

DECAIMIENTO DE BOSONES SEUDOESCALARES EN DOS FOTONES

JUAN CARLOS SALAZAR MONTENEGRO

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS

PROGRAMA DE FISICA

SAN JUAN DE PASTO

2001

DECAIMIENTO DE BOSONES SEUDOESCALARES EN DOS FOTONES

JUAN CARLOS SALAZAR MONTENEGRO

Trabajo de grado para optar el título de físico

Director  
Juan Bautista Florez Moreno  
Ph.D física

UNIVERSIDAD DE NARIÑO  
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICAS  
PROGRAMA DE FISICA  
SAN JUAN DE PASTO

2001

Nota de aceptación

---

---

---

---

Presidente Jurado

---

Jurado

---

Jurado

---

Ciudad y fecha (día, mes, año)



*A mi madre:  
Marina Montenegro  
Ejemplo de amor ,  
dedicación , y  
fortaleza.*

## **AGRADECIMIENTOS**

Es mi deber agradecer a aquellas personas, que hicieron posible en diferentes aspectos la realización de este trabajo.

Agradezco a mi Madre por su comprensión y apoyo incondicional.

A mis hermanos, por su paciencia y ejemplo.

A mis Profesores por haber compartido conmigo sus conocimientos y amistad.

A mis compañeros por los muchos ratos agradables que pasamos juntos.

A Johana por su compañía y colaboración.

A los profesores Alfredo Pasaje y Germán Ramos, quienes muchas veces colaboraron directamente en la elaboración de este trabajo.

Un especial agradecimiento a mi director de tesis Juan Bautista Flórez por su paciencia, consejo y por las arduas horas dedicadas en mi aprendizaje.

## RESUMEN

Se realiza el estudio de los invariantes de SU(3) y el modelo dominancia mesón vectorial, logrando establecer el lagrangiano mas general mesón escalar - mesón vectorial – fotón. Haciendo uso de las reglas de Feynman y de las relaciones entre acoples deducidas a partir del lagrangiano, se encuentran los acoples para los procesos de  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ , y  $\eta' \rightarrow \gamma\gamma$ .

Los errores obtenidos con respecto a los valores experimentales, son de 2.4% para  $g_{\pi\gamma\gamma}$  de 7.2% para  $g_{\eta\gamma\gamma}$  y de 1.9% para  $g_{\eta'\gamma\gamma}$ .

Por otro lado, a partir de un estudio previo en simetrías quirales y aplicando el modelo sigma lineal para el decaimiento  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ , se obtiene el valor de  $2.5 \times 10^{-5} \text{Mev}^{-1}$  con un error respecto al valor teórico del 0.7%, por lo tanto este método representa una mejor aproximación para el proceso estudiando, que el método de langrangianos fenomenológicos.

## ABSTRACT

it's carried out the study of the invariants of SU(3) and the model dominance vectorial meson, being able to establish the lagrangiano most general scalar meson - vectorial meson - photon. Making use of the rules of Feynman and of the relationships among couple deduced starting from the lagrangian, are found the couple for the processes of  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ , y  $\eta' \rightarrow \gamma\gamma$ .

The errors obtained with regard to the experimental values, are of 2.4% for  $g_{\pi\gamma\gamma}$ , of 7.2% for  $g_{\eta\gamma\gamma}$  and of 1.9% for  $g_{\eta'\gamma\gamma}$ .

On the other hand, starting from a previous study in symmetries quirales and applying the model lineal sigma for the decay  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ , is obtained the value of  $2.5 \times 10^{-5} \text{ Mev}^{-1}$  with an error regarding the theoretical value of 0.7%, therefore this method represents a better approach for the process studied that the method of langrangian fenomenológico.

## CONTENIDO

	pag
INTRODUCCION	
1. NOCIONES ELEMENTALES	01
1.1 SIMETRIAS	04
1.1.1 Núcleos espejos y simetría de isospín	05
1.1.2 Extrañeza e hipercarga	07
1.2 TEORIA DE GRUPOS	08
1.2.1 Definiciones	09
1.2.2 Representación de grupos	11
1.2.3 Grupos continuos y grupos de Lie	14
1.2.4 Generadores del grupo de Lie	15
1.2.5 Grupos SU(N)	16
1.2.6 Grupo SU(2)	19
1.2.7 Grupo SU(3)	21
1.3 CAMINO OCTUPLE DE LOS HADRONES	24
1.4 MODELO DOMINANCIA MESON VECTORIAL	27
2. LAGRANGIANOS FENOMENOLOGICOS	29

2.1 ACOPLES DE YUKAWA	29
2.2 APLICACIÓN DEL METODO EN LA DETERMINACION DE LOS PROCESOS DE $\pi \rightarrow \gamma\gamma$ , $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ , $\eta' \rightarrow \gamma\gamma$ .	35
2.2.1 Decaimiento de $\rho \rightarrow e^+e^-$	38
2.2.2 Decaimiento de $\rho \rightarrow \pi\gamma$	42
2.2.3 Decaimiento de $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	45
3. LAGRANGIANOS QUIRALES	49
3.1 SIMETRIA MANIFIESTA Y ROMPIMIENTO ESPONTANEO DE LA SIMETRIA	50
3.2 TEOREMA DE GOLDSTONE	53
3.3 MODELO $\sigma$ LINEAL	57
3.4 CALCULO DEL PROCESO DE $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ USANDO EL MODELO $\sigma$	61
4. CONCLUSIONES	68
BIBLIOGRAFIA	

## INTRODUCCION

El estudio de simetrías a proporcionado un método útil para encontrar respuestas a las preguntas que se han generado en procesos de interacción fuerte. Una aplicación de estos conceptos es la cromodinámica cuántica <sup>[14]</sup>, la cual se acepta hoy en día como la que describe estos procesos. Esta teoría esta basada en el grupo SU(3) de color, cuyos constituyentes fundamentales son fermiones de espín 1/2 llamados Quarks (hasta el momento se han hallado 6 tipos de Quarks (u,d,s,c,t,b) los cuales llevan carga fraccionaria (2/3 para u,c,t y -1/3 para d,s,b) y campos de norma no abelianos de espín 1 llamados gluones, los cuales interactuan con los Quarks y con ellos mismos. La forma de dichas interacciones esta gobernada por el requerimiento de invarianza de norma, es decir, los acoplamientos de los bosones vectoriales con los campos de materia están determinados por la simetría SU(3) de color. Se asume que existen únicamente 3 colores con el fin de tener una estadística de los bariones correcta.

Hasta el momento no se ha observado Quarks ni gluones libres, lo que se observa son hadrones y glueballs singletes de color. Este hecho, sugiere un fenómeno de confinamiento a bajas energías para los estados compuestos de Quarks y

gluones, de tal manera que la situación que se tiene es la siguiente: A altas energías los Quarks y los gluones (llamados partones por Feynman) se comportan

como partículas libres (constante de acoplamiento pequeña), mientras que a bajas energías estos estados se unen para formar hadrones. De lo anterior es claro que en las interacciones fuertes se presentan dos rangos de energía: la región de bajas energías, donde se exhiben resonancias e interacciones complicadas y la región de altas energías donde existe un comportamiento suave y las resonancias desaparecen. En el rango de bajas energías la constante de acoplamiento se hace muy grande e impide realizar teoría de perturbación, esto conlleva a encontrar métodos aproximados, tales como lagrangianos fenomenológicos <sup>[7]</sup> y quirales <sup>[4]</sup>, los cuales se construyen respetando las simetrías de la QCD. En esta construcción se considera a los hadrones como los campos fundamentales, es decir, considerar a los hadrones con estructura en este rango de energía es algo irrelevante.

La clasificación de los hadrones viene de Gell-mann y Murray, quienes se dieron a bien cuenta que estos se podían agrupar como multipletes SU(3) de isoespín <sup>[15]</sup>, al observar las propiedades físicas de los mismos, existiendo así: un octete de bariones de espín 1/2 y paridad positiva, un decuplete de bariones de espín 3/2 y paridad positiva, y un octete de mesones pseudoescalares. Una característica de estos multipletes, es que no son degenerados en masa, esto recae en el hecho de que la simetría SU(3) de isoespín sea solo aproximada. La clasificación de hadrones en multipletes de SU(3) recibe el nombre en inglés de "eightfold way".

Los estados de Quarks fueron denominados por Feynman como estados de sabor (u,d,s,c,b,t). La simetría de sabor de las interacciones fuertes no ha sido

especificada, sin embargo se asume el grupo de sabor, como  $SU(6)$ . Esta simetría sugiere que los estados de quarks son degenerados en masa, esto no es cierto y por lo tanto la simetría  $SU(6)$  de sabor, es solo una aproximación.

La presencia de un término de masa en el lagrangiano de la QCD hace que la simetría  $U(6)_V \times U(6)_A$  este rota. Una aproximación burda consiste en tomar las masas de los quarks iguales a cero, con lo que se obtiene una simetría quiral aproximada  $U(1)_V \times SU(6)_L \times SU(6)_R \times U(1)_A$ .  $U(1)_V$  corresponde a la conservación del número barionico y  $U(1)_A$  hace referencia a anomalías que no se tendrá en cuenta en este trabajo. Es un hecho que los quarks c,b,t presentan masas considerables con relación al rango de energía de confinamiento de la QCD, por tanto la aproximación de simetría quiral  $SU(6)_L \times SU(6)_R$  carece de sentido. Para mejorar la aproximación se toma los Quarks livianos u,d,s como partículas no masivas obteniéndose una simetría quiral aproximada  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ , sin embargo si esta simetría existiera el espectro de los hadrones debería doblarse es decir, todos los multipletes de  $SU(3)$  deberían tener un compañero quiral, existiría un octete  $1/2^-$ , un decuplete  $3/2^-$ , un nonete  $0^+$ , y un nonete  $1^+$ . Lo anterior no se observa en la naturaleza y dio la pauta para el desarrollo del rompimiento espontáneo de la simetría <sup>[17]</sup>.

El concepto de rompimiento espontáneo de la simetría nació del hecho de considerar que el vacío no es invariante bajo transformaciones de tipo axial, esto llevo a Nambu a determinar que una simetría podría estar oculta por la presencia de bosones no masivos en el espectro de partículas, Goldstone igualmente

estableció que por cada generador roto espontáneamente debía existir un boson de masa cero.

En el espectro físico no existen partículas no masivas que puedan explicar el rompimiento espontáneo de la simetría  $SU(3)_V \times SU(3)_A$  a  $SU(3)_V$ , sin embargo se ha considerado aproximaciones para los quarks livianos  $u, d, s$  ( $m_u = m_d = m_s = 0$ ), de lo cual se tiene una simetría aproximada  $SU(3)_V \times SU(3)_A$  espontáneamente rota a  $SU(3)_V$ , por la presencia de un octete de mesones pseudoescalares livianos. La aproximación se mejora al tomar únicamente la masa de los Quarks  $u, d$  iguales a cero, con una simetría aproximación  $SU(2)_A \times SU(2)_V$  [4] rota espontáneamente a  $SU(2)_V$  por el triplete de piones ( $\pi^+, \pi^-, \pi^0$ ).

Las anteriores aproximaciones generaron complejas situaciones, una de ellas parte al considerar el decaimiento del  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ , la anchura de decaimiento de este proceso se encuentra alrededor de 7.7 eV. Para tal situación y considerando el rompimiento espontáneo de simetría la divergencia de la corriente axial, conecta los estados piónicos al vacío, y es un hecho matemático, que la constante de acoplamiento, es función de la masa del pión. Al considerar la masa del pión como cero esto conlleva a la conclusión final que el pión no puede decaer. Este resultado erróneo que parte de consideraciones matemáticas fue demostrado por Sutherland y Veltman alrededor de 1963 [10], y significó un desafortunado tropiezo de las teorías formuladas a partir del rompimiento espontáneo de simetría. Hoy en

día la respuesta a tal problema se encuentra en el estudio de anomalías, y fue determinante para corroborar la teoría del color.

Un modelo importante a considerar en las interacciones fuertes es el modelo de dominancia mesón vectorial <sup>[6]</sup>. Este modelo no se encuentra incluido dentro de la teoría de la QCD, sin embargo es solventado por diversas observaciones experimentales. El modelo tiene sus antecedentes en el estudio de la estructura electromagnética de los nucleones, los trabajos de Nambu sugirieron que las distribuciones de carga del protón y del neutrón solo podían ser explicadas si se consideraba la contribución de un mesón vectorial ( $\omega$ ) al factor de forma de estos nucleones, posteriormente Frazer y Fulco haciendo el mismo estudio pero esta vez con piones encontraron que el factor de forma de este recibía contribuciones de otro mesón ( $\rho$ ), la generalización de esta hipótesis es debida a Sakurai quien sugirió que con el fin de explicar la conservación de isospín e hipercarga en estos procesos debían de considerarse contribuciones resonantes de mesones vectoriales tipo Yang-Mills, en otras palabras lo que proponía Sakurai consiste en considerar que en un proceso electromagnético el fotón no interactúa directamente con los hadrones si no que lo hace a través de mesones vectoriales.

El objetivo del presente trabajo es determinar el proceso de decaimiento de bosones pseudoescalares en dos fotones, así como el de adquirir nociones básicas en el estudio de partículas elementales. Para tal fin, el trabajo en mención se ha dividido en cuatro partes, así:

1. En la primera parte se realiza un esbozo de las propiedades de simetría, presentes en las interacciones fuertes, al igual que el método matemático utilizado para describirlas (teoría de grupos). Otro punto a tratar en esta etapa es la clasificación de los hadrones, realizada por Gell-mann y el modelo dominancia mesón vectorial.
2. La segunda parte de este trabajo consiste en determinar los acoples  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma, \eta \rightarrow \gamma\gamma, \eta' \rightarrow \gamma\gamma$ , mediante el uso de lagrangianos fenomenológicos.
3. La tercera parte consta de un breve estudio en simetrías quirales; calculándose además el acople  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$  a partir del modelo  $\sigma$  lineal.
4. La cuarta parte es dedicada a las conclusiones de los resultados obtenidos

## 1. NOCIONES ELEMENTALES

En este capítulo se tratan algunos tópicos que son la base para el desarrollo del presente trabajo. Discutiremos la importancia que el estudio de simetrías ha adquirido en la comprensión de los procesos de interacción, además de introducir conceptos matemáticos que son utilizados en el trabajo de las mismas. Se estudiara la clasificación de los hadrones como multipletes del grupo SU(3) de isoespín (camino octuple de los hadrones) y por último nos referimos al modelo de dominancia mesón vectorial ya que es útil a la hora de tratar problemas de interacción electromagnética con hadrones.

### 1.1 SIMETRÍAS

El estudio de simetrías <sup>[13]</sup> que presenta un sistema de partículas, otorga un método para encontrar sus propiedades físicas, sin necesidad de resolver ecuaciones de movimiento que pueden llegar a ser complicadas o en el caso en que dichas ecuaciones no existan. Este hecho se presenta en física de partículas elementales. El desconocimiento de ecuaciones de movimiento, obliga al físico a formular hipótesis a partir únicamente de los datos iniciales y finales arrojados por un determinado experimento. Por tanto las simetrías observadas de los experimentos forman las bases para plantear teorías en interacciones nucleares.

Las simetrías recaen la mayoría de veces en constantes de movimiento y por ende en leyes de conservación, aunque no es de esperar que esto suceda para todo tipo de simetrías.

El lagrangiano que describe un sistema físico debe contener implícitas las simetrías observadas experimentalmente y existe un teorema a partir del cual se pueden encontrar constantes de movimiento del mencionado lagrangiano. Este teorema se conoce como el teorema de Noether <sup>[12]</sup>, establece constantes de movimiento a partir de corrientes conservadas.

Las simetrías que se estudian en física de partículas no hacen únicamente referencia a simetrías exactas, es decir, aquellas simetrías que se cumplen para todas las interacciones conocidas, si no también se trabaja con simetrías aproximadas. Las simetrías aproximadas se dan al realizar aproximaciones a las características físicas de las partículas, y las leyes de conservación que de estas se derivan, se cumplen únicamente para el tipo de interacción tratado (tal es el caso del isoespín el cual en principio nace al tratar las masas del neutrón y el protón como iguales). La idea de simetrías aproximadas dio lugar al rompimiento de simetría. Una simetría se considera rota cuando se cumple en un determinado tipo de interacción, pero se viola en el resto, la explicación se da por la existencia de un factor físico que se puede despreciar en la interacción en cuestión, el cual se manifiesta en las interacciones restantes. Ejemplo: La simetría de isoespín (el cual se tratara después con mas detalle), se cumple en las interacciones fuertes y se rompe en presencia de campo electromagnético.

Se puede demostrar que las simetrías que generan leyes de conservación se pueden representar como operadores unitarios <sup>[13]</sup>.

Las simetrías que presenta un sistema físico en general, se dan por la incapacidad de medir ciertos parámetros, en otras palabras por la no existencia de conceptos absolutos. Ejemplo: el hecho de que no se pueda establecer un origen espacio-temporal absoluto, conlleva a la conservación del cuadri-vector momentum-energía. Es así, que el lagrangiano que describe un sistema físico debe ser invariante bajo transformaciones de tipo espacio-temporal. Por suerte esto es cierto ya que si las propiedades físicas de un sistema variasen de un sistema de referencia a otro, la física no tendría ninguna validez práctica.

Entre las transformaciones de simetría que dejan invariante el lagrangiano de un sistema físico se encuentran las transformaciones del grupo completo de Poincaré<sup>[13]</sup>, en dichas transformaciones se encuentran las ya mencionadas traslaciones espacio – temporales y la rotación tres - dimensionales que genera la conservación del momentum angular, entre otras.

Otro tipo de leyes de conservación se generan a partir de la invarianza gauge del lagrangiano. Como es bien conocido en física cuántica las partículas se representan como funciones de onda, y la imposibilidad de medir la fase absoluta de mencionada función, conlleva a que la carga sea una magnitud que se conserve; igualmente se puede obtener la conservación del número barionico, y dos números leptonicos (muonico y electrónico) a partir de invarianza gauge <sup>[1]</sup>.

Haciendo un resumen tenemos que la invarianza del lagrangiano de un sistema físico bajo el grupo de Poincaré conlleva a la conservación del cuadri-vector momentum-energía, momentum angular, entre las más importantes. De la invarianza bajo transformaciones tipo gauge se obtiene la conservación de la carga, número leptónico y número bariónico. Todas las leyes de conservación hasta aquí planteadas son exactas, lo que quiere decir, que se encuentran a partir de transformaciones de simetrías exactas, o en otras palabras, que se cumplen en todo tipo de interacción.

Como ejemplo de simetrías aproximadas se tiene la inversión espacial y temporal: la invarianza bajo inversión espacial nos lleva a la conservación de la paridad, es decir, no se puede distinguir entre derecho e izquierdo. La inversión temporal no genera leyes de conservación (lo cual se debe a que este tipo de transformaciones no se pueden representar como operadores unitarios), sin embargo tiene importantes consecuencias, tal es el hecho, que la invarianza bajo inversión temporal de partículas elementales, conlleva a que las masas de partículas y antipartículas sean iguales.

A continuación, vamos a tratar con más detalle la extrañeza e isospín, números cuánticos que se conservan en procesos de interacción fuertes y que se utilizan para describir estados hadrónicos.

### 1.1.1 Núcleos espejos y simetría de isoespín

La simetría de isoespín parte de las propiedades encontradas en los núcleos espejo.

Los núcleos espejo <sup>[15]</sup> se refieren a núcleos de átomos que presentan aproximadamente la misma masa pero diferente valor de carga, como ejemplo se considerara los núcleos de He<sup>3</sup> y H<sup>3</sup>. El núcleo He<sup>3</sup> contiene 2 protones y un neutrón mientras que H<sup>3</sup> presenta 2 neutrones y un protón. Asumiendo la existencia de únicamente dos tipos de fuerzas, en los dos núcleos citados se presentaran tres pares de interacción. En H<sup>3</sup> son p - n, p - n y n - n, y en He<sup>3</sup> hay p - n, p - n y p - p. La diferencia radica entonces en que H<sup>3</sup> tiene una interacción n - n mientras que He<sup>3</sup> tiene un tipo de interacción p - p. Si se ignora la interacción debida al momento magnético, la energía de enlace n - n es puramente producida por interacción fuerte mientras que p-p tiene una parte producida por interacción fuerte y una parte producida por interacción electromagnética. Lo anterior se puede escribir en términos del potencial de interacción para n - n y p - p como:

$$V_{nn} = (V_f)_{nn}; V_{pp} = (V_f)_{pp} + (V_{col})_{pp}$$

La energía que mantiene unido el núcleo de He<sup>3</sup> es de 8.492 Mev y de H<sup>3</sup> es de 7.728 Mev con una diferencia de energía entre las dos de 0.764. Al calcular el valor de  $(V_{col})_{pp}$  se obtiene un valor de 0.826 Mev lo cual es muy aproximado a la diferencia entre energías de amarre de los núcleos de He<sup>3</sup> y de H<sup>3</sup>. Como

conclusión, en ausencia de campo electromagnético los núcleos de  $\text{He}^3$  y  $\text{H}^3$  no se pueden diferenciar uno del otro, siendo únicamente distinguibles por su carga eléctrica. La interacción fuerte es de mucha mayor magnitud que la interacción electromagnética y por tal motivo los efectos de la interacción electromagnética en procesos de interacción fuerte se pueden despreciar.

De lo anterior y teniendo en cuenta que el protón y el neutrón son idénticos excepto en el valor de la carga, estos se han representado como estados de una misma partícula llamada nucleón. A semejanza del espín el nucleón se especifica por un número cuántico denominado isoespín ( $I$ ), y los estados del nucleón se pueden representar por los valores de la tercera componente del isoespín ( $I_3$ ), donde se toma generalmente el valor de  $1/2$  para el protón y  $-1/2$  para el neutrón. Esta idea se generalizó para todo tipo de hadrones cuyas propiedades físicas son iguales excepto en su carga eléctrica; tales como: el triplete de piones, el doblete de kaones etc.

Es fácil observar, por lo anteriormente mencionado, que la simetría de isoespín es una simetría aproximada y se rompe en presencia de campo electromagnético.

La simetría de isoespín tiene las propiedades del grupo  $\text{SU}(2)$  <sup>[12]</sup>, por lo tanto las interacciones fuertes serán invariantes bajo el grupo de transformaciones  $\text{SU}(2)$ , y los estados del nucleón, los estados del pión etc, se especificaron como vectores bases del grupo.

En general las simetrías poseen las propiedades de un grupo y por tanto las consecuencias que de ellas se desprenden pueden ser estudiadas a partir de la teoría de grupos <sup>[12]</sup>, siendo esta la razón por la cual se hace necesario conocer algunos tópicos de esta teoría. En este trabajo vamos a considerar principalmente, los grupos SU(2) y SU(3).

### **1.1.2 Extrañeza e hipercarga**

A partir del descubrimiento de partículas extrañas <sup>[15]</sup> tal como  $\Lambda, K, \Sigma$ , etc. Se observa que estas partículas se producen por pares en procesos de interacción fuerte sin embargo sus decaimientos se presentan en forma singular y vía interacción débil. Este hecho sugirió la existencia de un nuevo número cuántico denominado extrañeza S, el cual se conserva en procesos de interacción fuerte pero no en interacción débil. Las partículas extrañas poseen  $S \neq 0$  y los piones y nucleones posee extrañeza igual a cero.

Debido a que el isospín se conserva en las interacciones fuertes, se tiene que las partículas extrañas también deben conservar isospín, por tanto este número cuántico debe describir tan bien a las partículas extrañas como al resto de hadrones y así mismo estas partículas existen en multipletes de isospín, cuyos miembros tienen casi igual masa.

Como ejemplo tenemos el triplete de isoespín 1 de las partículas  $\Sigma$ , el doblete de cascada  $\Xi$  con isoespín  $\frac{1}{2}$  etc.

Por medio de la relación de Gell-mann y Nishijima se relaciona a la carga de las partículas con la tercera componente del isoespín y la extrañeza.

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B + S)$$

Donde B representa el número barionico. Por lo general se denomina a la suma del número barionico con la extrañeza como la hipercarga Y de las partículas y la relación anterior se expresa como:

$$Q = I_3 + \frac{Y}{2}$$

## 1.2 TEORIA DE GRUPOS.

Un Grupo G se define como el conjunto de elementos G (a,b,c...) entre los cuales es definida una operación, llamada multiplicación, que satisface:

- I) Para cada  $a \in G$  y  $b \in G$  se tiene que:  $c = a.b \in G$
- II) La multiplicación es asociativa:  $(a.b).c = a.(b.c)$
- III) Existe un único elemento e, llamado unitario, tal que:  $a.e = e.a = a$
- IV) Cada elemento  $a \in G$  tiene inverso  $a^{-1} \in G$  tal que:  $a.a^{-1} = a^{-1}.a = e$

### 1.2.1 Definiciones

Grupo abeliano: Se dice que un grupo es abeliano, si todos sus elementos conmutan. Es decir:

$$a.b = b.a$$

Grupos Infinitos y Finitos: Un grupo es infinito cuando posee un número infinito de elementos y se dice que es finito cuando posee un número finito de los mismos. El número de elementos que presente el grupo se conoce como el orden del grupo.

Subgrupo: se dice que un subconjunto  $G_1$  es subgrupo de  $G$  si los elementos de  $G_1$  están contenidos en  $G$  y además  $G_1$  tiene las propiedades de un grupo.

Isomorfismo: Dos grupos  $G_1$  y  $G_2$  son isomorfos, si existe correspondencia uno a uno entre sus elementos, tal que sí:

$$a_1 \leftrightarrow a_2$$

$$.b_1 \leftrightarrow b_2$$

$$a_1.b_1 \leftrightarrow a_2.b_2$$

Homomorfismo: Sean  $G_1$  y  $G_2$  dos grupos, si existe correspondencia múltiple, a uno entre los elementos de  $G_1$  y  $G_2$  tal, que si:

$$.a_1 \rightarrow a_2$$

$$.b^1 \rightarrow b_2$$

entonces  $a_1 b_1 \rightarrow a_2 b_2$

Se dice que  $G_1$  es homomorfo a  $G_2$ .

Ejemplo de grupos:

Grupo  $O(N)$ : grupo de matrices  $n \times n$  ortogonales.

Grupo  $SO(N)$ : grupo de matrices  $n \times n$  ortogonales de determinante uno.

Grupo  $U(N)$ : formado por las matrices unitarias  $n \times n$ .

Grupo  $SU(N)$ : grupo de matrices unitarias  $n \times n$  de determinante igual a 1.

Grupo  $L(N)$ : grupo de transformaciones lineales.

Grupo  $GL(N)$ : grupo de transformaciones lineales generales en un espacio  $n$ - dimensional.

Grupo  $SL(N)$ : grupo de transformaciones lineales en representación matricial  $n \times n$  de determinante uno.

Grupo  $S_n$ : grupo de permutación de  $n$  partículas.

## 1.2.2. Representación de grupos

Grupo de Operadores:

Sea  $D$  un conjunto de operadores que actúan en un espacio vectorial. Si la operación que efectúan los operadores sobre los vectores del espacio satisface los postulados del grupo, este conjunto forma un grupo de operadores.

Representación:

Si existe homomorfismo entre un grupo abstracto  $G$  y un grupo de operadores  $D$  en un espacio vectorial se dice que  $D$  forma una representación del grupo  $G$  cumpliéndose que:

$$D(g_1 g_2) = D(g_1)D(g_2)$$

$$D(g^{-1}) = D(g)^{-1}$$

$$D(e) = I$$

Como es bien sabido un operador se puede representar en forma matricial y por lo tanto la representación de un grupo se representa en forma de matrices.

Representaciones equivalentes: Dos representaciones de la misma dimensión, de un grupo son equivalentes si existe una matriz constante  $S$  (independiente de los elementos del grupo) tal que si  $g_i \rightarrow D(i)$  en una representación y en la otra  $g'_i \rightarrow$

$D'(i)$  entonces se cumple que:  $D'(i) = S D(i) S^{-1}$  para toda  $i$ , a este tipo de transformaciones se las conoce como transformaciones de similitud.

Debido a que las trazas no cambian bajo transformaciones de similitud se tienen que:  $\text{Tr}(D'(i)) = \text{Tr}(D(i))$ .

Representación unitaria: Una representación  $D$  de un grupo  $G$  en un espacio complejo es unitaria si las matrices  $D(g)$  son unitarias, es decir:

$$D(g) D(g)^+ = I.$$

Representaciones Reducibles e Irreducibles: Sea  $D$  representaciones de un grupo  $G$  en un espacio  $R$ . Si existe un subespacio  $R'$  contenido en  $R$  tal que si  $v' \in R'$ , y  $D(g) v' = u' \in R'$ , entonces se dice que  $R'$  es un subespacio invariante de  $R$  bajo las transformaciones  $D$ .

Si en  $R$  no existen subespacios invariantes se dice que la representación  $D$  es irreducible y si existen en  $R$  subespacios invariantes la representación  $D$  será reducible.

Una representación reducible se puede presentar en forma matricial por matrices cuasidiagonales:

$$D = \begin{pmatrix} D^1 & 0 \\ 0 & D^2 \end{pmatrix}$$

Representación complejo conjugada y adjunta: Si  $D(g)$  es una representación matricial del grupo  $G$ , las matrices complejo conjugadas  $D^*(g)$  también forman representaciones de  $G$ . Tal que:

Si  $D(g_1) D(g_2) = D(g_3)$  entonces se cumple que  $D^*(g_1) D^*(g_2) = D^*(g_3)$

Igualmente las matrices adjuntas de  $G$  forman representación de  $G$ .

Siendo :  $(D^T)^{-1}(g_1) (D^T)^{-1}(g_2) = (D^T)^{-1}(g_3)$

Las representaciones  $D$ ,  $D^*$  y  $(D^T)^{-1}$  son simultáneamente reducibles o irreducibles.

Suma directa: Sean  $D_1$  y  $D_2$  representaciones que actúan en los espacios  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente. Una nueva representación se tiene usando la suma directa de  $D_1$  y  $D_2$  definida como  $D_1 \oplus D_2$  que actúa en el espacio  $R_1 \oplus R_2$ .

Producto directo: Sean  $D_1$  y  $D_2$  representaciones que actúan en los espacios  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente. Una nueva representación se obtiene usando el producto directo de  $D_1$  y  $D_2$  definido como  $D_1 \otimes D_2$  que actúa en el espacio  $R_1 \otimes R_2$ .

### 1.2.3 Grupos continuos y grupos de Lie:

Un grupo de transformaciones continuo es aquel que contiene un número infinito de elementos, los cuales pueden ser caracterizados dando un cierto número de parámetros, que varían en rangos continuos. El número de parámetros que se necesita para distinguir los elementos de un grupo se conoce como la dimensión del grupo continuo.

Ejemplo de este tipo de grupos, es el grupo de rotación, es decir cada elemento del grupo puede ser distinguido por 3 parámetros, los cuales pueden ser escogidos como los ángulos de Euler de la rotación.

Si se tiene un grupo continuo de dimensión  $n$ . Uno puede distinguir el elemento general del grupo como:

$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$  donde los  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$  son escogidos sin pérdida de generalidad, de tal forma que el elemento  $g(0, 0, \dots, 0)$  represente el elemento identidad del grupo.

Los grupos de interés en física tienen la importante propiedad de que las funciones  $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$  son funciones continuas y diferenciales de los parámetros  $\alpha_i$ . Estos grupos se denominan grupos de Lie <sup>[8]</sup>.

#### 1.2.4 Generadores de grupos de Lie:

Una propiedad importante de los grupos de Lie radica en que cualquier elemento del grupo puede ser generado a partir del elemento identidad mediante sucesivas transformaciones infinitesimales.

Los elementos de una representación del grupo de Lie  $T(\alpha_i)$  van a depender de los parámetros infinitesimales  $\alpha_i$  y se puede demostrar que dicha representación tendrá la forma:

$$T(\alpha_i) = e^{\sum_i \alpha_i I_i}$$

donde los términos  $I_i$  se conocen como los generadores del grupo y están referidos a:

$$I_i = \left. \frac{\partial T}{\partial \alpha_i} \right|_{\alpha_i=0}$$

Los generadores del grupo cumplen la siguiente relación de conmutación:

$$[I_i, I_j] = \sum_k c_{ij}^k I_k$$

Los términos  $c_{ij}^k$  se denominan constantes de estructuras y son independientes de la representación. Las constantes de estructura  $c_{ij}^k$  dependen de la estructura del grupo y de la parametrización escogida para identificar el grupo.

### 1.2.5 Grupo SU(N)

El grupo SU(N) <sup>[12]</sup> hace referencia a las matrices nxn unitarias de determinante igual a 1 o sea:

$\text{Det}(U) \times \text{Det}(U^\dagger) = 1$  pero por ser unitarias se cumple que  $\text{Det}(U^\dagger) = \text{Det}(U)$  de tal manera que se puede deducir la relación  $\text{Det}(U)^2 = 1$ .

Por lo anterior podemos tomar  $\text{Det}(U) = e^{i\gamma}$ .

El número de generadores necesarios para especificar este tipo de transformación será de  $2N^2$ , sin embargo debido a que estas matrices son unitarias, cumplen una condición de ortonormalidad de las filas (o columnas), obteniéndose  $N^2$  ecuaciones o relaciones entre ellas; Por tal motivo el número de generados se disminuirá a  $N^2$  generadores independientes.

Si escogemos que  $\gamma$  sea igual a cero entonces esto implica que  $\text{Traz}(U) = 0$  lo cual nos da otra relación entre los parámetros quedándonos únicamente  $N^2 - 1$  parámetros independientes para representar el grupo SU(N).

Un grupo puede tener un gran número de representaciones pero nos interesaremos solo en las representaciones fundamentales o sea aquellas que tienen dimensión N.

Ya que el grupo SU(N) presenta  $N^2 - 1$  parámetros, tenemos que un elemento del grupo se construye a partir de  $N^2 - 1$  generadores. Si nos damos cuenta las matrices U(N) tienen N matrices diagonales, pero como la traza de este tipo de matrices es igual a cero, entonces esta condición elimina uno de los parámetros quedándonos N - 1 matrices diagonales y como todas las matrices diagonales conmutan, el grupo SU(N) tendrá N - 1 invariantes de Casimir.

Los invariantes de Casimir son operadores que conmutan con todos los generadores del grupo y son funciones no lineales de los mismos. Al número de invariantes de Casimir que presente un grupo se le denomina rango del grupo.

Los generadores diagonales se toman a partir de realizar todas las posibilidades para la cual la diagonal principal de la matriz sea igual a cero; Por ejemplo para el grupo SU(4) los generadores diagonales serian:

$$T(A1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T(A1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T(A2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Los generadores no diagonales se encuentran a partir de hacer todos los valores iguales a 0 excepto los elementos  $i,j$  y  $j,i$  los cuales se hacen 1 y  $-1$  respectivamente. Otros generadores se construyen a partir de dar valores de  $i, -i$  a las combinaciones posibles de  $i,j$  y  $j,i$  respectivamente.

Los grupos  $SU(N)$  al ser grupos de Lie respeta el álgebra de sus generadores de lo cual, si los generadores del grupo los especificamos como  $g_i$ , entonces:

$$[g_u, g_v] = i c_{uv\lambda} g_\lambda,$$

En todo espacio vectorial invariante bajo  $SU(N)$  es posible encontrar una base formada por autovectores de los generadores diagonales, ósea vectores que tengan  $N - 1$  números reales que sean autovalores de los operadores diagonales.

Los vectores bases de una representación irreducible de  $SU(N)$  forman la representación fundamental del grupo.

Al aplicar los operadores diagonales sobre los vectores bases se obtienen los autovalores, los cuales se denominan pesos. La dimensión de los pesos esta dada por el número de operadores diagonales que existan en la representación del grupo. Esto es:

$$H\varphi(i) = \mathbf{m(i)} \varphi(i)$$

Donde  $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \dots + \mathbf{H}_n$  y  $\mathbf{m}(\mathbf{i}) = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2 + \dots + \mathbf{m}_n$ . El índice  $n$  hace referencia al número de generadores diagonales y el índice "i" hace referencia a los diferentes autovectores que forman la base de la representación.

Si existe únicamente un generador diagonal los pesos serán unidimensionales.

### 1.2.6 Grupo SU(2).

El grupo SU(2) <sup>[9]</sup>, es un subgrupo del grupo SU(N) y por tanto tiene todas sus propiedades. En este grupo se presenta 3 generadores de los cuales uno es diagonal y se tiene un invariante de Casimir.

Los generadores del grupo SU(2) se definen generalmente como:

$$J_i = \frac{1}{2} \sigma_i \text{ Con } i = 1, 2, 3.$$

$\sigma_i$  hacen referencia a las matrices de Pauli dadas por:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El grupo SU(2) es homomorfo al grupo de isospín y de ahí la importancia que su estudio adquiere en el estudio de interacciones fuertes.

Los vectores bases de esta representación son convencionalmente escogidos como autovectores de  $\sigma_3$ , que son los vectores columna:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

En la teoría del espín estos vectores describen partículas con espín  $\frac{1}{2}$  con valores en la proyección sobre el eje z de  $\frac{1}{2}$  y  $-\frac{1}{2}$  respectivamente.

De igual forma sucede con el isoespín. En este caso el primer vector representa al protón ( $\frac{1}{2}$ ) y el segundo vector al neutrón (isoespín  $-\frac{1}{2}$ ).

El operador invariante de esta representación, está dado por la suma de los cuadrados de los generadores:

$$J^2 = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2$$

Por lo general cuando el grupo SU(2) se toma como representaciones del grupo de isoespín los generadores se definen como  $I_i$ , Esto simplemente es una definición y no tiene por que cambiar las propiedades del grupo.

El álgebra que obedece el grupo SU(2) de isoespín vendrá dada por:

$$[I_i, I_j] = i \epsilon_{ijk} I_k,$$

Los vectores bases de cualquier representación de SU(2) pueden ser conectados a través de operadores denominados, operadores escalara, los cuales en el grupo SU(2) de isoespín están dados por:

$$I_{\pm} = I_1 \pm i I_2$$

### 1.2.7 Grupo SU(3).

Para el grupo SU(3) <sup>[13]</sup> se tiene ocho generadores independientes de los cuales 2 son diagonales, con dos invariantes de Casimir.

La representación fundamental de SU(3) es un triplete dado por los vectores base:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Los generadores de este grupo están dados por las matrices de Gell-mann  $\lambda_i$ , de las cuales dos son diagonales y vienen dadas por:

$$\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \sqrt{1/3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Los autovectores de estas matrices son los vectores bases de la representación fundamental los cuales se han especificado anteriormente.

El grupo SU(3) es un grupo de Lie. Las relaciones de conmutación de los generadores del grupo vienen dadas por:

$$\left[ \frac{\lambda_i}{2}, \frac{\lambda_j}{2} \right] = i \sum_k f_{ijk} \frac{\lambda_k}{2}$$

$f_{ijk}$  representa las constantes de estructura del grupo. Los valores diferentes de cero de  $f_{ijk}$  se dan a continuación:

$$f_{123} = 1, f_{458} = f_{678} = \sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = 1/2$$

Para simplificar cálculos los generadores del grupo SU(3) se suelen tomar como:

$$F_i = \frac{\lambda_i}{2}.$$

$F_3$  y  $F_8$  se pueden diagonalizar simultáneamente, definiendo así los siguientes operadores escalera:

$$I_{\pm} = F_1 \pm iF_2, U_{\pm} = F_6 \pm iF_7, V_{\pm} = F_4 \pm iF_5$$

Los operadores escalares sirven para conectar estados de multipletes de SU(3).

En el contexto de interacciones fuertes se toma a la tercera componente del isoespín como  $F_3$  mientras que el valor de la hipercarga se relaciona con  $F_8$  por medio de la expresión  $Y = \frac{2}{\sqrt{3}} F_8$ .

Los estados de una representación irreducible se etiquetan generalmente por los autovalores de los operadores  $F_3$  y  $F_8$  (en el caso de interacciones fuertes  $I_3, Y$ ).

Existen dos representaciones fundamentales para el grupo  $SU(3)$ , una de las cuales está dada por los vectores bases de la representación  $u_i$  ( $i=1,2,3$ ) dados por:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Igualmente se tiene una representación compleja conjugada de vectores  $u_i^*$ .

Debido a la existencia de 2 generadores diagonales se presentan pesos bidimensionales en la representación.

Se puede demostrar que las diferentes representaciones de un grupo se obtienen a partir de realizar sucesivos productos internos de los vectores bases de la

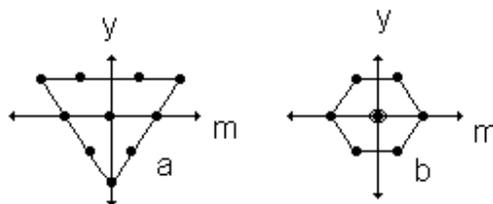
representación fundamental. Así para SU(3) podemos formar representaciones con vectores bases dados por decupletes, octetes y singletes tal como:

$$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$$

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = 10 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 1$$

Al aplicar los generadores diagonales  $F_3$  y  $F_8$  a los vectores bases de las distintas representaciones se obtienen los pesos bidimensionales para cada vector base de la representación: Como ejemplo se muestra los diagramas de peso para decupletes y octetes de SU(3).

Diagramas de peso para la representación decúplete (a) y octete (b)



### 1.3 CAMINO OCTUPLE DE LOS HADRONES.

Del espectro de hadrones se puede observar que los bariones con paridad positiva y espín  $\frac{1}{2}$   $p, n, \Sigma^+, \Sigma^0, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-, \Lambda^0$  difieren únicamente en sus números cuánticos de isoespín y extrañeza, y que la medida de porcentaje en la discrepancia de sus masas no es mayor al 17%. Estas observaciones fueron la

base para que Gell-mann propusiera como generalización del isoespín un nuevo número cuántico llamado espín unitario <sup>[15]</sup>, el cual tendría contenido al isoespín y la extrañeza. Nosotros podemos imaginar un hipotético límite donde las 8 partículas serían degeneradas en masa y podríamos decir, según lo dijo Gell - mann que “las interacciones fuertes son aproximadamente invariantes bajo rotación en el espacio de espín unitario. Los hadrones así mismo existen en superfamilias cuyos miembros forman una familia aproximadamente degenerada de múltiplos de isoespín, los cuales se diferencian en sus números cuánticos I y S pero que de otra forma son idénticos”.

Las rotaciones en el espacio de espín unitario transforman a los miembros de un multiplete de espín unitario en una mezcla de otras partículas. Las interacciones fuertes con esta aproximación son invariantes bajo este tipo de transformación y por tanto no se pueden distinguir los bariones  $\frac{1}{2}^+$  unos de otros.

Por lo anterior existen 8 bariones en el supermultiplete de espín unitario, y bajo esta aproximación las ocho partículas son meramente 8 estados de una única partícula. Los estados de un supermultiplete se pueden conectar a través de utilizar los operadores escalera del grupo SU(3) y es de esperar que la existencia de infinitud de multipletes, sin embargo esto no se ha observado y en la actualidad se cree que únicamente 3 supermultipletes de espín unitario son posibles, el primero hace referencia al octete, el segundo a un multiplete de 10 estados (decuplete) y el tercero a un singlete.

Hoy en día se tiene que el grupo SU(3) representa al grupo de espín unitario y se han clasificados los hadrones, según esta teoría, en octetes, decupletes y singletes de SU(3).

En representación matricial los octetes de hadrones son:

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & k^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & k^0 \\ k^- & \bar{k}^0 & -2\frac{\eta_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \text{Mesones } 0^-$$

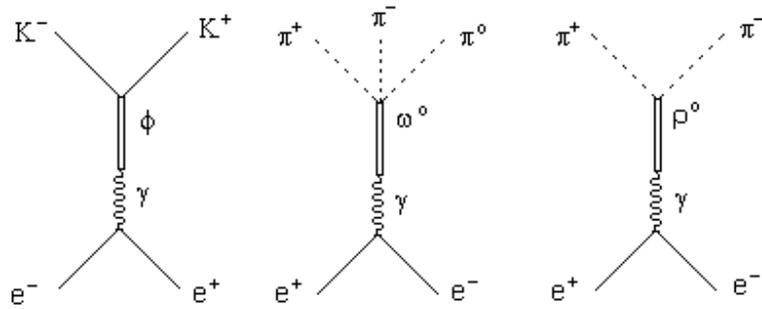
$$v^u = \begin{pmatrix} \frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega_8}{\sqrt{6}} & \rho^+ & k^{*+} \\ \rho^- & -\frac{\rho^0}{\sqrt{2}} + \frac{\omega_8}{\sqrt{6}} & k^{*0} \\ k^{*-} & \bar{k}^{*0} & -2\frac{\omega_8}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^u = \text{Mesones } 1^-$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_0}{\sqrt{6}} & \Sigma^+ & p \\ \Sigma^- & -\frac{\Sigma^0}{\sqrt{2}} + \frac{\Lambda_0}{\sqrt{6}} & n \\ \Xi^- & \Xi^0 & -2\frac{\Lambda_0}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \text{Bariones } \frac{1}{2}^+$$

#### 1.4 MODELO DOMINANCIA MESON VECTORIAL

Al realizar experimentos de colisión electrón – positrón para generar hadrones se observa fenómenos muy peculiares como por ejemplo:

Cuando los hadrones producidos son un par de kaones la sección eficaz es pequeña, sin embargo cuando la energía del fotón generado durante el proceso de colisión es aproximadamente de  $(1019,417)^2$  Mev se observa una curva de resonancia de Breit-Wigner cuya anchura es de  $\Gamma = 4.458$  Mev la cual es interpretada de acuerdo con la mecánica cuántica, como una partícula de masa 1019,417 Mev y con una vida media de  $(4.458 \text{ Mev})^{-1}$  conocida como partícula  $\phi$  cuyo espín es 1 (es un mesón vectorial). Un fenómeno similar ocurre cuando los hadrones producidos son tres piones y la energía del fotón es de  $(782,57)^2$  Mev, se observa una resonancia cuya anchura es  $\Gamma = 8,44$  Mev la cual es interpretada como un nuevo mesón vectorial de masa 782,57 Mev y una vida media de  $(8,44 \text{ Mev})^{-1}$ , la cual se denominó como  $\omega$  la cual es una partícula vectorial (espín 1); Un caso similar se presenta cuando el producto final son dos piones y la energía del fotón es de  $(769,3)^2$  Mev. La resonancia que se presenta en este proceso tiene una anchura de  $\Gamma = 150,2$  Mev la explicación nuevamente es hecha por la presencia de un mesón vectorial, en este caso la partícula se denomina  $\rho$ .



Basado en estos fenómenos fue propuesto el modelo dominancia mesón vectorial<sup>[6]</sup>, en el cual se encuentra implícito el hecho de que los hadrones no podían interactuar directamente con los fotones, sino que la interacción es mediada por la producción de un mesón vectorial ( $\rho$ ,  $\phi$ ,  $\omega$ ).

## 2. LAGRANGIANOS FENOMENOLOGICOS

El lagrangiano que describe un sistema físico debe contener implícitas las simetrías observadas experimentalmente. A consecuencia de esto, y considerando la simetría SU(3), de espín unitario, como exacta; el lagrangiano de interacción entre hadrones se construirá utilizando invariantes de SU(3) <sup>[7]</sup>, que cumplan las condiciones de simetría de la QCD.

En este capítulo se estudiara brevemente los diferentes acoples tipo Yukawa de SU(3), construyendo así el lagrangiano más general meson pseudoescalar – mesón vectorial – fotón; obteniendo después de un procedimiento matemático sencillo, los valores para los acoples  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $\eta' \rightarrow \gamma\gamma$ , lo cual representa parte del objetivo de nuestra investigación.

### 2.1 ACOPLES DE YUKAWA

De la descomposición del producto entre octetes  $8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27$ , es claro que existen dos maneras de construir acoples invariantes, los cuales se denominan: tipo  $F$  (antisimétricos), y tipo  $D$  (simétricos) <sup>[7]</sup>, los cuales serán explicados en el transcurso de la construcción de los diferentes acoples.

### Acople meson pseudoescalar M – octete barionico B.

Sea  $\psi_m$  el octete barionico y  $\phi_i$  el octete mesonico, entonces el acople invariante tipo  $F$  que contenga las simetrías de la Q.C.D. es de la forma:

$$\bar{\psi}_i (F_i)_{mn} \psi_n \phi_i \quad (2.0)$$

Donde  $F_i$  es la representación matricial  $(F_i)_{mn} = -i f_{imn}$  siendo  $f_{imn}$  las constantes de estructura del grupo SU(3). La expresión (2.0) toma la forma:

$$\bar{\psi}_i (F_i)_{mn} \psi_n \phi_i = -i f_{imn} \bar{\psi}_i \psi_n \phi_i \quad (2.1)$$

Por otro lado, utilizando las reglas de conmutación y de normalización de las matrices de Gell-mann<sup>[13]</sup>, se tiene que:

$$Tr (\lambda_i, \lambda_j) = 2 \delta_{ij} \quad (2.2)$$

Además, las matrices de Gell-mann para SU(3), cumplen la identidad:

$$f_{imn} = \frac{1}{4i} Tr ([\lambda_m, \lambda_n] \lambda_i) \quad (2.3)$$

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones la expresión (2.1) toma la forma:

$$\frac{1}{4} Tr \left( [\lambda_m \bar{\psi}_m, \lambda_n \psi_n] \lambda_i \phi_i \right) \quad (2.4)$$

Definiendo  $\bar{B} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_m \bar{\psi}_m$ ,  $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_m \psi_m$ ,  $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \lambda_m \phi_m$

El acople tipo  $F$  será:

$$\frac{1}{4i} Tr \left( [\bar{B}, B] M \right) \quad (2.5)$$

Para el acople tipo  $D$  procedemos de manera similar, utilizando para ello las constantes de estructura  $d_{ijk}$  <sup>[13]</sup> de la siguiente manera:

$$\bar{\psi}_i (D_i)_{mn} \psi_n \phi_i = -i d_{imn} \bar{\psi}_i \psi_n \phi_i \quad (2.6)$$

Usando la identidad de anticonmutación para las matrices de Gell-mann:

$$\{\lambda_i, \lambda_j\} = \frac{4}{3} \delta_{ij} I + 2 d_{ijk} \lambda_k \quad (2.7)$$

Encontramos la identidad  $d_{imm} = \frac{1}{4} \text{Tr} (\{\lambda_m, \lambda_n\} \lambda_i)$  obteniéndose el acople invariante tipo  $D$  como:

$$\frac{1}{4i} \text{Tr} (\{\bar{B}, B\} M) \quad (2.8)$$

El lagrangiano más general vendrá dado por  $\alpha$  veces el acople  $D$  más  $(1-\alpha)$  veces el acople  $F$  es decir:

$$\ell = g (\alpha \text{Tr} (\{\bar{B}, B\} M) - (1-\alpha) \text{Tr} ([\bar{B}, B] M)) \quad (2.9)$$

La cantidad  $\frac{\alpha}{1-\alpha}$  es conocida como la razón  $\frac{D}{F}$  y no se puede determinar

únicamente de la invariancia de SU(3).

### **Acople mesón vectorial – dos mesones escalares:**

Usando las simetrías de la Q.C.D. podemos observar que en algunos procesos solo existe uno de los acoples, ya sea tipo  $D$  o tipo  $F$  solamente:

Los acoplamientos VMM deben ser de tipo  $F$  con el fin de conservar invariancia bajo conjugación de la carga, que es una de las simetrías de Q.C.D. este acople esta dado por:

$$i f_{ijk} V_u^i M^j \partial^u M^k \quad (2.10)$$

Teniendo en cuenta las identidades (2.2) y (2.3) el acople VMM se puede escribir en forma matricial como:

$$\ell = g_{VMM} \text{Tr} (V_u [M, \partial^u M]) \quad (2.11)$$

### **Acople mesón pseudoescalar – dos mesones vectoriales**

Por conservación de la conjugación de la carga, los acoplamientos MVV presentan únicamente acoples tipo  $D$  y están dados por:

$$-i d_{ijk} \varepsilon_{uv\rho\sigma} M^i \partial^u V^{vj} \partial^\rho V^{\sigma k} \quad (2.12)$$

En forma matricial el acople (2.12) se escribe como:

$$\ell = g_{MVV} \varepsilon_{uv\rho\sigma} \text{Tr} (M \{ \partial^u V^v, \partial^\rho V^\sigma \}) \quad (2.13)$$

Si consideramos las interacciones electromagnéticas con los hadrones, basta con introducir el generador de campo electromagnético, el cual está dado por:

$$A^u = e \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} A^u \quad (2.14)$$

Por último tenemos el acople decúplete – octete barionico y mesonico y el acople meson vectorial – tres mesones escalares dados en por las expresiones (2.15) y (2.16) respectivamente.

$$\ell = g \psi_{\{ijk\}} \varepsilon^{ilm} B_l^j M_m^k \quad (2.15)$$

$$\ell = g_{MNV} \varepsilon_{uv\rho\sigma} Tr (V^u \partial^v M \partial^\rho M^\sigma \partial^\sigma M) \quad (2.16)$$

Todos los términos respetan las simetrías de la Q.C.D. y los rasgos compatibles con estas expectativas. Los acoplamiento tipo MMM no existen ya que violan paridad.

## 2.2 APLICACIÓN DEL METODO EN LA DETERMINACION DE LOS

### PROCESOS DE $\pi \rightarrow \gamma\gamma$ , $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ , $\eta' \rightarrow \gamma\gamma$ .

El lagrangiano más general mesón pseudoescalar – mesón vectorial – fotón compatible con las simetrías de la QCD esta dado por la expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{e m_p^2}{2\gamma_\rho} \rho_\mu(x) A^\mu(x) + \frac{e m_w^2}{2\sqrt{3}\gamma_y} \sin(\theta_v) \omega_\mu(x) A^\mu(x) + \frac{e m_\phi^2}{2\sqrt{3}\gamma_y} \cos(\theta_v) \phi_\mu(x) A^\mu(x) \mathbf{v} \\ & \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \left\{ g \text{Tr} \left( \mathbf{M} \left\{ \partial^\mu \mathbf{V}^\nu, \partial^\rho \mathbf{A}^\sigma \right\} \right) + g' \text{Tr} \left( \mathbf{M}_0 \left\{ \partial^\mu \mathbf{V}^\nu, \partial^\rho \mathbf{A}^\sigma \right\} \right) + g_o \text{Tr} \left( \mathbf{M} \left\{ \partial^\mu \mathbf{V}_0^\nu, \partial^\rho \mathbf{A}^\sigma \right\} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Los términos en la primera línea de (2.17), aparecen al considerar el modelo dominancia mesón vectorial, mientras que la segunda línea representa el lagrangiano más general mesón escalar – mesón vectorial –fotón obtenido a través de los acoples de Yukawa para SU(3).

En el anterior lagrangiano  $\mathbf{M}$  representa el octete de mesones pseudoescalares,  $\mathbf{V}$  el octete de mesones vectoriales (ver camino octuple de los hadrones, capítulo I),  $\mathbf{M}_0$  y  $\mathbf{V}_0$  representan los singletes de SU(3), mientras que  $\mathbf{A}$  representa la matriz de campo electromagnético.

$$\mathbf{M}_0 = \frac{\eta_8}{\sqrt{3}} \text{diag}(1,1,1), \mathbf{V}_0 = \frac{\omega_8}{\sqrt{3}} \text{diag}(1,1,1), \mathbf{A}_\mu = \frac{A_\mu}{3} \text{diag}(2,-1,-1) \quad (2.18)$$

Se debe tener en cuenta que las resonancias  $\phi, \omega$  se relacionan con los estados no físicos  $\omega_0$  y  $\omega_8$  a través de las expresiones:

$$\omega_0 = \omega \cos(\theta_v) - \phi \sin(\theta_v) \quad (2.19)$$

$$\omega_8 = \omega \sin(\theta_v) - \phi \cos(\theta_v) \quad (2.20)$$

De igual forma se tiene que las partículas  $\eta$  y  $\eta'$  se relacionan a través de  $\eta_0$  y  $\eta_8$ :

$$\eta_0 = \eta' \cos(\theta_p) - \eta \sin(\theta_p) \quad (2.21)$$

$$\eta_8 = \eta' \sin(\theta_p) + \eta \cos(\theta_p) \quad (2.22)$$

Después de realizar operaciones matemáticas, se puede obtener a partir del lagrangiano (2.17) las siguientes relaciones entre los acoplos:

$$g_{\pi\gamma\gamma} = \frac{eg\gamma_3}{2\gamma_\rho\gamma_y} \quad (2.23)$$

$$g_{\eta\gamma\gamma} = \frac{e}{2\sqrt{3}\gamma_\rho\gamma_y} \left( \gamma_1 g \cos(\theta_p) - \frac{\sqrt{2}}{3} \gamma_2 g'_0 \sin(\theta_p) \right) \quad (2.24)$$

$$g_{\eta'\gamma\gamma} = \frac{e}{2\sqrt{3}\gamma_\rho\gamma_y} \left( \gamma_1 g \sin(\theta_p) + \frac{\sqrt{2}}{3} \gamma_2 g'_0 \cos(\theta_p) \right) \quad (2.25)$$

$$g_{\rho^\pm \pi^\pm \gamma} = g_{k^\pm k^{*0\pm} \gamma} = g_{k^0 \bar{k}^{0*} \gamma} = g_{\bar{k}^0 k^{0*} \gamma} = g \quad (2.26)$$

$$g_{\omega\pi\gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} (3g \text{sen}(\theta_v) + \sqrt{2} g_0 \text{cos}(\theta_v)) \quad (2.27)$$

$$g_{\phi\pi\gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} (3g \text{cos}(\theta_v) - \sqrt{2} g_0 \text{sen}(\theta_v)) \quad (2.28)$$

$$g_{\rho\eta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} (3g \text{cos}(\theta_p) - \sqrt{2} g'_0 \text{sen}(\theta_p)) \quad (2.29)$$

$$g_{\rho\eta'\gamma} = \frac{1}{\sqrt{3}} (3g \text{sen}(\theta_p) + \sqrt{2} g'_0 \text{cos}(\theta_p)) \quad (2.30)$$

$$g_{\phi\eta'\gamma} = \frac{1}{3} (\sqrt{2} g'_0 \text{cos}(\theta_v) \text{cos}(\theta_p) - 3g \text{cos}(\theta_v) \text{sen}(\theta_p) - \sqrt{2} g_0 \text{sen}(\theta_p) \text{sen}(\theta_v)) \quad (2.31)$$

$$g_{\omega\eta'\gamma} = \frac{1}{3} (\sqrt{2} g'_0 \text{sen}(\theta_v) \text{cos}(\theta_p) - 3g \text{sen}(\theta_v) \text{sen}(\theta_p) + \sqrt{2} g_0 \text{sen}(\theta_p) \text{cos}(\theta_v)) \quad (2.32)$$

$$g_{\phi\eta\gamma} = \frac{1}{3} (-\sqrt{2} g'_0 \text{cos}(\theta_v) \text{sen}(\theta_p) - 3g \text{cos}(\theta_v) \text{cos}(\theta_p) - \sqrt{2} g_0 \text{cos}(\theta_p) \text{sen}(\theta_v)) \quad (2.33)$$

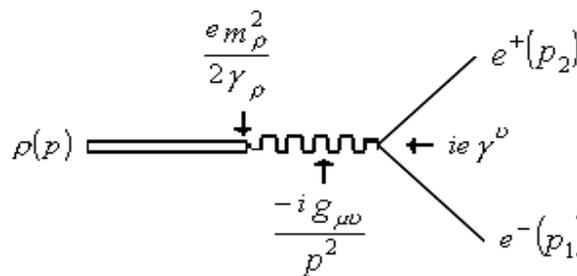
$$g_{\omega\eta\gamma} = \frac{1}{3} (-\sqrt{2} g'_0 \text{sen}(\theta_v) \text{sen}(\theta_p) - 3g \text{sen}(\theta_v) \text{cos}(\theta_p) + \sqrt{2} g_0 \text{cos}(\theta_p) \text{cos}(\theta_v)) \quad (2.34)$$

Donde se ha definido:  $\gamma_3 = \gamma_\rho + \gamma_y$ ,  $\gamma_2 = 3\gamma_\rho + \gamma_y$ ,  $\gamma_1 = 3\gamma_\rho - \gamma_y$  (2.35)

De las anteriores relaciones se observa que los acoplos:  $g_{\pi\gamma\gamma}$ ,  $g_{\eta\gamma\gamma}$ ,  $g_{\eta'\gamma\gamma}$ , se encuentran en función de siete constantes:  $\gamma_\rho$ ,  $\gamma_y$ ,  $\theta_\rho$ ,  $\theta_y$ ,  $g$ ,  $g_o$  y  $g'_o$ , por lo tanto el paso a seguir es encontrar los valores numéricos de estas siete constantes.

Las constantes:  $\gamma_\rho$ ,  $\gamma_y$ ,  $\theta_y$  aparecen en los acoplamientos de las resonancias con el campo electromagnético (fotón); por tanto utilizaremos los procesos  $\rho \rightarrow e^+e^-$ ,  $\omega \rightarrow e^+e^-$ , y  $\phi \rightarrow e^+e^-$  para encontrar expresiones medibles para las constantes en mención. En primer término vamos a determinar la expresión para la tasa de decaimiento de  $\rho \rightarrow e^+e^-$ .2.2.1

**2.2.1 Decaimiento  $\rho \rightarrow e^+e^-$ .**



**Fig 2.1 Diagrama de Feynman para el decaimiento  $\rho \rightarrow e^+e^-$**

Aplicando las reglas de Feynman <sup>[9]</sup> Al diagrama anterior, tenemos que la amplitud invariante <sup>[9]</sup> viene dada por:

$$-i m = \varepsilon^\mu \left( \frac{e m_p^2}{2\gamma_\rho} \right) \left[ \frac{-i g_{\mu\nu}}{p^2} \right] \overline{v(P_2)} i e \gamma^\nu u(p_1) \quad (2.36)$$

Usando ( $m_p^2 = P^2$ ) la expresión (2.36) se escribe como:

$$-i m = \frac{e^2}{2\gamma_\rho} \varepsilon^\mu \overline{v(P_2)} \gamma_\mu^- u(p_1) \quad (2.37)$$

La magnitud  $|\overline{m}|^2$  representa el cuadrado de la amplitud invariante, donde se suma sobre todos los estados posibles para las partículas salientes y se promedia sobre todos los estados posibles de la partícula incidente. En el proceso considerado, la expresión para  $|\overline{m}|^2$  viene dada por:

$$|\overline{m}|^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{e^2}{2\gamma_\rho} \right)^2 \sum_{out} \varepsilon^\mu \varepsilon^{*\nu} \sum_{spin} \left[ \overline{v(P_2)} \gamma_\mu u(p_1) \right] \left[ \overline{v(P_2)} \gamma_\nu u(p_1) \right]^\dagger \quad (2.38)$$

Por procedimientos matemáticos estándar tenemos que (2.38) se escribe como:

$$|\overline{m}|^2 = \frac{1}{3} \left( \frac{e^2}{\gamma_\rho} \right)^2 m_\rho \quad (2.39)$$

En un proceso de decaimiento de una partícula A en dos partículas B y C la expresión para la tasa de decaimiento <sup>[9]</sup> viene dada por la expresión:

$$\Gamma(A \rightarrow BC) = \frac{|p_A|}{32\pi^2 m_A^2} \int |\overline{m}|^2 d\Omega \quad (2.40)$$

Por lo tanto:

$$\Gamma(\rho \rightarrow e^+e^-) = \frac{|p_\rho|}{32\pi^2 m_\rho^2} \int |\overline{m}|^2 d\Omega \quad (2.41)$$

Donde  $p_\rho$  y  $m_\rho$  hacen referencia al momentum y la masa de la partícula  $\rho$  respectivamente.

Remplazando (2.39) en (2.41) se tiene:

$$\Gamma(\rho \rightarrow e^+e^-) = \frac{2\pi\alpha^2}{3\gamma_\rho^2} |p| \quad (2.42)$$

El procedimiento desarrollado hasta el momento nos sirve igualmente para encontrar las tasas de decaimiento de los procesos  $\phi \rightarrow e^+e^-$ , y  $\omega \rightarrow e^+e^-$ . Tales expresiones son:

$$\Gamma(\omega \rightarrow e^+e^-) = \frac{2\pi\alpha^2 |p_\omega|}{9\gamma_\omega^2} \sin(\theta_\nu)^2 \quad (2.43)$$

$$\Gamma(\phi \rightarrow e^+e^-) = \frac{2\pi\alpha^2 |p_\phi|}{9\gamma_\phi^2} \cos(\theta_\nu)^2 \quad (2.44)$$

La expresión para  $\gamma_\rho$  se encuentra de (2.42), la expresión para  $\theta_v$  se encuentra a partir de (2.43) y (2.44) y  $\gamma_y$  se deduce de (2.43). Las expresiones se escriben a continuación:

$$\gamma_\rho = \sqrt{\frac{2\pi\alpha^2}{3\Gamma(\rho \rightarrow e^+e^-)}|p|} \quad (2.45)$$

$$\theta_v = \arctan \sqrt{\frac{p_\phi \Gamma(w \rightarrow e^+e^-)}{p_w \Gamma(\phi \rightarrow e^+e^-)}} \quad (2.46)$$

$$\gamma_y = \sqrt{\frac{2\pi\alpha^2}{9} \frac{|p_w| \sin(\theta_v)^2}{\Gamma(w \rightarrow e^+e^-)}} \quad (2.47)$$

De las expresiones, (2.45), (2.46) y (2.47) y teniendo en cuenta los valores experimentales <sup>[18]</sup>, se obtiene los siguientes valores para las constantes  $\gamma_\rho$ ,  $\gamma_y$ ,

$\theta_v$ :

$$\gamma_\rho = 2.52 \pm 0.06$$

$$\gamma_y = 3.02 \pm 0.02$$

$$\theta_v = 37.76^\circ \pm 0.67^\circ$$

Como un segundo paso determinaremos las expresiones para las constantes  $\theta_p$ ,

$g$ ,  $g_o$  y  $g'_o$ , para lo cual, según las relaciones (2.26), (2.27), (2.29) y (2.30) es

necesario encontrar los valores de los acoples  $g_{\rho\pi\gamma}$ ,  $g_{w\pi\gamma}$ ,  $g_{\rho\eta\gamma}$ , y  $g_{\eta'\rho\gamma}$ .

El procedimiento para encontrar los valores  $g_{\rho\pi\gamma}$ ,  $g_{\omega\pi\gamma}$ ,  $g_{\rho\eta\gamma}$ , y  $g_{\eta'\rho\gamma}$  será el mismo (mesón vectorial – mesón pseudoescalar – fotón), excepto para  $g_{\eta'\rho\gamma}$  donde simplemente debemos tener en cuenta que la partícula incidente es un escalar, y por tanto no se promedia sobre estados iniciales.

Comencemos estudiando el proceso  $\rho \rightarrow \pi\gamma$ .

### 2.2.2 Decaimiento $\rho \rightarrow \pi\gamma$ .

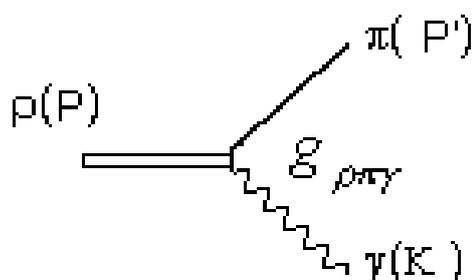


Figura 2.2. Diagrama de Feynman para el decaimiento de  $\rho \rightarrow \pi\gamma$

El lagrangiano que describe el proceso en cuestión es:

$$\mathcal{L} = g_{\rho\pi\gamma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (\partial^\mu \rho^\nu \partial^\rho A^\sigma) \pi \quad (2.48)$$

Y la expresión para la amplitud invariante viene dada por:

$$m = g_{\rho\pi\gamma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^\mu \varepsilon^\nu K^\rho \varepsilon^{*\sigma} \quad (2.49)$$

Con lo que se obtiene:

$$|\overline{m}|^2 = \frac{g_{\rho\pi\gamma}^2}{3} \sum_{put} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} P^u \varepsilon^\nu \kappa^\rho \varepsilon^{*\sigma} \varepsilon_{\alpha\beta\theta\delta} P^\alpha \varepsilon^\beta \kappa^\theta \varepsilon^{*\delta} \quad (2.50)$$

Simplificando (2.50) se tiene:

$$|\overline{m}|^2 = \frac{2g_{\rho\pi\gamma}^2 m_p^2 |\overline{P}|^2}{3} \quad (2.51)$$

Utilizando (2.40) obtenemos la rata de decaimiento para el proceso de  $\rho \rightarrow \pi\gamma$ :

$$\Gamma(\rho \rightarrow \pi\gamma) = \frac{g_{\rho\pi\gamma}^2 |\overline{P}_\rho|^3}{12\pi} \quad (2.52)$$

Usando el procedimiento anterior encontramos las ratas de decaimiento para los procesos  $(\omega \rightarrow \pi\gamma)$ ,  $(\rho \rightarrow \eta\gamma)$ , y  $(\eta' \rightarrow \rho\gamma)$ . Las expresiones para las respectivas ratas de decaimientos están dadas por:

$$\Gamma(\omega \rightarrow \pi\gamma) = \frac{g_{\omega\pi\gamma}^2 |\overline{P}_\omega|^2}{12\pi} \quad (2.53)$$

$$\Gamma(\rho \rightarrow \eta\gamma) = \frac{g_{\rho\eta\gamma}^2 |\overline{P}_\rho|^2}{12\pi} \quad (2.54)$$

$$\Gamma(\eta' \rightarrow \rho\gamma) = \frac{g_{\eta'\rho\gamma}^2 |P_{\eta'}|^2}{4\pi} \quad (2.55)$$

Despejando  $g_{\rho\pi\gamma}$ ,  $g_{\omega\pi\gamma}$ ,  $g_{\rho\eta\gamma}$  y  $g_{\eta'\rho\gamma}$  de (2.52), (2.53), (2.54), y (2.55)

obtenemos:

$$g_{\rho\pi\gamma} = \sqrt{\frac{12\pi\Gamma(\rho \rightarrow \pi\gamma)}{|\bar{k}|^3}} \quad (2.56)$$

$$g_{\omega\pi\gamma} = \sqrt{\frac{12\pi\Gamma(\omega \rightarrow \pi\gamma)}{|\bar{k}|^3}} \quad (2.57)$$

$$g_{\rho\eta\gamma} = \sqrt{\frac{12\pi\Gamma(\rho \rightarrow \eta\gamma)}{|\bar{k}|^3}} \quad (2.58)$$

$$g_{\eta'\rho\gamma} = \sqrt{\frac{4\pi\Gamma(\eta' \rightarrow \rho\gamma)}{|\bar{k}|^3}} \quad (2.59)$$

A partir de los valores experimentales <sup>[18]</sup>, se obtiene los siguientes valores para

los acoplos  $g_{\rho\pi\gamma}$ ,  $g_{\omega\pi\gamma}$ ,  $g_{\rho\eta\gamma}$ , y  $g_{\eta'\rho\gamma}$ :

$$g_{\rho\pi\gamma} = (0,22 \pm 0,01) \times 10^{-3} \text{Mev}^{-1}$$

$$g_{\omega\pi\gamma} = (0,7 \pm 0,03) \times 10^{-3} \text{Mev}^{-1}$$

$$g_{\rho\eta\gamma} = (0,45 \pm 0,08) \times 10^{-3} \text{Mev}^{-1}$$

$$g_{\eta'\rho\gamma} = (0,39 \pm 0,02) \times 10^{-3} \text{Mev}^{-1}$$

Con los valores anteriores y usando las relaciones (2.28), (2.29), (2.31) y (2.32) obtenemos:

$$g = g_{\rho\pi\gamma} = (0,22 \pm 0.01) \times 10^{-3} \text{Mev}^{-1} \qquad g_0 = (0,73 \pm 0.05) \times 10^{-3} \text{Mev}^{-1}$$

$$g'_0 = (0,56 \pm 0.02) \times 10^{-3} \text{Mev}^{-1} \qquad \theta_p = (9.11 \pm 2.0)^0$$

Estos valores más los valores ya encontrados para las constantes  $\gamma_y$ ,  $\theta_v$ , y  $\gamma_\rho$ , nos brindan la capacidad de encontrar los valores para los acoplos  $g_{\pi\gamma\gamma}$ ,  $g_{\eta\gamma\gamma}$ ,  $g_{\eta'\gamma\gamma}$ .

A continuación vamos a encontrar, a partir de las reglas de Feynman y de los datos experimentales <sup>[18]</sup> los acoplos:  $g_{\pi\gamma\gamma}$ ,  $g_{\eta\gamma\gamma}$ ,  $g_{\eta'\gamma\gamma}$ , con el fin de ser comparados con nuestros resultados. Comenzamos por buscar la rata de decaimiento de  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ .

### 2.2.3 Decaimiento de $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ .

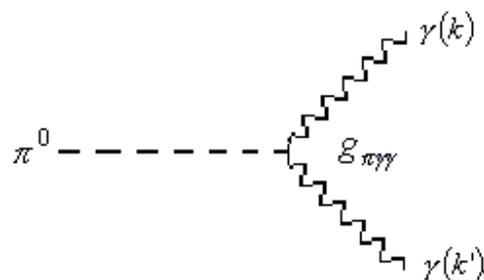


Fig 2.3. Diagrama de Feynman para el decaimiento  $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$

El lagrangiano de interacción para dicho proceso esta dado por:

$$\mathcal{L} = g_{\pi\gamma\gamma} \pi \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\mu A^\nu \partial^\rho A^\sigma \quad (2.60)$$

De donde la amplitud invariante viene dada por:

$$m = g_{\pi\gamma\gamma} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} k'^\mu k^\nu \varepsilon^{\sigma*} \varepsilon'^{\mu\nu} \quad (2.61)$$

Con lo que se obtiene:

$$| \overline{m} |^2 = |g_{\pi\gamma\gamma}|^2 [2(k \cdot k')]^2 \quad (2.62)$$

Debido a la conservación del momentum, se puede demostrar:

$$m_p^2 = 2k \cdot k' \quad (2.63)$$

Con lo anterior tenemos que:

$$| \overline{m} |^2 = \frac{|g_{\pi\gamma\gamma}|^2}{2} m_\pi^4 \quad (2.64)$$

Remplazando (2.64) en (2.40) obtenemos:

$$\Gamma(\pi \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{|g_{\pi\gamma\gamma}|^2 |\vec{k}|}{32\pi} m_\pi^2 \quad (2.65)$$

Dónde se ha integrado sobre el ángulo sólido  $2\pi$ , por tratarse de partículas idénticas.

Considerando el sistema en reposo del pión se tiene:

$$m_\pi = 2|\vec{k}| \text{ de donde:}$$

$$\Gamma(\pi \rightarrow \gamma\gamma) = \frac{|g_{\pi\gamma\gamma}|^2}{64\pi} m_\pi^3 \quad (2.66)$$

Despejando  $g_{\pi\gamma\gamma}$  de (2.66) se obtiene:

$$g_{\pi\gamma\gamma} = \sqrt{\frac{64\pi\Gamma(\pi \rightarrow \gamma\gamma)}{m_\pi^3}} \quad (2.67)$$

De igual forma los acoples para los procesos de  $\eta \rightarrow \gamma\gamma$ ,  $\eta' \rightarrow \gamma\gamma$ , los cuales vendrán dados por:

$$g_{\eta\gamma\gamma} = \sqrt{\frac{64\pi\Gamma(\eta \rightarrow \gamma\gamma)}{m_\eta^3}} \quad (2.68)$$

$$g_{\eta'\gamma\gamma} = \sqrt{\frac{64\pi\Gamma(\eta' \rightarrow \gamma\gamma)}{m_{\eta'}^3}} \quad (2.69)$$

A partir de (2.67), (2.68) y (2.69) se encuentran los valores “experimentales” para los acoplos en cuestión.

Los resultados encontrados teóricamente de:  $g_{\pi\gamma\gamma}$ ,  $g_{\eta\gamma\gamma}$ ,  $g_{\eta'\gamma\gamma}$ , sus correspondientes valores experimentales <sup>[18]</sup>, y los errores obtenidos al compararlos, se relacionan en la siguiente tabla.

Acople	Valor teórico ( $10^{-4} \text{ Mev}^{-1}$ )	Valor experimental ( $10^{-4} \text{ Mev}^{-1}$ )	% error
$g_{\pi\gamma\gamma}$	(0.245±0.01)	(0.251±0.01)	2.4%
$g_{\eta\gamma\gamma}$	(0.22±0.05)	(0.237±0.02)	7.2%
$g_{\eta'\gamma\gamma}$	(0.319±0.07)	(0.313±0.02)	1.9%

Una de las fuentes de error, para la discrepancia entre los valores experimentales y los obtenidos teóricamente, es el hecho que la simetría SU(3) (SU(2)), no es exacta.

En el próximo capítulo se abordará el problema del decaimiento  $\pi \rightarrow \gamma\gamma$  con método aproximado diferente y trataremos de establecer las ventajas que el nuevo método otorgue con respecto al ya estudiado.

### 3. LAGRANGIANOS QUIRALES

Los cálculos desarrollados hasta el momento, se realizaron a partir de considerar la simetría  $SU(3)$  de espín unitario, como una simetría exacta, es decir, se considero a las masas de los quarks  $u, d, s$  como iguales. La razón de esta aproximación, radica en que la diferencia entre las masas de los quarks en mención, es insignificante en comparación a la escala de confinamiento de la Q.C.D . Por este mismo planteamiento el límite de simetría se puede extender a  $U(1)_V \times SU(2)_V \times SU(2)_A \times U(1)_A$ , al considerar las masas de los quarks  $u, d$  iguales a cero, o en menor aproximación haciendo  $m_u = m_d = m_s = 0$  se obtiene la simetría  $U(1)_V \times SU(3)_V \times SU(3)_A \times U(1)_A$ <sup>[16]</sup> (la simetría  $U(1)_V$  da lugar a la conservación del número barionico mientras que  $U(1)_A$  hace referencia a anomalías<sup>[5]</sup> que no se tendrán en cuenta en el presente trabajo). Al considerar la simetría axial<sup>[3]</sup> como una simetría manifiesta, es de esperar la existencia de multipletes idénticos a los presentes en  $SU(3)_V$ , excepto por tener paridad opuesta. Lo anterior no se presenta en el espectro físico y tal paradoja se responde al observar que el vacío no es invariante bajo transformaciones de tipo quiral, por lo tanto, se dice que la simetría se encuentra espontáneamente rota, y la existencia de un octete de bosones livianos, según el teorema de Goldstone<sup>[17]</sup>, es consecuencia del rompimiento de simetría quiral  $SU(3)_V \times SU(3)_A$ . De igual forma la aparición en el espectro de un triplete de piones livianos, es consecuencia del rompimiento espontáneo de  $SU(2)_V \times SU(2)_A \rightarrow SU(2)_V$ .

Se espera que lo mencionado anteriormente sea mas claro, a partir de definir simetría manifiesta, rompimiento espontáneo de simetría y de la demostración del teorema de Goldstone, lo cual se realizara en el presente capitulo. Además en este capitulo obtendremos el valor del acople  $g_{\pi\gamma}$  utilizando para ello el modelo  $\sigma$  lineal <sup>[4]</sup> y el rompimiento espontáneo de la simetría global  $SU(2)_V \times SU(2)_A$  <sup>[4]</sup>.

### 3.1 SIMETRIA MANIFIESTA Y ROMPIMIENTO ESPONTANEO DE LA SIMETRIA

Vamos a definir simetría manifiesta y rompimiento espontáneo de simetría, a partir de los siguientes argumentos:

Sea  $U$  un elemento de un grupo de simetría que deja H invariante, es decir:

$$[U, H_0] = 0 \text{ de donde } \frac{dU}{dt} = 0$$

Además  $U$  representa una transformación que deja el Hamiltoniano invariante:

$$U^\dagger H_0 U = H_0$$

Sabemos que  $U$  conecta estados que forman una representación irreducible del grupo, es decir:  $U|A\rangle = |B\rangle$ .

sea:

$$\langle A|H_0|A\rangle = E_A \text{ y } \langle B|H_0|B\rangle = E_B$$

Entonces  $E_A = E_B$  ya que:

$$\langle A|H_0|A\rangle = \langle A|U^+ H_0 U |A\rangle = \langle B|H_0|B\rangle$$

Por tanto la simetría del hamiltoniano se manifiesta en la degeneración de los autoestados de energía, correspondientes a las representaciones irreducibles del grupo.

Por otro lado ya que  $|A\rangle$  y  $|B\rangle$  se deben relacionar al estado base  $|0\rangle$  a través de algún operador de creación, entonces:

$$|A\rangle = \phi_A |0\rangle \text{ Y } |B\rangle = \phi_B |0\rangle$$

Además se tiene:

$$U^+ \phi_B U = \phi_B \text{ y como } U|A\rangle = |B\rangle \text{ se tiene:}$$

$$|B\rangle = U \phi_A |0\rangle = \phi_B |0\rangle = U \phi_A U^+ U |0\rangle$$

Por lo anterior para que:  $\phi_B = U \phi_A U^\dagger$ , debe de cumplirse que  $U |0\rangle = |0\rangle$

Lo anterior manifiesta que por cada estado  $|A\rangle$  y un generador conservado  $U$ , existe otro estado  $U|A\rangle$  con la misma energía o masa que  $|A\rangle$ . Si tuviéramos un álgebra de cargas, esto implicaría un multiplete de partículas de igual masa, generadas por la aplicación continua de todos los generadores de carga.

Este tipo de realización de la simetría se denomina **simetría manifiesta** <sup>[4]</sup> y tiene consecuencias directas en el espectro físico, forzándolo a segregarse en multipletes de igual masa. Se piensa que a este tipo de simetrías pertenecen las simetrías  $SU(2)_v$  ( $m_u=m_d$ ) y  $SU(3)_v$  ( $m_u=m_d=m_s$ ) obteniéndose para  $SU(2)_v$  representación en tripletes ( $\pi^+$ ,  $\pi^-$ ,  $\pi^0$ ), dobletes ( $K^+$ ,  $K^0$ ) o (p,n) etc. mientras que para  $SU(3)$  tenemos representaciones irreducibles en octetes, decupletes y singletes.

Ahora es claro que la presencia de una simetría quiral manifiesta en la naturaleza, obligaría al espectro físico a segregarse en multipletes de igual masa a los presentes en  $SU(3)$  pero de paridad opuesta (ya que las cargas axiales son impares bajo transformaciones de paridad), y se debería tener un octete de mesones con paridad +, un octete de bariones con paridad - etc. Sin embargo la simetría quiral no se presenta en forma manifiesta, es decir, los generadores del

grupo de simetría axial no dejan el vacío invariante y por tanto no hay razón para esperar un desdoblamiento en el espectro de partículas.

Cuando un grupo de transformaciones de simetría no dejan el vacío invariante, es decir  $U|0\rangle \neq |0\rangle$ , entonces se dice que la simetría se encuentra espontáneamente rota <sup>[4]</sup>.

### 3.2 TEOREMA DE GOLDSTONE

El teorema de Goldstone establece que el rompimiento espontáneo de una simetría continua, implica la existencia de partículas no masivas de espín cero <sup>[4]</sup>.

Demostración :

$$\text{Sea: } U(\varepsilon)|0\rangle \neq |0\rangle; \tag{3.0}$$

Donde  $U(\varepsilon) = e^{i\varepsilon_j Q_j}$  y  $Q_j$  hacen referencia a los generadores del grupo  $U(\varepsilon)$ .

Infinitesimalmente:

$$U(\varepsilon)|0\rangle = (1 + i\varepsilon_j Q_j)|0\rangle \tag{3.1}$$

$$U(\varepsilon)|0\rangle = |0\rangle + i\varepsilon_j Q_j|0\rangle \tag{3.2}$$

Si,  $U(\varepsilon)|0\rangle \neq |0\rangle$ , entonces existe al menos un  $j$  para el cual:

$$Q_j|0\rangle \neq |0\rangle \quad (3.3)$$

Por el teorema de Noether  $\frac{d\hat{Q}_j}{dt} = 0$  La ecuación (3.3) implica que existe al menos un estado para el cual:

$$\langle m|Q_j|0\rangle \neq |0\rangle \quad (3.4)$$

y además:

$$\langle m|\frac{dQ_j}{dt}|0\rangle = 0 \quad (3.5)$$

Ahora, utilizando operadores de traslación se tiene:

$$Q_j(x) = e^{i \hat{p} \cdot \hat{x}} Q(0) e^{-i \hat{p} \cdot \hat{x}} \quad (3.6)$$

Derivando la expresión (3.6) podemos establecer:

$$\frac{dQ_j}{dt} = i \left[ \hat{E}, Q_j(x) \right] \quad (3.7)$$

La conservación de la corriente así mismo implica:

$$\int d^3x [\partial^\mu J_\mu, \phi(0)] = 0 \quad (3.8)$$

lo cual se puede tomar como:

$$\partial^0 \int d^3x [J^0, \phi(0)] + \int d^3x [\vec{J}, \phi(0)] = 0 \quad (3.9)$$

Al mandar la superficie de integración al infinito, el segundo término de (3.9) se anula y por tanto tenemos:

$$\partial^0 \int d^3x [J^0, \phi(0)] = \frac{d}{dt} [Q(t), \phi(0)] = 0 \quad (3.10)$$

De (2.10) se puede establecer:

$$\langle 0 | [Q(t), \phi(0)] | 0 \rangle = \eta \neq 0 \quad (3.11)$$

La ecuación (3.11) asevera que la simetría se encuentra espontáneamente rota.

Insertando un conjunto completo de estados intermedios y utilizando operadores de traslación podemos establecer a partir de (3.10) y (3.11) el siguiente resultado:

$$\sum_n (2\pi)^3 \delta^3(\vec{p}_n) \{ \langle 0 | J_0(0) | n \rangle \langle n | \phi(0) | 0 \rangle e^{-iE_n t} - \langle 0 | \phi(0) | n \rangle \langle n | J_0(0) | 0 \rangle e^{iE_n t} \} = \eta \quad (3.12)$$

Donde  $\eta$  es diferente de cero e independiente de  $t$ . Como las partes de frecuencia negativa y positiva no se anulan mutuamente (son linealmente independientes), la anterior identidad solo es posible cumplirla si existe un estado intermedio para el cual  $E_n=0$  para  $\vec{P}_n = 0$ . Es decir un bosón sin masa (bosón de Goldstone) con la propiedad  $\langle n | \phi(0) | 0 \rangle \neq 0$  y  $\langle 0 | J_0(0) | n \rangle \neq 0$ . Por tanto este estado puede ser conectado al vacío por la corriente  $J_0$  o por el operador  $\phi(0)$ .

De lo anterior se concluye, que en el rompimiento  $SU(3)_V \times SU(3)_A \rightarrow SU(3)_V$  el teorema de Goldstone implica que deben existir 8 mesones pseudoescalares no masivos asociados con las cargas axiales rotas  $Q^{5a}$  ( $a = 1, 2, 3, \dots$ ). Claramente este tipo de partículas no existen en la naturaleza, pero si conocemos 8 mesones relativamente livianos  $\pi, k, \eta$ . Entonces la simetría de sabor  $SU(3)_V \times SU(3)_A$  debe estar explícitamente rota y las masas del octete  $O^-$  refleja el rompimiento de la

simetría quiral. Lo mismo se puede decir del rompimiento de  $SU(2)_V \times SU(2)_A$  y el triplete de piones.

### 3.3 MODELO SIGMA LINEAL

El modelo  $\sigma$  lineal <sup>[4]</sup> se presenta como una aplicación al teorema de Goldstone (Schwinger 1958; Polkinghorne 1958; Gell-mann y Levy 1960), en esta teoría se considera el isotriplete de piones, un campo isoescalar  $\sigma$  y un isodoublete de nucleones  $N=(p,n)$ .

El lagrangiano esta dada por:

$$\ell = \frac{1}{2} \left[ (\partial^\mu \sigma)^2 + (\partial^\mu \vec{\pi})^2 \right] + \bar{N} i \gamma^\mu \partial_\mu N + g \bar{N} (\sigma + i \tau \cdot \pi \gamma_5) N - V(\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (3.13)$$

$$\text{Donde: } V(\sigma^2 + \pi^2)^2 = \frac{-u^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (3.14)$$

El lagrangiano (3.13) es invariante bajo transformaciones de simetría  $SU(2)$ , tal que:

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma \quad (3.15)$$

$$\pi \rightarrow \pi'' = \pi + \alpha \times \pi \quad (3.16)$$

$$N \rightarrow N' = N - i\alpha \cdot \frac{\tau}{2} N \quad (3.17)$$

Para  $\alpha_i \ll 1$  la corriente conservada esta dada por:

$$J_u^a = \bar{N} \gamma^u \frac{\tau^a}{2} N + \varepsilon^{abc} \pi^a \partial_u \pi^c \quad (3.18)$$

Los generadores de la simetría SU(2) serán:

$$Q^a = \int J_0^a(x) d^3 X \quad (3.19)$$

El lagrangiano (2.13) también presenta invariancia bajo el grupo de transformación axial SU(2)<sub>A</sub>:

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma + \beta \cdot \pi \quad (3.20)$$

$$\pi \rightarrow \pi' = \pi - \beta \sigma \quad (3.21)$$

$$N \rightarrow N' = N + i\beta \cdot \frac{\tau}{2} \gamma^5 N \quad (3.22)$$

La corriente axial vendrá dada por la expresión:

$$A_u^a = \bar{N} \gamma_u \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} N + (\partial_u \sigma) \pi^a - (\partial_u \pi^a) \sigma \quad (3.23)$$

Y los generadores del grupo  $SU(2)_A$  vendrán dados por:

$$Q^{5a} = \int A_0^a(x) d^3 X \quad (3.24)$$

Para el caso en que  $\mu^2 > 0$ , se tiene que el mínimo de potencial se encuentra en:

$$(\sigma^2 + \pi^2) = v^2 \quad (3.25)$$

$$\text{Dónde : } v = \left( \frac{u^2}{\lambda} \right)^{1/2} \quad (3.26)$$

Lo anterior nos indica que el vacío es degenerado. Ahora nosotros vamos a romper la simetría al escoger un vacío, tal que:

$$\langle 0 | \boldsymbol{\pi} | 0 \rangle = 0 \quad (3.27)$$

$$\langle 0 | \boldsymbol{\sigma} | 0 \rangle = v \quad (3.28)$$

Definiendo una nueva variable  $\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma - v$  y al remplazarla en (3.14) es fácil observar que la partícula  $\sigma'$  adquiere masa de valor  $\sqrt{2}\mu$ , mientras que los estados pionicos pasan a representar partículas de masa cero, es decir, bosones de Goldstone.

Por otro lado se puede demostrar la relación de conmutación:

$$[Q^{5a}, \pi^b] = i\sigma \delta^{ab} \quad (3.29)$$

De (3.29) podemos afirmar que las cargas axiales no dejan invariante el vacío, es decir, son generadores rotos. En efecto :

$$\langle 0 | A_u^a | \pi^a \rangle \neq 0 \quad (3.30)$$

De la definición de  $\sigma'$  se puede también establecer:

$$g\bar{N}(\sigma + i\tau\pi\gamma_5)N \rightarrow gv\bar{N}N + g\bar{N}(\sigma' + i\tau\pi\gamma_5)N \quad (3.31)$$

Es claro de (3.31) que a partir del rompimiento espontaneo de simetría, los nucleones adquieren masa cuyo valor es  $gv$ .

En resumen, partiendo de un lagrangiano con simetría  $SU(2)_V \times SU(2)_A$ ; a través de escoger un vacío, se ha roto la simetría, y el lagrangiano resultante después de algunos reemplazos ha dejado de ser invariante bajo el grupo de simetría  $SU(2)_A \times SU(2)_V$  presentándose bosones de Goldstone (tripleto de piones) como consecuencia del rompimiento.

### 3.4 CALCULO DEL PROCESO DE $\pi \rightarrow \gamma\gamma$ USANDO EL MODELO $\sigma$ .

En el anterior paragrafo se ha explicado el modelo  $\sigma$ . Ahora vamos a obtener el acople  $g_{\pi\gamma\gamma}$  a través del modelo  $\sigma$  lineal y el rompimiento espontáneo de la simetría  $SU(2)_A \times SU(2)_V$ .

El lagrangiano para el decaimiento en cuestión vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \ell = \overline{\psi} \left[ i\partial + g(\sigma + i\vec{\pi} \cdot \vec{\tau} \gamma^5) \right] \psi + \frac{1}{2} \left[ (\partial_u \vec{\pi})(\partial^u \vec{\pi}) + (\partial_u \sigma)(\partial^u \sigma) \right] - \frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2) \\ - \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \vec{\pi}^2)^2 + c\sigma \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dónde:

$$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \quad (3.33)$$

$$\vec{\pi} \cdot \vec{\tau} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2}\pi^+ \\ \sqrt{2}\pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix} \quad (3.34)$$

Siendo:

$$\pi^+ = \frac{\pi_1 - i\pi_2}{\sqrt{2}} \quad (3.35)$$

$$\pi^0 = \pi_3$$

$$\psi = \begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{protón} \\ \text{neutrón} \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

En el cálculo siguiente no vamos a considerar la partícula  $\sigma$ . Esta partícula  $\sigma$  no ha sido observada experimentalmente, lo cual se explica por el hecho de encontrarse en un rango de energía muy elevado (al ser muy masiva).

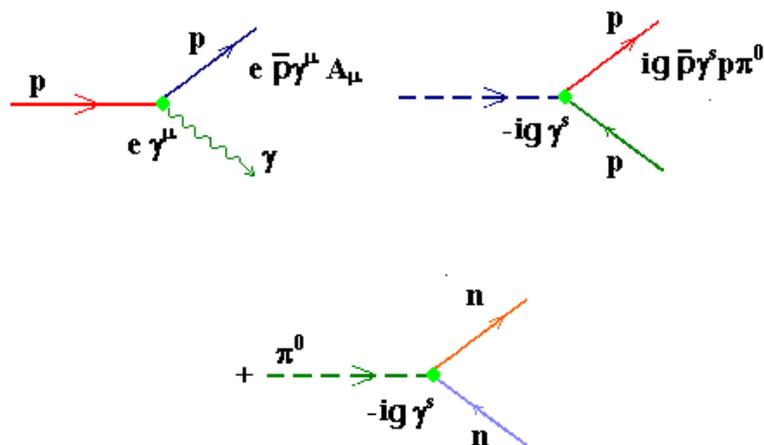
Con las anteriores consideraciones el lagrangiano (3.32) se puede escribir como:

$$\ell = \bar{p} i \not{\partial} p + \bar{n} i \not{\partial} n + i g (\bar{p} \gamma^5 p \pi^0 + \sqrt{2} \bar{p} \gamma^5 n \pi^+ + \sqrt{2} \bar{n} \gamma^5 p \pi^- - \bar{n} \gamma^5 n \pi^0) \quad (3.37)$$

Al introducir la interacción electromagnética  $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$  y considerando solo el término  $\pi^0$  (el cual es el único término que tiene relevancia en nuestro cálculo) se tiene:

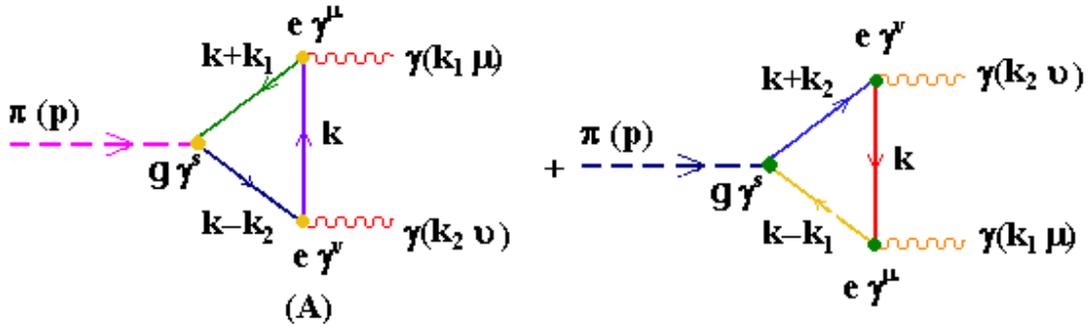
$$\mathcal{L} = \bar{p} i \not{\partial} p - e \bar{p} \gamma^\mu p A_\mu + \bar{n} i \not{\partial} n + ig (\bar{p} \gamma^5 p - \bar{n} \gamma^5 n) \pi^0 \quad (3.38)$$

Del lagrangiano anterior se observan los siguientes procesos posibles:



Con lo anterior podemos construir los diagramas para los 2 posibles procesos de

$\pi \rightarrow \gamma\gamma$ , a nivel de un loop:



Es fácil comprobar que los dos diagramas son equivalentes, y el lagrangiano que representa el proceso  $\pi \rightarrow \gamma\gamma$  según las reglas de Feynman <sup>[9]</sup> será:

$$\ell(p) = 2g e^2 \varepsilon_1^\nu \varepsilon_2^\mu \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left[ \frac{\gamma^5 \left[ (\not{k} + \not{k}_1) + m \right] \gamma_\mu \left[ \not{k} + m \right] \gamma_\nu \left[ (\not{k} + \not{k}_2) + m \right]}{\left[ (k+k_1)^2 - m^2 \right] \left[ k^2 - m^2 \right] \left[ (k-k_2)^2 - m^2 \right]} \right] \quad (3.39)$$

Utilizando propiedades de traza de las matrices  $\gamma$ , y teniendo en cuenta los términos  $i\epsilon$  incluidos en el propagador, se tiene:

$$\ell(p) = \frac{8ie^2m}{(2\pi)^4} g \varepsilon_{\mu\nu\sigma\rho} k^\sigma k^\rho \varepsilon_1^\nu \varepsilon_2^\mu \int \frac{d^4k}{\left[ (\kappa + \kappa_1)^2 - m^2 - i\epsilon \right] \left[ \kappa^2 - m^2 - i\epsilon \right] \left[ (\kappa - \kappa_2)^2 - m^2 - i\epsilon \right]} \quad (3.40)$$

Se puede observar que el problema de nuestro cálculo radica en evaluar la integral:

$$\int \frac{d^4k}{\left[ (\kappa + \kappa_1)^2 - m^2 - i\epsilon \right] \left[ \kappa^2 - m^2 - i\epsilon \right] \left[ (\kappa - \kappa_2)^2 - m^2 - i\epsilon \right]} \quad (3.41)$$

La resolución de la integral (3.41) es compleja, sin embargo Feynman ya estableció un método para resolverla, el cual utilizaremos en nuestro cálculo <sup>[10]</sup>:

Primero consideremos la integral:

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x dy}{[A(1-x) + Bxy + cx(1-y)]^3} \quad (3.42)$$

Definiendo:

$$A = (k + k_1)^2 - m_N^2 - i \in \quad (3.43)$$

$$B = k^2 - m_N^2 - i \in \quad (3.44)$$

$$C = (k - k_2)^2 - m_N^2 - i \in \quad (3.45)$$

Usando las definiciones anteriores e integrando la expresión (3.41) en  $d^4k$ , se tiene:

$$\int \frac{d^4k}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 x dy \int \frac{d^4k}{[P^2 - ([\kappa_1(1-x) - \kappa_2x(1-y)]^2 + m^2) - i \in]^3} \quad (3.46)$$

Una segunda consideración realizada por Feynman, surge de la integral:

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-i(k^2 + \wedge)x} dx = \frac{-2i}{(k^2 - \wedge - i\epsilon)^3} \quad (3.47)$$

Si integramos en  $d^4k$  (3.47) es fácil demostrar el resultado:

$$\int \frac{-2i d^4k}{(k^2 - \wedge - i\epsilon)^3} = \frac{i\pi^2}{2(\wedge - i\epsilon)} \quad (3.48)$$

A partir del resultado (3.48) la integral (3.46) adquiere la forma:

$$\int \frac{d^4k}{ABC} = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{i\pi^2}{2 \left[ \left( [\kappa_1(1-x) - \kappa_2 x(1-y)]^2 + m^2 \right) - i\epsilon \right]} \quad (3.49)$$

Desarrollando los términos al cuadrado y despreciando el término  $i\epsilon$  se tiene:

$$\int \frac{d^4k}{ABC} = i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x dy}{2\kappa_1 \kappa_2 x(1-x)(1-y) + m^2} \quad (3.50)$$

Dónde se ha tenido en cuenta que  $k_1^2 = k_2^2 = 0$

Por otro lado, la conservación del momentum  $\vec{P} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$ , nos dice, que en el sistema en reposo de  $\pi^0$ , se cumple que  $P^2 = m_\pi^2 = 2k_1 k_2$ , y ya que  $m \gg m_\pi^2$ , (donde  $m$  representa la masa del nucleón), entonces:

$$m \gg 2k_1 k_2 x(1-x)(1-y) \quad (3.51)$$

Por lo anterior en (3.50), podemos realizar la siguiente aproximación:

$$\int \frac{d^4 k}{ABC} \approx i\pi^2 \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{x dy}{m^2} = \frac{-i\pi^2}{2m^2} \quad (3.52)$$

Ya hemos determinado un valor aproximado para la integral (3.41) con lo cual el lagrangiano (3.40) se puede escribir como:

$$\ell(p) = \frac{e^2}{(2\pi)^2 m} g \varepsilon_{uv\sigma\rho} k^\sigma k^\rho \varepsilon_1^\nu \varepsilon_2^\mu \quad (3.53)$$

Teniendo en cuenta que  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137}$  (constante de estructura fina) y que

$f_\pi = \frac{m}{g} \approx 93 \text{ Mev}^{[10]}$ , el acople para el proceso de  $\pi \rightarrow \gamma\gamma$  estará dado por:

$$g_{\pi\gamma\gamma} \equiv \alpha / \pi F_\pi = 0.25 \times 10^{-4} \text{ Mev}^{-1}$$

Al comparar este resultado con el valor experimenta <sup>[18]</sup>:

$$g_{\pi\gamma\gamma} = 0.251 \times 10^{-4} \text{ Mev}^{-1}$$

Se obtiene un error del 0.7%

Mediante el método de lagrangianos fenomenológicos el error obtenido para el mismo proceso fue de 2.58%, por tanto se puede afirmar que este método resulta una mejor aproximación para el proceso en cuestión.

#### 4. CONCLUSIONES

- Haciendo uso de la simetría SU(3) de espín unitario se obtuvo el valor de  $0.245 \pm 0.010 \times 10^{-4} \text{ Mev}^{-1}$  para  $g_{\pi\gamma\gamma}$ , de  $0.22 \pm 0.05 \times 10^{-4} \text{ Mev}^{-1}$  para  $g_{\eta\gamma\gamma}$  y de  $0.319 \pm 0.07 \times 10^{-4} \text{ Mev}^{-1}$  para  $g_{\eta'\gamma\gamma}$  con un porcentaje de error con respecto al valor experimental de 2.4% ,7.2% y de 1.9% respectivamente.
- El valor obtenido mediante el modelo  $\sigma$  lineal para el acople  $g_{\pi\gamma\gamma}$ , es de  $0.249 \times 10^{-4} \text{ Mev}^{-1}$  con un error, respecto al valor experimental del 0.7%.
- Al tomar el triplete de piones como bosones de Goldstone y al hacer uso del rompimiento de simetría quiral, se puede establecer predicciones muy satisfactorias en procesos de piones livianos, como se ha podido comprobar en el presente trabajo.
- Los errores encontrados al determinar los procesos de bosones pseudoescalares decayendo en dos fotones, a partir de la simetría SU(3)<sub>v</sub> de espín unitario, solo reflejan, el hecho de la discrepancia entre las masas de los quarks ( $m_u \neq m_d \neq m_s$ ).

- No se puede predecir que al hacer uso de la simetría SU(3) de espín unitario, los resultados obtenidos, tengan una mayor aproximación para los hadrones que contengan quarks u, d únicamente y menor para los hadrones compuestos de quarks s. Lo anterior se puede observar de nuestros resultados, y se explica por el hecho de que los acoples no fueron calculados directamente, sino a través de 7 constantes, que involucran hadrones con quarks s.
- Los resultados que se encuentran a partir de las relaciones entre acoples deducidas del lagrangiano (2.17); en gran parte están determinados por el método que se utilice al despejar las siete constantes del lagrangiano.
- Al comparar los dos métodos utilizados se establece que el método de lagrangianos quirales, es más efectivo que el método de lagrangianos fenomenológicos en la determinación del proceso  $\pi \rightarrow \gamma\gamma$ .
- Para la consecución de nuestros resultados, se trabajó a nivel de árbol, se espera resultados más aproximados, si los cálculos se realizan a nivel de un loop, dos loop, etc.
- Al considerar la masa de los Quark u, d iguales, las masas de las partícula  $\pi^0$  y  $\eta_8$  se desacoplan, lo cual genera otro factor de error en los cálculos; ya que al ser las masa de los quarks u y d diferentes, aparece un factor de mezcla entre las masas.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] ABERS Ernest S. And Benjamin W. Lee, Gauge Theories, North-Holland publishing company-Amsterdam, Los Angeles, Calif. 1973.
  
- [2] AITCHISON Ian J.R. and Anthony J.G. Hey. Gauge theories in particle physics. Adam Hilger LTD, Bristol. 1982
  
- [3] BALL R.D. Physics reports, volumen 182, North-Holland, Netherlands, 1989.
  
- [4] CHENG Ta-Pei and Ling-Fong Li. The quantum theory of fields. Gauge theory of elementary particle physics. Clarendon press. Oxford. New York, 1989.
  
- [5] CHRISTOS George A. Physics reports, volumen 116, North-Holland. Amsterdam , Netherlands, 1984.
  
- [6] FEYNMAN, R.P. Photon –Hadron interactions. Benjamin, Massachusetts, 1972.
  
- [7] GASIOROWICZ Stephen. Elementary particle physics. New York: John Wiley & Sons, 1967.

- [8] GREINER Walter and Müller Berndt. Quantum mechanics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.
  
- [9] HALZEN Francis and Alan D. Martin. Quarks & leptons. Jhon Wiley & Sons, New York. 1984.
  
- [10] ITZYKSON Claude, J. B. Zuber. Quantum field theory. Mc Graw Hill. 1980.
  
- [11] JACKIW R. Field Theoretic investigations in current algebra. Center for theoretical. 1970.
  
- [12] KRASIMIRA Kademova. Matematica avanzada para físicos e ingenieros. Tomo II. Colombia: Universidad Industrial de Santander, 1981. 941p
  
- [13] LICHYENBERG D.B. Unitary simmetry and elementary particles. Academic press, inc. 1970.
  
- [14] MARCIANO W. And H. Pagels. Physics reports, volumen 36c, North-Holland, Netherlands, 1978.
  
- [15] RYDER Lewis H. Elementary Particles and Symmetries. Gordon and Breack science publishers. New York, 1986.

- [16] ROWLATT Penelope A. Group theory and elementary particles. Logmans, Great Britain, 1966.
- [17] WEINBERG Steven. Cambridge university press. New York, 1996.
- [18] D.E. Groom et al. (particle Data Group). Eur. Phys Jour C15. 1 (2000)  
(URL.[Http://pdg.lbl.gov](http://pdg.lbl.gov))

