bar{\psi}_a \gamma^1_{ab} \psi_b \right), \end{aligned} \tag{80}$$

y los paréntesis de Dirac redefinidos en (78). $\Longrightarrow$ $\dot{F}(x) = \left\{ F(x), H \right\}^*_D$

Estructura canónica del MTG

La evolución temporal de cada uno de los grados de libertad del modelo son:

Campos fermiónicos

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi}_c(x) &= \{\psi_c(x), H(y)\}^*_D \\
&= i\gamma^0_{cb}\left[i\gamma^1_{bd}\partial^x_1\psi_d(x) - m\psi_b(x) + eA_\nu(x)\gamma^\nu_{bd}\psi_d(x)\right], \\
\dot{\bar{\psi}}_c(x) &= \{\bar{\psi}_c(x), H(y)\}^*_D \\
&= i\left[i\partial^x_1\bar{\psi}_d(x)\gamma^1_{db} + m\bar{\psi}_b(x) - eA_\nu(x)\bar{\psi}_d(x)\gamma^\nu_{db}\right]\gamma^0_{bc}.
\end{aligned}
$$

Estructura canónica del MTG

Se derivan las ecuaciones de Dirac para campos espinoriales:

Campos fermiónicos

$$
\begin{aligned}
\gamma^{\mu}\left[i\partial_{\mu}^{x}+eA_{\mu}\left(x\right)\right]\psi\left(x\right)-m\psi\left(x\right) &= 0, \\
\left[i\partial_{\mu}^{x}-eA_{\mu}\left(x\right)\right]\bar{\psi}\left(x\right)\gamma^{\mu}+m\bar{\psi}\left(x\right) &= 0.
\end{aligned}
$$

Estructura canónica del MTG

Campos Bosónicos

$$\dot{A}_1(x) = \{A_1(x), H\}_D^* = q^2\pi^1(x) + \partial_1^x A_0(x),$$

$$\dot{\pi}^1(x) = \{\pi^1(x), H\}_D^* = -\frac{1}{g}A_1(x) + \frac{1}{g}\partial_1^x\theta(x) + e\bar{\psi}(x)\gamma^1\psi(x),$$

$$\dot{\theta}(x) = \{\theta(x), H(y)\}_D^* = g\pi_\theta(x) + A_0(x),$$

$$\dot{\pi}_\theta(x) = \{\pi_\theta(x), H(y)\}_D^* = -\frac{1}{g}\partial_1^x A_1(x) + \frac{1}{g}\partial_1^x\partial_1^x\theta(x).$$

- La solución clásica al modelo via método de Dirac permite implementar una función de partición a través del formalismo de integración funcional.
- El estudio de modelos en un espacio tiempo de dos dimensiones permite comprender problemas en QCD_4 o QED_4.
- El modelo de Thirring con simetría de gauge se ha implementado en la materia condensada, a través del estudio de las propiedades termodinámicas que existen en las teorías de campo bidimensionales.

Referencias

- M. Chaichian and N.F. Nelipa, Introduction to Gauge Field Theory (Springer-Verlag, 1984)
- Rosevaldo de Oliveira. Modelos de Schwinger, Thirring e Kondo à Temperatura Finita: Um Estudo Ph.D thesis, UNESP-IFT-D.004/07, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Física Teórica, 2007.
- Rodrigo Santos Bufalo. Modelo de Thirring com Simetria de Gauge: Uma Análise Funcional, Universidade Estadual Paulista, Instituto de Física Teórica, Fevereiro de 2008.
- R Aldrovandi and J Pereira. Notes for a Course on CLASSICAL FIELDS, chapter VI,VII,VIII. IFT, Sao Paulo, SP, Brazil, 2008.