

ESTUDIO FENÓMENOLÓGICO DE LOS MODELOS INTERFAMILIAS, BAJO EL
GRUPO GAUGE LOCAL $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$

RICHARD HAMILTHON BENAVIDES PALACIOS

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2005

ESTUDIO FENÓMENOLÓGICO DE LOS MODELOS INTERFAMILIAS, BAJO EL
GRUPO GAUGE LOCAL $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$

RICHARD HAMILTHON BENAVIDES PALACIOS

Trabajo presentado como requisito previo para
optar el título de Físico

JUAN BAUTISTA FLÓREZ, PhD.
Director

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2005

“Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva del autor”.

Artículo primero del acuerdo *N.º* 324 de Octubre 11 de 1966 del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Noviembre de 2005.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mis agradecimientos a todas las personas que de un modo u otro, hicieron que esto fuera posible.

A mis padres Ricardo Armando Benavides y Esperanza Palacios por su apoyo interminable, es a quien les debo este trabajo, a mi novia quien ha sabido motivarme y aguantarme a lo largo del recorrido. A toda mi familia, Mi Abuelo, mis tíos y todos mis primos.

A mi director Juan Bautista Flórez por su inmensa colaboración, con quien estoy infinitamente agradecido, quien es el mejor modelo a seguir en el largo recorrido de la física.

A Yitsbhey Giraldo Úsuga por su orientación y sugerencias en el desarrollo de la tesis.

A Alfredo Pasaje y Germán Ramos quienes me enseñaron que la única forma de aprender física es a través de la dedicación.

A todos los profesores que tuve en mi corto paso por la Universidad de Nariño, de quienes de seguro aprendí mucho.

A mis amigos y compañeros de estudios, con quienes compartí momentos agradables y otros no tan buenos a lo largo de cinco años.

Y le doy gracias a la Universidad, por haberme permitido conocer el maravilloso mundo de la física.

DEDICATORIA

*A Dios
A mis padres
a mi novia, mi Hija
y a mi hermana*

Le dedico este trabajo primeramente a mis padres Esperanza Palacios y Armando Benavides, ya que les debo mi vida, y todo lo que he alcanzado, quienes me han brindado confianza y amor para conseguir las metas propuestas.

A mi hija Darly Valeria por ser ese bastón que genera fuerzas para continuar aún cuando parece que todo se ha perdido.

A mi fuente de inspiración, cariño y amor Diana, por acompañarme en toda la odisea que empecé, con un futuro lleno de incertidumbres y que a hora termina favorablemente.

A mi hermana a quien espero haberle dado un muy buen ejemplo.

RIBE.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN.	18
1. OBJETIVOS.	20
1.1. OBJETIVO GENERAL.	20
1.1. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.	20
2. MODELO ESTÁNDAR.	21
2.1. INTRODUCCIÓN ME.	21
2.2. QUARKS Y LEPTONES.	21
2.3. SIMETRÍA.	22
2.3.1. Simetrías en Clásica.	22
2.3.2. Simetría en Cuántica.	23
2.3.3. Teorema de Noether.	23
2.4. DERIVADA COVARIANTE.	23
2.5. EL LAGRANGIANO.	24
2.5.1. Algunos ejemplos de Lagrangianos.	24
2.6. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LA SIMETRÍA.	26
2.6.1. Caso A $\mu^2 > 0$.	26
2.6.2. Caso B $\mu^2 < 0$.	26
2.7. MECANISMO DE HIGGS Y MASAS BOSONICAS.	28
2.8. ACOPLER CON EL HIGGS.	29
2.9. MASA PARA LOS FERMIONES.	30

2.10. CORRIENTES	31
2.11. MODELO CON DOS FAMILIAS FERMIÓNICAS.	32
2.12. MODELO CON TRES FAMILIAS	33
2.13. CROMODINÁMICA CUÁNTICA (QCD).	34
2.14. ANOMALÍAS.	35
3. GENERALIDADES DE LOS MODELOS $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$.	36
3.1. INTRODUCCIÓN.	36
3.2. MODELOS DE UNA SOLA FAMILIA.	36
3.3. MODELOS INTERFAMILIAS.	39
3.4. OTROS MODELOS.	40
4. SECTOR ESCALAR Y SECTOR BOSÓNICO.	42
4.1. INTRODUCCIÓN.	42
4.2. SECTOR ESCALAR.	42
4.3. SECTOR BOSÓNICO.	43
5. MODELO D.	46
5.1. INTRODUCCIÓN.	46
5.2. DEFINICIÓN DEL MODELO.	46
5.3. CORRIENTES CARGADAS.	47
5.4. CORRIENTES NEUTRAS.	47
5.5. MASAS FERMIÓNICAS.	51
6. MODELO F.	52
6.1. INTRODUCCIÓN.	52
6.2. DEFINICIÓN DEL MODELO.	52

6.3. CORRIENTES CARGADAS.	53
6.4. CORRIENTES NEUTRAS.	53
6.5. MASAS FERMIÓNICAS.	58
7 CONCLUSIONES.	60
RECOMENDACIONES.	61
BIBLIOGRAFÍA.	62
ANEXOS.	64

LISTA DE CUADROS

	Pág.
Cuadro 1. Familias Fermiónicas.	21
Cuadro 2. Primera Familia Fermiónica.	22
Cuadro 3. Segunda Familia Fermiónica.	32
Cuadro 4. Tercera Familia Fermiónica.	34
Cuadro 5. Modelo A.	38
Cuadro 6. Modelo B.	38
Cuadro 7. Modelo C.	39
Cuadro 8. Anomalías para S_i .	41
Cuadro 9. Modelo D.	46
Cuadro 10. Acoples de $Z_1^\mu \rightarrow \bar{f}f$ Para el Modelo D.	50
Cuadro 11. Acoples de $Z_2^\mu \rightarrow \bar{f}f$ Para el Modelo D.	50
Cuadro 12. Modelo F.	52
Cuadro 13. Acoples de $Z_1^\mu \rightarrow \bar{f}f$ Para el Modelo F.	56
Cuadro 14. Acoples de $Z_2^\mu \rightarrow \bar{f}f$ Para el Modelo F.	57

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Potencial efectivo para $\mu^2 > 0$.	27
Figura 2. Potencial efectivo para $\mu^2 < 0$.	27
Figura 3. Diagrama del triángulo.	64
Figura 4. Dispersion $\nu - \nu$ en el modelo de Weinberg-Salam.	67

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
Anexo A. Anomalías.	64
Anexo B. Cancelación de Anomalías.	66

RESUMEN

Se realiza un estudio teórico de los modelos interfamiliares, pertenecientes a los modelos $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, basado en el modelo estándar de la física de partículas, el cual trabaja bajo el grupo gauge local $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Se desarrollan los tópicos más relevantes, como la construcción del contenido fermiónico con sus respectivos números cuánticos asociados, para la cancelación de anomalías; la adquisición de masa de los bosones y fermiones presentes en dichos modelos mediante el rompimiento espontáneo de simetría, por último se encuentran las corrientes cargadas y corrientes neutras y con ellas los acoples de las partículas fermiónicas con Z_1^μ y Z_2^μ .

ABSTRACT

A theoretical study of inter-families models, belonging to $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ patterns and based under the local gauge group $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ is done, the most important topics are developed such as the building of fermions contents with their respective associated quantum numbers, to reach the cancellation of anomalies, the acquisition of mass from bosons and fermions present in those models through the spontaneous symmetry breaking. Finally, the charged currents y neutral ones and with them, the couplings of fermions particles with Z_1^μ and Z_2^μ are found.

INTRODUCCIÓN

El modelo Estándar (ME) de la Física de partículas describe las partículas elementales y sus interacciones a bajas energías, los experimentos realizados concuerdan con la parte teórica del modelo, el cual se presenta bajo el grupo Gauge local $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, donde $SU(3)_C$ es el grupo de color en el que se basan las interacciones fuertes, conocida como Cromodinámica Cuántica, y $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ es el grupo de las interacciones Electrodébiles, la forma de las interacciones esta descrita por el requerimiento de invarianza de norma, es decir por los acoplamientos de los bosones vectoriales, los cuales median las interacciones con los campos de materia dados por esta simetría.

A pesar de tantos resultados satisfactorios que ha tenido este modelo, pocos físicos lo aceptan como la teoría definitiva que describe las partículas elementales y sus interacciones, debido, a que no puede dar cuenta del número de familias fermiónicas que existen, tampoco explica la violación de paridad de las interacciones débiles, la cual fue observada por primera vez por Wu, Ambler, Hayward, Hoopes y Hudson en 1957, y porqué no se presenta en las interacciones fuertes y electromagnéticas, y por último no explica la diferencia de masa tan grande del quark b y el quark t.

En el ME existen una gran cantidad de parámetros libres (19 o 26 dependiendo si se consideran los neutrinos masivos o no), esto trae como consecuencia que muchas magnitudes observadas, como la masa fermiónica, los ángulos de mezcla, la fase de violación de CP etc. sean completamente arbitrarias. Pero además, lo que nos hace pensar en ir más allá del modelo estándar, es todo un recorrido histórico, desde Newton quien unificó la teoría terrestre con la celeste, luego Hamilton quien fusionó la mecánica con la óptica geométrica, la de Maxwell con la unión electricidad y magnetismo, la de De Broglie onda partícula y hasta Einstein quien unió en la relatividad general los conceptos de Geometría y Dinámica, es así como siempre se ha buscado teorías de unificación y el mejor logro será unificar las cuatro fuerzas fundamentales en una sola teoría.

Nuestra necesidad actual es buscar un modelo más básico, que permita explicar ciertos fenómenos que han sido observados y de los cuales no se pueden decir nada. Una extensión del modelo estándar se logra añadiendo nuevos campos fermiónicos (introduciendo neutrinos con quiralidad derecha), otra manera es aumentando el sector escalar a más de una representación de Higgses, o extendiendo el grupo gauge local. Tomando como referencia esta última parte se propone el modelo $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, el cual trabaja a energías más altas que el modelo estándar (por lo que en éstos modelos se considera al modelo estándar como una teoría efectiva)¹.

El objetivo primordial del trabajo es ir más allá del modelo estándar y realizar un análisis parcial de los modelos interfamilias, específicamente aquellos modelos cuyo contenido fermiónico no posee cargas eléctricas exóticas, conocidos en la literatura como modelos 331.

¹Lo que quiere decir que está contenida en una teoría más general.

Para llevar a feliz término el trabajo, se lo ha desarrollado por secciones de la siguiente manera:

En primera parte se estudia el modelo estándar (ME), asociado con el grupo Gauge local $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, que nos servirá como guía para estudiar nuestros modelos. Posteriormente se realiza un esbozo de los modelos 331, tanto para una sola familia como interfamilias, luego se presenta el sector bosónico Gauge y el sector escalar que permite que los bosones y fermiones adquieran masa, y de esa manera calcular las corrientes asociadas al modelo con sus respectivos acoples y masas fermiónicas. Por último se presentan las conclusiones del trabajo.

1. OBJETIVOS

1.1. OBJETIVO GENERAL

- Realizar un estudio fenomenológico del grupo gauge local $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$.

1.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Hacer un estudio fenomenológico de los modelos interfamiliares.
- Calcular las corrientes electromagnéticas y corrientes cargadas y neutras de los modelos de tres familias.
- Determinar los acoples de las partículas fermiónicas con Z_1^μ y con Z_2^μ , para estos modelos.

2. MODELO ESTÁNDAR

2.1. INTRODUCCIÓN ME.

El modelo estándar es una descripción teórica de campos cuánticos para las interacciones fuertes y electrodébiles a energías alrededor de unos 100 GeV, requiere de 19 parámetros libres o 26, dependiendo si se consideran los neutrinos masivos o no, tales parámetros no pueden ser explicados por el modelo pero son necesarios en la teoría, sin embargo los procesos descritos por este modelo, han sido tan satisfactorios que parece tener suficiente contenido para describir todos los datos existentes. El modelo tiene una estructura teórica que trabaja espléndidamente.²

2.2. QUARKS Y LEPTONES

Los constituyentes fundamentales de la materia son los quarks y leptones, se los conoce con el nombre en conjunto de fermiones los cuales poseen espín semi-entero, hasta ahora se conocen 3 clases de familias fermiónicas³, presentadas en el siguiente cuadro:

Cuadro 1: Familias Fermiónicas.

Quarks	Leptones
<i>u(up)</i>	<i>e(electrón)</i>
<i>d(down)</i>	$\nu_e(\text{neutrino} - \text{electrónico})$
<i>c(charm)</i>	$\mu(\text{muón})$
<i>s(strange)</i>	$\nu_\mu(\text{neutrino} - \text{muónico})$
<i>t(top)</i>	$\tau(\text{tauón})$
<i>b(beauty)</i>	$\nu_\tau(\text{neutrino} - \text{tauónico})$

Donde la masa se incrementa de arriba hacia abajo, los leptones son singletes de color, mientras que los quarks son tripletes de color, lo cual trae consecuencias en las interacciones fuertes, ya que los quarks pueden interactuar entre ellos.

El modelo estándar se basa en el grupo de simetría gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ donde $SU(3)_C$ hace referencia a la cromodinámica cuántica (QCD) y el $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ a la interacción electrodébil.

La primera familia con sus respectivos números cuánticos se presenta en el cuadro 2.

Los números entre paréntesis son los números cuánticos, que son los mismos para las tres familias, indican como transforman los campos en el gauge $SU(3)_C$, grupo de interacción fuerte o del color, $SU(2)_L$ grupo de isospín débil y $U(1)_Y$ grupo de la hipercarga débil. En el modelo estándar

²F. DONOGHUE, Jhon, GOLOWICH, Eugene, HOLSTEIN Barry R. Dynamics Of The Standard Model; Cambridge University Press. 1992.

³HALZEN, Francis, MARTIN, Alan D. Quarks and Leptons; An Introductory Course In Modern Particle Physics; John Wiley y Sons, Inc. 1984.

Cuadro 2: Primera Familia Fermiónica.

Sector Leptónico			Sector de quarks		
$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	e_R		$L_u = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	u_R	d_R
(1,2,-1)	(1,1,-2)		$(3,2,\frac{1}{3})$	$(3,1,\frac{4}{3})$	$(3,1,-\frac{2}{3})$

los campos están proyectados en dobletes izquierdos y singletes derechos, lo cual afecta el desarrollo del lagrangiano ⁴, no se incluyen neutrinos derechos ya que en el ME. se los considera sin masa.

La carga eléctrica viene dada por

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \quad (1)$$

Donde la carga Q es el generador del grupo electromagnético $U(1)_{EM}$, de la misma manera Y genera el grupo $U(1)_Y$, que al unirlo con la interacción débil resulta el gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. ⁵ La ecuación (1) es conocida como la fórmula de Gell-Mann-Nishijima ⁶, donde T_3 es la tercera matriz de Pauli.

Weinberg (1967) y Salam (1968), extendieron el modelo anterior a las interacciones electrodébiles, con el fin de incorporar masa a los bosones gauge ($W^\pm, Z^0$). Lo cual se logra mediante el rompimiento Espontáneo de simetría (descrito más adelante).

2.3. SIMETRÍA

Tanto la estructura algebraica de grupo como las denominadas álgebras de Lie, tiene la peculiaridad de ser las estructuras matemáticas que describen el concepto clásico de simetría. La teoría de la relatividad restringida es, en último término, una teoría de las simetrías del espacio vacío y también del tiempo. Incluso, la definición del concepto de partícula, en el contexto de la teoría cuántica de campos, tal como la formuló Eugene Wigner, esta relacionada con la simetría. Fue en 1915 cuando Emmy Noether pudo probar que toda simetría, origina una ley de conservación.

2.3.1. Simetrías en Clásica. La Física clásica de Galileo y Newton, desarrollada luego por Lagrange, Hamilton, etc., como la teoría especial de la relatividad formulada por Einstein, descansan para poder desarrollarse, en la postulación implícita de simetría en el contexto del espacio-tiempo. Esta postulación de simetría para la formulación y desarrollo de las

⁴QUIGG, Chris. Gauge Theories Of The Strong, Weak, And Electromagnetic Interactions; The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1983.

⁵Propuesto por primera vez en 1961 por Glashow

⁶HIGGS, P. W. Phys. Lett. 12, 132. 1964.

leyes de la física constituye tanto lo que se entiende por homogeneidad e isotropía del espacio, por una parte, como por lo que llamamos uniformidad al transcurrir del tiempo, por otra.

2.3.2. Simetría en Cuántica. El modelo actual de la física de partículas está descrito por un gran número de simetrías, que predicen tanto propiedades de conservación, como la existencia de nuevas partículas⁷.

2.3.3. Teorema de Noether: La invarianza bajo traslaciones, espaciales y temporales, rotaciones y en general transformaciones de Lorentz, conducen a la conservación de el momentum, energía y momentum angular. Entonces, toda simetría continua conlleva a una ley de conservación física. En teoría de campos la cantidad invariante es la densidad lagrangiana⁸.

Por ejemplo, una transformación de fase en la forma

$$\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x), \quad (2)$$

donde α es una constante real,

Deja el lagrangiano invariante $\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma_\mu\partial^\mu\psi - m\bar{\psi}\psi$ lo cual implica la existencia de una corriente conservada

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (3)$$

donde $j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ denominada corriente electromagética para el electrón de carga $-e$ nos da la conservación de la carga, es decir:

$$\frac{dQ}{dt} = 0, \quad (4)$$

Desde el punto de vista físico, la existencia de una simetría implica que alguna cantidad permanezca sin cambio.

2.4. DERIVADA COVARIANTE

Si en la transformación de fase $\psi(x) \rightarrow e^{i\alpha}\psi(x)$ el parámetro α depende de x , es decir de la posición y del tiempo, el lagrangiano ya no es un invariante. Para solucionar dicho problema los Físicos introdujeron la derivada covariante, la cual es una extensión de la derivada parcial ordinaria.

El reemplazo es el siguiente:

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g_1}{2}B_\mu Y, \quad \text{para } U(1)_Y, \quad (5)$$

en la derivada aparece un campo B_μ correspondiente al campo fotónico, g_1 es la constante de acoplamiento electromagnética,

⁷GEORGI, Howard. Lie Algebras In Particle Physics; The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1982.

⁸GUIDRY, Mike. Gauge Fields Theories; An Introduction With Applications; John Wiley y Sons, Inc.1999.

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g_1}{2}B_\mu Y + i\frac{g_2}{2}\tau_i W_\mu^i, \quad \text{para } SU(2)_L \otimes U(1)_Y, \quad (6)$$

donde g_2 es la constante de acople débil; hay tres bosones gauge (W_u) y el fotón (B_μ),

$$D_\mu = \partial_\mu + i\frac{g'}{2}\lambda^\alpha G_\mu^a, \quad \text{para } SU(3)_C, \quad (7)$$

donde $a = 1, 2, \dots, 8$ generando 8 campos gauge (G_μ^a) denominados Gluones, g' es la constante de acoplamiento fuerte.

En las ecuaciones anteriores, τ_i son las tres matrices de Pauli, λ^α , $\alpha = 1, 2, \dots, 8$ son las 8 matrices de Gell-Mann; donde se tiene un total de 12 bosones gauge⁹, de los cuales, después del rompimiento de simetría, los 8 gluones y el fotón no poseen masa, mientras que los bosones $W^\pm$ y Z_0 adquieren masa.

2.5. EL LAGRANGIANO

La lagrangiana se define para un sistema no relativístico como la diferencia entre la energía cinética y potencial.¹⁰

$$L \equiv T - V, \quad (8)$$

A través de la cual, podemos encontrar la ecuación de Euler Lagrange¹¹.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad (9)$$

En teoría de campos está dada por:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (10)$$

donde $\mathcal{L}$ es la densidad lagrangiana dada en función de $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu)$.¹²

2.5.1. Algunos ejemplos de lagrangianos:

- Lagrangiano para un campo real de espín cero

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \phi)(\partial_\mu \phi) - \frac{1}{2}m^2 \phi^2, \quad (11)$$

si se reemplaza (11) en (10) se obtiene la ecuación de Klein Gordon para partículas escalares.

$$\square^2 \phi + m^2 \phi = 0. \quad (12)$$

⁹ÚSUGA, Yithsbey Giraldo. "El Potencial Escalar En $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ Como Extensión Del Modelo Estándar" Universidad De Antioquía. 2002.

¹⁰ARFKEN, George B. WEBER, Hans J. Mathematical Methods for Physicists, fourth Edition

¹¹GOLSTEIN, Herbert. Mecánica clásica

¹²De aquí en adelante cuando nos refiramos al lagrangiano se entenderá como densidad lagrangiana.

El operador D'Alembertiano se define como $\square^2 \equiv \partial^\mu \partial_\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ el cual es un operador invariante, ϕ es la función de onda para una partícula escalar.

■ Lagrangiano para un campo real de espín 1/2

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi), \quad (13)$$

si lo reemplazamos en la ecuación (10), se encuentra

$$i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\psi = 0, \quad \text{Ecuación de Dirac} \quad (14)$$

donde se han introducido las matrices gamma, ψ es una función de onda para partículas de espín 1/2.

■ Lagrangiano para las ecuaciones de Maxwell

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - j^\mu B_\mu, \quad (15)$$

$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$ es el tensor de campo cinético, a partir del lagrangiano anterior se encuentran las ecuaciones de Maxwell

$$-\partial_\sigma F^{\sigma\theta} + j^\theta = 0; \quad (16)$$

lo cual deja invariante los lagrangianos bajo transformaciones de fase globales. Ahora, para que el lagrangiano no varíe Bajo una transformación de fase local, se recurre a la derivada covariante, así por ejemplo para partículas de espín 1/2 el nuevo lagrangiano toma la forma:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi = i\bar{\psi}\gamma^\mu \partial_\mu \psi - m\bar{\psi}\psi + g_1\bar{\psi}\gamma^\mu \psi B_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (17)$$

El término cinético es agregado con el fin de tener un significado real; el lagrangiano (17) se relaciona con la parte electromagnética.

Para las interacciones débiles y fuertes estará dado por:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi + ig_2 \frac{\vec{T}}{2} \cdot \vec{W}_\mu \phi)^\dagger (\partial^\mu \phi - ig_2 \frac{\vec{T}}{2} \cdot \vec{W}^\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi) - \frac{1}{4}\vec{W}^{\mu\nu} \cdot \vec{W}_{\mu\nu}, \quad (18)$$

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q - g'(\bar{q}\gamma^\mu \lambda_a q)g_\mu^a - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}, \quad (19)$$

Respectivamente.

Podemos escribir en definitiva el lagrangiano de interacción cinético que rige para el modelo estándar, aprovechando que ya se han introducido los bosones gauge.¹³

¹³ÚSUGA, Yithsbey Giraldo. "El Potencial Escalar En $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ Como Extensión Del Modelo Estándar" Universidad De Antioquía. 2002.

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}W_l^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^l - \frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a, \quad (20)$$

los tensores de campo son:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu, \quad (21)$$

$$W_{\mu\nu}^l = \partial_\nu A_\mu^l - \partial_\mu A_\nu^l + g_2 \epsilon_{jkl} A_\mu^j A_\nu^k, \quad (22)$$

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\nu g_\mu^a - \partial_\mu g_\nu^a + g' f^{jka} g_\mu^j g_\nu^k, \quad (23)$$

los ϵ_{jkl} y f^{jka} son las constantes de estructura asociadas a los grupos $SU(2)_L$ y $SU(3)_C$. l corre de 1 a 3 para los tres bosones de la interacción débil, y así mismo a corre de 1 a 8 para los 8 bosones de la interacción fuerte.

2.6. ROMPIMIENTO ESPONTÁNEO DE LA SIMETRÍA

Para poder romper la simetría y que los bosones y fermiones adquieran masa, se debe incluir el siguiente doblete escalar complejo junto con sus números cuánticos:

$$\phi(1, 2, 1) \equiv \begin{pmatrix} \phi^\dagger \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (24)$$

la cual transforma como un doblete en $SU(2)_L$.

El potencial escalar estará dado en función de un escalar real en la forma:

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad \lambda > 0, \phi \in \mathbb{R}, \quad (25)$$

se presentan dos casos:

2.6.1. Caso A $\mu^2 > 0$. Al derivar en función de ϕ , se encuentran tres posibles soluciones para el potencial mínimo, $\phi = 0$ y $\phi = \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$, pero las dos últimas no pueden ser soluciones, ya que las condiciones $\mu^2 > 0$ y ϕ real, lo prohíben, por tanto la solución válida es $\phi = 0$, dando un potencial en la forma de la figura 1.

2.6.2. Caso B $\mu^2 < 0$. A diferencia del caso anterior las soluciones que ahora serán válidas para el potencial mínimo son $\phi = \pm\sqrt{-\frac{\mu^2}{\lambda}}$, ya que el extremo $\phi = 0$ no corresponde a la mínima energía, la gráfica que lo representa es la figura 2.

para solucionar el inconveniente, lo que se hace es redefinir el campo escalar $\phi_{\text{mínimo}} = v$ ¹⁴ y hacerlo fluctuar a través de este mínimo.¹⁵

$$\phi(x) = v + \eta(x), \quad (26)$$

¹⁴Libremente se podía elegir $\phi_{\text{mínimo}} = -v$ ya que se puede obtener $\phi_{\text{mínimo}} = v$ por reflexión simétrica; y viceversa

¹⁵HALZEN, Francis. MARTIN, Alan D. Quarks And Leptons; an introductory course In Modern Particle Physics; John Wiley Y Sons, Inc.1984.

Figura 1: Potencial efectivo para $\mu^2 > 0$.

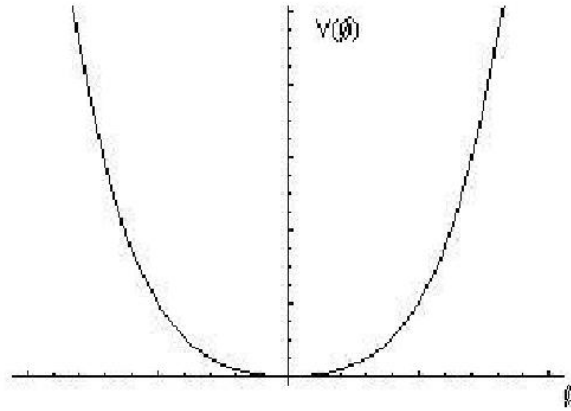
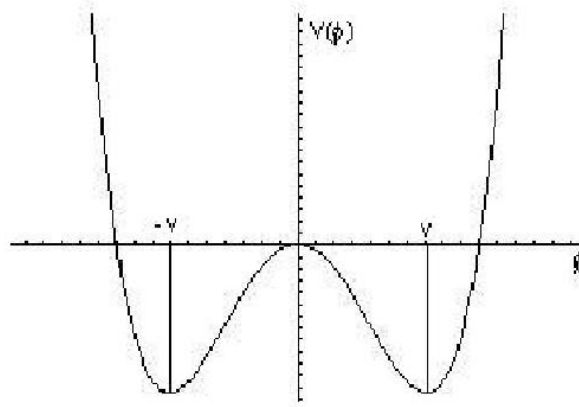


Figura 2: Potencial efectivo para $\mu^2 < 0$.



al procedimiento anterior se lo conoce como rompimiento espontáneo de simetría; donde η representa las fluctuaciones.

Cuando se trabaja con partículas cargadas, el campo escalar debe ser un campo complejo, lo cual se logra con dos campos reales, a fin de poder romper la simetría de $SU(2)$ se necesita cuatro campos reales de la siguiente manera:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

se escoge el valor esperado del vacío en ϕ_3 es decir $\phi_3 = v$ y $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$, lo que equivale a tener:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (28)$$

donde $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$, será el estado base. Entonces

$$\phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta(x) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

η es el nuevo escalar neutro, el doblete rompe la simetría gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, de la siguiente manera

$$\begin{array}{c} SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \\ \downarrow \langle \phi \rangle \\ SU(3)_C \otimes U(1)_Q, \end{array}$$

donde Q es la carga electromagnética, el rompimiento se debe a la constante v que no sufre ninguna transformación gauge, ya que se relaciona con el valor esperado en el vacío¹⁶.

Cuando se rompe espontáneamente una simetría continua, aparecen bosones no masivos (teorema de Goldstone), pero lo que se quiere es tener bosones masivos para la interacción electrodébil, para ello se utiliza el mecanismo de Higgs.

2.7. MECANISMO DE HIGGS Y MASAS BOSÓNICAS

El paso final después del rompimiento espontáneo de la simetría gauge local, es el generar masa a los bosones, lo cual se logra mediante el mecanismo de Higgs. Manipulando el doblete escalar (29), en términos de 4 campos reales $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, y η , de tal manera que tome la forma:

$$\phi' = e^{i\tau.\theta(x)/v} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (30)$$

haciendo una transformación gauge de la siguiente manera:

$$\phi' = e^{-i\alpha.\tau/v} e^{i\tau.\theta/v} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (31)$$

para llegar a una forma más sencilla del doblete escalar, ya que $\alpha = \theta$; para encontrar la masa de los bosones W_μ^a se reemplaza la ecuación (31) en el lagrangiano

$$\mathcal{L}_{escalar} = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi), \quad (32)$$

Donde el campo escalar esta definido en (31), D_μ es la derivada covariante introducida en (6), entonces

$$D^\mu \phi = \left[\partial_\mu - \frac{i}{2} \begin{pmatrix} (g_2 W_3 + g_1 B)_\mu & \sqrt{2} W_\mu^+ g_2 \\ \sqrt{2} W_\mu^- g_2 & (-g_2 W_3 + g_1 B)_\mu \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

donde $W^\pm = \frac{W_{1\mu} \mp W_{2\mu}}{\sqrt{2}}$, operando $(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi)$ se encuentra:

¹⁶ÚSUGA Yithsbey Giraldo. "El Potencial Escalar En $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ Como Extensión Del Modelo Estándar" Universidad De Antioquía. 2002

$$(D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \eta) (\partial^\mu \eta) + \frac{1}{4} W^+ W^- g_2^2 (v^2 + 2v\eta + \eta^2) + \frac{1}{4} (-g_2 W_3 + g_1 B)_\mu (-g_2 W_3 + g_1 B)^\mu \left(\frac{v^2 + 2v\eta + \eta^2}{2} \right), \quad (34)$$

se ha encontrado la masa de los dos bosones cargados, pero queda pendiente la masa del boson neutro, para ello se utiliza la parte $(-g_2 W_3 + g_1 B)_\mu (-g_2 W_3 + g_1 B)^\mu$ escrita en forma de matriz

$$(-g_2 W_3 + g_1 B)_\mu (-g_2 W_3 + g_1 B)^\mu = \begin{pmatrix} W_{3\mu} & B_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2 g_1 \\ -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3^\mu \\ B^\mu \end{pmatrix} \quad (35)$$

al diagonalizar la matriz se obtienen los nuevos campos

$$Z_\mu = \frac{-g_1 B_\mu + g_2 W_{3\mu}}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad A_\mu = \frac{g_2 B_\mu + g_1 W_{3\mu}}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad (36)$$

finalmente se encuentra que el lagrangiano escalar esta dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{escalar} = & \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta) (\partial_\mu \eta) + \mu^2 \eta^2 + \frac{1}{4} g_2^2 v^2 W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{8} v^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu \\ & + \frac{1}{2} g_2^2 v \eta W_\mu^+ W^{\mu-} + \frac{1}{4} v \eta (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu + \frac{1}{4} g_2^2 \eta^2 W_\mu^+ W^{\mu-} \\ & + \frac{1}{8} \eta^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu Z^\mu + \dots, \quad (37) \end{aligned}$$

los bosones intermediarios tienen la siguiente masa

$$M_{W^\pm} = \frac{g_2 v}{2}, \quad M_Z = \frac{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}{2} v, \quad (38)$$

respectivamente. El campo de Higgs físico η ¹⁷ ha adquirido una masa de $\sqrt{2}\mu$, y el campo ausente en (37) no posee masa, correspondiente al fotón.

En resumen, el lagrangiano describe los bosones vectoriales W_μ con masa; mediante el mecanismo de Higgs se pierden los bosones no masivos (bosones de Golstone), perdiéndose grados de libertad, pero aparecen bosones vectoriales masivos, los cuales crean un grado de libertad más a los bosones, igualando los grados de libertad; “es como si los bosones vectoriales se comieran los bosones escalares y se adueñaran de sus grados de libertad”¹⁸.

2.8. ACOPLER CON EL HIGGS

Los acoples con el Higgs físico η y los bosones vectoriales, se encuentran del lagrangiano dado en la ecuación (37) con los resultados

¹⁷Partícula que aun no ha sido descubierta

¹⁸HALZEN, Francis. MARTIN Alan D. Quarks and Leptons; An Introductory Course In Modern Particle Physics; John Wiley y Sons, Inc. 1984.

$$\begin{aligned}
g(WW\eta) &= \frac{g_2^2 v}{2}, & g(WW\eta\eta) &= \frac{g_2^2}{4}, \\
g(ZZ\eta) &= \frac{v}{4}(g_1^2 + g_2^2), & g(ZZ\eta\eta) &= \frac{1}{8}(g_1^2 + g_2^2),
\end{aligned} \tag{39}$$

g_1 con g_2 están relacionados de la siguiente manera

$$\tan(\theta_W) = \frac{g_1}{g_2}, \tag{40}$$

donde θ_W es el ángulo de mezcla electrodébil.

2.9. MASA PARA LOS FERMIONES

Para encontrar la masa fermiónica, se debe construir el lagrangiano de Yukawa, el cual acopla el sector escalar con el sector fermiónico, para que sea un invariante la suma de las hipercargas de cada término debe ser cero

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = \mathcal{L}_{Yukawa(leptones)} + \mathcal{L}_{Yukawa(quarks,u,d)}, \tag{41}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Yukawa(leptones)} &= -G_e \bar{\ell}_L \phi e_R - G_e \bar{e}_R \phi^\dagger \ell_L \\
&= -\frac{G_e v}{\sqrt{2}} \bar{e} e - \frac{G_e \eta}{\sqrt{2}} \bar{e} e,
\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Yukawa(quarks,u,d)} &= -G_d \bar{q}_L \phi d_R - G_u \bar{q}_L \tilde{\phi} u_R - G_d \bar{d}_R \phi^\dagger q_L - G_u \bar{u}_R \tilde{\phi}^\dagger q_L \\
&= -\frac{G_d v}{\sqrt{2}} \bar{d} d - \frac{G_u v}{\sqrt{2}} \bar{u} u - \frac{G_d \eta}{\sqrt{2}} \bar{d} d - \frac{G_u \eta}{\sqrt{2}} \bar{u} u,
\end{aligned} \tag{43}$$

$\tilde{\phi}$ es el isodoublete escalar conjugado en la representación 2, dado en la forma

$$\tilde{\phi}(1, 2, -1) = i\tau_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \tag{44}$$

donde $\phi^{+*} \equiv \phi^-$ y $\bar{\phi}^0 \equiv \phi^{0*}$. $\tilde{\phi}$ transforma de la misma manera como lo hace ϕ bajo la simetría $SU(2)_L$.

De las dos ecuaciones (42) y (43) se encuentra que las masas tienen el siguiente valor:

$$M_e = \frac{G_e v}{\sqrt{2}}, \quad M_u = \frac{G_u v}{\sqrt{2}}, \quad M_d = \frac{G_d v}{\sqrt{2}}, \tag{45}$$

Para el electrón e , quark u y quark d respectivamente.

Los coeficientes G_e , G_u y G_d son reales, puesto que la fase puede ser absorbida en los singletes derechos.

2.10. CORRIENTES

Para encontrar tanto las corrientes cargadas como las neutras, necesitamos escribir el lagrangiano fermiónico, el cual se escribe en general de la siguiente forma

$$\mathcal{L}_f = \bar{\ell}_L \gamma^\mu i D_\mu \ell_L + \bar{q}_L \gamma^\mu i D_\mu q_L + \bar{e}_R \gamma^\mu i D_\mu e_R + \bar{u}_R \gamma^\mu i D_\mu u_R + \bar{d}_R \gamma^\mu i D_\mu d_R \quad (46)$$

Al reemplazar la derivada covariante para singletes dada en la ecuación (5) y la derivada covariante para dobletes ecuación (6) se encuentra que el lagrangiano de fermiones para el modelo estándar es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f = & \bar{\ell}_L \gamma^\mu i \partial_\mu \ell_L + \bar{q}_L \gamma^\mu i \partial_\mu q_L + \bar{e}_R \gamma^\mu i \partial_\mu e_R + \bar{u}_R \gamma^\mu i \partial_\mu u_R + \bar{d}_R \gamma^\mu i \partial_\mu d_R \quad \text{término cinético} \\ & + \frac{g_2}{\sqrt{2}} [W_\mu^+ (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L) + W_\mu^- (\bar{e}_L \gamma^\mu \nu_{eL} + \bar{d}_L \gamma^\mu u_L)] \quad \text{corrientes cargadas} \\ & + \frac{1}{2} \left[(g_2 W_3 + g_1 Y_\ell B)_\mu \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} + (g_2 W_3 + g_1 Y_q B)_\mu \bar{u}_L \gamma^\mu u_L \right. \\ & \left. + (-g_2 W_3 + g_1 Y_\ell B)_\mu \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + (-g_2 W_3 + g_1 Y_q B)_\mu \bar{d}_L \gamma^\mu d_L \right. \\ & \left. + g_1 Y_e B_\mu \bar{e}_R \gamma^\mu e_R + g_1 Y_u B_\mu \bar{u}_R \gamma^\mu u_R + g_1 Y_d B_\mu \bar{d}_R \gamma^\mu d_R \right] \quad \text{corrientes neutras} \end{aligned} \quad (47)$$

El lagrangiano anterior pertenece al lagrangiano de fermiones para la primera familia del modelo estándar, donde Y_ℓ, Y_q, Y_e, Y_u y Y_d , son las hipercargas correspondientes a cada doblete (Y_ℓ, Y_q) , y cada partícula $(Y_e, Y_u$ y $Y_d)$, valores presentados en la tabla (2), al reemplazar estos valores y además de tener en cuenta las relaciones (36) y escribir por comodidad las funciones trigonométricas asociadas al ángulo de mezcla electrodébil θ_W como $\cos \theta_W = C_W$ y $\sin \theta_W = S_W$. se obtienen las corrientes neutras $J^\mu(EM)$ y $J^\mu(Z)$ asociadas con el Hamiltoniano

$$H^0 = e A_\mu J^\mu(EM) + \frac{g_2}{C_W} Z_\mu J^\mu(Z), \quad (48)$$

donde

$$J^\mu(EM) = -\bar{e} \gamma^\mu e + \frac{2}{3} \bar{u} \gamma^\mu u - \frac{1}{3} \bar{d} \gamma^\mu d,$$

$$J^\mu(Z) = J_{,L}^\mu(Z) - S_W^2 J^\mu(EM), \quad (49)$$

La carga eléctrica toma el valor de $e = g_1 g_2 / \sqrt{g_1^2 + g_2^2} > 0$, $J^\mu(EM)$ es la corriente electromagnética, y $J_{,L}^\mu(Z)$ es la corriente de quiralidad izquierda

$$J_{,L}^\mu(Z) = \frac{1}{2} (\bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{u}_L \gamma^\mu u_L - \bar{d}_L \gamma^\mu d_L). \quad (50)$$

Las anteriores corrientes dan cuenta de una amplia variedad de procesos que involucran interacciones electromagnéticas y débiles¹⁹.

¹⁹FRAMPTON, Paul H. Gauge Field Theories; The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1987.

2.11. MODELO CON DOS FAMILIAS FERMIÓNICAS

Cuadro 3: Segunda Familia Fermiónica.

Sector Leptónico			Sector de quarks		
$L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	μ_R		$L_c = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	c_R	s_R
(1,2,-1)	(1,1,-2)		$(3,2,\frac{1}{3})$	$(3,1,\frac{4}{3})$	$(3,1,-\frac{2}{3})$

Como los números cuánticos de la segunda familia fermiónica (cuadro (3)), son los mismos de los de la primera familia, tan solo se duplica los resultados de la sección anterior; pero al construir el lagrangiano de Yukawa las posibilidades se incrementan , entonces un modelo que abarque las dos primeras familias fermiónicas, arroja como resultado el siguiente lagrangiano para quarks u,c

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Y(quarksu,c)} &= -y_{uu}\bar{u}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_u) - y_{uc}\bar{u}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_c) - y_{cu}\bar{c}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_u) - y_{cc}\bar{c}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_c) + h.c \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{u} \quad \bar{c})_R U_R^{-1} U_R \begin{pmatrix} y_{uu} & y_{uc} \\ y_{cu} & y_{cc} \end{pmatrix} U_L^{-1} U_L \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L + \dots, \end{aligned} \quad (51)$$

ha sido necesario introducir las matrices unitarias U_R y U_L para poder diagonalizar la expresión anterior ²⁰

$$U_R \left[-\frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_{uu} & y_{uc} \\ y_{cu} & y_{cc} \end{pmatrix} \right] U_L^{-1} = \begin{pmatrix} m_u & 0 \\ 0 & m_c \end{pmatrix}, \quad (52)$$

con

$$U_L = \begin{pmatrix} \cos \theta_u & \sin \theta_u \\ -\sin \theta_u & \cos \theta_u \end{pmatrix}, \quad (53)$$

las cantidades m_u, m_c son las masas para los quarks $u'(up)$ y $c'(charmed)$, y están relacionados con los campos no físicos u y c en la forma

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \end{pmatrix}_L = U_L \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L. \quad (54)$$

De la ecuación (52) se encuentra después de una cierta cantidad de álgebra

$$\begin{aligned} y_{uu} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_u \cos \theta_u; & y_{cu} &= \frac{-\sqrt{2}}{v} m_c \sin \theta_u; \\ y_{uc} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_u \sin \theta_u; & y_{cc} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_c \cos \theta_u. \end{aligned} \quad (55)$$

²⁰El sector leptónico no presenta mezclas entre los distintos campos, ya que en nuestro modelo los neutrinos no poseen masa

De la misma forma se tiene para los quarks d,s

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Y(quarksd,s)} &= -y_{dd}\bar{d}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_u) - y_{ds}\bar{d}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_c) - y_{sd}\bar{s}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_u) - y_{ss}\bar{s}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_c) + h.c \\ &= -\frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{d} \quad \bar{s})_R D_R^{-1} D_R \begin{pmatrix} y_{dd} & y_{ds} \\ y_{sd} & y_{ss} \end{pmatrix} D_L^{-1} D_L \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L + \dots,\end{aligned}\quad (56)$$

donde

$$D_L = \begin{pmatrix} \cos \theta_d & \sin \theta_d \\ -\sin \theta_d & \cos \theta_d \end{pmatrix}, \quad (57)$$

se encuentra

$$\begin{aligned}y_{dd} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_d \cos \theta_d; & y_{sd} &= \frac{-\sqrt{2}}{v} m_s \sin \theta_d; \\ y_{ds} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_d \sin \theta_d; & y_{ss} &= \frac{\sqrt{2}}{v} m_s \cos \theta_d,\end{aligned}\quad (58)$$

las masas de los quarks d' (*down*) y s' (*strange*); m_d y m_s respectivamente, están definidos por

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}_L = D_L \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L. \quad (59)$$

Las corrientes cargadas toman la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{W-f} &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} [W_\mu^+ (\dots + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \bar{c}_L \gamma^\mu s_L)] + h.c \\ &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \left[\dots + (\bar{u} \quad \bar{c})_L (U_R^\dagger U_L) \gamma^\mu (D_L^\dagger D_L) \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \right] + h.c \\ &= -\frac{g_2}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \left[\dots + (\bar{u}' \quad \bar{c}')_L \gamma^\mu (U_L D_L^\dagger) \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} \right] + h.c\end{aligned}\quad (60)$$

llegamos así al ángulo de Cabibbo $\theta_c = (\theta_u - \theta_d)^{21}$, y a la matriz que mezcla los quarks d' y s'^{22}

$$U_L D_L^\dagger = \begin{pmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{pmatrix}. \quad (61)$$

2.12. MODELO CON TRES FAMILIAS

Vale la pena mencionar la tercera familia representada por:
Ahora podemos mezclar los tres tipos de quarks

$$\mathcal{L}_{Yukawa} = -\bar{u}_L m_u u_R - \bar{d}_L m_d d_R + h.c \quad (62)$$

²¹N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* 10, 531. 1963.

²²ÚSUGA, Yithsbey Giraldo, "El Potencial Escalar En $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ Como Extensión Del Modelo Estándar" Universidad De Antioquía.

Cuadro 4: Tercera Familia Fermiónica.

Sector Leptónico		Sector de quarks		
$L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	τ_R	$L_t = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	t_R	b_R
(1,2,-1)	(1,1,-2)	$(3,2,\frac{1}{3})$	$(3,1,\frac{4}{3})$	$(3,1,-\frac{2}{3})$

donde $m_u = \text{diag}(m_u, m_c, m_t)$, $m_d = \text{diag}(m_d, m_s, m_b)$. Para poder encontrar las masas de estas partículas se utiliza la relación $m_u = U_L m'_u U_R$ y $m_d = D_L m'_d D_R$, siendo U y D matrices unitarias.

De igual manera como en el caso para dos familias se encuentra la corriente cargada de quarks

$$\mathcal{L}_{W-quarks} = -\frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[W_\mu^+ (\bar{u} \quad \bar{c} \quad \bar{t})_L \gamma^\mu (U_L D_L^\dagger) \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}_L + h.c \right] \quad (63)$$

donde $V_{CKM} = U_L D_L^\dagger$ es la matriz unitaria que mezcla los tres sectores de quarks, conocida como la matriz de Cabibbo-kobayashi-Maskawa(CKM)²³.

2.13. CROMODINÁMICA CUÁNTICA (QCD)

Al incluir al grupo gauge $SU(3)_C$ las expresiones anteriores no se alteran para nada, se conoce que el color en la QCD, es como la carga eléctrica en la interacción electromagnética, cada quark viene en tres colores, *red*(r), *blue*(b) y *green*(g), los cuales pueden interactuar entre sí mediante los gluones, que son las partículas intermediarias en la QCD, hay ocho(8) de ellos a lo largo de la representación $SU(3)_C$.

El lagrangiano de color se define como:

$$\mathcal{L}_{color} = -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\gamma^\mu D_\mu - m)\psi, \quad (64)$$

donde D_μ es la derivada covariante para el triplete dada en (7), otra característica es que la simetría no se rompe, ya que los bosones correspondientes no tienen masa, quienes son los responsables de la interacción fuerte que hace que los quarks permanezcan unidos para formar nucleones. Los generadores del grupo $SU(3)_C$ son las ocho matrices de Gell-Mann las cuales obedecen el álgebra.

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c \quad (a, b, c = 1, 2, \dots, 8) \quad (65)$$

²³RYDER, Lewis H. Quantum Field Theory; Second Edition. Cambridge University press. 1996.

2.14. ANOMALÍAS

Gracias al rompimiento espontáneo de simetría, se logró demostrar que el modelo estándar es una teoría renormalizable, para el caso de los bosones intermediarios masivos; ahora queda por demostrar si esta libre de anomalías,²⁴ las cuales fueron descubiertas por Adler(1969-1970), Bell y Jackiew (1969) al estudiar el álgebra de corrientes. Las anomalías surgen cuando una simetría clásica, no es una simetría cuántica, la condición de invarianza gauge requiere que las anomalías se cancelen, por tal motivo cuando se imponen que sean igual a cero derivan en relaciones matemáticas entre los números cuánticos del contenido fermiónico; más explícitamente la sumatoria de las hipercargas de las familias fermiónicas debe ser cero.

Las anomalías presentes son:

$$\begin{aligned}
 [SU(3)_c]^2 U(1)_Y : \quad & -2a + b + c = 0; \\
 [SU(2)_L]^2 U(1)_Y : \quad & -3a - d = 0; \\
 [Grav]^2 U(1)_Y : \quad & -6a + 3b - 2d + e = 0; \\
 [U(1)_Y]^3 : \quad & -6a^3 + 3b^3 + 3c^3 - 2d^3 + e^3 = 0.
 \end{aligned} \tag{66}$$

de estos términos se encuentran los valores de las hipercargas para que la anomalía se cancele, con valores positivos para estados de quiralidad derecha y negativos para los de quiralidad izquierda. Se obtienen los siguientes valores de hipercargas $a = 1/3, b = 4/3, c = -2/3, d = -1$ y $e = -2$ lo que hace que el modelo este libre de anomalías y por tanto renormalizable.

²⁴CHENG, Ta-Pei. And LI, Ling-Fong. Gauge Theory Of Elementary Particle Physics; Clarendon Press. Oxford. 1989.

3. GENERALIDADES DE LOS MODELOS $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$

3.1. INTRODUCCIÓN

Existen Varias maneras de ampliar el modelo estándar, podemos adicionar nuevos campos fermiónicos, aumentar el sector escalar a más de una representación de Higgs, o alargar el grupo gauge local. Escogiendo como base la última forma, muchos autores ²⁵ y en varias versiones han propuesto, el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, como el que unifica parcialmente las interacciones débiles y fuertes; muchos de estos modelos ²⁶ poseen inconsistencias físicas, como anomalías gauge, corrientes derechas a bajas energías, corrientes neutras que cambian sabor, violación de universalidad etc.

Se asume que el grupo gauge electrodébil $SU(3)_C \otimes U(1)_X \supset SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, además asumimos que los quarks de quiralidad izquierda son tripletes de color, y los leptones de quiralidad derecha son singletes de color, transforman bajo las dos representaciones fundamentales (3 y 3^*). Los modelos 331 se dividen en dos clases, la primera, son los modelos donde las anomalías se cancelan para una sola familia, y la otra donde las anomalías se cancelan por interrelación entre familias. ²⁷ Los modelos presentados son de tipo vectorial.

3.2. MODELOS DE UNA SOLA FAMILIA

La expresión más general para el generador de carga eléctrica en $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ es una combinación lineal de los tres generadores del grupo gauge.

$$Q = aT_{3L} + \frac{2}{\sqrt{3}}bT_{8L} + XI_3, \quad (67)$$

donde $T_{iL} = \lambda_{iL}/2$; λ_{iL} son las matrices de Gell-Mann para $SU(3)_L$, normalizadas como $Tr(\lambda_i\lambda_j) = 2\delta_{ij}$; $I_3 = Dg(1, 1, 1)$ es la matriz unidad 3×3 ; a y b son parámetros arbitrarios que serán encontrados aquí.

Al colocar $a = 1$ da el isospín usual de la interacción electrodébil, y así hemos fijado el primer valor. De ese modo la ecuación (67) permite un número infinito de modelos en el contexto de la teoría 331, lo cual se limita mediante una serie de condiciones que veremos más adelante.

Por relación con el isodoublete $SU(2)_L$ para una familia, iniciemos con la definición del triplete para $SU(3)_L$

$$\chi_L = \begin{pmatrix} u \\ d \\ q \end{pmatrix}_L \quad \psi_L = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \\ l \end{pmatrix}_L,$$

²⁵ ALBRIGTH, C.H. JARLSKOG, C. TJIA, M. Nucl. Phys. B86,535. 1974.

²⁶ De aquí en adelante se nombrarán como modelos 331.

²⁷ SINGER, M. VALLE, W. F. y SCHETCHTER, J. Phys. Rev. D22, 738. 1980;

donde q_L y l_L son singletes en $SU(2)_L$, para quarks y leptones respectivamente. Ahora si los números cuánticos de $(SU(3)_L, U(1)_X)$ para χ_L y ψ_L son $(3, X_\chi)$ y $(3^*, X_\psi)$ respectivamente, entonces usando la ecuación (67), se encuentra la relación

$$X_\chi + X_\psi = Q_q + Q_l = -\frac{1}{3}, \quad (68)$$

donde Q_q y Q_l son los valores de carga eléctrica de los singletes q_L y l_L en $SU(2)_L$, en unidades de valor absoluto de la carga electrónica.

En orden de cancelar la anomalía $[SU(3)_L]^3$, se necesitan dos anti-tripletes leptónicos en $SU(3)_L$ con números cuánticos $(3^*, X_i)$, $i = 1, 2$, con sus correspondientes componentes derechos. Cada uno de estos multipletes incluye un doblete en $SU(2)_L$ y un singlete de nuevos leptones, los quarks u_L^c, d_L^c y q_L^c son anti-tripletes de color, y singletes en $SU(3)_L$, con números cuánticos en $U(1)_X$ dados por X_u, X_d , y X_q , además si cancelamos la anomalía $[SU(3)_L]^3$, La hipercarga X_α con $\alpha = \chi, \psi, 1, 2, u, d, q, \dots$ deber ser fijada mediante las ecuaciones (67) y (68). Las anomalías de los vertices $[SU(3)_C]^2 U(1)_X$, $[SU(3)_L]^2 U(1)_X$, $[Grav]^2 U(1)_X$ y $[U(1)_X]^3$ para que se cancelen, se deben cumplir las siguientes relaciones:

$$[SU(3)_C]^2 U(1)_X : \quad 3X_\chi + X_U + X_d + X_q = 0$$

$$[SU(3)_L]^2 U(1)_X : \quad 3X_\chi + X_\psi + X_1 + X_2 = 0$$

$$[Grav]^2 U(1)_X : \quad 9X_\chi + 3X_U + 3X_d + 3X_q + 3X_\psi + 3X_1 + 3X_2 + \sum_{Singl} X_{ls} = 0$$

$$[U(1)_X]^3 : \quad 9X_\chi^3 + 3X_U^3 + 3X_d^3 + 3X_q^3 + 3X_\psi^3 + 3X_1^3 + 3X_2^3 + \sum_{Singl} X_{ls}^3 = 0$$

Donde X_{ls} son las hipercargas de los singletes leptónicos derechos cargados, necesarios con el fin de tener una teoría consistente.

Ya hemos dicho que tenemos un número infinito de posibles modelos, que se caracterizan por el valor de b ; cuyo valor es el principal factor que determina el valor de las cargas eléctricas de las partículas extras. Pero a fin de excluir partículas con cargas eléctricas exóticas, es decir que en nuestro modelo solo se permiten quarks con carga eléctrica $\pm 2/3$ y $\pm 1/3$, y leptones con carga ± 1 y 0 ; entonces el parámetro b bajo estas condiciones únicamente toma el valor de $\pm 1/2$ con equivalente sector gauge.

Un modelo libre de anomalías es el modelo A , el cual posee un quark extra D de carga eléctrica $Q_q = Q_D = -1/3$ para $b = 1/2$, lo que implica que $Q_l = 0$, por tanto se origina un nuevo leptón neutro N_{1L}^0 . De la ecuación (67) se encuentra $X_q = X_d = 1/3$, $X_u = -2/3$, para encontrar las restantes hipercargas se utilizan las ecuaciones (68) y las relaciones de anomalías, obteniendo $X_\chi = 0$, $X_\psi = -1/3$, $\sum_{Singl} X_{ls} = 0$ y $X_1 + X_2 = 1/3$, por la condición de las cargas leptónicas ± 1 y 0 , se tiene la solución $X_1 = -1/3$, $X_2 = 2/3$ y $X_{ls} = 0$ con el último resultado podemos concluir, que no necesitamos leptones derechos cargados en este modelo para cancelar las anomalías.

El modelo A es el siguiente:

Cuadro 5: Modelo A.

Sector de Quarks.

$\chi_L = \begin{pmatrix} u \\ d \\ D \end{pmatrix}_L$	u_L^c	d_L^c	D_L^c
$(3,3,0)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$

Sector de Leptones.

$\psi_L = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \\ N_1^0 \end{pmatrix}_L$	$\psi_{1L} = \begin{pmatrix} E^- \\ N_2^0 \\ N_3^0 \end{pmatrix}_L$	$\psi_{2L} = \begin{pmatrix} N_4^0 \\ E^+ \\ e^+ \end{pmatrix}_L$
$(1,3^*, -1/3)$	$(1,3^*, -1/3)$	$(1,3^*, 2/3)$

Donde los números cuánticos son los que se encuentran entre paréntesis, para $SU(3)_C$, $SU(3)_L$, y $U(1)_X$, respectivamente. Este modelo se encuentra libre de anomalías.²⁸

El modelo que se presenta a continuación tiene los mismos multipletes de quarks que los usados en el modelo A, pero organizados de una manera diferente. Donde se utiliza el quark extra $q = U$ de carga eléctrica $Q_q = Q_U = 2/3$, donde $b = -1/2$, lo que implica la aparición de un nuevo leptón con carga $Q_l = -1$; las partículas del nuevo modelo son:

Cuadro 6: Modelo B.

Sector de Quarks.

$\chi_L = \begin{pmatrix} u \\ d \\ U \end{pmatrix}_L$	d_L^c	u_L^c	U_L^c
$(3,3,1/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$

Es otro modelo para un sola familia libre de anomalías, que ha sido estudiado en la literatura.²⁹

²⁸PONCE, William A. FLÓREZ, Juan Bautista, SÁNCHEZ, Luis A. International Journal of modern Physics A, Vol.17, N°.5. 2002.

²⁹SINGER, M. VALLE, J. W. F. y SHETCHTER, J. Phys. Rev. D22, 738. 1980

Sector de Leptones.

$\psi_L = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \\ E_1^- \end{pmatrix}_L$	$\psi_{1L} = \begin{pmatrix} N_1^0 \\ E_2^+ \\ \nu_e^c \end{pmatrix}_L$	$\psi_{2L} = \begin{pmatrix} E_2^- \\ N_2^0 \\ E_3^- \end{pmatrix}_L$	e_L^+	E_{1L}^+	E_{3L}^+
$(1, 3^*, -2/3)$	$(1, 3^*, 1/3)$	$(1, 3^*, -2/3)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$

Existen otros modelos para una sola familia, en los que las cargas de los quarks son $-2/3$ o $1/3$, pero genera leptones con cargas $1/3$ y $-2/3$ respectivamente, lo que corresponde a leptones con cargas eléctricas exóticas, en forma similar se pueden tener modelos con $Q_l = 1$ lo que produce $Q_q = -4/3$ es decir quarks con cargas eléctricas exóticas, lo cual es excluido de los modelos tratados aquí.³⁰

3.3. MODELOS INTERFAMILIAS

En algunos casos los modelos para una sola familia son incapaces de cancelar la anomalía, por lo que se debe recurrir a las tres familias, donde la tercera familia es tratada de manera diferente a las otras dos, o las tres familias son tratadas independientemente.

Un ejemplo de modelos interfamilias es el modelo C , el cual resulta de combinar el modelo A , con el B (se reemplaza $3 \leftrightarrow 3^*$ en el modelo B a fin de asegurar una única derivada covariante).

Cuadro 7: Modelo C.

Sector de Leptones, para $\alpha = e, \mu, \tau$;

$\psi_L^\alpha = \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \alpha^- \\ E_\alpha^- \end{pmatrix}_L$	α_L^+	$E_{\alpha L}^+$
$(1, 3, -2/3)$	$(1, 1, 1)$	$(1, 1, 1)$

Las anomalías desaparecen para este contenido fermiónico. Otro modelo con características similares es el modelo D , que se estudiará en detalle en la sección 5.

A pesar de que los modelos nombrados no permiten la masa de los neutrinos, han explicado algunos hechos experimentales de los neutrinos solares.³¹ (Para un análisis más detallado de neutrinos derechos en los modelos 331 mirar Ref.³²).

³⁰Un modelo que tiene cargas eléctricas exóticas se estudia en: PISANO, F. PLEITZ, V. Phys. Rev. D46, 410. 1992.

³¹KITABAYASHI, T. phys. Rev. D64, 2001.

³²LONG, Hoang Ngoc Institute of Theoretical Physics, National Centre for Natural Science and Technology, P.O. Box 429, Bo Ho, Hanoi 10000 Vietnam. 1995

El sector de quarks para $a = 1, 2$, que representa las dos primeras familias es:

$\chi_L^a = \begin{pmatrix} d^a \\ u^a \\ U^a \end{pmatrix}_L$	u_L^{ac}	d_L^{ac}	U_L^{ac}
$(3, 3^*, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$

Tercera familia de quarks.

$\chi_{3L} = \begin{pmatrix} u_3 \\ d_3 \\ D \end{pmatrix}_L$	u_{3L}^c	d_{3L}^c	D_L^c
$(3, 3, 0)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$

3.4. OTROS MODELOS

Consideremos otros modelos 331 sin cargas eléctricas exóticas para $b = 1/2$. Comencemos definiendo los conjuntos cerrados de multipletes fermiónicos ³³ :

- $S_1 = [(\nu_\alpha, \alpha^-, E_\alpha^-); \alpha^+; E_\alpha^+]$ con números cuánticos $(1, 3, -2/3); (1, 1, 1); (1, 1, 1);$
- $S_2 = [(\alpha^-, \nu_\alpha, N_\alpha^0); \alpha^+;]$ con números cuánticos $(1, 3^*, -1/3); (1, 1, 1);$
- $S_3 = [(d, u, U); u^c; d^c; U^c]$ con números cuánticos $(3, 3^*, 1/3); (3^*, 1, -2/3); (3^*, 1, 1/3); (3^*, 1, -2/3);$
- $S_4 = [(u, d, D); d^c; u^c; D^c]$ con números cuánticos $(3, 3, 0); (3^*, 1, 1/3); (3^*, 1, -2/3); (3^*, 1, 1/3);$
- $S_5 = [(e^-, \nu_e, N_1^0); (E^-, N_2^0, N_3^0); (N_4^0, E^+, e^+)]$ con números cuánticos $(1, 3^*, -1/3); (1, 3^*, -1/3); (1, 3^*, 2/3);$
- $S_6 = [(\nu_e, e^-, E_1^-); (E_2^+, N_1^0, N_2^0); (N_3^0, E_2^-, E_3^-); e^+; E_1^+; E_3^+]$ con números cuánticos $(1, 3, -2/3); (1, 3, 1/3); (1, 3, -2/3); (1, 1, 1); (1, 1, 1); (1, 1, 1).$

La cancelación de anomalías es presentada en el cuadro (8):

Se observa de la tabla que el modelo A es representado por $(S_4 + S_5)$, el modelo B es $(S_3 + S_6)$ y el modelo C por $(3S_1 + S_3 + 2S_4)$; pero no son las únicas estructuras que se pueden construir libres de anomalías. Otras estructuras son:

$(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$, $(2S_4 + 2S_5)$, $(2S_3 + 2S_6)$ y $(S_3 + S_4 + S_5 + S_6)$ que son modelos para dos familias, pero modelos que no son realistas.

³³Cerrado en el sentido en que se incluyen en cada conjunto las antipartículas de las partículas cargadas.

Cuadro 8: Anomalías para S_i

Anomalías	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
$[\text{SU}(3)_c]^2 U(1)_X$	0	0	0	0	0	0
$[\text{SU}(3)_L]^2 U(1)_X$	-2/3	-1/3	1	0	0	-1
$[\text{Grav}]^2 U(1)_X$	0	0	0	0	0	0
$[\text{U}(1)_X]^3$	10/9	8/9	-12/9	-6/9	6/9	12/9

Modelos para tres familias tenemos:

Modelo D: $(3S_2 + S_3 + 2S_4)$

Modelo E: $(S_1 + S_2 + S_3 + 2S_4 + S_6)$

Modelo F: $(S_1 + S_2 + 2S_3 + S_4 + S_6)$

Modelo G: $(2S_4 + 2S_5 + S_3 + S_6)$

Modelo H: $(S_4 + S_5 + 2S_3 + 2S_6)$

Modelo I: $3(S_4 + S_5)$

Modelo J: $3(S_3 + S_6)$

A demás del modelo C.

Los modelos a desarrollar son el D y el F, que se diferencian entre sí, en el hecho, que el modelo F posee más contenido fermiónico y las tres familias so tratadas independiente-mente.

Se puede obtener modelos de cuatro, cinco familias etc. pero como en el caso de dos familias no son del todo realistas.³⁴

³⁴PONCE, William A. FLÓREZ, Juan Bautista, SÁNCHEZ Luís A. International Journal of modern Physics A, Vol.17, N°.5. 2002.

4. SECTOR ESCALAR Y SECTOR BOSÓNICO

4.1. INTRODUCCIÓN

Para romper la simetría adecuadamente se necesita un sector escalar apropiado, en forma general el sector escalar es muy simple, permite encontrar la masa de los bosones gauge además de la masa de los fermiones. La meta es romper la simetría $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X \rightarrow SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \otimes U(1)_Q$, lo que implica la existencia de 8 bosones de Golstone los cuales deben estar contenidos en el sector escalar de la teoría,³⁵ y 9 partículas restantes por determinar.

4.2. SECTOR ESCALAR

Necesitamos tres tripletes de escalares de Higgs complejos para romper la simetría, lo que implica tener nueve escalares complejos y 18 reales, dados por

$$\begin{aligned} \phi_1(1, 3^*, -1/3) &= \begin{pmatrix} \phi_1^- \\ \phi_1^0 \\ \phi_1'^0 \end{pmatrix} \quad \text{con VEV} \quad \langle \phi_1 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V \end{pmatrix} \\ \phi_2(1, 3^*, -1/3) &= \begin{pmatrix} \phi_2^- \\ \phi_2^0 \\ \phi_2'^0 \end{pmatrix} \quad \text{con VEV} \quad \langle \phi_2 \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ \phi_3(1, 3^*, 2/3) &= \begin{pmatrix} \phi_3^0 \\ \phi_3^+ \\ \phi_3'^+ \end{pmatrix} \quad \text{con VEV} \quad \langle \phi_3 \rangle = \begin{pmatrix} \frac{v'}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (69)$$

Con la escala de jerarquía de masa $V \gg v \sim 250 GeV$, escala de masa electrodébil, siendo $v' \simeq v$. Los escalares neutros son:

$$\begin{aligned} \phi_1^0 &= \frac{\phi_{1R}^0 + i\phi_{1I}^0}{\sqrt{2}}, \\ \phi_2'^0 &= \frac{\phi_{2R}'^0 + i\phi_{2I}'^0}{\sqrt{2}}, \\ \phi_1'^0 &= V + \frac{\phi_{1R}'^0 + i\phi_{1I}'^0}{\sqrt{2}}, \\ \phi_2^0 &= v + \frac{\phi_{2R}^0 + i\phi_{2I}^0}{\sqrt{2}}, \\ \phi_3^0 &= v' + \frac{\phi_{3R}^0 + i\phi_{3I}^0}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (70)$$

³⁵GOLSTONE, J. Nouv.Cim. 19,154 1961.

La parte real ϕ_R es conocida como un escalar CP-par ó escalar puro, y la imaginaria ϕ_I como CP-impar ó pseudoescalar.³⁶

El potencial más general renormalizable que incluye ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 es:

$$\begin{aligned}
 V(\phi_1, \phi_2, \phi_3) = & \mu_1^2 \phi_1^\dagger \phi_1 + \mu_2^2 \phi_2^\dagger \phi_2 + \mu_3^2 \phi_3^\dagger \phi_3 + \frac{\mu_4^2}{2} (\phi_1^\dagger \phi_2 + h.c) + \lambda_1 (\phi_1^\dagger \phi_1)^2 \\
 & + \lambda_2 (\phi_2^\dagger \phi_2)^2 + \lambda_3 (\phi_3^\dagger \phi_3)^2 + \frac{\lambda_4}{2} [(\phi_1^\dagger \phi_2)^2 + h.c] + \lambda_5 (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_2^\dagger \phi_2) \\
 & + \lambda_6 (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_3^\dagger \phi_3) + \lambda_7 (\phi_2^\dagger \phi_2) (\phi_3^\dagger \phi_3) + \lambda_8 (\phi_1^\dagger \phi_2) (\phi_2^\dagger \phi_1) + \lambda_9 (\phi_1^\dagger \phi_3) (\phi_3^\dagger \phi_1) \\
 & + \lambda_{10} (\phi_2^\dagger \phi_3) (\phi_3^\dagger \phi_2) + \frac{1}{2} [\lambda_{11} (\phi_1^\dagger \phi_1) (\phi_1^\dagger \phi_2) + \lambda_{12} (\phi_2^\dagger \phi_2) (\phi_1^\dagger \phi_2) + \lambda_{13} (\phi_3^\dagger \phi_3) (\phi_1^\dagger \phi_2)] \\
 & + \frac{1}{2} [\lambda_{14} (\phi_1^\dagger \phi_3) (\phi_3^\dagger \phi_2) + f \epsilon_{ijk} \phi_1^i \phi_2^j \phi_3^k + h.c].
 \end{aligned} \tag{71}$$

A partir de este potencial se logra hallar el espectro de masas, para el sector escalar cargado, para el CP-par y CP-impar, encontrando la masa de los higgses y con ellas los acoples con los bosones $W^\pm, Z^0$. Que se recomienda sea realizado en un proyecto futuro.

4.3. SECTOR BOSÓNICO

Hay un total de 17 bosones Gauge en el grupo en consideración; un campo Gauge B^μ asociado con $U(1)_X$, correspondiente al fotón, 8 campos gluónicos para $SU(3)_C$, los cuales permanecen sin masa después del rompimiento de simetría, Y otros ocho asociados con $SU(3)_L$ que podemos escribirlos de la siguiente manera ($b = 1/2$):³⁷

$$\frac{1}{2} \lambda_\alpha A_\alpha^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} D_1^\mu & W^{+\mu} & K^{+\mu} \\ W^{-\mu} & D_2^\mu & K^{0\mu} \\ K^{-\mu} & \bar{K}^{0\mu} & D_3^\mu \end{pmatrix}, \tag{72}$$

donde $D_1^\mu = A_3^\mu/\sqrt{2} + A_8^\mu/\sqrt{6}$, $D_2^\mu = -A_3^\mu/\sqrt{2} + A_8^\mu/\sqrt{6}$, y $D_3^\mu = -2A_8^\mu/\sqrt{6}$. $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, 8$ son las 8 matrices normalizadas de Gell-Mann. El operador de carga eléctrica para el modelo es:

$$Q = \frac{\lambda_3}{2} + \frac{\lambda_8}{2\sqrt{3}} + X I_3, \tag{73}$$

$$Q^* = -\frac{\lambda_3}{2} - \frac{\lambda_8}{2\sqrt{3}} + X I_3,$$

I_3 es la matriz unidad 3x3.

Ahora, para romper la simetría y generar masa de los bosones necesitamos el lagrangiano de Higgs que se define como:

³⁶ Simonetta Filipi, PONCE, William A. y SÁNCHEZ Luís A.

³⁷ PONCE, William A. FLÓREZ, Juan Bautista, SÁNCHEZ, Luís A. International Journal of modern Physics A, Vol.17, Nº.5. 2002.

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \phi_i)^\dagger (D^\mu \phi_i) - V(\phi) \quad \phi_i = \phi_1, \phi_2, \phi_3, \quad (74)$$

La derivada covariante para los tripletes de $SU(3)_L$ es

$$D^\mu = \partial^\mu - i \frac{g_2}{2} \lambda_\alpha A_\alpha^\mu - i g_1 X B^\mu, \quad \text{para la representación 3,} \quad (75)$$

$$\bar{D}^\mu = \partial^\mu - i \frac{g_2}{2} \bar{\lambda}_\alpha A_\alpha^\mu - i g_1 X B^\mu, \quad \text{para la representación } 3^*. \quad (76)$$

Con $\bar{\lambda}_\alpha = -\lambda_\alpha^* = -\lambda_\alpha^T$, g_2 y g_1 son las constantes de acople de $SU(3)_L$ y $U(1)_X$; X es la hipercarga.

Reemplazando el sector escalar y aplicando las derivadas anteriores encontramos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H = & \frac{g_2^2}{4} (v'^2 + 2V^2) K_\mu^- K_\mu^+ + \frac{g_2^2}{4} (v'^2 + v^2) W_\mu^- W_\mu^+ + \frac{g_2^2}{4} (v^2 + 2V^2) K_\mu^0 K_\mu^0 \\ & + \frac{V^2}{4} \left[\sqrt{2} g_2 D_{3\mu} + \frac{2}{3} g_1 B_\mu \right]^2 + \frac{v^2}{8} \left[\sqrt{2} g_2 D_{2\mu} + \frac{2}{3} g_1 B_\mu \right]^2 \\ & + \frac{v'^2}{8} \left[\sqrt{2} g_2 D_{1\mu} - \frac{4}{3} g_1 B_\mu \right]^2 - V(\phi). \end{aligned} \quad (77)$$

De donde se obtienen las masas de los bosones físicos cargados

$$M_{W^\pm}^2 = \frac{g_2^2}{4} (v^2 + v'^2), \quad M_{K^\pm}^2 = \frac{g_2^2}{4} (2V^2 + v'^2), \quad M_{K^0 \bar{K}^0}^2 = \frac{g_2^2}{4} (2V^2 + v^2). \quad (78)$$

Para encontrar la masa neutra, tomamos la segunda parte del lagrangiano dado en ecuación (77); que al reemplazar los valores de D_1^μ, D_2^μ y D_3^μ se obtiene el término de masa

$$M = V^2 \left(\frac{g_1 B^\mu}{3} - \frac{g_2 A_8^\mu}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{v^2}{8} \left(\frac{2g_1 B^\mu}{3} - g_2 A_3^\mu + \frac{g_2 A_8^\mu}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{v'^2}{8} \left(g_2 A_3^\mu - \frac{4g_1 B^\mu}{3} + \frac{g_2 A_8^\mu}{\sqrt{3}} \right)^2. \quad (79)$$

Esta ecuación es conveniente escribirla en forma de matriz, ya que se necesita encontrar los autovalores,

$$M = \frac{g_2^2}{4} (A_3 \quad A_8 \quad B)_\mu \begin{pmatrix} \frac{v^2 + v'^2}{2} & \frac{-v^2 + v'^2}{2\sqrt{3}} & -(\frac{v^2 + 2v'^2}{2})\delta \\ \frac{-v^2 + v'^2}{2\sqrt{3}} & \frac{v^2 + 8V^2 + v'^2}{6} & -(\frac{-v^2 + 4V^2 + 2v'^2}{2\sqrt{3}})\delta \\ -(\frac{v^2 + 2v'^2}{2})\delta & -(\frac{-v^2 + 4V^2 + 2v'^2}{2\sqrt{3}})\delta & (\frac{v^2}{2} + V^2 + 2v'^2)\delta^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_3 \\ A_8 \\ B \end{pmatrix}^\mu. \quad (80)$$

El δ se define como $\delta = 2g_1/3g_2$.

Se encuentra que un valor propio es cero, lo que corresponde a la masa del fotón. De este valor propio se halla que su correspondiente vector propio es:

$$\begin{pmatrix} \frac{3\delta}{2} & \frac{\sqrt{3}\delta}{2} & 1 \end{pmatrix} Z. \quad (81)$$

Donde Z se encuentra normalizado como $Z = 1/(1 + 3\delta^2)^{1/2}$ y se define $S_W = 3\delta/2(1 + 3\delta^2)^{1/2}$, entonces el campo fotónico hallado de (81) será:

$$A^\mu = S_W A_3^\mu + C_W \left[\frac{T_w}{\sqrt{3}} A_8^\mu + \left(1 - \frac{T_w^2}{3} \right)^{1/2} B^\mu \right], \quad (82)$$

un conjunto ortonormal al campo fotónico es:

$$Z'^\mu = - \left(1 - \frac{T_W^2}{3} \right)^{1/2} A_8^\mu + \frac{T_W}{\sqrt{3}} B^\mu. \quad (83)$$

Se requiere un tercer campo, el cual debe ser ortonormal a los dos anteriores, este es:

$$Z^\mu = C_W A_3^\mu - S_W \left[\frac{T_W}{\sqrt{3}} A_8^\mu + \left(1 - \frac{T_w^2}{3} \right)^{1/2} B^\mu \right], \quad (84)$$

S_W y C_W son el seno y el coseno del ángulo de mezcla electrodébil, $S_W = \sqrt{3}g_1/\sqrt{3g_2^2 + 4g_1^2}$, y por consiguiente $T_W = S_W/C_W$.

se hallan dos nuevos campos físicos bosónicos neutros, los cuales están definidos a través del ángulo de mezcla θ , y Z_μ, Z'_μ .

$$\begin{aligned} Z_1^\mu &= Z_\mu \cos \theta + Z'_\mu \sin \theta \\ Z_2^\mu &= -Z_\mu \sin \theta + Z'_\mu \cos \theta. \end{aligned} \quad (85)$$

El ángulo de mezcla se lo encuentra de:

$$\tan(2\theta) = \frac{\sqrt{12}C_W(1 - T_W^2/3)^{1/2}[v^2(1 - T_W^2) - v'^2(1 + T_W^2)]}{3(v^2 + v'^2)(1 - T_W^2/3) - C_W^2[8V^2 + v^2(1 - T_W^2)^2 + v'^2(1 + T_W^2)^2]}, \quad (86)$$

Además se puede hallar la hipercarga Y asociada con el boson gauge.

$$Y^\mu = \left[\frac{T_W}{\sqrt{3}} A_8^\mu + \left(1 - \frac{T_W^2}{3} \right)^{1/2} B^\mu \right]. \quad (87)$$

En el *límite* $\theta \rightarrow 0$, la masa del boson neutro es $M_Z = M_{W^\pm}/C_W$, y $Z_1^\mu = Z^\mu$ es el boson gauge del modelo estándar, que se obtiene cuando $V \rightarrow \infty$ ó $v'^2 = v^2(C_W^2 - S_W^2)$. En general θ puede ser diferente de cero, aunque su valor sea muy pequeño, se determina desde la fenomenología para cada modelo en particular.³⁸

³⁸PONCE, William A. FLÓREZ, Juan Bautista, SÁNCHEZ, Luis A. International Journal of modern Physics A, Vol.17

5. MODELO D

5.1 INTRODUCCIÓN

Las corrientes fermiónicas son diferentes para cada modelo, en esta parte del trabajo se encuentran las corrientes para el modelo D,³⁹ y las masas de las partículas, para lograr dichos objetivos necesitamos desarrollar dos tipos de lagrangianos, el lagrangiano de fermiones y el lagrangiano de Yukawa, respectivamente. Ya que la parte escalar y bosónica es la misma para todos los modelos 331, con las corrientes y masas queda desarrollado en parte el modelo D.

5.2. DEFINICIÓN DEL MODELO

El modelo D , esta conformado de la siguiente manera:

Cuadro 9: Modelo D.

Sector de quarks. Con $a = 1, 2$, para las dos primeras familias de quarks;

$\chi_L^a = \begin{pmatrix} u_a \\ d_a \\ D_a \end{pmatrix}_L$	u_{aL}^c	d_{aL}^c	D_{aL}^c
$(3, 3, 0)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$

el sub-índice 3 me representa la tercera familia.

$\chi_L^3 = \begin{pmatrix} d_3 \\ u_3 \\ U \end{pmatrix}_L$	u_{3L}^c	d_{3L}^c	U_L^c
$(3, 3^*, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$

Las tres generaciones leptónicas transforman como un antitriplete de $SU(3)_L$, donde el sector leptónico es:

³⁹SINGER, M. VALLE, J. W. F. e y SCHECHTER, J. Phys. Rev. D22, 738. 1980

$\psi_L^\alpha = \begin{pmatrix} \alpha^- \\ \nu_\alpha \\ N_\alpha^0 \end{pmatrix}_L$	α_L^+
$(1,3^*, -1/3)$	$(1,1,1)$

donde $\alpha = e, \mu, \tau$.

5.3. CORRIENTES CARGADAS

Por analogía con el modelo estándar, el lagrangiano de fermiones para partículas cargadas se define como:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\chi}_L^a i\gamma^\mu D_\mu \chi_L^a + \bar{\chi}_L^3 i\gamma^\mu D_\mu \chi_L^3 + \bar{\psi}_L^\alpha i\gamma^\mu D_\mu \psi_L^\alpha, \quad (88)$$

reemplazando la derivada covariante de $SU(3)_L$, y teniendo en cuenta la representación que trabaja cada multiplete se obtiene la interacción entre los campos vectoriales cargados y los fermiones para el modelo D.

$$\begin{aligned} H^{CC} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} [& W_\mu^+ (\bar{u}_L^a \gamma^\mu d_L^a - \bar{U}_L \gamma^\mu d_{3L} - \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \alpha_L^-) \\ & + K_\mu^+ (\bar{u}_L^a \gamma^\mu D_L^a - \bar{U}_L \gamma^\mu d_{3L} - \bar{N}_{\alpha L}^0 \gamma^\mu \alpha_L^-) \\ & + K_\mu^0 (\bar{d}_L^a \gamma^\mu D_L^a - \bar{U}_L \gamma^\mu u_{3L} - \bar{N}_{\alpha L}^0 \gamma^\mu \nu_{\alpha L}) + h.c.] \end{aligned} \quad (89)$$

$a = 1, 2$ y $\alpha = e, \mu, \tau$, $u_{1L} = \text{quark } u$, $u_{2L} = \text{quark } c$, $u_3 = \text{quark } t$, $d_{1L} = \text{quark } d$, $d_{2L} = \text{quark } s$, $d_3 = \text{quark } b$, $D_{1L} = \text{quark extra } D$, $D_{2L} = \text{quark extra } S$, $U = \text{quark extra } T$.

Se puede notar que en la ecuación anterior, tiene contenida la corriente débil del modelo estándar.

5.4. CORRIENTES NEUTRAS

Para hallar las corrientes neutras, es necesario retomar las definiciones de campos encontrados en sección anterior, ecuaciones (82,83,84), para el fotón A_μ, Z_μ , y Z'_μ respectivamente, de las cuales despejamos A_μ^8 , y A_μ^3 , para encontrar:

$$B_\mu = \frac{T_W}{\sqrt{3}} Z'_\mu - (3 - T_W^2)^{1/2} \frac{S_W}{\sqrt{3}} + (3 - T_W^2)^{1/2} \frac{C_W}{\sqrt{3}} A_\mu. \quad (90)$$

Lo anterior se reemplaza en el lagrangiano de interacción. Que para el modelo se define

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{interacción} = & + \bar{\chi}_{aL} \gamma^\mu (i\partial_\mu + \frac{g_2}{2} \lambda_\alpha A_{\alpha\mu} + g_1 X_Q B_\mu) \chi_{aL} \quad \text{quarks izquierdos} \\ & + \sum_{q_{aR}=u_{aR}, d_{aR}, D_{aR}} \bar{q}_{aR} \gamma^\mu (i\partial_\mu + g_1 X_{q_{aR}} B_\mu) q_{aR} \quad \text{quarks derechos} \\ & + \bar{\chi}_{3L} \gamma^\mu (i\partial_\mu - \frac{g_2}{2} \lambda_\alpha^T A_{\alpha\mu} + g_1 X_3 B_\mu) \chi_{3L} \quad \text{tercera familia} \\ & + \sum_{\chi_{3R}=u_{3R}, d_{3R}, U_R} \bar{\chi}_{3R} \gamma^\mu (i\partial_\mu + g_1 X_{\chi_{3R}} B_\mu) \chi_{3R} \quad \text{quarks derechos} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \bar{\psi}_L^\alpha \gamma^\mu (i\partial_\mu - \frac{g_2}{2} \lambda_\alpha^T A_{\alpha\mu} + g_1 X_\psi B_\mu) \psi_L^\alpha \quad \text{leptones izquierdos} \\
& + \bar{\alpha}_R \gamma^\mu (i\partial^\mu + g_1 X_{\alpha R} B^\mu) \alpha_R \quad \text{leptones derechos} .
\end{aligned} \tag{91}$$

Donde las hipercargas X , están definidas en el cuadro (9), χ son los tripletes de quarks, q los singletes de quarks, ψ_L triplete izquierdo de leptones y α_R singlete derecho de leptones.

Podemos encontrar el Hamiltoniano asociado a las corrientes neutras, como se hizo en el modelo estándar.

$$H^0 = e A_\mu J^\mu(EM) + \frac{g_2}{C_W} Z_\mu J^\mu(Z) + \frac{g_1}{\sqrt{3}} Z'^\mu J^\mu(Z'), \tag{92}$$

Las corrientes neutras son:

$$\begin{aligned}
J^\mu(EM) &= \frac{2}{3}(\bar{u}_a \gamma^\mu u_a) - \frac{1}{3}(\bar{d}_a \gamma^\mu d_a) - \frac{1}{3}(\bar{D}_a \gamma^\mu D_a) - \frac{1}{3}(\bar{d}_3 \gamma^\mu d_3) \\
&+ \frac{2}{3}(\bar{u}_3 \gamma^\mu u_3) + \frac{2}{3}(\bar{U} \gamma^\mu U) - (\bar{\alpha}^- \gamma^\mu \alpha^-) \\
&= \sum_f \bar{f} \gamma^\mu q_f f, \\
J^\mu(Z) &= J_L^\mu(Z) - S_W^2 J^\mu(EM), \\
J^\mu(Z') &= T_W J^\mu(EM) - J_L^\mu(Z'),
\end{aligned} \tag{93}$$

Donde $e = g_2 S_W = g_1 C_W \sqrt{1 - T_W^2/3} > 0$, es la carga eléctrica, q_f es la carga eléctrica de los fermiones f en unidades de e , $J^\mu(EM)$ es la corriente electromagnética.

Las corrientes izquierdas son:

$$\begin{aligned}
J_L^\mu(Z) &= \frac{1}{2} [\bar{u}_{aL} \gamma^\mu u_{aL} - \bar{d}_{aL} \gamma^\mu d_{aL} - \bar{d}_{3L} \gamma^\mu d_{3L} + \bar{u}_{3L} \gamma^\mu u_{3L} - \bar{\alpha}_L^- \gamma^\mu \alpha_L^- + \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L}] \\
&= \sum_f \bar{f}_L \gamma^\mu T_{3f} f_L, \\
J_L^\mu(Z') &= S_{2W}^{-1} (\bar{u}_{aL} \gamma^\mu u_{aL} - \bar{d}_{3L} \gamma^\mu d_{3L} - \bar{\alpha}_L^- \gamma^\mu \alpha_L^-) \\
&+ T_{2W}^{-1} (\bar{d}_{aL} \gamma^\mu d_{aL} - \bar{u}_{3L} \gamma^\mu u_{3L} - \bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L}) \\
&- T_W^{-1} (\bar{D}_{aL} \gamma^\mu D_{aL} - \bar{U}_L \gamma^\mu U_L - \bar{N}_{\alpha L}^0 \gamma^\mu N_{\alpha L}^0) \\
&= \sum_f \bar{f}_L \gamma^\mu T_{9f} f_L,
\end{aligned} \tag{94}$$

en la cual $S_{2W} = 2S_W C_W$, $T_{2W} = S_{2W}/C_{2W}$, $C_{2W} = C_W^2 - S_W^2$, $T_{3f} = Dg(1/2, -1/2, 0)$ es la tercera componente del isospín débil, actuando en la representación 3 de $SU(3)_L$ (negativa para la representación 3^*), y $T_{9f} = Dg(S_{2W}^{-1}, T_{2W}^{-1}, -T_W^{-1})$ es una matriz 3x3 que actúa en la representación 3 (para la representación 3^* es negativa). $J_\mu(Z)$ es la generalización de la corriente neutra, que también se haya presente en el modelo estándar.

Ahora encontremos el Hamiltoniano de corrientes neutras; en la ecuación (92) se reemplaza Z'_μ, Z_μ que se despejan de (85),

$$\begin{aligned} Z'^\mu &= Z_1^\mu \sin \theta + Z_2^\mu \cos \theta \\ Z^\mu &= Z_1^\mu \cos \theta - Z_2^\mu \sin \theta, \end{aligned} \quad (95)$$

El hamiltoniano neutro es:

$$\begin{aligned} H^{NC} &= \frac{g_2}{2C_W} \sum_{i=1}^2 Z_i^\mu \sum_f \bar{f} \gamma^\mu [a_{iL}(f)(1 - \gamma^5) + a_{iR}(f)(1 + \gamma^5)] f \\ &= \frac{g_2}{2C_W} \sum_{i=1}^2 Z_i^\mu \sum_f \bar{f} \gamma^\mu [g_2(f)_{iV} - g_2(f)_{iA} \gamma^5] f, \end{aligned} \quad (96)$$

Donde

$$\begin{aligned} a_{1L}(f) &= \cos \theta (T_{3f} - q_f S_W^2) - \frac{g_1 \sin \theta C_W}{g_2 \sqrt{3}} (T_{9f} - q_f T_W), \\ a_{1R}(f) &= -q_f S_W \left(\cos \theta S_W - \frac{g_1 \sin \theta}{g_2 \sqrt{3}} \right), \\ a_{2L}(f) &= -\sin \theta (T_{3f} - q_f S_W^2) - \frac{g_1 \cos \theta C_W}{g_2 \sqrt{3}} (T_{9f} - q_f T_W), \\ a_{2R}(f) &= q_f S_W \left(\sin \theta S_W + \frac{g_1 \cos \theta}{g_2 \sqrt{3}} \right), \end{aligned} \quad (97)$$

y

$$\begin{aligned} g_2(f)_{1V} &= \cos \theta (T_{3f} - 2q_f S_W^2) - \frac{g_1 \sin \theta}{g_2 \sqrt{3}} (T_{9f} C_W - 2q_f S_W), \\ g_2(f)_{2V} &= -\sin \theta (T_{3f} - 2q_f S_W^2) - \frac{g_1 \cos \theta}{g_2 \sqrt{3}} (T_{9f} C_W - 2q_f S_W), \\ g_2(f)_{1A} &= \cos \theta T_{3f} - \frac{g_1 \sin \theta}{g_2 \sqrt{3}} T_{9f} C_W, \\ g_2(f)_{2A} &= -\sin \theta T_{3f} - \frac{g_1 \cos \theta}{g_2 \sqrt{3}} T_{9f} C_W, \end{aligned} \quad (98)$$

hay que tener en cuenta que $\bar{f}_L \gamma^\mu f_L = \bar{f} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) f$ y así mismo $f_R \gamma^\mu f_R = \bar{f} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 + \gamma^5) f$, al comparar con el modelo estándar, se observa que el ME está contenido en las ecuaciones anteriores ya que $g(f)_{1V}^{ME} = T_{3f} - 2q_f S_W^2$, y $g(f)_{1A}^{ME} = T_{3f}$. Los valores de $g_{iV}, g_{iA}; i = 1, 2$ se presentan en los cuadros (10,11). Otra manera de probar que el ME está contenido en el modelo D, es haciendo que $\theta = 0$ los acoplos de $Z_{1,2}^\mu$ para los fermiones son los que se hayan en el ME.⁴⁰

⁴⁰Un estudio detallado del modelo A, se presenta en: PONCE, William A. FLÓREZ, Juan Bautista, SÁNCHEZ, Luis A. International Journal of modern Physics A, Vol.17, N°.5. 2002.

Cuadro 10: Acoples de $Z_1^\mu \rightarrow \bar{f}f$.

f	g_{1V}	g_{1A}
$u_{1,2}$	$\cos \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\text{sen } \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
$d_{1,2}$	$\cos \theta \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$
$D_{1,2}$	$\frac{2}{3} \cos \theta S_W^2 - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-1 + \frac{5}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\text{sen } \theta C_W^2}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
d_3	$\cos \theta \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\cos \theta}{2} + \frac{\text{sen } \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
u_3	$\cos \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right) + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + S_W^2 \right)$
U	$\cos \theta \left(-\frac{4}{3} S_W^2 \right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(1 - \frac{7}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$
α^-	$\cos \theta \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2 \right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2 \right)$	$-\frac{\cos \theta}{2} + \frac{\text{sen } \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
ν_α	$\frac{\cos \theta}{2} + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$	$\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + S_W^2 \right)$
N_α^0	$-\frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$	$-\frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$

Cuadro 11: Acoples de $Z_2^\mu \rightarrow \bar{f}f$.

f	g_{2V}	g_{2A}
$u_{1,2}$	$-\text{sen } \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\text{sen } \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
$d_{1,2}$	$-\text{sen } \theta \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\text{sen } \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$
$D_{1,2}$	$-\frac{2}{3} \text{sen } \theta S_W^2 - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-1 + \frac{5}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\cos \theta C_W^2}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
d_3	$-\text{sen } \theta \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\text{sen } \theta}{2} + \frac{\cos \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
u_3	$-\text{sen } \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right) + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\text{sen } \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + S_W^2 \right)$
U	$-\text{sen } \theta \left(-\frac{4}{3} S_W^2 \right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(1 - \frac{7}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$
α^-	$-\text{sen } \theta \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2 \right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2 \right)$	$\frac{\text{sen } \theta}{2} + \frac{\cos \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
ν_α	$-\frac{\text{sen } \theta}{2} + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$	$-\frac{\text{sen } \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + S_W^2 \right)$
N_α^0	$-\frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$	$-\frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$

donde 1, 2, 3, las tres familias de quarks y $\alpha = e^-, \mu^-, \tau^-$, la parte leptónica.

5.5. MASAS FERMIÓNICAS

El sector escalar introducido la sección 4, no solo rompe la simetría de una manera correcta, si no que produce términos de masa para los fermiones de los modelos 331 sin cargas eléctricas exóticas.

Para el modelo D, se tiene:

Lagrangiano de Yukawa

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^Q + \mathcal{L}_Y^\ell, \quad (99)$$

donde

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^Q &= \bar{\chi}_L^a (h_{uam} u_{mR} \phi_3^* + h_{dam} d_{mR} \phi_1^* + h_{dam} d_{mR} \phi_2^* + h_{Da} D_{aR} \phi_1^* + h_{Da} D_{aR} \phi_2^*) \\ &\quad + \bar{\chi}_L^3 (G_{d3m} d_{mR} \phi_3 + G_{u3m} u_{mR} \phi_1 + G_{u3m} u_{mR} \phi_2 + G_U U_R \phi_1 + G_U U_R \phi_2) + h.c. \quad (100) \\ -\mathcal{L}_Y^\ell &= \bar{\psi}_L^\alpha (h_1 \alpha_R \phi_3^*) + h.c. \end{aligned}$$

para $a = 1, 2$; $m = 1, 2, 3$, los cuales indican suma; $\alpha = e^-, \mu^-, \tau^-$, parte leptónica y h , y G , son los acoples de Yukawa de primer orden. De la ecuación anterior se obtiene la masa de los dos primeros quarks $M_{u_a} = h_{uam} v' / \sqrt{2}$ y el término de masa:

$$M_{d_a D_a} = \begin{pmatrix} h_{dam} \frac{v}{\sqrt{2}} & h_{Da} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ h_{dam} V & h_{Da} V \end{pmatrix}, \quad (101)$$

luego del álgebra sobre la matriz se obtiene las masas $M_{d_a} = 0$ y $M_{D_a} = h_{dam} v / \sqrt{2} + h_{Da} V$ para completar las masas de las dos primeras familias de quarks.

Ahora para la tercera familia de quarks se halla de la ecuación (100), que $M_{d_3} = G_{d3m} v' \sqrt{2}$, $M_{u_3} = 0$, y $M_U = G_{u3m} v / \sqrt{2} + G_U V$. Las últimas dos masas se encuentran a partir de:

$$M_{u_3 U} = \begin{pmatrix} G_{u3m} \frac{v}{\sqrt{2}} & G_U \frac{v}{\sqrt{2}} \\ G_{u3m} V & G_U V \end{pmatrix}, \quad (102)$$

Para los leptones se tiene: $M_\alpha = h_1 v' / \sqrt{2}$.

Que los quarks d_a , y u_3 no tengan masa no es problema, ya que pueden adquirirla a través de correcciones radiativas en el contexto del mismo modelo, o introduciendo nuevos Higgses que no tengan valor esperado en el vacío.⁴¹ De igual manera el sector neutro puede adquirir masa.⁴²

⁴¹ÚSUGA, Yithsbeý Giraldo. "El Potencial Escalar En $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ Como Extensión Del Modelo Estándar" Universidad De Antioquia. 2002.

⁴²En el sector neutro esta incluido el neutrino.

6. MODELO F.

6.1. INTRODUCCIÓN

La estructura básica por desarrollar es igual a la que se presentó en el modelo D, con la gran diferencia que el modelo F, trabaja con un número mucho mayor de partículas, lo que implica que los cálculos sean más complicados, pero enriquece la teoría.

Se inicia definiendo el lagrangiano de fermiones para encontrar las corrientes cargadas y neutras, y con las corrientes neutras los acoples de $Z_1^\mu \rightarrow \bar{f}f$ y $Z_2^\mu \rightarrow \bar{f}f$. Por último se presenta el lagrangiano de Yukawa, para encontrar las masas fermiónicas, del modelo F.

6.2. DEFINICIÓN DEL MODELO

El modelo F , se define como la suma de $S_1 + S_2 + 2S_3 + S_4 + S_6$.⁴³

Cuadro 12: Modelo F.

Sector de Leptones.

$\psi_{1L} = \begin{pmatrix} \nu_\alpha \\ \alpha^- \\ E_\alpha^- \end{pmatrix}_L$	α^+	E_α^+
(1,3,-2/3)	(1,1,1)	(1,1,1)

$\psi_{2L} = \begin{pmatrix} \alpha'^- \\ \nu'_\alpha \\ N_\alpha^0 \end{pmatrix}_L$	α'^+
(1,3*, -1/3)	(1,1,1)

$\psi_{3L} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \\ E_1^- \end{pmatrix}_L$	$\psi_{4L} = \begin{pmatrix} E_2^+ \\ N_1^0 \\ N_2^0 \end{pmatrix}_L$	$\psi_{5L} = \begin{pmatrix} N_3^0 \\ E_2^- \\ E_3^- \end{pmatrix}_L$	e^+	E_1^+	E_3^+
(1,3,-2/3)	(1,3,1/3)	(1,3,-2/3)	(1,1,1)	(1,1,1)	(1,1,1)

⁴³Definidos en la sección 2.

Sector de quarks.

$\chi_L^a = \begin{pmatrix} d_a \\ u_a \\ U_a \end{pmatrix}_L$	u_{aL}^c	d_{aL}^c	U_{aL}^c
$(3, 3^*, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$

$\chi_{3L} = \begin{pmatrix} u_3 \\ d_3 \\ D_3 \end{pmatrix}_L$	d_{3L}^c	u_{3L}^c	D_{3L}^c
$(3, 3, 0)$	$(3^*, 1, 1/3)$	$(3^*, 1, -2/3)$	$(3^*, 1, 1/3)$

Con $\alpha = \mu$, $\alpha' = \tau$ y $a = 1, 2$. El primer cuadro corresponde a S_1 , el segundo a S_2 , el tercero S_6 , el cuarto a las dos primeras familias de quarks $a = 1, 2$, que a la vez equivale a $2S_3$ y el quinto corresponde a la tercera familia S_4 . Respectivamente.

6.3. CORRIENTES CARGADAS

El lagrangiano de fermiones para las partículas cargadas se define como:

$$\mathcal{L}_f = \bar{\chi}_L^a i\gamma^\mu D_\mu \chi_L^a + \bar{\chi}_L^3 i\gamma^\mu D_\mu \chi_L^3 + \bar{\psi}_{\beta L} i\gamma^\mu D_\mu \psi_{\beta L}, \quad (103)$$

Beta corre de $\beta = 1, 2, \dots, 5$. La interacción entre los campos vectoriales cargados con los fermiones es:

$$\begin{aligned} H^{CC} = \frac{g_2}{\sqrt{2}} [& W_\mu^+ (\bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \alpha_L^- - \bar{\nu}'_{\alpha L} \gamma^\mu \alpha_L'^- - \bar{u}_{aL} \gamma^\mu d_{aL} + \bar{u}_{3L} \gamma^\mu d_{3L} \\ & + \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu e_L^- + \bar{E}_{2L}^+ \gamma^\mu N_{1L}^0 + \bar{N}_{3L}^0 \gamma^\mu E_{2L}^-) \\ & + K_\mu^+ (\bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu E_{\alpha L}^- - \bar{N}_{\alpha L}^0 \gamma^\mu \alpha_L'^- - \bar{U}_{aL} \gamma^\mu d_{aL} + \bar{u}_{3L} \gamma^\mu D_{3L} \\ & + \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu E_L^- + \bar{E}_{2L}^+ \gamma^\mu N_{2L}^0 + \bar{N}_{3L}^0 \gamma^\mu E_{3L}^-) \\ & + K_\mu^0 (\bar{\alpha}_L^- \gamma^\mu E_{\alpha L}^- - \bar{N}_{\alpha L}^0 \gamma^\mu \nu_{\alpha L}' - \bar{U}_{aL} \gamma^\mu u_{aL} + \bar{d}_{3L} \gamma^\mu D_{3L} \\ & + \bar{e}_L^- \gamma^\mu E_L^- + \bar{N}_{1L}^0 \gamma^\mu N_{2L}^0 + \bar{E}_{2L}^- \gamma^\mu E_{3L}^-) + h.c.]. \end{aligned} \quad (104)$$

El hamiltoniano de corrientes cargadas, contiene la corriente cargada del modelo estándar.

6.4. CORRIENTES NEUTRAS

A demás de las ecuaciones (82,83,84), para A_μ , Z_μ , y Z'_μ respectivamente, necesitamos

conocer B^μ , (dado en la sección anterior (5)), para reemplazar en el lagrangiano de interacción definido como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{interacción} = & \bar{\psi}_{1L} \gamma^\mu \left(\frac{g_2}{2} \lambda_i A_{i\mu} + g_1 X_{\psi_{1L}} B_\mu \right) \psi_{1L} + \sum_{\psi_{1R}=\alpha^-, E_\alpha^-} \bar{\psi}_{1R} \gamma^\mu (g_1 X_{\psi_{1R}} B_\mu) \psi_{1R} \\
& + \bar{\psi}_{2L} \gamma^\mu \left(-\frac{g_2}{2} \lambda_i^T A_{i\mu} + g_1 X_{\psi_{2L}} B_\mu \right) \psi_{2L} + \bar{\psi}_{2R} \gamma^\mu (g_1 X_{\psi_{2R}} B_\mu) \psi_{2R} \\
& + \bar{\psi}_{3L} \gamma^\mu \left(\frac{g_2}{2} \lambda_i A_{i\mu} + g_1 X_{\psi_{3L}} B_\mu \right) \psi_{3L} + \bar{\psi}_{4L} \gamma^\mu \left(\frac{g_2}{2} \lambda_i A_{i\mu} + g_1 X_{\psi_{4L}} B_\mu \right) \psi_{4L} \\
& + \bar{\psi}_{5L} \gamma^\mu \left(\frac{g_2}{2} \lambda_i A_{i\mu} + g_1 X_{\psi_{5L}} B_\mu \right) \psi_{5L} + \sum_{\psi_R=e^-, E_1^-, E_3^-} \bar{\psi}_R \gamma^\mu (g_1 X_{\psi_R} B_\mu) \psi_R \\
& + \bar{\chi}_{aL} \gamma^\mu \left(-\frac{g_2}{2} \lambda_i^T A_{i\mu} + g_1 X_{\chi_{aL}} B_\mu \right) \chi_{aL} + \sum_{\chi_{aR}=d_{aR}, u_{aR}, U_{aR}} \bar{\chi}_{aR} \gamma^\mu (g_1 X_{\chi_{aR}} B_\mu) \chi_{aR} \\
& + \bar{\chi}_{3L} \gamma^\mu \left(\frac{g_2}{2} \lambda_i A_{i\mu} + g_1 X_{\chi_{3L}} B_\mu \right) \chi_{3L} + \sum_{\chi_{3R}=u_3, d_3, D_3} \bar{\chi}_{3R} \gamma^\mu (g_1 X_{\chi_{3R}} B_\mu) \chi_{3R}.
\end{aligned} \tag{105}$$

Donde las hipercargas X , están definidas en el cuadro (12), χ son los tripletes de quarks, y ψ representa los leptones.

Podemos encontrar el Hamiltoniano asociado a las corrientes neutras, dado por:

$$H^0 = e A_\mu J^\mu(EM) + \frac{g_2}{C_W} Z_\mu J^\mu(Z) + \frac{g_1}{\sqrt{3}} Z'_\mu J^\mu(Z'), \tag{106}$$

las corrientes neutras son:

$$\begin{aligned}
J^\mu(EM) = & \frac{2}{3}(\bar{u}_a \gamma^\mu u_a) + \frac{2}{3}(\bar{U}_a \gamma^\mu U_a) + \frac{2}{3}(\bar{u}_3 \gamma^\mu u_3) - \frac{1}{3}(\bar{d}_a \gamma^\mu d_a) \\
& - \frac{1}{3}(\bar{d}_3 \gamma^\mu d_3) - \frac{1}{3}(\bar{D}_3 \gamma^\mu D_3) - (\bar{\alpha}^- \gamma^\mu \alpha^-) - (\bar{E}_\alpha^- \gamma^\mu E_\alpha^-) \\
& - (\bar{\alpha}'^- \gamma^\mu \alpha'^-) - (\bar{e}^- \gamma^\mu e^-) - (\bar{E}_1^- \gamma^\mu E_1^-) - (\bar{E}_2^- \gamma^\mu E_2^-) \\
& - (\bar{E}_3^- \gamma^\mu E_3^-) \\
= & \sum_f \bar{f} \gamma^\mu q_f f, \\
J^\mu(Z) = & J_L^\mu(Z) - S_W^2 J^\mu(EM), \\
J^\mu(Z') = & T_W J^\mu(EM) - J_L^\mu(Z'),
\end{aligned} \tag{107}$$

Donde $e = g_2 S_W = g_1 C_W \sqrt{1 - T_W^2/3} > 0$, q_f es la carga eléctrica de los fermiones f en unidades de e , $J^\mu(EM)$ es la corriente electromagnética, y $J_L^\mu(Z), J_L^\mu(Z')$ son las corrientes izquierdas dadas por:

$$\begin{aligned}
J_L^\mu(Z) &= \frac{1}{2} [\bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} - \bar{\alpha}_L^- \gamma^\mu \alpha_L^- - \bar{\alpha}'_L^- \gamma^\mu \alpha'_L^- + \bar{\nu}'_{\alpha L} \gamma^\mu \nu'_{\alpha L} - \bar{d}_{aL} \gamma^\mu d_{aL} + \bar{u}_{aL} \gamma^\mu u_{aL} \\
&\quad + \bar{u}_{3L} \gamma^\mu u_{3L} - \bar{d}_{3L} \gamma^\mu d_{3L} + \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} - \bar{e}_L^- \gamma^\mu e_L^- - \bar{E}^- \gamma^\mu E^- - \bar{N}^0 \gamma^\mu N^0] \\
&= \sum_f \bar{f}_L \gamma^\mu T_{3f} f_L, \\
J_L^\mu(Z') &= S_{2W}^{-1} (\bar{\nu}_{\alpha L} \gamma^\mu \nu_{\alpha L} - \bar{\alpha}'_L^- \gamma^\mu \alpha'_L^- - \bar{d}_{aL} \gamma^\mu d_{aL} + \bar{u}_{3L} \gamma^\mu u_{3L} + \bar{\nu}_{eL} \gamma^\mu \nu_{eL} \\
&\quad + \bar{E}_{2L}^+ \gamma^\mu E_{2L}^+ + \bar{N}_{3L}^0 \gamma^\mu N_{3L}^0) \\
&\quad + T_{2W}^{-1} (\bar{\alpha}_L^- \gamma^\mu \alpha_L^- - \bar{\nu}'_{\alpha L} \gamma^\mu \nu'_{\alpha L} - \bar{u}_{aL} \gamma^\mu u_{aL} + \bar{d}_{aL} \gamma^\mu d_{aL} + \bar{e}_L^- \gamma^\mu e_L^- \\
&\quad + \bar{N}_{1L}^0 \gamma^\mu N_{1L}^0 + \bar{E}_{2L}^- \gamma^\mu E_{2L}^-) \\
&\quad - T_W^{-1} (\bar{E}_{\alpha L}^- \gamma^\mu E_{\alpha L}^- - \bar{N}_{\alpha L}^0 \gamma^\mu N_{\alpha L}^0 - \bar{U}_{aL} \gamma^\mu U_{aL} + \bar{D}_{3L} \gamma^\mu D_{3L} + \bar{E}_L^- \gamma^\mu E_L^- \\
&\quad + \bar{N}_{2L}^0 \gamma^\mu N_{2L}^0 + \bar{E}_{3L}^- \gamma^\mu E_{3L}^-) \\
&= \sum_f \bar{f}_L \gamma^\mu T_{9f} f_L,
\end{aligned} \tag{108}$$

donde hay que tener en cuenta que $N_{3L}^0 \gamma^\mu N_{3L}^0 = N_{1L}^0 \gamma^\mu N_{1L}^0 = -N_{1R}^0 \gamma^\mu N_{1R}^0$, y $E_{2L}^+ \gamma^\mu E_{2L}^+ = -E_{2R}^- \gamma^\mu E_{2R}^-$, y nuevamente $S_{2W} = 2S_W C_W$, $T_{2W} = S_{2W}/C_{2W}$, $C_{2W} = C_W^2 - S_W^2$, $T_{3f} = Dg(1/2, -1/2, 0)$ es la tercera componente del isospín débil, actuando en la representación 3 de $SU(3)_L$ (negativa para la representación 3^*), y $T_{9f} = Dg(S_{2W}^{-1}, T_{2W}^{-1}, -T_W^{-1})$ positiva para la representación 3 (para la representación 3^* es negativa). $J^\mu(Z)$ es la generalización de la corriente neutra presente en el modelo estándar, lo cual nos permite identificar a Z_μ como el boson gauge neutro del ME.

Los acoples de los estados físicos Z_1^μ y Z_2^μ están dados por:

$$\begin{aligned}
H^{NC} &= \frac{g_2}{2C_W} \sum_{i=1}^2 Z_i^\mu \sum_f \bar{f} \gamma^\mu [a_{iL}(f)(1 - \gamma^5) + a_{iR}(f)(1 + \gamma^5)] f \\
&= \frac{g_2}{2C_W} \sum_{i=1}^2 Z_i^\mu \sum_f \bar{f} \gamma^\mu [g_2(f)_{iV} - g_2(f)_{iA} \gamma^5] f,
\end{aligned} \tag{109}$$

donde a_{iL} , a_{iR} , $g_2(f)_{iV}$, y $g_2(f)_{iA}$ se encuentran definidos en la sección anterior (5); ecuaciones (97,98).

Los acoples de los fermiones f con g_{1V} , g_{1A} se presentan en el cuadro (13) y con g_{2V} , g_{2A} en el cuadro (14), respectivamente.

Cuadro 13: Acoples de $Z_1^\mu \rightarrow \bar{f}f$.

f	g_{1V}	g_{1A}
ν_α, ν_e, N_3^0	$\frac{1}{2} \left(\cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \right)$	$\frac{1}{2} \left(\cos \theta - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \right)$
α^-, e^-	$\cos \theta \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2 \right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} + S_W^2 \right)$	$-\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$
E_α^-, E_1^-, E_3^-	$2 \cos \theta S_W^2 + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 3S_W^2)$	$\frac{\text{sen } \theta C_W^2}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
α'^-	$\cos \theta \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2 \right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2 \right)$	$-\frac{\cos \theta}{2} + \frac{\text{sen } \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
ν'_α	$\frac{\cos \theta}{2} + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$	$\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + S_W^2 \right)$
N_α^0	$-\frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$	$-\frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$
$d_{1,2}$	$\cos \theta \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\cos \theta}{2} + \frac{\text{sen } \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
$u_{1,2}$	$\cos \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right) + \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + S_W^2 \right)$
$U_{1,2}$	$-\frac{4}{3} \cos \theta S_W^2 - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(1 - \frac{7}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$
u_3	$\cos \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\text{sen } \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
d_3	$\cos \theta \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$
D_3	$\frac{2}{3} \cos \theta S_W^2 - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-1 + \frac{5}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$
N_1^0	$-\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$	$-\frac{\cos \theta}{2} - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$
N_2^0	$\frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$	$\frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$
E_2^-	$\cos \theta (-1 + 2S_W^2) - \frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} S_W^2$	$-\frac{\text{sen } \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$

Cuadro 14: Acoples de $Z_2^\mu \rightarrow \bar{f}f$.

f	g_{2V}	g_{2A}
ν_α, ν_e, N_3^0	$-\frac{1}{2} \left(\sin \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \right)$	$-\frac{1}{2} \left(\sin \theta + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \right)$
α^-, e^-	$-\sin \theta \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2 \right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} + S_W^2 \right)$	$\frac{\sin \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$
E_α^-, E_1^-, E_3^-	$-2 \sin \theta S_W^2 + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} (1 - 3S_W^2)$	$\frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$
α'^-	$-\sin \theta \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2 \right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + 2S_W^2 \right)$	$\frac{\sin \theta}{2} + \frac{\cos \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
ν'_α	$-\frac{\sin \theta}{2} + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$	$-\frac{\sin \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + S_W^2 \right)$
N_α^0	$-\frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$	$-\frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$
d_a	$-\sin \theta \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\sin \theta}{2} + \frac{\cos \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
u_a	$-\sin \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right) + \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\sin \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-\frac{1}{2} + S_W^2 \right)$
U_a	$\frac{4}{3} \sin \theta S_W^2 - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(1 - \frac{7}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$
u_3	$-\sin \theta \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{4}{3} S_W^2 \right)$	$-\frac{\sin \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{2(4C_W^2 - 1)^{1/2}}$
d_3	$-\sin \theta \left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} S_W^2 \right) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\sin \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$
D_3	$-\frac{2}{3} \sin \theta S_W^2 - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(-1 + \frac{5}{3} S_W^2 \right)$	$\frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$
N_1^0	$\frac{\sin \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$	$\frac{\sin \theta}{2} - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} - S_W^2 \right)$
N_2^0	$\frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$	$\frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$
E_2^-	$-\sin \theta (-1 + 2S_W^2) - \frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} S_W^2$	$-\frac{\cos \theta}{(4C_W^2 - 1)^{1/2}} C_W^2$

Donde están representadas todas las familias fermiónicas.

6.5. MASAS FERMIÓNICAS MODELO F

El sector escalar ya introducido (sección.4), genera la masa apropiada para el modelo en consideración, a partir del lagrangiano de Yukawa, se encuentran las masas de las partículas fermiónicas, de la siguiente manera:

Lagrangiano de Yukawa

$$\mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_Y^Q + \mathcal{L}_Y^\ell, \quad (110)$$

donde

$$\begin{aligned} -\mathcal{L}_Y^Q = & \bar{\chi}_L^a (h_{1an} u_{nR} \phi_1 + h_{2an} u_{nR} \phi_2 + \tilde{h}_{an} d_{nR} \phi_3 + \lambda_{1am} U_{mR} \phi_1 + \lambda_{2am} U_{mR} \phi_2 \\ & + \lambda_a D_{3R} \phi_3) + \bar{\chi}_L^3 (G_{1n} u_{nR} \phi_1^* + \tilde{G}_{1n} u_{nR} \phi_1^* + \tilde{G}_{2n} d_{nR} \phi_2^* + \lambda'_m U_{mR} \phi_3^* \\ & + \lambda'_1 D_{3R} \phi_1^* + \lambda'_2 D_{3R} \phi_2^*) + \text{h.c.} \\ -\mathcal{L}_Y^\ell = & \bar{\psi}_{3L} (h_{1m} e_{Rm} \phi_m^* + h_{2m} E_{1R} \phi_m^* + h_{3m} E_{3R} \phi_m^*) + \bar{\psi}_{5L} (h'_{1m} e_{Rm} \phi_m^* + h'_{2m} E_{1R} \phi_m^* \\ & + h'_{3m} E_{3R} \phi_m^*) + \epsilon_{abc} [\bar{\psi}_{3L}^a (h_m \psi_{4L}^{*b} \phi_m^c)] + \epsilon_{abc} [\bar{\psi}_{4L}^a (h'_m \psi_{5L}^{*b} \phi_m^c)] \\ & + \bar{\psi}_{1L} (k_{1mn} \alpha_{Rm} \phi_m^* + k_{2mn} E_{nR} \phi_m^*) + \bar{\psi}_{2L} (l_n \alpha'_R \phi_3) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (111)$$

para $a = 1, 2, m = 1, 2$, y $n = 1, 2, 3$ los cuales indican suma; $\alpha = e^-, \mu^-, \tau^-$, parte leptónica, las constantes h, λ, G, l son los acoples de Yukawa de primer orden. De la ecuación anterior se obtiene las masas fermiónicas.

Para el primer triplete de quarks:

se tiene $M_{da} = \tilde{h}_a v' / \sqrt{2}$ y la matriz de masa

$$M_{u_a U_a} = \begin{pmatrix} h_{1an} \frac{v}{\sqrt{2}} & \lambda_{1am} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ h_{1an} V & \lambda_{1am} V \end{pmatrix}, \quad (112)$$

luego del álgebra sobre la matriz se encuentran las masas restantes para las dos primeras familias de quarks $M_{u_a} = 0$ y $M_{U_a} = h_{1an} v / \sqrt{2} + \lambda_{1am} V$.

Ahora para la tercera familia se tiene $M_{u_3} = G_{1n} v' \sqrt{2}$. Y

$$M_{d_3 D_3} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{1n} \frac{v}{\sqrt{2}} & \lambda'_{1n} \frac{v}{\sqrt{2}} \\ \tilde{G}_{1n} V & \lambda'_{1n} V \end{pmatrix}, \quad (113)$$

de donde: $M_{d_3} = 0$, $M_{D_3} = \tilde{G}_{1n} v / \sqrt{2} + \lambda'_{1n} V$. Se ha encontrado las masas de los quarks (9 en total). De manera igual se hará para la parte de leptones.

$$M_{e E_1} = \begin{pmatrix} h_1 \frac{v}{\sqrt{2}} & h_2 \frac{v}{\sqrt{2}} \\ h_1 V & h_2 V \end{pmatrix}, \quad (114)$$

A partir de la cual $M_e = 0$, $M_{E_1} = h_2 V + h_{1\alpha} v / \sqrt{2}$, en el desarrollo también se encuentra $M_{E_3} = h'_3 V$, $M'_\alpha = l_1 v' / \sqrt{2}$, la última matriz de masa para las partículas cargadas es:

$$M_{\alpha E_\alpha} = \begin{pmatrix} k_1 \frac{v}{\sqrt{2}} & k_2 \frac{v}{\sqrt{2}} \\ k_1 V & k_2 V \end{pmatrix}, \quad (115)$$

Donde $M_\alpha = 0$, $M_{E_\alpha} = k_1 v/\sqrt{2} + k_2 V$. Pero aún queda pendiente la masa del lepton E_2 que se la halla a partir del sector mezclado, contenido en los epsilon ec.(111). $M_{E_2} = h'_1 V$. Con lo queda completo el sector fermiónico cargado.

A hora se trabajará con la adquisición de masa para el sector neutro, que se encuentra gracias al sector mezclado; de donde se obtiene la matriz de masa neutra:

$$M_{(\nu_e, N_1^0, N_2^0, N_3^0)} = \begin{pmatrix} 0 & hV & -hv/\sqrt{2} & 0 \\ hV & 0 & 0 & -h'V \\ -hv/\sqrt{2} & 0 & 0 & h'v/\sqrt{2} \\ 0 & -h'V & h'v/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (116)$$

Después de realizar el proceso matemático se encuentra que los autovalores para la matriz son 0, 0, y $\mp \sqrt{\frac{h^2 v^2 + h'^2 v^2 + 2h^2 V^2 + 2h'^2 V^2}{2}}$, un auto-valor cero corresponde al neutrino, y el otro para N_1^0 , las masas obtenidas son para N_2^0 y N_3^0 .

Los fermiones con masa igual a cero, no poseen ningún problema, ya que pueden adquirirla por correcciones radiativas en el contexto del mismo modelo.⁴⁴

⁴⁴PONCE, W.A. ÚSUGA, Yitsbhey Giraldo y SÁNCHEZ, L. A. The minimal scalar sector of 331 models without exotic electric charge.

7. CONCLUSIONES

- En este trabajo se desarrollo parcialmente los modelos interfamilias D y F, bajo el grupo gauge local $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, se encontraron que el número de familias sin restringir la carga eléctrica es infinito, nos interesamos por dos modelos en particular sin cargas eléctricas exóticas, uno de ellos ha sido largamente estudiado en la literatura, mientras que el otro (F) se ha introducido por primera vez en literatura, hasta donde sabemos, tiene como característica primordial que las tres familias son tratadas de manera diferente.
- Las anomalías triangulares se presentan debido a que cierta simetría clásica no es una simetría cuántica, Las cuales se cancelan gracias al sector fermiónico introducido, a demás, en un modelo consistente no deben existir anomalías, por lo que se recurre a la cancelación de anomalías, los dos modelos trabajados cumplen con los requisitos para pertenecer a una teoría real ya que la sumatoria de cargas es cero .
- Los modelos D y F, no son los únicos modelos interfamilias libres de anomalías que se encuentran, para quarks y leptones sin cargas eléctricas exóticas, hay un total de ocho(8) modelos con estas características, que serían interesantes estudiar, así también se tiene modelos para una sola familia, dos familias, cuatro familias, etc. libres de anomalías aunque a excepción de los modelos para una familia y tres familias los demás no son modelos del todo realistas. “por ahora”
- El sector escalar escogido genera las masas de los fermiones y bosones adecuadamente, aquellos fermiones ya sean cargados o neutros, con resultado de masa igual a cero, no presentan problema por que pueden obtener masa en el contexto del mismo modelo, a través de correcciones radiativas.
- Las corrientes (cargadas y neutras) son diferentes para cada modelo y diferente a las del modelo estándar. Las predicciones a bajas energías de los dos modelos no son iguales, aunque presentan una nueva corriente neutra que se mezcla con la corriente neutra del modelo estándar, cuando el ángulo de mezcla entre la corriente neutra del modelo y la corriente neutra del ME es cero se llega a los mismos resultados del ME, lo cual sirve para probar que los modelos 331 contienen al ME.
- Se puede escoger otro sector escalar para producir el rompimiento de simetría, y las masas de las partículas, el cual puede ser aún más sencillo, lo que hace que los cálculos se compliquen mucho más pero enriquece la teoría.

RECOMENDACIONES

Para aquellas personas que estén interesadas, en realizar estudios sobre este tipo de modelo, primero se debe estudiar el modelo estándar de la Física de partículas, para luego adentrarse al desarrollo de modelos en el gauge 331; Especialmente a los Físicos que les gusta trabajar en altas energías puede ser una muy buena alternativa; sería provechoso continuar desarrollando los modelos restantes (G a J), o encontrando los acoples con los bosones $W^\pm$ y Z^0 con el Higgs.

BIBLIOGRAFÍA

ALBRIGTH, C.H. JARSLKOG, C. TJIA, M. Nucl. Phys. B86,535. 1974.

ARFKEN, George B. WEBER, Hans J. Mathematical Methods For Physicists, Fourth Edition; Academic Press. 1981.

CHENG, Ta-Pei And LI, Ling-Fong. Gauge Theory Of Elementary Particle Physics; Clarendon Press. Oxford. 1989.

DONOGHUE, Jhon F. GOLOWICH, Eugene, HOLSTEIN, Barry R. Dynamics Of The Standard Model; Cambridge University Press. 1992.

FLÓREZ, Moreno Juan Bautista. Tesis de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados Del I.P.N. 1993.

FRAMPTON, Paul H. Gauge Field Theories; The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1987.

GEORGI, Howard. Lie Algebras In Particle Physics; The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1982.

GOLSTEIN, Herbert. Mecánica Clásica.

GUIDRY, Mike. Gauge Fields Theories; An Introduction With Applications; John Wiley y Sons, Inc. 1999.

HALZEN, Francis, MARTIN, Alan D. Quarks and Leptons; An Introductory Course In Modern Particle Physics; John Wiley y Sons, Inc. 1984.

HIGGS, P. W. Phys. Lett. 12, 132. 1964.

KITABAYASHI, T. phys. Rev. D64, 057301. 2001.

KOBAYASHI, M. And MASKAWA, K. Prog. Theor. Phys. 49, 652. 1973.

LONG, Hoang Ngoc. Institute of Theoretical Physics, National Centre for Natural Science and Technology, P.O. Box 429, Bo Ho, Hanoi 10000 Vietnam. y International Centre for Theoretical Physics, Trieste , Italy. 1995.

MARTINEZ, R. PONCE, William A. SÁNCHEZ, Luís A. " $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ as an $SU(6) \otimes U(1)_X$ subgroup," phys. Rev. D. Vol.65, 055013. 2002.

N. Cabbibo. Phys. Rev. Lett. 10, 531. 1963.

PISANO, F. PLEITEZ, V. Phys. Rev. D46, 410. 1992; FRAMPTON, P.H. Phys. rev. Lett. 69, 2887, 1992; PISANO, F. PLEITEZ. Phys. Rev. D47 , 2918, 1993.

PONCE, W.A. SÁNCHEZ L. A. The minimal scalar sector of 331 models without exotic electric charge.

PONCE, William A. FLÓREZ, Juan Bautista. SÁNCHEZ, Luis A. "Analysis of $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ Local gauge theory," International Journal of modern Physics A, Vol.17, Nº.5. 2002.

QUIGG, Chris. Gauge Theories Of The Strong, Weak, And Electromagnetic Interactions; The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1983.

Un estudio adicional del modelo Estándar se presenta en los siguientes Revistas: *E.S. Abers And B.W. Lee, Physcs. Rep. 9c,1 1973; Physics Reports, 88, Nº.1. 1982.*

RYDER, Lewis H. Quantum Field Theory; Second Edition. Cambridge University press. 1996.

SIMONETTA, Filipi. PONCE, William A. y SÁNCHEZ, Luis A. I.C.R.A. International Center for Relativistic Astrophysics- at Physics Department, University of Rome " La Sapienza", P.le A. Moro 5,00185 Rome, Italy. University CBM, Via E. Longoni 83, 00155 Rome, Italy. Instituto De Física, Universidad de Antioquía, A.A 1226, Medellín, Colombia. Escuela de Física, Universidad Nacional de Colombia, A.A 3840, Medellín Colombia.

SINGER, M. VALLE, J. W. F. y SCHECHTER, J. Phys. Rev. D22, 738. 1980; FOOT, R. LONG H. N. y TRAN, T. A. Phys. Rev. D50, R34. 1994; PLEITEZ, V. Phys. Rev. D53, 514. 1996

ÚSUGA, Yithsbey Giraldo. Tesis de Mestría; "El Potencial Escalar En $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ Como Extensión Del Modelo Estándar" Universidad De Antioquía. 2002.

ANEXOS

Anexo A. ANOMALÍAS:

Se la conoce con el nombre de anomalía ABJ por Adler-Bell-Jackiw, así también como anomalía triangular, o anomalía quirial o axial, fue encontrada en el análisis del decaimiento $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$, la importancia de los tres personajes mencionados es que introdujeron la condición de cancelación de anomalía.

Empecemos definiendo la corriente axial, y la corriente vectorial que son la base del desarrollo

$$\begin{aligned}\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi &= \mathcal{J}_A^\mu, \\ \bar{\psi}\gamma^\mu\psi &= \mathcal{J}^\mu,\end{aligned}\tag{A.1}$$

para tener la conservación de la carga eléctrica se cumple que la derivada de la corriente debe ser cero, pero al aplicarla nos damos cuenta que

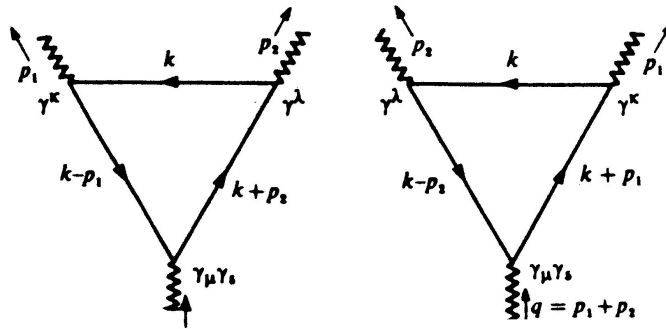
$$\begin{aligned}\partial_\mu \mathcal{J}^\mu &= 0, \\ \partial_\mu \mathcal{J}_A^\mu &\neq 0,\end{aligned}\tag{A.2}$$

lo que implica que la simetría clásica no es una simetría cuántica.

Más explícitamente se encuentra que de la ecuación de Dirac $\partial^\mu \mathcal{J}_\mu^A = 2im\bar{\psi}\gamma^5\psi \equiv 2m\mathcal{J}_A$ para la corriente axial, la cual no se conserva a menos que $m = 0$.

Utilizando los diagramas de Feynman

Figura 3: Diagrama del triángulo



para la anomalía triangular se encuentra que la contribución fermiónica para la amplitud es:

$$T_{k\lambda\mu}(p_1, P_2) = S_{k\lambda\mu}(p_1, P_2) + S_{\lambda k\mu}(p_2, P_1)\tag{A.3}$$

puesto que la segunda gráfica en la figura 3 se obtiene de la primera intercambiando $k \leftrightarrow \lambda$, $p_1 \leftrightarrow p_2$ de las reglas de Feynman se obtiene:

$$S_{k\lambda\mu} = -(2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{Tr[\gamma^k(k\gamma^\mu - p_1\gamma^\mu)\gamma_\mu\gamma^5(k\gamma^\mu + p_2\gamma^\mu)\gamma^\lambda k\gamma^\mu]}{(k - p_1)^2(k + p_2)^2k^2}, \quad (A.4)$$

con $m = 0$, las identidades de Ward que se deben cumplir en los vertices son

$$(p_1 + p_2)^\mu T_{k\lambda\mu} = 0(Axial), \quad p_1^k T_{k\lambda\mu} = 0(Vectorial), \quad p_2^\lambda T_{k\lambda\mu} = 0(Vectorial), \quad (A.5)$$

donde $T_{k\lambda\mu}(p_1 + p_2) = S_{k\lambda\mu}(p_1 + p_2) + S_{\lambda k\mu}(p_2 + p_1)$
utilizando las relaciones

$$(p_1 + p_2) = (k + p_2) - (k - p_1), \quad (A.6)$$

$$(p_1\gamma^\mu + p_2\gamma^\mu)\gamma^5 = -(k\gamma^\mu - p_1\gamma^\mu)\gamma^5 - \gamma^5(k\gamma^\mu + p_2\gamma^\mu),$$

y teniendo en cuenta las propiedades de las matrices gamma y el álgebra de estas matrices, la integral para la primera identidad de Ward queda

$$(p_1 + p_2)^\mu S_{k\lambda\mu} = (2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{Tr[\gamma^k\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^5(k\gamma^\mu + p_2\gamma^\mu)\gamma^\lambda k\gamma^\mu]}{k^2(k + p_2)^2} + (2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{Tr[\gamma^k(k\gamma^\mu - p_1\gamma^\mu)\gamma^5\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^\lambda k\gamma^\mu]}{k^2(k - p_1)^2}, \quad (A.7)$$

por argumento simétrico $S_{k\lambda\mu}$ = pseudotensor de orden 3 por tanto $(p_1 + p_2)^\mu S_{k\lambda\mu}$ debe ser un tensor de orden 2, y ya que las integrales dependen únicamente del momentum, entonces la relación anterior no es posible lo que conlleva a que la integral debe ser cero.

Para $p_1^k S_{k\lambda\mu}$ se tiene bajo los mismos argumentos anteriores

$$p_1^\mu S_{k\lambda\mu} = -(2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{Tr[p_1\gamma^\mu(k\gamma^\mu - p_1\gamma^\mu)\gamma^\mu\gamma^5(k\gamma^\mu + p_2\gamma^\mu)\gamma^\lambda k\gamma^\mu]}{k^2(k - p_1)^2(k + p_2)^2}, \quad (A.8)$$

e introduciendo

$$k'^\mu = (k + p_2)_\mu, \quad (A.9)$$

se encuentra la nueva integral

$$p_1^k S_{k\lambda\mu} = -(2\pi)^{-4} \int d^4k' \frac{Tr[(k'\gamma^\mu - p_1\gamma^\mu - p_2\gamma^\mu)\gamma^\mu\gamma^5 k'\gamma^\mu\gamma^\lambda]}{k' - p_1 - p_2)^2 k'^2} + (2\pi)^{-4} \int d^4k' \frac{Tr[(k'\gamma^\mu - p_2\gamma^\mu)\gamma^\mu\gamma^5 k'\gamma^\mu\gamma^\lambda]}{(k' - p_2)^2 k'^2}, \quad (A.10)$$

donde el resultado debe ser cero por el motivo ya mencionado, de la misma manera para $p_1^\lambda S_{k\lambda\mu}$ haciendo $k'' = k - p_1$ cumpliéndose así las identidades de Ward, pero esta prueba contiene un error en el hecho de cambios de variables en (A.9), y de la misma manera en el último cambio, por que se tiene una integral linealmente divergente y al hacer dicho cambio se convierte en una integral de valor finito.

Trabajando la parte divergente de $S_{k\lambda\mu}$

$$S_{k\lambda\mu} = -(2\pi)^{-4} \int d^4k \frac{\gamma_k k\gamma^\mu\gamma^\mu\gamma^5 k\gamma^\mu\gamma^\lambda k\gamma^\mu}{k^6}, \quad (A.11)$$

y haciendo el cambio $k' = k + a$ la integral anterior se debe expandir en series de Taylor de la siguiente manera

$$\int d^4k f(k) = \int d^4k' f(k' - a) = \int d^4k' [f(k') - a \frac{\partial f}{\partial k} + \dots], \quad (\text{A.12})$$

Utilizando le teorema de gauss para el último término se obtiene una hipersuperficie $\sim k^3$ entonces $f \sim k^{-3}$, y transformando la integral a un espacio Euclidiano $k_4 = ik_0$ se encuentra:

$$\begin{aligned} p_1 S_{k\lambda\mu} &= \frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{k\lambda\mu\nu} p_1^\nu p_2^\nu \\ p_2 S_{k\lambda\mu} &= -\frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{k\lambda\mu\nu} p_2^\nu p_1^\nu, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

lo que trae como consecuencia que las identidades de Ward para la corriente vectorial no se cumplan, mientras que para la axial se cumple debido a que no se realizo ningún cambio de variable de integración, como las dos identidades (para la axial y vectorial) no se cumplen al tiempo, los físicos tomaron como la verdadera corriente conservada la vectorial, ya que conlleva la conservación de la carga lo cual es sagrado en física.

para que se cumpla lo anterior se redefine la amplitud

$$T'_{k\lambda\mu}(p_1, p_2) = S_{k\lambda\mu}(p_1, p_2) + S_{k\lambda\mu}(p_2, p_1) + \frac{1}{4\pi^2} \epsilon_{k\lambda\mu\nu} (p_1 - p_2)^\nu, \quad (\text{A.14})$$

pero

$$(p_1 + p_2)^\mu T'_{k\lambda\mu} = \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{k\lambda\mu\nu} p_2^\mu p_1^\nu \neq 0. \quad (\text{A.15})$$

Por tal motivo la corriente axial no se conserva. Resumiendo queda

$$\begin{aligned} p_1^\mu T'_{k\lambda\mu} &= 0 & (vectorial) \\ p_2^\mu T'_{k\lambda\mu} &= 0 & (vectorial) \\ (p_1 + p_2)^\mu T'_{k\lambda\mu} &= \frac{1}{2\pi^2} \epsilon_{k\lambda\mu\nu} p_2^\mu p_1^\nu \neq 0 & (axial) \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

no se puede exigir que sea invariante vectorial y axial a la vez; es decir que la anomalía esta presente, para cancelarla se debe tener en cuenta. la cancelación de anomalías.

Anexo B. CANCELACIÓN DE ANOMALÍAS:

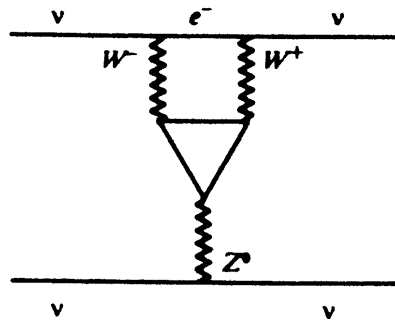
Consideremos la gráfica 4:

Nos muestra una distribución de la dispersion Neutrino-neutrino, sea M_a, M_b , y M_c las matrices de acople.

La contribución del triángulo de la parte izquierda es

$$(1 - \gamma_5)(Tr M_a^L M_b^L M_c^L + Tr M_a^L M_c^L M_b^L) = (1 - \gamma^5) Tr M_a^L \{M_b^L, M_c^L\}, \quad (\text{B.1})$$

Figura 4: La dispersion $\nu - \nu$ en el modelo de Weinberg-Salam, involucra el diagrama del triángulo.



los derechos contribuyen con:

$$(1 + \gamma^5) \text{Tr} M_a^R \{M_b^R, M_c^R\}. \quad (\text{B.2})$$

La anomalía desaparece si los γ^5 se cancelan entonces

$$\text{Tr} M_a^L \{M_b^L, M_c^L\} = \text{Tr} M_a^R \{M_b^R, M_c^R\}, \quad (\text{B.3})$$

del lagrangiano de Higgs para el modelo estándar se encuentra que $M_a^L = g I_+^W$; $M_b^L = g I_-^W$, donde $I_\pm^W = \frac{1}{2}(I_1^W \pm i I_2^W)$, y I_1^W y I_2^W son las componentes del isospin débil, para encontrar M_c^L se reescribe el acople para Z_0 con $\theta = \theta_W$ al reemplazar en el lagrangiano se tiene

$$\frac{g}{\cos \theta} \left[\frac{1}{2} (\bar{\nu} \gamma^\mu \nu - \bar{e}_L \gamma^\mu e_L) + \sin^2 \theta (\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu e_R) \right] Z_\mu = g \sec \theta (\mathcal{J}_3^\mu + \sin^2 \theta \mathcal{J}_{EM}^\mu) Z^\mu, \quad (\text{B.4})$$

de aquí

$$M_c^L = g \sec \theta (I_3^W + \sin^2 \theta Q) \quad (\text{B.5})$$

puesto que los fermiones derechos no se acoplan con $W^\pm$ por no tener isospin débil, la parte derecha de (B.3) es cero, entonces queda

$$\text{Tr} (I_{3L}^W + \sin^2 \theta Q_L) \{I_{+L}^W, I_{-L}^W\} = 0, \quad (\text{B.6})$$

puesto que $\{I_{+L}^W, I_{-L}^W\} = 1$ y $\text{Tr} I_3 = \frac{1}{2} \text{Tr} \tau_3 = 0$, la sumatoria de carga es:

$$\sum_i Q_L^i = 0; \quad (\text{B.7})$$

la suma de las cargas eléctricas de los fermiones izquierdos debe ser cero para que la anomalía se cancele. Es por eso que en el modelo de Weinberg-Salam con solamente leptones no satisface la cancelación de anomalías, cuando se incluye los quarks la anomalía queda cancelada

$$Q_e + Q_\nu + 3Q_u + 3Q_d = -1 + 0 + 3, \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0 \quad (\text{B.8})$$

para la primera generación y con los tres colores de quarks la anomalía quiral desaparece.