Universidad de Nariño

Vicerrectoría de Investigaciones e Interacción Social -VIIS

Ceros de Textura en el Sector Leptónico

INFORME PROYECTO DE INVESTIGACIÓN

Presentado por:

Yithsbey Giraldo Usuga

Acuerdo No 024
(Abril 14 de 2016)

San Juan de Pasto, Nariño, Colombia
2021

Ceros de Textura en el Sector Leptónico

Yithsbey Giraldo*
Departamento de Física, Universidad de Nariño y Vicerrectoría de Investigaciones e Interacción Social, A.A. 1175, San Juan de Pasto, Colombia
(Dated: 21 de junio de 2021)

En la presente investigación hemos considerado la posibilidad física de que los neutrinos sean partículas de Dirac. Por lo que hemos extendido el Modelo Estándar para incluir los singletes de quiralidad derecha de los neutrinos. En consecuencia, el análisis de este sector lleva a un cierto paralelismo entre los quarks y los leptones. Aprovechando esta similitud, podemos hacer un estudio de ceros de textura en el sector leptónico, similar al que se hace en el sector de quarks, aprovechando resultados y teoremas presentes en este último caso. Claro que también hay diferencias: en el sector leptónico los neutrinos podrían ser de Majorana, y a diferencia del sector de quarks, no se dispone de datos experimentales de las masas de los neutrinos; solo de las diferencias de los cuadrados de sus masas para la jerarquía normal o invertida. Así, que el sector leptónico es más rico en predicciones, pues uno de los resultados más relevantes de nuestra investigación es la predicción de las masas de los neutrinos para la jerarquía normal, con un resultado ponderado del orden de (3.7 ± 0.2) meV para la masa del neutrino más liviano.

1. Introducción

Este informe es una recopilación de lo que hemos trabajado a lo largo de estos años relacionado con los ceros de textura presentes en las matrices de masa del sector de quarks y leptónico, todo enmarcado dentro del Modelo Estándar (ME) y sus extensiones [8, 51–54, 56]. En el tratamiento que daremos a continuación, se empezará con el sector de quarks, incluyendo los desarrollos y avances que se han hecho al respecto, para luego finalizar con el sector leptónico. Algunas de las explicaciones incluirán apéndices cuando se necesiten cálculos adicionales a fin de comprender la teoría. Este trabajo incluye también una extensa bibliografía.

El ME de las interacciones fuerte y electrodébil [27] basado en el grupo gauge local $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$, donde la simetría no rota $SU(3)_c$ está confinada y el sector electrodébil $SU(2)_L \times U(1)_Y$ se rompe espontáneamente a $U(1)_{em}$, a través de un doblete escalar de Higgs complejo; es un modelo que ha sido muy exitoso en explicar varias cuestiones experimentales. Algunas de las preguntas del modelo sin respuesta, son sobre la explicación del número total de familias de partículas presentes en la naturaleza, la jerarquía del espectro de masas de los fermiones cargados, los ángulos de mezcla de quarks y leptones, y el origen de la violación de la simetría carga-paridad (CP). Otras cuestiones importantes son sobre la existencia de la energía y materia oscura, y las pequeñas magnitudes de las masas de los neutrinos y sus oscilaciones. A fin de responder algunas de estas preguntas, enfocamos nuestro estudio por el lado de los ceros de textura. La razón de tratar los ceros de textura en el ME y sus extensiones, es simplificar al máximo el número de parámetros libres que nos permitan ver relaciones entre masas y mezclas presentes en cada sector de fermiones, y hacer predicciones sobre las masas de algunas partículas cuyos valores no se conocen actualmente. El análisis de la idea se remonta a los trabajos pioneros de H. Fritzsch y S. Weinberg [34–36, 42, 104], pasando por el trabajo seminal de Ramond, Robert y Ross [66, 87], y más reciente, tenemos un análisis completo y exhaustivo del caso de cinco ceros de textura, incluyendo los fenómenos de violación CP, reportados en las referencias [51, 56, 85].

Adicionalmente, en nuestro trabajo vamos a considerar que los neutrinos son partículas de Dirac, así que existe una relación muy estrecha del análisis metodológico llevado a cabo en la determinación de masas y mezclas en el sector de quarks, para trasladarlo al sector leptónico. Específicamente, el análisis de ceros de textura aplicado al sector de quarks se puede implementar de manera similar en el sector leptónico. El Lagrangiano de Yukawa es el responsable de dar masa a los fermiones del ME tras la ruptura espontánea de simetría. Una primera simplificación, sin perder generalidad, es considerar que las matrices de masa de los fermiones son hermíticas, por lo que el número de parámetros libres para cada sector de quarks y leptones es de 18, que son suficientes para reproducir los datos experimentales disponibles en la literatura científica. Sin un Modelo para hacer predicciones, se pueden utilizar simetrías discretas o continuas para prohibir algunos componentes en la matriz de Yukawa generando los llamados ceros de textura en la matriz de masa [55]. En muchos trabajos, en lugar de proponer simetrías discretas o continuas, se proponen ceros de textura como alternativas prácticas directas. Este enfoque tiene como ventaja que es posible elegir la matriz de masa óptima para el tratamiento analítico del problema, a la vez que se consigue ajustar los ángulos de mezcla y las masas de los fermiones.

En la literatura hay muchas propuestas de texturas de cinco ceros para las matrices de masa de los quarks del

* E-mail: yithsbey@gmail.com

ME [25, 42, 75, 85, 101, 105] [1]. Varias de estas texturas reproducen con éxito las cantidades físicas medidas experimentalmente. Resulta entonces pertinente hacer una presentación primero de los ceros de textura, análisis y resultados, en el sector de quarks.

I. SECTOR DE QUARKS

El lagrangiano de Yukawa, es el responsable de dar masa a los fermiones del ME tras la ruptura espontánea de la simetría electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_X \to U(1)_Y$.

$$-\mathcal{L}_M = \bar{u}_R M_u u_L + \bar{d}_R M_d d_L + h.c. \tag{1.1}$$

Aquí, las matrices de masa complejas 3×3 de los quarks M_u y M_d son arbitrarias, y contienen en principio treintaiséis (36) parámetros reales, que es mucho mayor que los diez (10) observables físicos que deben describir: seis (6) masas de los quarks, tres (3) ángulos de mezcla de sabor y una (1) fase que viola la simetría CP. Sin embargo, modelos como el ME (o sus extensiones) donde los campos derechos son singletes de $SU(2)$, siempre es posible escoger una base adecuada para los quarks derechos, de tal manera que, usando el *teorema de la descomposición polar* del álgebra matricial, las matrices de masa de tipo "up" y "down" quedan hermíticas [42, 46, 51, 61, 75, 110] (ver Apéndice B, para una demostración formal de este resultado).

$$M_u^\dagger = M_u, \quad \text{y} \quad M_d^\dagger = M_d. \tag{1.2}$$

Otra consecuencia de modelos como el ME es que uno tiene la libertad de hacer una transformación unitaria sobre los quarks izquierdos y derechos bajo los cuales las corrientes gauge son invariantes y, como resultado, las matrices de masa transforman a nuevas matrices equivalentes, de la siguiente manera (ver discusión en el Apéndice C).

$$M_u \to M_u' = U^\dagger M_u U, \quad M_d \to M_d' = U^\dagger M_d U, \tag{1.3}$$

donde U es una matriz unitaria arbitraria que preserva la hermiticidad de las matrices de masa, ecuaciones (1.2), y deja invariante las cantidades físicas, incluyendo la matriz de mezcla de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa (CKM) (en el apéndice A se da la forma de esta matriz y los valores experimentales de sus entradas). Esta transformación unitaria común aplicada a M_u y M_d, ecuación (1.3), se conoce como Transformación de "Base Débil" (WBT por sus siglas en inglés) [8, 14, 42, 98, 106, 111].

Como se demostró en [51, 54], para un conjunto dado de masas de quarks, ángulos de mezcla y la fase de violación CP, todas las matrices de masa consistentes con estos valores experimentales son unitariamente equivalentes. Este resultado puede utilizarse para calcular el número máximo de ceros de la textura, ya que este teorema garantiza que utilizando la WBT es posible alcanzar todos los ceros físicos y no físicos consistentes con los datos experimentales [14, 51] (Apéndice C). Una aplicación útil de la WBT permite escribir de manera general, y de la siguiente forma las matrices de masa de los quarks:

$$\begin{aligned} M_u &= D_u = \begin{pmatrix} \lambda_{1u} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2u} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3u} \end{pmatrix}, \\ M_d &= V D_d V^\dagger, \end{aligned} \tag{1.4a}$$

o

$$\begin{aligned} M_u &= V^\dagger D_u V, \\ M_d &= D_d = \begin{pmatrix} \lambda_{1d} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{2d} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{3d} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.4b}$$

donde $V = U_u^\dagger U_d$ es la matriz de mezcla CKM, y U_u y U_d son las matrices de diagonalización de M_u y M_d respectivamente. Y los valores propios de las masas de los quarks λ_{iq} $(i = 1, 2, 3)$ para los tipos "up-" $(q = u)$ y "down-" $(q = d)$ satisfacen

$$\begin{aligned} |\lambda_{1u}| = m_u, |\lambda_{2u}| = m_c, |\lambda_{3u}| = m_t, \\ |\lambda_{1d}| = m_d, |\lambda_{2d}| = m_s, |\lambda_{3d}| = m_b. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Así que los λ_{iq} pueden ser positivos o negativos [14] (ver apéndice D) y obedecen la jerarquía,

$$|\lambda_{1q}| \ll |\lambda_{2q}| \ll |\lambda_{3q}|. \tag{1.6}$$

Las bases (1.4a) y (1.4b) se obtienen a partir de una WBT sobre las matrices generales de masa de los quarks [51, 53, 54]. En esta base se puede verificar fácilmente que las matrices de masa son consistentes con la matriz de mezcla CKM (V), con las masas de los quarks, y donde se puede ver con claridad la presencia de tres ceros de textura, no físicos, en una de las matrices de masa [14, 41, 92].

La hermiticidad de las matrices de masa de los quarks M_u y M_d, expresiones (1.2), reduce el número de parámetros libres de 36 a 18 que, sin embargo, sigue siendo un valor grande en comparación con el número de observables. Con la idea de reducir el número de parámetros libres, Weinberg y Fritzsch [34–36, 104] iniciaron la idea de ceros de textura específicos sobre las matrices de masa para que, por un lado, pueda dar lugar a relaciones autoconsistentes y experimentalmente favorables entre las masas de quarks y los parámetros de mezcla de sabores, mientras que, por otro lado, las simetrías discretas (o continuas) ocultas de sabor en tales texturas, puedan finalmente suministrar pistas del origen de las escalas de energía en el sector de quarks del ME, como simetrías residuales de simetrías más fundamentales a escalas energía más altas.

---

[1] Las texturas de seis ceros ya han sido descartadas porque sus predicciones están fuera de los rangos experimentales permitidos. Para una discusión más detallada ver las referencias citadas anteriormente.

A fin de estudiar los diversos casos específicos de texturas, empecemos con las matrices hermíticas de masa de los quarks, de tipo Fritzsch, con seis ceros de textura [35, 43], donde ambas matrices, M_u y M_d, tienen el paralelismo de textura "up-down" cada una con tres ceros. Este tipo de ansatz fue descartado debido al valor demasiado grande de la masa del quark "t", de tal manera que la predicción $|V_{cb}|$ está muy lejos de los datos experimentales [28, 43, 61]. Además, la magnitud prevista para $|V_{ub}/V_{cb}| = \sqrt{m_u/m_c}$ es demasiado pequeño ($V_{ub}/V_{cb} \approx 0.05$ para valores razonables de las masas de los quarks m_u y m_c [107]) para concordar con el resultado experimental ($|V_{ub}/V_{cb}|_{\text{exp.}} \approx 0.09$ [21, 60, 95]).

La literatura original sobre las texturas con cinco ceros ha sido estudiada ampliamente, pero estos Ansatz iniciales no se ven favorecidos actualmente por los datos experimentales [14, 25, 31, 61, 79, 88, 92, 93]. Estudios recientes muestran que otras texturas de cinco ceros son viables. Algunos ejemplos analíticos y numéricos fueron reportados en [51, 75, 84, 85, 101], que reproducen las masas de los quarks y la matriz CKM con suficiente precisión, con desviaciones por debajo de 1σ. En general, hay varias técnicas para analizar ceros de textura: en algunos casos se usan aproximaciones algebraicas que aprovechan la fuerte jerarquía de las masas de los quarks y los ángulos de mezcla que motivan ciertas texturas [37, 43], o se hacen cálculos directos sobre propuestas de ceros de textura que son analizadas analítica y numéricamente para verificar su viabilidad [61, 84, 101]. Parte del análisis del sector leptónico la haremos en este último sentido. Adicionalmente, una manera muy elegante es aplicar WBT's a fin de lograr texturas de ceros físicos y no físicos en las matrices de masa [14, 51]. En general, nuestro trabajo apunta a trabajar con la WBT. Comenzaremos con el método presentado en el paper [51]; y durante el proceso, mejoraremos la técnica y exploraremos la posibilidad de encontrar más modelos viables de matrices de masa con cinco ceros de textura.

II. SECTOR LEPTÓNICO

Para el análisis de neutrinos, la situación es más compleja porque se deben considerar tres escenarios diferentes: neutrinos de Majorana de quiralidad izquierda, seesaw tipo I y neutrinos puros de Dirac. En el caso de que los neutrinos del ME no tengan masa, la forma más sencilla de proporcionarles masa es introduciendo un doblete escalar $SU(2)_L$ que desarrolle un valor esperado de vacío (VEV), lo que implica la existencia de tres campos de Majorana izquierdos, y un Majorón que podría ser difícil de ver. Un análisis exhaustivo de texturas de cinco ceros relacionado con esta matriz de masa de neutrinos izquierdo 3×3 se ha presentado en la referencia [33], complementado con un trabajo más reciente en la referencia [17]. Cuando el ME se amplía para incluir tres neutrinos derechos, el modelo se puede utilizar para explicar las masas de neutrinos a través del mecanismo de seesaw tipo I. Entonces, la matriz de masa efectiva de los neutrinos ligeros de Majorana viene dada por $M \sim M_D M_R^{-1} M_D^T$ donde M_D y M_R son las matrices de masa 3×3 de Dirac y de neutrinos de Majorana de quiralidad derecha (RH por sus siglas en inglés), respectivamente. Para este caso, el análisis de textura se vuelve más complicado, aunque esta textura se puede imponer directamente sobre la matriz de masa de neutrinos livianos 3×3. Sin embargo, en el contexto del mecanismo de seesaw tipo I, dado que la matriz de masa ligera es el producto de la matriz de masa de Dirac y la matriz de masa de neutrinos RH, es natural considerar ceros de textura en ambas matrices. El análisis de este caso se ha presentado con todo detalle en la referencia [72]. Para el caso de solo masas de neutrinos de Dirac, que abordaremos en este estudio, basado en parte en un estudio previo que ya ha sido reportado en la referencia [17] y en el que también se consideraron matrices de masas hermíticas. La extensión del ME con tres neutrinos derechos (SMRHN por sus siglas en inglés) proporciona varias características útiles: a) permite la introducción de nueve términos complejos de masa de Dirac adicionales en el sector leptónico neutro [83]; b) permite la implementación del mecanismo de seesaw [9, 49, 59, 81, 82, 91, 108], y c) es propicio para realizar un análisis con matrices de masa hermíticas en el sector leptónico del modelo (ver apéndice B). Aunque las dos primeras características se han explorado ampliamente en la literatura, la última rara vez se ha considerado. Uno de los propósitos de este estudio es analizar las consecuencias matemáticas y numéricas de la tercera característica mencionada anteriormente.

Existen motivaciones teóricas para asumir masas de Dirac para los neutrinos. Las masas de neutrinos de Dirac también son útiles para generar la asimetría bariónica a través de leptogénesis [26], y se trata de un enfoque alternativo al mecanismo de seesaw [102], y correcciones radiativas de las masas de neutrinos [10–12, 18, 19, 67, 76–78, 90, 103, 109], además de otras motivaciones fenomenológicas [23, 64]. En los modelos derivados de la teoría de cuerdas, las masas de Majorana son suprimidas por reglas de selección relacionadas con las simetrías subyacentes [4, 71]. En estos modelos, las masas de Majorana también pueden ser generadas por neutrinos activos a través de efectos gravitacionales; sin embargo, estas masas son muy pequeñas, cuando se comparan con las pequeñas escalas de la física de neutrinos [6, 29]. Las propiedades electromagnéticas del neutrino de Dirac se pueden comprobar fácilmente debido al momento dipolar magnético que es diferente de cero a nivel cuántico [15]. No ocurre lo mismo con los neutrinos de Majorana, para los que sus propiedades electromagnéticas no son fáciles porque son sus propias antipartículas. De este modo, los modelos teóricos con neutrinos de Dirac son una motivación para refinar las restricciones electromagnéticas de las propiedades de los neutrinos.

La textura de la matriz de masa de los neutrinos de Dirac ha sido objeto de varios estudios recientes [1–3, 7, 17, 32, 48, 62, 73, 74, 94, 97, 99]; esto, en parte, ha sido motivado por la no observación de la desintegración beta doble sin neutrinos [24]. Como es bien sabido, los experimentos existentes no han podido determinar si los neutrinos son partículas de Majorana o de Dirac; sin embargo, la mayoría de los trabajos sobre estos temas asumen que los neutrinos son de Majorana, mientras que el caso de las masas de neutrinos de Dirac no se ha estudiado en detalle. En este estudio asumimos que los neutrinos son partículas de Dirac [5, 22, 83], lo que nos permite usar la WBT, el teorema de la descomposición polar y los datos experimentales más recientes para hacer predicciones basadas en una textura dada para las matrices de masa leptónicas. Es interesante determinar las consecuencias de una textura dada en la predicción de las masas de los neutrinos; de hecho, para las masas de Majorana, hay varios trabajos que predicen una masa de unos pocos milielectronvoltios para la masa del neutrino más liviano [38–40, 44]; y como veremos, este valor de masa tiene el mismo orden de magnitud que los resultados presentados en este trabajo.

En el SMRHN y prohibiendo masas de Majorana fundamentales para los estados neutros derechos (obtenida solo asumiendo la conservación del número leptónico), los términos de masa de los leptones después del rompimiento espontáneo de la simetría local vienen dados por

$$-\mathcal{L}_D = \bar{\nu}_L M_n \nu_R + \bar{\ell}_L M_\ell \ell_R + \text{h.c}, \qquad (2.1)$$

donde $\nu_{L,R} = (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)^T_{L,R}$ y $\ell_{L,R} = (e, \mu, \tau)^T_{L,R}$ (el superíndice T significa transpuesta). M_n y M_ℓ son las matrices de masa complejas 3×3 para el sector de los leptones neutros y cargados, respectivamente. En el caso más general, estas matrices contienen 36 parámetros libres. Siguiendo la misma filosofía del sector de quarks, en el contexto del SMRHN, un número tan grande de parámetros puede reducirse drásticamente haciendo uso del teorema polar del álgebra matricial, por el cual, siempre se puede descomponer una matriz compleja general como el producto de una matriz hermítica y una matriz unitaria (ver apéndice B); de esta manera, la matriz unitaria puede ser absorbida en una redefinición de las componentes leptónicas derechas, y esto reduce inmediatamente el número de parámetros libres de 36 a 18 (los otros dieciocho parámetros pueden quedar ocultos en las componentes leptónicas derechas en el contexto del ME y algunas de sus extensiones, pero no para las extensiones simétricas izquierda-derecha). Por lo tanto, en lo que respecta a este modelo, podemos tratar sin pérdida de generalidad a M_n y M_ℓ, como dos matrices de masa hermíticas, con 18 parámetros reales en total, de los cuales seis son fases.

Como se ha mencionado anteriormente, ampliamos el ME para incluir a los neutrinos derechos y los consideramos partículas de tipo Dirac. Así, el mecanismo implementado en el sector de los quarks puede ser transferido con pocas modificaciones directamente al sector de los leptones. Entonces, en el contexto del SMRHN, siempre es posible implementar el llamado método WBT [13, 14, 51, 84]. Para este caso, la WBT es una transformación unitaria que actúa simultáneamente sobre las matrices de masa leptónicas neutras y cargadas. Es decir,

$$M_n \to M_n' = U M_n U^\dagger, \qquad M_\ell \to M_\ell' = U M_\ell U^\dagger, \qquad (2.2)$$

donde U es una matriz unitaria arbitraria. Decimos entonces que las dos representaciones (M_n, M_ℓ) y (M_n', M_ℓ') son equivalentes, en el sentido de que tienen asociada la misma matriz de mezcla de sabor de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (la matriz de mezcla PMNS). Este tipo de transformación juega un papel importante en el estudio del llamado problema del sabor.

En las referencias [13, 14], se demostró que para matrices de masa hermíticas, siempre es posible realizar una WBT de tal manera que se llega a dos matrices de masa con tres ceros de textura que no tienen ninguna implicación física. Con estos tres ceros de textura no físicos, el número de parámetros libres de M_n y M_ℓ se reduce de doce a nueve parámetros reales y de seis a tres fases, lo suficiente para ajustar los valores físicos de las seis masas leptónicas de Dirac, los tres ángulos de mezcla y la fase de violación de CP. Sin embargo, para el caso de los neutrinos, sus masas no se conocen, y solo las diferencias de las masas al cuadrado están disponibles experimentalmente, es decir, para el caso de la jerarquía normal conocemos las cantidades $\delta m^2_{21} = m_2^2 - m_1^2$ y $\delta m^2_{31} = m_3^2 - m_1^2$. Como se explica en el Apéndice B, para matrices de masa complejas generales 3×3 en el sector leptónico, sin perder generalidad y después de todas las consideraciones teóricas, nos quedamos con 9 parámetros libres reales y 3 fases, contra 8 restricciones experimentales más una fase de violación CP. Para asegurar predicciones, el número de variables debe ser menor que el número de restricciones, por lo que es necesario incluir un cero de textura adicional (totalizando cuatro ceros de textura) a fin de lograr predicciones, incluida la masa del neutrino más liviano (para una revisión sobre estos temas, se puede consultar [42]). En este caso la solución está garantizada, ya que tenemos 8 valores experimentales más la fase de violación CP, y 7 parámetros reales libres y 2 fases. Al imponer un segundo cero de textura (es decir, para un total de cinco ceros de textura), se requieren matrices de masa altamente no triviales, ya que podría haber más restricciones experimentales que parámetros disponibles. Dado el pequeño número de ansatz para ajustar los datos, podemos considerar nuestras soluciones como un conjunto muy representativo de las matrices de masa con cinco ceros de textura. Así que un quinto cero de textura debería proporcionarnos una predicción física, y un posible sexto cero de textura nos proporcionaría dos predicciones (al contar los grados de libertad, encontramos que el número máximo de tales ceros de textura, consistente con la ausencia de un valor propio de masa cero y un espectro de masas no degenerado en el sector leptónico, es de sólo seis, tres en el sector neutro y tres en el sector cargado).

En el análisis de resultados que veremos más adelante en la sección 3, utilizaremos los ingredientes del ME que incluyen un único doblete complejo de Higgs, ampliado con tres neutrinos derechos (uno por cada familia) para dotar al sector neutro de masas de Dirac, y una simetría desconocida que es capaz de producir cinco ceros de textura en el sector leptónico. Se van a considerar dos casos: uno con tres ceros de textura en el sector leptónico neutro y dos en el cargado, y un segundo caso con dos ceros de textura en el sector leptónico neutro y tres en el cargado. Se implementarán dos análisis diferentes, uno para cada situación. Se presentarán los resultados analíticos y numéricos, teniendo especial cuidado en acomodar los últimos datos experimentales disponibles [95], incluyendo el fenómeno de violación CP.

2. Metodología

La metodología planteada en esta investigación consistió básicamente en explorar la máxima cantidad de ceros de textura que pueden tener las matrices de masa del sector de quarks y leptónico del ME y sus extensiones. Específicamente, en la parte leptónica se extendió el ME para incluir neutrinos de Dirac. Lo modelos propuestos deben ser consistentes, en el sentido que deben reproducir los resultados experimentales más recientes de los ángulos de mezcla, la fase responsable de la violación CP y las masas de las partículas. Además, los modelos propuestos pueden hacer predicciones, como por ejemplo, la relación existente entre las masas y ángulos de mezcla, y el valor de las masas desconocidas de algunas partículas como los neutrinos.

El procedimiento para verificar la validez de los modelos propuestos y los ceros de textura considerados, se hizo específicamente recurriendo al método de la WBT [14] y al teorema desarrollado en [51, 54] (el apéndice C tiene un resumen de dicho teorema). También utilizamos, pero en menor medida, el método alternativo de los mínimos cuadrados para la minimización de la función χ^2, que compara los valores experimentales y sus incertidumbres respecto de los parámetros libres del modelo. Este último método tiene la dificultad de reproducir únicamente los valores absolutos de las entradas de la matriz de mezcla CKM y PMNS, sin tomar en cuenta la fase responsable de la violación CP. Por lo que se debe tomar en cuenta y reproducir, adicionalmente, la cantidad invariante de Jarlskog J.

Como veremos a continuación se lograron obtener cinco ceros textura para las matrices de masa de los quarks y leptones. Los resultados son consistentes, con desviaciones menores a 1σ, y arrojan predicciones.

3. Resultados

III. SECTOR DE QUARKS

Empecemos con el sector de quarks. Haremos un análisis exhaustivo que nos permitirá encontrar cuatro modelos consistentes con cinco ceros de textura. Las predicciones están relacionadas con las masas y las entradas de la matriz de mezcla CKM. Las predicciones tienen que ver con los términos que más contribuyen a esta mezcla, donde las masas de los quarks juegan un papel preponderante.

Matrices de permutación	**Patrón con dos ceros en la diagonal** ($p_i\, M_q\, p_i^T$)	**Patrón con un cero en la diagonal** ($p_i\, M_q\, p_i^T$)
$p_1 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \|\xi_q\| & 0 \\ \|\xi_q\| & 0 & \|\beta_q\| \\ 0 & \|\beta_q\| & \alpha_q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \|\xi_q\| & 0 \\ \|\xi_q\| & \gamma_q & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_q \end{pmatrix}$
$p_2 = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \|\xi_q\| \\ 0 & \alpha_q & \|\beta_q\| \\ \|\xi_q\| & \|\beta_q\| & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \|\xi_q\| \\ 0 & \alpha_q & 0 \\ \|\xi_q\| & 0 & \gamma_q \end{pmatrix}$
$p_3 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_q & \|\beta_q\| & 0 \\ \|\beta_q\| & 0 & \|\xi_q\| \\ 0 & \|\xi_q\| & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_q & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_q & \|\xi_q\| \\ 0 & \|\xi_q\| & 0 \end{pmatrix}$
$p_4 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \|\xi_q\| & \|\beta_q\| \\ \|\xi_q\| & 0 & 0 \\ \|\beta_q\| & 0 & \alpha_q \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \|\gamma_q\| & \|\xi_q\| & 0 \\ \|\xi_q\| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_q \end{pmatrix}$
$p_5 = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_q & 0 & \|\beta_q\| \\ 0 & 0 & \|\xi_q\| \\ \|\beta_q\| & \|\xi_q\| & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha_q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \|\xi_q\| \\ 0 & \|\xi_q\| & \gamma_q \end{pmatrix}$
$p_6 = \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \|\beta_q\| & \|\xi_q\| \\ \|\beta_q\| & \alpha_q & 0 \\ \|\xi_q\| & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \gamma_q & 0 & \|\xi_q\| \\ 0 & \alpha_q & 0 \\ \|\xi_q\| & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Tabla I: Patrones matriciales de masa con tres ceros de textura. No es necesario incluir fases. Podemos formar un patrón para las matrices de masa, tomando la matriz de masa "up" (o "down") de tres ceros, ya sea con dos o un cero en su diagonal.

A. Texturas de cinco ceros

Para mantener el determinante diferente de cero la matriz de masa para los quarks up (o down) puede contener como máximo tres ceros de textura [2]. Además, sólo tenemos dos tipos de patrones realistas dependiendo de cómo se distribuyan los tres ceros de la textura en las entradas de la matriz de masa. En el primer caso tenemos una matriz con dos ceros de textura en la diagonal, y en el otro caso la matriz sólo contiene un cero de textura en la diagonal, como se señala en cada columna de la Tabla I; donde se puede ver que haciendo WBT's con las matrices de permutación p_i obtenemos todos los posibles casos viables para cada patrón. La Tabla I resume todas

[2] Más de tres ceros de textura implica que al menos una masa de los quarks es igual a cero o dos de las masas de los quarks deben ser iguales [51, 84].

las texturas viables de tres ceros (mediante permutaciones) para las matrices de masa de los quarks up y down. Estos patrones son generales y no es necesario incluir las fases, como mostraremos más adelante.

Una transformación de equivalencia, como el caso de una permutación, es un tipo de WBT, este hecho nos permite encontrar texturas equivalentes, por ejemplo

$$
\begin{aligned}
M_u' &= \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & \times & 0 \\ 0 & 0 & \times \end{pmatrix} = p_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & 0 \\ \times & 0 & \times \end{pmatrix} \cdot p_2^T, \\
M_d' &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \times \\ 0 & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} = p_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 \\ \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times \end{pmatrix} \cdot p_2^T,
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

donde "$\times$" representa las entradas distintas de cero. Trabajaremos con texturas de cinco ceros para las matrices de masa de los quarks. Las texturas seis ceros ya han sido descartadas [51, 68, 79, 88].

B. Patrón con dos y un cero en la diagonal

Los patrones que se muestran en la Tabla I se pueden diagonalizar analíticamente. Para hacer esto, consideremos el caso más general de una matriz de masa con dos ceros de textura,

$$
M_q = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_q| & 0 \\ |\xi_q| & \gamma_q & |\beta_q| \\ 0 & |\beta_q| & \alpha_q \end{pmatrix}, \tag{3.2}
$$

donde las fases de los parámetros por fuera de la diagonal pueden ser absorbidas (o incluidas) en una de las matrices de masa (tipo "up" o "down") a través de una WBT. γ_q y α_q son números reales debido a la hemiticidad de M_q.

El patrón con dos ceros en la diagonal se logra haciendo $\gamma_q = 0$. Para obtener el patrón con un cero en la diagonal establecemos $|\beta_q| = 0$. La matriz de masa M_q se puede diagonalizar utilizando la transformación,

$$
U_q^\dagger M_q U_q = D_q = \begin{pmatrix} \lambda_{1q} & & \\ & \lambda_{2q} & \\ & & \lambda_{3q} \end{pmatrix}, \tag{3.3}
$$

donde los λ_{iq} $(i = 1, 2, 3)$ están definidos en (1.5). Observe que γ_q, $|\beta_q|$ y $|\xi_q|$ pueden expresarse en términos de α_q y los λ_{iq}'s, con la ayuda de invariantes bajo cambios de base, $\mathrm{tr}M_q$, $\mathrm{tr}M_q^2$ y $\det M_q$, tal como sigue

$$
\gamma_q = \lambda_{1q} + \lambda_{2q} + \lambda_{3q} - \alpha_q, \tag{3.4a}
$$

$$
|\beta_q| = \sqrt{\frac{(\alpha_q - \lambda_{1q})(\alpha_q - \lambda_{2q})(\lambda_{3q} - \alpha_q)}{\alpha_q}}, \tag{3.4b}
$$

$$
|\xi_q| = \sqrt{\frac{-\lambda_{1q}\lambda_{2q}\lambda_{3q}}{\alpha_q}}. \tag{3.4c}
$$

De las expresiones (3.4b) y (3.4c) es necesario que $\alpha_q \neq 0$. Además, usando la cantidad real (3.4c) y la condición (D1), el parámetro $\alpha_q > 0$; y de la relación (3.4b), este se encuentra en uno de los siguientes intervalos:

$$
\text{Si } \lambda_{1q} < 0,\ \lambda_{2q} > 0 \text{ y } \lambda_{3q} > 0 \Rightarrow |\lambda_{2q}| \leq \alpha_q \leq |\lambda_{3q}|, \tag{3.5a}
$$

$$
\text{Si } \lambda_{1q} > 0,\ \lambda_{2q} < 0 \text{ y } \lambda_{3q} > 0 \Rightarrow |\lambda_{1q}| \leq \alpha_q \leq |\lambda_{3q}|, \tag{3.5b}
$$

$$
\text{Si } \lambda_{1q} > 0,\ \lambda_{2q} > 0 \text{ y } \lambda_{3q} < 0 \Rightarrow |\lambda_{1q}| \leq \alpha_q \leq |\lambda_{2q}|. \tag{3.5c}
$$

En el anterior análisis, se tuvo en cuenta la jerarquía (1.6), y se consideró solo un valor propio negativo de acuerdo con la justificación dada en la Sección D.

El resultado analítico exacto de la matriz de diagonalización U_q, que diagonaliza la matriz de masa (3.2), es [43, 51, 106]

$$
U_q = \begin{pmatrix}
e^{i\theta_1} \frac{|\lambda_{3q}|}{\lambda_{3q}} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}\lambda_{3q}(\alpha_q - \lambda_{1q})}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & e^{i\theta_2} \frac{|\lambda_{2q}|}{\lambda_{2q}} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}\lambda_{3q}(\lambda_{2q} - \alpha_q)}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \sqrt{\frac{\lambda_{1q}\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{3q})}{\alpha_q(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} \\
-e^{i\theta_1} \frac{|\lambda_{2q}|}{\lambda_{2q}} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}(\lambda_{1q} - \alpha_q)}{(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & e^{i\theta_2} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{2q})}{(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \frac{|\lambda_{3q}|}{\lambda_{3q}} \sqrt{\frac{\lambda_{3q}(\lambda_{3q} - \alpha_q)}{(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} \\
e^{i\theta_1} \frac{|\lambda_{2q}|}{\lambda_{2q}} \sqrt{\frac{\lambda_{1q}(\alpha_q - \lambda_{2q})(\alpha_q - \lambda_{3q})}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})}} & -e^{i\theta_2} \frac{|\lambda_{3q}|}{\lambda_{3q}} \sqrt{\frac{\lambda_{2q}(\alpha_q - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \alpha_q)}{\alpha_q(\lambda_{2q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}} & \sqrt{\frac{\lambda_{3q}(\alpha_q - \lambda_{1q})(\alpha_q - \lambda_{2q})}{\alpha_q(\lambda_{3q} - \lambda_{1q})(\lambda_{3q} - \lambda_{2q})}}
\end{pmatrix}, \tag{3.6}
$$

donde tenemos fases adicionales (no físicas) para ajustar la matriz de mezcla CKM a la convención habitual (A2), como se muestra en la referencia [53]. No es necesario incluir una fase en la tercera columna, ya que puede ser absorbida por las fases restantes.

La matriz de diagonalización (3.6) se puede ver como una matriz unitaria para realizar una WBT sobre las representaciones de masa iniciales (1.4), de la siguiente manera. Para el caso (1.4a):

$$
M_u' = U_u(D_u)U_u^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_u| & 0 \\ |\xi_u| & \gamma_u & |\beta_u| \\ 0 & |\beta_u| & \alpha_u \end{pmatrix}, \tag{3.7a}
$$

$$
M_d' = U_u\,(V D_d V^\dagger)\,U_u^\dagger, \tag{3.7b}
$$

donde hemos usado la relación (3.3) para el caso especial $q = u$. Como ya lo hemos mencionado, si queremos un patrón de tres ceros en la matriz de masa M_u', con dos ceros en la diagonal, es decir con $\gamma_u = 0$, es necesario que

$\alpha_u = \lambda_{1u} + \lambda_{2u} + \lambda_{3u}$ de acuerdo a (3.4a), y de acuerdo con (3.5) solo el siguiente caso es posible $\lambda_{1u} > 0, \lambda_{2u} < 0$ y $\lambda_{3u} > 0$. Por otro lado, si queremos tres ceros para la matriz de masa M'_u, pero ahora con un solo cero en la diagonal, consideramos el caso $|\beta_u| = 0$. De acuerdo con la ecuación (3.4b), tenemos tres posibilidades: $\alpha_u = \lambda_{1u}$, o $\alpha_u = \lambda_{2u}$, o $\alpha_u = \lambda_{3u}$. Para cada uno de estos casos, uno de los restantes λ_{iu} debe ser negativo, lo que da un total de seis posibilidades distintas. Finalmente, para encontrar dos ceros de textura adicionales en las entradas de la matriz de masa (3.7b), podemos ajustar los parámetros libres θ_1 y θ_2 presentes en la matriz de diagonalización (3.6). Un ejercicio similar se puede llevar a cabo para el caso (1.4b):

$$M'_u = U_d\,(V^\dagger D_u V)\,U_d^\dagger\,, \tag{3.8a}$$

$$M'_d = U_d(D_d)U_d^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & |\xi_d| & 0 \\ |\xi_d| & \gamma_d & |\beta_d| \\ 0 & |\beta_d| & \alpha_d \end{pmatrix}, \tag{3.8b}$$

donde hemos usado la relación (3.3) para el caso especial $q = d$.

La Tabla II resume los resultados numéricos de nuestro estudio, que exploraremos en más detalle, desde un punto de vista analítico, en la siguiente sección.

Caso	Texturas numéricas de cinco ceros (MeV)	Autovalores de masa negativos	Pulls: Wolfenstein: Masas quarks up: Masas quarks down:			
			P_λ / P_{m_μ} / P_{m_d}	P_A / P_{m_c} / P_{m_s}	P_ρ / P_{m_t} / P_{m_b}	P_η / – / –
I a.	$M'_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -85.4679+157.016i \\ 0 & 6053.87 & 29579.+5434.63i \\ -85.4679-157.016i & 29579.-5434.63i & 167190. \end{pmatrix}$	$\lambda_{1u} < 0$	−0.540088	0.79007	0.442556	−0.813223
			0.982234	0.125877	0.433711	–
	$M'_d = \begin{pmatrix} 0 & 14.5259 & 0 \\ 14.5259 & 0 & 442.526 \\ 0 & 442.526 & 2904.18 \end{pmatrix}$	$\lambda_{2d} < 0$	0.360887	0.595191	0.546529	–
I b.	$M'_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 21.0411-284.492i \\ 0 & 1690.29 & 18947.5+5891.49i \\ 21.0411+284.492i & 18947.5-5891.49i & 168946. \end{pmatrix}$	$\lambda_{2u} < 0$	−0.58307	−0.99054	−0.52920	−0.72966
			−0.28095	0.24719	−0.69336	–
	$M'_d = \begin{pmatrix} 0 & 13.4128 & 0 \\ 13.4128 & 0 & 392.604 \\ 0 & 392.604 & 2857.04 \end{pmatrix}$	$\lambda_{2d} < 0$	0.68231	−0.25887	0.000098	–
II a.	$M'_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 431.461 \\ 0 & 957.898 & 7251.27 \\ 431.461 & 7251.27 & 171225. \end{pmatrix}$	$\lambda_{1u} < 0$	0.119034	0.862302	0.0559363	−0.00911928
			0.515494	0.514286	−0.471545	–
	$M'_d = \begin{pmatrix} 0 & 4.31591+14.2586i & 0 \\ 4.31591-14.2586i & 64.1289 & 0 \\ 0 & 0 & 2968.58 \end{pmatrix}$	$\lambda_{1d} < 0$	0.982903	0.49471	0.532562	–
II b.	$M'_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 426.288 \\ 0 & 868.054 & 7335.94 \\ 426.288 & 7335.94 & 172542. \end{pmatrix}$	$\lambda_{1u} < 0$	0.546351	0.807219	0.845866	0.957199
			0.618816	−0.972609	0.630273	–
	$M'_d = \begin{pmatrix} 0 & -4.1517-13.8072i & 0 \\ -4.1517+13.8072i & -62.495 & 0 \\ 0 & 0 & 2915.72 \end{pmatrix}$	$\lambda_{2d} < 0$	0.720634	0.377391	0.0519986	–

Tabla II: Modelos para las matrices de masa de los quarks con cinco ceros de textura. Observe que todos los pulls $\left(P = \frac{U-\bar{U}}{\delta U}\right)$ son $|P| < 1$, por lo que estos modelos reproducen todas las cantidades físicas: los parámetros de Wolfenstein para la matriz de mezcla CKM y las masas de los quarks, con desviaciones menores a 1σ.

C. Matriz de masa de quarks analítica con cinco ceros de textura

Es bien sabido en la literatura, que para una textura dada es posible establecer relaciones entre las masas de los quarks, los ángulos de mezcla y la fase de violación CP de la matriz CKM, así que, un estudio de estas relaciones es importante para desvelar las simetrías subyacentes de la física del sabor. Las texturas de cinco ceros para las matrices de masa de quarks dadas en la Tabla II son modelos viables de acuerdo con los datos más recientes de las masas de los quarks y los parámetros de la matriz de mezcla CKM, a la escala de energía del Z. Por lo tanto, de acuerdo con los casos encontrados, consideremos los siguientes modelos analíticos de cinco ceros de textura.

1. Caso I

En esta configuración, la matriz de masa down contiene tres ceros de textura, dos de ellos en la diagonal, corresponde al caso I de la Tabla II, que sugiere la siguiente estructura analítica para las matrices de masa de los quarks,

$$\begin{aligned} M_{Iu} &= F^{\dagger}\begin{pmatrix} 0 & 0 & |\xi_u| \\ 0 & \alpha_u & |\beta_u| \\ |\xi_u| & |\beta_u| & \gamma_u \end{pmatrix} F, \\ M_{Id} &= \begin{pmatrix} 0 & |\xi_d| & 0 \\ |\xi_d| & 0 & |\beta_d| \\ 0 & |\beta_d| & \alpha_d \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde todas las fases se reducen a las contenidas en la matriz diagonal $F = \mathrm{diag}(e^{-i\phi_{\xi_u}}, e^{-i\phi_{\beta_u}}, 1)$ (con $\phi_{\beta_u} \equiv \arg(\beta_u)$ y $\phi_{\xi_u} \equiv \arg(\xi_u)$) que proviene de hacer una WBT, de tal manera que las fases de M_{Id} son absorbidas en F. Así que tenemos 7 parámetros reales y 2 fases, para reproducir 9 cantidades físicas (6 masas de los quarks y 3 ángulos de mezcla) y 1 fase responsable de la violación CP presente en la matriz de mezcla CKM; lo que implica que hay relaciones entre las masas y las entradas de mezcla establecidas en el sector de quarks. La textura de cinco ceros propuesta en (3.9) no es similar a la planteada por Fritzsch [42]. A pesar de las diferencias, las matrices de masa (3.9) se pueden diagonalizar con la matriz (3.6). Usemos la matriz de permutación $P_2 = [(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)]$, para llevar la matriz de masa "up" a la forma $M_{Iu} = F^{\dagger}P_2\begin{pmatrix} 0 & |\xi_u| & 0 \\ |\xi_u| & \gamma_u & |\beta_u| \\ 0 & |\beta_u| & \alpha_u \end{pmatrix}P_2F$, de tal manera que la matriz interna corresponda con la dada en (3.2). Por lo tanto, la matriz de diagonalización es la matriz unitaria $F^{\dagger}P_2U_u$, donde U_u está definido en (3.6), para el caso $q = u$. La otra matriz de masa en (3.9), M_{Id}, puede ser diagonalizada si hacemos uso de la relación establecida en (3.4a), es decir, $\alpha_d = \lambda_{1d} + \lambda_{2d} + \lambda_{3d}$. Así que, de acuerdo con (3.4), los parámetros de las matrices de masa valen:

$$\gamma_u = \mp m_u \pm m_c + m_t - \alpha_u, \tag{3.10a}$$

$$|\beta_u| = \sqrt{\frac{(\alpha_u \pm m_u)(\alpha_u \mp m_c)(m_t - \alpha_u)}{\alpha_u}}, \tag{3.10b}$$

$$|\xi_u| = \sqrt{\frac{m_u\, m_c\, m_t}{\alpha_u}}, \tag{3.10c}$$

$$\alpha_d = m_d - m_s + m_b, \tag{3.10d}$$

$$|\beta_d| = \sqrt{\frac{(m_b - m_s)(m_d + m_b)(m_s - m_d)}{m_d - m_s + m_b}}, \tag{3.10e}$$

$$|\xi_d| = \sqrt{\frac{m_d\, m_s\, m_b}{m_d - m_s + m_b}}. \tag{3.10f}$$

donde consideramos dos casos posibles para los signos de los autovalores de M_{Iu}, el signo superior corrrresponde a $\lambda_{1u} < 0$ y el signo inferior corresponde a $\lambda_{2u} < 0$. El parámetro α_u es libre, y de acuerdo con las ecuaciones (3.5a) y (3.5b), está acotado a la siguientes regiones:

$$m_c \leq \alpha_u \leq m_t \quad \text{para} \quad \lambda_{1u} < 0, \tag{3.11a}$$

$$m_u \leq \alpha_u \leq m_t \quad \text{para} \quad \lambda_{2u} < 0. \tag{3.11b}$$

Las matrices de diagonalización de las matrices de masa (3.9), son respectivamente:

$$U_{Iu} = \begin{pmatrix} e^{i(\phi_{\xi_u}+\theta_{1u})}\sqrt{\frac{m_c m_t(\alpha_u \pm m_u)}{\alpha_u(m_c+m_u)(m_t\pm m_u)}} & \pm e^{i(\phi_{\xi_u}+\theta_{2u})}\sqrt{\frac{(\alpha_u\mp m_c)m_t m_u}{\alpha_u(m_t\mp m_c)(m_c+m_u)}} & e^{i(\phi_{\xi_u}+\theta_{3u})}\sqrt{\frac{m_c(m_t-\alpha_u)m_u}{\alpha_u(m_t\mp m_c)(m_t\pm m_u)}} \\ \pm e^{i(\phi_{\beta_u}+\theta_{1u})}\sqrt{\frac{(\alpha_u\mp m_c)(m_t-\alpha_u)m_u}{\alpha_u(m_c+m_u)(m_t\pm m_u)}} & -e^{i(\phi_{\beta_u}+\theta_{2u})}\sqrt{\frac{m_c(m_t-\alpha_u)(\alpha_u\pm m_u)}{\alpha_u(m_t\mp m_c)(m_c+m_u)}} & e^{i(\phi_{\beta_u}+\theta_{3u})}\sqrt{\frac{(\alpha_u\mp m_c)m_t(\alpha_u\pm m_u)}{\alpha_u(m_t\mp m_c)(m_t\pm m_u)}} \\ \mp e^{i\theta_{1u}}\sqrt{\frac{m_u(\alpha_u\pm m_u)}{(m_c+m_u)(m_t\pm m_u)}} & e^{i\theta_{2u}}\sqrt{\frac{m_c(\alpha_u\mp m_c)}{(m_t\mp m_c)(m_c+m_u)}} & e^{i\theta_{3u}}\sqrt{\frac{m_t(m_t-\alpha_u)}{(m_t\mp m_c)(m_t\pm m_u)}} \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

$$U_{Id} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_{1d}}\sqrt{\frac{m_b(m_b-m_s)m_s}{(m_b-m_d)(m_d+m_s)(m_b+m_d-m_s)}} & -e^{i\theta_{2d}}\sqrt{\frac{m_b(m_b+m_d)m_d}{(m_d+m_s)(m_b+m_d-m_s)(m_b+m_s)}} & \sqrt{\frac{m_d(m_s-m_d)m_s}{(m_b-m_d)(m_b+m_d-m_s)(m_b+m_s)}} \\ e^{i\theta_{1d}}\sqrt{\frac{m_d(m_b-m_s)}{(m_b-m_d)(m_d+m_s)}} & e^{i\theta_{2d}}\sqrt{\frac{(m_b+m_d)m_s}{(m_d+m_s)(m_b+m_s)}} & \sqrt{\frac{m_b(m_s-m_d)}{(m_b-m_d)(m_b+m_s)}} \\ -e^{i\theta_{1d}}\sqrt{\frac{m_d(m_b+m_d)(m_s-m_d)}{(m_b-m_d)(m_d+m_s)(m_b+m_d-m_s)}} & -e^{i\theta_{2d}}\sqrt{\frac{(m_b-m_s)m_s(m_s-m_d)}{(m_d+m_s)(m_b+m_d-m_s)(m_b+m_s)}} & \sqrt{\frac{m_b(m_b+m_d)(m_b-m_s)}{(m_b-m_d)(m_b+m_d-m_s)(m_b+m_s)}} \end{pmatrix}, \tag{3.13}$$

donde es necesario incluir las fases no físicas, $\theta_{1u}, \theta_{2u}, \theta_{3u}, \theta_{1d}$ y θ_{2d}, a fin de ajustar nuestra predicción teórica de la CKM a la convención establecida. Los mejores valores están indicados en la Tabla III. La matriz CKM proviene de $V = U_{Iu}^{\dagger}U_{Id}$. Para obtener los términos de primer orden que contribuyen a la matriz de mezcla CKM, utilizamos la jerarquía de las masas de los quarks (1.6). Los resultados analíticos se resumen en la Tabla V. Hay varios aspectos a destacar sobre el caso I:

- En el ME, las entradas $|V_{cs}| \approx |V_{tb}| \approx 1$, entonces el parámetro libre debe satisfacer $\alpha_u \ll m_t$, por lo tanto $\alpha_u/m_t \ll 1$. Además, debido a la condición (3.5a), $\alpha_u \gg m_u$.

- El parámetro libre α_u/m_t es relevante para los elementos matriciales $|V_{ts}|$, $|V_{cb}|$, $|V_{ub}|$ y $|V_{td}|$, pero tienen contribuciones importantes relacionadas con las masas de los quarks, a excepción $|V_{ub}|$ que depende adicionalmente del término m_u/α_u. Para el resto de los elementos matriciales, al despreciar los términos lineales α_u/m_t, las contribuciones dominantes dependen principalmente de las relaciones entre las masas de los quarks tipo down.

- Los parámetros de mejor ajuste de las matrices de masa (3.9) se muestran en la Tabla III.

- Se pueden establecer relaciones entre los elementos de la matriz de mezcla, cuyos términos de primer orden sólo involucran relaciones de las masas de los quarks más livianos tipo down, como se muestra en la Tabla IV. Algunas de estas relaciones son bien conocidas, por ejemplo la de Gatto-Sartori-Tonin (GST) (ecuación 2, en la Tabla IV) [47]: $\tan\theta_{12} = |V_{us}/V_{ud}| = \sqrt{m_d}/m_s$, que se cumple aproximadamente.

	Caso I		**Caso II**	
	$\lambda_{1u} < 0$, $\lambda_{2d} < 0$	$\lambda_{2u} < 0$, $\lambda_{2d} < 0$	$\lambda_{1u} < 0$, $\lambda_{1d} < 0$	$\lambda_{1u} < 0$, $\lambda_{2d} < 0$
θ_{1u}	-1.42318	-2.84403	-1.97527	-1.99113
θ_{2u}	0.670068	1.85606	0	0
θ_{3u}	-0.00473665	-0.00461668	0	0
θ_{1d}	0.636035	1.93013	3.02511	-0.135088
θ_{2d}	-2.2845	-0.976639	3.14753	3.14844
ϕ_{ξ_u}	2.06927	-1.49697	-	-
ϕ_{β_u}	0.181706	0.301461	-	-
ϕ_{ξ_d}	-	-	1.27688	-1.86289
α_u (MeV)	6053.87	1690.29	957.898	868.054
m_u (MeV)	1.79188	1.2684	1.59895	1.64209
m_c (MeV)	625.493	633.197	650.157	555.739
m_t (MeV)	172620	171268	171534	172856
m_d (MeV)	2.99323	3.14751	3.29179	3.1659
m_s (MeV)	68.9279	56.1169	67.4207	65.6609
m_b (MeV)	2970.12	2910.01	2968.58	2915.72

Tabla III: Parámetros de ajuste.

	Relaciones	**Caso I**	**Caso II**
1	$\left\lvert\frac{V_{cs}}{V_{ud}\,V_{tb}}\right\rvert$	$1+\cdots$	$1+\cdots$
2	$\left\lvert\frac{V_{us}}{V_{ud}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_d}{m_s}}+\cdots$	$\sqrt{\frac{m_d}{m_s}}+\cdots$
3	$\left\lvert\frac{V_{cd}}{V_{ud}\,V_{tb}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_d}{m_s}}+\cdots$	$\sqrt{\frac{m_d}{m_s}}+\cdots$
4	$\left\lvert\frac{V_{ts}}{V_{ud}\,V_{cb}}\right\rvert$	$1+\cdots$	$1+\cdots$
5	$\left\lvert\frac{V_{td}}{V_{ud}\,V_{cb}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_d}{m_s}}+\cdots$	-
6	$\left\lvert\frac{V_{cs}}{V_{tb}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_s+m_d}}+\cdots$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_s+m_d}}+\cdots$
7	$\left\lvert\frac{V_{cs}}{V_{us}\,V_{tb}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_d}}+\cdots$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_d}}+\cdots$
8	$\left\lvert\frac{V_{cs}}{V_{cd}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_d}}+\cdots$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_d}}+\cdots$
9	$\left\lvert\frac{V_{ts}\,V_{tb}}{V_{cs}\,V_{cb}}\right\rvert$	$1+\cdots$	$1+\cdots$
10	$\left\lvert\frac{V_{td}\,V_{tb}}{V_{cs}\,V_{cb}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_d}{m_s}}+\cdots$	-
11	$\left\lvert\frac{V_{cd}}{V_{tb}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_d}{m_s+m_d}}+\cdots$	$\sqrt{\frac{m_d}{m_s+m_d}}+\cdots$
12	$\left\lvert\frac{V_{cd}}{V_{us}\,V_{tb}}\right\rvert$	$1+\cdots$	$1+\cdots$
13	$\left\lvert\frac{V_{ts}}{V_{us}\,V_{cb}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_d}}+\cdots$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_d}}+\cdots$
14	$\left\lvert\frac{V_{td}}{V_{us}\,V_{cb}}\right\rvert$	$1+\cdots$	-
15	$\left\lvert\frac{V_{ts}\,V_{tb}}{V_{cd}\,V_{cb}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_d}}+\cdots$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_d}}+\cdots$
16	$\left\lvert\frac{V_{td}\,V_{tb}}{V_{cd}\,V_{cb}}\right\rvert$	$1+\cdots$	-
17	$\left\lvert\frac{V_{ts}}{V_{cb}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_s+m_d}}+\cdots$	$\sqrt{\frac{m_s}{m_s+m_d}}+\cdots$
18	$\left\lvert\frac{V_{td}}{V_{ts}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_d}{m_s}}+\cdots$	-
19	$\left\lvert\frac{V_{td}}{V_{cb}}\right\rvert$	$\sqrt{\frac{m_d}{m_s+m_d}}+\cdots$	-

Tabla IV: Sí existen algunas relaciones entre los elementos de la matriz de mezcla CKM y las masas de los quarks, pero a primer orden.

2. Caso II

Otra textura analítica viable en la Tabla II es el Caso II, con matrices de masa de la forma

$$
\begin{aligned}
M_{IIu} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & |\xi_u| \\ 0 & \alpha_u & |\beta_u| \\ |\xi_u| & |\beta_u| & \gamma_u \end{pmatrix}, \\
M_{IId} &= \begin{pmatrix} 0 & |\xi_d|\, e^{i\phi_{\xi_d}} & 0 \\ |\xi_d|\, e^{-i\phi_{\xi_d}} & \gamma_d & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_d \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

En este caso tenemos solamente una fase, ϕ_{ξ_d}, responsable de la violación CP. Y hay 7 parámetros reales. Esta textura es de tipo Fritzsch [42].

Como en el caso anterior podemos obtener relaciones entre los elementos de la matriz CKM y las masas de los quarks. La estructura de la matriz M_{IIu} es similar a la dada en la ecuación (3.9), pero sin incluir fases, por lo que se puede deducir que la matriz de diagonalización para este caso es: $P_2\, U_u$ con $P_2 = [(1,0,0),(0,0,1),(0,1,0)]$ y

U_u definido en (3.6) para $q = u$. La matriz M_{IId} en (3.14), tiene una estructura de ceros como la presente en (3.2), pero con $|\beta_q| = 0$, así que hay varios casos a considerar: $\alpha_d = \lambda_{1d}$, $|\xi_d| = \sqrt{-\lambda_{2d}\,\lambda_{3d}}$ y $\gamma_d = \lambda_{2d} + \lambda_{3d}$; o $\alpha_d = \lambda_{2d}$, $|\xi_d| = \sqrt{-\lambda_{1d}\,\lambda_{3d}}$ y $\gamma_d = \lambda_{1d} + \lambda_{3d}$; o $\alpha_d = \lambda_{3d}$, $|\xi_d| = \sqrt{-\lambda_{1d}\,\lambda_{2d}}$ y $\gamma_d = \lambda_{1d} + \lambda_{2d}$ [51]. Aquí, la matriz de diagonalización de M_{IId} es $P_d^\dagger\, U_d$ con U_d dado en (3.6) para $q = d$ y $P_d = \mathrm{diag}(e^{-i\phi_{\xi_d}}, 1, 1)$. Los parámetros de las matrices, de acuerdo con las relaciones (3.4), son las siguientes:

$$\gamma_u = -m_u + m_c + m_t - \alpha_u, \tag{3.15a}$$

$$|\beta_u| = \sqrt{\frac{(\alpha_u + m_u)(\alpha_u - m_c)(m_t - \alpha_u)}{\alpha_u}}, \tag{3.15b}$$

$$|\xi_u| = \sqrt{\frac{m_u\, m_c\, m_t}{\alpha_u}}, \tag{3.15c}$$

$$\alpha_d = m_b, \tag{3.15d}$$

$$|\xi_d| = \sqrt{m_d\, m_s}, \tag{3.15e}$$

$$\gamma_d = \mp m_d \pm m_s, \tag{3.15f}$$

donde hemos tomado el caso $\lambda_{1u} < 0$, y donde el signo superior para $\lambda_{1d} < 0$ y el inferior para $\lambda_{2d} < 0$. El parámetro libre $\alpha_u > 0$ se encuentra en la siguiente región:

$$m_c \leq \alpha_u \leq m_t. \tag{3.16}$$

En este caso, las matrices de diagonalización de los operadores matriciales (3.14), son respectivamente,

$$U_{IIu} = \begin{pmatrix} e^{i\theta_{1u}}\sqrt{\frac{m_c m_t(\alpha_u+m_u)}{\alpha_u(m_c+m_u)(m_t+m_u)}} & e^{i\theta_{2u}}\sqrt{\frac{(\alpha_u-m_c)m_t m_u}{\alpha_u(m_t-m_c)(m_c+m_u)}} & e^{i\theta_{3u}}\sqrt{\frac{m_c(m_t-\alpha_u)m_u}{\alpha_u(m_t-m_c)(m_t+m_u)}} \\ e^{i\theta_{1u}}\sqrt{\frac{(\alpha_u-m_c)(m_t-\alpha_u)m_u}{\alpha_u(m_c+m_u)(m_t+m_u)}} & -e^{i\theta_{2u}}\sqrt{\frac{m_c(m_t-\alpha_u)(\alpha_u+m_u)}{\alpha_u(m_t-m_c)(m_c+m_u)}} & e^{i\theta_{3u}}\sqrt{\frac{(\alpha_u-m_c)m_t(\alpha_u+m_u)}{\alpha_u(m_t-m_c)(m_t+m_u)}} \\ -e^{i\theta_{1u}}\sqrt{\frac{m_u(\alpha_u+m_u)}{(m_c+m_u)(m_t+m_u)}} & e^{i\theta_{2u}}\sqrt{\frac{m_c(\alpha_u-m_c)}{(m_t-m_c)(m_c+m_u)}} & e^{i\theta_{3u}}\sqrt{\frac{m_t(m_t-\alpha_u)}{(m_t-m_c)(m_t+m_u)}} \end{pmatrix}, \tag{3.17}$$

$$U_{IId} = \begin{pmatrix} e^{i(\phi_{\xi_d}+\theta_{1d})}\sqrt{\frac{m_s}{m_d+m_s}} & \pm e^{i(\phi_{\xi_d}+\theta_{2d})}\sqrt{\frac{m_d}{m_d+m_s}} & 0 \\ \mp e^{i\theta_{1d}}\sqrt{\frac{m_d}{m_d+m_s}} & e^{i\theta_{2d}}\sqrt{\frac{m_s}{m_d+m_s}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3.18}$$

Los mejores parámetros de ajuste se indican en la Tabla III.

Tomando en cuenta la jerarquía de las masas de los quarks, expresión (1.6), y los valores posibles para el parámetro α_u (condiciones (3.4)), las entradas a primer orden de la matriz CKM, $V = U_u^\dagger U_d$, se resumen en la Tabla V, caso II; de estos resultados concluimos que:

- Como en el caso I, $|V_{cs}| \approx |V_{tb}| \approx 1$, por lo que $\alpha_u \ll m_t$. Además, hemos considerado que $\alpha_u \gg m_u$, en parte debido a la condición (3.5a).
- Los elementos de la matriz CKM, V_{ts}, V_{cb}, V_{ub} y V_{td} dependen en gran medida del parámetro α_u, los elementos restantes dependen de las relaciones entre las masas de los quarks down. El caso I tiene dependencias más elaboradas respecto al parámetro libre α_u y por lo tanto sus predicciones pueden ser mucho más atractivas, sin embargo, no hay ninguna razón a priori para preferir uno de los casos.
- Al igual que el caso I, las relaciones a primer orden entre los elementos de la matriz CKM, que involucran sólo las masas de los quarks, se muestran en la Tabla IV.

Si bien, los resultados presentados en la Tabla IV son similares, para los casos I y II, estos difieren en la cantidad. Pues la relaciones 5, 10, 14, 16, 18 y 19 están ausentes para el caso II.

Caso	Texturas analíticas de cinco ceros	Predicciones para la matriz de mezcla V_{CKM}:
I	$M_u = P^\dagger \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lvert\xi_u\rvert \\ 0 & \alpha_u & \lvert\beta_u\rvert \\ \lvert\xi_u\rvert & \lvert\beta_u\rvert & \gamma_u \end{pmatrix} P,$ $M_d = \begin{pmatrix} 0 & \lvert\xi_d\rvert & 0 \\ \lvert\xi_d\rvert & 0 & \lvert\beta_d\rvert \\ 0 & \lvert\beta_d\rvert & \alpha_d \end{pmatrix},$ donde $P = \mathrm{diag}(e^{-i\phi_{\xi_u}}, e^{-i\phi_{\beta_u}}, 1)$. Además $m_c < \alpha_u \ll m_t$. Con "$-$" para el caso (Ia), tabla II: $\lambda_{1u} < 0$ y $\lambda_{2d} < 0$. Con "$+$" para el caso (Ib), tabla II: $\lambda_{2u} < 0$ y $\lambda_{2d} < 0$.	$\lvert V_{ud}\rvert = \sqrt{\frac{m_s}{m_s+m_d}} + \cdots,$ $\lvert V_{cs}\rvert = \sqrt{\frac{m_s}{m_s+m_d}\left(1-\frac{\alpha_u}{m_t}\right)} + \cdots,$ $\lvert V_{tb}\rvert = \sqrt{1-\frac{\alpha_u}{m_t}} + \cdots,$ $\lvert V_{us}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{m_d}{m_s+m_d}} + \cdots\right\rvert,$ $\lvert V_{cd}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{m_d}{m_s+m_d}\left(1-\frac{\alpha_u}{m_t}\right)} + \cdots\right\rvert,$ $\lvert V_{ts}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{m_s}{m_s+m_d}}\left[\sqrt{\frac{m_s-m_d}{m_b}\left(1-\frac{\alpha_u}{m_t}\right)} - e^{-i\phi_{\beta_u}}\sqrt{\frac{\alpha_u}{m_t} \mp \frac{m_c}{m_t}}\right] + \cdots\right\rvert,$ $\lvert V_{cb}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{m_s-m_d}{m_b}\left(1-\frac{\alpha_u}{m_t}\right)} - e^{i\phi_{\beta_u}}\sqrt{\frac{\alpha_u}{m_t} \mp \frac{m_c}{m_t}} + \cdots\right\rvert,$ $\lvert V_{ub}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{m_u}{m_c}\frac{\alpha_u}{m_t}} - e^{-i\phi_{\beta_u}}\sqrt{\frac{m_u(m_s-m_d)}{m_b}\left(\frac{1}{m_c} \mp \frac{1}{\alpha_u}\right)\left(1-\frac{\alpha_u}{m_t}\right)} + \cdots\right\rvert,$ $\lvert V_{td}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{m_d}{m_s+m_d}}\left[\sqrt{\frac{m_s-m_d}{m_b}\left(1-\frac{\alpha_u}{m_t}\right)} - e^{-i\phi_{\beta_u}}\sqrt{\frac{\alpha_u}{m_t} \mp \frac{m_c}{m_t}}\right] + \cdots\right\rvert,$
II	$M_u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lvert\xi_u\rvert \\ 0 & \alpha_u & \lvert\beta_u\rvert \\ \lvert\xi_u\rvert & \lvert\beta_u\rvert & \gamma_u \end{pmatrix},$ $M_d = \begin{pmatrix} 0 & \lvert\xi_d\rvert e^{i\phi_{\xi_d}} & 0 \\ \lvert\xi_d\rvert e^{-i\phi_{\xi_d}} & \gamma_d & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_d \end{pmatrix},$ donde $m_c < \alpha_u \ll m_t$, y $-$: para $\lambda_{1u} < 0$ y $\lambda_{1d} < 0$. $+$: para $\lambda_{1u} < 0$ y $\lambda_{2d} < 0$.	$\lvert V_{ud}\rvert = \sqrt{\frac{m_s}{m_s+m_d}} + \cdots,$ $\lvert V_{cs}\rvert = \sqrt{\frac{m_s}{m_s+m_d}\left(1-\frac{\alpha_u}{m_t}\right)} + \cdots,$ $\lvert V_{tb}\rvert = \sqrt{1-\frac{\alpha_u}{m_t}} + \cdots,$ $\lvert V_{us}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{m_d}{m_s+m_d}} + \cdots\right\rvert,$ $\lvert V_{cd}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{m_d}{m_s+m_d}\left(1-\frac{\alpha_u}{m_t}\right)} + \cdots\right\rvert,$ $\lvert V_{ts}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{m_s}{m_s+m_d}\left(\frac{\alpha_u}{m_t}-\frac{m_c}{m_t}\right)} + \cdots\right\rvert,$ $\lvert V_{cb}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{\alpha_u}{m_t}-\frac{m_c}{m_t}} + \cdots\right\rvert,$ $\lvert V_{ub}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{m_u}{m_c}\frac{\alpha_u}{m_t}} + \cdots\right\rvert,$ $\lvert V_{td}\rvert = \left\lvert\sqrt{\frac{m_d}{m_s+m_d}\left(\frac{\alpha_u}{m_t}-\frac{m_c}{m_t}\right)} \mp e^{i\phi_{\xi_d}}\sqrt{\frac{m_s\, m_c\, m_u}{m_s+m_d}\frac{1}{m_t}\left(\frac{1}{\alpha_u}-\frac{1}{m_t}\right)} + \cdots\right\rvert,$

Tabla V: Casos I y II para las matrices de masa de quarks con cinco ceros de textura. Y sus correspondientes predicciones de primer orden para los elementos de la matriz CKM.

IV. SECTOR LEPTÓNICO

Aquí, como en el caso del sector de quarks, encontramos varios modelos con cinco ceros de textura. Pero más que encontrar relaciones entre las masas y las entradas de la matriz de mezcla PMNS (cosa que es posible), nos enfocaremos en hacer predicciones de las masas de los neutrinos. Trabajaremos dos casos por separado, por los dos métodos mencionados en la metodología. Es bueno recordar que estamos trabajando con neutrinos de Dirac.

A. Cinco ceros de textura: primer caso

En el contexto del SMRHN con conservación del número de leptones, en la base débil, y tras romper la simetría gauge local, el término de masa del Lagrangiano para el sector leptónico tiene la forma

$$-\mathcal{L}_D = \bar{\nu}'_L M'_n \nu'_R + \bar{\nu}'_R M'^{\dagger}_n \nu'_L + \bar{\ell}'_L M'_\ell \ell'_R + \bar{\ell}'_R M'^{\dagger}_\ell \ell'_L, \quad (4.1)$$

donde M'_n y M'_ℓ son las matrices de masa para los neutrinos y leptones cargados, respectivamente (los campos y matrices primados se refieren a la base débil).

Supongamos ahora que para una simetría dada, las matrices de masa hermíticas M'_n y M'_ℓ presentan las siguientes texturas,

$$\begin{aligned} M'_n &= \begin{pmatrix} c_n & a_n & 0 \\ a_n^* & 0 & b_n \\ 0 & b_n^* & 0 \end{pmatrix}, \\ M'_\ell &= \begin{pmatrix} 0 & a_\ell & 0 \\ a_\ell^* & d_\ell & b_\ell \\ 0 & b_\ell^* & c_\ell \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

A continuación, presentamos un análisis de las consecuencias de este patrón particular con tres ceros de textura en el sector neutro y dos en el cargado.

El primer paso es eliminar las fases; esto se puede hacer mediante la siguiente transformación unitaria:

$$M'_{n,\ell} = \lambda^\dagger_{n,\ell} M_{n,\ell} \lambda_{n,\ell}, \quad (4.3)$$

lo que se consigue utilizando las matrices diagonales $\lambda_n = (1, e^{i\alpha_{n_1}}, e^{i\alpha_{n_1}+i\alpha_{n_2}})$ y $\lambda_\ell = (1, e^{i\alpha_{\ell_1}}, e^{i\alpha_{\ell_1}+i\alpha_{\ell_2}})$, respectivamente, y $M_{n,\ell}$ son las matrices cuyas componentes son los valores absolutos de las entradas correspondientes en $M'_{n,\ell}$ (es decir, $(M_{n,\ell})_{i,j} = |(M'_{n,\ell})_{i,j}|$). Si rotamos estas matrices usando la transformación ortogonal $R_{n,\ell}$ ($R^T_{n,\ell} R_{n,\ell} = \mathbb{1}$) al espacio de los estados propios de masa (la base física), obtenemos

$$\begin{aligned} M'_{n,\ell} &= \lambda^\dagger_{n,\ell} R^T_{n,\ell} \begin{pmatrix} m_{1,e} & 0 & 0 \\ 0 & -m_{2,\mu} & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,\tau} \end{pmatrix} R_{n,\ell} \lambda_{n,\ell} \\ &\equiv U_{n,\ell} M^{\text{diag}}_{n,\ell} U^\dagger_{n,\ell}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

donde se necesita al menos un valor propio negativo para generar un cero de textura en la diagonal [14, 51, 56]. Aquí m_1, m_2 y m_3 son las masas del neutrino electrónico, muónico y tauónico, respectivamente, y donde las masas de los leptones cargados son (en MeV): $m_e = 0.5109989461 \pm 0.0000000031, m_\mu = 105.6583745 \pm 0.0000024$ and $m_\tau = 1776.86 \pm 0.12$, que corresponde a la masa del electrón, muón y tauón, respectivamente [95]. Después de rotar a los estados propios de masa, los autovalores pueden ser positivos, negativos o cero. En estas expresiones, M^{diag}_n y M^{diag}_ℓ son las matrices de masa diagonales para los sectores de neutrinos y leptones cargados, respectivamente. De acuerdo con la notación estándar, utilizamos $U_n \equiv (R_n\lambda_n)^\dagger$ y $U_\ell \equiv (R_\ell\lambda_\ell)^\dagger$, que son dos matrices unitarias utilizadas para rotar de la base débil a la base física. A partir de las ecuaciones (4.1) y (4.2), obtenemos la relación entre los estados en la base de masa $\nu_{L,R}$, $\ell_{L,R}$, y los correspondientes estados en la base de interacción $\nu'_{L,R}$, $\ell'_{L,R}$:

$$\nu'_{L,R} = U_n \nu_{L,R}, \qquad \ell'_{L,R} = U_\ell \ell_{L,R}. \quad (4.5)$$

Reemplazando estas expresiones en el sector leptónico de la corriente débil, obtenemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W^-} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} W^- \bar{\ell}'_L \gamma^\mu \nu'_L + \text{h.c} \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} W^- \bar{\ell}_L \gamma^\mu U^\dagger_\ell U_n \nu_L + \text{h.c}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

de tal manera que la matriz PMNS viene dada por

$$V_{\text{PMNS}} = U^\dagger_\ell U_n = R_\ell \, \Phi \, R^T_n, \quad (4.7)$$

donde $\Phi = \lambda_\ell \lambda^\dagger_n$ es una fase matricial diagonal. Para la matriz de masa de neutrinos, asumimos el orden normal [100], es decir: $m_3 > m_2 > m_1$, donde: $m_2^2 = m_1^2 + \delta m^2_{21}$, y $m_3^2 = m_1^2 + \delta m^2_{31}$, con $\delta m^2_{21}, \delta m^2_{31} > 0$ [30].

Al imponer la invariancia de la traza y el determinante sobre las matrices de masa ($\text{tr}[M'_{n,\ell}] = \text{tr}[M^{\text{diag}}_{n,\ell}]$, $\text{tr}\left[\left(M'_{n,\ell}\right)^2\right] = \text{tr}\left[\left(M^{\text{diag}}_{n,\ell}\right)^2\right]$, y $\text{Det}[M'_{n,\ell}] = \text{Det}[M^{\text{diag}}_{n,\ell}]$), se obtienen las siguientes relaciones para esta textura en particular:

$$c_n = m_1 - m_2 + m_3,$$
$$|a_n| = \sqrt{\frac{(m_1 - m_2)(m_1 + m_3)(m_2 - m_3)}{m_1 - m_2 + m_3}},$$
$$|b_n| = \sqrt{\frac{m_1\, m_2\, m_3}{m_1 - m_2 + m_3}},$$

$$d_\ell = m_e - m_\mu + m_\tau - c_\ell,$$
$$|b_\ell| = \sqrt{\frac{(c_\ell - m_e)(c_\ell + m_\mu)(m_\tau - c_\ell)}{c_\ell}},$$
$$|a_\ell| = \sqrt{\frac{m_e\, m_\mu\, m_\tau}{c_\ell}}.$$

A partir de las identificaciones anteriores, es posible obtener una forma explícita para las matrices de masa de los leptones que nos permite obtener, a través de la diagonalización de M_n y M_ℓ, las matrices ortogonales de la ecuación (4.7),

$$R_n = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_1(m_2-m_1)(m_1+m_3)}{(m_1+m_2)(m_3-m_1)(m_1-m_2+m_3)}} & \sqrt{\frac{m_1(m_3-m_2)}{(m_1+m_2)(m_3-m_1)}} & \sqrt{\frac{m_2 m_3(m_3-m_2)}{(m_1+m_2)(m_3-m_1)(m_1-m_2+m_3)}} \\ \sqrt{\frac{m_2(m_1-m_2)(m_2-m_3)}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_1-m_2+m_3)}} & -\sqrt{\frac{m_2(m_1+m_3)}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)}} & \sqrt{\frac{m_1 m_3(m_1+m_3)}{(m_1+m_2)(m_2+m_3)(m_1-m_2+m_3)}} \\ \sqrt{\frac{m_3(m_1+m_3)(m_3-m_2)}{(m_3-m_1)(m_2+m_3)(m_1-m_2+m_3)}} & \sqrt{\frac{m_3(m_2-m_1)}{(m_2+m_3)(m_3-m_1)}} & \sqrt{\frac{m_1 m_2(m_2-m_1)}{(m_3-m_1)(m_2+m_3)(m_1-m_2+m_3)}} \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

$$R_\ell = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{m_\mu m_\tau(c_\ell-m_e)}{c_\ell(me+m_\mu)(m_\tau-m_e)}} & -\sqrt{\frac{m_e(c_\ell-m_e)}{(m_e+m_\mu)(m_\tau-m_e)}} & \sqrt{\frac{m_e(c_\ell+m_\mu)(c_\ell-m_\tau)}{c_\ell(m_e+m_\mu)(m_e-m_\tau)}} \\ \sqrt{\frac{m_e m_\tau(c_\ell+m_\mu)}{c_\ell(m_e+m_\mu)(m_\mu+m_\tau)}} & -\sqrt{\frac{m_\mu(c_\ell+m_\mu)}{(m_e+m_\mu)(m_\mu+m_\tau)}} & \sqrt{\frac{m_\mu(m_e-c_\ell)(c_\ell-m_\tau)}{c_\ell(m_e+m_\mu)(m_\mu+m_\tau)}} \\ \sqrt{\frac{m_e m_\mu(c_\ell-m_\tau)}{c_\ell(m_e-m_\tau)(m_\mu+m_\tau)}} & \sqrt{\frac{m_\tau(m_\tau-c_\ell)}{(m_\tau-m_e)(m_\mu+m_\tau)}} & \sqrt{\frac{m_\tau(c_\ell-m_e)(c_\ell+m_\mu)}{c_\ell(m_\tau-m_e)(m_\mu+m_\tau)}} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

A partir de R_n y R_ℓ, se puede construir la matriz de mezcla PMNS definida en la ecuación (4.7). Esta es una matriz, que además de la fase de violación de CP, es una función de un solo parámetro matemático c_ℓ. De esta forma, los tres ángulos de mezcla en $V_{\rm PMNS}$ se expresan como funciones de las masas leptónicas, c_ℓ, y en la práctica, también de las fases, con dos predicciones físicas según al análisis del conteo de parámetros presentado en el Apéndice B. Las entradas en R_n y R_ℓ son valores reales debido a la jerarquía normal asumida en el sector de leptones neutros, en la medida de que c_ℓ esté en el intervalo $m_e < c_\ell < m_\tau$. Entonces tenemos la libertad de usar c_ℓ y m_1 como parámetros libres fijados por un análisis estadístico.

1. Análisis de mínimos cuadrados

A partir de la ecuación (4.7), conocemos que $V_{\rm PMNS} = R_\ell\, \Phi\, R_n^T$, donde Φ es la siguiente matriz diagonal:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\phi_1} & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\phi_2} \end{pmatrix},$$

donde ϕ_1 y ϕ_2 son parámetros libres.

Entonces, el análisis anterior implica que la matriz PMNS es una función de los parámetros libres $(m_1, c_\ell, \phi_1, \phi_2)$, donde hemos elegido m_1 como la masa del neutrino más liviano. Después de un ajuste numérico mediante el análisis de χ^2, se encuentra que para nuestra elección particular de las matrices de masa leptónicas de cinco ceros de textura en la ecuación (4.2), se favorece la jerarquía normal. Despreciando las correlaciones, la función χ^2 viene dada por

$$\chi^2 = P_J^2 + \sum_{i,j=1,2,3} P_{ij}^2,$$

donde los "pulls"son

$$P_{ij} = \frac{U_{ij} - \bar{U}_{ij}}{\delta U_{ij}},$$

donde $U_{ij} = |(V_{\rm PMNS})_{ij}|$ es el valor absoluto de los componentes del producto de las matrices de diagonalización (4.7). Los valores absolutos $\bar{U}_{ij}$ corresponden a los promedios globales de las componentes de la matriz PMNS y δU_{ij} corresponde a errores de 1σ. P_J es el "pull" del invariante de Jarlskog, que en la parametrización estándar viene dado por $\bar{J} = c_{12}c_{23}c_{13}^2 s_{12}s_{23}s_{13} = -0.0270054$ y la correspondiente incertidumbre de 1σ es $\delta J = 0.0106304$, para un ordenamiento normal [95]. La predicción teórica viene dada por $J = \mathrm{Im}\,(U_{\mu 3}U_{\tau 3}^* U_{\mu 2}U_{\tau 2}^*)$, donde en esta expresión U representa la matriz de mezcla PMNS. También se impone el límite superior $m_1 + m_2 + m_3 < 0.17\,\mathrm{eV}$ [57, 58, 95, 96].

Utilizando los datos de [30] [3], los resultados del ajuste se muestran en las siguientes tablas:

m_1 (eV)	c_ℓ (eV)	ϕ_1 (rad)	ϕ_2 (rad)	$\chi^2_{\text{mín}}$
$0.00395\pm^{0.00062}_{0.00078}$	523176.	0.0190664	1.56122	12.4204

Tabla VI: Parámetros libres de mejor ajuste y la función χ^2 mínima.

P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{31}	P_{32}	P_{33}	P_J
0.428531	-0.385085	0.0430767	-0.205321	-1.2577	1.91336	0.290472	1.25036	-2.2701	0.0228083

Tabla VII: $P_{i,j}$ es el "pull"de la componente i, j de la matriz PMNS y P_J es el "pull"del invariante Jarlskog en el análisis χ^2. El mínimo de la función χ^2 es de 12.4204 para diez observables y cuatro parámetros $(m_1, c_\ell, \phi_1, \phi_2)$. La calidad del ajuste es $\chi^2/\text{d.o.f} = 2.07$ que es un valor relativamente alto debido a los "pulls" de P_{33} y P_{23} que tienen una desviación alrededor de 2σ respecto a sus valores experimentales, a pesar de este resultado sigue siendo un ajuste aceptable.

En nuestro análisis χ^2, los pseudo observables son los valores absolutos de los componentes de la matriz PMNS y el invariante de Jarlskog, con "pulls" $P_{i,j}$ y P_J, respectivamente. No consideramos las correlaciones entre ellas [4].

Aunque el valor de la calidad del ajuste $\chi^2/\text{d.o.f} \sim 2.07$ no es óptimo, el resultado es aceptable. Podemos ver que la principal fuente de discrepancia está relacionada con las componentes $(V_{\text{PMNS}})_{23}$ y $(V_{\text{PMNS}})_{33}$, que se desvían de sus valores experimentales en 2σ. Hay que destacar aquí que una masa del neutrino más liviano igual a cero y el ordenamiento inverso de las masas de neutrinos no se ven favorecidos por esta textura (lo mismo ocurre con las texturas equivalentes vía WBT). Es posible que para otra textura no equivalente de cinco ceros se necesite implementar el ordenamiento inverso, y este tema requiere un estudio más dedicado.

B. Cinco ceros de textura: segundo caso

Supongamos ahora que en el contexto del SMRHN, con los neutrinos siendo sólo partículas de tipo Dirac, existe una simetría que produce las matrices de masa hermíticas M'_n y M'_ℓ, con la siguiente textura:

$$M'_n = \begin{pmatrix} 0 & C_n & 0 \\ C_n^* & E_n & B_n \\ 0 & B_n^* & A_n \end{pmatrix}, \quad M'_\ell = \begin{pmatrix} 0 & C_\ell & 0 \\ C_\ell^* & 0 & B_\ell \\ 0 & B_\ell^* & A_\ell \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Analicemos las consecuencias de este nuevo patrón con tres ceros de textura en el sector cargado y dos en el neutro. Sin perder la generalidad, es posible eliminar las fases de la matriz M'_ℓ mediante una WBT, de modo que la fase de violación del CP sólo aparece en la matriz de masa de neutrinos. El álgebra muestra que es posible diagonalizar el sector leptónico cargado $M_\ell = U_\ell D_\ell U_\ell^\dagger$ (que como en la sección anterior definimos $(M_\ell)_{i,j} = |(M'_\ell)_{i,j}|$), donde D_ℓ =Diag. $(m_e, -m_\mu, m_\tau)$, para aprovechar al máximo el uso de la siguiente matriz unitaria [106]:

$$U_\ell = \begin{pmatrix} e^{i\theta_1}\sqrt{\frac{m_\mu m_\tau(A_\ell - m_e)}{A_\ell(m_\mu+m_e)(m_\tau-m_e)}} & -e^{i\theta_2}\sqrt{\frac{m_e m_\tau(m_\mu+A_l)}{A_\ell(m_\mu+m_e)(m_\tau+m_\mu)}} & \sqrt{\frac{-m_e m_\mu(A_\ell-m_\tau)}{A_\ell(m_\tau-m_e)(m_\tau+m_\mu)}} \\ e^{i\theta_1}\sqrt{\frac{m_e(m_e-A_\ell)}{(-m_\mu-m_e)(m_\tau-m_e)}} & e^{i\theta_2}\sqrt{\frac{m_\mu(A_\ell+m_\mu)}{(m_\mu+m_e)(m_\tau+m_\mu)}} & \sqrt{\frac{m_\tau(m_\tau-A_\ell)}{(m_\tau-m_e)(m_\tau+m_\mu)}} \\ -e^{i\theta_1}\sqrt{\frac{m_e(A_l+m_\mu)(A_\ell-m_\tau)}{A_\ell(-m_\mu-m_e)(m_\tau-m_e)}} & -e^{i\theta_2}\sqrt{\frac{m_\mu(A_\ell-m_e)(m_\tau-A_\ell)}{A_\ell(m_\mu+m_e)(m_\tau+m_\mu)}} & \sqrt{\frac{m_\tau(A_l-m_e)(A_\ell+m_\mu)}{A_\ell(m_\tau-m_e)(m_\tau+m_\mu)}} \end{pmatrix}, \tag{4.11}$$

[3] NuFIT collaboration (http://www.nu-fit.org/?q=node/211)(with SK atmospheric data).

[4] Las colaboraciones reportan efectos de correlación entre observables, en nuestro caso, las componentes de la matriz PMNS son el resultado de un ajuste global. Sin embargo, en fenomenología, es una práctica común utilizar pseudo observables.

donde θ_1 y θ_2 son fases arbitrarias y $A_\ell = m_e - m_\mu + m_\tau$. Aunque las fases θ_1 y θ_2 en la matriz de rotación de U_l no son fases CP (pueden ser absorbidas en los campos), estas fases son bastante útiles para hacer coincidir nuestra expresión teórica para la matriz PMNS con la convención estándar [89]. Para obtener los tres ceros de textura en la matriz de masa leptónica cargada, también son necesarias las siguientes relaciones sobre los parámetros:

$$|B_\ell| = \sqrt{\frac{(A_\ell - m_e)(A_\ell + m_\mu)(m_\tau - A_\ell)}{A_\ell}} \quad \text{y}$$
$$|C_\ell| = \sqrt{\frac{m_e\, m_\mu\, m_\tau}{A_\ell}}.$$

Para el sector de neutrinos, estamos sujetos a la condición $U_\ell^\dagger U_n = V_{\text{PMNS}}$, y necesariamente, la matriz de diagonalización debe estar dada por $U_n = U_\ell V_{\text{PMNS}}$, por lo que la relación entre la matriz de masa en la base débil y la matriz diagonal D_n en el espacio de masa es

$$\begin{aligned} M_n' = \begin{pmatrix} 0 & C_n & 0 \\ C_n^* & E_n & B_n \\ 0 & B_n^* & A_n \end{pmatrix} &= U_\ell (V_{\text{PMNS}}) D_n (V_{\text{PMNS}})^\dagger U_\ell^\dagger \\ &\equiv U_n D_n U_n^\dagger. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Para este segundo caso los únicos parámetros libres son m_1 de la matriz diagonal D_n=Diag.$(m_1, -m_2, m_3)$, y θ_1 y θ_2 de U_ℓ. Este resultado es importante ya que podemos interpretar las masas de los neutrinos como predicciones asociadas a la textura de las matrices de masa. A partir de estas expresiones, podemos obtener relaciones útiles identificando U_ℓ con la WBT U en la ecuación (2.2) [51].

1. *Resultados numéricos*

Para el segundo caso, al resolver numéricamente para obtener las texturas para la matriz de masa de neutrinos en la jerarquía normal, obtenemos

$$\begin{aligned} m_1 &= (0.00354 \pm 0.00088)\,\text{eV}, \\ m_2 &= (0.00930 \pm 0.00036)\,\text{eV}, \\ m_3 &= (0.05040 \pm 0.00030)\,\text{eV}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

En nuestro análisis numérico la principal fuente de incertidumbre surge de la fase de violación de CP, y esto es comprensible porque en el sector leptónico, este parámetro no se ha determinado con buena precisión. Las entradas numéricas asociadas para las matrices de masa de los leptones con cinco ceros de textura son (en eV): $A_n = 0.0251821$, $B_n = (-0.0122955 + 0.0244187i)$, $C_n = (0.00427236 + 0.00689527i)$, $E_n = 0.0194623$, $A_\ell = 1671.71 \times 10^6$, $|B_\ell| = 432.237 \times 10^6$, $|C_\ell| = 7.57544 \times 10^6$, y las fases $\theta_1 = 0.154895$ y $\theta_2 = 2.01797$. Las fases de B_ℓ y C_ℓ fueron absorbidas en B_n y C_n mediante una redefinición, a través de una WBT, en un paso anterior.

Por construcción, el formalismo de WBT reproduce la matriz de mezcla, la masa de los leptones cargados y las diferencias de masa de los neutrinos al cuadrado. Como parámetros de entrada, utilizamos los valores centrales del ajuste global reportado por la colaboración NuFIT (con los datos atmosféricos de SK) [30]. Al comparar con el método de mínimos cuadrados, en el formalismo WBT, los resultados numéricos no se desvían de los valores experimentales, como se muestra en la Tabla VIII.

θ_{12} (°)	θ_{23} (°)	θ_{13} (°)	δ_{CP} (°)	δm^2_{21} (eV^2)	δm^2_{31} (eV^2)	m_e (MeV)	m_μ (MeV)	m_τ (MeV)
33.82	48.6	8.60	221	7.39×10^{-5}	2.528×10^{-3}	0.510999	105.658	1776.86

Tabla VIII: Valores de salida en nuestro análisis.

V. DISCUSIÓN

Es importante mencionar el útil método de la WBT para encontrar ceros de textura. Los resultados hallados así lo demuestran. Pero hay que mencionar que su aplicación se reduce a modelos cuyos campos derechos sean singletes bajo simetrías no abelianas. Por otro lado, el procedimiento desarrollado en la sección IV A, usando el método de los mínimos cuadrados, que minimiza la relación entre los parámetros libres del modelo con las cantidades físicas experimentales y sus incertidumbres, se vuelve complejo de implementar para incluir la fase responsable de la violación de CP. Solo se toman en cuentan los valores absolutos de las entradas de la matriz de mezcla, por lo que es imposible encontrar las matrices de diagonalización correctas de las matrices de masa que reproduzcan las respectivas matrices de mezcla. Pero es importante decir que el proceso fue útil en la predicción de las masas de los neutrinos.

En el caso del sector de quarks se encontraron varios modelos de cinco ceros de textura consistentes. Las predicciones muestran el papel preponderante que juegan las masas de las partículas en algunas de las entradas de la matriz de mezcla CKM. Aunque las contribuciones fueron importantes, éstas presentan pequeñas correcciones asociadas con otros términos no físicos como fases y parámetros libres. Lo que se puede apreciar es que no hay entradas de mezcla que dependan exclusivamente de las masas de los quarks, como se pretendía inicialmente.

Respecto al sector leptónico, hay un esperanzador resultado, más importante que relaciones entre masas y mezclas, y es la predicción de las masas de los neutrinos. Su importancia radica en que proviene de modelos de ceros de textura, para el caso de neutrinos de Dirac, que corrobora la ya conocida pequeñez de estas masas. Esperemos que en un futuro no muy lejano se comprueben estos resultados.

VI. CONCLUSIONES

Utilizando el método de la WBT [51, 54], encontramos las configuraciones para la matriz de masa de los quarks con el máximo número de ceros de textura posibles. Para ello partimos de las bases generales (1.4a) y (1.4b), a partir de las cuales se pueden obtener las expresiones (3.7) y (3.8), respectivamente. Estos patrones corresponden a los casos I y II de la Tabla II, que reproducen las masas de los quarks, los ángulos de mezcla y la fase de violación de CP, con una desviación respecto del valor experimental inferior a 1σ. Según nuestro análisis (módulo de permutaciones), sólo estas configuraciones de cinco ceros son posibles con los patrones mostrados en la Tabla I.

Los casos I y II corresponden a las texturas de cinco ceros indicados en las ecuaciones (3.9) y (3.14), respectivamente. El primer caso tiene nueve parámetros libres: 7 reales y 2 fases. Mientras que el segundo caso tiene ocho parámetros libres: 7 reales y 1 fase. En ambos casos, es necesario reproducir diez cantidades físicas: 6 masas de quarks, 3 ángulos de mezcla y la fase de violación de CP, la falta de equilibrio entre el número de parámetros libres y las cantidades físicas implica que existen relaciones físicas entre las masas de quarks y los ángulos de mezcla de la matriz CKM, que se resumen en la Tabla V. Adicionalmente, podemos observar que se mantiene la relación GST [47] y se sigue sosteniendo una contribución importante de violación CP en el contexto del modelo. El primer caso (I) es una propuesta original no contemplada por Fritzsch y otros autores [25, 42, 75, 79, 85, 101], mientras que el caso II, sí fue considerado por estos autores, pero nosotros tomamos el caso adicional de un autovalor negativo para la masa del quark down más liviano, es decir, $\lambda_{1d} < 0$. Aquí, hay que mencionar que sólo es necesario considerar un autovalor negativo para cada matriz de masa sin perder generalidad (Apéndice D). Además, es importante decir que las relaciones de la Tabla V son similares a los resultados dados en la literatura [43, 50, 68, 85, 101].

Por otro lado, la idea de los ceros de textura para las matrices de masa de los quarks, es encontrar el patrón más simple que arroje relaciones consistentes y permitidas experimentalmente entre las masas de los quarks y los parámetros de mezcla de sabores [42]. En nuestro trabajo pudimos verificar que las razones de masa de los quarks, sí contribuyen de manera importante a varias de las relaciones de parámetros de mezcla de sabores, los cuales están indicados en la Tabla IV; pero hay que mencionar que en la Tabla V, se puede observar contribuciones adicionales no dependientes exclusivamente de las masas de los quarks, como lo son el parámetro libre α_μ y algunas de las fases responsables de la violación CP.

Respecto a la parte leptónica, en este análisis, exploramos las consecuencias de extender el ME con tres neutrinos derechos que permiten nueve términos de masa de Dirac complejos adicionales para el sector leptónico neutro, excluyendo la posibilidad de tener masas de Majorana fundamentales. En este modelo extendido, no es posible determinar las masas de los neutrinos a partir de primeros principios; sin embargo, como es bien sabido en la literatura, imponiendo simetrías discretas o continuas o, de forma equivalente, una textura para las matrices de masas de los leptones, es posible determinar las masas de los neutrinos. Este no es un ejercicio trivial ya que el número de ceros de textura y los correspondientes parámetros libres deben ser ajustados para obtener resultados y predicciones físicas consistentes. Bajo estas condiciones un ansatz, para las matrices de masa leptónicas, emerge de la similitud quark-leptón, permitiéndonos extender el análisis de las matrices de masa del sector de los quarks al sector de leptones, lo cual es una cuestión natural e importante. Esto nos permitió considerar, sin perder generalidad, las matrices de masa del sector leptónico como hermíticas, de tal manera que es posible aplicar el formalismo WBT sin ninguna restricción. Aprovechando el gran número de técnicas desarrolladas en el sector de los quarks, los ceros de textura facilitan el análisis para la obtención de las masas leptónicas y la matriz de mezcla de PMNS. Los ceros de textura en las matrices de masa leptónicas pueden deducirse de simetrías ocultas adicionales que no permiten ciertas entradas en el Lagrangiano de Yukawa; sin embargo, este no es el propósito del presente trabajo y dejamos esta exploración para futuros estudios.

Se consideraron dos texturas diferentes de cinco ceros para las matrices de masas leptónicas hermíticas, una con tres ceros de textura en el sector neutro y dos en el sector cargado, y la otra con dos ceros en el sector neutro y tres en el cargado. Para obtener resultados fiables, utilizamos dos enfoques diferentes, asumiendo para ambos un ordenamiento normal para las masas físicas de los neutrinos. Contando los grados de libertad en el sector leptónico, y tras hacer uso del teorema polar del álgebra matricial y de las consecuencias de la WBT, hemos concluido que con cinco ceros de textura en las matrices de masa leptónicas hermíticas, sólo se puede conseguir una predicción. Para el primer caso, comenzamos considerando las cinco estructuras de textura independientes presentadas para los quarks en la referencia [66, 87], y las modificamos hasta determinar la estructura óptima que se ha reportado en este estudio. Hasta donde sabemos, la textura analizada en nuestro estudio no ha sido considerada en la literatura hasta ahora. Para el segundo caso, utilizamos la segunda forma dada en la referencia [66, 87]. En ambos casos, la masa del neutrino más liviano puede considerarse como una predicción de los modelos estudiados.

El primer análisis, basado en un enfoque de mínimos cuadrados, se utilizó para ajustar las masas leptónicas y los parámetros de mezcla a sus correspondientes valores experimentales. Se implementó para la textura con tres ceros en el sector neutro y dos en el cargado. En esta aproximación, el ajuste de los parámetros de mezcla a los valores reportados en la literatura están por debajo de dos sigmas, con una calidad de ajuste aceptable. El mejor ajuste para la masa del neutrino más liviano en este caso fue $m_1 \approx (3.9\pm^{0.6}_{0.8}) \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}$, que es similar a los valores reportados basados en otros supuestos [38–40].

El segundo análisis fue un estudio puramente algebraico y numérico, basado en el enfoque de la WBT. Se implementó para la textura con tres ceros en el sector leptónico cargado y dos en el neutro. La predicción para la masa del neutrino más liviano fue de $(3.5 \pm 0.9) \times 10^{-3}$ eV, lo que está de acuerdo con el resultado anterior. Hay que señalar que en este caso, los resultados numéricos no se desvían de los resultados experimentales.

Para el caso de las masas de Majorana, hay varios estudios que predicen una masa de unos pocos milielectronvoltios para el neutrino más ligero [38–40, 45, 65], y estos valores son del mismo orden de magnitud que los resultados reportados en este trabajo. La mayoría de estos resultados son reportados por Fritzsch y otros, excepto la referencia [65], donde se analiza el problema asumiendo masas de neutrinos jerárquicas y una ruptura mínima de la simetría de sabor. En este trabajo, afirman que su análisis es válido para masas de Dirac o Majorana. Ahí mismo, reportaron una masa de unos pocos meV para el neutrino más liviano.

Las dos texturas diferentes de cinco ceros propuestos en las ecuaciones (4.2) y (4.10) podrían ser equivalentes en el sentido de que existe un WBT que los relaciona [51, 54]. Aunque para que tal cosa se dé, es importante que ambos modelos presenten sus resultados de masas y mezclas en la misma región de validez, es decir, que sus desviaciones estén por debajo de 1σ.

VII. RECOMENDACIONES

Si bien, hicimos una exploración exhaustiva de ceros de textura para el sector de quarks y de leptones, estos resultados pueden cambiar cuando los márgenes de los resultados experimentales se estrechen. También, hay que mencionar las limitaciones computacionales a las que estuvimos sometidos, aunque la exploración fue rigurosa, no significa que porque hayamos corrido un programa durante una semana sin encontrar soluciones, esos modelos queden definitivamente descartados. Puede que con un software más potente y veloz se encuentren otras soluciones. Este campo aun no está terminado y puede que un futuro se encuentren otros modelos con cinco ceros de textura.

En el sector leptónico no exploramos la posibilidad de encontrar modelos con seis ceros de textura. Es un trabajo que aun está pendiente. También, debido a las limitaciones computacionales, puede que hayan más modelos con cinco ceros de textura. Es algo que tenemos que explorar, y puede que hayan otras predicciones de masa para los neutrinos de Dirac. También, se está pensando en explorar la posibilidad de trabajar con neutrinos de Majorana.

VIII. ADJUNTO

Apéndice A: Valores y condiciones iniciales: masas de los quarks y la matriz CKM

Los parámetros observados para la matriz CKM se dan a una escala menor que $\mu = M_Z$, por lo que usaremos las masas de los quarks (en unidades MeV) a esa escala [107].

$$\begin{aligned} &m_u = 1.38^{+0.42}_{-0.41}\,,\ m_c = 638^{+43}_{-84},\ m_t = 172100 \pm 1200\,, \\ &m_d = 2.82 \pm 0.48\,,\ m_s = 57^{+18}_{-12}\,,\ m_b = 2860^{+160}_{-60}. \end{aligned} \tag{A1}$$

La matriz de mezcla CKM [16, 69, 95] es una matriz unitaria 3×3, que puede ser parametrizada por tres ángulos de mezcla y la fase de violación CP de Kobayashi-Maskawa (KM) [69]. Normalmente tiene la siguiente estructura estándar [20].

$$V = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12}\,c_{13} & s_{12}\,c_{13} & s_{13}\,e^{-i\delta} \\ -s_{12}\,c_{23} - c_{12}\,s_{23}\,s_{13}\,e^{i\delta} & c_{12}\,c_{23} - s_{12}\,s_{23}\,s_{13}\,e^{i\delta} & s_{23}\,c_{13} \\ s_{12}\,s_{23} - c_{12}\,c_{23}\,s_{13}\,e^{i\delta} & -c_{12}\,s_{23} - s_{12}\,c_{23}\,s_{13}\,e^{i\delta} & c_{23}\,c_{13} \end{pmatrix}, \tag{A2}$$

donde los ángulos están en el primer cuadrante, así que $\sin\theta_{ij}, \cos\theta_{ij} \geq 0$. Y δ es la fase responsable de todos los fenómenos de violación CP en los procesos de cambio de sabor en el ME. Usemos la parametrización de Wolfenstein [95]

$$\lambda = \sin\theta_{12}, \qquad A = \frac{\sin\theta_{23}}{\sin^2\theta_{12}},$$
$$\rho = \frac{\sin\theta_{13}\cos\delta}{\sin\theta_{12}\sin\theta_{23}}, \quad \eta = \frac{\sin\theta_{13}\sin\delta}{\sin\theta_{12}\sin\theta_{23}}, \tag{A3}$$

El CKMfitter Group [60] y la UTfit Collaboration [21] proveen datos numéricos actualizados de ajuste (a 1 σ) para los parámetros de Wolfenstein.

$$\lambda = 0.22500^{+0.00100}_{-0.00100}, \quad A = 0.826^{+0.012}_{-0.012},$$
$$\rho = 0.152^{+0.014}_{-0.014}, \qquad \eta = 0.357^{+0.010}_{-0.010}. \tag{A4}$$

Los resultados de ajuste para los valores de las nueve entradas de la matriz CKM son los siguientes

$$V = \begin{pmatrix} (0.97431 \pm 0.00012) & (0.22514 \pm 0.00055) & (0.00365 \pm 0.00010)e^{i(-66.8\pm 2.0)^\circ} \\ (-0.22500 \pm 0.00054)e^{i(0.0351\pm 0.0010)^\circ} & (0.97344 \pm 0.00012)e^{i(-0.001880\pm 0.000052)^\circ} & (0.04241 \pm 0.00065) \\ (0.00869 \pm 0.00014)e^{i(-22.23\pm 0.63)^\circ} & (-0.04124 \pm 0.00056)e^{i(1.056\pm 0.032)^\circ} & (0.999112 \pm 0.000024) \end{pmatrix}. \tag{A5}$$

Apéndice B: Recuento de parámetros

En esta sección, mostraremos que las matrices de masa de los leptones pueden considerarse hermíticas sin pérdida de generalidad. Después del rompimiento espontáneo de simetría de $SU(2) \otimes U(1)_X \to U(1)_Y$, el Lagrangiano de Yukawa del sector leptónico toma la siguiente forma en el espacio de interacciones:

$$-\mathcal{L}_D = \bar{\ell}'_L M'_\ell \ell'_R + \bar{\nu}'_L M'_n \nu'_R + \text{h.c}, \tag{B1}$$

donde $\nu'_{L,R} = (\nu'_e, \nu'_\mu, \nu'_\tau)^T_{L,R}$ y $\ell'_{L,R} = (e', \mu', \tau')^T_{L,R}$ (el superíndice T representa la traspuesta). Las matrices de masa más generales de los sectores cargado M'_ℓ y neutro M'_n, contienen 36 parámetros libres. El teorema de la descomposición polar [63, 86] establece que cualquier matriz T, real o compleja, puede escribirse como

$$T = HU,$$

donde H es un operador positivo (operador hermítico con valores propios positivos) y U es una matriz unitaria. Por lo tanto, podemos escribir las matrices de masa como sigue:

$$M'_\ell = H'_\ell U'_\ell, \qquad M'_n = H'_n U'_n. \tag{B2}$$

Dado que los fermiones derechos son singletes bajo el grupo $SU(2)$, la matriz unitaria puede ser absorbida en estos campos[5] de tal manera que podemos escribir el Lagrangiano en términos de matrices de masa hermíticas:

$$-\mathcal{L}_D = \bar{\ell}'_R H'_\ell \ell'_L + \bar{\nu}'_R H'_n \nu'_L + \text{h.c.}$$

H'_ℓ y H'_n se definen como positivos, sin embargo, se necesitan valores propios negativos para tener ceros en la diagonal de las matrices de masa [14], y esto puede resolverse fácilmente redefiniendo los campos correctos con una fase. Las dos matrices de masa M_ℓ y M_n son matrices complejas arbitrarias 3×3 con 36 parámetros libres, y al limitar nuestro análisis a matrices hermíticas, reducimos este número a la mitad. De los 18 parámetros libres restantes (es decir, el número de elementos no diagonales de ambas matrices dividido en 2), seis son fases, algunas de las cuales pueden ser absorbidas en una redefinición de los campos leptónicos [70, 80], que explican la existencia de una fase que viola CP.

Con 12 parámetros reales libres, tenemos que explicar: tres masas de leptones cargados, dos diferencias de masas al cuadrado del sector neutro, y tres ángulos de mezcla, totalizando 8 restricciones experimentales. Para hacer predicciones, es habitual poner ceros en algunas entradas de las matrices de masa; sin embargo, como se muestra en las referencias [13, 14, 42], dadas cualesquiera dos matrices de masa leptónicas, M_ℓ y M_n, siempre hay una WBT tal que las nuevas matrices de masa, M'_ℓ y M'_n, tienen tres ceros de textura, sin que ello implique una relación entre las cantidades físicas. Es decir, de los 12 parámetros reales (que podrían ser elementos matriciales de masa) es posible hacer 3 de ellos iguales a cero de forma que finalmente nos quedemos con 9 parámetros libres y 8 restricciones experimentales.

Para garantizar un número idéntico de variables y restricciones, es necesario un cero de textura adicional (equivalente a 4 ceros de textura) de manera que sea posible resolver todos los parámetros de las matrices de masa, incluyendo la masa del neutrino más ligero. Con dos ceros de textura físicos (es decir, cinco ceros de textura en M_ℓ y M_n) el número de parámetros libres se reduce a 7, que es precisamente el número de parámetros reales en nuestras matrices de masa. En este caso, el número de restricciones experimentales excede el número de parámetros libres, el problema está sobre restringido y no todas las texturas van a ser consistentes con los valores experimentales. Las texturas reportadas en este trabajo pueden ajustar las 8 cantidades físicas simultáneamente con 7 parámetros reales representando un resultado altamente no trivial (Para una revisión sobre estos temas, ver [42]).

[5] Hay casos en los que este proceso no aplica. Por ejemplo, en los modelos izquierdos-derechos donde los campos derechos también transforman bajo $SU(2)$, la componente unitaria no puede ser absorbida.

Apéndice C: Completitud de la WBT

En el marco del ME, las matrices de masa de los quarks pueden considerarse hermíticas sin pérdida de generalidad, codificando toda la información sobre las masas y mezclas de los quarks. Estas matrices tienen un total de 18 parámetros libres, un número elevado en comparación con los diez observables físicos, correspondientes a seis masas de quarks y cuatro parámetros físicos de la matriz CKM.

Hay que tener en cuenta que en el ME uno tiene la libertad de hacer una transformación unitaria, por ejemplo, $q_L \to Wq_L$, $q_R \to Wq_R$, $q'_L \to Wq'_L$, $q'_R \to Wq'_R$, bajo la cual las corrientes gauge permanecen reales y diagonales pero las matrices de masa transforman como

$$M_U \to W^\dagger M_U W, \quad M_D \to W^\dagger M_D W, \tag{C1}$$

Estas transformaciones se denominan WBT. Se puede comprobar fácilmente que tales transformaciones preservan la hermiticidad de las matrices de masa. Es necesario mencionar que la matriz CKM es independiente de las WBT's, por ejemplo, asumiendo que (U_U, U_D) y (U'_U, U'_D) son las respectivas transformaciones que diagonalizan a (M_U, M_D) y (M'_U, M'_D), se puede ver que

$$U'_U = W^\dagger U_U, \quad U'_D = W^\dagger U_D. \tag{C2}$$

Utilizando este resultado, la matriz de mezcla para las matrices de masa transformadas, con ayuda de una WBT, puede verse como [92],

$$\begin{aligned} V'_{ckm} &= U'^\dagger_U U'_d = (W^\dagger U_u)^\dagger (W^\dagger U_d) \\ &= (U_u)^\dagger W W^\dagger U_d = (U_u)^\dagger U_d = V_{ckm}. \end{aligned} \tag{C3}$$

Demostremos que el método de la WBT es completo en el sentido de que genera todas las posibles representaciones matriciales de masa de los quarks. Consideremos las matrices de masa de quarks hermíticas indicadas por (M_u, M_d), y diagonalicemos como sigue

$$U_u^\dagger M_u U_u = D_u \quad \text{y} \quad U_d^\dagger M_d U_d = D_d, \tag{C4}$$

donde la matriz CKM viene dada por

$$V = U_u^\dagger U_d. \tag{C5}$$

Por otro lado, cualquier otra matriz de masa (M'_u, M'_d) que reproduzca las mismas cantidades físicas,

$$U'^\dagger_u M'_u U'_u = D_u \quad \text{y} \quad U'^\dagger_d M'_d U'_d = D_d, \tag{C6}$$

tenemos que

$$V = U'^\dagger_u U'_d. \tag{C7}$$

Igualando las expresiones en (C5) y (C7) se obtiene que

$$U_u^\dagger U_d = U'^\dagger_u U'_d \Rightarrow U'_u U_u^\dagger = U'_d U_d^\dagger. \tag{C8}$$

Y al igualar las expresiones (C4) y (C6), da respectivamente

$$U'^\dagger_u M'_u U'_u = U_u^\dagger M_u U_u \quad \text{y} \quad U'^\dagger_d M'_d U'_d = U_d^\dagger M_d U_d, \tag{C9}$$

donde encontramos que las matrices de masa M_u y M_d pueden expresarse en términos de las matrices de masa M'_u y M'_d como sigue

$$M_u = U_u U'^\dagger_u M'_u U'_u U_u^\dagger, \tag{C10}$$

$$M_d = U_d U'^\dagger_d M'_d U'_d U_d^\dagger. \tag{C11}$$

Y utilizando (C8) dentro de (C11), tenemos que

$$M_d = U_u U'^\dagger_u M'_d U'_u U_u^\dagger, \tag{C12}$$

que junto con (C10) y dado que $U = U_u U'^\dagger_u$ es una matriz unitaria nos permite afirmar que:
"Dos conjuntos de matrices de masa de quarks que arrojan las mismas cantidades físicas están relacionadas a través de una WBT."

Así, partiendo de matrices de masa de quarks específicas, la WBT es capaz de encontrar cualquier otra configuración de matrices de masa de quarks viables, es decir, si existe un conjunto de matrices de masa de quarks consistentes, es seguro que hay una matriz unitaria que conduzca a ellas, aunque, la dificultad reside en encontrar la matriz unitaria adecuada [51]. Debido a que algunos ceros de textura deben estar a lo largo de los elementos diagonales de ambas matrices de masa de quarks "up" y "down", implica que al menos uno, y máximo dos, de sus valores propios deben ser negativos [14]. Así que, siguiendo con el razonamiento, significa que se debe considerar el signo relativo de los parámetros de masa de los quarks. Lo que implica un total de 36 matrices iniciales de masa de quarks independientes, dependiendo de qué valores propios de masa de quarks sean negativos. Pero, en el caso de encontrar los ceros de la textura, dos valores propios negativos pueden reducirse a sólo uno mediante la factorización de un signo menos que puede ser absorbido en las matrices de masa de quarks (ver apéndice D), por lo que, para este caso sólo se consideran 9 matrices iniciales de masa de quarks independientes, digamos que cada una con sólo un valor propio negativo [51].

Por lo tanto, ahora somos capaces de construir explícitamente los ceros de textura en las matrices de masa de los quarks a través de la WBT. Si estos ceros de textura existen, la WBT es capaz de encontrarlos. Mediante WBT's, Branco y otros [14] muestran que siempre es posible encontrar, como máximo, tres ceros en las matrices de masa de quarks sin significado físico. Pero, esto no restringe el número de ceros que se pueden encontrar aplicando la WBT a las matrices de masa, el caso es que el modelo debe ser puesto en un contexto físico. Por lo tanto, hemos encontrado ceros adicionales [51] (cuatro y hasta cinco ceros de textura) utilizando los datos recientes de masa y mezcla de quarks. Estos ceros adicionales tienen ahora significados físicos porque se obtuvieron a partir de datos experimentales específicos.

Apéndice D: Un valor propio negativo para cada masa del sector de quarks up y down

Las WBT's nos permite usar la base (1.4a) (o la base (1.4b)) como las matrices "de punto de partida" para generar cualquier representación viable de las matrices de masa de los quarks [51, 54]. Si hay ceros de textura en las matrices de masa, esta transformación es capaz de encontrarlas. Como algunos ceros de textura están localizados en las entradas diagonales de las matrices de masa hermíticas de los quarks "up" y "down", implica que al menos uno y como máximo dos de sus valores propios deben ser negativos [14]. Además, para el caso de dos autovalores negativos, estas matrices de masa pueden reducirse a un solo valor propio negativo añadiendo un signo menos a la base (1.4a) (o (1.4b)) de la siguiente manera,

$$M_u = -(-M_u) \quad \text{y/o} \quad M_d = -(-M_d),$$

e implementando las WBT's para los términos entre paréntesis. Por lo tanto, los ceros de textura en los modelos pueden deducirse, de manera general, asumiendo que cada matriz de masa de quarks M_u y M_d contiene sólo un valor propio negativo, es decir, $\lambda_{iq} < 0$ para algún $i = 1, 2$ o 3, y las restantes cantidades positivas. Esto se consigue con la "o" exclusiva $\veebar$, de la siguiente manera,

$$\lambda_{1q} < 0 \ \veebar \ \lambda_{2q} < 0 \ \veebar \ \lambda_{3q} < 0. \tag{D1}$$

y por supuesto, excluyendo el caso de que los tres autovalores sean simultáneamente negativos. Al final del proceso, ese único valor propio negativo puede hacerse positivo, al redefinir los singletes de los campos derechos.

Apéndice E: Referencias Bibliográficas

---

[1] G. Ahuja and M. Gupta. Texture zero mass matrices and nature of neutrinos. *Int. J. Mod. Phys. A*, 33(31):1844032, 2018.

[2] G. Ahuja, M. Gupta, M. Randhawa, and R. Verma. Texture specific mass matrices with Dirac neutrinos and their implications. *Phys. Rev. D*, 79:093006, 2009.

[3] G. Ahuja, S. Sharma, P. Fakay, and M. Gupta. General lepton textures and their implications. *Mod. Phys. Lett. A*, 30(34):1530025, 2015.

[4] S. Antusch, O. J. Eyton-Williams, and S. F. King. Dirac neutrinos and hybrid inflation from string theory. *JHEP*, 08:103, 2005.

[5] A. Aranda, C. Bonilla, S. Morisi, E. Peinado, and J. Valle. Dirac neutrinos from flavor symmetry. *Phys. Rev. D*, 89(3):033001, 2014.

[6] G. Barenboim, J. Turner, and Y.-L. Zhou. Light Neutrino Masses from Gravitational Condensation: the Schwinger-Dyson Approach. 9 2019.

[7] J. Barranco, D. Delepine, and L. Lopez-Lozano. Neutrino Mass Determination from a Four-Zero Texture Mass Matrix. *Phys. Rev. D*, 86:053012, 2012.

[8] R. H. Benavides, Y. Giraldo, L. Muñoz, W. A. Ponce, and E. Rojas. Five Texture Zeros for Dirac Neutrino Mass Matrices. *J. Phys. G*, 47(11):115002, 2020.

[9] C. Bonilla, J. Lamprea, E. Peinado, and J. W. F. Valle. Flavour-symmetric type-II Dirac neutrino seesaw mechanism. *Phys. Lett. B*, 779:257–261, 2018.

[10] C. Bonilla, E. Ma, E. Peinado, and J. W. F. Valle. Two-loop Dirac neutrino mass and WIMP dark matter. *Phys. Lett. B*, 762:214–218, 2016.

[11] C. Bonilla and J. W. F. Valle. Naturally light neutrinos in *Diracon* model. *Phys. Lett. B*, 762:162–165, 2016.

[12] D. Borah and B. Karmakar. A_4 flavour model for Dirac neutrinos: Type I and inverse seesaw. *Phys. Lett. B*, 780:461–470, 2018.

[13] G. Branco, L. Lavoura, and F. Mota. Nearest Neighbor Interactions and the Physical Content of Fritzsch Mass Matrices. *Phys. Rev. D*, 39:3443, 1989.

[14] G. C. Branco, D. Emmanuel-Costa, and R. Gonzalez Felipe. Texture zeros and weak basis transformations. *Phys. Lett.*, B477:147–155, 2000.

[15] C. Broggini, C. Giunti, and A. Studenikin. Electromagnetic Properties of Neutrinos. *Adv. High Energy Phys.*, 2012:459526, 2012.

[16] N. Cabibbo. Unitary symmetry and leptonic decays. *Phys.Rev.Lett.*, 10:531–533, 1963.

[17] L. M. Cebola, D. Emmanuel-Costa, and R. G. Felipe. Confronting predictive texture zeros in lepton mass matrices with current data. *Phys. Rev. D*, 92(2):025005, 2015.

[18] S. Centelles Chuliá, E. Ma, R. Srivastava, and J. W. F. Valle. Dirac Neutrinos and Dark Matter Stability from Lepton Quarticity. *Phys. Lett. B*, 767:209–213, 2017.

[19] S. Centelles Chuliá, R. Srivastava, and J. W. Valle. CP violation from flavor symmetry in a lepton quarticity dark matter model. *Phys. Lett. B*, 761:431–436, 2016.

[20] L.-L. Chau and W.-Y. Keung. Comments on the parametrization of the kobayashi-maskawa matrix. *Phys.Rev.Lett.*, 53:1802, 1984.

[21] U. Collaboration. Utfit. http://www.utfit.org/UTfit/, 2019.

[22] S. Correia, R. Felipe, and F. Joaquim. Dirac neutrinos in the 2HDM with restrictive Abelian symmetries. *Phys. Rev. D*, 100(11):115008, 2019.

[23] A. de Gouvêa. Neutrino Mass Models. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 66:197–217, 2016.

[24] S. Dell'Oro, S. Marcocci, M. Viel, and F. Vissani. Neutrinoless double beta decay: 2015 review. *Adv. High Energy Phys.*, 2016:2162659, 2016.

[25] B. R. Desai and A. R. Vaucher. Quark mass matrices with four and five texture zeroes, and the CKM matrix, in terms of mass eigenvalues. *Phys. Rev.*, D63:113001, 2001.

[26] K. Dick, M. Lindner, M. Ratz, and D. Wright. Leptogenesis with Dirac neutrinos. *Phys. Rev. Lett.*, 84:4039–4042, 2000.

[27] J. Donoghue, E. Golowich, and B. R. Holstein. *Dynamics of the standard model*, volume 2. CUP, 2014.
[28] B. Dutta and S. Nandi. A new ansatz: Fritzsch mass matrices with least modification. *Phys.Lett.*, B366:281–286, 1996.
[29] G. Dvali and L. Funcke. Small neutrino masses from gravitational θ-term. *Phys. Rev. D*, 93(11):113002, 2016.
[30] I. Esteban, M. C. Gonzalez-Garcia, A. Hernandez-Cabezudo, M. Maltoni, and T. Schwetz. Global analysis of three-flavour neutrino oscillations: synergies and tensions in the determination of θ_{23}, δ_{CP}, and the mass ordering. *JHEP*, 01:106, 2019.
[31] P. Fakay. Revisiting texture 5 zero quark mass matrices. arXiv:1410.7142 [hep-ph], 2014.
[32] P. Fakay, S. Sharma, G. Ahuja, and M. Gupta. Leptonic mixing angle θ_{13} and ruling out of minimal texture for Dirac neutrinos. *PTEP*, 2014(2):023B03, 2014.
[33] P. H. Frampton, S. L. Glashow, and D. Marfatia. Zeroes of the neutrino mass matrix. *Phys. Lett. B*, 536:79–82, 2002.
[34] H. Fritzsch. Calculating the Cabibbo Angle. *Phys. Lett. B*, 70:436–440, 1977.
[35] H. Fritzsch. Weak Interaction Mixing in the Six - Quark Theory. *Phys. Lett. B*, 73:317–322, 1978.
[36] H. Fritzsch. Quark Masses and Flavor Mixing. *Nucl. Phys.*, B155:189–207, 1979.
[37] H. Fritzsch. Hierarchical Chiral Symmetries and the Quark Mass Matrix. *Phys. Lett. B*, 184:391–396, 1987.
[38] H. Fritzsch. Neutrino Masses and Flavor Mixing. *Mod. Phys. Lett. A*, 30(16):1530012, 2015.
[39] H. Fritzsch. Neutrino oscillations and neutrino masses. *Mod. Phys. Lett. A*, 31(15):1630014, 2016.
[40] H. Fritzsch. Texture Zero Mass Matrices and Flavor Mixing of Quarks and Leptons. *Subnucl. Ser.*, 53:201–207, 2017.
[41] H. Fritzsch and Z.-Z. Xing. Flavor symmetries and the description of flavor mixing. *Phys. Lett. B*, 413:396–404, 1997.
[42] H. Fritzsch and Z.-z. Xing. Mass and flavor mixing schemes of quarks and leptons. *Prog. Part. Nucl. Phys.*, 45:1–81, 2000.
[43] H. Fritzsch and Z.-z. Xing. Four zero texture of Hermitian quark mass matrices and current experimental tests. *Phys. Lett. B*, 555:63–70, 2003.
[44] H. Fritzsch and Z.-z. Xing. Lepton mass hierarchy and neutrino mixing. *Phys. Lett. B*, 634:514–519, 2006.
[45] H. Fritzsch and Z.-z. Xing. Relating the neutrino mixing angles to a lepton mass hierarchy. *Phys. Lett. B*, 682:220–224, 2009.
[46] H. Fusaoka and Y. Koide. Updated estimate of running quark masses. *Phys. Rev.*, D57:3986–4001, 1998.
[47] R. Gatto, G. Sartori, and M. Tonin. Weak Selfmasses, Cabibbo Angle, and Broken SU(2) x SU(2). *Phys. Lett. B*, 28:128–130, 1968.
[48] R. R. Gautam, M. Singh, and M. Gupta. Neutrino mass matrices with one texture zero and a vanishing neutrino mass. *Phys. Rev. D*, 92(1):013006, 2015.
[49] M. Gell-Mann, P. Ramond, and R. Slansky. Complex Spinors and Unified Theories. *Conf. Proc. C*, 790927:315–321, 1979.
[50] P. S. Gill and M. Gupta. Fritzsch-xing mass matrices, v_{td} and cp violating phase δ. *Phys.Rev.*, D56:3143–3146, 1997.
[51] Y. Giraldo. Texture Zeros and WB Transformations in the Quark Sector of the Standard Model. *Phys. Rev.*, D86:093021, 2012.
[52] Y. Giraldo. Five-Zero Texture Non-Fritzsch like Quark Mass Matrices in the Standard Model. 11 2015.
[53] Y. Giraldo. Reply to "Comment on "Texture Zeros and WB Transformations in the Quark Sector of the Standard Model". *Phys. Rev.*, D91(3):038302, 2015.
[54] Y. Giraldo. Seeking Texture Zeros in the Quark Mass Matrix Sector of the Standard Model. *Nucl. Part. Phys. Proc.*, 267-269:76–78, 2015.
[55] Y. Giraldo, R. Martinez, E. Rojas, and J. C. Salazar. Flavored axions and the flavor problem. 7 2020.
[56] Y. Giraldo and E. Rojas. Five Non-Fritzsch Texture Zeros for Quarks Mass Matrices in the Standard Model. In *38th International Symposium on Physics in Collision*, 11 2018.
[57] E. Giusarma, M. Gerbino, O. Mena, S. Vagnozzi, S. Ho, and K. Freese. Improvement of cosmological neutrino mass bounds. *Phys. Rev. D*, 94(8):083522, 2016.
[58] E. Giusarma, S. Vagnozzi, S. Ho, S. Ferraro, K. Freese, R. Kamen-Rubio, and K.-B. Luk. Scale-dependent galaxy bias, CMB lensing-galaxy cross-correlation, and neutrino masses. *Phys. Rev. D*, 98(12):123526, 2018.
[59] S. Glashow. The Future of Elementary Particle Physics. *NATO Sci. Ser. B*, 61:687, 1980.
[60] T. C. Group. Ckmfitter. http://ckmfitter.in2p3.fr/www/html/ckm_main.html, 2019.
[61] M. Gupta and G. Ahuja. Flavor mixings and textures of the fermion mass matrices. *Int. J. Mod. Phys.*, A27:1230033, 2012.
[62] C. Hagedorn and W. Rodejohann. Minimal mass matrices for dirac neutrinos. *JHEP*, 07:034, 2005.
[63] S. Hassani. *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations, Springer International Publishing.* Springer, 1st edition, 1999.
[64] J. Heeck and W. Rodejohann. Neutrinoless Quadruple Beta Decay. *EPL*, 103(3):32001, 2013.
[65] W. G. Hollik and U. J. Saldaña Salazar. The double mass hierarchy pattern: simultaneously understanding quark and lepton mixing. *Nucl. Phys. B*, 892:364–389, 2015.
[66] L. E. Ibanez and G. G. Ross. Fermion masses and mixing angles from gauge symmetries. *Phys. Lett. B*, 332:100–110, 1994.
[67] S. Jana, V. P. K., and S. Saad. Minimal dirac neutrino mass models from $\mathrm{U(1)_R}$ gauge symmetry and left–right asymmetry at colliders. *Eur. Phys. J. C*, 79(11):916, 2019.
[68] S. Kaundal, A. Bagai, G. Ahuja, and M. Gupta. Minimal texture of quark mass matrices and precision CKM measurements. 2019.
[69] M. Kobayashi and T. Maskawa. Cp violation in the renormalizable theory of weak interaction. *Prog.Theor.Phys.*, 49:652–657, 1973.
[70] M. Kobayashi and T. Maskawa. CP Violation in the Renormalizable Theory of Weak Interaction. *Prog. Theor. Phys.*, 49:652–657, 1973.
[71] P. Langacker. Neutrino Masses from the Top Down. *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.*, 62:215–235, 2012.
[72] J. Liao, D. Marfatia, and K. Whisnant. Neutrino seesaw mechanism with texture zeros. *Nucl. Phys. B*, 900:449–476, 2015.

[73] X.-w. Liu and S. Zhou. Texture Zeros for Dirac Neutrinos and Current Experimental Tests. *Int. J. Mod. Phys. A*, 28:1350040, 2013.

[74] P. O. Ludl and W. Grimus. A complete survey of texture zeros in the lepton mass matrices. *JHEP*, 07:090, 2014. [Erratum: JHEP 10, 126 (2014)].

[75] P. O. Ludl and W. Grimus. A complete survey of texture zeros in general and symmetric quark mass matrices. *Phys. Lett.*, B744:38–42, 2015.

[76] E. Ma, N. Pollard, R. Srivastava, and M. Zakeri. Gauge $B-L$ Model with Residual Z_3 Symmetry. *Phys. Lett. B*, 750:135–138, 2015.

[77] E. Ma and O. Popov. Pathways to Naturally Small Dirac Neutrino Masses. *Phys. Lett. B*, 764:142–144, 2017.

[78] E. Ma and R. Srivastava. Dirac or inverse seesaw neutrino masses with $B-L$ gauge symmetry and S_3 flavor symmetry. *Phys. Lett. B*, 741:217–222, 2015.

[79] N. Mahajan, R. Verma, and M. Gupta. Investigating non-Fritzsch like texture specific quark mass matrices. *Int. J. Mod. Phys.*, A25:2037–2048, 2010.

[80] L. Maiani. CP Violation in Purely Lefthanded Weak Interactions. *Phys. Lett. B*, 62:183–186, 1976.

[81] P. Minkowski. $\mu \to e\gamma$ at a Rate of One Out of 10^9 Muon Decays? *Phys. Lett. B*, 67:421–428, 1977.

[82] R. N. Mohapatra and G. Senjanovic. Neutrino Mass and Spontaneous Parity Nonconservation. *Phys. Rev. Lett.*, 44:912, 1980.

[83] E. Peinado, M. Reig, R. Srivastava, and J. W. Valle. Dirac neutrinos from Peccei–Quinn symmetry: A fresh look at the axion. *Mod. Phys. Lett. A*, 35(21):2050176, 2020.

[84] W. A. Ponce and R. H. Benavides. Texture Zeros for the Standard Model Quark Mass Matrices. *Eur. Phys. J.*, C71:1641, 2011.

[85] W. A. Ponce, J. D. Gómez, and R. H. Benavides. Five texture zeros and CP violation for the standard model quark mass matrices. *Phys. Rev.*, D87(5):053016, 2013.

[86] V. Prasolov. *Problems and theorems in linear algebra, American Mathematical Society.* American Mathematical Society, 1st edition, 1994.

[87] P. Ramond, R. Roberts, and G. G. Ross. Stitching the Yukawa quilt. *Nucl. Phys. B*, 406:19–42, 1993.

[88] M. Randhawa, V. Bhatnagar, P. S. Gill, and M. Gupta. Unique mass texture for quarks and leptons. *Phys. Rev.*, D60:051301, 1999.

[89] A. Rasin. Diagonalization of quark mass matrices and the Cabibbo-Kobayashi-Maskawa matrix. 8 1997.

[90] M. Reig, D. Restrepo, J. Valle, and O. Zapata. Bound-state dark matter and Dirac neutrino masses. *Phys. Rev. D*, 97(11):115032, 2018.

[91] J. Schechter and J. Valle. Neutrino Masses in SU(2) x U(1) Theories. *Phys. Rev. D*, 22:2227, 1980.

[92] S. Sharma, P. Fakay, G. Ahuja, and M. Gupta. Clues towards unified textures. *Int. J. Mod. Phys.*, A29:1444005, 2014.

[93] S. Sharma, P. Fakay, G. Ahuja, and M. Gupta. Finding a unique texture for quark mass matrices. *Phys. Rev.*, D91:053004, 2015.

[94] M. Singh. Texture One Zero Dirac Neutrino Mass Matrix With Vanishing Determinant or Trace Condition. *Nucl. Phys. B*, 931:446–468, 2018.

[95] M. Tanabashi et al. Review of Particle Physics. *Phys. Rev.*, D98(3):030001, 2018.

[96] S. Vagnozzi, E. Giusarma, O. Mena, K. Freese, M. Gerbino, S. Ho, and M. Lattanzi. Unveiling ν secrets with cosmological data: neutrino masses and mass hierarchy. *Phys. Rev. D*, 96(12):123503, 2017.

[97] R. Verma. Lower bound on neutrino mass and possible CP violation in neutrino oscillations. *Phys. Rev. D*, 88:111301, 2013.

[98] R. Verma. Minimal Weak Basis Textures and Quark Mixing Data. *J. Phys.*, G40:125003, 2013.

[99] R. Verma. Lepton textures and neutrino oscillations. *Int. J. Mod. Phys. A*, 29(21):1444009, 2014.

[100] R. Verma. Implications of $\delta_l^{CP} \sim 270^\circ$ and $\theta_{23} \gtrsim 45^\circ$ for texture specific lepton mass matrices and $0\nu\beta\beta$ decay. *Adv. High Energy Phys.*, 2016:2094323, 2016.

[101] R. Verma. Exploring the predictability of symmetric texture zeros in quark mass matrices. *Phys. Rev.*, D96(9):093010, 2017.

[102] F. Wang, W. Wang, and J. M. Yang. Split two-Higgs-doublet model and neutrino condensation. *Europhys. Lett.*, 76:388–394, 2006.

[103] W. Wang and Z.-L. Han. Naturally Small Dirac Neutrino Mass with Intermediate $SU(2)_L$ Multiplet Fields. *JHEP*, 04:166, 2017.

[104] S. Weinberg. The Problem of Mass. *Trans. New York Acad. Sci.*, 38:185–201, 1977.

[105] Z.-z. Xing. Flavor structures of charged fermions and massive neutrinos. *Phys. Rept.*, 854:1–147, 2020.

[106] Z.-z. Xing and H. Zhang. Complete parameter space of quark mass matrices with four texture zeros. *J. Phys. G*, 30:129–136, 2004.

[107] Z.-z. Xing, H. Zhang, and S. Zhou. Impacts of the Higgs mass on vacuum stability, running fermion masses and two-body Higgs decays. *Phys. Rev.*, D86:013013, 2012.

[108] T. Yanagida. Horizontal Symmetry and Masses of Neutrinos. *Prog. Theor. Phys.*, 64:1103, 1980.

[109] C.-Y. Yao and G.-J. Ding. Systematic analysis of Dirac neutrino masses from a dimension five operator. *Phys. Rev. D*, 97(9):095042, 2018.

[110] Z. zhong Xing and Z. hua Zhao. On the four-zero texture of quark mass matrices and its stability. *Nucl.Phys.*, B897:302–325, 2015.

[111] Y.-F. Zhou. Textures and hierarchies in quark mass matrices with four texture zeros. hep-ph/0309076, 2003.