Revista Brasileira de Ensino de Física
www.sbfisica.org.br

Método de Faddeev-Jackiw na mecânica dos pontos materiais

L. G. Caro[1], B. M. Pimentel[1] e G. E. R. Zambrano[2]

[1]*Instituto de Física Teórica, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, SP, Brasil*
[2]*Departamento de Física, Universidad de Nariño, Colombia*

As teorias de vínculos são de grande interesse na física teórica, pois todas as teorias conhecidas das interações fundamentais apresentam liberdade de gauge, que é um tipo de caráter singular da teoria e diz-se que ela possui vínculos. Por outro lado, uma vez que a teoria quântica é comumente construída sobre uma estrutura hamiltoniana, o processo de quantização canônica é o mais apropriado se se dispuser da formulação hamiltoniana da teoria clássica. Assim, surge a necessidade de obter os parênteses de Poisson (PP) das variáveis canônicas na teoria clássica a ser quantizada. O presente trabalho estuda a proposta de Faddeev e Jackiw, revisada por Barcelos-Neto e Wotzasek, para obter os PP em teorias singulares por meio de uma abordagem que faz uso dos elementos geométricos próprios da teoria hamiltoniana. O processo foi construído especificamente na mecânica dos pontos materiais e posteriormente foi implementado em uma série de exemplos, obtendo os PP fundamentais em cada um deles e deixando assim o terreno pronto para a quantização.
Palabras-chave: Mecânica analítica, forma simplética, sistemas singulares.

Constrained theories are of great interest in theoretical physics, since all of known theories of fundamental interactions presents gauge freedom, which is a type of singular character of the theory and it's says that the theory is constrained. On the other hand, since the quantum theory is commonly constructed on a Hamiltonian structure, the canonical quantization process is the most suitable if the Hamiltonian formulation of the classical theory is available. Thus, the necessity to obtain the Poisson Brackets (PB) of the canonical variables in the theory to be quantized arises. In the present work we study the Faddeev and Jackiw proposal, reviewed by Barcelos-Neto and Wotzasek, to obtain the PB in singular theories by means of an approach employing the themselves geometric elements of the Hamiltonian theory. The process was build specifically for matter point mechanics and subsequently was implemented in a sequence of examples, obtaining the fundamental PB in each of them, thus preparing the ground for quantization.
Keywords: Analytical mechanics, symplectic form, constrained systems.

1 Introdução

Na prática, uma teoria quântica é construída a partir de uma teoria clássica por meio de um processo conhecido como quantização; de fato, a mecânica quântica, tal como a conhecemos, é desenvolvida sobre a estrutura canônica fornecida pela formulação hamiltoniana da mecânica analítica. Porém, após feita a quantização geralmente a teoria quântica apresenta características que não tem contraparte na abordagem clássica, uma clara evidência é a indistinguibilidade das partículas idênticas em mecânica quântica, sendo uma consequência a chamada degenerescência de troca, a qual foi a motivação para introduzir o princípio de simetrização para os estados correspondentes a sistemas de partículas idênticas. Segundo a linha, graças à extensão desse estudo para o caso no qual o número de partículas pode variar durante a evolução do sistema é que o conceito de campo viu a luz na teoria quântica, e que posteriormente foi importado à teoria clássica (mas agora compatível com a relatividade especial) para permitir assim que o que sempre foi concebido como partículas possam ser modelados como campos de matéria com determinadas propriedades que podem ser impostas segundo o que desejamos modelar; contudo, a noção de campo já estava presente na Física desde que as interações gravitacional e eletromagnéticas foram descritas com grande sucesso por meio da noção de interação à distância que matematicamente deu lugar à ideia de campo. No estudo das interações elementares foi descoberta a invariância da teoria sob as chamadas transformações de gauge, donde nasceu o conceito de uma nova forma de simetria: a simetria de gauge. O fato de que uma teoria esteja dotada dessa propriedade realmente é uma evidência de que a nossa descrição dela não é capaz de fornecermos de uma dinâmica univocamente determinada, mas de uma série de possibilidades fisicamente equivalentes; de fato, todas as teorias conhecidas das interações fundamentais apresentam essa característica.

A teoria de campos clássicos pode ser vista como uma extensão da mecânica analítica para um número infinito de graus de liberdade, o que permite estudá-la por meio das já conhecidas formulações lagrangiana e hamiltoniana e é claro que as teorias de interação podem ser abordadas por meio dessas formulações. É assim que encontramos que as teorias com liberdade de gauge resultam pertencer ao conjunto das chamadas teorias singulares (ou com vínculos) o que impede que a construção da formulação hamiltoniana possa ser feita, partindo da abordagem lagrangiana, seguindo o procedimento padrão aprendido em mecânica analítica. O processo de quantização comumente utilizado é conhecido como quantização canônica e foi proposto por Dirac no ano 1925 [1], e a principal exigência desse procedimento é a existência de uma formulação hamiltoniana bem definida da teoria clássica a ser quantizada. Assim, o fato de que não poder, em primeira instância, dispor de uma teoria hamiltoniana de sistemas singulares já é um impedimento para a quantização deles.

Os trabalhos de Bergmann [2] em colaboração com, Brunings [3], Penfield, Schiller, Zatzkis [4] e Anderson [5] entre os anos 1949 e 1950 permitiram entender a conexão entre os vínculos e as propriedades de invariância de uma teoria singular; todos esses trabalhos foram desenvolvidos no contexto de teorias de campos. Entretanto, Dirac mostrou no ano 1950 que o método para estudar sistemas com vínculos pode ser estudado em sistemas com finitos graus de liberdade (ou sistemas discretos) [6]. O método desenvolvido por Dirac foi realizado no contexto de uma teoria puramente hamiltoniana, sendo o objetivo a liberação da quantização canônica. Um dos principais aportes do método de Dirac foi a classificação dos vínculos em primeira e segunda classe e mais ainda, ele demostrou que os vínculos de primeira classe são os geradores (no sentido clássico) de transformações de equivalência que no caso contínuo seriam as transformações de gauge. Sem sombra de dúvida, a maior contribuição do método de Dirac é a introdução dos hoje chamados parênteses de Dirac, que são a versão corrigida dos parênteses de Poisson da formulação hamiltoniana padrão que permitem a correta passagem à teoria quântica. Dirac também estendeu o método dele à teoria de campos [7].

Embora a análise dos sistemas singulares desenvolvida por Dirac e Bergmann teve um inegável e grande sucesso, vários anos mais tarde Faddeev e Jackiw (F-J) apresentaram uma proposta, bastante geral, para o tratamento de sistemas singulares [8] sem ter que recorrer à classificação dos vínculos em primeira ou segunda classe, que foi estabelecida no método de Dirac. O método F-J, chamado também por alguns autores de método simplético, pode ser visto como um caminho geométrico para a obtenção dos parênteses a serem quantizados. Além do fato de evadir a classificação dos vínculos, uma vantagem do método F-J é que ele fornece os verdadeiros vínculos da teoria e são perfeitamente consistentes com as equações de movimento, o que permite distinguir os verdadeiros graus de liberdade físicos do sistema. Poucos anos depois, Barcelos-Neto e Wotzasek (BN-W) propuseram uma alternativa (um pouco mais algébrica) ao método F-J [9, 10] que permite incorporar os próprios vínculos de maneira iterativa no caminho a obter a estrutura simplética que nos permitirá obter diretamente os verdadeiros parênteses das variáveis canônicas correspondentes aos graus de liberdade dinâmicos. O presente trabalho está focado na construção do método F-J com a contribuição de BN-W e a aplicação em alguns sistemas simples.

2 Formulação da mecânica *à la* Faddeev-Jackiw

O ponto de partida da formulação de Faddeev-Jackiw é reescrever a lagrangiana do sistema de maneira tal que seja linear nas *velocidades*[1], isto é, que tenha a forma:

$$L(\xi;\dot{\xi}) = \theta_\nu(\xi)\,\dot{\xi}^\nu - H(\xi)\ , \tag{1}$$

onde os $\{\xi^\nu\}_{\nu=1}^N$ são as coordenadas do conjunto que chamaremos de *espaço de fase* (M) e H, a hamiltoniana correspondente; os coeficientes das velocidades são as componentes (na base padrão[2]) de um objeto chamado de $1-$forma canônica:

$$\theta = \theta_1 d\xi^1 + \cdots + \theta_N d\xi^N = \theta_\nu d\xi^\nu\ .$$

A lagrangiana apresentada em (1) diz-se que está na **forma canônica**. Para fins didáticos, resulta conveniente escrever (1) da seguinte maneira:

$$L = \underbrace{\begin{pmatrix}\theta_1 & \cdots & \theta_N\end{pmatrix}}_{\Theta}\begin{pmatrix}\dot{\xi}^1\\ \vdots \\ \dot{\xi}^N\end{pmatrix} - H\ ,$$

onde as componentes da $1-$forma canônica θ foram organizadas em um vetor linha que temos denotado por Θ. Nesse sentido Θ vem a ser apenas uma representação da $1-$forma θ.

É importante mencionar que qualquer lagrangiana pode ser escrita na forma canônica, mas para isso se deve fazer uma escolha apropriada das coordenadas **independentes** do espaço de fase.

Se, por exemplo, considerarmos as típicas coordenadas q^a e p_a da mecânica hamiltoniana, elas resultam ser independentes nos sistemas regulares[3] e, consequentemente, a lagrangiana canônica resulta ser simplesmente:

$$L = p_a\dot{q}^a - H \qquad (a = 1, \cdots, N/2 \stackrel{!}{=} n)\ ,$$

pois escrita dessa forma, ela já é linear nas velocidades. Assim, bastará fazer que os ξ^μ desempenhem o papel

[1] Na presente abordagem chamamos de velocidades às derivadas temporais das coordenadas (que não necessariamente representam aos pontos do espaço de configuração).

[2] Escolhidas as coordenadas ξ^μ, o conjunto $\{d\xi^\mu\}_{\mu=1}^N$ é uma base para o espaço de $1-$formas em M.

[3] Na formulação hamiltoniana um sistema é dito regular quando é possível expressar cada uma das velocidades em termos das coordenadas e os momentos.

de coordenadas unificadas; i. e.:

$$\xi = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \qquad ; \qquad q, p \in \mathbb{R}^n \ .$$

Com isto, podemos escrever a lagrangiana canônica como:

$$L = \begin{pmatrix} p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} - H \ .$$

Logo, podemos identificar:

$$\Theta = \begin{pmatrix} p & 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} p_1 & \cdots & p_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

e com isto, a $1-$forma canônica de um sistema regular resulta:

$$\theta = p_1 dq^1 + \cdots + p_n dq^n = p_a dq^a \ . \tag{2}$$

No entanto, quando estamos perante um sistema singular, nem todas as coordenadas resultam ser independentes e isso faz com que devamos escolher cuidadosamente as coordenadas ξ^μ. Para ilustrar essa situação, considere-se a seguinte lagrangiana[4][11]:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_2\dot{q}_1 + (1-\alpha)q_1\dot{q}_2 + \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 \ . \tag{3}$$

Seguindo o procedimento padrão da mecânica hamiltoniana teremos:

$$\begin{aligned} p_1 = \dot{q}_1 + q_2 \quad &, \quad p_2 = (1-\alpha)q_1 \quad , \\ H = \frac{1}{2}(p_1 - q_2)^2 &- \frac{\beta}{2}(q_1 - q_2)^2 \ . \end{aligned}$$

Em primeiro lugar, devemos observar que as coordenadas p_2 e q_1 não são independentes; logo, uma boa escolha de coordenadas do espaço de fase será a seguinte:

$$\xi^t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & p_1 \end{pmatrix}$$

Com isto já é simples escrever a lagrangiana (2) na forma canônica:

$$L = p_1\dot{q}_1 + \cancel{p_2}\dot{q}_2 - H = p_1\dot{q}_1 + (1-\alpha)q_1\dot{q}_2 - H \ .$$

Neste caso:

$$\Theta = \begin{pmatrix} p_1 & (1-\alpha)q_1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \theta = p_1 dq_1 + (1-\alpha)q_1 dq_2 \ .$$

Havíamos mencionado que Θ é uma representação (matricial) de um objeto chamado de $1-$forma canônica; o seguinte será explicar o que é realmente esse objeto e qual é a importância que tem na presente abordagem.

No caso geral (regular ou singular) o espaço de fase está equipado com uma $2-$forma ω que contém toda a estrutura canônica do sistema, encontramos uma evidência disso no fato de que ω aparece naturalmente nas equações de movimento; por outro lado, o caráter regular ou singular do sistema pode ser determinado apenas conhecendo[5] ω. A relação entre a $2-$forma ω e a $1-forma\ \theta$ é a seguinte:

$$\omega \doteq d\theta \ , \tag{4}$$

onde d é a operação de derivação exterior de formas diferenciais. Como já se viu a $1-$forma canônica θ pode ser expressa como:

$$\theta = \theta_\nu d\xi^\nu \quad \Rightarrow \quad \Theta = \begin{pmatrix} \theta_1 & \cdots & \theta_N \end{pmatrix} \ .$$

Logo, de (4):

$$\begin{aligned} \omega =& d\left(\theta_\nu d\xi^\nu\right) = \frac{\partial \theta_\nu}{\partial \xi^\mu} d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \theta_\nu}{\partial \xi^\mu} - \frac{\partial \theta_\mu}{\partial \xi^\nu}\right) d\xi^\mu \wedge d\xi^\nu \ . \end{aligned}$$

Levando em conta que, em geral, uma $2-$ forma α pode ser escrita como:

$$\alpha = \sum_{i<j} \alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2}\alpha_{ij} dx^i \wedge dx^j \ ,$$

identificamos as componentes de ω :

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{\partial \theta_\nu}{\partial \xi^\mu} - \frac{\partial \theta_\mu}{\partial \xi^\nu} \ . \tag{5}$$

Evidentemente $\omega_{\mu\nu}$ é antissimétrico nos seus índices e, por conseguinte, podemos representar ω por meio de uma matriz antissimétrica Ω cujos elementos sejam as componentes $\omega_{\mu\nu}$:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \cdots & \omega_{1N} \\ -\omega_{12} & 0 & \cdots & \omega_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega_{1N} & -\omega_{2N} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Assim, para construir a matriz Ω bastará identificar os elementos da parte triangular superior (ou inferior); lembrando que a cada elemento da $2-$forma ω corresponde-lhe uma entrada na matriz cuja posição é determinada segundo[6]:

$$\omega = \cdots + \omega_{\mu\nu} \underbrace{d\xi^\mu}_{\substack{\mu-\text{éssima} \\ \text{linha}}} \wedge \underbrace{d\xi^\nu}_{\substack{\nu-\text{éssima} \\ \text{coluna}}} + \cdots \tag{6}$$

Considerando novamente o caso da mecânica hamiltoniana, podemos determinar a $2-$forma ω de um sistema regular de n graus de liberdade tomando a derivada exterior da $1-$forma canônica apresentada em (2):

$$\begin{aligned} \omega &= d(p_1 dq^1 + \cdots + p_1 dq^1 + 0\, dp_1 + \cdots 0\, dp_n) \\ &= dp_1 \wedge dq_1 + \cdots + dp_n \wedge dq_n \ , \end{aligned}$$

ou de maneira mais compacta:

$$\omega = d(p_a dq^a) = dp_a \wedge dq^a \ . \tag{7}$$

logo, seguindo a regra apresentada em (6), podemos construir facilmente a representação matricial:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{8}$$

[4]Vamos trabalhar com este exemplo na medida que formos construindo e desenvolvendo as etapas do método F-J.

[5]De maneira mais precisa, é a representação matricial de ω o que fornece essa informação, como será apresentado mais diante.

[6]O conjunto $\{\xi^\mu \wedge d\xi^\nu\}_{\mu<\nu}$ constitui uma base do espaço de $2-$formas no espaço de fase M.

onde I_n é a matriz identidade em $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Agora voltemos ao exemplo da lagrangiana apresentada em (3), para esse caso a 2-forma ω resulta:

$$\begin{aligned}\omega &= d\Big(p_1 dq_1 + (1-\alpha)q_1 dq_2\Big)\\ &= dp_1\wedge dq_1 + (1-\alpha)dq_1\wedge dq_2\ ,\end{aligned}$$

ou matricialmente:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 1-\alpha & -1\\ \alpha-1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\ . \tag{9}$$

Ora, não devemos perder de vista que sempre que dispormos de uma lagrangiana podemos construir o funcional ação $S[\xi] \doteq \int_{t_1}^{t_2} L(\xi;\dot\xi)dt$ e obter as equações de movimento em virtude do princípio de Hamilton. Lembre-se que em nosso espaço de fase as coordenadas ξ^μ (e em consequência as variações delas) são independentes; com isto, as equações buscadas resultam:

$$\frac{\delta S}{\delta\xi^\mu} = \left(\frac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^\mu} - \frac{\partial\theta_\mu}{\partial\xi^\nu}\right)\dot\xi^\nu - \frac{\partial H}{\partial\xi^\mu} = 0\ ,$$

ou, levando em conta (5):

$$\omega_{\mu\nu}\dot\xi^\nu = \frac{\partial H}{\partial\xi^\mu}\ , \tag{10}$$

donde vemos que, como foi antecipado, as componentes da 2−forma ω aparecem naturalmente nas equações de movimento nas coordenadas escolhidas para o espaço de fase.

É de salientar que uma vez que ω é definida como a derivada exterior de outra forma diferencial (equação (4)) ter-se-á que $d\omega = 0$, nesse caso diz-se que ω é uma forma fechada. Por outro lado, devemos lembrar que uma forma bilinear é dita não-degenerada se e somente se qualquer representação matricial resulta ser invertível; nesse sentido, essa mesma definição de não-degenerescência estende-se para qualquer 2−forma (em dimensão finita). Assim, para o caso de ω, diremos que ela é não-degenerada se a matriz Ω resulta invertível. Pode-se provar também que a não-degenerescência da forma ω é condição necessária e suficiente para garantir o caráter regular do sistema em estudo.

Na linguagem de formas, uma 2−forma fechada e não-degenerada é chamada de *simplética* enquanto que uma 2−forma fechada e degenerada é dita *pré-simplética*. Então, com essas definições podemos afirmar que um sistema é regular (singular) quando a 2−forma ω, definida no espaço de fase, é simplética (pré-simplética).

2.1 Parênteses de Poisson

Quando o espaço de fase M é equipado com uma forma simplética ω (sistemas regulares) é possível definir uma operação bilinear $\{\cdot\,;\cdot\}$ sobre o espaço de funções suaves em M $\big($usualmente denotado por $\mathcal{C}^\infty(M)\big)$ conhecida como parênteses de Poisson (PP). Lembre-se que, em geral, as *trajetórias* no espaço de fase são obtidas dando solução às equações de movimento; assim, as coordenadas ξ^μ dos pontos sobre essas curvas tornam-se funções do tempo. Nesse sentido as funções de $\mathcal{C}^\infty(M)$ são conhecidas como *funções dinâmicas*, pois elas evoluem com o tempo; então, se $F = F\big(\xi(t)\big)$ é uma função dinâmica ter-se-á:

$$\dot F = \frac{\partial F}{\partial\xi^\mu}\dot\xi^\mu\ . \tag{11}$$

Sob o suposto que a matriz Ω é invertível, podemos denotar as componentes da inversa dela por $\omega^{\mu\nu}$ e assim:

$$\Omega^{-1}\Omega = I \quad\Rightarrow\quad \omega^{\mu\rho}\omega_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu\ .$$

Usando esse último resultado na equação de movimento (10) consegue-se:

$$\dot\xi^\mu = \omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial\xi^\nu}\ .$$

Assim, substituindo em (10) resulta:

$$\dot F = \frac{\partial F}{\partial\xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial\xi^\nu}\ . \tag{12}$$

Podemos ver em (12) que a hamiltoniana H desempenha um papel fundamental, pois a evolução temporal de qualquer função dinâmica está relacionada com o gradiente de H. As transformações no espaço de fase que deixam invariante a estrutura hamiltoniana são chamadas de *transformações canônicas*[7] e a própria evolução temporal pode ser vista como uma sequência (contínua) de transformações canônicas infinitesimais que são geradas pela hamiltoniana; esse último fato é o que nos permite introduzir os PP por meio da seguinte exigência[8]:

$$\dot F \doteq \{F;H\}\ . \tag{13}$$

É a partir de (13) e (12) que introduzimos a definição dos PP de duas funções dinâmicas F e G quaisquer:

$$\{F;G\} \doteq \frac{\partial F}{\partial\xi^\mu}\omega^{\mu\nu}\frac{\partial G}{\partial\xi^\nu}\ , \tag{14}$$

donde vemos que os elementos principais nessa definição são as componentes da matriz Ω^{-1}. Além da bilinearidade, pode-se provar que os PP também satisfazem as propriedades de antissimetria, identidade de Jacobi e regra de Leibniz. Por outro lado, também se tem:

$$\{\xi^\mu;\xi^\nu\} = \omega^{\mu\nu}\ . \tag{15}$$

A equação (15) é de grande importância, pois ela mostra como a operação bilinear $\{\cdot\,;\cdot\}$ estabelece uma

[7]De fato, essas transformações deixam invariante a forma simplética ω.

[8]De maneira mais geral, F poderia depender explicitamente do tempo, nesse caso $\dot F \doteq \{F;H\} + \dfrac{\partial F}{\partial t}$.

conexão direta entre as variáveis canônicas (coordenadas em M) e a inversa da forma simplética.

De todo o anterior, podemos concluir que no caso regular a forma simplética ω é uma peça chave para estabelecer uma estrutura de Poisson no espaço de fase.

Retomando o exemplo da lagrangiana em (3), a matriz Ω obtida em (9) é claramente singular e consequentemente não podemos construir os parênteses de Poisson para esse sistema devido à inexistência da matriz inversa Ω^{-1}, pois os elementos $\omega^{\mu\nu}$ não podem ser definidos.

Neste ponto é natural questionarmos se será possível equipar o espaço de fase de um sistema singular com uma estrutura de Poisson, mesmo que a $2-$forma ω não seja mais simplética (mas pré-simplética). Frente a essa problemática Faddeev e Jackiw (F-J) desenvolveram um método iterativo baseado no teorema de Darboux generalizado [12], que parte do suposto de que se $N-R$ é o posto de Ω, é possível encontrar um subespaço de M de dimensão (par) $2n \overset{!}{=} N-R$ tal que para umas coordenadas apropriadas $(\{Q^i\}_{i=1}^n; \{P_i\}_{i=1}^n; \{z^r\}_{r=1}^R)$, chamadas de coordenadas de Darboux, a matriz Ω contém um bloco da forma (8) e, nessas coordenadas, a forma pré-simplética ω pode ser escrita na forma (7). Porém, $R' < R$ das equações de movimento correspondentes as coordenadas z^r permitem, em geral, expressar apenas $R' < R$ delas como função das coordenadas restantes, enquanto as outras $R-R'$ equações de movimento serão relações que envolvem apenas às coordenadas Q^i e P_i, o que implica que nem todas elas são realmente independentes. Depois de identificar as verdadeiras coordenadas independentes, elas podem ser tomadas como novas coordenadas unificadas ξ do espaço de fase e retornar assim ao ponto inicial, mas em um espaço de fase reduzido. O procedimento anterior deve ser repetido até conseguir eliminar todas as coordenadas do tipo z; com isto, obter-se-á um espaço de fase com todas as coordenadas independentes que corresponderam aos verdadeiros graus de liberdade do sistema, obtendo assim a estrutura canônica de um sistema regular, o qual finalmente permitiria definir os Parênteses de Poisson exatamente como no caso regular.

Ainda que o método F-J seja indiscutivelmente eficiente, a implementação dele poderia resultar complicada, principalmente pela dificuldade de identificar as coordenadas de Darboux em cada iteração. Entretanto, Barcelos-Neto e Wotzasek (BN-W) desenvolveram uma outra alternativa que mantém a ideia central de F-J, i. e.: conseguir que um bloco da matriz Ω contenha os graus de liberdade físicos do sistema. Mas, em contrapartida ao método F-J, isso não é atingido reduzindo o espaço de fase, mas estendendo-o em cada iteração sem ter que fazer uso das coordenadas de Darboux. O propósito da seguinte seção e estudar a contribuição de BN-W que permitiu tornar mais simples a proposta original de Faddeev e Jackiw.

3 Contribuição de Barcelos-Neto e Wotzasek (caso singular)

Em primeiro lugar, deve ficar claro que nos sistemas singulares, o espaço de fase M está equipado com uma forma pré-simplética ω, o qual implica que a matriz associada Ω é náo-invertível; logo, se $dim(M) = N$ ter-se-á que $N = posto(\Omega) + R$. Em consequência, Ω (antissimétrica por construção) deve possuir R autovetores linearmente independentes associados ao autovalor nulo:

$$\Omega v_r = 0 \qquad (r = 1, \cdots, R)\ ,$$

usando o fato da antissimetria de Ω encontra-se que $v_r^t\Omega = 0$, ou em componentes: $v_r^\mu \omega_{\mu\nu} = 0$. Logo, podemos fazer o seguinte:

$$v_r^\mu \omega_{\mu\nu} \dot{\xi}^\nu \overset{(10)}{=} v_r^\mu \frac{\partial H}{\partial \xi^\mu} = 0\ .$$

Daqui que foram obtidas as seguintes R equações:

$$\Gamma_r(\xi) = v_r^\mu \frac{\partial H}{\partial \xi^\mu} = 0 \qquad (r = 1, \cdots, R)\ . \tag{16}$$

As funções Γ_r, apresentada em (16), serão chamadas de **vínculos**[9], pois elas deixam em evidência que nem todas as coordenadas ξ^μ são realmente independentes.

Considerando novamente o sistema descrito pela lagrangiana em (3), posto que a matriz Ω é singular, podemos encontrar os vínculos presentes por meio do(s) autovetor(es) associado(s) ao autovalor nulo, segundo (16). Neste caso o único autovetor resulta ser $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-\alpha \end{pmatrix}$ e com isto o vínculo buscado será dado por:

$$\Gamma = (0)\frac{\partial H}{\partial q_1} + (1)\frac{\partial H}{\partial q_2} + (1-\alpha)\frac{\partial H}{\partial p_1} = 0\ .$$

Assim, o vínculo resulta:

$$\Gamma = -\alpha(p_1 - q_2) + \beta(q_1 - q_2) = 0\ . \tag{17}$$

Ora, uma vez que o caráter singular do sistema é devido à presença dos vínculos, é natural exigir que eles permaneçam inalterados enquanto o sistema evolui. Para esse fim basta impor as R condições $\dot{\Gamma}_r = 0$ à própria dinâmica do sistema. Com isto, o problema variacional para o funcional ação agora terá R restrições que, em princípio, dependem das coordenadas e das velocidades; porém, uma vez que essa dependência é devida a uma derivada total (em relação à variável t), elas podem ser integradas pra dar lugar a outras restrições que dependeram apenas das coordenadas.

Assim, em conformidade com o princípio de Hamilton:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta S}{\delta \xi^\mu(t)} \delta\xi^\mu(t) dt = 0\ ;$$

[9] Posto que esses vínculos foram obtidos utilizando as equações de movimento, é lógico esperar que sejam consistentes com elas.

mas, neste caso nem todos os N deslocamentos $\delta\xi^{\mu}$ são independentes, pois devem ser compatíveis com as R restrições $\dot{\Gamma}_r = 0$; em consequência, apenas $N - R$ dos $\delta\xi^{\mu}$ serão realmente independentes. No estudo de problemas variacionais com restrições prova-se que este tipo de problemas pode ser abordado de maneira equivalente fazendo uso de R multiplicadores de Lagrange $\lambda^r = \lambda^r(t)$ e definindo um funcional auxiliar como segue:

$$\tilde{S}[\xi,\lambda] \doteq \int_{t_1}^{t_2} \Big(L(\xi;\dot{\xi}) - \lambda^r(t)\dot{\Gamma}_r(\xi) \Big)\, dt \, .$$

Note-se que $\tilde{S}$ é um funcional definido sobre $N + R$ funções, a saber, $\{\xi^{\mu}\}_{\mu=1}^{N}$ e $\{\lambda^r\}_{r=1}^{R}$. Por outro lado, devido às restrições presentes, R dos ξ^{μ} são funções das restantes, o que sugere que a extremação de $\tilde{S}$ não poderá ser realizada usando procedimento usual do caso irrestrito[10]. Um teorema estabelece que as curvas extremais $\xi^{\mu} = \xi^{\mu}(t)$ que são soluções do problema variacional sem restrições[11] também atenderão as equações de Euler-Lagrange correspondentes ao funcional auxiliar:

$$\frac{\delta\tilde{S}}{\delta\xi^{\mu}} = 0 \quad (\mu = 1,\cdots N) \, ,$$

para uma escolha apropriada dos fatores λ^r. Lembrando que a lagrangiana canônica é dada por (1) ter-se-á:

$$\begin{aligned}
\tilde{S} &= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\theta_{\nu}\dot{\xi}^{\nu} - H - \dot{\Gamma}_r\lambda^r \Big)\, dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left[\theta_{\nu}\dot{\xi}^{\nu} - H - \left(\frac{d}{dt}(\Gamma_r\lambda^r) - \Gamma_r\dot{\lambda}^r \right) \right] dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \Big(\theta_{\nu}\dot{\xi}^{\nu} - H + \Gamma_r\dot{\lambda}^r \Big)\, dt \, ,
\end{aligned}$$

pois os termos de superfície não contribuem nos problemas de extremos fixos. Ora, uma vez que o problema variacional (irrestrito) para $\tilde{S}$ está realmente definido sobre a parte independente das coordenadas ξ^{μ}, é mais apropriado escrever:

$$\tilde{S} = \int_{t_1}^{t_2} \Big(\theta_{\nu}\dot{\xi}^{\nu} + \Gamma_r\dot{\lambda}^r - H\big|_{\Gamma=0} \Big)\, dt \, .$$

As equações de movimento correspondentes resultam:

$$\left\{ \begin{aligned}
\omega_{\mu\nu}\dot{\xi}^{\nu} + \frac{\partial\Gamma_r}{\partial\xi^{\mu}}\dot{\lambda}^r - \frac{\partial}{\partial\xi^{\mu}}H\big|_{\Gamma=0} = 0 \qquad & (\mu = 1,\cdots,N) \\
-\dot{\Gamma}_r = 0 \qquad & (r = 1,\cdots,R)
\end{aligned} \right. \, , \tag{18}$$

Neste ponto é relevante assinalar que em muitas ocasiões algumas das coordenadas originais ξ^{μ} não aparecem mais na função dentro da integral em $\tilde{S}$ devido a que é possível que os próprios vínculos apareçam na hamiltoniana H multiplicados por algumas das coordenadas[12], e nesse caso elas desaparecerão em $H\big|_{\Gamma=0}$. Em consequência, aquelas variáveis absorbidas não terão uma dinâmica própria, pelo qual não deverão ser consideradas no conjunto de variáveis canônicas[13]. Então, se sobrevivem $N' \leqslant N$ coordenadas, podemos rotulá-las como $(\zeta^1;\cdots;\zeta^{N'})$, ou $\{\zeta^a\}_{a=1}^{N'}$.

Embora o funcional $\tilde{S}$ seja originalmente definido sobre as $(M+N)$ funções ξ^{μ} e λ^r, as variáveis que têm lugar na evolução do sistema são representadas pelas $(M+N')$ funções ζ^a e λ^r; então, elas podem ser tomadas como coordenadas de um novo conjunto que vamos denotar por $M^{(1)}$. Com isto, $\tilde{S}$ pode ser visto como uma ação em $M^{(1)}$ e, consequentemente, a função dentro da integral pode ser tomada como uma lagrangiana, que chamaremos $L^{(1)}$, que ademais resulta estar escrita na forma canônica (em relação às novas coordenadas), pois é linear nas velocidades em $M^{(1)}$:

$$L^{(1)} \doteq \vartheta_a\dot{\zeta}^a + \Gamma_r\dot{\lambda}^r - H\big|_{\Gamma=0} \, .$$

Lembre-se que os coeficientes das velocidades na lagrangiana canônica são as componentes de um objeto chamado de 1−forma canônica. Então, levando em conta que as coordenadas no conjunto $M^{(1)}$ são $(\zeta^1,\cdots,\zeta^{N'};\lambda^1,\cdots,\lambda^R)$ neste caso ter-se-á:

$$\theta^{(1)} = \underbrace{\vartheta_1 d\zeta^1 + \cdots + \vartheta_{N'} d\zeta^{N'}}_{\vartheta(\zeta)\,\equiv\,\theta(\xi)} + \Gamma_1 d\lambda^1 + \cdots + \Gamma_R d\lambda^R \, .$$

Com isto:

$$\theta^{(1)} = \vartheta + \Gamma_r d\lambda^r \, . \tag{19}$$

Ou também, usando a representação como matriz fila:

$$\Theta^{(1)} = \begin{pmatrix} \vartheta_1 & \cdots & \vartheta_N & \Gamma_1 & \cdots & \Gamma_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vartheta & \Gamma \end{pmatrix} \, .$$

Com isto:

$$L^{(1)} = \begin{pmatrix} \vartheta & \Gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\zeta} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} - H\big|_{\Gamma=0} \, .$$

Colocando as coordenadas de $M^{(1)}$ no vetor $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \lambda \end{pmatrix}$ e chamando $H^{(1)} \overset{!}{=} H\big|_{\Gamma=0}$ a lagrangiana canônica $L^{(1)}$ se escreve simplesmente como:

$$L^{(1)} = \theta^{(1)}_{\beta}\dot{\xi}^{(1)\beta} - H^{(1)} \qquad (\beta = 1,\cdots,N'+R) \, ,$$

que tem exatamente a mesma forma que a lagrangiana canônica apresentada em (1).

Para o exemplo da lagrangiana em (3):

- $H^{(1)} = H\big|_{\Gamma=0} \overset{(17)}{=} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\alpha^2}{\beta}\right)(p_1 - q_2)^2 \, .$
- $L^{(1)} = p_1\dot{q}_1 + (1-\alpha)q_1\dot{q}_2 - H^{(1)} \, .$
  Note-se que neste caso nenhuma das variáveis canônicas originais desaparece, por tanto $\zeta = \xi$.
- $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \xi^{(1)t} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & p_1 & \lambda \end{pmatrix} \, .$

[10] Isso devido a que, por suposição, as curvas paramétricas no argumento de um funcional são sempre independentes.
[11] No cual todos os $\delta\xi^{\mu}$ podem ser considerados independentes.
[12] Cujas velocidades correspondentes também não estejam presentes na parte $\theta_{\nu}\dot{\xi}^{\nu}$.
[13] Mais adiante vamos mostrar que suprimir essas variáveis é de grande importância na presente abordagem.

- $\theta^{(1)} \overset{(19)}{=} \theta + \big[-\alpha(p_1-q_2)+\beta(q_1-q_2)\big]d\lambda$.

Lembre-se que o elemento chave na presente abordagem é a forma simplética (definida no espaço de fase), pois a inversa dela fornece-nos da estrutura de Poisson desejada. Logo, podemos obter uma 2−forma, candidata a ser uma forma simplética em $M^{(1)}$, tomando a derivada exterior da 1−forma canônica $\theta^{(1)}$, isto é:

$$\begin{aligned}\omega^{(1)} = d\theta^{(1)} &= d\big(\vartheta + \Gamma_{r'}d\lambda^{r'}\big) = d\vartheta + \frac{\partial \Gamma_{r'}}{\partial \xi^{(1)\alpha}}d\xi^{(1)\alpha}\wedge d\lambda^{r'}\\ &= d\vartheta + \frac{\partial \Gamma_{r'}}{\partial \zeta^a}d\zeta^a\wedge d\lambda^{r'} + \frac{\partial \Gamma_{r'}}{\partial \lambda^r}d\lambda^r\wedge d\lambda^{r'}\\ &= d\vartheta + \frac{\partial \Gamma_{r'}}{\partial \zeta^a}d\zeta^a\wedge d\lambda^{r'} \overset{!}{=} \sigma + \partial_a\Gamma_{r'}d\zeta^a\wedge d\lambda^{r'} .\end{aligned}$$

Assim:

$$\omega^{(1)} = \sigma + \partial_a\Gamma_{r'}d\zeta^a\wedge d\lambda^{r'} . \tag{20}$$

Logo, ter-se-á que a matriz $\Omega^{(1)}$ resulta:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \cdots & \sigma_{1N'} & \partial_1\Gamma_1 & \cdots & \partial_1\Gamma_R\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\sigma_{1N'} & \cdots & 0 & \partial_{N'}\Gamma_1 & \cdots & \partial_{N'}\Gamma_R\\ \hline -\partial_1\Gamma_1 & \cdots & -\partial_{N'}\Gamma_1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\partial_1\Gamma_R & \cdots & -\partial_{N'}\Gamma_R & 0 & \cdots & 0\end{array}\right),$$

ou de maneira mais compacta, $\Omega^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \Sigma & \partial\Gamma\\ \hline -\partial\Gamma & 0\end{array}\right)$.

Neste ponto é importante fazer um comentário sobre a relação entre as 1−formas θ e ϑ, as 2−formas $\omega = d\theta$ e $\sigma = d\vartheta$, e as representações matriciais destas últimas, Ω e Σ. Por construção, ϑ é essencialmente idêntica a θ, mas definida sobre uma base *reduzida* na qual as coordenadas que não aparecem mais[14] em $L^{(1)}$ foram suprimidas. Por exemplo, seja a lagrangiana

$$L^{(1)} = \theta_2\dot{\xi}^2 + \cdots + \theta_N\dot{\xi}^N + \Gamma_r\dot{\lambda}^r - H^{(1)} ,$$

com $\theta_2,\cdots,\theta_N,\Gamma_r,H$ funções que independem de ξ^1. Nesse caso:

- $\theta = (0)d\xi^1 + \theta_2 d\xi^2 + \cdots \theta_N d\xi^N$.
- $$\begin{aligned}\omega &= \sum_{\mu<\nu}\omega_{\mu\nu}d\xi^\mu\wedge d\xi^\nu\\ &= \sum_{\nu}\omega_{1\nu}d\xi^1\wedge d\xi^\nu + \sum_{1<\mu<\nu}\omega_{\mu\nu}d\xi^\mu\wedge d\xi^\nu,\end{aligned}$$
  com $\omega_{1\nu} = \dfrac{\partial\theta_\nu}{\partial\xi^1} - \dfrac{\partial(0)}{\partial\xi^\nu} = 0$.
- $$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \omega_{23} & \cdots & \omega_{2N}\\ 0 & -\omega_{23} & 0 & \cdots & \omega_{3N}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & -\omega_{2N} & -\omega_{3N} & \cdots & 0\end{pmatrix} .$$

Como podemos ver, a total ausência de ξ^1 traz como consequência que a matriz Ω possua as linha e coluna correspondentes a ξ^1 cheias de zeros. Definindo o conjunto das coordenadas ζ^a (sem considerar ξ^1) ter-se-á:

- $(\zeta^1;\cdots;\zeta^{N-1}) \overset{!}{=} (\xi^2;\cdots;\xi^N)$.
- $\vartheta = \vartheta_a d\zeta^a = \sum_{\nu>1}\theta_\nu d\xi^\nu$.
- $\sigma = \sum_{a<b}\sigma_{ab}d\zeta^a\wedge d\zeta^b = \sum_{1<\mu<\nu}\omega_{\mu\nu}d\xi^\mu\wedge d\xi^\nu$.
- $$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{23} & \cdots & \omega_{2N}\\ -\omega_{23} & 0 & \cdots & \omega_{3N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\omega_{2N} & -\omega_{3N} & \cdots & 0\end{pmatrix} .$$

Daqui, podemos ver que a matriz Σ não é outra coisa que a matriz Ω mas sem as linhas e colunas cheias de zeros devido à ausência de algumas coordenadas. A principal importância de trabalhar com Σ em vez de Ω é o fato de que, devido à independência dos vínculos Γ_r das coordenadas que sumiram, as derivadas dos vínculos em relação a essas coordenadas serão sempre 0 o que traria como consequência que, devido a (20), no caso de usar a matriz Ω (e não Σ), a nova matriz $\Omega^{(1)}$ teria também linhas e colunas cheias de zeros nas mesmas posições que Ω e seria, evidentemente, ainda singular.

Ora, observe-se que a matriz $\Omega^{(1)}$ contém à matriz Σ como um bloco das primeiras N' linhas e N' colunas, que correspondem às verdadeiras[15] variáveis canônicas do espaço de fase original M.

Em relação ao exemplo da lagrangiana em (3), podemos obter a matriz $\Omega^{(1)}$ a partir da 2−forma $\omega^{(1)} = d\theta^{(1)}$ como segue:

- $$\begin{aligned}\omega^{(1)} = \omega - \alpha dp_1\wedge d\lambda + \alpha dq_2\wedge d\lambda + \beta dq_1\wedge d\lambda\\ - \beta dq_2\wedge d\lambda .\end{aligned}$$
- $$\Omega^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1-\alpha & -1 & \beta\\ -1+\alpha & 0 & 0 & \alpha-\beta\\ 1 & 0 & 0 & -\alpha\\ \hline -\beta & -\alpha+\beta & \alpha & 0\end{array}\right) .$$

É importante observar a compatibilidade da dinâmica das quantidades com o índice superior (1), que correspondem à **primeira ordem de iteração** no método F-J, com as equações de movimento apresentadas em (18). Uma vez que a lagrangiana $L^{(1)}$ está na forma canônica, seguindo o procedimento apresentado na seção 2, as equações de movimento correspondentes serão:

$$\omega^{(1)}_{\alpha\beta}\dot{\xi}^{(1)\beta} = \frac{\partial H^{(1)}}{\partial\xi^{(1)\alpha}} , \tag{21}$$

onde $\omega^{(1)}_{\alpha\beta}$ são as componentes da 2−forma $\omega^{(1)} = d\theta^{(1)}$ na base $\{d\xi^{(1)\alpha}\wedge d\xi^{(1)\beta}\}$, e por tanto:

$$\omega^{(1)}_{\alpha\beta} = \frac{\partial\theta^{(1)}_\beta}{\partial\xi^{(1)\alpha}} - \frac{\partial\theta^{(1)}_\alpha}{\partial\xi^{(1)\beta}} .$$

[14] Nem as velocidades correspondentes a essas coordenadas.

[15] No sentido que possuem uma própria dinâmica.

Fazendo $\alpha = (a, r)$ e $\beta = (b, r')$ e levando em conta que $\Theta^{(1)} = \begin{pmatrix} \vartheta & \Gamma \end{pmatrix}$ e $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \lambda \end{pmatrix}$, o leitor pode verificar rapidamente que os $\omega^{(1)}_{\alpha\beta}$ são, com efeito, os elementos da matriz $\Omega^{(1)}$. Usando essa mesma rotulação nas equações de movimento em (21) se obtém:

$$\sigma_{ab}\dot{\zeta}^b + \frac{\partial \Gamma_{r'}}{\partial \zeta^a}\dot{\lambda}^{r'} = \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \zeta^a} \quad , \quad -\frac{\partial \Gamma_r}{\partial \zeta^b}\dot{\zeta}^b = 0 \, . \tag{22}$$

Podemos ver que, com efeito, estas equações coincidem com as apresentadas em (18). Lembremos que o as variáveis ζ^a estão incluídas dentro das variáveis ξ^μ, chamem-se η^i as coordenadas restantes (que seriam aquelas que são absorbidas ao passar à primeira ordem de iteração no algoritmo F-J), ou seja:

$$\{\xi^\mu\}_{\mu=1}^{N} = \{\zeta^a\}_{a=1}^{N'} \cup \{\eta^i\}_{i=1}^{N-N'} \, ,$$

o que nos permite fazer as rotulações $\mu = (a, i)$ e $\nu = (b, j)$, com isto, as equações em (17) podem ser escritas como:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \omega_{ab}\dot{\zeta}^b + \omega_{aj}\dot{\eta}^j + \dfrac{\partial \Gamma_r}{\partial \zeta^a}\dot{\lambda}^r - \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial \zeta^a} & = & 0 \\ \omega_{ib}\dot{\zeta}^b + \omega_{ij}\dot{\eta}^j + \dfrac{\partial \Gamma_r}{\partial \eta^i}\dot{\eta}^i - \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial \eta^i} & = & 0 \\ -\dot{\Gamma}_r = -\dfrac{\partial \Gamma_r}{\partial \xi^\nu}\dot{\xi}^\nu = -\dfrac{\partial \Gamma_r}{\partial \zeta^b}\dot{\zeta}^b - \dfrac{\partial \Gamma_r}{\partial \eta^j}\dot{\eta}^j & = & 0 \end{array} \right. \, .$$

Mas, levando em conta que:

$$\omega_{ab} = \sigma_{ab} \quad , \quad \omega_{ai} = 0 = \omega_{ij} \quad , \quad \frac{\partial \Gamma_r}{\partial \eta^i} = 0 = \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \eta^i} \, ;$$

as equações obtidas resultam:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_{ab}\dot{\zeta}^b + \dfrac{\partial \Gamma_r}{\partial \zeta^a}\dot{\lambda}^r - \dfrac{\partial H^{(1)}}{\partial \zeta^a} & = & 0 \\ 0 & = & 0 \\ -\dfrac{\partial \Gamma_r}{\partial \zeta^b}\dot{\zeta}^b & = & 0 \end{array} \right. \, ,$$

que são as mesmas equações que em (22).

Assim, vemos que as quantidades em primeira ordem de iteração (definidas no conjunto $M^{(1)}$ mantêm a mesma estrutura canônica da formulação de Faddeev-Jackiw. Este último fato nos permite afirmar que se a 2−forma $\omega^{(1)}$ resultasse ser simplética, a inversa dela permitirá definir uma estrutura de Poisson em $M^{(1)}$; contudo, os únicos parênteses de Poisson que serão de interesse físico serão os correspondentes às coordenadas ξ^μ, pois as outras coordenadas são essencialmente os multiplicadores de Lagrange inseridos para considerar os vínculos. Desta forma, se a matriz $\Omega^{(1)}$ for invertível, apenas devemos interessarmos apenas pelo bloco das primeiras N' linhas e N' colunas da inversa dela.

Para o exemplo da lagrangiana em (3), o determinante da matriz $\Omega^{(1)}$ é $(\alpha^2 - \beta)^2$. Então, sob o suposto de que $\alpha^2 \neq \beta$, ela será não-singular com inversa:

$$[\Omega^{(1)}]^{-1} = \frac{1}{\alpha^2 - \beta} \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & \alpha & \alpha - \beta & 0 \\ -\alpha & 0 & -\beta & -1 \\ -\alpha + \beta & \beta & 0 & \alpha - 1 \\ \hdashline 0 & 1 & -\alpha + 1 & 0 \end{array} \right) \, .$$

Com isto, já podemos apresentar os PP das variáveis canônicas originais por meio de (15):

- $\{\xi^{(1)1}; \xi^{(1)2}\} = \omega^{(1)12} \quad \Rightarrow \quad \{q_1; q_2\} = \dfrac{\alpha}{\alpha^2 - \beta}$.
- $\{\xi^{(1)1}; \xi^{(1)3}\} = \omega^{(1)13} \quad \Rightarrow \quad \{q_1; p_1\} = \dfrac{\alpha - \beta}{\alpha^2 - \beta}$.
- $\{\xi^{(1)2}; \xi^{(1)3}\} = \omega^{(1)23} \quad \Rightarrow \quad \{q_2; p_1\} = \dfrac{-\beta}{\alpha^2 - \beta}$.

Poderia também dar-se o caso de que a matriz $\Omega^{(1)}$ não seja invertível, e por conseguinte, $\omega^{(1)}$ não será uma forma simplética. Nesta situação o procedimento todo deverá ser repetido, mas partindo das quantidades obtidas na primeira iteração para passar à segunda iteração. Em geral, esperamos que após um certo número n (finito) de iterações, se obtenha uma forma simplética $\omega^{(n)}$ cuja inversa dê lugar à estrutura de Poisson (no conjunto $M^{(n)}$) desejada.

Embora, em princípio, já temos um algoritmo para obter os PP para qualquer sistema (regular ou singular), nosso objetivo final sempre será a dinâmica do sistema, que é determinada a partir das equações de movimento. Ora, omo já foi apresentado na subseção 2.1, podemos obter a evolução temporal de qualquer função dinâmica por meio de (13), onde o gerador da evolução é a hamiltoniana definida no espaço de fase correspondente. Na presente abordagem, o gerador de evolução temporal será também, sem sombra de dúvida, a hamiltoniana; mas, aquela que seja obtida na ordem de iteração do algoritmo F-J que permitiu obter a estrutura de Poisson, isto devido a que ela já é compatível com todos os vínculos que foram encontrados até a última etapa do processo.

Mais uma vez, para o exemplo da lagrangiana em (3) o nosso gerador de evolução temporal será a hamiltoniana $H^{(1)}$ e com ela podemos obter as equações de movimento para as variáveis canônicas. Por exemplo, para q_1 ter-se-á:

$$\begin{aligned} \dot{q}_1 = \{q_1; H^{(1)}\} &= \{q_1; \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)(p_1 - q_2)\}^2 \\ &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\{q_1; p_1 - q_2\}(p_1 - q_2) \\ &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)(\{q_1; p_1\} - \{q_1; q_2\})(p_1 - q_2) \\ &= \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta}\right)\left(\frac{-\beta}{\alpha^2 - \beta}\right)(p_1 - q_2) = p_1 - q_2 \, . \end{aligned}$$

Similarmente se obtém:

$$\dot{q}_2 = \frac{\beta}{\alpha}(q_1 - q_2) \quad , \quad \dot{p}_1 = \frac{\beta}{\alpha}(q_1 - q_2) \, .$$

4 Exemplos

4.1 Exemplo 1

Considere-se o caso de uma partícula imersa em uma região espacial bidimensional (que será representada pelo plano x^1x^2) com um campo magnético externo. Em geral, dados os potenciais escalar A^0 y vetorial $\vec{A}$, que são funções da posição (e possivelmente do tempo), a função lagrangiana vem dada segundo[16]:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^{\,2} + \dot{\vec{x}}\cdot\vec{A} - A^0 = \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + \delta_{ij}\dot{x}^iA^j - A^0 \ . \quad (23)$$

Os momentos canônicos conjugados resultam:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \delta_{ij}(\dot{x}^j + A^j) \qquad ; \quad i,j = 1,2 \ .$$

Daqui podemos expressar as velocidades em termos das coordenadas e os momentos[17]:

$$\delta^{ki}p_i = \delta^{ki}\delta_{ij}(\dot{x}^j + A^j) = \delta^k_j(\dot{x}^j + A^j) = \dot{x}^k + A^k \ .$$

Assim:

$$\dot{x}^i = \delta^{ij}p_j - A^i \ .$$

Com isto, a hamiltoniana resulta:

$$\begin{aligned} H &= p_i\dot{x}^i - \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - \delta_{ij}\dot{x}^iA^j + A^0 \\ &= \dot{x}^i\left[p_i - \delta_{ij}\left(\frac{1}{2}\dot{x}^j + A^j\right)\right] + A^0 \\ &= \dot{x}^i\left[p_i - \delta_{ij}\left(\frac{1}{2}(\delta^{jk}p_k - A^j) + A^j\right)\right] + A^0 \\ &= (\delta^{ik}p_k - A^i)\left(\frac{1}{2}p_i - \frac{1}{2}\delta_{ij}A^j\right) + A^0 \\ &= \frac{1}{2}(\delta^{ik}p_k - A^i)(\delta_{ij}\delta^{jk}p_k - \delta_{ij}A^j) + A^0 \\ &= \frac{1}{2}\delta_{ij}(\delta^{ik}p_k - A^i)(\delta^{jk}p_k - A^j) + A^0 \ . \end{aligned}$$

Agora suponha-se que os potenciais A^0 y $\vec{A}$ independem do tempo (explicitamente) e que o campo vetorial $\vec{A}$ tem simetria de rotação. Nesse caso ter-se-á:

- Potencial escalar:

$$A^0 = A^0(r) \ , \text{ com } r \stackrel{!}{=} |\vec{x}| \ .$$

- Potencial vetorial:

$$\vec{A} = A(r)\vec{x}_\perp \ , \text{ com } \vec{x}_\perp \stackrel{!}{=} \hat{e}_1x^2 - \hat{e}_2x^1 \ .$$

$$\text{Então:} \quad A^1 = x^2A(r) \quad , \quad A^2 = -x^1A(r)$$

Assim, em geral podemos escrever:

$$A^i = (\delta^i_1x^2 - \delta^i_2x^1)A(r) = \underbrace{(\delta^i_1\delta^2_j - \delta^i_2\delta^1_j)}_{\epsilon^i{}_j = \delta^{ik}\epsilon_{kj}}x^jA(r) \ .$$

Com isto, o *campo* magnético[18] B^3 resulta:

$$\begin{aligned} B^3 &= \epsilon^{ik}\delta_{kj}\partial_i\big(\delta^{j\ell}\epsilon_{\ell m}x^mA(r)\big) = \epsilon^{ik}\delta^\ell_k\epsilon_{\ell m}\partial_ix^mA(r) \\ &= \epsilon^{ik}\epsilon_{km}\partial_ix^mA(r) = -\epsilon^{ki}\epsilon_{km}\partial_ix^mA(r) \\ &= -\delta^i_m\partial_ix^mA(r) = -\partial_ix^iA(r) = -2A(r) \ . \end{aligned}$$

Vamos escolher $A(r) = -\frac{B}{2}$, com $B > 0$ constante; sob esta consideração, o campo magnético resulta ser uniforme.

Adicionalmente, seja o caso de um potencial escalar da forma $A^0 = \frac{1}{2}k\vec{x}^{\,2}$. Com todas as considerações anteriores a lagrangiana resulta:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^{\,2} - \frac{B}{2}\dot{\vec{x}}\cdot\vec{x}_\perp - \frac{1}{2}k\vec{x}^{\,2} \ .$$

Agora observe-se o seguinte:

$$\dot{\vec{x}}\cdot\vec{x}_\perp = \dot{x}^1x^2 - \dot{x}^2x^1 \stackrel{!}{=} \dot{\vec{x}}\times\vec{x} \ ,$$

com isto, a lagrangiana (23) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^{\,2} - \frac{B}{2}\dot{\vec{x}}\times\vec{x} - \frac{1}{2}k\vec{x}^{\,2} \\ &= \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - \frac{B}{2}\epsilon_{ij}\dot{x}^ix^j - \frac{k}{2}\delta_{ij}x^ix^j \ . \end{aligned}$$

Os momentos canônicos conjugados serão:

$$p_i = \delta_{ij}\dot{x}^j - \frac{B}{2}\epsilon_{ij}x^j \quad \Rightarrow \quad \dot{x}^i = \delta^{ij}\left(p_j + \frac{B}{2}\epsilon_{jk}x^k\right) \ .$$

Também, a hamiltoniana correspondente resulta:

$$H = \frac{1}{2}\delta^{ij}\left(p_i + \frac{B}{2}\epsilon_{ik}x^k\right)\left(p_j + \frac{B}{2}\epsilon_{jk}x^k\right) + \frac{k}{2}\delta_{ij}x^ix^j \ .$$

Uma vez que es possível expressar todas as velocidades em termos das coordenadas e dos momentos, o sistema em consideração é regular. Entretanto, é possível obter um sistema singular a partir do anterior fazendo $m \to 0$ [13] (o que equivale a desconsiderar o termo cinético na lagrangiana original), resultando:

- Lagrangiana:

$$L = -\frac{B}{2}\dot{\vec{x}}\times\vec{x} - \frac{1}{2}k\vec{x}^{\,2} = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}\dot{x}^ix^j - \frac{k}{2}\delta_{ij}x^ix^j \ .$$

- Momentos canônicos conjugados:

$$p_i = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}x^j \ .$$

[16] Por uma questão de comodidade estamos considerando $m = 1$ e $e = 1$.

[17] Não devemos confundir as componentes δ_{ij} do tensor métrico euclidiano (que determina o produto interno) com a delta de Kronecker δ^i_j.

[18] Rigorosamente $\vec{B} = \nabla\times\vec{A} = \hat{e}_3(\partial_1A^2 - \partial_2A^1)$, que é um campo vetorial na direção do eixo x^3, mas como tem apenas uma componente, se lhe associa a quantidade escalar $B^3 = \partial_1A^2 - \partial_2A^1 = (\delta^i_1\delta^2_j - \delta^i_2\delta^1_j)\partial_iA^j = \epsilon^i{}_j\partial_iA^j = \epsilon^{ik}\delta_{kj}\partial_iA^j$. De fato, geralmente é usada a seguinte notação para o produto vetorial de dois vetores sobre o plano x^1x^2: $\vec{u}\times\vec{v} \stackrel{!}{=} u^1v^2 - u^2v^1 = \epsilon_{ij}u^iv^j$.

- Hamiltoniana:

$$H = \frac{1}{2}k\vec{x}^{\,2} = \frac{k}{2}\delta_{ij}x^i x^j \ .$$

Observe-se que a lagrangiana é uma função de primeira ordem nas velocidades $\dot{x}^i$; além disso, os momentos canônicos p_i são funções das coordenadas x^i e devido a isso, as $1-$formas dx^i e dp_i não serão independentes. Por outro lado, em conformidade com a formulação F-J, essa lagrangiana já está na forma canônica em relação às variáveis x^i, pois ela tem a forma:

$$L(\vec{x};\dot{\vec{x}}) = \theta_i(\vec{x})\dot{x}^i - H(\vec{x}) \quad , \quad \text{com:} \quad \theta_i = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}x^j \ .$$

Então, nessas coordenadas, a $1-$forma canônica resulta ser $\theta = \theta_i dx^i$. Logo, tomando a derivada exterior, se obtém a $2-$forma:

$$\omega = d\theta = -\frac{B}{2}\epsilon_{ij}dx^j \wedge dx^i = \frac{B}{2}\epsilon_{ij}dx^i \wedge dx^j \ .$$

Levando em conta que $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i \wedge dx^j$, encontra-se que os elementos da matriz associada à $2-$forma ω são $\omega_{ij} = B\epsilon_{ij}$. Explicitamente a matriz envolvida é:

$$\Omega = B\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \ ,$$

a qual é invertível e consequentemente ω resulta ser uma forma simplética cuja inversa permitirá obter diretamente os parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas escolhidas.

$$\begin{aligned} \omega_{ij} = B\epsilon_{ij} \quad \Rightarrow \quad B\omega^{ki}\epsilon_{ij} &= \omega^{ki}\omega_{ij} = \delta^k_j \\ B\omega^{ki}\epsilon_{ij}\epsilon^{\ell j} &= \delta^k_j \epsilon^{\ell j} \\ B\omega^{ki}\delta^\ell_i &= \epsilon^{\ell k} \quad \Rightarrow \quad \omega^{k\ell} = \frac{1}{B}\epsilon^{\ell k} \ . \end{aligned}$$

Assim:

$$\omega^{ij} = -\frac{1}{B}\epsilon^{ij} \quad \Rightarrow \quad \{x^i; x^j\} = -\frac{1}{B}\epsilon^{ij} \ .$$

Mais ainda, uma vez que os momentos canônicos p_i são funções das coordenadas x^i, também pode-se obter os parênteses de Poisson que envolvem os p_i :

- $$\begin{aligned} \{x^i; p_j\} &= \{x^i; -\frac{B}{2}\epsilon_{jk}x^k\} = -\frac{B}{2}\epsilon_{jk}\{x^i; x^k\} \\ &= -\frac{B}{2}\epsilon_{jk}\left(-\frac{1}{B}\right)\epsilon^{ik} = \frac{1}{2}\epsilon_{jk}\epsilon^{ik} = \frac{1}{2}\delta^i_j \ . \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} \{p_i; p_j\} &= \{-\frac{B}{2}\epsilon_{ik}x^k; -\frac{B}{2}\epsilon_{j\ell}x^\ell\} \\ &= \frac{B^2}{4}\epsilon_{ik}\epsilon_{j\ell}\{x^k; x^\ell\} = \frac{B^2}{4}\epsilon_{ik}\epsilon_{j\ell}\left(-\frac{1}{B}\epsilon^{k\ell}\right) \\ &= -\frac{B}{4}\epsilon_{ik}\delta^k_j = -\frac{B}{4}\epsilon_{ij} \ . \end{aligned}$$

4.2 Exemplo 2

Considere-se o caso de uma partícula movendo-se em um espaço de configuração 3-dimensional, em conformidade com a seguinte função lagrangiana [14]:

$$L = (q_2 + q_3)\dot{q}_1 + k\dot{q}_3 + \frac{1}{2}(k^2 - 2q_2q_3 - q_3^2) \ ,$$

com k constante. Os momentos canônicos conjugados às coordenadas q_i serão:

$$p_1 = q_2 + q_3 \quad , \quad p_2 = 0 \quad , \quad p_3 = k \ .$$

Com isto, a função hamiltoniana resulta:

$$H = -\frac{1}{2}(k^2 - 2q_2q_3 - q_3^2) \ .$$

Vê-se que essa lagrangiana é linear nas velocidades e consequentemente já está em sua forma canônica; então, se escolhem como coordenadas do espaço de fase: $\xi = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}$. Assim, identifica-se que a $1-$forma canônica resulta ser:

$$\theta = (q_2 + q_3)dq_1 + 0\,dq_2 + kdq_3 \equiv \begin{pmatrix} q_2 + q_3 & 0 & k \end{pmatrix} .$$

Logo, tomando a derivada exterior define-se a $2-$forma:

$$\omega = d\theta = dq_2 \wedge dq_1 + dq_3 \wedge dq_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Evidentemente a matriz associada Ω é singular e tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \ .$$

Logo, em conformidade com o método F-J, constrói-se o seguinte vínculo:

$$\Gamma = v^\mu \frac{\partial H}{\partial \xi^\mu} = -\frac{\partial H}{\partial q_2} + \frac{\partial H}{\partial q_3} = -q_3 + (q_2 + q_3) = q_2 = 0 \ . \tag{24}$$

O seguinte será construir as quantidades correspondentes à primeira ordem de iteração:

- Hamiltoniana:

$$H^{(1)} = H\big|_{\Gamma=0} = -\frac{1}{2}(k^2 - q_3^2) \ .$$

- Lagrangiana canônica:

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= \theta_\nu \dot{\xi}^\nu + \Gamma\dot{\lambda} - H^{(1)} \\ &= (q_2 + q_3)\dot{q}_1 + k\dot{q}_3 + q_2\dot{\lambda} + \frac{1}{2}(k^2 - q_3^2) \ . \end{aligned}$$

- Coordenadas[19] do espaço de fase $M^{(1)}$:

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \xi^{(1)t} = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & \lambda \end{pmatrix} \ .$$

[19]Lembre-se que em um caso geral nem todas coordenadas originais ξ^μ aparecem em $L^{(1)}$; devido a isso, as variáveis remanentes são rotuladas por ζ^a. Porém, quando nenhuma das variáveis é absorbida tem-se que $\zeta = \xi$.

- $1-$forma canônica:

$$\theta^{(1)} = \theta + \Gamma d\lambda = \theta + q_2 d\lambda \ .$$

- Derivada exterior da $1-$forma canônica:

$$\omega^{(1)} = d\theta^{(1)} = \omega + dq_2 \wedge d\lambda \ .$$

A matriz associada à $2-$forma $\omega^{(1)}$ resulta:

$$\Omega^{(1)} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Não é difícil ver que $det(\Omega^{(1)}) = 1 \neq 0$ e portanto $\Omega^{(1)}$ é regular. Logo, a matriz inversa resulta:

$$[\Omega^{(1)}]^{-1} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) .$$

Uma vez que $\omega^{(1)}$ resulta ser uma forma simplética (devido à sua não-degenerescência), podemos definir uma estrutura de Poisson no espaço de fase $M^{(1)}$ segundo $\{\xi^{(1)\alpha}; \xi^{(1)\beta}\} = \omega^{(1)\alpha\beta}$. Neste ponto é preciso lembrar que a variável auxiliar λ foi introduzida (como multiplicador de Lagrange) apenas para impor a preservação do vínculo Γ, durante a evolução do sistema, e consequentemente não é de interesse físico. Assim, os parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas originais estarão dadas pelo bloco constituído pelas três primeiras linhas e colunas de $[\Omega^{(1)}]^{-1}$.

$$\{q_1; q_3\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \{q_1; p_1\} = \{q_1; q_2 + q_3\} = 1 \ . \quad (25)$$

Agora um comentário interessante: Note-se que o vínculo obtido em (24) fixa a coordenada q_2 e em consequência ela não tem dinâmica. Pode-se ver que isso está em perfeita conformidade com as equações de movimento:

- $\dfrac{\delta S}{\delta q_1} = \dot{q}_2 + \dot{q}_3 = 0 \ .$

- $\dfrac{\delta S}{\delta q_2} = \dot{q}_1 - q_3 = 0 \ .$

- $\dfrac{\delta S}{\delta q_3} = \dot{q}_1 - q_2 - q_3 = 0 \ .$

Das equações de movimento para q_2 e q_3, observa-se que, com efeito, $q_2 = 0$. Isso sugere que uma melhor escolha para as coordenadas do espaço de fase $M^{(1)}$ seria $\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_3 \end{pmatrix}$. Com isto, as funções hamiltoniana e lagrangiana em primeira ordem de iteração serão:

- $H^{(1)} = H\big|_{M^{(1)}} = -\dfrac{1}{2}(k^2 - q_3^2) \ .$

- $L^{(1)} = L\big|_{M^{(1)}} = q_3\dot{q}_1 + k\dot{q}_3 + \dfrac{1}{2}(k^2 - q_3^2) \ .$

Logo, a $1-$forma canônica $1-$iterada e a derivada exterior dela serão:

$$\theta^{(1)} = q_3 dq_1 + k dq_3 \quad , \quad \omega^{(1)} = dq_3 \wedge dq_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

A matriz $\Omega^{(1)}$ é regular e tem por inversa $[\Omega^{(1)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Com isto, os parênteses de Poisson das variáveis dinâmicas $\xi^{(1)}$ seriam:

$$\{q_1; q_3\} = 1 \ ,$$

o qual é consistente com o resultado obtido em (25). Assim, podemos concluir que no caso de haver algum vínculo que fixe alguma das variáveis dinâmicas do espaço de fase, podemos passar à seguinte ordem de iteração apenas restringindo a lagrangiana e a hamiltoniana às novas coordenadas consistentes com dito vínculo, sem a necessidade de incluir alguma variável auxiliar (multiplicador de Lagrange).

4.3 Exemplo 3

Considere-se um espaço de configuração $4-$dimensional descrito pelas coordenadas $(x^1; x^2; x^3; z)$ e a seguinte lagrangiana [10]:

$$L = \frac{1}{2}\dot{\vec{x}}^{\,2} - z(\vec{x}^{\,2} - 1) = \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j - z(\delta_{ij}x^i x^j - 1) \ .$$

A lagrangiana acima descreve o movimento de uma partícula de masa unitária restrito à superfície de uma esfera centrada no origem de coordenadas e com radio igual à unidade; assim uma vez que há uma restrição (holônoma) ao movimento livre da partícula, a variável z é introduzida como um multiplicador de Lagrange e prova-se que está diretamente relacionado com a força responsável de manter a restrição ao movimento.

Procedemos agora a determinar os momentos canônicos conjugados às variáveis consideradas:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} = \delta_{ij}\dot{x}^j \quad , \quad p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = 0 \ .$$

Assim, as variáveis dinâmicas independentes do espaço de fase são $\xi^t = \begin{pmatrix} x^i & z & p_i \end{pmatrix}$. Também, a hamiltoniana correspondente será dada por:

$$\begin{aligned} H &= p_j\dot{x}^j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j + z(\delta_{ij}x^i x^j - 1) \\ &= \left(p_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta^{ik}p_k\right)\dot{x}^j + z(\delta_{ij}x^i x^j - 1) \\ &= \left(p_j - \frac{1}{2}\delta_j^k p_k\right)\delta^{j\ell}p_\ell + z(\delta_{ij}x^i x^j - 1) \\ &= \frac{1}{2}\delta^{ij}p_i p_j + z(\delta_{ij}x^i x^j - 1) \ . \end{aligned}$$

Logo, a lagrangiana canônica será simplesmente:

$$L = p_i\dot{x}^i - \frac{1}{2}\delta^{ij}p_i p_j - z(\delta_{ij}x^i x^j - 1) \ .$$

Daqui, identificamos a $1-$forma canônica como:

$$\theta = p_i dx^i + 0dz + 0dp_i \ .$$

Tomando derivada exterior obtemos:

$$\omega = dp_i \wedge dx^i = \delta^i_j dp_i \wedge dx^j \ ,$$

cuja representação matricial será:

$$\Omega = \begin{array}{c} \\ dx^i \\ dz \\ dp_i \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} dx^j & dz & dp_j \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta^j_i \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta^i_j & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Essa matriz é claramente singular e tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^t = \begin{pmatrix} 0 \in \mathbb{R}^3 & 1 & 0 \in \mathbb{R}^3 \end{pmatrix} \ .$$

Com isto, construímos o seguinte vínculo:

$$\Gamma = \frac{\partial H}{\partial z} = \delta_{ij} x^i x^j - 1 = 0 \ ,$$

o qual resulta ser precisamente a restrição do movimento à superfície da esfera. Seguidamente determinamos as quantidades em primeira ordem de iteração:

- Hamiltoniana:

$$H^{(1)} = H\big|_{\Gamma=0} = \frac{1}{2}\delta^{ij} p_i p_j \ .$$

- Lagrangiana canônica:

$$L^{(1)} = p_i \dot{x}^i + (\delta_{ij} x^i x^j - 1)\dot{\lambda} - H^{(1)} \ .$$

- Coordenadas do espaço de fase $M^{(1)}$:
  Note-se que a variável z não aparece mais nas expressões obtidas para $H^{(1)}$ e $L^{(1)}$, então:

$$\zeta^t = \begin{pmatrix} x^i & p_i \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \xi^{(1)t} = \begin{pmatrix} x^i & p_i & \lambda \end{pmatrix} \ .$$

- $1-$forma canônica:

$$\theta^{(1)} = \theta + (\delta_{ij} x^i x^j - 1) d\lambda \ .$$

- Derivada exterior da $1-$forma canônica:

$$\omega^{(1)} = \omega + 2\delta_{ij} x^j dx^i \wedge d\lambda \ ,$$

  cuja representação matricial será:

$$\Omega^{(1)} = \left(\begin{array}{cc:c} 0 & -\delta^j_i & 2\delta_{ik}x^k \\ \delta^i_j & 0 & 0 \\ \hdashline -2\delta_{jk}x^k & 0 & 0 \end{array}\right) \ .$$

Novamente, a matriz anterior é singular e tem o seguinte autovetor correspondente ao autovalor nulo:

$$v^{(1)t} = \begin{pmatrix} \vec{0} \in \mathbb{R}^3 & 2x^i & 1 \end{pmatrix} \ ,$$

o que permite construir o vínculo:

$$\Gamma^{(1)} = 2\delta_{ij} x^i \frac{\partial H^{(1)}}{\partial p_j} + \frac{\partial H^{(1)}}{\partial \lambda} = 2\delta_{ij} x^i \delta^{jk} p_k = 2x^i p_i = 0 \ .$$

Com isto, já podemos passar à seguinte ordem de iteração:

- Hamiltoniana:

$$H^{(2)} = \frac{1}{2}\delta^{jk} p_j p_k \ .$$

- Lagrangiana canônica:

$$L^{(2)} = p_i \dot{x}^i + (\delta_{ij} x^i x^j - 1)\dot{\lambda} + 2x^i p_i \dot{\lambda}^{(1)} - H^{(2)} \ .$$

- Coordenadas do espaço de fase $M^{(2)}$:

$$\xi^{(2)t} = \begin{pmatrix} \xi^{(1)} & \lambda^{(1)} \end{pmatrix} \ .$$

- $1-$forma canônica:

$$\theta^{(2)} = \theta^{(1)} + 2x^i p_i d\lambda^{(1)} \ .$$

- Derivada da $1-$forma canônica:

$$\omega^{(2)} = \omega^{(1)} + 2p_i dx^i \wedge d\lambda^{(1)} + 2x^i dp_i \wedge d\lambda^{(1)} \ .$$

  A representação matricial correspondente é:

$$\Omega^{(2)} = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & -\delta^j_i & 2\delta_{ik}x^k & 2p_i \\ \delta^i_j & 0 & 0 & 2x^i \\ -2\delta_{jk}x^k & 0 & 0 & 0 \\ \hdashline -2p_j & -2x^j & 0 & 0 \end{array}\right) \ .$$

A matriz $\Omega^{(2)}$ é regular e tem por inversa[20]:

$$\left(\begin{array}{cc:cc} 0 & \delta^i_j - \dfrac{x^i x^k \delta_{kj}}{\vec{x}^2} & -\dfrac{x^i}{2\vec{x}^2} & 0 \\ -\delta^j_i + \dfrac{\delta_{ik} x^k x^j}{\vec{x}^2} & \dfrac{\delta_{ik} x^k p_j - p_i x^k \delta_{kj}}{\vec{x}^2} & \dfrac{p_i}{2\vec{x}^2} & -\dfrac{\delta_{ik} x^k}{2\vec{x}^2} \\ \hdashline \dfrac{x^j}{2\vec{x}^2} & -\dfrac{p_j}{2\vec{x}^2} & 0 & -\dfrac{1}{2\vec{x}^2} \\ 0 & \dfrac{\delta_{jk} x^k}{2\vec{x}^2} & \dfrac{1}{2\vec{x}^2} & 0 \end{array}\right) \ .$$

Finalmente, temos conseguido os parênteses de Poisson das variáveis canônicas originais:

$$\{x^i; p_j\} = \delta^i_j - \frac{x^i x^k \delta_{kj}}{\vec{x}^2} \quad , \quad \{p_i; p_j\} = \frac{\delta_{ik} x^k p_j - p_i x^k \delta_{kj}}{\vec{x}^2} \ .$$

4.4 Exemplo 4

O seguinte exemplo é um pouco diferente dos anteriores, isto devido à natureza da singularidade do sistema que será analisado. No entanto, o método F-J será implementado da mesma maneira que foi feito até agora. Considere-se uma partícula movendo-se em um espaço de configuração 3-dimensional em conformidade com a seguinte lagrangiana [15]

$$L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + (q_1 \dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2) q_3 + \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) q_3^2 - V(q_1^2 + q_2^2) \ . \tag{26}$$

Os momentos canônicos conjugados são:

$$p_1 = \dot{q}_1 - q_2 q_3 \quad , \quad p_2 = \dot{q}_2 + q_1 q_3 \quad , \quad p_3 = 0 \ .$$

[20] A divisão com as linhas pontilhadas foi feita entre os graus de liberdade originais e os auxiliares (multiplicadores de Lagrange).

Seguidamente, construímos a hamiltoniana:

$$H = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - L = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) - (q_1p_2 - p_1q_2)q_3 + V \ .$$

Note-se que a velocidade $\dot{q}_3$ não pode ser obtida em termos das coordenas e dos momentos; porém, como ela não aparece na lagrangiana podemos afirmar que a lagrangiana escrita na forma canônica será simplesmente:

$$L = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 - H \ .$$

Logo, levando em conta que a variável p_3 não tem dinâmica, escolhemos as seguintes coordenadas para o espaço de fase:

$$\xi^t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & p_1 & p_2 \end{pmatrix} \ .$$

Com isto, identificamos rapidamente a $1-$forma canônica:

$$\theta = p_1dq_1 + p_2dq_2 + 0dq_3 + 0dp_1 + 0dp_2 \ .$$

Tomando a derivada exterior resulta a $2-$forma:

$$\omega = dp_1 \wedge dq_1 + dp_2 \wedge dq_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

A matriz anterior é evidentemente singular e tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Com isto, construímos o seguinte vínculo:

$$\Gamma = \frac{\partial H}{\partial q_3} = q_1p_2 - p_1q_2 = 0 \ .$$

O seguinte será escrever as quantidades correspondentes à primeira ordem de iteração:

- Hamiltoniana:

$$H^{(1)} = H\big|_{\Gamma=0} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V \ .$$

- Lagrangiana canônica:

$$L^{(1)} = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + (q_1p_2 - p_1q_2)\dot{\lambda} - H^{(1)} \ .$$

- Coordenadas do espaço de fase $M^{(1)}$:
  Note-se que a variável q_3 não aparece mais e consequentemente teremos:

$$\zeta^t = \begin{pmatrix} q_1 & q_2 & p_1 & p_2 \end{pmatrix} \quad ; \quad \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} \zeta \\ \lambda \end{pmatrix} \ .$$

- $1-$forma canônica:

$$\theta^{(1)} = \theta + (q_1p_2 - p_1q_2)d\lambda \ .$$

- Derivada da $1-$forma canônica:

$$\omega^{(1)} = \omega + (q_1dp_2 + p_2dq_1 - p_1dq_2 - q_2dp_1) \wedge d\lambda \ .$$

  Logo, a matriz associada à $2-$forma $\omega^{(1)}$ é:

$$\Omega^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & p_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -p_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -q_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & q_1 \\ -p_2 & p_1 & q_2 & -q_1 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

  A matriz acima é singular e tem o seguinte autovetor associado ao autovalor nulo:

$$v^{(1)T} = \begin{pmatrix} q_2 & -q_1 & p_2 & -p_1 & 1 \end{pmatrix} .$$

  Com isto, se constrói o seguinte novo vínculo:

$$\begin{aligned} \Gamma^{(1)} &= \left(q_2\frac{\partial}{\partial q_1} - q_1\frac{\partial}{\partial q_2} + p_2\frac{\partial}{\partial p_1} - p_1\frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) H^{(1)} \\ &= q_2\frac{\partial V}{\partial q_1} - q_1\frac{\partial V}{\partial q_2} + p_2p_1 - p_1p_2 + 0 \\ &= \left[\left(q_2\frac{\partial}{\partial q_1} - q_1\frac{\partial}{\partial q_2} \right)(q_1^2 + q_2^2) \right] \frac{\partial V}{\partial(q_1^2 + q_2^2)} \\ &= \Big(\underbrace{q_2(2q_1) - q_1(2q_2)}_{0} \Big) \frac{\partial V}{\partial(q_1^2 + q_2^2)} = \mathbf{0} \ . \end{aligned}$$

  Assim, temos obtido a seguinte tautologia (ou identidade):

$$\Gamma^{(1)} = 0 = \mathbf{0} \ .$$

Então, posto que foi obtido um vínculo nulo, não é possível continuar com o procedimento usual. Estas situações se apresentam com frequência e são próprias dos sistemas que são invariantes por transformações de equivalência[21] (composição de transformações canônicas infinitesimais que não mudam o estado físico do sistema, no sentido de que o gerador da evolução temporal conduz a um conjunto de pontos do espaço de fase pertencentes a uma classe de equivalência[22], pois correspondem a um mesmo estado).

Essa degenerescência pode ser removida impondo condições adicionais que restrinjam a dinâmica do sistema de modo que ela se torne unívoca. A proposta do método F-J para enfrentar essa situação é a seguinte:

"No caso de obter um vínculo nulo na n-ésima ordem de iteração no algoritmo, o vínculo nulo deverá ser substituído por uma condição fixadora (CF) e depois continuar com o procedimento conhecido".

[21]Cujo análogo na teoria de campos é conhecido como *transformações de gauge*.

[22]Uma classe de equivalência é um conjunto de elementos identificados por uma relação (binária) de equivalência; i. e., que é reflexiva, simétrica e transitiva.

O enunciado anterior pode-se expressar simplesmente como:

$$\Gamma^{(n)} = 0 \;\rightarrow\; \Gamma'^{(n)} = \text{CF} \quad ; \quad H^{(n+1)} = H^{(n)}\big|_{\Gamma'^{(n)}=0} \;.$$

Assim, a hamiltoniana da seguinte ordem de iteração, será obtida impondo a condição fixadora à última hamiltoniana construída. É importante fazer uma breve discussão sobre essas *condições fixadoras*. Em primeiro lugar, essas condições devem ser *atingíveis*, isto quer dizer que sempre deve ser possível obtê-as por meio de uma transformação de equivalência; essas transformações não devem mudar as equações de movimento, pois devem conduzir aos mesmos estados físicos do sistema.

Não é complicado ver que a lagrangiana (26) permanece invariante sob as seguintes transformações:

$$\begin{cases} q_1 \;\rightarrow\; q_1' \;=\; q_1 cos(\theta) + q_2 sen(\theta) \\ q_2 \;\rightarrow\; q_2' \;=\; -q_1 sen(\theta) + q_2 cos(\theta) \\ q_3 \;\rightarrow\; q_3' \;=\; q_3 \end{cases} ,$$

que é na verdade uma rotação de um ângulo θ no plano $q_1 q_2$ e mantendo fixa a coordenada q_3. As rotações no plano são representadas por matrizes 2×2 especiais[23], reais e ortogonais[24] com parâmetro $0 \leqslant \theta < 2\pi$. Para o exemplo em consideração, supondo que o ângulo nasce no eixo q_1, a matriz associada à transformação de coordenadas acima será:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} cos(\theta) & sen(\theta) \\ -sen(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} q_1' \\ q_2' \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$$

Essas matrizes constituem um grupo (de Lie) denotado por $SO(2)$. Então, diz-se que $SO(2)$ é o grupo de simetria (global[25]) para a lagrangiana (26) quando a coordenada q_3 está fixa. Lembre-se que as coordenadas q^a são, em geral, funções do tempo; então, é interessante ver se a lagrangiana em estudo também fica invariante se o parâmetro for também função do tempo; isto é, $\theta = \theta(t)$. Nesse caso ter-se-á:

$$\dot{q}_1' = \dot{q}_1 cos(\theta) + \dot{q}_2 sen(\theta) + \dot{\theta}\big(- q_1 sen(\theta) + q_2 cos(\theta)\big) \;,$$
$$\dot{q}_2' = -\dot{q}_1 sen(\theta) + \dot{q}_2 cos(\theta) - \dot{\theta}\big(q_1 cos(\theta) + q_2 sen(\theta)\big) \;.$$

Se a coordenada q_3 permanece fixa, resulta que a lagrangiana transformada não coincide com a original:

$$L' = L + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2(q_1^2+q_2^2) - \dot{\theta}(q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2) - \dot{\theta}(q_1^2+q_2^2)q_3 \;.$$

Contudo, é possível recuperar a invariância da lagrangiana fazendo uma transformação apropriada à coordenada q_3. Em primeira instância não é conhecida a forma dessa transformação, pelo qual se considera:

$$q_3 \rightarrow q_3' = q_3 + \delta q_3 \;,$$

Com isto:

$$\begin{aligned} L' = L &- (q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2)(\dot{\theta} - \delta q_3) \\ &+ (q_1^2+q_2^2)\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \dot{\theta}(q_3+\delta q_3) + q_3\delta q_3 + \frac{1}{2}(\delta q_3)^2\right) . \end{aligned}$$

Logo, observa-se que a invariância da lagrangiana é atingida considerando a seguinte transformação:

$$q_3 \rightarrow q_3' = q_3 + \dot{\theta} \;.$$

Assim, resulta que a lagrangiana (26) é invariante sob as transformações locais[26]:

$$\begin{cases} q_1 \;\rightarrow\; q_1' \;=\; q_1 cos(\theta) + q_2 sen(\theta) \\ q_2 \;\rightarrow\; q_2' \;=\; -q_1 sen(\theta) + q_2 cos(\theta) \\ q_3 \;\rightarrow\; q_3' \;=\; q_3 + \dot{\theta} \end{cases} . \tag{27}$$

Nesse caso diz-se que a lagrangiana tem simetria local sob o grupo de rotações $SO(2)$. O conjunto das transformações (27) são chamadas de transformações de equivalência.

É possível encontrar uma interpretação da coordenada q_3 a partir das equações de movimento do sistema:

- $\dfrac{\delta S}{\delta q_1} = -\ddot{q}_1 + 2\dot{q}_2 q_3 + q_2\dot{q}_3 + q_1 q_3^2 - \partial_1 V = 0 \;.$
- $\dfrac{\delta S}{\delta q_2} = -\ddot{q}_2 - 2\dot{q}_1 q_3 - q_1\dot{q}_3 + q_2 q_3^2 - \partial_2 V = 0 \;.$
- $\dfrac{\delta S}{\delta q_3} = -q_1\dot{q}_2 + \dot{q}_1 q_2 - (q_1^2+q_2^2)q_3 = 0 \;.$

A equação de movimento para q_3 pode ser escrita como:

$$q_1\dot{q}_2 - \dot{q}_1 q_2 + (q_1^2+q_2^2)q_3 = 0$$
$$q_1^2\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) + \left[1 + \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2\right] q_3\right\} = 0$$

Chamando $z \overset{!}{=} \dfrac{q_2}{q_1}$, a equação anterior pode-se escrever simplesmente como:

$$\dot{z} + (1+z^2)q_3 = 0 \;,$$

a qual é uma equação de variáveis separáveis; então, podemos fazer o seguinte:

$$\frac{dz}{z^2+1} = -q_3 dt \quad \rightarrow \quad \int_{z_0}^{z} \frac{dz'}{z'^2+1} = -\int_0^t q_3 dt' \;.$$

Assim:

$$tan^{-1}(z) = tan^{-1}(z_0) - \int_0^t q_3 dt' \;.$$

Note-se que $tan^{-1}(z) = tan^{-1}\left(\dfrac{q_2}{q_1}\right)$ é o ângulo θ correspondente à transformação de rotação mencionada acima, então a última equação também pode-se escrever como:

$$\theta(t) = \theta(0) - \int_0^t q_3 dt' \;.$$

[23] Uma matriz é dita especial se o determinante dela é 1.
[24] Uma matriz R é dita ortogonal se $R^T R = 1$.
[25] Diz-se que a simetria é global quando os parâmetros dos elementos do grupo de simetria são constantes.
[26] Diz-se que as transformações são locais no sentido de que o parâmetro é função da variável t.

Logo, derivando em relação à variável t encontra-se que $q_3 = -\dot{\theta}$. Assim, a coordenada q_3 resulta ser o negativo da taxa de câmbio do ângulo de rotação.

O seguinte passo será estabelecer uma condição fixadora para o sistema, a qual é obtida naturalmente a partir da lei de transformação para a coordenada q_3 :

$$q_3' = q_3 + \dot{\theta} = -\dot{\theta} + \dot{\theta} = 0.$$

Em consequência:

$$q_3 = -\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = tan^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) = \text{constante} .$$

Desta maneira, temos obtido o seguinte vínculo[27]:

$$\Gamma'^{(1)} = tan^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) - c = 0 .$$

Com esse vínculo já é possível passar à seguinte ordem de iteração:

- Hamiltoniana:

$$H^{(2)} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(q_1^2 + q_2^2)\Big|_{tan^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)=c} .$$

- Lagrangiana canônica:

$$L^{(2)} = p_1\dot{q}_1 + p_2\dot{q}_2 + (q_1p_2 - p_1q_2)\dot{\lambda}^{(0)} + \Gamma'^{(1)}\dot{\lambda}^{(1)} - H^{(2)} .$$

- Coordenadas do espaço de fase $M^{(2)}$:

$$\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} \xi^{(1)} \\ \lambda^{(1)} \end{pmatrix} .$$

- $1-$forma canônica:

$$\theta^{(2)} = \theta^{(1)} + \left[tan^{-1}\left(\frac{q_2}{q_1}\right) - c\right] d\lambda^{(1)} .$$

- Derivada da $1-$forma canônica:

$$\omega^{(2)} = \omega^{(1)} + \left(\frac{q_1\, dq_2 - q_2\, dq_1}{q_1^2 + q_2^2}\right) \wedge d\lambda^{(1)} .$$

Logo, a representação matricial $\Omega^{(2)}$ será:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & p_2 & -\frac{q_2}{q_1^2+q_2^2} \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -p_1 & \frac{q_1}{q_1^2+q_2^2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -q_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & q_1 & 0 \\ -p_2 & p_1 & q_2 & -q_1 & 0 & 0 \\ \frac{q_2}{q_1^2+q_2^2} & -\frac{q_1}{q_1^2+q_2^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

A matriz anterior é regular e tem por inversa:

$$\left(\begin{array}{cccc:cc} 0 & 0 & \frac{q_1^2}{q_1^2+q_2^2} & \frac{q_1q_2}{q_1^2+q_2^2} & 0 & q_2 \\ 0 & 0 & \frac{q_1q_2}{q_1^2+q_2^2} & \frac{q_2^2}{q_1^2+q_2^2} & 0 & -q_1 \\ \frac{-q_1^2}{q_1^2+q_2^2} & \frac{-q_1q_2}{q_1^2+q_2^2} & 0 & \frac{p_2q_1-q_2p_1}{q_1^2+q_2^2} & \frac{q_2}{q_1^2+q_2^2} & p_2 \\ \hdashline \frac{-q_1q_2}{q_1^2+q_2^2} & \frac{-q_2^2}{q_1^2+q_2^2} & \frac{q_2p_1-p_2q_1}{q_1^2+q_2^2} & 0 & \frac{-q_1}{q_1^2+q_2^2} & -p_1 \\ 0 & 0 & \frac{-q_2}{q_1^2+q_2^2} & \frac{q_1}{q_1^2+q_2^2} & 0 & 1 \\ -q_2 & q_1 & -p_2 & p_1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Finalmente, lembrando do vínculo $\Gamma^{(0)}$, os parênteses de Poisson não-nulos resultam:

$$\{q_1;p_1\} = \frac{q_1^2}{q_1^2+q_2^2} \quad , \quad \{q_1;p_2\} = \frac{q_1q_2}{q_1^2+q_2^2} = \{q_2;p_1\} \quad ,$$

$$\{q_2;p_2\} = \frac{q_2^2}{q_1^2+q_2^2} .$$

5 Comentários finais

A formulação da Mecânica de Fadeev-Jackiw é perfeitamente compatível com a abordagem hamiltoniana, pois elas compartem a mesma estrutura canônica, sendo uma clara evidência a possibilidade de obter dos parênteses de Poisson. Contudo, a mecânica hamiltoniana tal como a conhecemos fica restrita ao caso de sistemas não-singulares enquanto que a formulação[28] F-J oferece uma alternativa para o tratamento de sistemas singulares, inclusive para aqueles cuja singularidade provém das simetrias internas; nesse sentido, a abordagem F-J é mais geral.

Um aspecto relevante da formulação F-J é a liberdade que temos de escolher as coordenadas mais apropriadas para o espaço de fase apenas escrevendo a lagrangiana na forma canônica, pois as expressões para os momentos canônicos nos dizem quando existe alguma dependência entre alguns dos momentos e as coordenadas, o que é refletido na não-independência linear entre as formas dq^a e dp_a, o que ademais implica que com essas coordenadas não poderia construir-se uma base apropriada para o espaço de $1-$formas no espaço de fase. Por outro lado, a compatibilidade dos vínculos com as equações de movimento é devido ao fato de que estas foram utilizadas na obtenção deles.

Não podemos deixar de mencionar a enorme relevância que tem a $1-$forma canônica na abordagem F-J, elá é uma peça chave para a construção da formulação F-J, pois a derivada exterior dela fornece o objeto que vai determinar o caráter singular ou regular do sistema, além de conter a estrutura canônica da teoria na iteração na que haja sido definida. Como já foi apresentado, el objetivo final é poder obter uma forma simplética no espaço de fase, pois é com a inversa dela que podemos determinar a estrutura de Poisson desejada que nos

[27] Poderiamos ter tomado como vínculo à condição $q_3 = 0$; porém, não resultaria conveniente devido a que a variável q_3 não formava mais parte das coordenadas do espaço de fase $M^{(1)}$.

[28] Com isto estamos nos referindo ao método F-J para sistemas singulares (com o aporte de Barcelos-Neto e Wotzasek).

permitirá, em princípio, fazer a quantização canônica.

Nosso último exemplo pode servirmos de inspiração para fazer um estudo mais detalhado das teorias com simetrias internas na formulação F-J, isso será apresentado em um trabalho posterior quando a abordagem seja implementada em sistemas contínuos, especificamente teorias de campos clássicos, pois a maioria delas apresentam as chamadas *simetrias de gauge*, cujo estudo é de enorme importância tanto a nível clássico quanto quântico. É de salientar, também, que no estudo de teorias de campos, encontra-se que existem campos que descrevem um tipo especial de partículas chamados de *férmions* que são caracterizados pelo fato de apresentar spin fracionário, como por exemplo o elétron e a antipartícula dele: o pósitron; matematicamente resulta mais apropriado modelar esses campos com um tipo especial de números, conhecidos como números de Grassmann, que tem a propriedade de anticomutar, tal como os campos femiônicos. Assim, existem teorias com graus de liberdade discretos que envolvem esse tipo de números, o que concretamente é chamado de mecânica pseudoclássica, ou simplesmente pseudomecânica e é claro que a abordagem F-J pode ser desenvolvida, mas levando os cuidados necessários pelo fato de não trabalhar no corpo dos números reais.

Agradecimentos

L. G. Caro agradece à CAPES pelo suporte integral, B. M. Pimentel agradece a $\mathbb{R}$ pelo suporte parcial, G. E. R. Zambrano agradece a $\mathbb{R}$ pelo suporte $\mathbb{C}$.

Referências

[1] Dirac, P. A. M. (1925). The fundamental equations of quantum mechanics. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 109*(752), 642-653.

[2] Bergmann, P. G. (1949). Non-linear field theories. *Physical Review, 75*(4), 680.

[3] Bergmann, P. G., & Brunings, J. H. (1949). Nonlinear field theories II. Canonical equations and quantization. *Reviews of Modern Physics, 21*(3), 480.

[4] Bergmann, P. G., Penfield, R., Schiller, R., & Zatzkis, H. (1950). The Hamiltonian of the general theory of relativity with electromagnetic field. *Physical Review, 80*(1), 81.

[5] Anderson, J. L., & Bergmann, P. G. (1951). Constraints in covariant field theories. *Physical Review, 83*(5), 1018.

[6] Dirac, P. A. M. (1950). Generalized hamiltonian dynamics. *Canadian journal of Mathematics, 2*, 129-148.

[7] Dirac, P. A. (1951). The Hamiltonian form of field dynamics. *Canadian journal of Mathematics, 3*, 1-23.

[8] Faddeev, L., & Jackiw, R. (1988). Hamiltonian reduction of unconstrained and constrained systems. *Physical Review Letters, 60*(17), 1692.

[9] Barcelos-Neto, J., & Wotzasek, C. (1992). Faddeev-Jackiw quantization and constraints. *International Journal of Modern Physics A, 7*(20), 4981-5003.

[10] Barcelos-Neto, J., & Wotzasek, C. (1992). Symplectic quantization of constrained systems. *Modern Physics Letters A, 7*(19), 1737-1747.

[11] Sundermeyer, K. (1982). Constrained dynamics with applications to Yang- Mills theory, general relativity, classical spin, dual string model.

[12] Abraham, R., & Marsden, J. E. (1987). *Foundations of Mechanics*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

[13] Dunne, G. V., Jackiw, R., & Trugenberger, C. A. (1990). "Topological"(Chern-Simons) quantum mechanics. *Physical Review D, 41*(2), 661.

[14] Seiler,W. M. (1995). Involution and constrained dynamics. II. The Faddeev- Jackiw approach. *Journal of Physics A: Mathematical and General, 28*(24), 7315.

[15] Christ, N. H., & Lee, T. D. (1980). Operator ordering and Feynman rules in gauge theories. *Physical Review D, 22*(4), 939.