

MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO DEL NEUTRÓN

ZULMA YANETH VALLEJOS ORTEGA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2005

MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO DEL NEUTRÓN

ZULMA YANETH VALLEJOS ORTEGA

Trabajo de grado realizado para optar por el título de Físico

Asesor: Dr. Juan Bautista Flórez Moreno

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
SAN JUAN DE PASTO
2005

“Las ideas y conclusiones aportadas en este trabajo de grado, son responsabilidad exclusiva de los autores”, artículo primero del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

Director Trabajo de Grado

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Agosto de 2005.

AGRADECIMIENTOS

La culminación de este trabajo se debe al apoyo y aliento de muchas personas, a quienes quiero gratificar.

Mi primer agradecimiento no puede dirigirse a nadie más que a mi asesor el profesor: Juan Bautista Flórez, todo su apoyo en la realización de este trabajo, el cual no hubiera sido posible sin su ayuda. Quiero agradecerle muy especialmente la gentileza que siempre tubo conmigo, sus clases y el esfuerzo que ha realizado para que este trabajo de grado haya podido llegar a su fin.

A la Universidad de Nariño por permitirme realizar mis estudios de pregrado.

A mis amigos y compañeros con quienes compartimos muchos momentos agradables y días difíciles que hacen parte de la vida universitaria.

Mi agradecimiento a todas las personas que se preocuparon por preguntar como iba lo del trabajo de grado, por darme ánimo, y muchas veces por sacarme de la rutina.

Y ya para cerrar los agradecimientos, no puede faltar mi familia, lo más importante.

Gracias a mis padres que con su trabajo, dedicación para con sus hijos, les debo el haber llegado hasta aquí, el haber tenido la oportunidad de estudiar.

Gracias también a mis hermanos, por su paciencia, su cariño y sus voces de aliento para seguir adelante y ser una profesional.

A mis hermosas sobrinas Lina María, Juliana, Gabriela y María Jose por sus abrazos.

DEDICATORIA

A mis padres:

María E. Ortega y Servio Vallejos, quienes me han apoyado todo este tiempo; que con su dedicación y amor me han enseñado el valor del trabajo y el esfuerzo.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN.	16
1. OBJETIVOS	18
1.1 OBJETIVO GENERAL	18
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	18
2. MULTIPOLOS ELÉCTRICOS	19
2.1 MULTIPOLOS CARTESIANOS	19
2.2. MULTIPOLOS ESFÉRICOS	21
2.2.1 Elementos de matriz de momentos multipolares eléctricos	24
2.3 EXPANSIÓN MULTIPOLAR DE LA ENERGÍA Y LA FUERZA	26
2.4 EXPANSIÓN MULTIPOLAR DE TORQUES	28
3. SIMETRÍAS	29
3.1 INTRODUCCIÓN	29
3.2. SIMETRIAS CONTINUAS	30
3.2.1 Conservación del momentum lineal	31
3.2.2 Conservación del momento angular	32
3.2.3 Conservación de la energía	33
3.3. SIMETRIAS DISCRETAS	34
3.3.1 Clásicamente	34
3.3.2 Cuánticamente	39
3.4 CONSERVACIÓN Y VIOLACIÓN DE LAS SIMETRIAS DISCRETAS	46

3.5. TEOREMA CPT	48
3.5.1 Consecuencias del teorema CPT	49
4. CÁLCULOS TEÓRICOS Y NUMÉRICOS	50
4.1 INTRODUCCIÓN	50
4.2. MOMENTOS DIPOLARES ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS	51
4.2.1 Significado de los términos F y G	53
4.3 MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO EN EL MODELO ESTÁNDAR	55
4.4 ELEMENTOS DE MATRIZ ENTRE DOS ESTADOS DEL NEUTRÓN	58
4.5 MODELO SIGMA LINEAL	61
4.6 CÁLCULO DEL MDE. DEL NEUTRÓN USANDO MODELO SIGMA LINEAL	63
5. CONCLUSIONES	70
BIBLIOGRAFIA	71
ANEXOS	73

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Simetrías clásicas	39
Tabla 2. Simetrías en notación covariante	39
Tabla 3. Simetrías cuánticas	46

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Generación de un momento dipolar eléctrico	20
Figura 2. Dipolo eléctrico	23
Figura 3. Conservación del momento angular	32
Figura 4. Diagrama a nivel de un loop donde no hay contribución al MDE del neutrón	57
Figura 5. Dispersión elástica neutrón – neutrón	58
Figura 6. Vértices efectivos	65
Figura 7. Contribución al MDE del neutrón	65

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. Armónicos Esféricos	73
Anexo B. Simetrías Discretas	77

RESUMEN

Inicialmente se hace una revisión general sobre multipolos eléctricos, luego se estudian las simetrías discretas C, P, T y el teorema CPT, desde el enfoque de su conservación o violación por los diferentes términos de interacción, así como sus consecuencias. Haciendo uso de las reglas de Feynman vemos que a nivel de un loop no hay contribución al momento dipolar eléctrico (MDE) en el modelo estándar. También se estudia el modelo sigma (σ) lineal, y con la ayuda de este encontramos el lagrangiano efectivo que contribuye al cálculo del MDE del neutrón.

ABSTRACT

We do a general revision about electric multipoles, then the discrete symmetries C, P, T and the theorem CPT is studied, from the focus of its conservation or violation by different interaction terms, as well as its consequences. By making of the Feynman rules we can see that at level of a loop there is not contribution to the electric dipole moment (EDM) of neutron in the Standard Model. The model lineal sigma (σ) is also studied so the help of this we find the effective lagrangian that contributes to the calculation of the EDM of neutron.

INTRODUCCIÓN

El estudio de las simetrías fundamentales y la violación de estas fue y sigue siendo muy útil para el desarrollo de la física de partículas. Las pruebas de las simetrías discretas conjugación de carga C, inversión espacial ó paridad P e inversión temporal T son de gran importancia en establecer la estructura del modelo estándar, que es la teoría que describe los componentes fundamentales de la naturaleza y sus interacciones, electromagnética, débil y la interacción fuerte.

El descubrimiento de la violación de paridad en las interacciones débiles fue lo que produjo que el modelo estándar tuviera sus primeros tropiezos, pues aun no se conocía la teoría de interacciones fuertes. Sin embargo, todo indicaba que CP era una simetría que permitía describir las interacciones que gobiernan el mundo de las partículas elementales, pero en 1964 se reportó la primera evidencia de violación de esta simetría en el sistema de los kaones neutros, lo cual llevó a Kobayashi y Maskawa a buscar la presencia de tres generaciones de quarks.

El descubrimiento original de la violación de CP en el decaimiento de Kaones puede ser explicado dentro del modelo estándar mediante una fase compleja en la matriz de mezcla para tres generaciones de quarks y leptones.

En 1949 Purcell y Ramsey argumentaron que puesto que la violación de la simetría de inversión temporal no fue totalmente apreciada, se necesitaba de una teoría de interacciones fuertes para demostrar la invariancia y confirmarla con pruebas experimentales, ellos proponen considerar un momento dipolar intrínseco del neutrón como una prueba para demostrar la violación de P y T¹.

La búsqueda de la asimetría CP es uno de los intentos más importantes de la física de partículas, así como también la determinación del momento dipolar eléctrico (MDE) del neutrón como prueba de violación de la simetría temporal debido al teorema CPT.

Existen diferentes modelos teóricos para encontrar el momento dipolar eléctrico del neutrón; en este trabajo se analizará por medio del mecanismo de Kobayashi – Maskawa en el modelo estándar, y utilizando el modelo sigma lineal.

El trabajo tiene la siguiente estructura: en el segundo capítulo se estudia el desarrollo de multipolos eléctricos en coordenadas cartesianas y esféricas, además la expansión multipolar de energía, fuerza y torque. El capítulo tres contiene la descripción de las simetrías discretas C, P, T clásica y cuánticamente

¹ POSPELOV, Maxim; Ritz, Adam. Electric dipole moments as probes of new physics. 2005, 04, 26. [online]. [citado en 2005, 05, 30]. Disponible en Internet: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0504231>

exponiendo sus consecuencias y la evidencia de su violación en interacciones débiles. El cuarto capítulo consiste en estudiar el momento de dipolo eléctrico en el modelo estándar, el estudio del modelo sigma lineal y determinar el MDE del neutrón utilizando el modelo antes mencionado. El capítulo cinco es dedicado a las conclusiones de los resultados obtenidos.

Finalmente están los anexos, en los cuales se hace cálculos más detallados sobre armónicos esféricos que ayudan a complementar el capítulo dos, así como los detalles de las transformaciones bajo las diferentes simetrías realizados en capítulo tres.

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

- Realizar un estudio detallado sobre el momento dipolar eléctrico (MDE) del neutrón

1.2 OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Estudiar el MDE del neutrón en el modelo estándar y utilizando el modelo sigma lineal.
- Calcular el MDE del neutrón y comparar las cotas teóricas obtenidas con los modelos anteriormente mencionados para así confrontarlas con los datos experimentales.

2. MULTIPOLOS ELÉCTRICOS

La estimación del potencial de una distribución arbitraria de cargas sin ningún tipo de restricciones es algo muy complejo de tratar. Este hecho se debe principalmente debido a la falta de simetría de la configuración de cargas, por lo cual es necesario encontrar una respuesta adecuada ya que muchos procesos naturales se basan en este tipo de interacción.

Para abordar esta dificultad, normalmente se realiza un desarrollo del potencial de una distribución de carga mediante una expansión en serie de potencias (multipolos cartesianos) ó mediante multipolos esféricos. Cada sumando de éste desarrollo o término multipolar corresponde a un potencial de un grupo de cargas más simples que guardan cierta simetría conocidas con el nombre de multipolo eléctrico.

Para el caso de una distribución finita arbitraria de cargas puntuales es posible hallar el potencial en un punto dado, mediante cálculo directo ó mediante el desarrollo en términos multipolares en dicho punto.

Los términos multipolares decrecen en potencias inversas a la distancia existente del origen situado en la distribución de cargas, al punto donde se quiere encontrar el potencial. Por lo cual para calcular dicho potencial en un punto bastará con hallar los primeros términos del desarrollo monopolar, dipolar y cuadripolar.

Para una distribución localizada de cargas, el potencial generalmente es:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (2.1)$$

Donde r' es un punto arbitrario dentro de la distribución de carga, $\rho(r')$ es la densidad de carga en dicho punto y el punto de observación es r .

Realizaremos la expansión de $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ en coordenadas cartesianas y esféricas, para encontrar su potencial respectivo.

2.1 MULTIPOLOS CARTESIANOS

Podemos desarrollar $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ en series de potencias binomiales, teniendo en cuenta que $|\vec{r}'| \ll |\vec{r}|$; tenemos:

$$\begin{aligned}
|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1} &= (\vec{r}^2 + \vec{r}'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}')^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{\vec{r}'^2}{r^2} - \frac{2\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^2} \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5} [3(\vec{r} \cdot \vec{r}')(\vec{r} \cdot \vec{r}') - r'^2 \Pi] + \dots
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Donde Π es una diada identidad.

Para obtener el potencial, reemplazamos la ecuación (2.2) en la ecuación (2.1) y obtenemos:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{2r^5} \vec{r} \cdot \mathcal{Q} \cdot \vec{r} + \dots \right] \tag{2.3}$$

Este es el potencial en coordenadas cartesianas que es equivalentemente generado por una serie de multipolos puntuales localizados en el origen.

- Momento monopolar. Se define como:

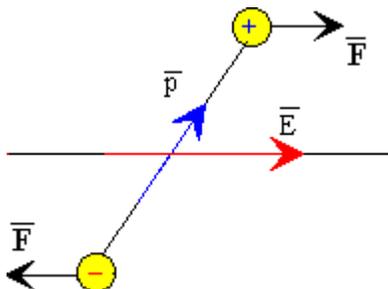
$$q = \int \rho(r') dv' \tag{2.4}$$

Representa la carga total de la distribución, es una magnitud escalar.

- Momento dipolar

$$\vec{p} = \int \rho(r') \vec{r}' dv' \tag{2.5}$$

Figura 1. Generación de un momento dipolar eléctrico.



El dipolo eléctrico es una configuración de un par de cargas eléctricas (polos) de igual valor absoluto y signo contrario, situadas a una distancia finita r ; la carga total es cero, a pesar de lo cual genera un campo eléctrico. La intensidad del campo está determinada por el momento dipolar (cantidad vectorial) que viene dado por el producto de las cargas y la distancia entre ellas; estos pueden ser generados o inducidos por la influencia de campos externos como pudimos ver en el grafico anterior.

- Momento cuadripolar

$$Q = \int \rho(r') [3 \vec{r}' \cdot \vec{r}' - r'^2 \Pi] dv' \quad (2.6)$$

Es un tensor de segundo orden. La matriz resultante es simétrica y su traza es cero.

$$Q_{xx} + Q_{yy} + Q_{zz} = \sum_{i=1}^3 Q_{ii} = 0 \quad (2.7)$$

2.2 MULTIPOLOS ESFÉRICOS

Una importante expansión para obtener el potencial electrostático en términos de coordenadas esféricas polares, usando la expansión: (ver apéndice A).

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} Y_l^{m*}(\theta', \varphi') Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (2.8)$$

Donde $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ son los armónicos esféricos, los cuales se expresan de la siguiente manera:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (2.9)$$

El potencial de una distribución de carga $\rho(r')$ escrito como una expansión en armónicos esféricos, utilizando las ecuaciones (2.1) y (2.9) tenemos:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (2.10)$$

Donde q_{lm} son los momentos multipolares esféricos definidos por:

$$q_{lm} = \int \rho(r') r'^l Y_l^{m*}(\theta', \varphi') dv' \quad (2.11)$$

Además, si utilizamos notación de Dirac, estos momentos multipolares se pueden expresar mediante la siguiente ecuación:

$$\langle r | q_l^m | r' \rangle = q \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} r^l Y_l^m(\theta, \varphi) \delta(r - r') \quad (2.12)$$

Esta expansión es muy buena y muchas veces únicamente el primer término no desaparece. Esta también es usada por núcleos, átomos y moléculas, donde las cargas decaen exponencialmente.

Los primeros momentos multipolares esféricos, teniendo en cuenta que $q_{l,-m} = (-1)^m q_{lm}^*$ y utilizando valores pequeños de l y valores de $m \geq 0$ son:(ver apéndice A)

- Terminio monopolar:

$$q_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int \rho(r') dv' = \frac{q}{\sqrt{4\pi}} \quad (2.13)$$

Donde q es la carga total en la distribución, si este término es diferente de cero, entonces para puntos lejanos el potencial es dominado por el primer término y tenemos simplemente el potencial de Coulomb para una carga puntual. Así:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} q_{00} Y_0^0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (2.14)$$

- Terminio dipolar

$$q_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int (x' - iy') \rho(r') dv' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\vec{p}_x - i \vec{p}_y) \quad (2.15)$$

$$q_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} (\vec{p}_x + i \vec{p}_y) \quad (2.16)$$

Y

$$q_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \int z' \rho(r') dv' = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \bar{p}_z \quad (2.17)$$

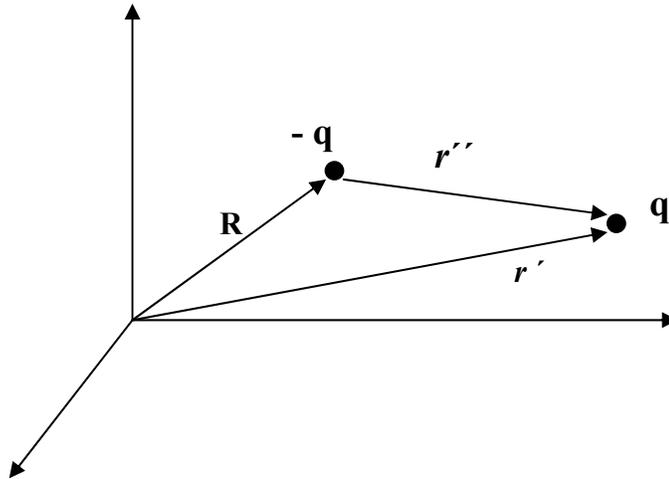
Donde $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$ son las llamadas componentes x, y, z del vector momento dipolar eléctrico de la distribución de carga.

El momento dipolar de una distribución de carga es independiente del origen de coordenadas si la carga total es cero. Para verificar consideremos un nuevo sistema coordenadas cuyo origen está en la posición R del sistema primitivo; representando un punto con respecto al sistema primitivo por r' y el mismo punto con respecto al nuevo sistema por r'' , se tiene $r' = r'' + R$ (ver figura 2).

El momento dipolar eléctrico con respecto al sistema primitivo es

$$\bar{p} = \int \rho(r') \vec{r}' dv' = \int \rho(r')(r'' + R) dv' = \int \rho(r')(r'') dv' + R \int \rho(r') dv' = \bar{p}$$

Figura 2. Dipolo eléctrico.



Si no hay término monopolar y el término dipolar no desaparece, entonces este domina la serie del potencial. Para $q = 0$ y $\bar{p} \neq 0$ tenemos:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\bar{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (2.18)$$

- Término cuadripolar

$$q_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \int (x' - iy')^2 \rho(r') dv' = \frac{1}{4} (Q_{11} - 2iQ_{12} - Q_{22}) \quad (2.19)$$

$$q_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \int z'(x' - iy') \rho(r') dv' = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{15}{8\pi}} (Q_{13} - iQ_{23}) \quad (2.20)$$

$$q_{20} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{4\pi}} \int (3z' - r'^2) \rho(r') dv' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{15}{4\pi}} Q_{33} \quad (2.21)$$

Si tanto la carga como el momento dipolar son cero y los momentos cuadrupolares son diferentes de cero, este último término domina la serie del potencial.

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} Q_{ij} \frac{r_i r_j}{r^5} \quad (2.22)$$

Después de estudiar los diferentes desarrollos multipolares, podemos observar que el potencial se hace mucho menor a medida que la distancia existente entre el origen en donde están situadas las cargas crece exponencialmente, por lo cual muchas veces es mejor trabajar con los dos primeros términos del potencial.

Como pudimos ver anteriormente, en la expansión del potencial en armónicos esféricos, las funciones en la base en las cuales se expande son ortogonales en m, l ; tal que los coeficientes q_{lm} son independientes. Para cada valor de l hay $2l + 1$ multipolos.

En cambio los multipolos cartesianos, no tienen por que ser independientes ya que los diferentes términos de la expansión en serie de Taylor no son ortogonales, no conforman una base ^{2 3}.

2.2.1 Elementos de matriz de momentos multipolares eléctricos. El espacio de estado ξ_r de una partícula es establecido por una base ortonormal $\{X_n, l, m\}$ de autovectores comunes L^2 (con autovalores $l(l+1)\hbar^2$) y L_z (con autovalor $m\hbar$).

Expansión de los elementos de matriz.

² SEPULVEDA, Alonso. Notas de Electrodinámica Clásica. Departamento de Física. Facultad de ciencias exactas y naturales Universidad de Antioquia. Medellín, 1986. p.143-148.

³ Electric Multipoles Spherical and Cartesian Forms. (s.l.), (s.f.).[online]. [citado en 2005 - 03 - 10]. Disponible en Internet: http://www.hep.caltech.edu/~peck/lecture_sph_cart_multipoles.pdf. p.1-9

Las funciones de onda asociadas con los estados $|X_n, l, m\rangle$ son necesariamente de la forma:

$$X_{n, l, m}(r) = R_{n, l}(r) Y_l^m(\theta, \varphi) \quad (2.23)$$

El elemento de matriz para el operador q_l^m , se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \langle X_{n_1, l_1, m_1} | q_l^m | X_{n_2, l_2, m_2} \rangle &= \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \\ &\int_0^{2\pi} d\varphi X_{n_1, l_1, m_1}^*(r, \theta, \varphi) q_l^m X_{n_2, l_2, m_2}(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Usando la ecuación (2.12), tenemos

$$\begin{aligned} \langle X_{n_1, l_1, m_1} | q_l^m | X_{n_2, l_2, m_2} \rangle &= q \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int_0^\infty r^2 R_{n_1, l_1}^*(r) R_{n_2, l_2}(r) r^l dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \\ &\times \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{l_1}^{m_1*}(\theta, \varphi) Y_l^m(\theta, \varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2.25)$$

Utilizando la relación $(Y_l^m(\theta, \varphi))^* = (-1)^m Y_l^{-m}$ y el teorema de Wingner – Eckart, para este caso particular de armónicos esféricos, así

$$(-1)^m \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{l_1}^{-m_1} Y_l^m Y_{l_2}^{m_2} = \sqrt{\frac{(2l+1)(2l_2+1)}{4\pi(2l_1+1)}} \langle l_2, l; 0, 0 | l_1, 0 \rangle \langle l_2, l, m, m_2 | l_1, m_1 \rangle \quad (2.26)$$

Reemplazando (2.26) en la ecuación (2.25) obtenemos el elemento de matriz para los multipolos eléctricos:

$$\langle X_{n_1, l_1, m_1} | q_l^m | X_{n_2, l_2, m_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2l_1+1}} \langle X_{n_1, l_1} || q_l || X_{n_2, l_2} \rangle \langle l_2, l, m_2, m | l_1, m_1 \rangle \quad (2.27)$$

Donde el elemento de matriz reducida, de orden l del operador multipolar es definido por:

$$\langle X_{n_1, l_1} || q_l || X_{n_2, l_2} \rangle = q \sqrt{2l_2+1} \langle l_2, l, 0, 0 | l_1, 0 \rangle \times \int_0^\infty dr r^{l+2} R_{n_1, l_1}(r) R_{n_2, l_2}(r) \quad (2.28)$$

Este elemento de matriz es independiente de m_1, m y m_2 , su valor depende de la base elegida y las propiedades generales que se atribuyen a esta.

Los coeficientes de Clebsch – Gordon $\langle l_2, l, m_2, m | l_1, m \rangle$ solamente surge de la integral angular que aparece en los elementos de matriz de q_l^m . Estos coeficientes únicamente dependen de los números cuánticos asociados con el momento angular del estado considerado y no involucra la dependencia radial $R_{n,l}(r)$ de las funciones de onda.

El elemento de matriz, así como las funciones radiales depende del potencial elegido, que de acuerdo a las propiedades de los coeficientes de Clebsch – Gordon pueden ser diferentes de cero únicamente si tenemos en cuenta que:

$$\begin{aligned} m_1 &= m_2 + m \\ |l_1 - l_2| &\leq l \leq l_1 + l_2 \end{aligned} \tag{2.29}$$

Por lo tanto la relación (2.28) del operador multipolar debe cumplir con estas condiciones por que de lo contrario su elemento de matriz será nulo ⁴.

2.3 EXPANSIÓN MULTIPOLAR DE LA ENERGÍA Y LA FUERZA

No únicamente el campo externo a una distribución de carga, pero también las fuerzas actuando sobre una distribución de carga puede ser expresada en términos de sus multipolos. Consideremos una distribución localizada de carga $\rho(r)$ en un campo externo $\phi(r)$ generada por alguna distribución.

La energía potencial varía suavemente, podemos hacer una expansión de Taylor alrededor de algún \bar{r}_0 . Tenemos:

$$\phi(r) = \phi(\bar{r}_0) + (\bar{r} - \bar{r}_0) \nabla \phi(\bar{r}_0) + \frac{1}{2} (\bar{r} - \bar{r}_0)(\bar{r} - \bar{r}_0) \nabla \nabla \phi(\bar{r}_0) + \dots \tag{2.30}$$

Insertando en la expresión para la energía

$$W = \int \rho(r) \phi(r) dv \tag{2.31}$$

Utilizando la definición del campo eléctrico

⁴ TANNODJI, C. C; DIU, B. and LALÖE, Franck. Quantum Mechanics. Vol.2. New York: Wiley & Sonns, 1977. p. 1067 – 1071.

$$E = -\nabla\phi \quad (2.32)$$

La ecuación (2.30) quedaría:

$$\phi(r) = \phi(\bar{r}_0) - (\bar{r} - \bar{r}_0)\bar{E}(\bar{r}_0) - \frac{1}{2}(\bar{r} - \bar{r}_0)(\bar{r} - \bar{r}_0)\nabla\bar{E}(\bar{r}_0) + \dots \quad (2.33)$$

El campo eléctrico externo cumple en regiones exteriores a sus propias fuentes $\nabla \cdot \bar{E}(\bar{r}_0) = 0$, podemos tomar $\frac{1}{6}r^2\nabla \cdot E(0)$ y lo adicionamos al tercer término del potencial. Finalmente obtenemos:

$$\phi(r) = \phi(\bar{r}_0) - (\bar{r} - \bar{r}_0)\bar{E}(\bar{r}_0) - \frac{1}{6}[3(\bar{r} - \bar{r}_0)(\bar{r} - \bar{r}_0) - (r - r_0)^2\delta_{ij}]\nabla\bar{E}(0) + \dots \quad (2.34)$$

Al reemplazar (2.34) en (2.31) tenemos:

$$W = q\phi(\bar{r}_0) - \bar{p}\bar{E}(\bar{r}_0) - \frac{1}{6}Q\nabla\bar{E}(\bar{r}_0) + \dots \quad (2.35)$$

Esta expansión muestra como varios multipolos interactúan con un campo externo, la carga con el potencial, el dipolo con el campo eléctrico \bar{E} y el cuadrupolo con el gradiente del campo eléctrico.

Cuanto mas alto sea el orden del multipolo, menor es el alcance dentro del cual el campo eléctrico tiene efectos observables.

La fuerza que experimenta una distribución de carga $\rho(r)$ es

$$\vec{F} = \int dq(r)\vec{E}(r) = \int \rho(r)\vec{E}(r)dv \quad (2.36)$$

Hacemos una expansión del campo eléctrico alrededor de \bar{r}_0

$$\vec{E}(r) = \bar{E}(\bar{r}_0) + (\bar{r} - \bar{r}_0)\nabla\bar{E}(\bar{r}_0) + \frac{1}{2}(\bar{r} - \bar{r}_0)(\bar{r} - \bar{r}_0)\nabla\nabla\bar{E}(\bar{r}_0) + \dots \quad (2.37)$$

Diferenciando con respecto a r_0 , encontramos que la fuerza actuando sobre la distribución tiene componentes:

$$\vec{F} = q\bar{E}(r_0) + \bar{p}\nabla E(r_0) + \frac{1}{6}Q\nabla\nabla E(r_0) + \dots \quad (2.38)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (2.32), la fuerza será:

$$F(\vec{r}_0) = -q\nabla\phi + \nabla(\vec{p}\cdot\vec{E}) + \nabla\left(\frac{Q\nabla\bar{E}}{6}\right) + \dots \quad (2.39)$$

$$F(\vec{r}_0) = -\nabla\left[q\phi - \vec{p}\cdot\vec{E} - \frac{Q\nabla\bar{E}}{6} + \dots\right] = -\nabla W \quad (2.40)$$

Donde W es la energía potencial de la distribución.

2.4 EXPANSIÓN MULTIPOLAR DE TORQUES

Calculamos el torque total sobre la distribución $\rho(r)$ y utilizando la misma expansión para el campo eléctrico (mirar ecuación (2.37))

$$\vec{T} = \int \vec{r} \times d\vec{F} = \int \vec{r} \times \vec{E}(r)\rho(r)dv \quad (2.41)$$

El torque en función del campo eléctrico es:

$$\begin{aligned} \vec{T} = q\vec{r}_0 \times E(r_0) + \vec{r}_0 \times (\vec{p}\cdot\nabla)E(r_0) + \frac{\vec{r}_0}{6} \times (Q\nabla\nabla)E(r_0) \\ + \vec{p} \times E(r_0) + \frac{1}{3}(Q\nabla) \times E(r_0) + \dots \end{aligned} \quad (2.42)$$

Si un dipolo es sometido a un campo eléctrico uniforme, donde el momento dipolar forma un ángulo con dicho campo, las fuerzas sobre las dos cargas son iguales y opuestas (figura 1); sin embargo estas fuerzas producen un momento de torsión neto sobre el dipolo y éste tiende a girar de tal modo que su eje se alinea con el campo eléctrico ⁵.

⁵ SEPULVEDA, Op.cit.,p. 149-160.

3. SIMETRIAS

3.1 INTRODUCCIÓN

La simetría es un concepto asociado con la belleza y la perfección. La más evidente de las simetrías está relacionada con simetrías geométricas o formas geométricas de figuras y cuerpos. Cuando la gente escucha la palabra simetría, le asocia usualmente un significado geométrico, de hecho, la simetría más simple que podemos imaginar es la simetría especular.

El concepto de simetría ha atraído la atención del ser humano desde siempre. Los antiguos griegos consideraron al círculo y a la esfera como los objetos más perfectos en dos y tres dimensiones, respectivamente. Esto se debe a que el círculo es simétrico respecto a cualquier línea recta que pase por su centro y la esfera lo es respecto a cualquier plano que la corte pasando por su centro. La concepción divina del universo hizo suponer que los cuerpos celestes eran perfectos, teniendo forma esférica y girando en círculos alrededor de la tierra. Esta noción de perfección y simetría continúa presente en la física, con una extensión del concepto de simetría tal que permite incorporar ideas más abstractas que las simples concepciones geométricas.

En general, en física se dice que un sistema físico o una teoría posee una determinada simetría si las ecuaciones que describen al sistema o que constituyen la teoría, no cambian al efectuar ciertas transformaciones en sus variables.

La existencia de las simetrías ha permitido que la naturaleza aparezca más simple de lo que aparenta. Podemos definir en una forma muy simple, que el “principio de simetría” viene a ser como un intento de simplificar las cosas en términos matemáticos y abstractos. La importancia de la simetría en la física proviene de sus consecuencias, las cuales están establecidas en un poderoso teorema de la física teórica conocido como Teorema de Noether ⁶.

Emmy Noether fue una matemática alemana que encontró una relación entre las propiedades de invariancia (simetrías) de una teoría y las cantidades físicas que se conservan en todos los procesos. Ella demostró que hay una relación entre simetrías continuas y leyes de conservación de alguna magnitud básica. Simetrías continuas son las que resultan de operaciones sin restricción de magnitud. Hay

⁶ MORONES, Rubén. La Simetría izquierda – derecha en la naturaleza. 200, 2, 26. [online]. [citado en 2004, 12, 19]. Disponible en Internet: <http://www.uanl.mx/publicaciones/ciencia-uanl/vol5/2/pdfs/lasimetria.pdf>

una simetría relacionada con cómo permanecen inalterados ciertos objetos al aplicarles una determinada transformación.

En el siglo XIX, los matemáticos ya habían intentado describir matemáticamente todas las posibles operaciones de simetría de este tipo, basándose en una disciplina nueva denominada “teoría de grupos”. Una idea básica de la teoría de grupo es describir simbólicamente operaciones de simetría, como las rotaciones, utilizando el álgebra.

Eugene Wigner fue uno de los primeros que investigaron la relación de las transformaciones de Einstein con un “grupo de simetría”, posteriormente esta simetría la aplicaron a las partículas cuánticas. Luego, en 1939, escribió un artículo que demostraba cómo esas consideraciones puramente matemáticas de la teoría de grupo podían permitir la clasificación de las partículas cuánticas, lo que constituía un acontecimiento notable y trascendental. Lo que consiguió Wigner recuerda en varios sentidos lo que había logrado la generación anterior de científicos que clasificó todos los cristales posibles mediante el uso de grupos de simetría, los llamados “grupos cristalinos”, de retículas espaciales periódicas. Wigner se basó en la idea de que las transformaciones einsteinianas eran un grupo de simetría del espacio – tiempo de Minkowski, una de las primeras aplicaciones fructíferas de los principios de simetría en la moderna física de partículas.

Hasta comienzos del siglo XX, los principios de simetría en física se aplican casi exclusivamente a problemas de mecánica de fluidos y cristalografía.

Después de 1925, con el éxito cada vez mayor de la teoría cuántica en la descripción del átomo y los procesos atómicos, los físicos descubrieron que las consideraciones de simetría implicaban números cuánticos; como estos son necesarios para describir fenómenos atómicos y subatómicos; las consideraciones de simetría resultan esenciales en la física de partículas elementales.

Aunque algunas clases de números cuánticos parecen ser conservados en procesos fuertes a altas energías, algunos de estos son violados en interacciones débiles y electromagnéticas ⁷.

3.2 SIMETRÍAS CONTINUAS

Estas simetrías son las que resultan de operaciones sin restricción de magnitud, por ejemplo un plato se puede girar cualquier ángulo y su contorno siempre se ve

⁷(s.n).Principios de simetría, el universo primitivo. 2002, 12, 16. [online]. [citado en 2004,12,16]. Disponible en Internet: www.cica.es/aliens/dfamnus/cursos/particulas/

igual; en cambio si se rota un libro medio giro o un cuarto de vuelta, ya no se ve igual: no es una simetría continua.

Un sistema tiene una simetría determinada cuando sus propiedades no se modifican al someter al sistema a una determinada transformación. Ejemplos de transformaciones son las traslaciones espaciales, las rotaciones, las traslaciones temporales, etc. Estas transformaciones son continuas, pues vienen determinadas por variables continuas (vector desplazamiento, ángulo de rotación, desplazamiento de tiempos). La simetría de un sistema frente a este tipo de transformaciones, lleva asociada la conservación de una magnitud del sistema. Para los casos anteriores, estas son el momento lineal total, el momento angular total y la energía total respectivamente.

3.2.1. Conservación del momentum lineal. Asumimos que el espacio es homogéneo de igual estructura en todas las posiciones r . Esto es igual si asumimos que el espacio es invariante bajo traslaciones.

Esta invariancia de traslación implica la conservación del momentum para un sistema aislado. Medimos la homogeneidad del espacio por medio de la función lagrangiana $L(r_i, \dot{r}_i, t)$ de un sistema de partículas que permanece invariante si r_i es reemplazado por $r_i + a$, donde a es un vector constante arbitrario. Tenemos:

$$\delta L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i = a \sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0 \quad (3.1)$$

Puesto que a es arbitrario, lo cual implica:

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0 \quad (3.2)$$

De la ecuación de Euler –Lagrange; si el sistema es conservativo tenemos

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right] - \frac{\partial L}{\partial r_i} = 0 \quad (3.3)$$

teniendo en cuenta la ecuación (3.1) tenemos:

$$\frac{d}{dt} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i} \right] = \frac{d p}{dt} = 0 \quad (3.4)$$

Concluimos entonces que el momentum lineal es conservado si las leyes físicas no cambian o son invariantes bajo traslaciones espaciales.

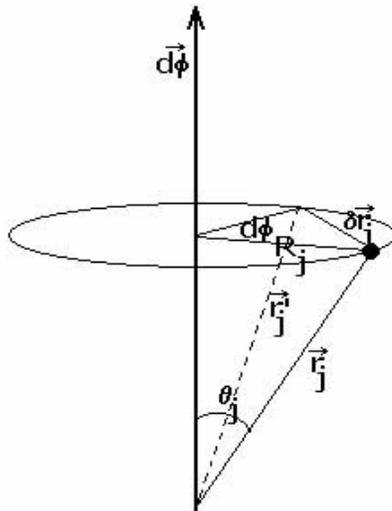
3.2.2. Conservación del momento angular. Las leyes físicas son invariantes bajo rotaciones. Las leyes físicas no dependen de la orientación de los ejes de coordenadas, aunque las componentes de los ejes puedan ser diferentes en los diferentes sistemas, las leyes que rigen los fenómenos tienen la misma forma matemática, a esta invariancia de rotación corresponde la conservación del momento angular; por ejemplo el lagrangiano es invariante bajo rotaciones.

Si para cada partícula del sistema, r_i es el vector de posición y $v_i = \frac{dr_i}{dt}$ su velocidad, podemos escribir el lagrangiano

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} \delta r_i + \frac{\partial L}{\partial v_i} \delta v_i \right) = 0 \quad (3.5)$$

Veamos como reducir la expresión del radio vector y de la velocidad en una rotación diferencial $d\phi$.

Figura 3. Conservación del momento angular.



Fuente: tomado de la página de Internet:
<http://personales.Ya.com/casanchi/fis/simetría 01.htm>.

Del grafico anterior podemos ver que, la variación del radio vector es: $\delta r_j = r'_j - r_j$.
 El radio vector respecto al eje de rotación $R_j = r_j \text{sen} \theta_j$.

Al igual que el radio vector, la velocidad de la partícula v_i también son alteradas por la rotación; ellas cambian su dirección de la siguiente forma

$$|\delta r_j| = r_j \text{sen} \theta_j d\phi = |r_j \times d\phi| \quad (3.6)$$

$$|\delta v_i| = |\delta\phi \times v_i| \quad (3.7)$$

Al sustituir las anteriores expresiones en la variación de la lagrangiana, tenemos

$$\begin{aligned} \delta L &= \sum_{i=1} \left[\frac{dP_i}{dt} (r_i \times d\phi) + P_i \left(\frac{dr_j}{dt} \times d\phi \right) \right] \\ &= \sum_{i=1} \left[d\phi \left(\frac{dP_i}{dt} \times r_i \right) + d\phi \left(P_i \times \frac{dr_i}{dt} \right) \right] \\ &= d\phi \frac{d}{dt} \sum_{i=1} \vec{P}_i \times \vec{r}_i = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Si el momento angular se define

$$J = \vec{P} \times \vec{r} \quad (3.9)$$

De esta forma podemos ver que el momento angular es una constante.

$$\sum \vec{P}_j \times \vec{r}_j = \text{constante}. \quad (3.10)$$

3.2.3. Conservación de la energía. Esta simetría resulta de la uniformidad del tiempo. La escogencia del origen temporal puede hacerse de forma arbitraria sin afectar la forma de las leyes.

Si la lagrangiana del sistema mecánico es

$$L = L[q_j, \dot{q}_j] \quad (3.11)$$

se tiene que: $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, por lo que la derivada total con respecto al tiempo sería:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt}$$

$$= \sum_{j=1}^n \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right] \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{d\dot{q}_j}{dt} \quad (3.12)$$

$$= \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j$$

Entonces

$$\frac{d}{dt} \left[L - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} H = 0 \quad (3.13)$$

Es decir, el hamiltoniano H se conserva en estos sistemas, y como la energía total coincide con el hamiltoniano si no existen fuerzas disipativas, se puede concluir que la energía total se conserva⁸.

3.3 SIMETRÍAS DISCRETAS

Las simetrías que hemos considerado hasta ahora todas son generadas por transformaciones infinitesimales. Ahora trataremos las simetrías discretas, las cuales pueden ser generadas por una sucesión de infinitos pasos pero los cuales fomentan reglas de selección e información sobre los términos naturales de interacción. Ellas son la inversión del espacio o transformación de paridad P, la transformación del tiempo invertido T y la transformación de la conjugación de carga C.

3.3.1 Clásicamente. Inversión espacial o paridad P. Consiste en invertir el signo de todas las coordenadas espaciales de las partículas que componen el sistema: $r \rightarrow -r$. Se supone que todos los vectores polares (como \vec{r} ó \vec{p}) cambian de signo, mientras que los vectores axiales como el momento angular ($\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p}$) no se modifican.

La inversión espacial exige tomar un determinado origen de coordenadas, y por tanto, la operación inversión espacial depende de este origen. Sin embargo, si el sistema que consideramos es invariante frente a traslaciones, la elección del origen de coordenadas no tiene importancia. Si el sistema no es invariante frente a

⁸ BROMLY; D.A. Quantum Mechanics Symetries. Vol 1.

traslaciones (por ejemplo, una partícula en un campo externo), pero es invariante frente a rotaciones en torno a un origen O (por ejemplo, un campo central), este origen es el que debe elegirse para realizar la inversión.

La consecuencia de la invariancia de un sistema frente a inversión espacial es que la probabilidad de un proceso de colisión es la misma de la del proceso obtenido mediante inversión espacial, es decir, cambiando de signo las posiciones y velocidades de todas las partículas participantes.

Bajo la operación de paridad las coordenadas espaciales cambian de la siguiente manera

$$(t, x) \rightarrow (t, -x) \quad (3.14)$$

De la misma forma cambian la velocidad, el momentum lineal, la fuerza y el campo eléctrico, así

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \rightarrow -\frac{d\vec{x}}{dt} = -\vec{v} \quad (3.15)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow -m\vec{v} = -\vec{p} \quad (3.16)$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \frac{d(-\vec{p})}{dt} = -\vec{F} \quad (3.17)$$

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V - \frac{\partial A}{\partial t} \rightarrow -\left(-\vec{\nabla}V - \frac{\partial A}{\partial t}\right) = -\vec{E} \quad (3.18)$$

Donde V es un potencial escalar y $A^\mu = (\phi, \vec{A})$ un potencial vectorial.

Además, existen otras magnitudes que no cambian cuando se les aplica la simetría de paridad, entre ellas están, el momento angular y el campo magnético.

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow (-\vec{r}) \times (-\vec{p}) = \vec{J} \quad (3.19)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow -\vec{\nabla} \times (-\vec{A}) = \vec{B} \quad (3.20)$$

Como algunas partículas tienen asociado un momento angular intrínseco llamado espín (\vec{s}), el cual transforma de igual forma que el momento angular, por tanto tenemos

$$\vec{s} \rightarrow \vec{s} \quad (3.21)$$

Asociado al espín está la llamada helicidad (h) de la partícula la cual es una cantidad cuántica; es el signo de proyección de la partícula de espín \vec{s} a lo largo de la dirección de su momentum \vec{p} .

$$h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}||\vec{p}|} \rightarrow \frac{\vec{s} \cdot (-\vec{p})}{|\vec{s}||\vec{p}|} = -h \quad (3.22)$$

Consideremos el caso cuando una partícula posee un momento dipolar eléctrico (de) el cual es proporcional a su espín. Si ha dicha partícula se la somete a un campo eléctrico y magnético, se puede describir mediante los siguientes hamiltonianos.

$$H = -de \vec{s} \cdot E \rightarrow -de \vec{s} \cdot (-E) = -H \quad (3.23)$$

$$H = -dm \vec{s} \cdot \vec{B} \rightarrow -dm \vec{s} \cdot (B) = H \quad (3.24)$$

Podemos ver que la helicidad de la partícula así como el momento dipolar eléctrico cambia bajo paridad, mientras que el momento dipolar magnético (dm) permanece invariante bajo esta simetría.

De forma relativista, el tiempo y la posición se pueden expresar mediante un cuadrivector

$$x^\mu = (t, \vec{r}) \rightarrow (t, -\vec{r}) = x_\mu \quad (3.25)$$

El cuadrimomento y la derivada son:

$$P^\mu = (E, \vec{p}) \rightarrow (E, -\vec{p}) = P_\mu \quad (3.26)$$

$$\partial^\mu = (\partial/\partial t, -\vec{\nabla}) \rightarrow (\partial/\partial t, \vec{\nabla}) = \partial_\mu \quad (3.27)$$

Ahora con lo visto anteriormente, podemos ver como transforma el tensor de campo electromagnético $F^{\mu\nu}$ bajo la simetría de paridad.

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \rightarrow \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu} \quad (3.28)$$

Por lo cual podemos decir que el tensor de campo electromagnético, bajo paridad no cambia o es un tensor simétrico.

Inversión temporal T

Esta simetría consiste en cambiar el signo del tiempo. Hace que las magnitudes derivadas de esta como: velocidad, momento lineal, momento angular cambien de signo.

En este caso, la inversión temporal al igual que la inversión espacial depende del origen donde se tome el tiempo. Es así como si el sistema es invariante frente a traslaciones temporales (y, por tanto, conserva la energía total), la elección del origen del tiempo no tiene importancia.

La consecuencia de la invariancia de un sistema frente a inversión temporal es que la probabilidad de un proceso de colisión es la misma del proceso inverso, únicamente cambian las partículas incidentes por las salientes ⁹.

Al igual que en el caso anterior (simetría de paridad), podemos ver como transforman las diferentes magnitudes bajo la simetría de inversión temporal.

Coordenadas espaciales; cambian su coordenada temporal únicamente.

$$(t, x) \rightarrow (-t, x) \quad (3.29)$$

Por lo tanto también cambian la velocidad, el momento lineal, el momento angular, el espin, el campo magnético y el momento dipolar eléctrico, el cual igualmente cambia bajo la simetría de paridad.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \rightarrow -\frac{d\vec{x}}{dt} = -\vec{v} \quad (3.30)$$

$$\vec{p} = m\vec{v} \rightarrow -m\vec{v} = -\vec{p} \quad (3.31)$$

$$\vec{J} = \vec{r} \times \vec{p} \rightarrow \vec{r} \times (-\vec{p}) = -\vec{J} \quad (3.32)$$

$$\vec{s} \rightarrow -\vec{s} \quad (3.33)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \rightarrow \vec{\nabla} \times (-\vec{A}) = -\vec{B} \quad (3.34)$$

$$H = -de \vec{s} \cdot \vec{E} \rightarrow -de (-\vec{s}) \cdot (\vec{E}) = -H \quad (3.35)$$

⁹ GOMEZ, Joaquín; Partículas Elementales, 2001,06, 06.[online]. [citado en 2004, 12,19].Disponible <http://www.cica.es/aliens/dfamnus/cursos/particulas/apuntes.pdf>. p.40

De la misma forma, existen magnitudes que permanecen invariantes al aplicarles la simetría de inversión temporal, como son: fuerza, campo eléctrico, helicidad y momento dipolar magnético.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \rightarrow \frac{d(-\vec{p})}{-dt} = \vec{F} \quad (3.36)$$

$$\vec{E} = -\nabla\vec{V} - \frac{\partial A}{\partial t} \rightarrow -\nabla\vec{V} - \left(\frac{-\partial A}{-\partial t}\right) = \vec{E} \quad (3.37)$$

$$h = \frac{\vec{s} \cdot \vec{p}}{|\vec{s}||\vec{p}|} \rightarrow \frac{(-\vec{s}) \cdot (-\vec{p})}{|\vec{s}||\vec{p}|} = h \quad (3.38)$$

$$H = -dm \vec{s} \cdot \vec{B} \rightarrow -dm (-\vec{s}) \cdot (-B) = H \quad (3.39)$$

En la representación relativista, bajo esta simetría será.

$$x^\mu = (t, \vec{r}) \rightarrow (-t, \vec{r}) = -(t, -\vec{r}) = -x_\mu \quad (3.40)$$

$$P^\mu = (E, \vec{p}) \rightarrow (E, -\vec{p}) = P_\mu \quad (3.41)$$

$$\partial^\mu = (\partial/\partial t, -\nabla) \rightarrow (-\partial/\partial t, \nabla) = -\partial_\mu \quad (3.42)$$

Finalmente el tensor de campo electromagnético, bajo la simetría temporal es antisimétrico.

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \rightarrow (-\partial_\mu)(A_\nu) - (-\partial_\nu)(A_\mu) = -F_{\mu\nu} \quad (3.43)$$

Podemos sintetizar todas las operaciones realizadas anteriormente, para así poder ver con más claridad como se comportan estas magnitudes bajo paridad y bajo inversión temporal¹⁰:

¹⁰ BRANCO, G. C.; LAVOURA, L. and SILVA, J. P. CP Violation. No. 103 en International Series of Monographs on Physics. Oxford Science Publications, 1999.p. 24-36.

Tabla 1. Simetrías clásicas

Nombre	Símbolo	P	T
Tiempo	t	+	-
Posición	r	-	+
Energía	E	+	-
Momentum	P	-	-
Espín	s	+	-
Helicidad	h	-	+
Campo eléctrico	\vec{E}	-	+
Campo magnético	\vec{B}	+	-
Momento dipolar magnético (MDM)	dm	+	+
Momento dipolar eléctrico (MDE)	de	-	-

Tabla 2. Simetrías en notación covariante

Nombre	Símbolo	P	T
Posición	x^μ	x_μ	$-x_\mu$
Derivada	∂^μ	∂_μ	$-\partial_\mu$
Momento	P^μ	P_μ	P_μ
Potencial	A^μ	A_μ	A_μ
Tensor de campo electromagnético	$F^{\mu\nu}$	$F_{\mu\nu}$	$-F_{\mu\nu}$

Donde el signo (-) indica que la magnitud cambia bajo determinada simetría, y el signo (+) nos dice que la magnitud sigue igual, o no se modifica bajo dicha simetría.

3.3.2 Cuánticamente. Paridad. La operación de inversión espacial o paridad viene descrita en mecánica cuántica por un operador P, unitario ($P^{-1} = P^+$) y hermítico ($P = P^+$) que cambia el signo de las coordenadas espaciales ($r \rightarrow -r$), esencialmente cambia la quiralidad de un sistema.

Un sistema es invariante frente a transformaciones de paridad cuando el hamiltoniano no se modifica ante la actuación de P: $PH P^+ = H$, o bien $[P;H] = 0$. Nótese que la invariancia frente a rotaciones implica que $[H, \vec{J}] = 0$. Además, $[P, \vec{J}] = 0$. Por tanto, si para un sistema, $[P;H] = 0$, los autoestados del sistema

pueden caracterizarse por los números cuánticos j , m_j y por el autovalor del operador paridad, que puede tomar los valores¹¹ ± 1 .

La actuación de P sobre campos libres viene dada por:

	O	P	POP^{-1}	
<i>Campo escalar</i>	$\phi(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{i\varphi_p} \phi(x_\alpha)$	
<i>Campo espinorial (Dirac)</i>	$\Psi(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{i\psi_p} \gamma_0 \Psi(x_\alpha)$	
	$\bar{\Psi}(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{-i\psi_p} \bar{\Psi}(x_\alpha) \gamma_0$	
<i>Campo vectorial</i>	$V_\mu(x^\alpha)$	\mapsto	$-e^{i\nu_p} V^\mu(x_\alpha)$	(3.44)

$e^{i\psi_p}$ son fases arbitrarias.

La transformación (3.44) incluye fases arbitrarias; para entenderlo consideremos, por ejemplo, un campo escalar complejo ϕ con densidad lagrangiana libre $L_0 = (\partial_\mu \phi^+) (\partial^\mu \phi) - m^2 \phi^+ \phi$, en la ecuación de movimiento (Klein-Gordón) $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x^\alpha) = 0$.

Al realizar la transformación $\phi(x^\alpha) \mapsto \phi(x_\alpha)$ en vez de realizar $\phi(x^\alpha) \mapsto e^{i\Phi} \phi(x_\alpha)$ tanto la acción libre como la ecuación de movimiento se mantienen. ¿Que significado tiene esto? Tratar de asignar una paridad absoluta a un campo libre carece por completo de sentido físico: una partícula que no interacciona, ni siquiera es observable. La situación es idéntica al tener en cuenta varios campos libres.

Serian las distintas interacciones las que permitan fijar paridades relativas a los distintos campos (siempre y cuando P sea una buena simetría). De ese modo, incluir en (3.44) la transformación de un campo pseudoescalar o de uno vector-axial no es a priori necesario: el signo (-) no es mas que una fase $e^{i\pi}$ que se puede incluir en fases arbitrarias $e^{i\varphi_p}$ y $e^{i\alpha_p}$. La forma de los términos de interacción será la que permita una elección de fases consistente (como $e^{i\varphi_p} = \pm 1$ para un campo escalar o pseudoescalar), indicando por su interacción que campo es escalar o pseudoescalar. Las paridades intrínsecas $e^{i\psi_p}$ se han elegido de modo que para electrón, protón y neutrón sean iguales a +1; Además de la

¹¹ GOMEZ, Op.cit.p.43 – 44.

transformación (3.44) conviene señalar la transformación de los distintos bilineales (construidos con espinores de Dirac) que aparecen habitualmente en la densidad lagrangiana.

	O	P	POP^{-1}
<i>Escalar</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_P \bar{\psi}_1(x_\alpha)\psi_2(x_\alpha)$
<i>Seudoescalar</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\gamma_5\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_P \bar{\psi}_1(x_\alpha)\gamma_5\psi_2(x_\alpha)$
<i>Vector</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\gamma_\mu\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_P \bar{\psi}_1(x_\alpha)\gamma^\mu\psi_2(x_\alpha)$
<i>Vector – axial</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\gamma_\mu\gamma_5\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_P \bar{\psi}_1(x_\alpha)\gamma^\mu\gamma_5\psi_2(x_\alpha)$
<i>Tensor</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\sigma_{\mu\nu}\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_P \bar{\psi}_1(x_\alpha)\sigma^{\mu\nu}\psi_2(x_\alpha)$
<i>Seudotensor</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_P \bar{\psi}_1(x_\alpha)\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi_2(x_\alpha)$

(3.45)

Donde ζ_p es la fase $\zeta_p = e^{-i\Psi_1^p} e^{i\Psi_2^p}$

Carga

La operación conjugación de carga viene descrita por un operador C , unitario ($C = C^+$) y hermítico ($C^{-1} = C^+$), cuyo efecto consiste en cambiar partículas por antipartículas. Así, no solo se cambia el signo de la carga eléctrica ($CQC^{-1} = -Q$), sino también el de todos los números cuánticos aditivos (numero bariónico, números leptonicos, extrañeza). El operador conjugación de carga no altera a las variables orbitales o de espín de las partículas.

Un sistema es invariante frente a conjugación de carga cuando el hamiltoniano no se modifica ante la actuación de C : $CHC^+ = H$, o bien $[C;H] = 0$. El operador conjugación C de carga no conmuta con el operador carga eléctrica, ni con los otros operadores que corresponden a números cuánticos aditivos. Por tanto, solamente en el caso de sistemas totalmente neutros (todos sus números cuánticos aditivos cero) pueden considerarse estados con un numero cuántico C (paridad C) bien definido ¹².

La conjugación de carga C no tiene una interpretación clásica como la tiene P .

¹² BJORKEN, J.D; DRELL, S.D. Relativistic Quantum Fields. Madrid: Mc graw-Hill company, 1965. p. 190 -230.

Sin embargo una forma sencilla de entender como actúa C sobre campos libres se consigue acudiendo a la descomposición en ondas planas (Fourier) del campo.

Los coeficientes de $e^{\pm ip \cdot x}$ son los operadores de creación o destrucción multiplicados por vectores de polarización, espinores, (lo que corresponda a la representación del grupo de Lorentz bajo la que se transforme el campo). La conjugación de carga C intercambia los papeles de los operadores de creación o destrucción. La transformación de los campos libres es la siguiente:

Transformaciones

	O	C	COC^{-1}	
<i>Campo escalar</i>	$\phi(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{i\varphi_c} \phi^+(x^\alpha)$	
<i>Campo espinorial (Dirac)</i>	$\Psi(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{i\psi^c} C \bar{\Psi}^t(x^\alpha)$	
	$\bar{\Psi}(x^\alpha)$	\mapsto	$-e^{-i\psi^c} \Psi^t(x^\alpha) C^{-1}$	
<i>Campo vectorial</i>	$V_\mu(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{i\nu^c} V_\mu^+(x^\alpha)$	(3.46)

Recordemos las propiedades de transformación de los bilineales de Dirac habituales:

	O	C	COC^{-1}	
<i>Escalar</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_c \bar{\psi}_2(x^\alpha) \psi_1(x^\alpha)$	
<i>Seudoescalar</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \gamma_5 \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_c \bar{\psi}_2(x^\alpha) \gamma_5 \psi_1(x^\alpha)$	
<i>Vector</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \gamma_\mu \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_c \bar{\psi}_2(x^\alpha) \gamma_\mu \psi_1(x^\alpha)$	
<i>Vector – axial</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_c \bar{\psi}_2(x^\alpha) \gamma_\mu \gamma_5 \psi_1(x^\alpha)$	
<i>Tensor</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \sigma_{\mu\nu} \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_c \bar{\psi}_2(x^\alpha) \sigma_{\mu\nu} \psi_1(x^\alpha)$	
<i>Seudotensor</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_c \bar{\psi}_2(x^\alpha) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi_1(x^\alpha)$	(3.47)

Donde ζ_c es la fase $\zeta_c = e^{-i\Psi_1^c} e^{i\Psi_2^c}$. Teniendo en cuenta la paridad $\eta = e^{i\varphi_p}$ de una partícula sin espín y la de su antipartícula η_c , $\eta_c = \eta^*$, un estado partícula-

antipartícula tiene paridad $\eta^c \eta = +1$, par. Si la partícula resulta ser su propia antipartícula, la paridad intrínseca es real, $\eta = \pm 1$. La conjugación de carga (ξ) resulta completamente análoga (seguimos con campos escalares): para un sistema partícula-antipartícula, $\xi^c = \xi^*$, y la conjugación de carga $\xi \xi^c$ es necesariamente par $\xi \xi^c = +1$. Si la partícula es su propia antipartícula, tiene conjugación de carga real $\xi = \pm 1$. Para campos vectoriales tenemos una situación idéntica a la del caso escalar. Sistemas partícula-antipartícula tienen paridad y conjugación de carga intrínsecas pares; si partícula y antipartícula coinciden, ambas valen ± 1 . Lo comentado para escalares y vectores es propio, de forma general, de campos bosónicos. Al considerar fermiones (de Dirac), partícula y antipartícula no pueden coincidir y tan solo podemos señalar que la paridad en un sistema fermión-antifermión es impar, $\eta_f^c \eta_f = -1$.

Tiempo

Esta simetría cambia fundamentalmente $t \rightarrow -t$. A diferencia de las simetrías P y C a la simetría T no se le puede asociar un número cuántico y es un operador antiunitario.

El operador T deja invariante los operadores hermíticos independientes del tiempo, $T \vec{r} T^{-1} = \vec{r}$, pero cambia de signo los momentos lineales $T \vec{p} T^{-1} = -\vec{p}$ y angulares $T \vec{J} T^{-1} = -\vec{J}$. También cambia de signo el operador espín.

Sin embargo, físicamente la invariancia bajo el tiempo invertido implica que el paso de las amplitudes para los procesos al pasar del estado inicial (i) al estado final (f), bajo la inversión del tiempo tendrá la misma magnitud así:

$$|M_i \rightarrow f| = |M_f \rightarrow i|$$

$M_i \rightarrow f$, denota el elemento de matriz para la transición de un estado inicial $|i\rangle$ a un estado final $|f\rangle$.

Teniendo en cuenta el teorema de Wigner (representación de simetrías mediante operadores unitarios o antiunitarios), para mantener el hamiltoniano de la teoría positivo, siendo esta invariante bajo T, la inversión temporal debe representarse mediante un operador antiunitario. Las transformaciones bajo T son las siguientes:

	O	T	TOT^{-1}
	$c \in C$	\mapsto	c^*
<i>Campo escalar</i>	$\phi(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{i\phi_t} \phi^+(-x_\alpha)$
<i>Campo espinorial (Dirac)</i>	$\Psi(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{i\psi^t} \gamma_0^* \gamma_5^* C^* \bar{\Psi}^+(-x_\alpha)$
	$\bar{\Psi}(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{-i\psi^t} \Psi^+(-x_\alpha) (C^{-1})^* \gamma_0^* \gamma_5^*$
<i>Campo vectorial</i>	$V_\mu(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{i\psi_t} V^\mu(-x_\alpha)$

(3.48)

	O	T	TOT^{-1}
<i>Escalar</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_t \bar{\psi}_1(-x_\alpha) \psi_2(-x_\alpha)$
<i>Seudoescalar</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \gamma_5 \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_t \bar{\psi}_1(-x_\alpha) \gamma_5 \psi_2(-x_\alpha)$
<i>Vector</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \gamma_\mu \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_t \bar{\psi}_1(-x_\alpha) \gamma^\mu \psi_2(-x_\alpha)$
<i>Vector – axial</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_P \bar{\psi}_1(-x_\alpha) \gamma^\mu \gamma_5 \psi_2(-x_\alpha)$
<i>Tensor</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \sigma_{\mu\nu} \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_t \bar{\psi}_1(-x_\alpha) \sigma^{\mu\nu} \psi_2(-x_\alpha)$
<i>Seudotensor</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_t \bar{\psi}_1(-x_\alpha) \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi_2(-x_\alpha)$

(3.49)

Donde ζ_t es la fase $\zeta_t = e^{-i\Psi_1^t} e^{i\Psi_2^t}$.

Uniendo las transformaciones de carga C y paridad P, podemos abordar la transformación bajo la operación compuesta del operador CP.

	O	CP	$CPO(CP)^{-1}$
<i>Escalar</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_C\zeta_P\bar{\psi}_2(x_\alpha)\psi_1(x_\alpha)$
<i>Seudoescalar</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\gamma_5\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_C\zeta_P\bar{\psi}_2(x_\alpha)\gamma_5\psi_1(x_\alpha)$
<i>Vector</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\gamma_\mu\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_C\zeta_P\bar{\psi}_2(x_\alpha)\gamma^\mu\psi_1(x_\alpha)$
<i>Vector – axial</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\gamma_\mu\gamma_5\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_C\zeta_P\bar{\psi}_2(x_\alpha)\gamma^\mu\gamma_5\psi_1(x_\alpha)$
<i>Tensor</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\sigma_{\mu\nu}\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$-\zeta_C\zeta_P\bar{\psi}_2(x_\alpha)\sigma^{\mu\nu}\psi_1(x_\alpha)$
<i>Seudotensor</i>	$\bar{\psi}_1(x^\alpha)\sigma_{\mu\nu}\gamma_5\psi_2(x^\alpha)$	\mapsto	$\zeta_C\zeta_P\bar{\psi}_2(x_\alpha)\sigma^{\mu\nu}\gamma_5\psi_1(x_\alpha)$

(3.50)

Recordamos también la transformación de los campos libres bajo CP :

	O	CP	$CPO(CP)^{-1}$
<i>Campo escalar</i>	$\phi(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{i(\varphi_C+\varphi_P)}\phi^+(x_\alpha)$
<i>Campo espinorial (Dirac)</i>	$\Psi(x^\alpha)$	\mapsto	$e^{i(\psi^C+\Psi^P)}\gamma^0 C\bar{\Psi}^t(x^\alpha)$
	$\bar{\Psi}(x^\alpha)$	\mapsto	$-e^{-i(\psi^C+\Psi^P)}\Psi^t(x^\alpha)C^{-1}\gamma^0$
<i>Campo vectorial</i>	$V_\mu(x^\alpha)$	\mapsto	$-e^{i(v_C+v_P)}V^{\mu+}(x_\alpha)$

(3.51)

En el apéndice B detallamos la construcción de las propiedades de transformación de las ecuaciones (3.44) - (3.51).

Podemos resumir los resultados de la aplicación de varias transformaciones discretas en la siguiente tabla¹³: (se omiten las fases).

¹³ BRANCO, Op.cit.p.36.

Tabla 3. Simetrías Cuánticas.

		P	C	T	CP	CPT
Escalar	$\bar{\psi}_1 \psi_2$	$\bar{\psi}_1 \psi_2$	$\bar{\psi}_2 \psi_1$	$\bar{\psi}_1 \psi_2$	$\bar{\psi}_2 \psi_1$	$\bar{\psi}_2 \psi_1$
Seudoescalar	$\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2$	$-\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2$	$\bar{\psi}_2 \gamma_5 \psi_1$	$\bar{\psi}_1 \gamma_5 \psi_2$	$-\bar{\psi}_2 \gamma_5 \psi_1$	$\bar{\psi}_2 \gamma_5 \psi_1$
Vector	$\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2$	$\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \psi_2$	$-\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_1$	$\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \psi_2$	$-\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \psi_1$	$\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \psi_1$
Vector axial	$\bar{\psi}_1 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_2$	$-\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \psi_2$	$\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_1$	$\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \gamma_5 \psi_2$	$-\bar{\psi}_2 \gamma^\mu \gamma_5 \psi_1$	$-\bar{\psi}_2 \gamma_\mu \gamma_5 \psi_1$
Tensor	$\bar{\psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \psi_2$	$\bar{\psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \psi_2$	$-\bar{\psi}_2 \sigma_{\mu\nu} \psi_1$	$-\bar{\psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \psi_2$	$-\bar{\psi}_2 \sigma^{\mu\nu} \psi_1$	$\bar{\psi}_2 \sigma_{\mu\nu} \psi_1$
Seudotensor	$\bar{\psi}_1 \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi_2$	$-\bar{\psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi_2$	$-\bar{\psi}_2 \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi_1$	$-\bar{\psi}_1 \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi_2$	$\bar{\psi}_2 \sigma^{\mu\nu} \gamma_5 \psi_1$	$-\bar{\psi}_2 \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 \psi_1$

3.4 CONSERVACIÓN Y VIOLACIÓN DE LAS SIMETRÍAS DISCRETAS

En general, la evidencia experimental de los procesos de física atómica y nuclear indican que la interacción fuerte y electromagnética conservan P y C. Ello permite relacionar la paridad P intrínseca a las partículas que se crean o se aniquilan en procesos fuertes o electromagnéticos, así como asignar paridad C a las partículas totalmente neutras. Si, por convenio, se toma que la paridad P intrínseca del protón y el neutrón es +1, entonces pueden deducirse las paridades de todos los hadrones con extrañeza cero. En concreto, se encuentra que los piones tienen paridad P = -1. Del mismo modo, tomando que la paridad P de la Λ es +1, se deducen las paridades de todos los hadrones con extrañeza no nula.

Decimos que la paridad se conserva cuando existe simetría izquierda - derecha. Habrá conservación de la paridad en un proceso físico si la imagen en el espejo de este proceso se observa en la naturaleza con la misma frecuencia o probabilidad que el fenómeno observado directamente. La simetría izquierda derecha de todos los procesos fundamentales de la naturaleza era tomada por un hecho hasta antes del año 1956. En este año, los físicos T.D. Lee y Ning Yang empezaron a desconfiar de la aplicación del principio de conservación de la paridad en ciertos fenómenos de decaimiento radiactivo. La sospecha de que la paridad era violada se originó en un problema de la física de partículas conocido como enigma Teta - Tau. Este enigma apareció a principios de los años cincuenta y está relacionado con el decaimiento radiactivo beta.

Dos partículas conocidas como teta y tau, eran semejantes en todo, podríamos decir que idénticas, solo que una se desintegraba emitiendo dos piones y la otra

tres. Aplicando la ley de conservación de la paridad a este fenómeno de desintegración nos lleva a la conclusión de que las partículas teta y tau son diferentes, pues si no lo fueran, el hecho de que decaigan de estas dos maneras implica que la paridad no se conserva. Lee y Yang, dos físicos chinos nacionalizados norteamericanos propusieron la audaz hipótesis de que ambas partículas, teta y tau eran en realidad la misma y que en las interacciones débiles la paridad no se conservaba ¹⁴.

La evidencia experimental de que la interacción débil violaba la paridad P llegó en 1957. Wu investigó el decaimiento beta de ^{60}Co , que tiene espín 5^+ , y decae en $^{60}\text{Ni} + e^- + \nu$. Introdujo los átomos de ^{60}Co en un campo magnético intenso, y observó que los electrones se emitían con mayor probabilidad en la dirección del campo magnético que en la opuesta. Este hecho implica una violación de la paridad, ya que la inversión espacial invierte el momento de los electrones, pero no el campo magnético, por lo que la emisión de electrones en ambas direcciones debe tener la misma probabilidad.

Esta asimetría se explica debido a que los antineutrinos tienen helicidad positiva. El electrón y el neutrino se emiten con mayor probabilidad en direcciones opuestas (por la densidad de estados), pero sus espines son paralelos, y van dirigidos preferentemente en la dirección opuesta al campo magnético. Como el antineutrino tiene helicidad positiva, se emite en la dirección opuesta al campo magnético, por lo que el electrón se emite en la dirección del campo magnético.

El hecho de que los neutrinos tengan helicidad definida hace que la interacción débil viole P y C. Para un neutrino con momento \vec{p} y helicidad $h = -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 P \left| \nu \quad \vec{p} \quad h = -\frac{1}{2} \right\rangle &= \eta_P \left| \nu \quad -\vec{p} \quad h = \frac{1}{2} \right\rangle \\
 C \left| \nu \quad \vec{p} \quad h = -\frac{1}{2} \right\rangle &= \eta_C \left| \bar{\nu} \quad \vec{p} \quad h = -\frac{1}{2} \right\rangle \\
 PC \left| \nu \quad \vec{p} \quad h = -\frac{1}{2} \right\rangle &= \eta_P \eta_C \left| \bar{\nu} \quad -\vec{p} \quad h = \frac{1}{2} \right\rangle
 \end{aligned}
 \tag{3.52}$$

Como los neutrinos con helicidad positiva, no existen, o al menos no sienten la interacción débil, P y C, por separado, no son conservados por la interacción débil. No obstante, sí existen los antineutrinos con helicidad positiva, por lo que PC sí podría, en principio, ser conservada por la interacción débil.

En los procesos débiles en los que no aparecen neutrinos también se viola la paridad.

¹⁴ MORONES, Op.cit.

Ello se debe a que en las corrientes aparece $g_V + \gamma_5 g_A$. El operador γ_5 se modifica frente a P y C cambiando de signo. Por tanto,

$$\begin{aligned} P(g_V + \gamma_5 g_A)P^{-1} &= g_V - \gamma_5 g_A \\ C(g_V + \gamma_5 g_A)C^{-1} &= g_V - \gamma_5 g_A \\ CP(g_V + \gamma_5 g_A)(CP)^{-1} &= g_V + \gamma_5 g_A \end{aligned} \tag{3.53}$$

Por ello, P y C no dejan invariante la densidad lagrangiana de la interacción débil, pero sí lo hace, en principio, CP, suponiendo que las constantes g_V y g_A sean las mismas para partículas y antipartículas. Esto pareció resolver el problema pero pronto se encontró una violación a esta nueva forma de expresar la ley de conservación. La invariancia frente a inversión temporal requiere que g_V y g_A sean reales; la inclusión de la transformación T ha logrado que hasta el momento actual no se haya encontrado violación a la combinación sucesiva de transformaciones CPT ¹⁵.

3.5 TEOREMA CPT

Uno de los mas importantes principios de la física teórica es el que establece que las leyes de la física no cambian bajo el conjunto de las transformaciones C,P,T; este se conoce con el nombre de teorema CPT.

Después de haber estudiado las simetrías discretas P, T, C y la combinación CP, la cual parece ser violada en decaimientos débiles; con el trabajo de Geor Lüders, Wolfgang Pauli y Julian Scwinger quienes mostraron independientemente que las operaciones combinadas CPT puede ser una simetría invariante. Esta transformación realiza simultáneamente una reflexión de coordenadas espaciales, invierte la coordenada temporal e intercambia partículas por antipartículas.

El enunciado del teorema es el siguiente: Si la densidad lagrangiana que describe una teoría es un operador hermítico e invariante de Lorentz, construido a partir del producto en orden normal de operadores de campo que satisfacen la relación entre el espín y la estadística, entonces la transformación CPT es una simetría de la teoría . La conservación de CPT, que hace que el hamiltoniano del sistema sea invariante frente a ésta ($CPT H (CPT)^{-1} = H$), tiene importantes consecuencias. Estas consecuencias dependen solamente de la conservación de CPT. C, P y T, por separado, no tienen que conservarse.

¹⁵ GOMEZ, Op.cit.,p. 47- 48

3.5.1 Consecuencias del teorema CPT.

- Una consecuencia de la simetría CPT es que partículas y antipartículas tienen masas y vidas medias iguales.
- Otra consecuencia simple del teorema CPT es que si se viola algunas de las simetrías discretas implica violación del complemento, por ejemplo si se viola CP, también debe violarse T.
- La carga eléctrica así como todos los números cuánticos internos de una partícula y su antipartícula deben ser exactamente simétricos y opuestos.
- Si se viola CP y también T, existe la probabilidad de que las partículas elementales tengan un momento dipolar eléctrico, ya que este presenta violación de T y de P.
- Los efectos de violación de CP están también conectados al origen de la masa de partículas y mas concretamente a la cuestión de por que partículas y antipartículas no desaparecieron en una “llama” de aniquilación mutua inmediatamente después que el universo se creó con idénticas cantidades de materia – antimateria tras la explosión del Bing-Bang. Al presentarse violación de CP existe más materia que antimateria en el universo.
- Partículas compuestas como núcleos o átomos pueden tener momento de dipolo eléctrico debido a la existencia de estados degenerados con diferentes propiedades bajo T y bajo P.
- Las propiedades electromagnéticas de una partícula y su antipartícula deben ser opuestas ¹⁶.
- La invariancia CPT trae como consecuencia que si las partículas tienen una estadística normal, entonces aquellas con espín entero satisfacen la estadística de Bose –Einstein, mientras que aquellas que tienen espín semi-entero obedecen a la de Fermi –Dirac. Esta consecuencia tiene consecuencias adicionales para teorías relativistas, en que esto requiere un operador con espín entero para ser cuantizado usando relaciones de conmutación, mientras que las reglas de anticonmutación son para ser usadas por operadores con espín semi-entero¹⁷.

¹⁶ BRANCO, Op.cit., p. 56 - 59

¹⁷ASHOKDAS, Thomas Ferbel. Introduction to Nuclear and Particle Physics. University of Rochester. Jhon Wiley & Sons, 1994 pg. 227-236.

4. CALCULOS TEÓRICOS Y NUMÉRICOS

4.1 INTRODUCCIÓN

El estudio del momento dipolar eléctrico del neutrón se ha venido realizando desde 1950 por Purcell y Ramsey, quienes consideraron primero la existencia de este problema cuando sugirieron que no había evidencia experimental de que las fuerzas nucleares son simétricas bajo transformación de paridad.

Las pruebas de las simetrías discretas, conjugación de carga C, paridad P y la inversión temporal T son de gran importancia para establecer la estructura del modelo estándar (M.E). La violación de la paridad fue sólo el primero de los golpes que recibieran los llamados principios de conjugación CPT (carga, paridad, tiempo). Según estos, no sólo el cambio de paridad, sino también la inversión en el sentido del tiempo o el intercambio de partículas por sus antipartículas debería dejar inalterada la descripción física; pero como ya estudiamos en el capítulo anterior estas simetrías por separado eran violadas por las interacciones débiles; sin embargo Landau y otros, introdujeron una nueva simetría de las leyes físicas, su invariancia bajo la acción combinada o el producto de carga y paridad (CP).

Esta situación duró hasta 1964, año en que Cronin, y su colega Val L. Fitch descubrieron una pequeñísima violación de la invariancia CP, en el decaimiento del meson K; la cual, a través del teorema CPT, implica además que la física no es invariante bajo la operación de inversión temporal T. Es así como el momento dipolar eléctrico del neutrón es considerado de gran interés teórico y experimental.

En 1957 Landau observó que el momento dipolar eléctrico del neutrón es diferente de cero, lo cual indica que no se conserva la paridad (P) y la inversión del tiempo (T).

En la experiencia, la invarianza de inversión temporal parece ser violada en al menos todos los procesos fundamentales conocidos. La prueba mas espectacular de este principio de invarianza para interacciones electromagnéticas proviene de la búsqueda de un momento dipolar eléctrico (M.D.E) para el neutrón. La razón por la que el neutrón provee una prueba mas sensitiva que otras partículas como el protón es debido a que no tiene carga eléctrica, pero posee un momento de dipolo magnético, sugiriendo la existencia de una distribución de carga extendida en el interior del neutrón¹⁸.

¹⁸ KHRIPLOVICH, Iosif B; LAMOREAUX, Steve k. CP Violation Without Strangeness. New Mexico, USA. Mayo, 1997. p. 1-4

El neutrón además de poseer un momento dipolar magnético, posee un momento dipolar eléctrico asociado con su espín, por lo cual su única dirección espacial es su eje de espín (momento angular).

El neutrón es una partícula constituyente de todos los núcleos de número másico superior a 1, es decir, de todos los núcleos salvo el del hidrógeno ordinario. La captura de neutrones por hidrogeno (protones) puede ser bien descrita por la interacción espín – espín, asumiendo que el protón y el neutrón tienen espín $\frac{1}{2}$ y esto puede ser considerado como primera prueba firme que el sistema del neutrón presenta un momento magnético negativo.

Según la teoría de partículas actual, el neutrón está compuesto por tres quarks un u (up) y dos d (down), con cargas $\frac{2}{3}$ e y $-\frac{1}{3}e$ respectivamente.

En general, la violación de CP en el modelo estándar surge de una constante de acoplamiento compleja en la interacción débil de bosones con quarks. Esta constante surge de la diagonalización de las matrices de masa de los quarks, que vienen de la matriz de mezcla de Cabibbo - Kobayashi - Maskawa (CKM). En ese sentido, la violación CP podría ser vista como un fenómeno natural. Sin embargo, se sabe bien que también sería "natural" observar la violación CP en interacciones fuertes, mientras los experimentos tengan los límites muy rigurosos. Esto es conocido como " el fuerte problema CP. "

4.2 MOMENTOS DIPOLARES ELÉCTRICOS Y MAGNÉTICOS

Como ya mencionamos que una partícula elemental, el núcleo o el átomo pueden poseer un momento de dipolo eléctrico (MDE) si tanto P como T se violan.

El lagrangiano para un campo de Dirac ψ con masa m y carga eléctrica q que interacciona con el campo electromagnético A^μ es:

$$L_D = \bar{\psi} \left[\gamma_\mu (i\partial^\mu - qA^\mu) - m \right] \psi \quad (4.1)$$

el cual es hermítico.

Además para una partícula de espín $1/2$ con momento magnético anómalo y un momento dipolar eléctrico puede describirse mediante la ecuación de Dirac, adicionándole un término no renormalizable; así el lagrangiano modificado es:

$$L_D = \bar{\psi} \left[\gamma_\mu (i\partial^\mu - qA^\mu) - m + \frac{q}{2m} \sigma^{\mu\nu} (F + iG\gamma^5)(\partial_\nu A_\mu) \right] \psi \quad (4.2)$$

este nuevo término invariante gauge es:

$$L_p = \bar{\psi} \left[\frac{q}{2m} \sigma^{\mu\nu} (F + iG \gamma^5) (\partial_\nu A_\mu) \right] \psi \quad (4.3)$$

Donde F y G son elementos que pertenecen a los números reales; también este es hermítico ($L_p = L_p^\dagger$), veamos:

$$\begin{aligned} \left[\bar{\psi} \left(\sigma^{\mu\nu} (F + iG \gamma^5) (\partial_\nu A_\mu) \right) \psi \right]^\dagger &= \psi^\dagger (\partial_\nu A_\mu) (F - iG \gamma^{5\dagger}) \sigma^{\mu\nu\dagger} \bar{\psi}^\dagger \\ &= \psi^\dagger (\partial_\nu A_\mu) (F - iG \gamma^{5\dagger}) (\gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0) \gamma^0 \psi \\ &= \psi^\dagger (\partial_\nu A_\mu) F \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \psi - i \psi^\dagger (\partial_\nu A_\mu) G \gamma^{5\dagger} \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \psi \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las matrices gama tenemos

$$= \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} (F + iG \gamma^5) (\partial_\nu A_\mu) \psi$$

Ahora veamos como transforma L_p bajo las simetrías C,P y T.

- Transformación bajo C, $CL_p C^{-1} = L_p^C$

$$\begin{aligned} C \left[\bar{\psi} \left(\sigma^{\mu\nu} (F + iG \gamma^5) (\partial_\nu A_\mu) \right) \psi \right] C^{-1} &= C \bar{\psi} C^{-1} \sigma^{\mu\nu} (F + iG \gamma^5) (\partial_\nu A_\mu) C \psi C^{-1} \\ &= \bar{\psi}^C \sigma^{\mu\nu} (F + iG \gamma^5) C (\partial_\nu A_\mu) C^{-1} \psi^C \\ &= -\psi^T \sigma^{\mu\nu} (F + iG \gamma^5) (\partial_\nu (-A_\mu)) C \bar{\psi}^T \\ &= \bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} (F + iG \gamma^5) (\partial_\nu A_\mu) \psi \end{aligned}$$

podemos ver que el lagrangiano es invariante bajo C ($L_p = L_p^C$).

- Transformación bajo P, $PL_p P^{-1} = L_p^P$

$$\begin{aligned} P \left[\bar{\psi} \left(\sigma^{\mu\nu} (F + iG \gamma^5) (\partial_\nu A_\mu) \right) \psi \right] P^{-1} &= P \bar{\psi} P^{-1} P \sigma^{\mu\nu} (F + iG \gamma^5) P^{-1} P \psi P^{-1} \\ &= \bar{\psi} \gamma^0 P \sigma^{\mu\nu} P^{-1} P (F + iG \gamma^5) P^{-1} \gamma^0 \psi \\ &= \bar{\psi} \gamma^0 \sigma^{\mu\nu} \gamma^0 (F - iG \gamma^5) \psi \\ &= \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} (F - iG \gamma^5) (\partial_\nu A_\mu) \psi \end{aligned}$$

por lo tanto el lagrangiano no es invariante bajo Paridad ($L_p \neq L_p^P$).

- Transformación bajo T, $TL_p T^{-1} = L_p^\tau$

$$\begin{aligned}
T \left[\bar{\psi} \left(\sigma^{\mu\nu} (F + iG\gamma^5) (\partial_\nu A_\mu) \right) \psi \right] T^{-1} &= T \bar{\psi} T^{-1} T \sigma^{\mu\nu} T^{-1} T (F + iG\gamma^5) T^{-1} T \psi T^{-1} \\
&= -\psi^\dagger A C \gamma_5^T \gamma_0^T A^* (\sigma^{\mu\nu})^* (F - iG\gamma_5^*) \gamma_5^* \gamma_0^* C^* A \psi \\
&= -\bar{\psi} \gamma_5 \gamma_0 \sigma^{\mu\nu} (F + iG\gamma_5) C A^* \gamma_0^* \gamma_5^* C^* A \psi \\
&= -\bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} (F - iG\gamma_5) \psi
\end{aligned}$$

Donde $A = \gamma^0$ y $CA^*C^*A = 1$.

Aplicando inversión temporal el lagrangiano cambia o no es invariante bajo dicha transformación. ($L_p \neq L_p^\tau$).

Después de realizar las diferentes transformaciones podemos ver que el término F es invariante bajo P, T y C. Sin embargo el término G viola tanto la inversión temporal T como la inversión espacial P, por lo cual este término presenta las mismas propiedades de un momento dipolar eléctrico ¹⁹.

4.2.1 Significado de los términos F y G. Aplicando la ecuación de movimiento a la ecuación (4.2), tenemos la ecuación de Dirac:

$$\left[\gamma_\mu (i\partial^\mu - qA^\mu) - m + \frac{q}{2m} \sigma^{\mu\nu} (F + iG\gamma^5) (\partial_\nu A_\mu) \right] \psi = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned}
\text{con } \sigma^{\mu\nu} \partial_\nu A_\mu &= -\frac{1}{2} \sigma^{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\
&= \sigma \vec{B} I - i\sigma \vec{E} \gamma^5
\end{aligned} \quad (4.5)$$

donde $F^{\mu\nu}$ es el tensor de campo electromagnético, σ las matrices de espín de Pauli, \vec{B} el campo magnético y \vec{E} el campo eléctrico.

Al reemplazar (4.5) en (4.4) y multiplicando por γ^0 tenemos:

$$\left[\gamma^0 \gamma_\mu (i\partial^\mu - qA^\mu) - m\gamma^0 + \frac{q}{2m} \gamma^0 (F + iG\gamma^5) (\sigma B I - i\sigma E \gamma^5) \right] \psi = 0 \quad (4.6)$$

Recordando que:

¹⁹BRANCO, Op.cit., p. 36 – 38.

$$\gamma^0 \gamma_\mu = (1, \alpha) \quad A^\mu = (\phi, \vec{A}) \quad \partial^\mu = (\partial^0, -\nabla) \quad \vec{\pi} = (i\nabla - q\vec{A})$$

y tomando el límite no relativista de la ecuación (4.6), es conveniente expresar la función de onda en términos de matrices columna de dos componentes:

$$\psi = \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ \bar{\chi} \end{pmatrix} = e^{-imt} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Entonces de (4.6) obtenemos:

$$i \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \left(\alpha \vec{\pi} + m \gamma^0 - \frac{q}{2m} (F - iG \gamma^5) (\sigma B I + i \sigma E \gamma^5) + q\phi \right) \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Haciendo los cálculos respectivos tenemos:

$$i \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sigma \cdot \vec{\pi} \chi + \left(q\phi - \frac{q}{2m} (F \sigma B + G \sigma E) \right) \varphi + \frac{q}{2m} (iF \sigma B - iG \sigma E) \chi \quad (4.9)$$

$$i \frac{\partial \chi}{\partial t} = \sigma \cdot \vec{\pi} \varphi - 2m \chi + \left(q\phi + \frac{q}{2m} (F \sigma B + G \sigma E) \right) \chi - \frac{q}{2m} (iF \sigma B - iG \sigma E) \varphi \quad (4.10)$$

La ecuación (4.10) puede aproximarse ya que las energías de interacción son pequeñas comparadas con la energía en reposo ($E = m$) de la partícula, obteniendo

$$\chi = \frac{\sigma \cdot \vec{\pi}}{2m} \varphi \quad (4.11)$$

χ es la componente pequeña de la función de onda ψ , y φ es la componente grande.

Si reemplazamos (4.11) en (4.9) obtenemos la siguiente ecuación:

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - q\phi \right) \varphi = \frac{(-i\nabla - qA)^2 \varphi}{2m} - \frac{q}{m} [(1+F)s \cdot B + G s \cdot E] \varphi \quad (4.12)$$

Aquí $s = \sigma/2$ es el espín de la partícula, F es un momento de dipolo magnético anómalo y G un momento de dipolo eléctrico.

4.3 MOMENTO DIPOLAR ELÉCTRICO EN EL MODELO ESTÁNDAR

En el Modelo Estándar bajo el grupo $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes SU(1)_Y$ (c: color, L: isoespin, Y: hipercarga) se espera que exista violación de la simetría de inversión temporal T, debido a la existencia de una fase compleja en la matriz de Cabbibo – Kobayashi – Maskawa (V_{KM}) de la interacción débil, ésta fase genera la parte imaginaria de las amplitudes las cuales se necesitan para la violación de CP que fue descubierta en 1964 por Cronin y Fitch en el decaimiento del meson K.

Además, si se encuentra un valor diferente de cero del M.D.E del neutrón es una prueba más de la violación de CP. El momento dipolar eléctrico inducido por el mecanismo del modelo Estándar se puede producir a través del intercambio del boson W^\pm y del parámetro θ de la cromodinámica cuántica (QCD).

Las interacciones de corrientes cargadas (interacción W^\pm) para los quarks son dadas por:

$$L_{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} \bar{U}_L \gamma^\mu V_{KM} D_L W_\mu^+ + h.c \quad (4.13)$$

donde W es el boson gauge, y los campos de los quarks $U_L = u, c, t$ y $D_L = d, s, b$ con cargas $2/3$ y $-1/3$ respectivamente.

La matriz de mezcla (V_{KM}) para quarks es una matriz unitaria 3×3 . Ordenando los quarks por sus masas, los elementos de dicha matriz se escriben de la siguiente manera:

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

Esta matriz unitaria depende de tres ángulos reales y seis fases, la libertad de redefinir las fases de los auto estados de masa del quark se puede utilizar para quitar cinco de las fases, permitiendo tener una sola fase física, la fase de Cabbibo – Kobayashi – Maskawa la cual es la responsable de la violación de CP en los decaimientos de mesones en el modelo estándar.

La primera parametrización de la matriz de mezcla (V_{KM}) fue hecha por Kobayashi y Maskawa en 1973, la cual se hace mediante tres matrices de rotación y una matriz de fase así:

$$V_{KM} = \begin{pmatrix} C_1 & -S_1 C_3 & -S_1 S_3 \\ S_1 C_2 & C_1 C_2 C_3 - S_2 S_3 e^{i\delta} & C_1 C_2 C_3 + S_2 C_3 e^{i\delta} \\ S_1 S_2 & C_1 S_2 C_3 + C_2 S_3 e^{i\delta} & C_1 S_2 S_3 - C_2 C_3 e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

donde $C_i = \text{Cos} \theta_i$, $S_i = \text{Sen} \theta_i$, $\theta_i = 1,2,3$. son los ángulos de Euler que están en el primer cuadrante $[0, \pi/2]$ y la fase $0 \leq \delta \leq 2\pi$.

Tenemos la expresión:

$$\begin{pmatrix} \bar{u}_1 & \dots & \bar{u}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{u1d1} & \dots & V_{u1dn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ V_{und1} & \dots & V_{undn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Podemos redefinir los campos de los quarks u_α, d_k , mediante:

$$u_\alpha = e^{i\psi_\alpha} u'_\alpha \quad d_k = e^{i\psi_k} d'_k \quad (4.17)$$

Donde ψ_α y ψ_k son fases arbitrarias.

Bajo esta definición V transforma así:

$$V'_{\alpha k} = e^{i(\psi_k - \psi_\alpha)} d'_k \quad (4.18)$$

Las cantidades físicamente medibles pueden ser invariantes bajo una redefinición de fases de los campos, estos invariantes son los módulos de los elementos de la matriz

$$V_{ud} = |V_{ud}|^2 = V_{ud} V_{ud}^* \quad (4.19)$$

y los invariantes simples son los cuartetos

$$Q_{udcs} = V_{ud} V_{cs} V_{us}^* V_{cd}^* \quad (4.20)$$

La parte imaginaria de estos cuartetos es la que contribuye a la violación de CP en el decaimiento del meson K.

Sin embargo, no hay ninguna contribución al momento de dipolo eléctrico a primer orden en interacciones débiles (orden G_F), esto se debe a que los procesos no cambian de sabor; puesto que algún elemento de la matriz (V_{KM}) entra en un solo cambio del boson W, el cual es diagonal en sabor con su modulo cuadrado.

Procesos a nivel de un loop involucran la combinación de los elementos $V_{ud} V_{ud}^* = 1$; los cuales son reales y no pueden involucrar la fase que viola la combinación de carga y paridad, la simetría CP, como se observa en la figura siguiente.

Figura 4. Diagrama a nivel de un loop, donde no hay contribución al MDE del neutrón.



Del grafico anterior y utilizando el lagrangiano de corrientes cargadas de la ecuación (4.13), obtenemos la amplitud invariante:

$$m = \left(\frac{g}{2\sqrt{2}} \right)^2 \sum_d V_{ud} V_{ud}^* [\bar{u}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_j] [\bar{u}_j \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \bar{u}_i] \times \left(\frac{g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta}}{M_w^4} \right) \quad (4.21)$$

$$m = \frac{g^2}{8M_w^4} [\bar{u}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u_j] [\bar{u}_j \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \bar{u}_i], \quad (4.22)$$

Puesto que $\sum_d V_{ud} V_{ud}^* = 1$, comprobando así que a nivel de un loop no hay fase que viole CP, por lo tanto no hay contribución al MDE del neutrón. La constante de Fermi es $G_F = \frac{g^2 \sqrt{2}}{8M_w^2}$; finalmente la amplitud invariante del diagrama a nivel de un loop es

$$m = \frac{G_F}{\sqrt{2}M_w^2} \left\{ [\bar{u}_i \gamma_\alpha (1 - \gamma_5) u_j] [\bar{u}_j \gamma_\beta (1 - \gamma_5) u_i] \right\} \quad (4.23)$$

Donde podemos observar que a primer orden en G_F no hay contribución al momento dipolar eléctrico.

Después de esto Desphande, Eilam y Spence demostraron que una contribución diferente del orden de G_F^2 existe, pero es muy pequeña y no es observable con métodos experimentales.

Haciendo un análisis dimensional, se puede obtener una estimación razonable del momento dipolar eléctrico del neutrón; ya que siempre hay un factor $\text{Im}Q$ asociado a algún proceso que viola CP, el cual asociado al mecanismo de GIM podría cancelar la contribución de masas degeneradas de los quarks y teniendo en cuenta que: $M_w^2 \gg m_{u,c,b}^2$; tendríamos:

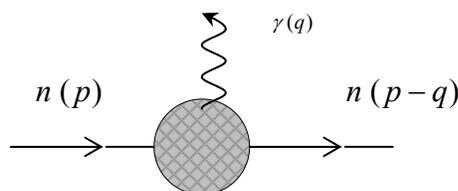
$$de(n) \approx \frac{eG_F^2}{\pi^4} \frac{m_t^2}{M_w^2} \text{Im}Q\mu^3 \approx 10^{-31} e - cm. \quad (4.24)$$

Donde $\mu \approx 0.3 \text{ GeV}$ a escala hadrónica.

Podemos ver que este resultado es mucho mas pequeño que los datos experimentales recientes.^{20 21}

4.4 ELEMENTOS DE MATRIZ ENTRE DOS ESTADOS DEL NEUTRÓN

Figura 5. Dispersión elástica neutrón – neutrón.



La amplitud de transición en función del elemento de matriz de la corriente es:

²⁰ OSHIMO, Noriyuki. Neutron electric dipole moment and extension of the standard model. Department of physics Ochanomizu university, Bunkyo – ku, Tokyo 112-8610, Japan. 2001,10,04. [online]. [citado en 2005, 05, 11]. Disponible en Internet: http://arxiv.org/PS_cache/hep-ph/pdf/0110/0110054.pdf

²¹ DONOGHUE, J.F; GOLOWICH, E; HOLSTEIN, B.R. Dynamics of the Model Standard. Cambridge University, 1992.pg 251-253.

$$\Gamma(n \rightarrow n\gamma) = \epsilon^\lambda \langle n | J_\lambda | n \rangle \quad (4.25)$$

donde ϵ^λ es la polarización y J_λ es la corriente, la cual está compuesta por una parte que transforma como un vector bajo transformaciones de Lorentz y la otra como vector axial así:

$$J_\lambda(x) = V_\lambda(x) + A_\lambda(x) \quad (4.26)$$

Tomamos por separado cada una de las corrientes de la siguiente forma:

$$\langle n | V_\lambda(x) | n \rangle = \bar{n}(p-q) [g_v(q^2) \gamma_\lambda + f_v(q^2) \sigma_{\lambda\nu} q^\nu + i h_v(q^2) q_\lambda] n(p) \quad (4.27)$$

$$\langle n | A_\lambda(x) | n \rangle = \bar{n}(p-q) [g_A(q^2) \gamma_\lambda \gamma^5 + i f_A(q^2) q_\lambda \gamma^5 + h_A(q^2) \sigma_{\lambda\nu} q^\nu \gamma^5] n(p) \quad (4.28)$$

donde $h_A, h_v, g_A, g_v, f_A, f_v$, son los factores de forma de la corriente débil, los cuales son funciones escalares de²² q^2 .

Teniendo en cuenta el gauge de Lorentz:

$$\partial^\lambda A_\lambda = 0 \quad (4.29)$$

y tomando las funciones de onda:

$$\begin{aligned} n(q) &= e^{ip \cdot x} \psi(x) \\ \bar{n}(p-q) &= e^{-i(p-q) \cdot x} \bar{\psi}(x) \end{aligned} \quad (4.30)$$

de la ecuación (4.28) obtenemos:

$$i \bar{n}(p-q) [g_A q \gamma^5 + i f_A q^2 \gamma^5 + h_A q^\lambda \sigma_{\lambda\nu} q^\nu \gamma^5] n(p) = 0 \quad (4.31)$$

Puesto que el momentum del foton es: $q = p_i - p_f$; si tomamos el primer sumando de la ecuación (4.31) tenemos

²² MARSHAK, Robert E; RIAZUDIN; RYAN, Ciaran P. Theory of Weak Interactions in Particle Physics. Vol. XXIV. New York : Wiley – Interscience, 1986.p.194 – 101.

$$\begin{aligned}
\bar{n}(p-q)q\gamma^5 n(p) &= \bar{n}(p_f)(p_i - p_f)\gamma^5 n(p_i) \\
&= \bar{n}(p_f)p_i\gamma^5 n(p_i) - \bar{n}(p_f)p_f\gamma^5 n(p_i) \\
&= -\bar{n}(p_f)\gamma^5 p_i n(p_i) - \bar{n}(p_f)p_f\gamma^5 n(p_i) \\
&= -2m\bar{n}(p_f)\gamma^5 n(p_i)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Donde hemos tenido en cuenta la ecuación de Dirac

$$\begin{aligned}
p u(p) &= m u(p) \\
\bar{u}(p) p &= m \bar{u}(p)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Por lo tanto, si $q^2 = 0$ y como $\sigma_{\lambda\nu} q^\lambda q^\nu = 0$, la ecuación (4.31) quedaría:

$$\bar{n}(p-q)[g_A q \gamma^5] n(p) = -2im g_A \bar{n}(p-q)\gamma^5 n(p) = 0 \tag{4.34}$$

Esta igualdad se cumple únicamente cuando $g_A = 0$; puesto que m es diferente de cero.

De esta manera el elemento de matriz para la corriente axial, ecuación (4.28) es:

$$\langle n | A_\lambda(x) | n \rangle = \bar{n}(p-q) [i f_A(q^2) q_\lambda \gamma^5 + h_A(q^2) \sigma_{\lambda\nu} q^\nu \gamma^5] n(p) \tag{4.35}$$

y teniendo en cuenta la ecuación (4.25) obtenemos:

$$\Gamma(n \rightarrow n\gamma) = \bar{n}(p-q) [i f_A(q^2) \epsilon^\lambda q_\lambda \gamma^5 + h_A(q^2) \epsilon^\lambda \sigma_{\lambda\nu} q^\nu \gamma^5] n(p) \tag{4.36}$$

Como, por condición de Lorentz

$$\epsilon^\lambda q_\lambda = 0 \tag{4.37}$$

Tenemos que la amplitud de transición en función del elemento de matriz de la corriente axial es

$$\Gamma(n \rightarrow n\gamma) = h_A(q^2) \epsilon^\lambda \bar{n}(p-q) \sigma_{\lambda\nu} q^\nu \gamma^5 n(p) \tag{4.38}$$

Haciendo la descomposición de Gordon de la corriente axial encontramos:

$$\bar{n}(p-q) i \sigma_{\lambda\nu} q^\nu \gamma^5 n(p) = \bar{n}(p-q) [-q_\lambda \gamma^5 + i \sigma_{\lambda\nu} 2p^\nu \gamma^5 - 2m \gamma_\lambda \gamma^5] n(p) \tag{4.39}$$

Ahora reemplazando (4.39) en (4.38) y teniendo en cuenta (4.37) obtenemos:

$$\Gamma(n \rightarrow n\gamma) = h_A(q^2) \epsilon^\lambda \bar{n}(p-q) 2\sigma_{\lambda\nu} p^\nu \gamma^5 n(p) + h_A(q^2) \bar{n}(p-q) 2im \epsilon^\lambda \gamma_\lambda \gamma^5 n(p) \quad (4.40)$$

De la anterior ecuación podemos ver que el primer término es un pseudotensor, el cual viola las simetrías temporal y espacial, ya estudiadas anteriormente, es por esto que éste termino es de nuestro interés debido a que viola las mismas simetrías que un MDE.

4.5 MODELO SIGMA (σ) LINEAL.

El modelo sigma, considera la teoría de Schwinger 1958, Polkinghorne 1958; Gell – Mann y Levy 1960; la cual considera un triplete de piones, un campo escalar σ y un doblete del campo del nucleon $N = (p, n)$.

El lagrangiano está dado por:

$$L = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma)^2 + (\partial_\mu \pi)^2] + \bar{N} i\gamma^\mu \partial_\mu N + g \bar{N} [\sigma + i\tau \cdot \pi \gamma_5] N - V[\sigma^2 + \pi^2] \quad (4.41)$$

Donde:

$$V(\sigma^2 + \pi^2) = -\frac{\mu^2}{2} (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{\lambda}{4} (\sigma^2 + \pi^2)^2 \quad (4.42)$$

El lagrangiano (4.41) es invariante bajo transformaciones de simetría SU(2), tal que:

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma \quad (4.43)$$

$$\pi \rightarrow \pi' = \pi + \alpha \times \pi \quad (4.44)$$

$$N \rightarrow N' = N - i\alpha \cdot \frac{\tau}{2} N \quad (4.45)$$

Para $\alpha_i \ll 1$ la corriente conservada está dada por:

$$J_\mu^a = \bar{N} \gamma^\mu \frac{\tau^a}{2} N + \epsilon^{abc} \pi^a \partial_\mu \pi^c \quad (4.46)$$

Los generadores de la simetría SU(2) serán:

$$Q^a = \int J_0^a(x) d^3x \quad (4.47)$$

El lagrangiano (4.41) también es invariante bajo el grupo de transformación axial $SU(2)_A$:

$$\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma + \beta \cdot \pi \quad (4.48)$$

$$\pi \rightarrow \pi' = \pi - \beta \sigma \quad (4.49)$$

$$N \rightarrow N' = N + i\beta \cdot \frac{\tau}{2} \gamma^5 N \quad (4.50)$$

La corriente axial viene dada por la siguiente expresión:

$$A_\mu^a = \bar{N} \gamma_\mu \gamma^5 \frac{\tau^a}{2} N + (\partial_\mu \sigma) \pi^a - (\partial_\mu \pi^a) \sigma \quad (4.51)$$

Y cuyos generadores vendrán dados por:

$$Q^{5a} = \int A_0^a(x) d^3x \quad (4.52)$$

Para el caso en que $\mu^2 > 0$, se tiene que potencial es mínimo cuando:

$$(\sigma^2 + \pi^2) = v^2 \quad (4.53)$$

Donde:

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \quad (4.54)$$

Lo anterior nos indica que el vacío es degenerado. Ahora vamos a romper la simetría escogiendo el estado fundamental (vacío), tal que:

$$\langle 0 | \pi | 0 \rangle = 0 \quad (4.55)$$

$$\langle 0 | \sigma | 0 \rangle = v \quad (4.56)$$

Definiendo una nueva variable $\sigma \rightarrow \sigma' = \sigma - v$ al reemplazarlo en (4.42) obtengo el lagrangiano total del modelo sigma:

$$L = \bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu + g v \psi) + \frac{1}{2} \left[(\partial_\mu \sigma)^2 - 2\mu^2 \sigma^2 \right] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \pi)^2 + g \bar{\psi} [\sigma + i\tau \cdot \pi \gamma_5] \psi - \lambda v \sigma (\sigma^2 + \pi^2) - \frac{\lambda}{4} \left[(\sigma^2 + \pi^2)^2 + v^4 \right] \quad (4.57)$$

Es fácil observar que los estados pionicos no tienen masa.

Además se puede ver claramente que a partir del rompimiento espontáneo de simetría, los nucleones adquieren masa $m_N = gv$, mientras sigma tiene masa $m_\sigma = \sqrt{2}\mu$.

Por otro lado se puede demostrar la relación de conmutación:

$$[Q^{5a}, \pi^b] = i\sigma \delta^{ab} \quad (4.58)$$

De (4.58) podemos afirmar que las cargas axiales no dejan invariante el vacío, es decir, son generadores rotos. En efecto:

$$\langle 0 | A_\mu^a | \pi^a \rangle \neq 0 \quad (4.59)$$

En resumen, podemos decir que el rompimiento espontáneo de una simetría continua transporta partículas sin masa en el espectro. Esta idea se basa en que aunque la densidad lagrangiana (4.41) con simetría $SU(2)_V \times SU(2)_A$ sea invariante bajo una determinada operación de simetría, el vacío no es necesariamente invariante bajo esa misma operación de simetría ²³.

4.6 CALCULO DEL M.D.E DEL NEUTRÓN USANDO EL MODELO SIGMA LINEAL.

Anteriormente hemos explicado el modelo sigma. Ahora vamos a obtener el factor de forma h_A que es el momento dipolar eléctrico del neutrón de la corriente axial, el cual viola P y T a través del modelo sigma lineal y el rompimiento espontáneo de simetría $SU(2)_A \times SU(2)_V$.

El lagrangiano para el decaimiento en cuestión vendrá dado por:

$$L = \frac{1}{2} \left[(\partial^\mu \sigma)(\partial_\mu \sigma) + (\partial^\mu \pi)(\partial_\mu \pi) \right] + \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi - g_A \bar{\psi} (\sigma - i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi} \gamma_5) \psi + V(\sigma^2 + \pi^2) + hc. \quad (4.60)$$

²³ CHENG, Ta-pei; CLARENDON, Ling-Fong Li. Gauge theory of elementary Particle Physics Press- Oxford, 1984. p. 149-151.

Con el doblete del campo del nucleon:

$$\psi = \begin{bmatrix} p \\ n \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

Y el triplete de campos del pion:

$$\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \quad (4.62)$$

$$\vec{\pi} \cdot \vec{\tau} = \begin{pmatrix} \pi^0 & \sqrt{2} \pi^+ \\ \sqrt{2} \pi^- & -\pi^0 \end{pmatrix} \quad (4.63)$$

Siendo τ_i las matrices de espín de Pauli y definiendo:

$$\pi^+ = \frac{\pi^1 - i\pi^2}{\sqrt{2}} \quad (4.64)$$

$$\pi^- = \frac{\pi^1 + i\pi^2}{\sqrt{2}} \quad (4.65)$$

$$\pi^0 = \pi^3 \quad (4.66)$$

En el calculo siguiente no consideraremos las partículas σ y π^0 ; ya que estas no tienen importancia en el siguiente desarrollo.

Con las anteriores consideraciones el lagrangiano (4.60) se puede escribir como:

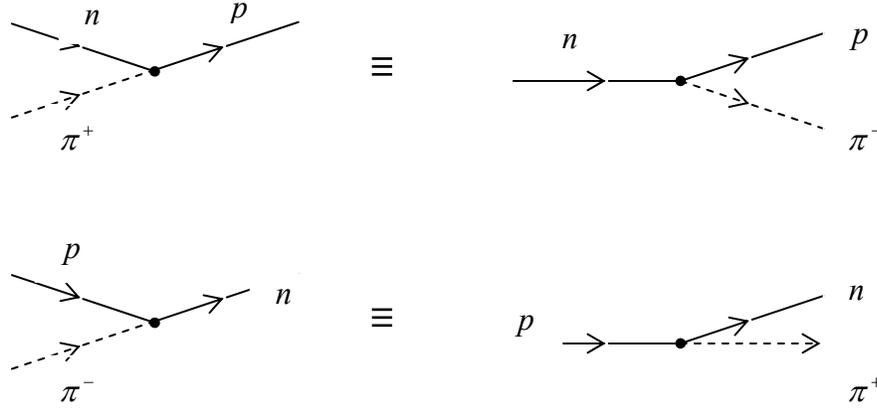
$$L = (\partial^\mu \pi^+) (\partial_\mu \pi^-) + \bar{p} i \gamma^\mu \partial_\mu p + \bar{n} i \gamma^\mu \partial_\mu n + i g_A (\bar{p} \gamma_5 n \pi^+ + \bar{n} \gamma_5 p \pi^-) + hc. \quad (4.67)$$

Al introducir la interacción electromagnética $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$ y un acople vectorial $g_V \bar{\psi} \vec{\pi} \cdot \vec{\tau} \psi$ se tiene:

$$\begin{aligned} L = & (\partial_\mu \pi^+) (\partial_\mu \pi^-) + ieA_\mu (\pi^+ \partial^\mu \pi^- - \pi^- \partial^\mu \pi^+) + ie^2 A^\mu A_\mu \pi^- \pi^+ + \bar{p} \gamma_\mu (i\partial^\mu - eA^\mu) p \\ & + \bar{n} i \gamma^\mu \partial_\mu n + i\sqrt{2} g_A (\bar{p} \gamma_5 n \pi^+ + \bar{n} \gamma_5 p \pi^-) + \sqrt{2} g_V (\bar{p} n \pi^+ + \bar{n} p \pi^-) \\ & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + hc. \end{aligned} \quad (4.68)$$

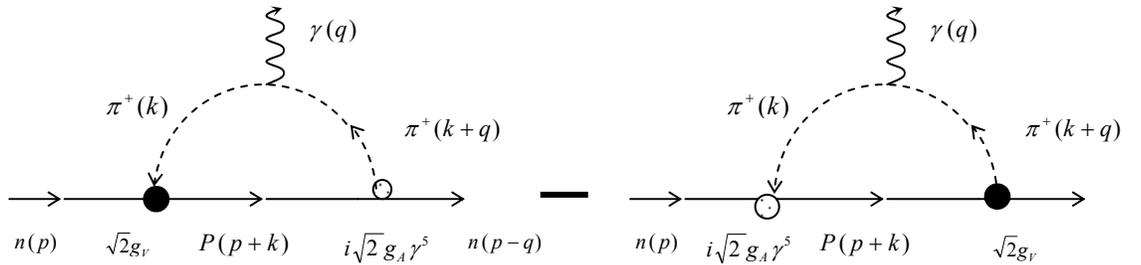
El lagrangiano anterior es el que contribuye al cálculo del MDE del neutrón; en el cual se observan los siguientes vértices posibles:

Figura 6. Vértices Efectivos



Con lo anterior podemos construir los diagramas quirales para obtener el momento dipolar eléctrico del neutrón.

Figura 7. Contribución al MDE del neutrón.



La tasa de decaimiento que representa el proceso $n \rightarrow n\gamma$ según las reglas de Feynman será:

$$\Gamma = \epsilon^\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{2}{S} \bar{n}(p-q) \left[g_A \gamma^5 g_V (p+q+m) - g_V (p+q+m) g_A \gamma^5 \right] i e (2k+q)_\lambda n(p) \quad (4.69)$$

Donde hemos definido

$$S = \frac{1}{[(p+k)^2 - m^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[k^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \frac{1}{[(k+q)^2 - \mu^2 + i\epsilon]} \quad (4.70)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de las matrices gama, y las ecuaciones (4.37) y (4.70) tenemos:

$$\Gamma = 8ig_V g_A \epsilon^\lambda e \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\bar{n}(p-q)(mk_\lambda - kk_\lambda)\gamma^5 n(p)}{S} \quad (4.71)$$

Ahora haciendo un análisis de las dos integrales anteriores, tenemos que

$$\int d^4 k \frac{k_\lambda}{k^6} = \int dk \frac{k^4}{k^6} = 0$$

Así podemos ver que la primera es nula, por lo cual desarrollaremos la segunda integral de la ecuación (4.70). Así:

$$\Gamma = -2ig_V g_A g_{\mu\lambda} \epsilon^\lambda e \bar{n}(p-q)\gamma^\mu \gamma^5 n(p) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{S} \quad (4.72)$$

Donde:

$$k_\mu k_\lambda = \frac{g_{\mu\lambda} k^2}{4} \quad (4.73)$$

Se puede observar que el problema de nuestro cálculo radica en evaluar la integral:

$$I = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{S} \approx \int \frac{dk}{k} \quad (4.74)$$

Ya que la integral diverge logarítmicamente, tomamos el propagador y hacemos regularización dimensional, así²⁴:

$$\frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon} = \frac{\mu^2 - \Lambda^2}{(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\epsilon)} \quad (4.75)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\Lambda^2 \gg \mu^2 \quad (4.76)$$

²⁴ Ibid, p. 45-56.

$$\Lambda^2 - \mu^2 \approx \Lambda^2 \quad (4.77)$$

Tenemos:

$$\Gamma(p^2) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 \Lambda^2}{R} \quad (4.78)$$

Si definimos:

$$R = (k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)((p+k)^2 - m^2 + i\varepsilon)((k+q)^2 - \mu^2 + i\varepsilon) \quad (4.79)$$

Haciendo una aproximación en series de Taylor tenemos:

$$\Gamma(p^2) = \Gamma(0) + \tilde{\Gamma}(p^2) \quad (4.80)$$

Donde:

$$\Gamma(0) = -\int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2 \Lambda^2}{(k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)((k+q)^2 - \mu^2 + i\varepsilon)(k^2 - \mu^2 + i\varepsilon)(k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon)} \quad (4.81)$$

Y

$$\tilde{\Gamma}(p^2) = -\Lambda^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k^2(p^2 + 2p \cdot k)}{R(k^2 - m^2 + i\varepsilon)} \quad (4.82)$$

Para calcular la ecuación (4.81) haremos que $q^\mu = 0$ y para realizar la integral utilizaremos un método que fue utilizado por Feynman, el cual manejaremos en nuestro cálculo²⁵.

Primero consideremos la integral:

$$\frac{1}{a_1^2 a_2 a_3 \dots a_n} = 3! \int_0^1 \frac{z_1 dz_1 dz_2 z_3 \dots z_n \delta(1 - z_1 - z_2 \dots z_n)}{(a_1 z_1 + a_2 z_2 + \dots + a_n z_n)^4} \quad (4.83)$$

Definiendo:

$$a_1 = (k^2 - \mu^2 + i\varepsilon) \quad (4.84)$$

²⁵ RYDER, Lewis H. Quantum Field Theory. Cambridge University. Segunda edición, 1996. p. 308.

$$a_2 = (k^2 - m^2 + i\varepsilon) \quad (4.85)$$

$$a_3 = (k^2 - \Lambda^2 + i\varepsilon) \quad (4.86)$$

Si elegimos el parámetro de corte:

$$\Lambda^2 = m^2 \quad (4.87)$$

Tenemos:

$$(a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3)^4 = (k^2 - a + i\varepsilon)^4 \quad (4.88)$$

Donde:

$$a = \mu^2 z_1 + \Lambda^2 (z_2 + z_3) \quad (4.89)$$

Con las definiciones anteriores llegamos a:

$$\Gamma(0) = 3! \int_0^1 z_1 dz_1 dz_2 dz_3 \delta(1 - z_1 - z_2 - z_3) \Lambda^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{(k^2 - a + i\varepsilon)^4} \quad (4.90)$$

Utilizando:

$$\int \frac{(k^2)^{m-2} d^4 k}{(k^2 + a)^n} = \frac{i\pi^2}{(a^2)^{n-m}} \frac{\Gamma(m)\Gamma(n-m)}{\Gamma(n)} \quad \text{para } n > m > 0^{26} \quad (4.91)$$

Al realizar la integral en $d^4 k$ y de acuerdo con (4.91) la ecuación (4.90) quedaría:

$$\Gamma(0) = -\frac{i}{8\pi^2} \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2}\right) \quad (4.92)$$

Ahora para encontrar el factor de forma h_A debemos reemplazar (4.92) en la ecuación (4.72) y utilizando la descomposición de Gordon de la corriente encontramos:

²⁶ JAUCH, J.M; ROHRLICH, F. The Theory of Photons and Electrons. The Relativistic Quantum Field Theory of Charged Particles with Spin one – half. Springer – Verlag, 1976. p. 455 – 457.

$$\Gamma(0) = \frac{g_A g_V e}{4\pi^2} \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) \frac{1}{2m} \bar{n}(p-q) i\sigma^{\mu\nu} \epsilon_{\mu} p_\nu \gamma^5 n(p) \quad (4.93)$$

Si comparamos la anterior ecuación, con (4.40) el factor de forma ó el momento dipolar eléctrico del neutrón será:

$$h_A(q^2) = \frac{g_A g_V}{4m\pi^2} e \ln\left(\frac{m}{\mu}\right) \quad (4.94)$$

Donde la masa del protón es $m = 938.27 \text{ Mev}$; la masa del pion $\mu = 139.57 \text{ Mev}$ y las constantes de acople axial y vectorial respectivamente son: $g_A = 13.6$, $g_V < 7 \times 10^{-12}$.

De esta manera hemos obtenido el MDE del neutrón con un valor de

$$de(n) < 9.653 \times 10^{-26} e \text{ cm.}$$

Al comparar este resultado con el valor experimental

$$de(n) < 6.3 \times 10^{-26} e \text{ cm.} \quad ^{27}$$

Podemos ver que al utilizar el modelo sigma lineal obtenemos el momento dipolar eléctrico del neutrón del mismo orden de magnitud que el límite experimental encontrado hasta ahora, por lo cual podemos afirmar que este método es muy efectivo dentro del modelo estándar.

²⁷ S.EIDELMAN. et al. Phys. Lett. B 592, 1 (2004). Particle Data Group. [online]. June 07-2004. Reviewed 2004 by P. J. Mohr and B. N. Taylor. [citado en 2004, 07, 24]. Disponible en Internet: <http://pdg.lbl.gov/>

5. CONCLUSIONES

Haciendo uso del modelo sigma lineal obtuvimos una gran apreciación para el MDE del neutrón con un orden de $10^{-26} e.cm$, que al compararlo con el dato experimental dado en el Particle Data Group tiene el mismo orden de magnitud.

En el modelo estándar, el MDE del neutrón donde están correlacionadas la fase que viola CP y las masas de las partículas intermedias es generado a una magnitud del orden $10^{-31} e.cm$ el cual es extremadamente pequeño que los límites experimentales presentes; sin embargo podemos ver que dicha magnitud no es cero.

El MDE puede surgir como una consecuencia de la violación de la simetría de inversión espacial P, así como de la simetría de inversión temporal T, pero sabemos que P se conserva en interacciones electromagnéticas y es violada en interacciones débiles, por lo tanto el MDE puede surgir del interjuego de las interacciones electromagnéticas y débiles.

Al encontrar un valor diferente de cero para el momento dipolar eléctrico del neutrón se comprueba que las simetrías CP y T son violadas en interacciones débiles y así se confirma que CPT es una buena simetría de la naturaleza.

La existencia de un MDE no únicamente es la evidencia de la violación de la inversión del tiempo, también contribuye al entendimiento de la asimetría materia – antimateria en el universo.

BIBLIOGRAFIA

ASHOKDAS, Thomas Ferbel. Introduction to Nuclear and Particle Physics. University of Rochester. Jhon Wiley & Sons, 1994. p.227-236.

BJORKEN, J.D; DRELL, S.D. Relativistic Quantum Fields. Madrid: Mc graw-Hill company, 1965. p. 190 -230.

BRANCO, G. C.; LAVOURA, L. and SILVA, J. P. CP Violation. No. 103 en International Series of Monographs on Physics. Oxford Science Publications, 1999. p. 15 - 57.

BROMLY; D.A. Quantum Mechanics Symetries. Vol 1.

CHENG, Ta-pei; CLARENDON, Ling-Fong Li. Gauge theory of elementary Particle Physics Press- Oxford, 1984. p. 149-151.

DONOGHUE, J.F; GOLOWICH, E; HOLSTEIN, B.R. Dynamics of the Model Standard. Cambridge University, 1992. p. 251-253.

Electric Multipoles Spherical and Cartesian Forms. (s.l.), (s.f.).[online]. [citado en 2005-03-10]. Disponible en: internet:
http://www.hep.caltech.edu/~peck/lecture_sph_cart_multipoles.pdf. p.1-9

GILMAN, F,J; KLEINKNECHT, K. and RENK, B. The Cabibbo- Kobayashi-Maskawa quark- mixing matrix, 2004, 01. [online]. [citado en 2004, 11, 20]. Disponible en Internet: [http://www-pdg-lbl.gov/2000/Kmmixr pp.pdf](http://www-pdg-lbl.gov/2000/Kmmixr_pp.pdf).

GOMEZ, Joaquín. Partículas Elementales, 2001,06, 06.[online]. [citado en 2004,12,19]. Disponible en Internet:
<http://www.cica.es/aliens/dfamnus/cursos/particulas/apuntes.pdf>. p.40

HALZEN, Francis; MARTIN, Alan D. Quarks and Leptons. An Introductory Course in Modern Particle Physics. New York : John Wiley & Sons, 1983.

JAUCH, J.M; ROHRLICH, F. The Theory of Photons and Electrons. The Relativistic Quantum Field Theory of Charged Particles with Spin one – half. Springer – Verlag, 1976. p. 455 – 457.

KHRIPLOVICH, Iosif B; LAMOREAUX ,Steve k. CP Violation Without Strangeness. New Mexico, USA. Mayo, 1997. p.1-4, 107 – 110.

KIRKBY, D. and NIR, Y. CP violation in meson decays, 2003, 12. [online]. [citado en 2004, 11, 22]. Disponible en Internet: <http://pdg.lbl.gov/2004/reviews/cpviolrpp.pdf>.

MARSHAK, Robert E; RIAZUDIN; RYAN, Ciaran P. Theory of Weak Interactions in Particle Physics. Vol. XXIV. New York : Wiley – Interscience, 1986.p.194 – 101.

MORONES, Rubén. La Simetría izquierda – derecha en la naturaleza. 200, 2, 26. [online]. [citado en 2004, 12, 19]. Disponible en Internet: <http://www.uanl.mx/publicaciones/ciencia-uanl/vol5/2/pdfs/lasimetria.pdf>

OSHIMO, Noriyuki. Neutron electric dipole moment and extension of the standard model. Department of physics Ochanomizu university, Bunkyo – ku, Tokyo 112-8610, Japan. 2001,10,04. [online]. [citado en 2005, 05, 11]. Disponible en Internet: http://arxiv.org/PS_cache/hep-ph/pdf/0110/0110054.pdf

POSPELOV, Maxim; Ritz, Adam. Electric dipole moments as probes of new physics. 2005, 04, 26. [online]. [citado en 2005, 05, 30]. Disponible en Internet: <http://arxiv.org/abs/hep-ph/0504231>

RYDER, Lewis H. Quantum Field Theory. Cambridge University. Segunda edición, 1996. p 308.

S.EIDELMAN et al. Phys. Lett. B 592, 1 (2004). Particle Data Group. [online]. June 07-2004. Reviewed 2004 by P. J. Mohr and B. N. Taylor. [citado en 2004, 07, 24]. Disponible en Internet: <http://pdg.lbl.gov/>

SEPULVEDA, Alonso. Notas de Electrodinámica Clásica. Departamento de Física. Facultad de ciencias exactas y naturales Universidad de Antioquia. Medellín, 1986.p.143-148.

(s.n). Principios de simetría, el universo primitivo. 2002, 12, 16. [online]. [citado 2004, 12, 16]. Disponible en Internet: <http://www.cica.es/aliens/dfamnus/cursos/particulas/>

TANNOUDJI, C. C; DIU, B.; LALÖE, Franck. Quantum Mechanics. Vol.2. New York: Wiley & Sonns, 1977.p. 1067 – 1071.

ANEXOS

Anexo A. Armónicos esféricos. La ecuación de Laplace en coordenadas esféricas es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (\phi\theta) + \frac{1}{r^2 \text{sen}\theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta} (\text{sen}\theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

La solución para la ecuación de Laplace, separando variables en la forma $\phi(r, \theta, \varphi) = U(r)P(\theta)Q(\varphi)/r$; sustituyendo en (A.1) encontramos que la ecuación en el ángulo azimutal φ es

$$\frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + m^2 Q = 0 \quad (\text{A.2})$$

Donde m es una constante de separación, y la ecuación radial es

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - l(l+1) \frac{U}{r^2} = 0 \quad (\text{A.3})$$

Con $l(l+1)$ una segunda constante de separación. La ecuación en el ángulo polar θ es mas complicada

$$\frac{1}{\text{sen}\theta} \frac{d}{d\theta} (\text{sen}\theta \frac{dP}{d\theta}) + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\text{sen}^2 \theta} \right] P = 0 \quad (\text{A.4})$$

Las constantes de separación m y $l(l+1)$ son determinadas con la ayuda de las condiciones de frontera.

La ecuación diferencial en θ es convenientemente estudiada en la variable $x = \cos \theta$, en el intervalo $[-1, 1]$. Para $m=0$, esta es la ecuación de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P = 0 \quad (\text{A.5})$$

Para resolverla, consideramos la solución en series de potencias de la forma

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j. \quad (\text{A.6})$$

- Las usuales condiciones de frontera son que P puede permanecer finito en el punto (correspondiente a $\theta = 0$ y $\theta = \pi$) $x = \pm 1$. Ellos únicamente pueden ser satisfechos si l es un entero positivo o cero.
- Si $\alpha = 0$. Los coeficientes a_j de la serie son encontrados y ellos obedecen a la formula de recurrencia

$$a_{j+2} = \frac{j(j+1) - l(l+1)}{(j+1)(j+2)} a_j \quad (\text{A.7})$$

- Los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad (\text{A.8})$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

- Para probar algunas de las propiedades de P_l es usada la conocida formula de Rodríguez

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (\text{A.9})$$

- La forma mas usada, especialmente en electrostática, es la expansión valida para $|a| < 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{1+a^2-2ax}} = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x) \quad (\text{A.10})$$

Si retomamos la variable θ y también colocamos $a = r'/r$, este es

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta}} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \theta) \quad (\text{A.11})$$

Ó

$$\frac{1}{|x - x'|} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r'}{r}\right)^l P_l(\cos \theta) \quad (\text{A.12})$$

Para algún m , la ecuación diferencial convenientemente estudiada en la variable $x = \cos \theta$, en el intervalo $[-1, 1]$. Esta es la ecuación de asociada de Legendre

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + l(l+1)P - \frac{m^2}{1-x^2} P = 0 \quad (\text{A.13})$$

Consideramos únicamente el caso de m entero y tomamos $m \geq 0$. Entonces

- Las condiciones de frontera usuales son que P puede permanecer finito en los puntos $x=1$ y $x=-1$. Ellos pueden ser satisfechos únicamente si l es un entero positivo o cero, y $m \leq l$.
- Las soluciones pueden ser escritas como series de potencias, pero esto es fácil demostrar de las funciones de Legendre $P_l(x)$ por la formula

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) \quad (\text{A.14})$$

- Para algún l, m par hay dos soluciones, una par en x y otra impar. Si l es un entero una solución es un polinomio de orden $l-m$ en $x = \cos \theta$ veces el factor $\sin^m \theta$. Esta solución la cual tiene paridad $l-m$, es de buena conducta como $x = \pm 1$.
- De la formula de Rodríguez, para $P_l(x)$ uno obtiene en seguida la formula de Rodríguez para P_l^m

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \quad (\text{A.15})$$

- Claramente $P_l^0(x) = P_l(x)$. También, de la formula de Rodríguez:

$$P_l^l(\cos \theta) = (-1)^l \frac{(2l)!}{2^l l!} \text{sen}^l \theta \quad (\text{A.16})$$

$$P_l^{l-1}(\cos \theta) = (-1)^{l-1} \frac{(2l)!}{2^l l!} \text{sen}^l \theta \cos \theta = -\frac{d}{d\theta} P_l^l(\cos \theta) \quad (\text{A.17})$$

- Las primeras funciones asociadas de Legendre con $m > 0$ son

$$\begin{aligned} P_1^1(x) &= -(1-x^2)^{1/2} = -\text{sen} \theta \\ P_2^1(x) &= 3x(1-x^2)^{1/2} = -3 \cos \theta \text{sen} \theta \\ P_2^2(x) &= 3(1-x^2) = 3 \text{sen}^2 \theta \\ P_3^1(x) &= -\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2} = -\frac{3}{2}(5 \cos^2 \theta - 1) \text{sen} \theta \\ P_3^2(x) &= 15x(1-x^2) = 15 \cos \theta \text{sen}^2 \theta \\ P_3^3(x) &= -15(1-x^2)^{3/2} = -15 \text{sen}^3 \theta \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

- Las integrales de ortogonalidad y normalización son

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll} \quad (\text{A.19})$$

La dependencia con θ y φ es al mismo tiempo introduciendo las auto funciones normalizadas:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{A.20})$$

Note que Y_l^m y Y_l^{-m} son auto funciones diferentes relacionadas por:

$$Y_l^{-m} = (-1)^m Y_l^{m*} \quad (\text{A.21})$$

Utilizando valores pequeños de l y valores para $m \geq 0$, de acuerdo con (A.18) los armónicos esféricos son:

$$\begin{aligned}
Y_0^0 &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} & Y_1^1 &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \text{sen}\theta e^{i\varphi} \\
Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} & Y_2^1 &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \text{sen}\theta \cos\theta e^{i\varphi} \\
Y_2^0 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{4\pi}} (3\cos^2\theta - 1) & Y_2^2 &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \text{sen}^2\theta e^{2i\varphi}
\end{aligned} \tag{A.22}$$

A continuación expondremos en forma explícita los momentos multipolares de los primeros términos en coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\text{sen}\varphi \\
x' &= r' \text{sen}\theta' \cos\varphi' \\
y' &= r' \text{sen}\theta' \text{sen}\varphi' \\
z' &= r \cos\theta' \\
r &= x' - iy' = r' \text{sen}\theta' e^{-i\varphi'}
\end{aligned} \tag{A.23}$$

Con lo anterior podemos calcular el potencial, el cual viene expresado de la siguiente forma:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{lm} \frac{1}{2l+1} \frac{q_{lm}}{r'^{l+1}} Y_l^m(\theta, \varphi) \tag{A.24}$$

Anexo B. Simetrías discretas. Para explicar más detalladamente lo que hemos propuesto en el tercer capítulo, recordemos que para discutir sobre simetrías acudimos a la acción: si la acción es invariante bajo una determinada operación de simetría, tenemos una buena simetría de la teoría. Por ejemplo en el marco de teorías de campos locales, para detallar las principales características, la densidad lagrangiana que define la teoría tiene dos partes:

$$L = L_0 + L_{\text{int}} \tag{B.1}$$

L_0 describe campos libres, sin interacción mientras L_{int} describe las interacciones entre los distintos campos. Análogamente la acción queda separada en dos piezas, la parte libre y la parte de interacción:

$$S = \int d^4x L(t, \vec{x}) = S_0 + S_{\text{int}} \tag{B.2}$$

Definimos las operaciones de simetría P y C mediante su actuación sobre los campos libres, de modo que los transformados bajo P y C cumplan las mismas

ecuaciones de movimiento libre. La motivación de esta construcción es la siguiente: tanto la parte libre como la de interacción se pueden expresar en términos de los campos libres, con lo cual abordamos la transformación de todas las piezas de la acción. A continuación detallamos la construcción de las propiedades de transformación de las ecuaciones (3.44) - (3.51).

Un campo cuántico que describe una partícula y su antipartícula se descompone de forma general siguiendo

$$\begin{aligned} \varphi_{\dots}(x) &= \int \frac{d^3 p}{\sqrt{2E_p} (2\pi)^3} \sum_{\sigma} \left(e^{-ip \cdot x} C(\vec{p}, \sigma) a(\vec{p}, \sigma) + e^{ip \cdot x} C'(\vec{p}, \sigma) b^+(\vec{p}, \sigma) \right) \\ &\equiv \sum \left(e^{-ip \cdot x} C(\vec{p}, \sigma) a(\vec{p}, \sigma) + e^{ip \cdot x} C'(\vec{p}, \sigma) b^+(\vec{p}, \sigma) \right) \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

a y b son los operadores de aniquilación de partículas y antipartículas (respectivamente). \vec{p} es el momento y σ la tercera componente del momento angular. Los coeficientes C y C' indican la representación de L^{\dagger}_+ (grupo propio ortocrono de Lorentz) bajo la que se transforma el campo: $C = C' = 1$ para un campo escalar, espinores (de Dirac, Weyl o Majorana) para un campo de espín $\frac{1}{2}$, vectores de polarización para un campo de espín 1. Bajo C, P y T los operadores de creación o destrucción se transforman según

$$\begin{aligned} Pa(\vec{p}, \sigma)P^{-1} &= e^{i\varphi_P} a(-\vec{p}, \sigma) & , & & Pb^+(\vec{p}, \sigma)P^{-1} &= e^{i\varphi_P} b^+(-\vec{p}, \sigma) \\ Ca(\vec{p}, \sigma)C^{-1} &= e^{i\varphi_C} a(\vec{p}, \sigma) & , & & Cb^+(\vec{p}, \sigma)C^{-1} &= e^{i\varphi_C} b^+(\vec{p}, \sigma) \\ Ta(\vec{p}, \sigma)T^{-1} &= (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi_T} a(-\vec{p}, -\sigma) & , & & Tb^+(\vec{p}, \sigma)T^{-1} &= (-1)^{j-\sigma} e^{i\varphi_T} b^+(-\vec{p}, -\sigma) \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

La transformación del campo $\varphi_{\dots}(x)$ se obtiene a partir de (B.4) y de las relaciones existentes entre $\{C(\vec{p}, \sigma), C'(\vec{p}, \sigma)\}$, $\{C(-\vec{p}, \sigma), C'(-\vec{p}, \sigma)\}$ y $\{C(-\vec{p}, -\sigma), C'(-\vec{p}, -\sigma)\}$. El caso más sencillo es el de un campo escalar, para el que $C = C' = 1$:

$$\phi(x^\alpha) = \sum \left(e^{-ip \cdot x} a(\vec{p}) + e^{ip \cdot x} b^+(\vec{p}) \right) \quad (\text{B.5})$$

$$P\phi(x^\alpha)P^{-1} = \sum \left(e^{-ip \cdot x} a(-\vec{p}) + e^{ip \cdot x} b^+(-\vec{p}) \right) e^{i\varphi_P}$$

Cambiando la variable de integración $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ y empleando $p \cdot x = p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x} \xrightarrow{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}} p \cdot (Px)$ (con $x_\alpha = Px^\alpha$) tenemos:

$$\begin{aligned}
P\phi(x^\alpha)P^{-1} &= \sum (e^{-ip.Px}a(\vec{p}) + e^{ip.Px}b^+(\vec{p}))e^{i\varphi_P} \\
&= e^{i\varphi_P}\phi(x_\alpha)
\end{aligned}
\tag{B.6}$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned}
C\phi(x^\alpha)C^{-1} &= \sum (e^{-ip.x}b(\vec{p}) + e^{ip.x}a^+(\vec{p}))e^{i\varphi_C} \\
&= e^{i\varphi_C}\phi^+(x^\alpha)
\end{aligned}
\tag{B.7}$$

Y

$$T\phi(x^\alpha)T^{-1} = \sum (e^{+ip.x}a(-\vec{p}) + e^{-ip.x}b^+(-\vec{p}))e^{i\varphi_T} \tag{B.8}$$

De nuevo cambiamos $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ y $p.x = p^0 x^0 - \vec{p}.\vec{x} \xrightarrow{\vec{p} \rightarrow -\vec{p}} -p.(Tx)$ (con $-x_\alpha = Tx^\alpha$) y obtenemos

$$T\phi(x^\alpha)T^{-1} = e^{i\varphi_T}\phi(-x_\alpha) \tag{B.9}$$

Tras el caso escalar veamos lo que ocurre con un campo vectorial $V^\mu(x)$; C y C' son ahora vectores de polarización (si describiéramos un campo vectorial sin masa, la polarización $\sigma = 0$ no aparecería):

$$V^\mu(x) = \sum (e^{-ip.x}\varepsilon^\mu(\vec{p},\sigma)a(\vec{p},\sigma) + e^{ip.x}\varepsilon^{\mu*}(\vec{p},\sigma)b^+(\vec{p},\sigma)) \tag{B.10}$$

Los vectores de polarización son $\varepsilon^\mu(\vec{p},\sigma) = L_\nu^\mu(\vec{p})\varepsilon^\mu(\vec{0},\sigma)$ con $L_\nu^\mu(\vec{p})$ que transforma $\vec{p} = \vec{0} \rightarrow \vec{p}$ y

$$\varepsilon^\mu(\vec{0},0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \varepsilon^\mu(\vec{0},+1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \varepsilon^\mu(\vec{0},-1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}
\tag{B.11}$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores y

$$L_\nu^\mu(-\vec{p}) = P_\alpha^\mu L_\beta^\alpha(-\vec{p})P_\nu^\beta \quad \text{con} \quad P_\alpha^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{B.12}$$

Resulta

$$\varepsilon^\mu(-\vec{p}, \sigma) = -\varepsilon^\mu(\vec{p}, \sigma) \quad (-1)^{1+\sigma} \varepsilon^{\mu*}(-\vec{p}, -\sigma) = \varepsilon_\mu(\vec{p}, \sigma) \quad (\text{B.13})$$

Empleando (B.13),

$$\begin{aligned} PV^\mu(x^\alpha)P^{-1} &= \sum (e^{-ip \cdot x} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \sigma) a(-\vec{p}, \sigma) + e^{ip \cdot x} \varepsilon^{\mu*}(\vec{p}, \sigma) b^+(-\vec{p}, \sigma)) e^{iv_p} \\ &= -e^{iv_p} V_\mu(x_\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} CV^\mu(x^\alpha)C^{-1} &= \sum (e^{-ip \cdot x} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \sigma) b(\vec{p}, \sigma) + e^{ip \cdot x} \varepsilon^{\mu*}(\vec{p}, \sigma) a^+(\vec{p}, \sigma)) e^{iv_c} \\ &= -e^{iv_c} V^{\mu+}(x^\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} TV^\mu(x^\alpha)T^{-1} &= \sum (e^{ip \cdot x} (-1)^{1-\sigma} \varepsilon^{\mu*}(\vec{p}, \sigma) a(-\vec{p}, -\sigma) + e^{-ip \cdot x} (-1)^{1-\sigma} \varepsilon^\mu(\vec{p}, \sigma) b^+(-\vec{p}, -\sigma)) e^{iv_t} \\ &= e^{iv_t} V_\mu(-x_\alpha) \end{aligned}$$

(B.14)

Además de los campos escalares y vectoriales tiene gran interés, teniendo en cuenta el contenido material del modelo estándar, abordar la transformación de un campo de Dirac de espín $\frac{1}{2}$. De todas las representaciones del grupo de Lorentz, la introducida por Dirac en su teoría del electrón tiene especial interés.

A partir de matrices γ^μ que formen un álgebra (de Clifford) dada por:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (\text{B.15})$$

podemos definir los generadores $J^{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ de modo que se cumple la relación requerida:

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\mu\nu} J^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} + g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho}) \quad (\text{B.16})$$

Existe automáticamente una transformación de paridad dada por γ^0 :

$$\begin{aligned} \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} &\Rightarrow \gamma^0 \gamma^i \gamma^0 = \gamma^0 \gamma^i (\gamma^0)^{-1} = -\gamma^i \\ &\gamma^0 \gamma^0 (\gamma^0)^{-1} = \gamma^0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

También emplearemos $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\frac{i}{4!}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma$, que cumple $\gamma_5^2 = 1$ y $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$. De forma general (para cualquier representación obtenida mediante una transformación de semejanza $O\gamma^\mu O^{-1}$) existen matrices A y C no singulares tales que

$$A\gamma_\mu A^{-1} = \gamma_\mu^+ \quad C\gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^t \quad (\text{B.18})$$

Con $A = A^+$, $C^t = -C$ y $CA^*C^*A = 1$. Con ello

$$\begin{aligned} A\gamma_5 A^{-1} &= -\gamma_5 & C\gamma_5 C^{-1} &= \gamma_5^t \\ A\sigma_{\mu\nu} A^{-1} &= \sigma_{\mu\nu}^+ & C\sigma_{\mu\nu} C^{-1} &= -\sigma_{\mu\nu}^t \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

La descomposición de un campo de Dirac es:

$$\psi(x) = \sum (e^{-ip \cdot x} u(\vec{p}, \sigma) a(\vec{p}, \sigma) + e^{ip \cdot x} v(\vec{p}, \sigma) b^\dagger(\vec{p}, \sigma)) \quad (\text{B.20})$$

Las relaciones de internas para los espinores u y v son:

$$\begin{aligned} u(-\vec{p}, \sigma) &= \gamma^0 u(\vec{p}, \sigma) & (-1)^{1/2-\sigma} u^*(-\vec{p}, -\sigma) &= \gamma_0^* \gamma_5^* (CA^t)^{-1} u(\vec{p}, \sigma) \\ v(-\vec{p}, \sigma) &= \gamma^0 v(\vec{p}, \sigma) & (-1)^{1/2-\sigma} v^*(-\vec{p}, -\sigma) &= \gamma_0^* \gamma_5^* (CA^t)^{-1} v(\vec{p}, \sigma) \\ u^*(\vec{p}, \sigma) &= -(CA^t)^{-1} v(\vec{p}, \sigma) & v^*(\vec{p}, \sigma) &= -(CA^t)^{-1} u(\vec{p}, \sigma) \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Empleando (B.21),

$$\begin{aligned}
P\psi(x^\alpha)P^{-1} &= \sum (e^{-ip \cdot x} u(\vec{p}, \sigma) a(-\vec{p}, \sigma) + e^{ip \cdot x} v(\vec{p}, \sigma) b^+(-\vec{p}, \sigma)) e^{i\psi_P} \\
&= e^{i\psi_P} \gamma_0 \psi(x_\alpha) \\
C\psi(x^\alpha)C^{-1} &= \sum (e^{-ip \cdot x} u(\vec{p}, \sigma) b(\vec{p}, \sigma) + e^{ip \cdot x} v(\vec{p}, \sigma) a^+(\vec{p}, \sigma)) e^{i\psi_C} \\
&= e^{i\psi_C} C \bar{\psi}^t(x^\alpha) \\
T\psi(x^\alpha)T^{-1} &= \sum (e^{ip \cdot x} (-1)^{1/2-\sigma} u^*(\vec{p}, \sigma) a(-\vec{p}, -\sigma) + e^{-ip \cdot x} (-1)^{1/2-\sigma} v^*(\vec{p}, \sigma) b^+(-\vec{p}, -\sigma)) e^{i\psi_t} \\
&= e^{i\psi_t} \gamma_0^* \gamma_5^* (CA^t)^{-1} \psi(-x_\alpha)
\end{aligned} \tag{B.22}$$

En las representaciones habituales (Dirac, Weyl o Majorana),

$$\gamma_0 = \gamma_0^+ \quad \gamma_i^+ = -\gamma_i \quad \Rightarrow \quad A = \gamma_0 \tag{B.23}$$

En la representación de Weyl, $C = i\gamma_0\gamma_2$.