

ESTUDIO FENOMENOLÓGICO DE UN MODELO 331 INTERFAMILIA, SIN CARGAS
ELÉCTRICAS EXÓTICAS

ALEX MARCELO TAPIA CASANOVA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2005

ESTUDIO FENOMENOLÓGICO DE UN MODELO 331 INTERFAMILIA, SIN CARGAS
ELÉCTRICAS EXÓTICAS

ALEX MARCELO TAPIA CASANOVA

Trabajo presentado como requisito previo para
optar el título de Físico

JUAN BAUTISTA FLÓREZ, PhD.
Director

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2005

"Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva del autor".

Artículo primero del Acuerdo No. 324 de Octubre 11 de 1966, emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Noviembre de 2005.

A Mi Madre

A Mi Hermana

A Mi Padre, porque este era su sueño.

AGRADECIMIENTOS

Es mi deber agradecer a mi director el Doctor Juan Bautista Flórez, por su tiempo dedicado al desarrollo de este trabajo como también al aporte de conocimiento que se vera reflejado en mi profesión de Físico.

Agradezco al profesor Msc. Yithsbey Giraldo Úsuga, por su grata colaboración y su magnífica ayuda en la elaboración de este trabajo, al profesor Msc. Alfredo Pasaje por su amistad y por infestarme de conocimiento durante toda mi carrera.

También quiero agradecer a mis compañeros Richard Benavides por enseñarme como atacar la tan temida física , a Jaime Castro por los multiples momentos de nirvana que se experimenta al hablar de física, a los dos gracias por su valiosa amistad.

Y finalmente gracias a todos mis amigos del programa de Física que de una u otra manera me colaboraron en el transcurso de mi carrera.

AGRADECIMIENTOS PERSONALES

Quiero dar gracias a la vida por hacer que mis Padres se encontraran para permitirme conocer cuan grandiosa es la naturaleza y cuan complejas son las leyes que la rigen.

Gracias Martha Nelly Casanova, por ser una Madre ideal, por tus enseñanzas por tu inmenso amor y porque sin tu ardua lucha no hubiera podido conseguir la culminación de mi carrera, eres ejemplo de superación.

A Carmensa Tapia Casanova, mi amada hermana, gracias por tu apoyo incondicional, por confiar en mi y sobre todo gracias por enseñarme que la sencillez y la humildad es algo muy importante en el ser humano.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	18
1. MODELO ESTÁNDAR	21
1.1 INTRODUCCIÓN	21
1.2 SIMETRÍAS DEL MODELO ESTÁNDAR	21
1.3 EL CONTENIDO FERMIÓNICO	22
1.4 LA DERIVADA COVARIANTE	23
1.5 EL LAGRANGIANO INVARIANTE-GAUGE	24
1.6 EL SECTOR ESCALAR	25
1.7 EL ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LA SIMETRÍA	26
1.7.1 El vacío	26
1.7.2 El potencial escalar	26
1.7.3 El rompimiento espontáneo de la simetría	27
1.8 EL MECANISMO DE HIGGS	28
1.9 MASA PARA LOS BOSONES GAUGE	30
1.10 ACOPLES CON EL HIGGS	31
1.11 MASA PARA LOS FERMIONES	32
1.12 CORRIENTES	33
1.12.1 Corrientes cargadas	33
1.12.2 Corrientes neutras	33

1.13 MAS FAMILIAS FERMIONICAS	34
1.13.1 Modelo con dos familias fermiónicas	34
1.13.2 Modelo con tres familias	36
1.14 CROMODINÁMICA CUÁNTICA	37
1.15 EL LAGRANGIANO FINAL	38
1.16 RENORMALIZACIÓN Y CANCELACIÓN DE ANOMALÍAS	39
2. EL GRUPO $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$	41
2.1 INTRODUCCIÓN	41
2.2 MODELOS DE UNA FAMILIA	43
2.2.1 Modelo A	43
2.2.2 Modelo B	44
2.2.3 Otros modelos de una familia	45
2.3 MODELOS INTERFAMILIAS	45
2.3.1 Modelo C	45
2.3.2 Modelo D	46
2.3.3 Otros modelos	47
3. EL SECTOR ESCALAR Y EL SECTOR DE BOSONES GAUGE	50
3.1 INTRODUCCIÓN	50
3.2 EL SECTOR ESCALAR	50
3.2.1 El potencial escalar	51
3.3 EL SECTOR DE BOSONES GAUGE	51

3.3.1 Masa para los bosones gauge cargados	52
3.3.2 Masa para los bosones gauge neutros	52
4. FENOMENOLOGÍA DEL MODELO E	55
4.1 INTRODUCCIÓN	55
4.2 CONTENIDO FERMIÓNICO DEL MODELO	55
4.3 CORRIENTES	56
4.3.1 Corrientes cargada	57
4.3.2 Corrientes neutras	57
4.4 DETERMINACIÓN DE EN TÉRMINOS DE LOS	59
4.5 MASA PARA LOS FERMIONES	63
4.5.1 Masa para los quarks	63
4.5.2 Masa para los leptones	63
5. CONCLUSIONES	65
RECOMENDACIONES	66
BIBLIOGRAFÍA	67
ANEXOS	69

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Primera familia fermiónica	23
Tabla 2. Segunda familia fermiónica	34
Tabla 3. Tercera familia fermiónica	34
Tabla 4. Sector de quarks para el modelo A	44
Tabla 5. Sector de leptones para el modelo A	44
Tabla 6. Sector de quarks para el modelo B	44
Tabla 7. Sector de leptones para el modelo B	44
Tabla 8. Sector de leptones para el modelo C	46
Tabla 9. Dos de las generaciones del sector de quarks para el modelo C	46
Tabla 10. Tercera generación del sector de quarks para el modelo C	46
Tabla 11. Dos de las generaciones del sector de quarks para el modelo D	46
Tabla 12. Tercera generación del sector de quarks para el modelo D	47
Tabla 13. Sector de leptones para el modelo D	47
Tabla 14. Anomalías para S_i	47
Tabla 15. Grupo de partículas S_1	55
Tabla 16. Grupo de partículas S_2	55
Tabla 17. Grupo de partículas S_5	56
Tabla 18. Grupo de partículas $2S_4$	56
Tabla 19. Grupo de partículas S_3	56
Tabla 20. Acoples de $Z_1^\mu \rightarrow \bar{f}f$	61
Tabla 21. Acoples de $Z_2^\mu \rightarrow \bar{f}f$	62

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. El potencial $V(\phi^\dagger\phi)$ para (a) $\mu^2 > 0$ y (b) $\mu^2 < 0$, con $\lambda > 0$	27
Figura 2. El potencial $V(\phi)$ para un campo escalar complejo con $\mu^2 < 0$ y $\lambda > 0$	71

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo A. El teorema de Noether : simetrías y leyes de conservación	69
Anexo B. Rompimiento espontáneo de una simetría gauge global	70

RESUMEN

Se realiza el estudio fenomenológico de un modelo 331 interfamilia sin cargas eléctricas exótica. Dentro del estudio se encuentra el sector escalar que permite, de la manera más económica, el rompimiento espontaneo de la simetría gauge para que los bosones y fermiones presentes adquieran masa.

Por otro lado, las corrientes, tanto neutras como cargadas, para el contenido fermiónico son calculadas, así como también los acoples para los procesos $Z_1^\mu \rightarrow \bar{f}f$, $Z_2^\mu \rightarrow \bar{f}f$.

ABSTRACT

The study phenomenologic of an 331 interfamily model without exotic electric charge is realizing. In the study is finding the scalar sector that it let of way more economic, the opening spontaneous of the gauge symmetry for whom the bosons and fermions presents acquire mass.

In order to the currents both neutral and charged for the fermionic contents are calculates, as soon as the couplings for the process $Z_1^\mu \rightarrow \bar{f}f$, $Z_2^\mu \rightarrow \bar{f}f$.

INTRODUCCIÓN

En la actualidad existe una teoría que es bastante aceptada por la comunidad científica, dicha teoría es conocida como el Modelo Estándar (ME). El ME es una teoría que fue enunciada a finales de los años sesenta, esta es una teoría cuántica de campos gauge bien definida, que describe las partículas elementales y sus interacciones (electromagnética, fuerte y débil) a bajas energías.

La teoría del ME combina el grupo de norma $SU(3)_C$ de color en el cual se basa la teoría de las interacciones fuertes, también conocida como Cromodinámica Cuántica, con el grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ de las interacciones electrodébiles (el $SU(2)_L$ es el grupo de isospín débil y el $U(1)_Y$ es el grupo de hipercarga débil) en un producto directo $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ caracterizado por tres constantes de acoplamiento y doce campos gauge: ocho gluones, tres bosones intermediarios, y el fotón. La forma de las interacciones de las partículas elementales esta descrita por los acoplamientos de los bosones vectoriales, dichos bosones son los que median las interacciones con los campos de materia, los cuales son campos fermiónicos con un patrón concreto de números cuánticos bajo esta simetría gauge.

Como se puede ver, el ME cuenta con rasgos muy atractivos, pero a pesar de ello, pocos son los físicos que aceptan este modelo como la ultima teoría que describe tanto las partículas elementales como su interacciones. Esta resistencia no se debe a que el ME presente inconsistencias matemáticas o experimentales, si no mas bien al grado de arbitrariedad que presenta en ciertos aspectos y que dan lugar a una serie de problemas los cuales carecen de explicación.

La necesidad actual sería contar con un modelo que permita comprender o entender por que existen tantas diferencias como similitudes entre las partículas elementales y por que poseen esas propiedades; es decir lo que se pretende es buscar un modelo mas básico que permita explicar ciertos fenómenos que han sido observados y de los cuales no se ha podido decir nada.

Dentro de los fenómenos que el ME no provee ninguna explicación, se encuentran:

- ¿Cuántas familias de fermiones existen? Los fermiones son partículas que se acomodan en familias entre las cuales el ME no puede hacer distinción alguna (se distinguen entre si solamente por el espectro de masas). Aunque es bien sabido que existen severas restricciones experimentales para el numero de familias, el ME es incapaz de explicar la repetición de familias y restringir su numero (en el ME las

masas son puestas a mano).

- ¿Por qué la paridad se viola en las interacciones débiles pero no en las fuertes ni en las electromagnéticas y porque en las primeras la violación es máxima?
- ¿Por qué esa diferencia de masa tan enorme entre el quark b y el quark t?
- ¿Cómo restringir la gran cantidad de parámetros libres que existen en el modelo? En el ME existen 19 parámetros libres, 26 dependiendo de si consideramos los neutrinos masivos o no, esto trae como consecuencia que muchas magnitudes observadas tales como las masas de los fermiones, los ángulos de mezcla, las fases de violación de CP, entre otras, sean completamente arbitrarias.

La comunidad científica piensa que el ME es una teoría efectiva, en otras palabras, que el grupo de simetrías del ME está contenido en un grupo de simetrías mayor. En este orden de ideas se ha propuesto, por varios autores y en varias versiones, el grupo de simetrías gauge $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$. Este grupo es una manera de extender el grupo de simetrías gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ dentro del cual se encuentra el ME.

En el ME la Lagrangiana exhibe invarianzas bajo transformaciones gauge $SU(3)_C$ para las interacciones fuertes y bajo transformaciones gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ para las interacciones electrodébiles, en cambio la Lagrangiana para los modelos basados en el grupo gauge $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, se diferencia en que para las interacciones electrodébiles exhibe invarianza para transformaciones gauge $SU(3)_C \otimes U(1)_X$.

El interés del presente trabajo es estudiar la fenomenología de los modelos interfamilias, específicamente el Modelo E, el cual es un modelo nuevo en la literatura y por lo tanto los resultados obtenidos serán de gran ayuda para trabajos futuros.

Para tal fin, el trabajo en mención se ha dividido en cuatro capítulos:

El capítulo 1 estudia el ME asociado al grupo $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Se tratará los temas más sobresalientes del ME: el contenido fermiónico con sus respectivos números cuánticos asociados, la definición de la derivada covariante, el sector escalar, etc. Se verá específicamente como el sector escalar permite el rompimiento espontáneo de la simetría gauge para que los bosones y fermiones presentes adquieran masa, también se obtendrá el ángulo de Cabibbo y la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM), entre otras cosas.

El capítulo 2 estudiará algunas generalidades del grupo gauge local $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, como son: el generador de carga eléctrica, las clases de modelos que existen bajo este grupo y si dichos modelos son libres de anomalías.

El capítulo 3 estudia en detalle el sector escalar asociado a los modelos 331 (dentro de ellos el Modelo E) sin cargas eléctricas exóticas en su contenido fermiónico; así como también el sector de bosones gauge donde se puede mirar cuantos bosones vectoriales en el grupo gauge están bajo consideración y donde las masas de los bosones cargados y neutros son calculadas.

El capítulo 4 es dedicado exclusivamente al estudio fenomenológico del Modelo E. Se da a conocer de manera ordenada su contenido fermiónico, se calcula las corrientes para los fermiones, lo que conlleva a encontrar los acoples para los procesos $Z_1^\mu \rightarrow \bar{f}f$, $Z_2^\mu \rightarrow \bar{f}f$, y finalmente se muestra como los términos del contenido fermiónico adquieren masa con los Higgses usados en el rompimiento de la simetría gauge.

1. MODELO ESTÁNDAR

1.1 INTRODUCCIÓN

El Modelo Estándar es una teoría gauge que describe las interacciones fuerte y electrodébil en un rango de energía de unos cientos de GeV, o en términos de longitud, bajo distancias del orden de 10^{-16} cm . Una teoría gauge envuelve dos clases de partículas, las que tienen carga y las que median interacciones entre corrientes. En el primero de los casos son los fermiones fundamentales y los bosones gauge no abelianos, mientras que en el segundo consiste solamente de bosones gauge, abelianos y no abelianos. Debido a que los bosones gauge poseen carga y son mediadores, sufren interacciones entre ellos mismos.

Tres clases de cargas, llamadas color, isospin débil, e hipercarga débil, aparecen en el Modelo Estándar. Los valores de esas cargas no son predichas de la simetría gauge, estas son determinadas experimentalmente para cada partícula. Una simetría gauge, como la inmersa en el Modelo Estándar, no generalmente determina la masa de las partículas; tanto en esta teoría gauge como en otras, la masa tanto para los fermiones como para los bosones, es determinada por un proceso dinámico llamado el Mecanismo de Higgs.

1.2 SIMETRÍAS DEL MODELO ESTÁNDAR

La aplicación del concepto de simetría permite algunas de las técnicas más poderosas en física de partículas. Un ejemplo es el uso de simetrías gauge para generar el Lagrangiano del Modelo Estándar. Por tal motivo es importante hacer un listado de las simetrías que están presentes en el Modelo Estándar:

- **Simetrías Gauge:** Estas son las invarianzas gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, donde $SU(3)_C$ no es rota pero evidentemente confinada, mientras que $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ sufre rompimiento espontáneo de simetría, inducido por el campo de Higgs, llevando a una invarianza gauge no rota $U(1)_{em}$.
- **Simetrías Número Fermiónico:** Allí existen simetrías vectoriales globales que corresponden tanto al número leptónico como al de quarks. Estas son de la forma

$$\psi_\alpha \rightarrow e^{iQ_\alpha\theta}\psi_\alpha \quad (1)$$

para campos de una u otra quiralidad. El índice α se refiere al grupo de todos los leptones o al grupo de todos los quarks, y las cargas conservadas Q_α son justo el

número total de quarks menos los antiquarks y el número total de leptones menos los antileptones. Ahora, si los todos los neutrinos no tienen masa, habrá conservación de números, de manera separada, para cada doblete de leptones L_e , etc.

- Simetrías Vectoriales Globales de QCD (Quantum Chromodynamics): Debido a que los quarks u, d, s son lo suficientemente livianos comparados con la escala de confinamiento Λ_{QCD} , sus simetrías asociadas son útiles. La mejor de estas es la invarianza de Isospin, la cual consiste de la transformación de campos

$$L_u \rightarrow L'_u = \exp(-i\tau.\theta)L_u \quad (2)$$

La simetría de isospin es rota por la diferencia de masas de los quarks u y d, y por las interacciones electromagnética y débil, como se verá mas adelante.

- Simetrías Quirales Aproximadas a QCD: Las simetrías vectoriales son validas si las masas de los quarks son iguales. Si las masas desaparecieran, entonces adicionalmente aparecerían las llamadas simetrías quirales, ya que en este limite las componentes izquierdas y derechas de los campos son desacopladas.
- Simetrías Discretas: El Modelo Estándar es hermítico y un invariante de Lorentz local en la teoría cuántica de campos, este modelo es invariante bajo el grupo combinado de transformaciones CPT (conjugación de carga, paridad, inversión del tiempo). Tanto la QCD como la QED (Quantum Electrodynamics) conservan P, C, y T separadamente; la interacción débil es invariante bajo el producto CP. En contraste, la interacción electrodébil tiene máxima violación de P y C en el sector de la corriente cargada.

Es importante decir que donde está presente una simetría siempre hay una ley de conservación (ver Anexo A).

1.3 EL CONTENIDO FERMIÓNICO

El Modelo Estándar es el modelo más simple libre de anomalías que se encuentra bajo el grupo gauge local $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y^1$ contiene tres familias, de las cuales la primera familia está conformada por dos leptones (ν_e, e) y dos quarks (u, d) arreglados de la siguiente manera:

¹GIRALDO, Yithsbey. Tesis de Maestría; El Potencial Escalar en $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ como Extensión del Modelo Estándar. Universidad de Antioquia, 2002.

Tabla 1. Primera Familia Fermiónica.

$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	e_R	$L_u = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	u_R	d_R
$(1, 2, -1)$	$(1, 1, -2)$	$(3, 2, 1/3)$	$(3, 1, 4/3)$	$(3, 1, -2/3)$

los números entre paréntesis (denominados números cuánticos), indican cómo transforman los campos bajo el grupo gauge $SU(3)_C$ (grupo de interacción fuerte o de color), $SU(2)_L$ (grupo de isospín débil) y $U(1)_Y$ (grupo de hipercarga débil) respectivamente. Como se puede observar los campos están proyectados en dobletes izquierdos y singletes derechos lo cual tiene implicaciones al desarrollar el Lagrangiano². El operador de carga de las partículas en los multipletes es dado por la fórmula de Gell-Mann-Nishijima

$$Q = T_{3L} + \frac{Y}{2}, \quad (3)$$

donde Y es la hipercarga y T_{3L} es la proyección de isospin débil

$$T_{3L} = \frac{1}{2}\tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Siendo τ_3 una de las matrices de Pauli. Como primera medida se trabajara con la familia de fermiones anteriormente nombrada, posteriormente se incluirán las restantes dos familias.

1.4 LA DERIVADA COVARIANTE

La derivada covariante es la extensión de la derivada parcial ordinaria para hacer el Lagrangiano invariante bajo transformaciones gauge locales $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. El reemplazo es el siguiente:

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'}{2}B_\mu Y + \frac{ig}{2}\tau \cdot A_\mu, \quad \text{para dobletes de } SU(2)_L \quad (5)$$

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'}{2}B_\mu Y, \quad \text{para singletes} \quad (6)$$

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{ig_3}{2}\lambda^\alpha G_\mu^\alpha, \quad \text{para tripletes de color} \quad (7)$$

donde g es la constante de acoplamiento para $SU(2)_L$, g' está asociado con $U(1)_Y$ y g_3 con $SU(3)_C$. Los $\tau_i, i = 1, 2, 3$ son las matrices de Pauli y los $\lambda_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, 8$ son las

²No se ha incluido el singlete derecho del neutrino, por tal motivo en este modelo el neutrino no tiene masa.

ocho matrices de Gell-Mann.

Se ha introducido los bosones gauge

$$A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3, \text{ para } SU(2)_L; \quad B_\mu, \text{ para } U(1)_Y \text{ y } G_\mu^1, G_\mu^2, \dots, G_\mu^8, \text{ para } SU(3)_C. \quad (8)$$

Como se observa se tiene 12 bosones gauge en el Modelo Estándar. Los únicos bosones no masivos que de entrada tienen sentido físico son los gluones G_μ^α , asociados con la interacción fuerte. Los restantes bosones deben ser redefinidos para puedan ser asociados a partículas físicas masivas, tal como se hará mas adelante.

1.5 EL LAGRANGIANO INVARIANTE-GAUGE

Este lagrangiano se divide en la suma de tres partes, la gauge (G), la fermiónica (F) y la de los Higgs (H)³

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_H. \quad (9)$$

Los bosones gauge los cuales acoplan a $SU(2)_L$ y a $U(1)_Y$, respectivamente, son los que contribuyen a la parte gauge del lagrangiano,

$$\mathcal{L}_G = -\frac{1}{4}F_l^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^l - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}^\alpha g_{\alpha}^{\mu\nu}, \quad (10)$$

donde los tensores de campo están dados por

$$F_{\mu\nu}^l = \partial_\nu A_\mu^l - \partial_\mu A_\nu^l + g\epsilon_{jkl}A_\mu^j A_\nu^k, \quad (11)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (12)$$

$$g_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\nu G_\mu^\alpha - \partial_\mu G_\nu^\alpha + g_3 f^{jk\alpha} G_\mu^j G_\nu^k, \quad (13)$$

los ϵ_{jkl} y $f^{jk\alpha}$ son las constantes de estructura asociadas a los grupos $SU(2)_L$ y $SU(3)_C$ respectivamente. A este Lagrangiano gauge también se lo conoce como Lagrangiano Cinético, debido a que todos los términos cinéticos asociados a los campos gauge conforman dicho Lagrangiano. Los términos cinéticos es importante tenerlos en cuenta para tener un modelo consistente⁴.

El Lagrangiano para el sector fermiónico incluye las quiralidades izquierda y derecha. Se

³DONOGHUE, Jhon F., Golowich Eugene y Holstein Barry R. Dynamics of the Standard Model. Cambridge University, 1992.

⁴PONCE, W. A., Giraldo Y. y Sánchez L. A. The Minimal Scalar Sector of 331 Models without Exotic Electric Charge. hep-ph/0210026(2002)

va a resumir el Lagrangiano fermiónico asumiendo que ψ_L sea los isodoubletes débiles izquierdos y que ψ_R sea los isosingletes débiles derechos, entonces se tiene

$$\mathcal{L}_F = \sum_{\psi_L} \bar{\psi}_L i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_L + \sum_{\psi_R} \bar{\psi}_R i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_R. \quad (14)$$

A los doubletes ψ_L les corresponde la derivada covariante de la expresión (5) en cambio a los singletes ψ_R les corresponde la derivada covariante de la expresión (6).

Hasta aquí se ha definido una teoría gauge que tiene una excelente consistencia matemática. Sin embargo esta teoría no es físicamente aceptable porque los fermiones y bosones gauge no tienen masa. Para ganar masa hay que romper la simetría, esto se logra adicionando un sector Higgs a los lagrangianos anteriormente vistos, así es como se puede obtener el Lagrangiano de Higgs, el cual es la suma de dos clases de términos, el primero es el Lagrangiano Escalar con el que se trabaja para darle masa a los bosones gauge y es el que contiene los acoples Higgs-gauge y el segundo es el Lagrangiano de Yukawa con el que se trabaja para darle masa a los fermiones y es el que contiene los acoples Higgs-fermión, entonces se tiene

$$\mathcal{L}_H = \mathcal{L}_{Escalar} + \mathcal{L}_{Yukawa} \quad (15)$$

$$\mathcal{L}_{Escalar} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \phi - V(\phi), \quad (16)$$

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -G_u \bar{L}_u \tilde{\phi} u_R - G_d \bar{L}_d \phi d_R - G_e \bar{L}_e \phi e_R + H.C., \quad (17)$$

siendo \mathcal{D}^μ la derivada covariante dada por la expresión (5), G_u , G_d y G_e son las constante de acoplamiento las cuales son arbitrarias, ϕ el doblete escalar complejo de Higgses y $V(\phi)$ es el potencial escalar los cuales se estudiarán más adelante. También se utilizó la conjugación de carga⁵ para ϕ : $\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^*$.

1.6 EL SECTOR ESCALAR

Como se dijo en la sección anterior es necesario adicionar un sector Higgs o que es lo mismo un sector escalar, a las lagrangianas para romper la simetría y para que los bosones gauge y los fermiones adquieran masa. Entonces para cumplir con tal fin, nuestro sector escalar será el siguiente doblete complejo con sus respectivos número cuánticos:

$$\phi(1, 2, 1) \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

⁵QUIGG, Chris. Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions. The Benjamin/ Cummings Publishing Company Inc., 1983.

el cual transforma como un doblete de $SU(2)_L$ y donde ϕ^+ y ϕ^0 son campos complejos, en cambio ϕ_1, \dots, ϕ_4 son reales. El número total de dobletes de Higgs no está determinado por la teoría y podría ser cualquiera. Mas adelante se vera que este doblete escalar es suficiente para que los fermiones adquieran masa, esto se logra a partir de El Lagrangiano de Yukawa.

1.7 EL ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LA SIMETRÍA $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

1.7.1 El Vacío. En teoría de campos, el vacío es el estado base, pero lo que se va a observar en esta teoría gauge es que el estado base es degenerado, por lo tanto el vacío también lo será.

Cuando el vacío de una teoría posee una distribución diferente de cero de la carga asociada con un generador de una simetría se produce lo que se conoce como el Rompimiento Espontaneo de Simetría. Un bosón gauge propagándose a través de este vacío constantemente interactuará con su carga y desarrollará una masa efectiva proporcional al "valor esperado del vacío" (VEV) de la carga.

Si se define una simetría no rota como el grupo de elementos del grupo G el cual deja invariante el VEV, como:

$$g \langle \phi \rangle_0 = \langle \phi \rangle_0, \quad (19)$$

entonces se tiene que para los grupos de Lie compactos, los elementos pueden ser representados por

$$g = \exp(i\theta_j T_j), \quad (20)$$

donde θ_j son reales y los T_j son las matrices hermíticas, las cuales con los generadores del grupo. Usando (1.20), la ecuación (1.19) es equivalente a la expresión

$$T_j \langle \phi \rangle_0 = 0, \quad (21)$$

por lo tanto se dice que los generadores T_j aniquilan al vacío. Finalmente se asume que cuando el rompimiento espontaneo de simetría de G es permitido, la simetría no rota sera un subgrupo de elementos del grupo G ⁶.

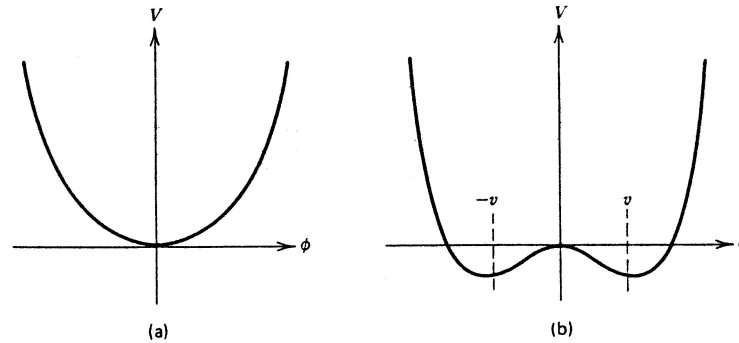
1.7.2 El Potencial Escalar. Para poder hablar del rompimiento espontaneo de la simetría, hablemos primero del Potencial para un solo escalar real ϕ , el cual es de la forma

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2 \phi^2 + \lambda \phi^4. \quad (22)$$

Este potencial tiene dos formas posibles

⁶GAITÁN, Ricardo, Hernández A. y R. Martínez Some Issues on Spontaneous Symmetry Breaking. Revista Mexicana de Física 38, No. 5 (1992)

Figura 1. El potencial $V(\phi^\dagger\phi)$ para (a) $\mu^2 > 0$ y (b) $\mu^2 < 0$, con $\lambda > 0$.



El caso (a) para $\mu^2 > 0$ simplemente describe un campo escalar con masa μ . El término ϕ^4 muestra que el vértice para cuatro partículas existe con el acople λ . Se dice que ϕ es un campo que interactúa entre si mismo. El punto $\phi = 0$ corresponde al estado base, es decir el vacío.

Por otro lado, el caso (b) de la Figura 1, donde $\mu^2 < 0$, es el caso que en verdad nos interesa.

Contrario al caso (a), en el caso (b) el potencial tiene dos mínimos, en otras palabras el estado base es degenerado. Esos mínimos satisfacen

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = \phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0$$

y están por lo tanto en

$$\phi = \pm v \quad \text{con} \quad v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (23)$$

El extremo $\phi = 0$ no corresponde al mínimo de energía⁷.

1.7.3 El Rompimiento Espontáneo de Simetría. El rompimiento espontáneo de simetrías gauge fue el nuevo ingrediente crucial en el modelo de las interacciones débil y electromagnética unificadas construido independientemente por Weinberg y Salam. La idea general fue que las interacciones débiles deberían ser mediadas por bosones gauge (W^\pm), los cuales en principio no tienen masa. La Lagrangiana para la teoría también contiene términos para fermiones sin masa, como es el caso de electrones, muones y neutrinos, y es invariante bajo la simetría gauge. El resultado del rompimiento espontáneo de simetría es dar masa al e, μ, τ y a los bosones gauge, pero no al fotón y al neutrino.

⁷HALZEN, Francis, Martin Alan D. Quarks and Leptons: An Introductory Course In Modern Particle Physics, John Wiley Sons Inc., 1984.

Para solucionar el inconveniente de que el punto $\phi = 0$ no es un mínimo del potencial, se redefine el campo escalar ϕ a través del siguiente corrimiento:

$$\phi' = \phi - v.$$

De esta manera, $\phi' = 0$ es un mínimo del potencial. Esto es lo que se conoce como el rompimiento espontáneo de la simetría.

Se escoge la estructura de isospin de modo que

$$\langle \phi_1^2 \rangle_0 = -\frac{\mu^2}{\lambda}, \quad \langle \phi_2 \rangle_0 = \langle \phi_3 \rangle_0 = \langle \phi_4 \rangle_0 = 0,$$

ó

$$\langle \phi_1 \rangle_0 = \left(-\frac{\mu^2}{\lambda} \right)^{1/2} \equiv v \quad (24)$$

por lo tanto

$$\langle \phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v \text{ real.} \quad (25)$$

Hasta ahora se tiene un vacío degenerado, pero para implementar el rompimiento espontáneo de la simetría se hace fluctuar ϕ alrededor del vacío, teniendo

$$\phi \longrightarrow \phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ v + \phi_1 + i\phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{(v+\eta)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (26)$$

donde el campo complejo η es el nuevo escalar neutro. Este corrimiento nos permite asegurar que cuando los campos son iguales a cero, el potencial escalar toma su mínimo valor. Este doblete rompe la simetría gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ de la siguiente manera

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{\langle \phi \rangle} (3)_C \otimes U(1)_Q, \quad (27)$$

donde Q es la carga electromagnética. El valor de v indica la escala de energía a la que se produce la ruptura de esta simetría electrodébil.

1.8 EL MECANISMO DE HIGGS

El mecanismo de Higgs, ideado por Peter Higgs, es el mecanismo que produce la ruptura espontánea de simetría electrodébil sin destruir la invarianza gauge de la teoría.

Con el fin de implementar el mecanismo de Higgs, se manipula el doblete escalar (26) de tal manera que tome la siguiente forma:

$$\phi' = \exp\left(\frac{i\xi \cdot \tau}{2v}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(v+\eta)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (28)$$

donde el vector ξ y el escalar η son campos pequeños correspondientes a los cuatro grados de libertad reales del campo. Los tres campos ξ son los bosones de Goldstone, de masa nula, que aparecen cuando una simetría continua es rota por el vacío (Teorema de Goldstone).

En este punto aun se tiene 4 bosones gauge (A_μ^i y B_μ) y 4 escalares (ξ y η), todos ellos sin masa, lo que equivale a 12 grados de libertad (Conviene notar que un bosón vectorial de masa nula posee dos grados de libertad, mientras que un bosón vectorial masivo adquiere un nuevo grado de libertad debido a la posibilidad de tener polarización longitudinal: $12 = 4[\text{bosones vectoriales sin masa}] \times 2 + 4[\text{escalares sin masa}]$). P. W. Higgs fue el primero en darse cuenta de que el teorema de Goldstone no es aplicable a teorías gauge, o al menos puede ser soslayado mediante una conveniente selección de la representación. Así, basta con escoger una transformación:

$$U(\xi) = \exp\left(-\frac{i\xi \cdot \tau}{2v}\right), \quad (29)$$

esta transformación gauge $SU(2)_L$ aplicada sobre la expresión (28) se obtiene

$$\phi' \longrightarrow \phi'' = U(\xi)\phi' = \exp\left(-\frac{i\xi \cdot \tau}{2v}\right) \phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(v+\eta)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Al utilizar, por comodidad, la notación $\phi'' = \phi$ se tiene que el doblete escalar toma la forma sencilla

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{(v+\eta)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (31)$$

con lo cual desaparecen los tres campos de Higgs no físicos ξ .

Las siguientes son las transformaciones adicionales necesarias sobre los bosones y los campos fermiónicos para dejar el Lagrangiano invariante.

$$\begin{aligned} \tau \cdot A_\mu &\rightarrow \tau \cdot A'_\mu; \\ B_\mu &\rightarrow B_\mu; \\ \lambda G_\mu &\rightarrow \lambda G_\mu; \\ f_R &\rightarrow f_R, \quad \text{para todos los singletes } f_R \text{ del contenido fermiónico;} \\ \psi &\rightarrow \psi, \quad \text{para todo triplete de color;} \\ L &\rightarrow L' = \exp\left(-\frac{i\xi \cdot \tau}{2v}\right)L, \quad L: \text{ todo doblete del contenido fermiónico.} \end{aligned}$$

Como se puede ver, sólo los dobletes y bosones primados asociados a $SU(2)_L$ sufren transformaciones.

A continuación se observara que tres de los cuatro bosones gauge adquieren masa al absorber cada uno de los tres grados de libertad eliminados del campo de Higgs, gracias a los acoplamientos entre los bosones gauge y el campo ϕ presentes en la componente cinética de la Lagrangiana escalar.

1.9 MASA PARA LOS BOSONES GAUGE.

La masa para los bosones se encuentra reemplazando la derivada covariante \mathcal{D}_μ , el potencial escalar V y el doblete escalar ϕ que están definidos en las ecuaciones (5), (22) y (31), en la Lagrangiana escalar de la expresión (16)

$$\mathcal{L}_{Escalar} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}_\mu \phi - V(\phi). \quad (32)$$

Por conveniencia se va escribir los 3 bosones gauge asociados con $SU(2)_L$ en la siguiente forma

$$\frac{1}{2} \tau \cdot A^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} A_3^\mu / \sqrt{2} & W^{+\mu} \\ W^{-\mu} & -A_3^\mu / \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (33)$$

donde $W^\pm = \frac{A_\mu^1 \mp i A_\mu^2}{\sqrt{2}}$. Al hacer los respectivos reemplazos en la Lagrangiana (32), se recibe

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Escalar} &= \left[\left(\partial^\mu + \frac{ig'}{2} B^\mu Y_\phi + \frac{ig}{2} \tau \cdot A^\mu \right) \phi \right]^2 - V(\phi^\dagger \phi) \\ &= \left\{ \left[\partial^\mu + i \begin{pmatrix} \frac{g}{2} A_3^\mu + \frac{g'}{2} B^\mu & \frac{g}{\sqrt{2}} W^{+\mu} \\ \frac{g}{\sqrt{2}} W^{-\mu} & -\frac{g}{2} A_3^\mu + \frac{g'}{2} B^\mu \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ (v + \eta) / \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}^2 \\ &\quad - \left[\mu^2 \left((v + \eta) / \sqrt{2} \right)^2 + \lambda \left((v + \eta) / \sqrt{2} \right)^4 \right] \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta) (\partial_\mu \eta) + \mu^2 \eta^2 + \frac{g^2 (v + \eta)^2}{8} [(A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2] + \frac{(v + \eta)^2}{8} (g' B_\mu - g A_\mu^3)^2 + \dots \\ \mathcal{L}_{Escalar} &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta) (\partial_\mu \eta) + \mu^2 \eta^2 + \left(\frac{g(v + \eta)}{2} \right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} \\ &\quad + \frac{(v + \eta)^2}{8} (A_\mu^3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{3\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix} + \dots \end{aligned}$$

Al diagonalizar la matriz del último término de la anterior expresión que mezcla los cam-

pos B_μ y A_μ^3 , obtenemos los nuevos campos

$$Z_\mu = \frac{-g'B_\mu + gA_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad A_\mu = \frac{gB_\mu + g'A_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (34)$$

Finalmente la Lagrangiana escalar sera

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Escalar} = & \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) + \mu^2 \eta^2 + \left(\frac{gv}{2}\right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{(g^2 + g'^2)v^2}{8} Z^\mu Z_\mu + \frac{g^2 v}{2} \eta W_\mu^+ W^{-\mu} \\ & + \frac{g^2}{4} \eta^2 W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{(g^2 + g'^2)v}{4} \eta Z^\mu Z_\mu + \frac{(g^2 + g'^2)}{8} \eta^2 Z^\mu Z_\mu + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

(36)

Como se puede ver de la anterior expresión, el bosón vectorial cargado W, y el bosón intermediario neutro Z tienen masas

$$M_{W^\pm} = \frac{gv}{2}, \quad M_Z = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}v}{2} \quad (37)$$

respectivamente. El campo de Higgs físico η ha adquirido una masa (masa²) $-2\mu^2 = 2\lambda v^2 > 0$. El campo A_μ ausente en la expresión (35) no posee masa, más adelante se vera que corresponde al fotón.

Teniendo en cuenta que $\frac{g'}{g} = \tan \theta_W$, donde θ_W es el ángulo de mezcla de Weinberg, en términos de θ_W los resultados (34) serán

$$\begin{aligned} A_\mu &= \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W A_\mu^3, \\ Z_\mu &= -\sin \theta_W B_\mu + \cos \theta_W A_\mu^3; \end{aligned}$$

y de las expresiones (36), se tiene

$$\frac{M_W}{M_Z} = \cos \theta_W. \quad (38)$$

La diferencia $M_Z \neq M_W$ es debido a la mezcla entre los campos A_μ^3 y B_μ . En el limite $\theta_W = 0$, se puede ver que $M_Z = M_W$.

1.10 ACOPLES CON EL HIGGS

Del Lagrangiano (35) se obtienen los acoples del Higgs físico η y los bosones vectoriales cargados W^\pm , y el bosón neutro Z. Los cuales son:

$$\begin{aligned} g(WW\eta) &= \frac{g^2 v}{2}, & g(WW\eta\eta) &= \frac{g^2}{4}, \\ g(ZZ\eta) &= \frac{(g^2 + g'^2)v}{4} = \frac{g^2 v}{4 \cos^2(\theta_W)}, & g(ZZ\eta\eta) &= \frac{(g^2 + g'^2)}{8} = \frac{g^2}{8 \cos^2(\theta_W)}, \end{aligned} \quad (39)$$

siendo $\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2+g'^2}}$ y $\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2+g'^2}}$.

1.11 MASA PARA LOS FERMIONES

Uno de los aspectos más atractivos del modelo estándar es que el mismo doblete de Higgs, el cual genera las masas de W^\pm y Z, es también suficiente para generar las masas de los leptones y de los quarks.

Para la construcción de los términos de Yukawa, que acoplan el sector escalar con el sector fermiónico, se debe ser cuidadoso con las diversas invarianzas de cada término. Construir invariantes de Lorentz y de gauge $SU(2)_L$ es algo sencillo, en cambio para determinar si es invariante $U(1)_Y$ se debe procurar que la suma de las hipercargas de cada término en el producto de cero, tal como se puede comprobar en las siguientes expresiones.

Reescribiendo la expresión (17) como

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \mathcal{L}_{Yukawa(leptones)} + \mathcal{L}_{Yukawa(quarks)} \quad (40)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yukawa(leptones)} &= -G_e [\bar{L}_e \phi e_R + \bar{e}_R \phi^\dagger L_e] \\ &= -\frac{G_e v}{\sqrt{2}} \bar{e} e - \frac{G_e \eta}{\sqrt{2}} \bar{e} e. \end{aligned} \quad (41)$$

y

$$\mathcal{L}_{Yukawa(quarks)} = -G_u \bar{L}_u \tilde{\phi} u_R - G_d \bar{L}_u \phi d_R + H.C.,$$

siendo

$$\tilde{\phi} = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{(v+\eta)}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (42)$$

por lo tanto

$$\mathcal{L}_{Yukawa(quarks)} = -\frac{G_u v}{\sqrt{2}} \bar{u} u - \frac{G_d v}{\sqrt{2}} \bar{d} d - \frac{G_u \eta}{\sqrt{2}} \bar{u} u - \frac{G_d \eta}{\sqrt{2}} \bar{d} d. \quad (43)$$

Las constantes G_e , G_u y G_d son reales, puesto que la fase puede ser absorbida en los singletes derechos. De las ecuaciones (40) y (42) se puede observar que la masa adquirida por el electrón y los quarks u y d son respectivamente

$$m_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}}, \quad m_u = \frac{G_u v}{\sqrt{2}} \quad y \quad m_d = \frac{G_d v}{\sqrt{2}} \quad (44)$$

Aunque la teoría puede acomodar fermiones de cualquier masa, esta no predice el valor de dicha masa. En lugar de eso, las medidas de la masa de los fermiones son usadas para fijar los acoples arbitrarios Higgs-fermión⁸.

1.12 CORRIENTES

Para poder obtener tanto las corrientes cargadas como las neutras, se parte del Lagrangiano de fermiones

$$\mathcal{L}_F = \bar{L}_e i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_e + \bar{e}_R i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + \bar{L}_u i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_u + \bar{u}_R i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R. \quad (45)$$

Haciendo uso de la expresión (33), la derivada covariante para los dobletes de $SU(2)_L$ dada por la ecuación (5), puede ser expresada como

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} gA_{3\mu} + g'B_\mu Y & g\sqrt{2}W_\mu^+ \\ g\sqrt{2}W_\mu^- & -gA_{3\mu} + g'B_\mu Y \end{pmatrix}. \quad (46)$$

Teniendo en cuenta lo anterior y recordando que para los singletes la derivada covariante esta dada por la expresión (6), el Lagrangiano de fermiones (44) nos arroja los siguientes resultados:

1.12.1 Corrientes Cargadas. Las interacciones entre el campo vectorial cargado con los fermiones son:

$$\mathcal{L}_{W-F} = -\frac{g}{\sqrt{2}} [W_\mu^+ (\nu_{eL}\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L)] + H.C. \quad (47)$$

1.12.2 Corrientes Neutras. Para estas corrientes el cálculo es un poco más extenso, se debe tener en cuenta las relaciones (34), y escribir por comodidad las funciones trigonométricas asociadas al ángulo de mezcla de Weinberg θ_W como $\cos\theta_W = C_W$ y $\sin\theta_W = S_W$. De esta manera se obtienen las corrientes neutras $J_\mu(EM)$ y $J_\mu(Z)$ asociadas con el Hamiltoniano que acopla los fermiones con los bosones gauge neutros.

$$H^0 = eA^\mu J_\mu(EM) + \frac{g}{C_W} Z^\mu J_\mu(Z), \quad (48)$$

siendo

$$\begin{aligned} J_\mu(EM) &= -\bar{e}\gamma_\mu e + \frac{2}{3}\bar{u}\gamma_\mu u - \frac{1}{3}\bar{d}\gamma_\mu d, \\ J_\mu(Z) &= J_{\mu,L}(Z) - S_W^2 J_\mu(EM); \end{aligned} \quad (49)$$

⁸DONOGHUE, Jhon F, Golowich Eugene y Holstein Barry R. Dynamics of the Standard Model. Cambridge University, 1992.

donde la carga eléctrica toma el valor $e = gg' / \sqrt{g^2 + g'^2}$, $J_\mu(EM)$ es la corriente electromagnética, y la corriente asociada al boson neutro Z de quiralidad izquierda esta dada por

$$J_{\mu,L}(Z) = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu \nu_{eL} - \bar{e}_L \gamma_\mu e_L + \bar{u}_L \gamma_\mu u_L - \bar{d}_L \gamma_\mu d_L). \quad (50)$$

Vale la pena recalcar que las anteriores corrientes dan cuenta de una amplia variedad de procesos que involucran interacciones electromagnéticas y débiles.

1.13 MÁS FAMILIAS FERMIONICAS

Hasta ahora tan solo se ha trabajado con una familia fermiónica, sin embargo existen otras dos familias, las cuales son:

Tabla 2. Segunda Familia Fermiónica.

$L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	μ_R	$L_c = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	c_R	s_R
(1, 2, -1)	(1, 1, -2)	(3, 2, 1/3)	(3, 1, 4/3)	(3, 1, -2/3)

Tabla 3. Tercera Familia Fermiónica.

$L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	τ_R	$L_t = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	t_R	b_R
(1, 2, -1)	(1, 1, -2)	(3, 2, 1/3)	(3, 1, 4/3)	(3, 1, -2/3)

Como se puede ver los números cuánticos son los mismos, por lo tanto se duplica los resultados de las secciones anteriores para poder abarcar las restantes dos familias. Pero en cambio, como se vera a continuación, las posibilidades del Lagrangiano de Yukawa se incrementan.

1.13.1 Modelo con dos Familias Fermiónicas. Se va a desarrollar el Modelo Estándar, pero ahora abarcando las dos primeras familias fermiónicas. Al construir el Lagrangiano de Yukawa para el sector de los quarks, la matriz de masa debe ser diagonalizada así que

los campos deben ser redefinidos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y(\text{quarks } u, c)} &= -G_{uu}\bar{u}_R\tilde{\phi}^\dagger L_u - G_{uc}\bar{u}_R\tilde{\phi}^\dagger L_c - G_{cu}\bar{c}_R\tilde{\phi}^\dagger L_u - G_{cc}\bar{c}_R\tilde{\phi}^\dagger L_c + H.C \\
&= -\frac{v}{\sqrt{2}}(\bar{u}, \bar{c})_R \begin{pmatrix} G_{uu} & G_{uc} \\ G_{cu} & G_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L + H.C + \dots \\
&= -\frac{v}{\sqrt{2}}(\bar{u}, \bar{c})_R U_R^{-1} U_R \begin{pmatrix} G_{uu} & G_{uc} \\ G_{cu} & G_{cc} \end{pmatrix} U_L^{-1} U_L \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L + \dots \quad (51)
\end{aligned}$$

De la misma manera se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Y(\text{quarks } d, s)} &= -G_{dd}\bar{d}_R\phi^\dagger L_u - G_{ds}\bar{d}_R\phi^\dagger L_c - G_{sd}\bar{s}_R\phi^\dagger L_u - G_{ss}\bar{s}_R\phi^\dagger L_c + H.C \\
&= -\frac{v}{\sqrt{2}}(\bar{d}, \bar{s})_R \begin{pmatrix} G_{dd} & G_{ds} \\ G_{sd} & G_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L + H.C + \dots, \quad (52)
\end{aligned}$$

donde la fase de cada una de las constantes G's puede ser absorbida por los campos de quiralidad derecha en los Lagrangianos anteriores.

Las matrices unitarias U_R y U_L de la expresión (50) es necesario insertarlas para diagonalizarla, de tal manera se tiene

$$U_R \left[-\frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} G_{uu} & G_{uc} \\ G_{cu} & G_{cc} \end{pmatrix} \right] U_L^{-1} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_c \end{pmatrix}, \quad (53)$$

con

$$U_L = \begin{pmatrix} \cos \theta_u & \text{sen } \theta_u \\ -\text{sen } \theta_u & \cos \theta_u \end{pmatrix} \quad (54)$$

y las cantidades m_u, m_c son las masas para los quarks u'(up) y c'(charmed), y están relacionados con los campos no físicos u y c en la forma:

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \end{pmatrix}_L = U_L \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L. \quad (55)$$

Después de cierta algebra sobre la expresión (52) se llega a las relaciones

$$\begin{aligned}
G_{uu} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_u \cos \theta_u; & G_{cu} &= -\frac{\sqrt{2}}{v} m_c \text{sen } \theta_u; \\
G_{uc} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_u \text{sen } \theta_u; & G_{cc} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_c \cos \theta_u.
\end{aligned} \quad (56)$$

El tratamiento para la ecuación (51) es similar. Pero ahora se define la matriz

$$D_L = \begin{pmatrix} \cos \theta_d & \text{sen } \theta_d \\ -\text{sen } \theta_d & \cos \theta_d \end{pmatrix} \quad (57)$$

y se encuentra que

$$\begin{aligned} G_{dd} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_d \cos \theta_d; & G_{sd} &= -\frac{\sqrt{2}}{v} m_s \sin \theta_d; \\ G_{ds} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_d \sin \theta_d; & G_{ss} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_s \cos \theta_d; \end{aligned} \quad (58)$$

donde m_d y m_s son las masas para los quarks d' (down) y s' (strange) definidos de la forma

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}_L = D_L \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L. \quad (59)$$

Con los nuevos campos físicos definidos en las expresiones (54) y (58) las corrientes cargadas toman una forma distinta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W-quarks} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} [W_\mu^+ (\bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \bar{c}_L \gamma^\mu s_L)] + H.C \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left\{ W_\mu^+ \left[(\bar{u}, \bar{c})_L (U_L^\dagger U_L) \gamma^\mu (D_L^\dagger D_L) \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L \right] \right\} + H.C \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left\{ W_\mu^+ \left[(\bar{u}', \bar{c}')_L \gamma^\mu (U_L D_L^\dagger) \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}_L \right] \right\} + H.C. \end{aligned} \quad (60)$$

De esta manera se ha llegado al ángulo de Cabbibo $\theta_c = (\theta_u - \theta_d)$, y por ende a la matriz de Cabbibo que mezcla los quarks d' y s'

$$V_C = U_L D_L^\dagger = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Dentro de la aproximación para las dos familias, los datos de los decaimientos producidos gracias a la interacción débil, implica el valor numérico: $\sin \theta_c \simeq 0,22$.

1.13.2 Modelo con tres Familias. Al trabajar el Modelo Estándar con su completo contenido fermiónico, es decir con sus tres familias, es posible mezclar los tres tipos de quarks. Por lo tanto el Lagrangiano de Yukawa sera

$$\mathcal{L}_Y = -G_u^{ij} \bar{u}_R^i (\tilde{\phi}^\dagger L_j) - G_d^{ij} \bar{d}_R^i (\phi^\dagger L_j) + H.C, \quad (62)$$

donde G_u y G_d , matrices 3×3 , no son necesariamente simétricas.

De manera análoga a la sección anterior se define las matrices unitarias U_R y U_L tal que

$$\left(-\frac{v}{\sqrt{2}} \right) U_R G_u U_L^{-1} = M_u, \quad (63)$$

donde M_u es la matriz diagonal cuyos elementos corresponden a la masa de los quarks.

En forma similar para la matriz G_d se tiene

$$\left(-\frac{v}{\sqrt{2}}\right) D_R G_d D_L^{-1} = M_d \quad (64)$$

Ahora se hace un cambio de variables, de manera similar que en el caso de dos familias, es decir

$$u_L^i = U_L^{ij} u_L^j, \quad d_L^i = D_L^{ij} d_L^j. \quad (65)$$

De este modo la corriente cargada de los quarks presenta un cambio

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W-quarks} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[W_\mu^+ \left(\bar{u}_L^i \gamma_\mu d_L^i \right) \right] + H.C \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[W_\mu^+ \left(\bar{u}_L^i \gamma_\mu \left(U_L D_L^\dagger \right)^{ij} d_L^j \right) \right] + H.C. \end{aligned} \quad (66)$$

La matriz 3×3

$$V_{CKM} = U_L D_L^\dagger = \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 C_3 & -S_1 S_3 \\ S_1 C_2 & C_1 C_2 C_3 - S_2 S_3 e^{i\delta} & C_1 C_2 S_3 + S_2 C_3 e^{i\delta} \\ S_1 S_2 & C_1 S_2 C_3 + C_2 S_3 e^{i\delta} & C_1 S_2 S_3 - C_2 C_3 e^{i\delta} \end{pmatrix}, \quad (67)$$

que mezcla los quarks es conocida como la matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa (CKM), donde $C_i = \cos \theta_i$, $S_i = \sin \theta_i$, $0 \leq \theta_i \leq \pi/2$, $0 \leq \delta \leq \pi$, con $i = 1, 2, 3$. En el limite $\theta_2 = \theta_3 = 0$, la mezcla de CKM se reduce a la mezcla de Cabbibo con la identificación $\theta_1 = -\theta_c$.

1.14 CROMODINÁMICA CUÁNTICA

La cromodinámica cuántica (QCD) es una teoría gauge no abeliana basada en el grupo gauge SU(3) con un octete de gluones como bosones gauge. Los quarks son definidos en la representación fundamental 3 del grupo, y los antiquarks en la representación conjugada. Por lo tanto la QCD es un teoría de campos gauge extremadamente simple en el sentido de especificar el Lagrangiano clásico.

Los fermiones que llevan la carga de color son los quarks, es bien sabido que los quarks son tripletes de color, es decir, cada quark viene en tres colores distintos rojo, azul, y verde. Entonces se va a tener cada quark con un campo $\psi_j^{(\beta)}$, donde $\alpha = u, d, s, \dots$ es el

sabor y $j = 1, 2, 3$ es el índice del color. Los bosones gauge, los cuales también llevan color, son los gluones, cada uno con campo G_μ^α , $\alpha = 1, \dots, 8$. La cromodinámica es definida por el Lagrangiano que es invariante bajo SU(3)

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{\beta} \bar{\psi}_j^{\beta} (i\gamma_\mu \mathcal{D}_{jk}^\mu - m^{(\beta)} \delta_{jk}) \psi_k^{(\beta)} \quad (68)$$

donde \mathcal{D}_μ es la derivada covariante dada en (7) y no se incluye el término cinético puesto que ya fue trabajado en la sección (10). El Lagrangiano (67) involucra el término de masa m puesto que los quarks no están proyectados en campos izquierdos o derechos. Por otro lado, el hecho de SU(3) no ser rota, implica que los bosones gauge correspondientes no tienen masa, los cuales corresponden a los gluones no masivos, responsables de la interacción fuerte. Al reemplazar la derivada covariante de la ecuación (7), en el Lagrangiano (67), se obtiene el término de interacción

$$\mathcal{L}_{int} = - \sum_{\beta} \frac{g_3}{2} G_\mu^\alpha \bar{\psi}_j^{(\beta)} \gamma^\mu \lambda^\alpha \psi_k^\beta, \quad (69)$$

el cual conduce de manera directa a las regla de Feynman para la interacción quark-quark-gluon⁹.

El modelo de Weinberg-Salam o teoría electrodébil junto con el modelo QCD, se basan en el grupo gauge local $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, que se denomina el Modelo Estándar(ME). El incluir el grupo gauge $SU(3)_C$ no afecta para nada en la forma de las expresiones de los resultados obtenidos en la teoría electrodébil.

De la misma manera como el ME explica una gran cantidad de fenómenos físicos, dicho modelo no puede explicar aspectos como: la jerarquía de masas y los ángulos de mezcla, la cuantización de la carga, la violación CP, etc. Por tal motivo, no se puede pensar que el ME es un modelo ya acabado, en lugar de ello, se debe tomarlo como base para otros modelos.

1.15 EL LAGRANGIANO FINAL

Para resumir el modelo estándar, vamos a juntar todos los ingredientes del Lagrangiano. El Lagrangiano completo es:

⁹GIRALDO, Yithsbey. Tesis de Maestría; El Potencial Escalar en $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ como Extensión del Modelo Estándar. Universidad de Antioquia, 2002.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F_l^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^l - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}^\alpha g_{\alpha}^{\mu\nu} \\
& + \bar{L}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2}B_\mu Y + \frac{ig}{2}\tau \cdot A_\mu \right) L + \bar{R}\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2}B_\mu Y \right) R \\
& + \left[\left(\partial^\mu + \frac{ig'}{2}B^\mu Y_\phi + \frac{ig}{2}\tau \cdot A^\mu \right) \phi \right]^2 - V(\phi^\dagger\phi) \\
& - \left(G_1\bar{L}\phi R + G_2\bar{L}\tilde{\phi}R + H.C \right) \quad (70)
\end{aligned}$$

L denota los dobletes de fermiones con quiralidad izquierda, y R denota los singletes de fermiones con quiralidad derecha. Se puede ver en el Lagrangiano (69) que el primer término corresponde a las energías cinéticas de W^\pm , Z , A_μ (el fotón) y a sus interacciones; el segundo y el tercer término corresponde a las energías cinéticas de leptones y quarks como también a sus interacciones con los bosones W^\pm , Z , A_μ ; el cuarto término corresponde a los acoples y a las masas de W^\pm , Z , A_μ y del Higgs; y finalmente el último término corresponde a las masas de leptones y quarks y a los acoples con el Higgs.

1.16 RENORMALIZACIÓN Y CANCELACIÓN DE ANOMALÍA

Solamente futuros experimentos decidirán si el modelo más simple de Higgs es correcto. Sin embargo, hay que recordar que la motivación para introducir el escalar de Higgs dado en la expresión (18), fue enteramente un aspecto teórico, y en el presente no hay una evidencia que constate que esta partícula exista. Su importancia proviene de el hecho que dicha partícula nos permite generar las masas de los bosones débiles sin afectar la renormalizabilidad de la teoría gauge electrodébil.

La renormalizabilidad de la teoría no es trivial. La dificultad principal proviene del hecho de que algunos bosones gauge tienen masa y por lo que se sabe bosones intermediarios masivos conducen a teorías no renormalizables. La única esperanza que se tenía era el hecho de que las diferentes masas en el ME eran generadas a través del rompimiento espontáneo de simetría, en lugar de ser puestas a mano como sucedía en modelos anteriores. Cuatro años más tarde de que el modelo fuera propuesto, es decir en 1971, 't Hooft demostró rigurosamente la renormalizabilidad de las teorías gauge con rompimiento espontáneo.

De hecho, 't Hooft demostró que para que una teoría sea renormalizable, esta debe ser una teoría de Yang-Mills, es decir, una teoría con una invarianza gauge local. Solamente si se tiene tal alto grado de simetría se puede obtener la cancelación sistemática de divergencias orden por orden.

Hay que saber que una teoría tiene una anomalía si una simetría de el Lagrangiano

clásico es rota por efectos cuánticos, por lo tanto queda ver si el ME no tiene anomalías.

La condición de invarianza gauge requiere que las anomalías se cancelen, por tal motivo cuando se imponen que sean igual a cero derivan en relaciones matemáticas entre los números cuánticos del contenido fermiónico; más específicamente la suma de las hipercargas de las familias fermiónicas debe ser cero.

Las anomalías triangulares presentes en el ME son:

$$[SU(3)_c]^2 U(1)_Y : \quad -2a + b + c = 0;$$

$$[SU(2)_L]^2 U(1)_Y : \quad -3a - d = 0;$$

$$[Grav]^2 U(1)_Y : \quad -6a + 3b - 2d + e = 0;$$

$$[U(1)_Y]^3 : \quad -6a^3 + 3b^3 + 3c^3 - 2d^3 + e^3 = 0,$$

de estas condiciones se encuentran los valores de las hipercargas para que las diferentes anomalías se cancelen, por lo tanto se obtienen valores positivos para estados de quiralidad derecha y negativos para los de quiralidad izquierda, es decir: $a = 1/3$, $b = 4/3$, $c = -2/3$, $d = -1$ y $e = -2$ lo que hace que el ME este libre de anomalías y por tanto renormalizable.

2. EL GRUPO $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$

2.1 INTRODUCCIÓN

A pesar del notable éxito experimental del ME estudiado en el capítulo anterior, presenta fallas en predicciones realizadas a bajas energías como de unos pocos GeV. Algunos de los problemas que presenta es en explicar la jerarquía de las masas de los fermiones y ángulos de mezcla, la cuantización de la carga, violación CP, etc.

Estas desventajas del ME han llevado a una fuerte creencia que este modelo no representa la teoría final, y varios físicos creen que debe ser considerada como una teoría de campos efectiva a bajas energías, que origina de una más fundamental.

Se puede extender el ME de diversas maneras: adicionando nuevos campos fermiónicos (lo más simple sería adicionar el campo del neutrino de quiralidad derecha, lo cuál conduciría a la obtención de masa para el neutrino), aumentando el sector escalar a más de una representación de Higgses, y finalmente ampliando el grupo gauge local. En ésta última dirección $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ como un grupo de sabor, ha sido estudiado previamente por muchos autores quienes han explorado las distintas posibilidades del contenido fermiónico y de los bosones de Higgs, como replica de la estructura de una familia como en el ME, o como una estructura interfamilia¹⁰ las cuales indican una explicación natural del número total de familias en la naturaleza.

En lo que sigue se presentará un análisis sistemático de los posibles modelos que surgen de grupo $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ el cual se llamara desde ahora grupo 331. Como primera medida se asumirá que el grupo gauge electrodébil es $SU(3)_L \otimes U(1)_X \supset SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, como también que los quarks de quiralidad izquierda (tripletes de color) y los leptones de quiralidad izquierda (singletes de color) transforman bajo las dos representaciones fundamentales de (3 y 3*) de $SU(3)_L$. En el grupo 331 hay dos clases de modelos: modelos de una familia donde las anomalías se cancelan en cada familia como en el ME, y modelos interfamilias donde las anomalías se cancelan por una interrelación entre las familias. Estas dos clases de modelos se discutirán, de manera separada, en las siguientes secciones.

De la misma manera que en el ME, en los modelos 331 presentados aquí $SU(3)_C$ es de tipo vectorial.

¹⁰PONCE, William A., Flórez Juan y Sánchez Luis A. Analysis of $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ Local Gauge Theory. International Journal of Modern Physics A, Vol.17, No.5 (2002).

La expresión más general para el generador de carga eléctrica en $SU(3)_L \otimes U(1)_X$, para la representación 3, es una combinación lineal de los tres generadores diagonales del grupo gauge

$$Q = aT_{3L} + \frac{2}{\sqrt{3}}bT_{8L} + XI_3, \quad (71)$$

para la representación 3^* , se tiene

$$Q^* = -aT_{3L} - \frac{2}{\sqrt{3}}bT_{8L} + XI_3, \quad (72)$$

donde $T_{iL} = \lambda_{iL}/2$; siendo λ_{iL} las matrices de Gell-Mann para $SU(3)_L$, normalizadas como $Tr(\lambda_i\lambda_j) = 2\delta_{ij}$; $I_3 = Dg(1, 1, 1)$ es la matriz unidad 3×3 ; y a y b son parámetros arbitrarios que serán determinados más adelante.

Debido a la condición que $SU(3)_L \otimes U(1)_X \supset SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, se tiene que al asumir $a = 1$ se obtiene como resultado el isospín usual de la interacción electrodébil, y así se ha fijado el primero de los parámetros, ahora solo falta obtener el valor de b . De este modo, la ecuación (70) permite un número infinito de modelos dentro del grupo 331, cada uno de ellos asociado con un valor particular del parámetro b , es decir b es el parámetro clave que impone características a los modelos, de tal manera que los hace bastante diferentes entre ellos.

La carga eléctrica de las partículas extras de los diferentes modelos que serán presentados, es determinada por el valor del b . Para limitar el número infinito de modelos se impondrá la condición de excluir a los modelos que contengan partículas con carga eléctrica exótica; es decir, se permitirá solamente modelos con quarks de carga eléctrica $\pm 2/3$ y $\pm 1/3$ y leptones de carga eléctrica ± 1 y 0. Por lo tanto esta condición permitirá que el parámetro b tome el valor $\pm 1/2$ con equivalente sector gauge para los modelos del grupo 331.

Basándose en el isodoublet para $SU(2)_L$ para una familia, se definen dos tripletes para $SU(3)_L$

$$\chi_L = \begin{pmatrix} u \\ d \\ q \end{pmatrix}_L, \quad \psi_L = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \\ l \end{pmatrix}_L,$$

donde q_L y l_L son singletes en $SU(2)_L$, para quarks y leptones exóticos respectivamente. Ahora si los números cuánticos de $\{SU(3)_L, U(1)_X\}$ para χ_L y ψ_L son $\{3, X_\chi\}$ y $\{3^*, X_\psi\}$ respectivamente, entonces usando la ecuación (2.1), se encuentra la relación:

$$X_\chi + X_\psi = Q_q + Q_l = -\frac{1}{3}, \quad (73)$$

donde Q_q y Q_l son los valores de carga eléctrica de los singletes q_L y l_L en $SU(2)_L$ respectivamente, en unidades del valor absoluto de la carga eléctrica del electrón.

Ahora para cancelar la anomalía $[SU(3)_L]^3$, son necesarios dos antitripletos leptónicos en $SU(3)_L$ con números cuánticos $\{3^*, X_i\}$, $i = 1, 2$, como también sus correspondientes componentes derechos cargados. Cada uno de estos multipletes deben incluir un doblete en $SU(2)_L$ y un singlete de nuevos leptones.

Para cancelar la anomalía $[SU(3)_C]^3$ deben ser introducidos los quarks u_L^c , d_L^c , q_L^c antitripletos de color y singletes en $SU(3)_L$ con números cuánticos X_u , X_d , X_q en $U(1)_X$, respectivamente. Entonces las hipercargas X_α con $\alpha = \chi, \psi, 1, 2, u, d, q, \dots$ son fijados usando la ecuaciones (70), (71) y las condiciones para la cancelación de las diferentes anomalías triangulares

$$\begin{aligned}
[SU(3)_C]^2 U(1)_X : \quad & 3X_\chi + X_u + X_d + X_q = 0 \\
[SU(3)_L]^2 U(1)_X : \quad & 3X_\chi + X_\psi + X_1 + X_2 = 0 \\
[grav]^2 U(1)_X : \quad & 9X_\chi + 3X_u + 3X_d + 3X_q + 3X_\psi + 3X_1 + 3X_2 + \sum_{Singl} X_{ls} = 0 \\
[U(1)_X]^3 : \quad & 9X_\chi^3 + 3X_u^3 + 3X_d^3 + 3X_q^3 + 3X_\psi^3 + 3X_1^3 + 3X_2^3 + \sum_{Singl} X_{ls}^3 = 0
\end{aligned}$$

donde X_{ls} son las hipercargas de los singletes leptónicos derechos cargados necesarios para tener una teoría de campo consistente.

2.2 MODELOS DE UNA FAMILIA

Dentro de los modelos de una familia tenemos los siguientes:

2.2.1 Modelo A. Este modelo libre de anomalías es uno de los más simples que se puede construir para una sola familia en $SU(3)_L \otimes U(1)_X$. El modelo A tiene un tipo de quark down extra $q=D$ de carga eléctrica $Q_q = Q_D = -1/3$, con $b = 1/2$; que al reemplazar en la ecuación (72) origina $Q_l = 0$, es decir, l_L es un nuevo leptón nuevo N_{1L}^0 . Entonces de la combinación de las ecuaciones (70), (72), y las condiciones para la cancelación de las diferentes anomalías triangulares se encuentra que $X_\chi = 0$, $X_\psi = -1/3$, $\sum_{Singl} X_{ls} = 0$ y $X_1 + X_2 = 1/3$. Debido a que se está trabajando con leptones de cargas eléctricas ± 1 y 0 solamente, se tiene que para la solución más simple $X_1 = -1/3$, $X_2 = 2/3$ y $X_{ls} = 0$, estos últimos resultados nos dan a conocer que no se necesita leptones derechos cargados para cancelar las presentes anomalías. La estructura de multipletes para este modelo es:

Tabla 4. Sector de Quarks para el Modelo A.

$\chi_L = \begin{pmatrix} u \\ d \\ D \end{pmatrix}_L$	u_L^c	d_L^c	D_L^c
$(3, 3, 0)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$

Tabla 5. Sector de Leptones para el Modelo A.

$\psi_L = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \\ N_1^0 \end{pmatrix}_L$	$\psi_{1L} = \begin{pmatrix} E^- \\ N_2^0 \\ N_3^0 \end{pmatrix}_L$	$\psi_{2L} = \begin{pmatrix} N_4^0 \\ E^+ \\ e^+ \end{pmatrix}_L$
$(1, 3^*, -1/3)$	$(1, 3^*, -1/3)$	$(1, 3^*, 2/3)$

donde los números que se encuentran dentro de los paréntesis son los números cuánticos referentes a $(SU(3)_C, SU(3)_L, U(1)_X)$. Un análisis fenomenológico de este modelo ya ha sido publicado.

2.2.2 Modelo B. Al igual que el modelo A este modelo es libre de anomalías. El campo extra que contiene es un tipo de quark up $q = U$ de carga $Q_q = Q_U = 2/3$, con $b = -1/2$, lo cual implica $Q_l = -1$, es decir, l_L es ahora un electrón exótico E^- . Para encontrar las diferentes hipercargas se sigue los mismos pasos que para el modelo A, por lo tanto se obtiene la siguiente estructura de multipletes:

Tabla 6. Sector de Quarks para el Modelo B.

$\chi_L = \begin{pmatrix} u \\ d \\ U \end{pmatrix}_L$	d_L^c	u_L^c	U_L^c
$(3, 3, 1/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$

Tabla 7. Sector de Leptones para el Modelo B.

$\psi_L = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \\ E_1^- \end{pmatrix}_L$	$\psi_{1L} = \begin{pmatrix} N_1^0 \\ E_2^+ \\ \nu_e^c \end{pmatrix}_L$	$\psi_{2L} = \begin{pmatrix} E_2^- \\ N_2^0 \\ E_3^- \end{pmatrix}_L$	e_L^+	E_{1L}^+	E_{3L}^+
$(1, 3^*, -2/3)$	$(1, 3^*, 1/3)$	$(1, 3^*, -2/3)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$

Un análisis más a fondo muestra que al reemplazar $3 \rightarrow 3^*$ en el contenido fermiónico ($b \rightarrow -b$ cuando se toma el complejo conjugado de la derivada covariante) de los modelos A y B, respectivamente, se obtiene el mismo contenido de bosones gauge¹¹.

Un análisis fenomenológico de este modelo ha sido publicado en cierto artículo¹².

2.2.3 Otros Modelos de Una Familia. Si se sigue los mismos pasos que en los dos casos anteriores, se pueden obtener modelos que contengan leptones con carga eléctrica exótica, es decir, si q_L tiene cargas eléctricas $-2/3$ o $1/3$, la ecuación (72) arroja las cargas exóticas para dichos leptones, siendo $Q_l = 1/3$ y $-2/3$ respectivamente.

De manera similar, si se tiene $Q_l = 1$, la ecuación (72) arroja la carga $Q_q = -4/3$, teniendo así un modelo que contiene un quark con carga eléctrica exótica, lo cual se ha excluido de los modelos discutidos aquí (un modelo que contiene quarks con carga eléctrica exótica ha sido estudiado por varios autores, entre ellos F. Pisano y V. Pleitez).

2.3 MODELOS INTERFAMILIAS

En estos modelos cada familia, de manera individual, no es capaz de cancelar las anomalías, por tal motivo dicha cancelación toma lugar al interrelacionar las diferentes familias involucradas en los modelos.

Otra característica importante de este tipo de modelos es que la tercera familia es tratada diferente a las otras dos, o en su defecto todas las tres familias son tratadas independientemente.

Haciendo uso de las ecuaciones (70) y (72) y de las condiciones para la cancelación de las diferentes anomalías triangulares, se puede combinar los multipletes fermiónicos de los modelos A y B para producir los modelos que se presentan a continuación (con el reemplazo $3 \rightarrow 3^*$ en el modelo B para asegurar una única derivada covariante):

2.3.1 Modelo C. Todas las generaciones de leptones de quiralidad izquierda con números cuánticos $(1,3,-2/3)$ referentes a $(SU(3)_C, SU(3)_L, U(1)_X)$ tienen la estructura:

¹¹PONCE, W. A., Flórez J. B. y Sánchez L. A. Analysis of $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ Local Gauge Theory. International Journal of Modern Physics A, Vol.17, No.5(2002).

¹²MARTÍNEZ, R., Ponce W. A. and Sánchez L. A. $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ as an $SU(6) \otimes U(1)_X$ subgroup. Phys. Rev. D64, 0750 (2001). donde consideran a $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ como un subgrupo de $SU(6) \otimes U(1)_X$

Tabla 8. Sector de Leptones para el Modelo C.

$\psi_L^\alpha = \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \alpha^- \\ E_\alpha^- \end{pmatrix}_L$	α_L^+	$E_{\alpha L}^c$
$(1, 3, -2/3)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$

para $\alpha = e, \mu, \tau$; mientras que los quarks transforman como sigue:

Tabla 9. Dos de las generaciones del Sector de Quarks para el Modelo C.

$\chi_L^a = \begin{pmatrix} d^a \\ u^a \\ U^a \end{pmatrix}_L$	u_L^{ac}	d_L^{ac}	U_L^{ac}
$(\mathbf{3}, \mathbf{3}^*, 1/3)$	$(\mathbf{3}^*, 1, -2/3)$	$(\mathbf{3}^*, 1, 1/3)$	$(\mathbf{3}^*, 1, -2/3)$

con $a = 1, 2$ dos de las familias. Para la otra familia se tiene:

Tabla 10. Tercera generación del Sector de Quarks para el Modelo C.

$\chi_{3L} = \begin{pmatrix} u_3 \\ d_3 \\ D \end{pmatrix}_L$	u_{3L}^c	d_{3L}^c	D_L^c
$(3, 3, 0)$	$(\mathbf{3}^*, 1, -2/3)$	$(\mathbf{3}^*, 1, 1/3)$	$(\mathbf{3}^*, 1, 1/3)$

Igual que los anteriores modelos, el Modelo C está libre de anomalías para este contenido fermiónico. Este modelo fue mostrado por primera vez en 1996 por M. Özer¹³.

2.3.2 Modelo D. Utilizando el mismo criterio que en el Modelo C, se consigue la siguiente estructura para los multipletes:

Tabla 11. Dos de las generaciones del Sector de Quarks para el Modelo D.

$\chi_L^a = \begin{pmatrix} u_a \\ d_a \\ D_a \end{pmatrix}_L$	u_{aL}^c	d_{aL}^c	D_{aL}^c
$(3, 3, 0)$	$(\mathbf{3}^*, 1, -2/3)$	$(\mathbf{3}^*, 1, 1/3)$	$(\mathbf{3}^*, 1, 1/3)$

¹³ÖZER, M. Phys. Rev. D54, 1143 (1996)

con $a = 1, 2$, los quarks en dos de las tres familias. Para los quarks en la otra familia se tiene:

Tabla 12. Tercera generación del Sector de Quarks para el Modelo D.

$\chi_L^3 = \begin{pmatrix} d_3 \\ u_3 \\ U \end{pmatrix}_L$	u_{3L}^c	d_{3L}^c	U_L^c
$(3, 3^*, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$

Las tres generaciones de leptones transforman ahora como antitripletos de $SU(3)_L$, es decir:

Tabla 13. Sector de Leptones para el Modelo D.

$\psi_L^\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^- \\ \nu_\alpha \\ N_\alpha^0 \end{pmatrix}_L$	α_L^+
$(1, 3^*, -1/3)$	$(1, 1, 1)$

para $\alpha = e, \mu, \tau$ las tres familias.

Este modelo ha sido ampliamente estudiado en la literatura ¹⁴.

2.3.3 Otros Modelos. También se puede considerar otros posibles modelos 331 sin carga eléctrica exótica (con $b=1/2$). Contrario a los modelos de una familia, ahora se puede jugar cancelando las anomalías de varias maneras diferentes.

Primero que todo, se va a definir los siguientes conjuntos cerrados de fermiones (se dice cerrado en el sentido de que se incluyen en cada conjunto las antipartículas de las partículas cargadas):

- $S_1 = [(\nu_\alpha, \alpha^-, E_\alpha^-); \alpha^+; E_\alpha^+]$ con numeros cuánticos $(1, 3, -2/3); (1, 1, 1); (1, 1, 1)$;
- $S_2 = [(\alpha^-, \nu_\alpha, N_\alpha^0); \alpha^+;]$ con numeros cuánticos $(1, 3^*, -1/3); (1, 1, 1)$;
- $S_3 = [(d, u, U); u^c; d^c; U^c]$ con numeros cuánticos $(3, 3^*, 1/3); (3^*, 1, -2/3); (3^*, 1, 1/3); (3^*, 1, -2/3)$;
- $S_4 = [(u, d, D); d^c; u^c; D^c]$ con numeros cuánticos $(3, 3, 0); (3^*, 1, 1/3); (3^*, 1, -2/3); (3^*, 1, 1/3)$;

¹⁴SINGER, M., Valle J. W. F. and Schechter J. Phys. Rev. D22, 738 (1980); H. N. Long and T. A. Tran, Phys. Rev. D50, R34 (1994).

- $S_5 = [(e^-, \nu_e, N_1^0); (E^-, N_2^0, N_3^0); (N_4^0, E^+, e^+)]$ con numeros cuánticos $(1, 3^*, -1/3); (1, 3^*, -1/3); (1, 3^*, 2/3);$
- $S_6 = [(\nu_e, e^-, E_1^-); (E_2^+, N_1^0, N_2^0); (N_3^0, E_2^-, E_3^-); e^+; E_1^+; E_3^+]$ con numeros cuánticos $(1, 3, -2/3); (1, 3, 1/3); (1, 3, -2/3); (1, 1, 1); (1, 1, 1); (1, 1, 1).$

A continuación se va a calcular las cuatro anomalías triangulares para cada conjunto de partículas. Los resultados son presentados en la Tabla 14.

Tabla 14. Anomalías para S_i .

Anomalías	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
$[\text{SU}(3)_c]^2 U(1)_X$	0	0	0	0	0	0
$[\text{SU}(3)_L]^2 U(1)_X$	-2/3	-1/3	1	0	0	-1
$[\text{grav}]^2 U(1)_X$	0	0	0	0	0	0
$[U(1)_X]^3$	10/9	8/9	-12/9	-6/9	6/9	12/9

Se puede observar de la Tabla 14 que el Modelo A es justamente $(S_4 + S_5)$ y el Modelo B es $(S_3 + S_6)$. El Modelo C es representado por $(3S_1 + 2S_3 + S_4)$ y el Modelo D por $(3S_2 + S_3 + 2S_4)$. Pero estos no son los únicos modelos sin anomalías que se pueden lograr, se pueden construir nuevos modelos libres de anomalías para dos, tres, y mas familias.

Cuatro modelos de dos familias son: $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$, $(2S_4 + 2S_5)$, $(2S_3 + 2S_6)$ y $(S_3 + S_4 + S_5 + S_6)$, pero estos modelos no pueden llegar a ser realistas.

Seis nuevos modelos de tres familias son:

Modelo E: $(S_1 + S_2 + S_3 + 2S_4 + S_5)$.

Modelo F: $(S_1 + S_2 + 2S_3 + S_4 + S_6)$.

Modelo G: $(2S_4 + 2S_5 + S_3 + S_6)$.

Modelo H: $(S_4 + S_5 + 2S_3 + 2S_6)$.

Modelo I: $3(S_4 + S_5)$.

Modelo J: $3(S_3 + S_6)$.

Un modelo de cuatro familias estaría dado por $2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$, que tampoco puede llegar a ser realista.

La característica principal de varios de estos últimos modelos es que, cada una de las tres familias es tratada en forma diferente. Hasta donde se sabe estos modelos no han sido estudiados en la literatura hasta ahora.

En el capítulo 4 se tratará con más detalle el Modelo E.

3. EL SECTOR ESCALAR Y EL SECTOR DE BOSONES GAUGE

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiará el sector escalar de los modelos mencionados en el capítulo anterior, es decir, modelos que no contienen partículas con cargas eléctricas exóticas. Se verá que para esos modelos existe un sector escalar el cual permite un rompimiento espontáneo de la simetría en la manera más económica, usando la cadena

$$SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X \rightarrow SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \otimes U(1)_Q,$$

lo cual implica la existencia de ocho bosones de Goldstone que deben estar contenidos en dicho sector escalar.

Además del rompimiento espontáneo de la simetría, este sector escalar puede ser usado para darle masas tanto a los bosones gauge, como a los fermiones.

3.2 EL SECTOR ESCALAR

A fin de romper la simetría, se necesitarán tres tripletes escalares complejos de Higgs (junto con sus complejos conjugados), así pues, se tendrá nueve escalares complejos y dieciocho reales. Estos tres tripletes escalares junto con sus respectivos valores esperados en el vacío (VEV) son:

$$\begin{aligned} \phi_1(1, 3^*, -1/3) &= \begin{pmatrix} \phi_1^- \\ \phi_1^0 \\ \phi_1'^0 \end{pmatrix} \quad \text{con VEV} \quad \langle \phi_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix}, \\ \phi_2(1, 3^*, -1/3) &= \begin{pmatrix} \phi_2^- \\ \phi_2^0 \\ \phi_2'^0 \end{pmatrix} \quad \text{con VEV} \quad \langle \phi_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \phi_3(1, 3^*, 2/3) &= \begin{pmatrix} \phi_3^0 \\ \phi_3^+ \\ \phi_3'^+ \end{pmatrix} \quad \text{con VEV} \quad \langle \phi_3 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{v'}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (74)$$

con la jerarquía $V \gg v \simeq v' \sim 250 \text{ GeV}$, la escala de masa electrodébil. Los escalares complejos neutros están dados por:

$$\begin{aligned}
\phi_1^0 &= \frac{\phi_{1R}^0 + i\phi_{1I}^0}{\sqrt{2}}, \\
\phi_2^{\prime 0} &= \frac{\phi_{2R}^{\prime 0} + i\phi_{2I}^{\prime 0}}{\sqrt{2}}, \\
\phi_1^{\prime 0} &= V + \frac{\phi_{1R}^{\prime 0} + i\phi_{1I}^{\prime 0}}{\sqrt{2}}, \\
\phi_2^0 &= v + \frac{\phi_{2R}^0 + i\phi_{2I}^0}{\sqrt{2}}, \\
\phi_3^0 &= v' + \frac{\phi_{3R}^0 + i\phi_{3I}^0}{\sqrt{2}}.
\end{aligned} \tag{75}$$

La parte real ϕ_R es conocida como un escalar CP-par ó escalar puro, y la imaginaria ϕ_I como CP-impar ó pseudoescalar¹⁵.

3.2.1 El Potencial Escalar. El potencial escalar más general renormalizable, el cual incluye ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 se puede escribir en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
V(\phi_1, \phi_2, \phi_3) &= \mu_1^2 \phi_1^\dagger \phi_1 + \mu_2^2 \phi_2^\dagger \phi_2 + \mu_3^2 \phi_3^\dagger \phi_3 + \frac{\mu_4^2}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2 + H.C.) + \lambda_1 (\phi_1^\dagger \phi_1)^2 \\
&+ \lambda_2 (\phi_2^\dagger \phi_2)^2 + \lambda_3 (\phi_3^\dagger \phi_3)^2 + \frac{\lambda_4}{2} [(\phi_1^\dagger \phi_2)^2 + H.C.] + \lambda_5 (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_2^\dagger \phi_2) \\
&+ \lambda_6 (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_3^\dagger \phi_3) + \lambda_7 (\phi_2^\dagger \phi_2) (\phi_3^\dagger \phi_3) + \lambda_8 (\phi_1^\dagger \phi_2) (\phi_2^\dagger \phi_1) + \lambda_9 (\phi_1^\dagger \phi_3) (\phi_3^\dagger \phi_1) \\
&+ \lambda_{10} (\phi_2^\dagger \phi_3) (\phi_3^\dagger \phi_2) + \frac{1}{2} [\lambda_{11} (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_1^\dagger \phi_2) + \lambda_{12} (\phi_2^\dagger \phi_2) (\phi_1^\dagger \phi_2) + \lambda_{13} (\phi_3^\dagger \phi_3) (\phi_1^\dagger \phi_2)] \\
&+ \frac{1}{2} [\lambda_{14} (\phi_1^\dagger \phi_3) (\phi_3^\dagger \phi_2) + f \epsilon_{ijk} \phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k + H.C.].
\end{aligned} \tag{76}$$

3.3 EL SECTOR DE BOSONES GAUGE

En el grupo 331, hay un total de 17 bosones gauge; los cuales son: un campo gauge B^μ (el fotón) asociado con $U(1)_X$, los ocho campos gluónicos no masivos (es decir, ocho campos de Goldston) asociados con la simetría no rota $SU(3)_C$, y otros ocho asociados con $SU(3)_L$, que por conveniencia se los puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} \lambda_\alpha A_\alpha^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} D_1^\mu & W^{+\mu} & K^{+\mu} \\ W^{-\mu} & D_2^\mu & K^{0\mu} \\ K^{-\mu} & \bar{K}^{0\mu} & D_3^\mu \end{pmatrix} \tag{77}$$

¹⁵FILIPPI, Simonetta, Ponce W. A. and Sánchez L. A. Dark Matter from the Scalar Sector of 331 Models without Exotic Electric Charges. hep-ph/0509173 (2005)

donde $D_1^\mu = A_3^\mu/\sqrt{2} + A_8^\mu u/\sqrt{6}$, $D_2^\mu = -A_3^\mu/\sqrt{2} + A_8^\mu/\sqrt{6}$, y $D_3^\mu = -2A_8^\mu/\sqrt{6}$. $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 8$ son las ocho matrices normalizadas de Gell-Mann. Esto permite escribir el operador de carga eléctrica como

$$Q = \frac{\lambda_3}{2} + \frac{\lambda_8}{2\sqrt{3}} + XI_3, \quad (78)$$

para la representación 3, y

$$Q^* = -\frac{\lambda_3}{2} - \frac{\lambda_8}{2\sqrt{3}} + XI_3, \quad (79)$$

para la representación 3*; donde I_3 es la matriz unidad 3×3 .

Ahora para poder encontrar las masas de los bosones gauge, se debe tomar el Lagrangiano Escalar pero sin el potencial(ver ecuación (16)), es decir:

$$\mathcal{L}_\phi = (\mathcal{D}^\mu \phi_i)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \phi_i), \quad \phi_i = \phi_1, \phi_2, \phi_3, \quad (80)$$

siendo la derivada covariante para los tripletes de $SU(3)_L$

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu - i\frac{g}{2}\lambda_\alpha A_\alpha^\mu - ig'XB^\mu, \quad \rightarrow \text{ para la representación 3,} \quad (81)$$

$$\bar{\mathcal{D}}^\mu = \partial^\mu - i\frac{g}{2}\bar{\lambda}_\alpha A_\alpha^\mu - ig'XB^\mu, \quad \rightarrow \text{ para la representación 3*,} \quad (82)$$

con $\bar{\lambda}_\alpha = -\lambda_\alpha^* = -\lambda_\alpha^T$, g y g' son las constantes de acoplamiento de $SU(3)_L$ y $U(1)_X$, y X es la hipercarga.

Al reemplazar los respectivos VEV del sector escalar, y las anteriores derivadas covariantes, en la expresión (79), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\phi = & \frac{g^2}{4}(v'^2 + v^2)W_\mu^- W_\mu^+ + \frac{g^2}{4}(v'^2 + 2V^2)K_\mu^- K_\mu^+ + \frac{g^2}{4}(v^2 + 2V^2)K_\mu^0 K_\mu^0 \\ & + \frac{V^2}{4} \left[\sqrt{2}gD_{3\mu} + \frac{2}{3}g'B_\mu \right]^2 + \frac{v^2}{8} \left[\sqrt{2}gD_{2\mu} + \frac{2}{3}g'B_\mu \right]^2 + \frac{v'^2}{8} \left[\sqrt{2}gD_{1\mu} - \frac{4}{3}g'B_\mu \right]^2 \end{aligned} \quad (83)$$

3.3.1 Masa para los Bosones Gauge Cargados. Los primeros tres términos de la ecuación (82) son los términos de masa para los bosones gauge cargados en el sector electrodébil:

$$M_{W^\pm}^2 = \frac{g^2}{4}(v^2 + v'^2), \quad M_{K^\pm}^2 = \frac{g^2}{4}(2V^2 + v'^2) \quad y \quad M_{K^0 \bar{K}^0}^2 = \frac{g^2}{4}(2V^2 + v^2). \quad (84)$$

3.3.2 Masa para los Bosones Gauge Neutros. Ahora se toma los últimos tres términos de la ecuación (82), que después de reemplazar los valores de D_1^μ , D_2^μ y D_3^μ se obtiene el término de masa

$$M = V^2 \left(\frac{g'B^\mu}{3} - \frac{gA_8^\mu}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{v^2}{8} \left(\frac{2g'B^\mu}{3} - gA_3^\mu + \frac{gA_8^\mu}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{v'^2}{8} \left(gA_3^\mu - \frac{4g'B^\mu}{3} + \frac{gA_8^\mu}{\sqrt{3}} \right)^2.$$

Es conveniente escribir la anterior ecuación en forma de matriz, debido a que se necesita encontrar sus autovalores, así pues en la base $(A_3, A_8, B)^\mu$ se tiene

$$M = \frac{g^2}{4} \begin{pmatrix} \frac{v^2+v'^2}{2} & \frac{-v^2+v'^2}{2\sqrt{3}} & -\left(\frac{v^2+2v'^2}{2}\right)\delta \\ \frac{-v^2+v'^2}{2\sqrt{3}} & \frac{v^2+8v'^2+v'^2}{6} & -\left(\frac{-v^2+4V^2+2v'^2}{2\sqrt{3}}\right)\delta \\ -\left(\frac{v^2+2v'^2}{2}\right)\delta & -\left(\frac{-v^2+4V^2+2v'^2}{2\sqrt{3}}\right)\delta & \left(\frac{v^2}{2} + V^2 + 2v'^2\right)\delta^2 \end{pmatrix} \quad (85)$$

donde δ se define como $\delta = 2g'/3g$.

El determinante de la matriz M es cero, lo cual permite establecer que existe al menos un autovalor igual a cero, el cual es relacionado con la masa cero del fotón.

Al diagonalizar la matriz M encontramos que el autovalor igual a cero arroja un autovector

$$A^\mu = S_W A_3^\mu + C_W \left[\frac{T_w}{\sqrt{3}} A_8^\mu + \left(1 - \frac{T_w^2}{3}\right)^{1/2} B^\mu \right], \quad (86)$$

el cual corresponde al campo fotónico. Un vector ortonormal a este campo fotónico es dado por

$$Z'^\mu = -\left(1 - \frac{T_W^2}{3}\right)^{1/2} A_8^\mu + \frac{T_W}{\sqrt{3}} B^\mu. \quad (87)$$

Y un tercer campo, el cual es ortonormal a los dos anteriores, sera

$$Z^\mu = C_W A_3^\mu - S_W \left[\frac{T_W}{\sqrt{3}} A_8^\mu + \left(1 - \frac{T_w^2}{3}\right)^{1/2} B^\mu \right] \quad (88)$$

$S_W = \sqrt{3}g'/\sqrt{3g^2 + 4g'^2}$ y C_W son el seno y el coseno del ángulo de mezcla electrodébil respectivamente y $T_W = S_W/C_W$.

Después de una cierta algebra, de lo anterior, se obtiene las siguientes funciones propias

$$\begin{aligned} Z_1^\mu &= Z_\mu \cos\theta + Z'_\mu \sin\theta \\ Z_2^\mu &= -Z_\mu \sin\theta + Z'_\mu \cos\theta. \end{aligned} \quad (89)$$

siendo estos los bosones gauge neutros físicos los cuales esta definidos a través del ángulo de mezcla θ y Z_μ, Z'_μ . El ángulo de mezcla se lo encuentra de la expresión

$$\tan(2\theta) = \frac{\sqrt{12}C_W(1 - T_W^2/3)^{1/2}[v^2(1 - T_W^2) - v'^2(1 + T_W^2)]}{3(v^2 + v'^2)(1 - T_W^2/3) - C_W^2[8V^2 + v^2(1 - T_W^2)^2 + v'^2(1 + T_W^2)^2]}. \quad (90)$$

De la expresión (87) se puede ver que Z^μ corresponde a la corriente débil neutra del Modelo Estándar, de donde puede verse que la hipercarga del ME se le puede asociar un bosón gauge

$$Y^\mu = \left[\frac{T_W}{\sqrt{3}} A_8^\mu + \left(1 - \frac{T_W^2}{3}\right)^{1/2} B^\mu \right]. \quad (91)$$

Cabe resaltar que en el límite $\theta \rightarrow 0$, $M_Z = M_{W^\pm}/C_W$, y $Z_1^\mu = Z^\mu$ es el boson gauge del ME, que se obtiene cuando $V \rightarrow \infty$ ó $v'^2 = v^2(C_W^2 - S_W^2)$. En general θ puede ser diferente de cero, aunque tome un valor muy pequeño, el cual sera determinado de la fenomenología para cada modelo en particular.

4. FENOMENOLOGÍA DEL MODELO E

4.1 INTRODUCCIÓN

Como ya sabe, el Modelo E es un modelo interfamilias, donde sus anomalías se cancelan gracias a la interrelación entre sus familias. Teniendo en claro esto, se calculara las corrientes para los fermiones de dicho modelo, partiendo del Lagrangiano fermiónico. Posteriormente gracias a la determinación del Hamiltoniano de corrientes neutras, se encontraran los acoples para los procesos $Z_1^\mu \rightarrow \bar{f}f$, $Z_2^\mu \rightarrow \bar{f}f$ respectivamente.

Finalmente con el Lagrangiano de Yukawa que el sector escalar produce para los fermiones, se obtendrán las masas para el contenido fermiónico del modelo.

4.2 CONTENIDO FERMIÓNICO DEL MODELO

En el capítulo 2 se definió el Modelo E como la suma: $S_1 + S_2 + S_3 + 2S_4 + S_5$, por lo tanto tiene la siguiente estructura de multipletes:

Sector de Leptones:

Tabla 15. Grupo de partículas S_1 .

$\psi_{1L} = \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \alpha^- \\ E_\alpha^- \end{pmatrix}_L$	α_L^+	$E_{\alpha L}^+$
$(1, 3, -2/3)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$

con $\alpha = \mu$;

Tabla 16. Grupo de partículas S_2 .

$\psi_{2L} = \begin{pmatrix} \alpha'^- \\ \nu_{\alpha'} \\ N_\alpha^0 \end{pmatrix}_L$	$\alpha_L'^+$
$(1, 3^*, -1/3)$	$(1, 1, 1)$

con $\alpha' = \tau$;

Tabla 17. Grupo de partículas S_5 .

$\psi_{3L} = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \\ N_1^0 \end{pmatrix}_L$	$\psi_{4L} = \begin{pmatrix} E^- \\ N_2^0 \\ N_3^0 \end{pmatrix}_L$	$\psi_{5L} = \begin{pmatrix} N_4^0 \\ E^+ \\ e^+ \end{pmatrix}_L$
$(1, 3^*, -1/3)$	$(1, 3^*, -1/3)$	$(1, 3^*, 2/3)$

Sector de Quarks:

Tabla 18. Grupo de partículas $2S_4$.

$\chi_{aL} = \begin{pmatrix} u_a \\ d_a \\ D_a \end{pmatrix}_L$	d_{aL}^c	u_{aL}^c	D_{aL}^c
$(3, 3, 0)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$

con $a = 1, 2$; y finalmente

Tabla 19. Grupo de partículas S_3 .

$\chi_{3L} = \begin{pmatrix} d_3 \\ u_3 \\ U_3 \end{pmatrix}_L$	u_{3L}^c	d_{3L}^c	U_{3L}^c
$(3, 3^*, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$

4.3 CORRIENTES

Las corrientes para los fermiones son diferentes para cada modelo¹⁶, como también son diferentes a las corrientes del Modelo Estándar.

De la misma manera como en el Modelo Estándar (ver ecuación (44)), para poder obtener tanto las corrientes cargadas como las neutras, se parte del Lagrangiano de fermiones, pero ahora dado por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_F = & \bar{\psi}_{1L} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{1L} + \sum_{\sigma=2}^5 \bar{\psi}_{\sigma L} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \psi_{\sigma L} + \sum_{l_R = \alpha_R^-, E_{\alpha R}^-, \alpha_R'^-} \bar{l}_R i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu l_R + \bar{\chi}_{3L} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \chi_{3L} \\
 & + \sum_{q_R = d_{3R}, u_{3R}, U_{3R}} \bar{q}_R i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu q_{3R} + \bar{\chi}_{aL} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu \chi_{aL} + \sum_{q_{aR} = d_{aR}, u_{aR}, D_{aR}} \bar{q}_{aR} i \gamma^\mu \mathcal{D}_\mu q_{aR}. \quad (92)
 \end{aligned}$$

¹⁶Esto es debido a la diferencia del contenido fermiónico

Ahora, con la ayuda de la expresión (76), la derivada covariante para los tripletes de $SU(3)_L$ dada por la ecuación (80), puede ser expresada como

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - \frac{ig}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} D_{1\mu} + \frac{g'}{g} X B_\mu & W_\mu^+ & K_\mu^+ \\ W_\mu^- & D_{2\mu} + \frac{g'}{g} X B_\mu & K_\mu^0 \\ K_\mu^- & \bar{K}_\mu^0 & D_{3\mu} + \frac{g'}{g} X B_\mu \end{pmatrix} \quad (93)$$

y la derivada covariante (81) para la representación 3^* sera

$$\bar{\mathcal{D}}_\mu = \partial_\mu + \frac{ig}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} D_{1\mu} - \frac{g'}{g} X B_\mu & W_\mu^- & K_\mu^- \\ W_\mu^+ & D_{2\mu} - \frac{g'}{g} X B_\mu & \bar{K}_\mu^0 \\ K_\mu^+ & K_\mu^0 & D_{3\mu} - \frac{g'}{g} X B_\mu \end{pmatrix} \quad (94)$$

con

$$D_{1\mu} = \frac{A_{3\mu}}{\sqrt{2}} + \frac{A_{8\mu}}{\sqrt{6}}, \quad D_{2\mu} = \frac{-A_{3\mu}}{\sqrt{2}} + \frac{A_{8\mu}}{\sqrt{6}}, \quad y \quad D_{3\mu} = \frac{-2A_{8\mu}}{\sqrt{6}}. \quad (95)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, y aclarando que en este caso la derivada covariante para los singletes es dada por

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - g' X B_\mu, \quad (96)$$

el Lagrangiano fermiónico (91) nos arroja los siguientes resultados:

4.3.1 Corrientes Cargadas. Las interacciones entre los campos vectoriales cargados con los fermiones son:

$$\begin{aligned} H^{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} [& W_\mu^+ (\bar{u}_{aL} \gamma^\mu d_{aL} - \bar{u}_{3L} \gamma^\mu d_{3L} + \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \alpha_L^- - \bar{\nu}'_{\alpha' L} \gamma^\mu \alpha_L'^- \\ & - \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L^- - \bar{N}_{2L}^0 \gamma^\mu E_L^- - \bar{E}_L^+ \gamma^\mu N_{4L}^0) \\ & + K_\mu^+ (\bar{u}_{aL} \gamma^\mu D_{aL} - \bar{U}_{3L} \gamma^\mu d_L + \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu E_{\alpha L}^- - \bar{N}_{\alpha L}^0 \gamma^\mu \alpha_L'^- \\ & - \bar{N}_{1L}^0 \gamma^\mu e_L^- - \bar{N}_{3L}^0 \gamma^\mu E_L^- - \bar{e}_L^+ \gamma^\mu N_{4L}^0) \\ & + K_\mu^0 (\bar{d}_{aL} \gamma^\mu D_{aL} - \bar{U}_{3L} \gamma^\mu u_{3L} + \bar{\alpha}_L^- \gamma^\mu E_\alpha^- - \bar{N}_{\alpha L}^0 \gamma^\mu \nu_{\alpha' L} \\ & - \bar{N}_{1L}^0 \gamma^\mu \nu_{eL} - \bar{N}_{3L}^0 \gamma^\mu N_{2L}^0 - \bar{e}_L^+ \gamma^\mu E_L^+) \quad + \quad H.C. \end{aligned} \quad (97)$$

Vale la pena destacar, que el segundo y el quinto término de la anterior expresión constituyen la corriente débil cargada del Modelo Estándar, por tal motivo se puede identificar a W^\pm como el bosón débil cargado de $SU(2)_L$.

4.3.2 Corrientes Neutras. Para encontrar las corrientes neutras $J_\mu(EM)$, $J_\mu(Z)$ y $J_\mu(Z')$, asociadas con el Hamiltoniano

$$H^0 = e A^\mu J_\mu(EM) + \frac{g}{C_W} Z^\mu J_\mu(Z) + \frac{g'}{\sqrt{3}} Z'^\mu J_\mu(Z'), \quad (98)$$

se debe despejar A_3^μ , A_8^μ y B^μ , de las definiciones para los campos A^μ , Z'^μ , Z^μ dadas en las ecuaciones (85), (86), y (87) respectivamente; para obtener

$$A_3^\mu = A^\mu S_W + Z^\mu C_w$$

$$A_8^\mu = \frac{S_W}{A^\mu} - \frac{S_W T_W}{\sqrt{3}} - \left(1 - \frac{T_W^2}{3}\right)^{1/2} \quad (99)$$

$$B^\mu = C_W \left(1 - \frac{T_W^2}{3}\right)^{1/2} A^\mu - S_W \left(1 - \frac{T_W^2}{3}\right)^{1/2} Z^\mu + \frac{T_W}{\sqrt{3}} Z'^\mu. \quad (100)$$

Al reemplazar las expresiones (98) en las ecuaciones (94), y la expresión (99) en la derivada covariante (92), y después de una cierta algebra sobre el Lagrangiano fermiónico (91), se obtiene las corrientes neutras

$$J_\mu(EM) = \frac{2}{3}(\bar{u}_3 \gamma_\mu u_3 + \bar{U}_3 \gamma_\mu U_3 + \bar{u}_a \gamma_\mu u_a) - \frac{1}{3}(\bar{d}_3 \gamma_\mu d_3 + \bar{d}_a \gamma_\mu d_a + \bar{D}_a \gamma_\mu D_a)$$

$$- (\bar{\alpha}^- \gamma_\mu \alpha^- + \bar{E}_\alpha^- \gamma_\mu E_\alpha^- + \bar{\alpha}'^- \gamma_\mu \alpha'^- + \bar{e}^- \gamma_\mu e^- + \bar{E}^- \gamma_\mu E^-)$$

$$= \sum_f \bar{f} \gamma_\mu q_f f, \quad (101)$$

$$J_\mu(Z) = J_{\mu,L}(Z) - S_W^2 J_\mu(EM),$$

$$J_\mu(Z') = T_W J_\mu(EM) - J_{\mu,L}(Z'), \quad (102)$$

donde $e = g S_W = g' C_W \sqrt{1 - T_W^2/3} > 0$ es la carga eléctrica, q_f es la carga del fermión f en unidades de e , $J_\mu(ME)$ es la corriente electromagnética, y las corrientes de quiralidad izquierda son

$$J_{\mu,L}(Z) = \frac{1}{2}(\bar{u}_{3L} \gamma_\mu u_{3L} - \bar{d}_{3L} \gamma_\mu d_{3L} + \bar{u}_{aL} \gamma_\mu u_{aL} - \bar{d}_{aL} \gamma_\mu d_{aL} + \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma_\mu \nu_{\alpha L} - \bar{\alpha}_L^- \gamma_\mu \alpha_L^-)$$

$$- \bar{\alpha}'_L^- \gamma_\mu \alpha'_L^- + \bar{\nu}_{\alpha' L} \gamma_\mu \nu_{\alpha' L} - \bar{e}_L^- \gamma_\mu e_L^- + \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu \nu_{eL} - \bar{E}^- \gamma_\mu E^- + \bar{N}_2^0 \gamma_\mu N_2^0)$$

$$= \sum_f \bar{f}_L \gamma_\mu T_{3f} f_L,$$

$$J_{\mu,L}(Z') = S_{2W}^{-1}(\bar{d}_{3L} \gamma_\mu d_{3L} + \bar{u}_{aL} \gamma_\mu u_{aL} + \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma_\mu \nu_{\alpha L} - \bar{\alpha}'_L^- \gamma_\mu \alpha'_L^- - \bar{e}_L^- \gamma_\mu e_L^-)$$

$$- \bar{E}_L^- \gamma_\mu E_L^- - \bar{N}_{4L}^0 \gamma_\mu N_{4L}^0)$$

$$+ T_{2W}^{-1}(-\bar{u}_{3L} \gamma_\mu u_{3L} + \bar{d}_{aL} \gamma_\mu d_{aL} + \bar{\alpha}_L^- \gamma_\mu \alpha_L^- - \bar{\nu}_{\alpha' L} \gamma_\mu \nu_{\alpha' L} - \bar{\nu}_{eL} \gamma_\mu \nu_{eL})$$

$$- \bar{N}_{2L}^0 \gamma_\mu N_{2L}^0 - \bar{E}_L^+ \gamma_\mu E_L^+)$$

$$- T_W^{-1}(-\bar{U}_{3L} \gamma_\mu U_{3L} + \bar{D}_{aL} \gamma_\mu D_{aL} + \bar{E}_{\alpha L}^- \gamma_\mu E_{\alpha L}^- - \bar{N}_\alpha^0 \gamma_\mu N_\alpha^0 - \bar{N}_{1L}^0 \gamma_\mu N_{1L}^0)$$

$$- \bar{N}_{3L}^0 \gamma_\mu N_{3L}^0 - \bar{e}_L^+ \gamma_\mu e_L^+)$$

$$= \sum_f \bar{f}_L \gamma_\mu T_{9f} f_L, \quad (103)$$

donde $S_{2W} = 2S_W C_W$, $T_{2W} = S_{2W}/C_{2W}$, $C_{2W} = C_W^2 - S_W^2$, $\bar{N}_2^0 \gamma_\mu N_2^0 = \bar{N}_{2L}^0 \gamma_\mu N_{2L}^0 + \bar{N}_{2R}^0 \gamma_\mu N_{2R}^0 = \bar{N}_{2L}^0 \gamma_\mu N_{2L}^0 - \bar{N}_{2L}^{0c} \gamma_\mu N_{2L}^{0c} = \bar{N}_{2L}^0 \gamma_\mu N_{2L}^0 - \bar{N}_{4L}^0 \gamma_\mu N_{4L}^0$, y similarmente $\bar{E} \gamma_\mu E = \bar{E}_L^- \gamma_\mu E_L^- - E_L^+ \gamma_\mu E_L^+$. De esta manera $T_{3f} = Dg(1/2, -1/2, 0)$ es la tercera componente del isospín débil, actuando en la representación 3 de $SU(3)_L$ (negativa cuando actúa en la representación 3^*), y $T_{9f} = Dg(S_{2W}^- 1, T_{2W}^- 1, -T_W^- 1)$ es una matriz diagonal 3×3 actuando en la representación 3 de $SU(3)_L$ (negativa cuando actúa en 3^*).

Nótese que $J_\mu(Z)$ es justamente la generalización de la corriente neutra del Modelo Estándar, lo cual permite identificar a Z_μ como el bosón gauge neutro del ME.

4.4 DETERMINACIÓN DE H^{NC} EN TÉRMINOS DE LOS Z_i^μ

Después de despejar de las ecuaciones (88) Z^μ y Z'^μ ,

$$Z^\mu = Z_1^\mu \cos \theta - Z_2^\mu \sin \theta; \quad Z'^\mu = Z_1^\mu \sin \theta + Z_2^\mu \cos \theta, \quad (104)$$

de reemplazar en los dos últimos términos del hamiltoniano (97), y de realizar ciertos cálculos, se obtiene el Hamiltoniano de corrientes neutras

$$\begin{aligned} H^{NC} &= \frac{g}{2C_W} \sum_{i=1}^2 Z_i^\mu \sum_f \bar{f} \gamma^\mu [a_{iL}(f)(1 - \gamma^5) + a_{iR}(f)(1 + \gamma^5)] f \\ &= \frac{g}{2C_W} \sum_{i=1}^2 Z_i^\mu \sum_f \bar{f} \gamma^\mu [g(f)_{iV} - g(f)_{iA} \gamma^5] f, \end{aligned} \quad (105)$$

con el que encontramos los acoplos de los estados físicos Z_1^μ y Z_2^μ .

En H^{NC} se tiene que:

$$\begin{aligned} a_{1L}(f) &= \cos \theta (T_{3f} - q_f S_W^2) + \frac{g' \sin \theta C_W}{g\sqrt{3}} (q_f T_W - T_{9f}), \\ a_{1R}(f) &= q_f S_W \left(-\cos \theta S_W + \frac{g' \sin \theta}{g\sqrt{3}} \right), \\ a_{2L}(f) &= -\sin \theta (T_{3f} - q_f S_W^2) + \frac{g' \cos \theta C_W}{g\sqrt{3}} (q_f T_W - T_{9f}), \\ a_{2R}(f) &= q_f S_W \left(\sin \theta S_W + \frac{g' \cos \theta}{g\sqrt{3}} \right), \end{aligned} \quad (106)$$

y

$$g(f)_{iV} = a(f)_{iL} + a(f)_{iR}; \quad g(f)_{iA} = a(f)_{iL} - a(f)_{iR} \quad (107)$$

siendo

$$\begin{aligned}
g(f)_{1V} &= \cos \theta (T_{3f} - 2S_W^2 q_f) - \frac{g' \sin \theta}{g\sqrt{3}} (T_{9f} C_W - 2S_W q_f), \\
g(f)_{2V} &= -\sin \theta (T_{3f} - 2S_W^2 q_f) + \frac{g' \cos \theta}{g\sqrt{3}} (2q_f S_W - T_{9f} C_W), \\
g(f)_{1A} &= \cos \theta T_{3f} - \frac{g' \sin \theta}{g\sqrt{3}} T_{9f} C_W, \\
g(f)_{2A} &= -\sin \theta T_{3f} - \frac{g' \cos \theta}{g\sqrt{3}} T_{9f} C_W,
\end{aligned} \tag{108}$$

que al ser comparados con los valores del ME $g(f)_{1V}^{ME} = T_{3f} - 2q_f S_W^2$, y $g(f)_{1A}^{ME} = T_{3f}$, se puede ver que estos últimos valores están contenidos en los correspondientes al Modelo E.

En el límite $\theta = 0$ los acoples de Z_1^μ para los leptones y quarks ordinarios son los mismos que en el ME. Con esto se prueba la nueva fenomenología mas allá del ME.

Los valores de g_{iv} , g_{iA} con $i = 1, 2$ son presentados en los Tablas (20) y (21).

Tabla 20. Acoples de $Z_1^\mu \rightarrow \bar{f}f$.

f	g_{1V}	g_{1A}
u_a	$\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}S_W^2\right) \left(\cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right)$	$\frac{1}{2} \left[\cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$
d_a	$\cos \theta \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}S_W^2\right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}S_W^2\right)$	$-\frac{1}{2} \left[\cos \theta + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2S_W^2)\right]$
D_a	$\frac{2}{3}S_W^2 \cos \theta + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(1 - \frac{5}{3}S_W^2\right)$	$-\frac{C_W^2 \text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
u_3	$\cos \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}S_W^2\right) + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}S_W^2\right)$	$\frac{1}{2} \left[\cos \theta + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2S_W^2)\right]$
d_3	$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}S_W^2\right) \left(-\cos \theta + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right)$	$-\frac{1}{2} \left[\cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$
U_3	$-\frac{4}{3}S_W^2 \cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(1 - \frac{7}{3}S_W^2\right)$	$-\frac{C_W^2 \text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
e^-	$\cos \theta \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2\right) + \frac{3 \text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2\right)$	$-\frac{1}{2} \left[\cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2C_W^2)\right]$
E^-	$\cos \theta (-1 + 2S_W^2) - \frac{S_W^2 \text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$	$\frac{C_W^2 \text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
E_α^-	$2S_W^2 \cos \theta + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 3S_W^2)$	$-\frac{C_W^2 \text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
α^-	$\cos \theta \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2\right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2\right)$	$-\frac{1}{2} \left[\cos \theta + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2S_W^2)\right]$
α'^-	$\left(\frac{1}{2} - 2S_W^2\right) \left(-\cos \theta + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right)$	$-\frac{1}{2} \left[\cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$
ν_α	$\frac{1}{2} \left[\cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$	$\frac{1}{2} \left[\cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$
$\nu'_\alpha, \nu_e, N_2^0$	$\frac{1}{2} \left[\cos \theta + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2S_W^2)\right]$	$\frac{1}{2} \left[\cos \theta + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2S_W^2)\right]$
N_α^0, N_1^0, N_3^0	$-\frac{C_W^2 \text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$	$-\frac{C_W^2 \text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
N_4^0	$-\frac{1}{2} \left[\cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$	$-\frac{1}{2} \left[\cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$

Tabla 21. Acoplos de $Z_2^\mu \rightarrow \bar{f}f$.

f	g_{2V}	g_{2A}
u_a	$\left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}S_W^2\right) \left(-\text{sen } \theta - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right)$	$-\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$
d_a	$-\text{sen } \theta \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3}S_W^2\right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}S_W^2\right)$	$\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2S_W^2)\right]$
D_a	$-\frac{2}{3}S_W^2 \text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(1 - \frac{5}{3}S_W^2\right)$	$-\frac{C_W^2 \cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
u_3	$-\text{sen } \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3}S_W^2\right) + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}S_W^2\right)$	$\frac{1}{2} \left[-\text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2S_W^2)\right]$
d_3	$\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}S_W^2\right) \left(\text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right)$	$\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$
U_3	$\frac{4}{3}S_W^2 \text{sen } \theta - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(1 - \frac{7}{3}S_W^2\right)$	$-\frac{C_W^2 \cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
e^-	$-\text{sen } \theta \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2\right) + \frac{3 \cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2\right)$	$\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2C_W^2)\right]$
E^-	$-\text{sen } \theta (-1 + 2S_W^2) - \frac{S_W^2 \cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$	$\frac{C_W^2 \cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
E_α^-	$-2S_W^2 \text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 3S_W^2)$	$-\frac{C_W^2 \cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
α^-	$-\text{sen } \theta \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2\right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2\right)$	$\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2S_W^2)\right]$
α'^-	$\left(\frac{1}{2} - 2S_W^2\right) \left(\text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right)$	$\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$
ν_α	$-\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$	$-\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$
$\nu'_\alpha, \nu_e, N_2^0$	$-\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2S_W^2)\right]$	$-\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 2S_W^2)\right]$
N_α^0, N_1^0, N_3^0	$-\frac{C_W^2 \cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$	$-\frac{C_W^2 \cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
N_4^0	$\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$	$\frac{1}{2} \left[\text{sen } \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}\right]$

4.5 MASA PARA LOS FERMIONES

Para encontrar la masa para los fermiones, se empieza por escribir el Lagrangiano de Yukawa que los tres escalares de Higgs (sector escalar) produce para los campos fermiónicos:

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^Q + \mathcal{L}_Y^l, \quad (109)$$

4.5.1 Masa para los Quarks. Para el sector de quarks se puede escribir los siguientes términos de Yukawa:

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^Q = & \bar{\chi}_{aL} \left(h_{u_{a\rho}} u_{\rho R} \phi_3^* + h_{d_{a\rho}} d_{\rho R} \phi_1^* + h_{d_{a\rho}} d_{\rho R} \phi_2^* + h_{D_a} D_{aR} \phi_1^* + h_{D_a} D_{aR} \phi_2^* + h_{U_3} U_{3R} \phi_3^* \right) \\ & + \bar{\chi}_{3L} \left(G_{u_\rho} u_{\rho R} \phi_1 + G_{u_\rho} u_{\rho R} \phi_2 + G_{d_\rho} d_{\rho R} \phi_3 + G_{D_a} D_{aR} \phi_3 + G_{U_3} U_{3R} \phi_1 + G_{U_3} U_{3R} \phi_2 \right) \\ & + H.C. \end{aligned} \quad (110)$$

donde los indices repetidos implican suma, siendo $a = 1, 2$; $\rho = 1, 2, 3$; y donde h_σ , con $\sigma = u_{a\rho}, \dots, U$ y G_η , con $\eta = u_\rho, \dots, U$ son los acoples de Yukawa.

Al tomar la primera parte del Lagrangiano (109), es decir para χ_{aL} , se obtiene la masa $m_{u_a} = h_{u_{a\rho}} \frac{v'}{\sqrt{2}}$, y la matriz de masa en la base (d_a, D_a) es de la forma:

$$M_{d_a D_a} = \begin{pmatrix} h_{d_{a\rho}} \frac{v}{\sqrt{2}} & h_{D_a} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ h_{d_{a\rho}} V & h_{D_a} V \end{pmatrix}. \quad (111)$$

Después del algebra sobre la matriz anterior se encuentra las masas $m_{d_a} = 0$ y $m_{D_a} = h_{D_a} V + h_{d_{a\rho}} \frac{v}{\sqrt{2}}$.

Ahora se va a tomar la segunda parte del Lagrangiano (109), es decir para χ_{3L} , se obtiene la masa $m_{d_3} = G_{d_3} \frac{v'}{\sqrt{2}}$, y la matriz de masa en la base (u_3, U) es

$$M_{u_3 U_3} = \begin{pmatrix} G_{u_\rho} \frac{v}{\sqrt{2}} & G_{U_3} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ G_{u_\rho} V & G_{U_3} V \end{pmatrix} \quad (112)$$

con autovalores $m_{u_3} = 0$ y $m_{U_3} = G_{U_3} V + G_{u_\rho} \frac{v}{\sqrt{2}}$.

Hasta aquí se han encontrado las masas para los nueve quarks de nuestro modelo. Que los quarks d_a y u_3 no tengan masa no es ningún problema, pues estos pueden adquirir masa a través de correcciones radiativas en el contexto del mismo modelo.

4.5.2 Masas para los Leptones. Para el sector leptónico se puede escribir los siguientes

términos de Yukawa:

$$\begin{aligned}
-\mathcal{L}_Y^l = & \bar{\psi}_{1L}(K_1\alpha_R^-\phi_i^* + K_2E_{\alpha R}^-\phi_i^*) + \bar{\psi}_{2L}(K_3\alpha_R^-\phi_3) \\
& + \epsilon_{abc} [\bar{\psi}_{3L}^a(h_1\psi_{4L}^{*b}\phi_3^{*c} + h_2\psi_{5L}^{*b}\phi_1^{*c} + h_2\psi_{5L}^{*b}\phi_2^{*c}) + \bar{\psi}_{4L}^a(h_3\psi_{5L}^{*b}\phi_1^{*c} + h_3\psi_{5L}^{*b}\phi_2^{*c})] \\
& + H.C.
\end{aligned} \tag{113}$$

donde a, b, c son los índices tensoriales $SU(3)_L$, K_ℓ y h_ϱ , con $\ell, \varrho = 1, 2, 3$, son los acoples de Yukawa para este caso.

Al tomar solo la primera parte del Lagrangiano (112), es decir, lo que concierne a la familia de leptones ψ_{1L} , se encuentra la matriz de masa, en la base (α^-, E_α^-) , de la forma:

$$M_{\alpha^- E_\alpha^-} = \begin{pmatrix} K_1 \frac{v}{\sqrt{2}} & K_2 \frac{v}{\sqrt{2}} \\ K_1 V & K_2 V \end{pmatrix}, \tag{114}$$

con autovalores $m_{\alpha^-} = 0$ y $m_{E_\alpha^-} = K_2 V + K_1 \frac{v}{\sqrt{2}}$.

Ahora al tomar la segunda parte del Lagrangiano (112), es decir para ψ_{2L} , se obtiene la masa $m_{\alpha'^-} = K_{31} \frac{v'}{\sqrt{2}}$.

Finalmente se toma la parte entre corchetes del Lagrangiano (112), es decir lo que corresponde al sector mezclado que involucra las familias ψ_{3L} , ψ_{4L} y ψ_{5L} , para obtener dos matrices de masa. La primera matriz en la base (e, E) es

$$M_{eE} = \begin{pmatrix} -h_2 \frac{v}{\sqrt{2}} & h_2 V \\ -h_3 \frac{v}{\sqrt{2}} & h_3 V \end{pmatrix}, \tag{115}$$

con autovalores $m_e = 0$ y $m_E = h_3 V - h_2 \frac{v}{\sqrt{2}}$.

Para los leptones neutros en la base $(\nu_e, N_1^0, N_2^0, N_3^0, N_4^0)$ se obtiene la segunda matriz de masa

$$M_{Neutra} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_1 \frac{v'}{\sqrt{2}} & -h_2 V \\ 0 & 0 & -h_1 \frac{v'}{\sqrt{2}} & 0 & h_2 \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 & -h_1 \frac{v'}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & -h_3 V \\ h_1 \frac{v'}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 & h_3 \frac{v}{\sqrt{2}} \\ -h_2 V & h_2 \frac{v}{\sqrt{2}} & -h_3 V & h_3 \frac{v}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{116}$$

sus autovalores son $0, \mp \frac{h_1 v'}{\sqrt{2}}, \mp \sqrt{\frac{(v^2 + 2V^2)(h_2^2 + h_3^2) + h_1^2 (v')^2}{2}}$. El autovalor cero corresponde al neutrino ν_e . Al igual que los quarks d_a y u_3 , los leptones α^- y ν_e pueden también adquirir masa mediante los mismos métodos.

5. CONCLUSIONES

En el capítulo 2 se hizo un estudio detallado del grupo $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, encontrando dos parámetros libres a y b asociados al generador de carga eléctrica en $SU(3)_L \otimes U(1)_X$, obteniendo el valor de $a = 1$ cuando se considera que $SU(2)_L$ del ME es tal que $SU(2)_L \subset SU(3)_L$. Al imponer la condición de excluir modelos con carga eléctrica exótica directamente se obtuvo el valor de $b = 1/2$, de esta manera se llegó a ocho modelos diferentes de tres familias.

En el capítulo 3 se mostró que el sector escalar seleccionado complica el álgebra pero se obtienen resultados finales aceptables. Por ejemplo, la masa del bosón vectorial cargado W^\pm tiene contenida la masa del respectivo bosón vectorial cargado del ME. Después del proceso de diagonalización de la matriz M se obtuvo los campos neutros físicos Z_1^μ y Z_2^μ , definidos a través del ángulo de mezcla θ , y se miró que en el límite cuando $\theta \rightarrow 0$, $Z_1^\mu = Z^\mu$ es el bosón gauge del ME.

En el estudio fenomenológico que se le hizo al Modelo E en el capítulo 4, se observó que dicho modelo es libre de anomalías. Se pudo notar que la corriente $J_\mu(Z)$ es justamente la generalización de la corriente neutra presente en el ME, lo que permite identificar a Z^μ como el bosón gauge neutro del ME. El Hamiltoniano H^{NC} nos da los acoplos g_{iV} y g_{iA} de los estados físicos Z_1^μ y Z_2^μ , los cuales contienen a los respectivos acoplos del ME. Se pudo ver que en el límite $\theta = 0$ los acoplos de Z_1^μ para los leptones ordinarios y los quarks u_a y d_a son los mismos que en el ME. Así se puede probar que esta nueva fenomenología va más allá del ME.

Finalmente se pudo ver que los tres campos de Higgs con sus respectivos VEV rompen la simetría de manera apropiada, y producen un modelo realístico de masas para los campos fermiónicos del Modelo E. Algunos fermiones no adquieren masa, pero la pueden obtener mediante correcciones radiativas.

RECOMENDACIONES

Como trabajos futuros, se recomienda realizar el estudio fenomenológico de los restantes modelos (del G al J) nombrados en el capítulo 2, con esto se enriquecerá mucho más la teoría y por ende el conocimiento.

Aunque los resultados obtenidos con los tres escalares complejos de Higgs (sector escalar) son muy aceptables, sería bueno trabajar con un sector escalar más amplio para mirar que tan satisfactorios son los resultados.

Por último, sería recomendable que en trabajos posteriores se realice el cálculo, que no es para nada trivial, de los acoplos de los Higgses con los bosones gauge.

BIBLIOGRAFÍA

- ABERS, E. S. And Lee B.W. Phys. Rep. 9c,1 (1973); Physics Reports, 88, N^o.1 (1982).
- BIALYNICKI-BIRULA, Iwo and Bialynicki-Birula Zofia. Quantum Electrodynamics. Pergamon Press, 1975.
- COMMING, Eugene D. Bucksbaum Philip H. Weak Interactions of Leptons and Quarks. Cambridge University, 1983.
- CHENG, Ta-Pei and Ling-Fong Li. Gauge Theory Of Elementary Particle Physics. Clarendon Press Oxford, 1989.
- DONOGHUE, Jhon F. and Golowich Eugene and Holstein Barry R. Dynamics Of The Standard Model. Cambridge University, 1992.
- FILIPI, Simonetta y Ponce William A. y Sánchez Luis A. Dark Matter from the Scalar Sector of 331 Models without Exotic Electric Charges. hep-ph/0509173 (2005).
- FOOT, R and Long H. N. and Tran T. A., Phys. Rev. D50, R34 (1994).
- FRAMPTON, Paul H. Gauge Field Theories. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1987. Phys. Rev. Lett. 69, 2887 (1992).
- GAITÁN, R. and Hernández-Galeana A. and Martínez R. Some Issues on Spontaneous Symmetry Breaking. Revista Mexicana de Física 38, No. 5 (1992).
- GEORGI, Howard. Lie Algebras in Particle Physics. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc., 1982.
- GIRALDO, Yithsbey. Tesis de Maestría; El Potencial Escalar en $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ como Extensión del Modelo Estándar. Universidad de Antioquia, 2002.
- GUIDRY, Mike. Gauge Fields Theories; An Introduction With Applications. John Wiley y Sons, Inc., 1999.
- HALZEN, Francis and Martin Alan D. Quarks and Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics. John Wiley Sons, Inc., 1984.
- MARTÍNEZ, R. and Ponce William A. and Sánchez Luis A. $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ as

an $SU(6) \otimes U(1)_X$ subgroup. hep-ph/0110246 (2001).

MOHAPATRA, Rabindra N. Unification and Supersymmetry. Springer-Verlag, 1986.

NGOC, Hoang. Scalar Sector of the 331 Model with Three Higgs Triplets. hep-ph/9711204 (1997). Phys. Rev. D53, 437 (1996), hep-ph/9607439.

ÖZER, M. Phys. Rev. D54, 4561 (1996).

PISANO, F. and Pleitez V. Phys. Rev. D46, 410 (1992). Phys. Rev. D47, 2918 (1993).

PONCE, William A. and Flórez Juan B. and Sánchez Luis A. Analysis of $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ Local Gauge Theory. International Journal of modern Physics A, Vol.17, N°.5 (2002).

PONCE, W. A. and Giraldo Y. and Sánchez L. A. The Minimal Scalar Sector of 331 Models without Exotic Electric Charge. hep-ph/0210026 (2002).

PONCE, William A. and Zepeda Arnulfo and Flórez Juan B. Mass Scales and Stability of the Proton in $[SU(6)]^3 \times Z_3$. hep-ph/ 9306245 (1993).

QUIGG, Chris. Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions. The Benjamin/Cummings Publishing Company Inc., 1983.

RYDER, Lewis H. Quantum Field Theory, Second Edition. Cambridge University press, 1996.

SINGER, M. and Valle W. F. and Schechter J. Phys. Rev. D22, 738 (1980).

TRULLY, M. B. and Joshi G. C. The Scalar Sector in 331 Models. hep-ph/9810282 (1999).

WEINBERG, Steven. The Quantum Theory of Fields, Vol 2. Cambridge University, 1996.

ANEXOS

Anexo A. El Teorema de Noether: Simetrías y Leyes de Conservación. Invarianza bajo traslaciones, rotaciones, y transformaciones de Lorentz llevan a la conservación del momentum, de la energía, y del momentum angular. Mejor que estudiar estas leyes de conservación, es interesante estudiar las transformaciones de las simetrías internas que no mezclan campos con diferentes propiedades espacio-temporales (es decir, transformaciones que conmutan con las componentes espacio-temporales de la función de onda).

Por ejemplo, un electrón es descrito por un campo complejo, y al inspeccionar el Lagrangiano de Dirac

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi, \quad (117)$$

muestra que es invariante bajo la transformación de fase

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x), \quad (118)$$

donde α es una constante real. Esto puede ser comprobado fácilmente, notando

$$\partial_\mu\psi \rightarrow e^{i\alpha}\partial_\mu\psi, \quad (119)$$

$$\bar{\psi} \rightarrow e^{-i\alpha}\bar{\psi}. \quad (120)$$

La familia de transformaciones de fase $U(\alpha) \equiv e^{i\alpha}$, donde un solo parámetro α puede correr continuamente sobre números reales, forma un grupo abeliano unitario conocido como el grupo $U(1)$.

Se puede pensar que la observación de la invarianza $U(1)$ de \mathcal{L} es algo trivial y no es importante. Esto no es así. Por medio del Teorema de Noether, esto implica la existencia de una corriente conservada. Para ver esto es suficiente estudiar la invarianza de \mathcal{L} bajo una transformación infinitesimal $U(1)$,

$$\psi \rightarrow (1 + i\alpha)\psi. \quad (121)$$

La invarianza requiere que el Lagrangiano no se altere, es decir,

$$\begin{aligned} 0 = \delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}\delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\delta(\partial_\mu\psi) + \delta\bar{\psi}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} + \delta(\partial_\mu\bar{\psi})\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} \\ &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi}(i\alpha\psi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}(i\alpha\partial_\mu\psi) + \dots \end{aligned} \quad (122)$$

$$=i\alpha \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) \right] \psi + i\alpha \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \psi \right) + \dots \quad (123)$$

El término dentro del corchete desaparece ya que es la ecuación de Euler-Lagrange para ψ , por tanto es igual a cero, así entonces la expresión (121) se reduce a la forma de una ecuación para una corriente conservada:

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (124)$$

donde

$$j^\mu = \frac{ie}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \psi - \bar{\psi} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (125)$$

usando el Lagrangiano (116). El factor de proporcionalidad es escogido de tal manera que j^μ sea igual con la densidad de corriente de carga electromagnética de un electrón de carga $-e$, por lo tanto de la ecuación (122) se tiene que la carga

$$Q = \int d^3x j^0 \quad (126)$$

debe ser una cantidad conservada debido a la invarianza de fase $U(1)$.

Desde un punto de vista físico, la existencia de una simetría implica que alguna cantidad no se puede medir. Por ejemplo, (117) implica que la fase α no es medible, esto no tiene significado físico y puede ser escogida arbitrariamente. α es una constante; por lo tanto el valor es especificado para todo espacio y tiempo, esto es lo que se conoce como invarianza gauge global. En cambio, si en el espacio-tiempo α difiere de un punto a otro, es decir $\alpha = \alpha(x)$, se conoce como la invarianza gauge local.

Anexo B. Rompimiento Espontaneo de una Simetría Gauge Global. Se va a tomar un escalar complejo $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$ descrito por el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)^2 - \mu\phi^2 - \lambda\phi^4, \quad (127)$$

el cual es invariante bajo $\phi \rightarrow e^{i\alpha}\phi$. Es decir \mathcal{L} posee una simetría gauge global $U(1)$. Al reescribir el Lagrangiano (125) en la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_1)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_2)^2 - \frac{1}{2}\mu^2(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{1}{4}\lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2. \quad (128)$$

Considerando el caso $\lambda > 0$ y $\mu^2 < 0$, ahora se tiene un circulo de mínimos del potencial $V(\phi)$ en el plano ϕ_1, ϕ_2 de radio v , tal que

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = v^2 \quad \text{con} \quad v^2 = -\frac{\mu^2}{\lambda}, \quad (129)$$

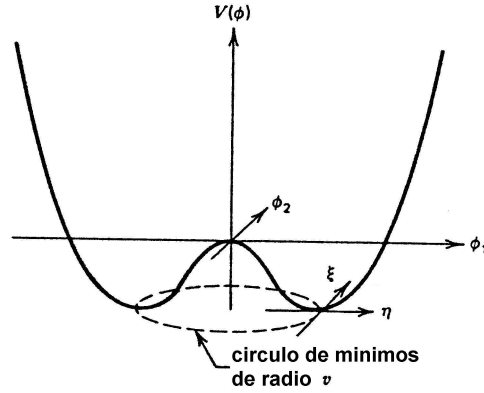
como se muestra en la Figura 2. Ahora se traslada el campo ϕ a una posición de mínima energía, sin pérdida de generalidad se puede tomar el punto $\phi_1 = v$, $\phi_2 = 0$. Expandiendo \mathcal{L} alrededor del vacío en términos de los campos η , ξ por la sustitución de

$$\phi(x) = \sqrt{\frac{1}{2}}[v + \eta(x) + i\xi(x)] \quad (130)$$

en (125), se obtiene

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 + \mu^2 \eta^2 + \text{const.} + \text{términos cúbicos y cuadráticos en } \eta, \xi. \quad (131)$$

Figura 2. El potencial $V(\phi)$ para un campo escalar complejo con $\mu^2 < 0$ y $\lambda > 0$.



El tercer término tiene la forma de un término de masa ($-\frac{1}{2}m_\eta^2\eta^2$) para el campo η . Así, $m_\eta = \sqrt{-2\mu^2}$ es la masa de η . El primer término en \mathcal{L}' representa la energía cinética del campo ξ , pero no hay un término de masa para ξ . Es decir, esta teoría también contiene un escalar no masivo (bosón de Goldstone). Así, se ha encontrado un problema; en procura de generar un bosón gauge masivo, se puede ver que el rompimiento espontáneo de una teoría gauge parece ser plagado de sus propias partículas escalares no masivas. Intuitivamente es fácil ver la razón de su presencia. El potencial en la dirección tangente (ξ) es plano, implicando un modo no masivo; no hay resistencia a la excitación a lo largo de la dirección ξ en la Figura 2.