

Estabilidad de Potenciales Escalares en los Modelos
3-3-1

Andres Felipe Castillo Martinez

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
San Juan de Pasto
2019

Estabilidad de Potenciales Escalares en los Modelos
3-3-1

Andres Felipe Castillo Martinez

Trabajo de tesis para optar por el título de Físico

Director:
Yithsbey Lucas Giraldo Úsuga
PhD en Física

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
San Juan de Pasto
2019

Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Yithsbey Lucas Giraldo Úsuga

Director

German Enrique Ramos Zambrano

Jurado

Eduardo Rojas Peña

Jurado

San Juan de Pasto, 25 de Octubre del 2019

Agradecimientos

Agradezco encarecidamente al equipo de trabajo del departamento de Física de la Universidad de Nariño, que guiaron mi proceso de formación. En particular, quiero agradecer a Yithsbey Giraldo por brindarme la oportunidad de culminar este proceso con el presente trabajo de grado.

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio general sobre la estabilidad de potenciales escalares. Inicialmente se realiza un estudio de los conceptos básicos del campo escalar clásico y el sector escalar del Modelo Estándar el cual contiene solamente un campo Higgs. Luego, para comprender la naturaleza del sector escalar extendido se plantea un modelo general con dos dobletes Higgs, en donde se establece una teoría robusta para determinar la estabilidad de estos potenciales. Dicha teoría nos ayuda a generalizar la estabilidad al modelo general de N dobletes. También se presenta la aplicación de esta teoría a modelos con tripletes Higgs, como es el caso de los modelos $3 - 3 - 1$.

Palabras clave: Modelo estándar, campo Higgs, estabilidad, dobletes Higgs, tripletes Higgs

Abstract

This work presents a general study on the stability of scalar potentials. Initially a study of the basic concepts of the classic scalar field and the scalar sector of the Standard Model is carried out, which contains only one Higgs field. Then, to understand the nature of the extended scalar sector, a general model with two Higgs doublets is proposed, where a robust theory is established to determine the stability of these potentials. This theory helps us generalize stability to a general N doublet model. An application of this theory is also presented to models with Higgs triplets, as is the case of $3 - 3 - 1$ models.

Keywords: Standard model, Higgs field, stability, Higgs doublets, Higgs triplets

Contenido

Introducción	13
1. El Campo Escalar Clásico	15
1.1. El Campo Escalar Real	15
1.2. El Campo Escalar Complejo	16
1.3. Simetrías en el Modelo del Campo Escalar	17
1.4. Rompimiento Espontáneo de Simetría	18
1.5. Rompimiento Espontáneo de Simetrías Continuas	22
1.6. El Mecanismo de Higgs	25
1.7. Rompimiento Espontáneo de Simetría no Abelianas	28
2. El Modelo Estándar y el Sector Escalar	31
2.1. Estructura del Modelo Estándar	31
2.1.1. Interacciones y Partículas Elementales	32
2.2. La Matemática del Modelo Estándar	36
2.2.1. El Sector Electrodébil	36
2.3. El Sector Escalar	38
3. El Modelo General de dos Dobletes de Higgs	46
3.1. Introducción	46
3.2. El Modelo General de dos Dobletes de Higgs y Cambios de Base	46
3.3. Estabilidad	56
3.4. Criterios de Estabilidad	64
3.5. Estabilidad para el Modelo de Gunion et al.	69
3.6. El Modelo Económico 3-3-1	82
3.6.1. El Sector Escalar	83
3.6.2. Las Variables Orbitales	84
3.6.3. Estabilidad	84
4. El Modelo General de Tres Dobletes Higgs	90
4.1. Introducción	90
4.2. Bilineales	90
4.3. El Potencial General de Tres Dobletes Higgs y Transformaciones de Base	97
4.4. Estabilidad del Modelo de Tres Dobletes	103
5. El Modelo General de Tres Tripletas Higgs	109
5.1. Método 1: Parametrización por Bilineales	109
5.1.1. Bilineales	109

5.1.2.	El Potencial General de Tres Tripletes Higgs y Transformaciones de Base	111
5.1.3.	Estabilidad del Modelo de Tres Tripletes Higgs	114
5.2.	Método 2: Parametrización por Variables Orbitales	118
5.2.1.	Variables Orbitales	118
5.2.2.	El Potencial General de Tres Tripletes Higgs	121
5.2.3.	Condiciones de Estabilidad	123
5.2.4.	Criterios de estabilidad.	131
5.2.5.	Estabilidad del Potencial Escalar sin Término Cúbico en los Modelos 3-3-1 sin Carga Eléctrica Exótica.	144
6.	El Modelo General de N Dobletes Higgs	153
6.1.	Bilineales	153
6.2.	El Potencial General y Transformaciones de Base	161
6.3.	Estabilidad del Modelo de N Dobletes Higgs	164
7.	Conclusiones	169
	Bibliografía	171
	Apéndices	172
A.	Órbitas Gauge para Dos Dobletes Higgs	173
B.	Órbitas Gauge Para el Caso de n Dobletes	179
C.	Propiedades de la Matriz $\underline{K}$	185
D.	Las Matrices de Gell-Mann Generalizadas	197

Lista de figuras

1.1. Gráfica del potencial escalar cuando $\mu^2 > 0$	20
1.2. Gráfica del potencial escalar cuando $\mu^2 < 0$	20
1.3. Potencial escalar de simetría continua cuando $\mu^2 > 0$	23
1.4. Potencial escalar de simetría continua cuando $\mu^2 < 0$	24
2.1. Estructura de la materia en el Modelo Estándar.	35
2.2. Diagonalización de la matriz A	42
3.1. Las funciones determinantes de la estabilidad $f'(u)$ y $f(u)$, dadas por (3.78) y (3.77) con $\eta_{00} = 0,05$, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0,01, 0,02, 0,03)$ y $\eta_1 =$ $\eta_2 = \eta_3 = 0,002$	61

Lista de tablas

2.1. Simetrías del Modelo Estándar.	34
D.1. Esquema de numeración para las matrices generalizadas de Gell-Mann	203

Glosario

Grupo: es una estructura algebraica formada por un conjunto no vacío dotado de una operación interna que combina cualquier par de elementos para componer un tercero, dentro del mismo conjunto y que satisface las propiedades asociativa, existencia de elemento neutro y simétrico.

Grupo abeliano: es un grupo en el cual sus elementos cumplen la propiedad conmutativa.

Simetría: es una situación en que una cierta configuración, magnitud física o consecuencia queda inalterada si se cambian otros factores. En física la simetría aparece ligada a la invariancia de algo.

Lagrangiano: es una función escalar a partir de la cual se puede obtener la evolución temporal, las leyes de conservación y otras propiedades importantes de un sistema dinámico.

Bosón de Higgs: es un tipo de partícula elemental que tiene un papel fundamental en el mecanismo por el que se origina la masa de las partículas elementales.

Campo de Higgs: es un campo cuántico que permea el universo entero, y cuyo efecto es que las partículas adquieran masa, debido a la interacción asociada de partículas elementales, con el bosón de Higgs y que por la interacción consigo mismo también adquiere masa.

Introducción

El Modelo Estándar de partículas elementales es una teoría de campos cuánticos basada en el grupo gauge de simetrías $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ que describe las interacciones de las partículas fundamentales. La interacción de dos partículas, a través de los campos que originan, puede interpretarse considerando que ambas partículas intercambian una tercera partícula, llamada partícula portadora de la interacción [1]. El Modelo Estándar aborda tres de las cuatro interacciones que se consideran fundamentales: la electromagnética, débil y fuerte. Ya que, la gravedad no tiene una intensidad comparable con las demás interacciones, hasta el momento no ha sido posible tener una directriz experimental que permita excluir métodos de cuantización para la gravedad y por lo tanto, el modelo estándar se considera incompleto. Además este modelo posee más limitaciones, como la asimetría entre la materia y la antimateria, las oscilaciones de neutrinos, entre otros.

Inicialmente en los capítulos 2 y 3 de este trabajo presentamos un estudio preliminar sobre los campos escalares clásicos y el Modelo Estándar, respectivamente. Esto se realiza para familiarizarnos con la estructura matemática básica de la física de partículas, sus simetrías y el mecanismo de Higgs que permite generar las masas de las partículas fundamentales. En el capítulo 4 presentamos un modelo general con dos dobletes de Higgs, como una extensión del Modelo Estándar. En ese capítulo se desarrolla un poderoso método algebraico basado en invarianzas gauge, el cual permite determinar la estabilidad de un potencial escalar de manera precisa. Además, se presentan ejemplos de aplicación de este método a otros modelos con dobletes Higgs como el de Gunion et al. [2] y [3] y un modelo económico $3 - 3 - 1$ con dos tripletes Higgs. En el capítulo 5, se generaliza el método presentado en el anterior capítulo a tres dobletes Higgs con el uso de bilineales. En este procedimiento, surgen nuevas condiciones sobre los potenciales escalares que llevan a ecuaciones no lineales sobre las condiciones de estabilidad. Por tal motivo, en [4] recomiendan usar métodos numéricos presentados en [5] y [6]. En el capítulo 6, desarrollamos la estabilidad del modelo general de tres tripletes de Higgs usando

dos métodos, el primero basado en las bilineales del capítulo 5 y el segundo basado en el método algebraico desarrollado en el capítulo 4. Adicionalmente, se desarrolla la estabilidad del potencial escalar $3-3-1$ sin término cúbico y sin cargas eléctricas exóticas presentado en [7]. En el capítulo 7, se presenta las condiciones generales para la estabilidad de un modelo con N dobletes de Higgs, basados en el desarrollo de bilineales, tal cual como se realiza en el capítulo 5. Por último presentamos las conclusiones en el capítulo 8.

En el apéndice A y B discutimos la estructura del espacio de las órbitas gauge para el modelo general de dos dobletes de Higgs y para el modelo general con un número arbitrario de dobletes Higgs, respectivamente. En el apéndice C damos las relaciones matemáticas correspondientes a las bilineales desarrolladas en el capítulo 5. Finalmente en el apéndice D se describe las matrices de Gell-Mann generalizadas, las cuales son necesarias para la estabilidad de un modelo con N dobletes de Higgs.

Capítulo 1

El Campo Escalar Clásico

En matemáticas y física, un campo escalar asocia un valor escalar a cada punto en el espacio. El escalar puede o bien ser un número matemático sin dimensión o una cantidad física. Como ejemplo, en el contexto físico, algunos campos escalares típicos son la temperatura en una placa metálica, el potencial electrostático, la distribución de presión en un fluido, y los campos cuánticos de espín cero, como el campo Higgs tratado en [7] y en [8].

Matemáticamente un campo escalar sobre una región U es una función o distribución real o compleja sobre U [9]. La región U puede ser un conjunto en algún espacio euclidiano, espacio de Minkowski, o más generalmente en un subconjunto de una variedad. En resumen un campo escalar es una función $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Un campo escalar físico debería ser independiente del sistema de coordenadas usado para describir el sistema físico; es decir, dos observadores usando las mismas unidades deben estar de acuerdo en el valor numérico del campo escalar en cualquier punto dado del campo físico. Tomando el caso relativista, si dos observadores miden un campo escalar, este debe ser invariante bajo transformaciones de Lorentz; es decir, se cumple que

$$\Phi(x') = \Phi(x). \quad (1.1)$$

1.1. El Campo Escalar Real

El campo escalar real, sencillamente es un campo relativista real para partículas de espín 0, entonces tomando su complejo conjugado

$$\Phi(x) = \Phi^*(x). \quad (1.2)$$

Este campo es invariante bajo transformaciones de Lorentz (1.1), asimismo, dicho campo satisface la ecuación de Klein-Gordon para una partícula libre

$$(\square + m^2)\Phi(x) = 0, \quad (1.3)$$

donde, el operador D'Alembertiano se define como $\square = \partial^\mu \partial_\mu$ y m es la masa de la partícula. La densidad Lagrangiana que describe la dinámica del campo es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi - \frac{1}{2} m^2 \Phi^2. \quad (1.4)$$

y usando las ecuaciones de Euler-Lagrange sobre la densidad Lagrangiana da como resultado las ecuaciones de Klein-Gordon (1.3). Si bien, la ecuación de Klein Gordon describe el campo escalar en ausencia de interacciones, estos campos pueden interactuar con otros e incluso consigo mismo. Sin embargo, este tópico no es de interés para el desarrollo de este trabajo; el interés principal es tener una idea que facilite la comprensión de la dinámica del campo escalar.

1.2. El Campo Escalar Complejo

Un campo escalar complejo $\Phi(x)$, puede ser escrito en términos de dos campos reales en la forma

$$\Phi(x) = \frac{\Phi_1(x) + i\Phi_2(x)}{\sqrt{2}}, \quad (1.5)$$

donde su conjugado queda así

$$\Phi^*(x) = \frac{\Phi_1(x) - i\Phi_2(x)}{\sqrt{2}}. \quad (1.6)$$

Al despejar Φ_1 y Φ_2 se tiene

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\Phi(x) + \Phi^*(x)), \\ \Phi_2 &= -i \frac{\sqrt{2}}{2} (\Phi(x) - \Phi^*(x)). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Debido a que los campos Φ_1 y Φ_2 de (1.7) son reales, se puede usar la densidad Lagrangiana (1.3) tal que

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_1 \partial^\mu \Phi_1 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2 + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi_2 \partial^\mu \Phi_2 - \frac{1}{2} m^2 \phi_1^2. \quad (1.8)$$

Se reemplaza (1.7) en (1.8)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2} \partial_\mu \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\Phi + \Phi^*) \right] \partial^\mu \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\Phi - \Phi^*) \right] - \frac{m^2}{2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} (\Phi + \Phi^*) \right]^2 \\ & + \frac{1}{2} \partial_\mu \left[\frac{-i\sqrt{2}}{2} (\Phi - \Phi^*) \right] \partial^\mu \left[\frac{-i\sqrt{2}}{2} (\Phi - \Phi^*) \right] - \frac{m^2}{2} \left[\frac{-i\sqrt{2}}{2} (\Phi - \Phi^*) \right]^2. \quad (1.9)\end{aligned}$$

Se desarrolla la anterior expresión

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{4} (\partial_\mu \Phi + \partial_\mu \Phi^*) (\partial^\mu \Phi + \partial^\mu \Phi^*) - \frac{m^2}{4} (\Phi^2 + \Phi^{*2} + 2\Phi\Phi^*) \\ & - \frac{1}{4} (\partial_\mu \Phi - \partial_\mu \Phi^*) (\partial^\mu \Phi - \partial^\mu \Phi^*) + \frac{m^2}{4} (\Phi^2 + \Phi^{*2} - 2\Phi\Phi^*)\end{aligned} \quad (1.10)$$

La densidad Lagrangiana para este campo queda en la forma

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - m^2 \Phi \Phi^*, \quad (1.11)$$

en donde, las ecuaciones de movimiento dan como resultado la ecuación de Klein-Gordon.

1.3. Simetrías en el Modelo del Campo Escalar

Las transformaciones que experimenta un sistema físico pueden ser de tipo local las cuales dependen de las coordenadas, o de tipo global en donde la transformación afecta las propiedades internas del sistema, pero no depende de las coordenadas. Cualquier transformación sobre un sistema físico en donde el Lagrangiano quede invariante, se dice que es una transformación de simetría. Sin embargo, esto no siempre sucede, en algunos casos cuando se realiza una transformación local sobre un sistema, puede que este no sea invariante. Para poder resolver esto, se introduce el concepto de simetría gauge, las cuales permiten redefinir los campos o las partículas en términos de unos a otros, de tal forma que las leyes físicas permanezcan inalteradas. Las leyes no cambian porque los cambios hechos sobre un campo o partícula se cancelan por los cambios hechos por otros campos o partículas. Si las partículas no interactúan, entonces las simetrías gauge son globales, el cual quiere

decir que las redefiniciones son las mismas en todo lugar y en todo tiempo. Pero, si se requiere que las redefiniciones varían en lugares y tiempo, la simetría se convierte en gauge local, entonces forzosamente debemos añadir campos auxiliares en las leyes que describen las interacciones (fuerzas) entre las partículas originales. Los cambios en los campos auxiliares cancelan los cambios locales en otros campos. Estos campos auxiliares también son llamados campos gauge, y son los campos que originan las fuerzas entre las partículas.

Como ejemplo, tomamos un sistema descrito por la densidad Lagrangiana (1.11) sobre el campo escalar. Si se realiza una transformación de simetría global $U(1)$ en donde

$$\Phi'(x) = e^{-iq\theta}\Phi(x), \quad (1.12)$$

y para su complejo conjugado, se usa la transformación

$$\Phi'^*(x) = e^{iq\theta}\Phi^*(x). \quad (1.13)$$

Es claro ver que la densidad Lagrangiana (1.11) es invariante bajo una transformación $U \in U(1)$ representada por (1.12) y (1.13). Si el estado base del sistema físico no conserva la simetría se dice que hay un rompimiento espontáneo de simetría.

1.4. Rompimiento Espontáneo de Simetría

El rompimiento espontáneo de simetría es un proceso en el cual un sistema físico en un estado simétrico termina en un sistema asimétrico [10]. En particular, esto puede suceder en sistemas donde las ecuaciones de movimiento de la densidad Lagrangiana corresponden a simetrías, pero las soluciones de vacío de energía más bajas no exhiben la misma simetría. Cuando el sistema es evaluado en uno de estas soluciones de vacío, la simetría es rota por las perturbaciones alrededor de ese vacío, aunque la densidad Lagrangiana mantiene la simetría.

Tomemos como ejemplo un rompimiento espontáneo de simetría para un modelo con un escalar real. Para lograr esto consideramos el Lagrangiano que describe un

campo escalar real Φ

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - V(\Phi), \quad (1.14)$$

donde el primer término corresponde a la energía cinética y el segundo término es la energía potencial del sistema, tal que¹

$$V(\Phi) = \frac{1}{2}\mu^2\Phi^2 + \frac{1}{4}|\lambda|\Phi^4, \quad (1.15)$$

donde μ está relacionado con la masa del campo escalar. Además, si se fija el valor $|\lambda| > 0$, aseguramos que el potencial sea estable².

El Lagrangiano (1.14) es invariante bajo una transformación de paridad

$$\Phi = -\Phi. \quad (1.16)$$

El estado de más baja energía del potencial $V(\Phi)$ (1.15) ocurre cuando su valor es mínimo. Dicho estado lo denominamos $\langle \Phi \rangle_0$ y será el valor esperado en el vacío del campo Φ .

Si se considera $\mu^2 > 0$, el valor mínimo del potencial se puede determinar en sus puntos extremos

$$\frac{dV}{d\Phi} = 0, \quad (1.17)$$

es decir

$$\Phi(\mu^2 + |\lambda|\Phi^2) = 0, \quad (1.18)$$

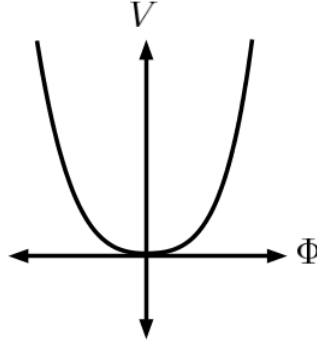
de donde $\Phi = 0$, es el valor que minimiza el potencial, por lo tanto, este corresponde al estado base denominado valor esperado del vacío, esto caso se representa en la figura 1.1. Por otra parte, al considerar oscilaciones pequeñas alrededor del vacío del sistema descrito por (1.14), entonces el potencial en (1.15), haciendo una aproximación hasta segundo orden, tenemos que

$$\mathcal{L}_{S.O} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \Phi)(\partial^\mu \Phi) - \mu^2\Phi^2], \quad (1.19)$$

¹El potencial escalar no posee campos de orden superior a cuatro, a fin de que el modelo sea renormalizable

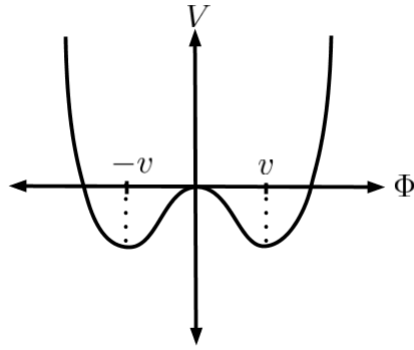
²Con esto se quiere decir que $V(\Phi)$ posea un mínimo global, por lo que está acotado por debajo, e implicaría que no haya una dirección en el espacio escalar en la que el potencial tienda a menos infinito

Figura 1.1: Gráfica del potencial escalar cuando $\mu^2 > 0$



Fuente: Esta investigación

Figura 1.2: Gráfica del potencial escalar cuando $\mu^2 < 0$



Fuente: Esta investigación

que describe un campo escalar con masa $|\mu|$.

Un caso más interesante se presenta cuando $\mu^2 < 0$, donde, el potencial se puede escribir como

$$V(\Phi) = -\frac{1}{2}|\mu^2|\Phi^2 + \frac{1}{4}|\lambda|\Phi^4, \quad (1.20)$$

el mínimo del potencial se encuentra en dos valores

$$\langle \Phi \rangle_0 = \pm \sqrt{\frac{|\mu^2|}{|\lambda|}} = \pm v, \quad (1.21)$$

la situación se puede representar en la gráfica 1.2. Se puede ver que hay una dege-

neración del vacío, debido a que existen dos valores que pueden ser elegidos como estados base, que significa que las consecuencias físicas deben ser independientes del valor que se elija para el vacío.

En este ejemplo se ve que el Lagrangiano es invariante bajo un grupo de transformaciones, pero el estado base no lo es, por lo tanto se está presentando un rompimiento espontáneo de simetría (ver ecuación (1.25)).

Ahora elegimos uno de los valores para el vacío; tomemos

$$\langle \Phi \rangle_0 = v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}}, \quad (1.22)$$

en donde v es el valor positivo de (1.21). Una explicación física a este modelo se puede lograr si se hace una expansión del Lagrangiano alrededor del estado base; es decir, se redefine el campo escalar como

$$\Phi' = \Phi - \langle \Phi \rangle_0 = \Phi - v \implies \Phi = \Phi' + v. \quad (1.23)$$

Al sustituir (1.23) en el Lagrangiano (1.14) y (1.15) se tiene que:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu (\Phi' + v)) (\partial^\mu (\Phi' + v)) + \frac{1}{2} |\mu^2| (\Phi' + v)^2 - \frac{1}{4} |\lambda| (\Phi' + v)^4. \quad (1.24)$$

Si se destruyen los paréntesis para resolver las potencias y teniendo en cuenta que $v = \sqrt{-\mu^2/|\lambda|} \rightarrow |\lambda| = -\mu^2/v^2$, obtenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi') (\partial^\mu \Phi') + \mu^2 \left(\frac{\Phi'^4}{4v^2} + \frac{\Phi'^3}{v} + \Phi'^2 - \frac{v^2}{4} \right), \quad (1.25)$$

que rompe espontáneamente la simetría discreta $\Phi \rightarrow -\Phi$. Al tomar pequeñas oscilaciones alrededor del vacío a segundo orden con $\mu^2 < 0$, el Lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L}_{S.O} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \Phi') (\partial^\mu \Phi') - 2|\mu^2| \Phi'^2], \quad (1.26)$$

donde el valor constante se puede descartar, debido a que este no contribuye al análisis. En este caso el término $2|\mu^2|$ corresponde a la masa de la partícula escalar. Con esto se culmina el análisis para el rompimiento espontáneo de simetría para una transformación discreta de paridad $\Phi \rightarrow -\Phi$. En la siguiente sección se muestra un ejemplo de lo que sucede cuando se rompe una simetría continua.

1.5. Rompimiento Espontáneo de Simetrías Continuas

El Lagrangiano para dos campos escalares reales Φ_1 y Φ_2 tiene la forma:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \Phi_1)(\partial^\mu \Phi_1) + (\partial_\mu \Phi_2)(\partial^\mu \Phi_2)] - V(\Phi_1^2 + \Phi_2^2). \quad (1.27)$$

Los campos Φ_1 y Φ_2 pueden ser expresados como las componentes de un doblete escalar

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (1.28)$$

en donde, al aplicar una transformación $O \in SO(2)$ (rotaciones en el plano) sobre los dobletes se tiene

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Esta transformación mantiene invariante el Lagrangiano (1.27). Ahora, como en la sección anterior, se considera el potencial en función de los campos hasta cuarto orden

$$V(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) = V(\Phi^2) = \frac{1}{2}\mu^2\Phi^2 + \frac{1}{4}|\lambda|(\Phi^2)^2, \quad (1.30)$$

teniendo en cuenta que $\Phi^2 = \Phi^T \Phi = \Phi_1^2 + \Phi_2^2$.

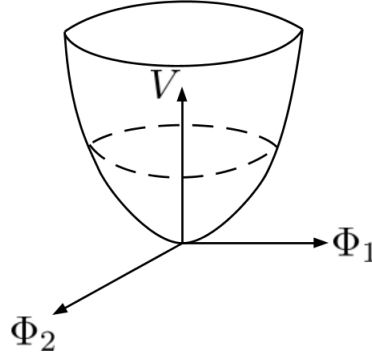
Con respecto a los puntos mínimos del potencial, se procede de manera similar como en el caso de simetrías discretas. Primero se considera que $\mu^2 > 0$, lo cual conduce a lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \Phi_1} &= \frac{1}{2}\mu^2 \frac{\partial}{\partial \Phi_1}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) + \frac{1}{4}|\lambda| \frac{\partial}{\partial \Phi_1}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 = 0, \\ &\Rightarrow [\mu^2 + |\lambda|(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)] \Phi_1 = 0 \end{aligned} \quad (1.31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \Phi_2} &= \frac{1}{2}\mu^2 \frac{\partial}{\partial \Phi_2}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) + \frac{1}{4}|\lambda| \frac{\partial}{\partial \Phi_2}(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 = 0, \\ &\Rightarrow [\mu^2 + |\lambda|(\Phi_1^2 + \Phi_2^2)] \Phi_2 = 0 \end{aligned} \quad (1.32)$$

Claramente la solución del anterior sistema de ecuaciones es $\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \langle \Phi \rangle_0$ y la figura 1.3 ilustra la situación presentada. Para pequeñas oscilaciones de los campos

Figura 1.3: Potencial escalar de simetría continua cuando $\mu^2 > 0$



Fuente: Esta investigación

escalares del vacío, el Lagrangiano (1.27) toma la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left\{ [(\partial_\mu \Phi_1)(\partial^\mu \Phi_1) - \mu^2 \Phi_1^2] + [(\partial_\mu \Phi_2)(\partial^\mu \Phi_2) - \mu^2 \Phi_2^2] \right\}, \quad (1.33)$$

donde se observa que las partículas escalares Φ_1 y Φ_2 tienen la misma masa $|\mu^2|$.

El caso $\mu^2 < 0$, los puntos mínimos son tratados de manera análoga a la anterior sección. Esto conduce a un rompimiento espontáneo de simetría, ya que el valor mínimo del potencial se encuentra en el producto

$$\langle \Phi | \Phi \rangle_0 = \pm \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}}, \quad (1.34)$$

tal que

$$\langle \Phi \rangle_0^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 = \frac{-\mu^2}{|\lambda|}. \quad (1.35)$$

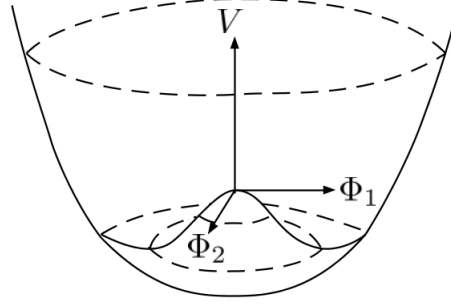
El gráfico 1.4 ilustra el potencial, donde claramente se puede ver que el vacío está degenerado, debido a que el estado base está comprendido en la circunferencia de radio $\sqrt{-\mu^2/|\lambda|}$. Ahora se elige un valor para el vacío, por ejemplo, sea $\Phi_2 = 0$ y $\Phi_1^2 = -\mu^2/|\lambda|$, por lo tanto, se tiene que

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

donde $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}}$. El desplazamiento del campo alrededor del vacío

$$\Phi' = \Phi - \langle \Phi \rangle_0, \quad (1.37)$$

Figura 1.4: Potencial escalar de simetría continua cuando $\mu^2 < 0$



Fuente: Esta investigación

implica que

$$\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta + v \\ \xi \end{pmatrix}, \quad (1.38)$$

donde η y ξ son las componentes del campo desplazado Φ' . Se reemplaza este resultado en el Lagrangiano (1.27), y se realiza el álgebra correspondiente teniendo en cuenta oscilaciones pequeñas de los campos escalares alrededor del vacío, obteniendo lo siguiente

$$\mathcal{L}_{S.O} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) - 2|\mu^2|\eta^2 + (\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi)]. \quad (1.39)$$

En este Lagrangiano se puede apreciar dos partículas, la primera es η que tiene una masa igual $2|\mu^2|$ y la otra partícula es ξ que no tiene masa. Estos resultados son una consecuencia del teorema más general denominado teorema de Goldstone: *“Si una teoría de campos tiene una simetría continua en el Lagrangiano, la cual se rompe espontáneamente; es decir el estado base no es invariante bajo dicha simetría, entonces necesariamente debe existir un bosón escalar o pseudoescalar sin masa en el espectro de las posibles excitaciones, asociado a cada generador que no anule el vacío, y que tiene sus mismo números cuánticos. Estas partículas se identifican como bosones de Goldstone”*

1.6. El Mecanismo de Higgs

El mecanismo de Higgs, descubierto por Peter Higgs explica las interacciones que existen cuando hay un Lagrangiano invariante bajo una transformación gauge local que dé lugar a un rompimiento espontáneo de simetría. Curiosamente surge en forma inesperada una cooperación entre los campos gauge no masivos y los bosones de Goldstone que aparecen como consecuencia del rompimiento espontáneo de simetría, como se analizó en la sección anterior. Dicha interacción es ligeramente distinta al modelo de Goldstone, dado que lo que se rompe en este caso es una simetría local.

El caso más sencillo, es la simetría gauge Abeliana $U(1)$. El sector Higgs la posee con el Lagrangiano del campo escalar complejo

$$\mathcal{L} = |\mathcal{D}_\mu \Phi|^2 - \mu^2 |\Phi|^2 - |\lambda| (\Phi \Phi^*)^2 - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (1.40)$$

donde $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ es el tensor de campo de fuerza (también conocido como tensor electromagnético). La derivada y el tensor covariante son respectivamente

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu, \quad \mathcal{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.41)$$

donde A_ν es el cuadripotencial definido como $A_\nu = (V_e/c, -\mathbf{A})$, V_e es el potencial eléctrico y $\mathbf{A}$ es el vector potencial, además el parámetro q es el autovalor del generador Q del grupo Abeliano $U(1)$. El Lagrangiano (1.40) es invariante bajo el grupo Abeliano $U(1)$ global

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{i\theta} \Phi, \quad (1.42)$$

donde θ es un parámetro real. Ahora, considerando transformación gauge Abeliana local, en donde el parámetro θ varía con respecto a las variables espacio-temporales, se tiene que

$$\begin{aligned} \Phi(x) &\longrightarrow \Phi' = e^{iq\theta(x)} \Phi(x), \\ A_\mu(x) &\longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x). \end{aligned} \quad (1.43)$$

De nuevo, se deben considerar las dos posibilidades para el parámetro μ^2 en el potencial

$$V(\Phi \Phi^*) = -\mu^2 |\Phi|^2 + |\lambda| (\Phi \Phi^*)^2. \quad (1.44)$$

Para $\mu^2 > 0$, el único mínimo es $\Phi = 0$ y la simetría gauge del Lagrangiano se conserva. El fruto de este modelo es la teoría electrodinámica cuántica (QED) con campos escalares cargados, con un solo bosón no masivo correspondiente al fotón A_μ y dos partículas Φ y Φ^* con la misma masa $|\mu|$.

Al considerar $\mu^2 < 0$, se presenta un rompimiento espontáneo de simetría, donde el potencial tiene infinitos valores para el estado base, es decir, el potencial tiene una degeneración del vacío.

Tomamos el siguiente valor para el vacío

$$\langle |\Phi|^2 \rangle_0 = -\frac{\mu^2}{2|\lambda|} = \frac{v^2}{2}. \quad (1.45)$$

El campo desplazado alrededor del vacío toma la siguiente forma

$$\Phi' = \Phi - \langle \Phi \rangle_0. \quad (1.46)$$

Para este análisis hay que reparametrizar el campo escalar complejo como prosigue

$$\Phi' = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\xi}{v}} (v + \eta). \quad (1.47)$$

Al trabajar con pequeñas oscilaciones del campo alrededor del vacío escogido, solo será necesario expandir en series de potencia la representación exponencial del campo Φ' , tal que

$$\Phi' \approx \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \eta + i\xi). \quad (1.48)$$

Al reemplazar esto en (1.40) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(\partial^\mu + iqA^\mu)(v + \eta + i\xi)] [(\partial_\mu - iqA_\mu)(v + \eta - i\xi)] - \frac{\mu^2}{2} [(v + \eta + i\xi)(v + \eta - i\xi)] \\ & + \frac{\mu^2}{4v^2} [(v + \eta + i\xi)(v + \eta - i\xi)]^2 - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Destruyendo los paréntesis y tomando solo los términos hasta segunda potencia se llega al siguiente resultado

$$\mathcal{L}_{S.O} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + 2\mu^2 \eta^2] + \frac{1}{2} (\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + qv A_\mu (\partial^\mu \xi) + \frac{q^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu + \dots \quad (1.50)$$

Como se esperaba del teorema de Goldstone, el campo η que corresponde a una oscilación radial tiene una masa igual a $2|\mu^2|$. El campo A_μ aparentemente tiene masa pero en el penúltimo término está mezclado con el campo ξ que no es masivo. Para solucionar esto, se considera por separado la expresión del Lagrangiano que involucra los campos A_μ y ξ de esta forma

$$\frac{1}{2}(\partial_\mu \xi)(\partial^\mu \xi) + qv A_\mu (\partial^\mu \xi) + \frac{q^2 v^2}{2} A_\mu A^\mu, \quad (1.51)$$

se realiza un poco de álgebra

$$\frac{q^2 v^2}{2} \left(A_\mu + \frac{1}{qv} \partial_\mu \xi \right) \left(A_\mu + \frac{1}{qv} \partial^\mu \xi \right), \quad (1.52)$$

esto sugiere la siguiente transformación gauge sobre A_μ

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{qv} \partial_\mu \xi. \quad (1.53)$$

Entonces, de (1.50) se tiene que el Lagrangiano se expresa como

$$\mathcal{L}_{S.O} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + 2\mu^2 \eta^2] - \frac{1}{2} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{q^2 v^2}{2} A'_\mu A'^\mu + \dots, \quad (1.54)$$

donde el término constante es extraído del potencial, debido a que no juega un papel importante para nuestro análisis. Por lo tanto, adicionalmente al espectro de la partícula oscilando alrededor del vacío dado por el campo η con masa, existe un campo vectorial A'_μ que también es masivo, en donde el campo ξ ha sido absorbido por el campo A_μ .

El análisis presentado en esta sección, resume lo que se denomina como el mecanismo de Higgs para el caso Abelian. Las partículas descritas por los campos escalares η y por los campos vectoriales A_μ se les llama respectivamente bosones de Higgs y bosones vectoriales. Adicionalmente los grados de libertad se conservan antes y después del rompimiento de simetría. En un principio se tiene dos escalares y un bosón vectorial no masivo ($1 \times 2 + 1 \times 2 = 4$), posteriormente tenemos un escalar y un bosón vectorial masivo ($1 \times 1 + 1 \times 3 = 4$).

1.7. Rompimiento Espontáneo de Simetría no Abelia- na

Con el fin de plantear la ruptura espontánea de simetría no Abeliana, se escoge una teoría gauge $SU(2)$ y se estudia los campos escalares en la representación del triplete escalar (o isovector)

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix}, \quad (1.55)$$

que da lugar al Lagrangiano invariante gauge $SU(2)$ del sector escalar

$$\mathcal{L} = |\mathcal{D}_\mu \Phi|^2 - \mu^2 |\Phi|^2 - |\lambda| (\Phi \Phi^*)^2 - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu}, \quad (1.56)$$

donde la derivada covariante es

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig T_j b_\mu^j, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.57)$$

donde g es la constante de acople. Aquí, los T_j son los generadores del grupo $SU(2)$ y b_μ^j son los campos gauge.

La transformación gauge $SU(2)$ se representa como

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{i\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\alpha}} \Phi. \quad (1.58)$$

donde α es el número de parámetros dependientes de las coordenadas espacio-temporales del grupo no Abeliano. Los $\mathbf{T}$ son los generadores del grupo $SU(2)$, los cuales satisfacen el álgebra

$$[T^j, T^k] = i\epsilon_{jkl} T^l, \quad (1.59)$$

donde la representación adjunta del generador $\mathbf{T}$ es:

$$(T^j)_{kl} = -i\epsilon_{jkl}. \quad (1.60)$$

De las teorías de campos de Yang Mills, se tiene que antes del rompimiento espontáneo de simetría para el caso del parámetro $\mu^2 > 0$ el potencial tiene un mínimo

en $\Phi = 0$, donde existen tres bosones escalares con la misma masa y tres bosones gauge sin masa para un total de 9 grados de libertad de las partículas[11].

Ahora, al considerar $\mu^2 < 0$, se genera el rompimiento espontáneo de simetría y en consecuencia se encuentra una degeneración del vacío. Naturalmente se toma el valor esperado del vacío en una componente neutra del triplete escalar

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

donde, de nuevo se escoge $v = -\frac{\mu^2}{|\lambda|}$. Desplazando el campo escalar

$$\Phi' = \Phi - \langle \Phi \rangle_0, \longrightarrow \Phi = \Phi' + \langle \Phi \rangle_0. \quad (1.62)$$

Eligiendo una parametrización óptima para el campo escalar

$$\Phi = e^{i(\xi_1 T_1 + \xi_2 T_2)/v} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}, \quad (1.63)$$

y se define la transformación gauge local

$$\Phi \longrightarrow \Phi' = e^{-i(\xi_1 T_1 + \xi_2 T_2)/v} \Phi, \quad (1.64)$$

esto implicaría que Φ se reduce a:

$$\Phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

Al sustituir este valor en el Lagrangiano (1.51) con oscilaciones pequeñas alrededor del vacío se obtiene

$$\mathcal{L}_{S.O} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \eta)(\partial^\mu \eta) + 2\mu^2 \eta^2] - \frac{1}{4} \mathcal{F}_{\mu\nu} \mathcal{F}^{\mu\nu} + \frac{g^2 v^2}{2} (b_\mu^1 b^{1\mu} + b_\mu^2 b^{2\mu}) + \dots \quad (1.66)$$

De este Lagrangiano se tiene que η tiene masa de valor $-2\mu^2 > 0$, los bosones b_μ^1 y b_μ^2 asociados a los generadores T_1 y T_2 que rompen espontáneamente la simetría

del vacío, obtienen una masa común de valor gv . Por otra parte los bosones escalares ξ_i con $i = 1, 2$ desaparecen del Lagrangiano debido al teorema de Goldstone. Por último el bosón gauge b_μ^3 que no aparece en el Lagrangiano, no tiene masa y corresponde al generador T_3 que deja el vacío invariante.

Si se toma en cuenta el número de grados de libertad, de nuevo se obtiene que este se conserva antes y después del rompimiento espontáneo de simetría, porque resultan un campo escalar, dos bosones vectoriales masivos y un bosón sin masa ($1 \times 1 + 2 \times 3 + 1 \times 2 = 9$).

Capítulo 2

El Modelo Estándar y el Sector Escalar

Las teorías y descubrimientos de cientos de físicos desde la década de 1930 han dado como resultado una visión notable de la estructura fundamental de la materia, la cual establece que todo en el universo está hecho de unas pocas unidades elementales llamadas partículas fundamentales, gobernadas por cuatro fuerzas fundamentales. El mejor entendimiento de como estas partículas y tres de las fuerzas (electrodébiles y fuertes) están relacionadas entre sí, está encapsulado en el Modelo Estándar de la física de partículas. Desarrollado a principios de la década de 1970, ha explicado con éxito casi todos los resultados experimentales y ha predicho con precisión una amplia variedad de fenómenos. A lo largo del tiempo y a través de muchos experimentos, el Modelo Estándar (ME) se ha establecido como una teoría física bien probada [10].

En el desarrollo de este capítulo se explica la dinámica básica del ME, con el propósito de entender el sector escalar que es el tema de mayor interés.

2.1. Estructura del Modelo Estándar

Esta teoría es la responsable de describir tres de las cuatro fuerzas fundamentales (la electromagnética y las interacciones fuertes y débiles, pero no incluye la fuerza gravitacional) en el universo, así como la clasificación de todas las partículas elementales conocidas. Aunque se cree que el ME es teóricamente coherente y ha demostrado grandes éxitos en la comprobación de las predicciones experimentales, este deja algunos fenómenos sin explicar y no llega a ser una teoría completa de las interacciones fundamentales [12].

2.1.1. Interacciones y Partículas Elementales

En la naturaleza hay cuatro fuerzas que son responsables de todos los fenómenos en el Universo:

- **Interacción Gravitacional:** Esta interacción es la más débil de las cuatro a escala atómica, donde las electromagnéticas dominan. Pero, la gravitación es más importante para objetos y distancias macroscópicas por las siguientes razones: La gravitación es la única interacción que actúa sobre todas las partículas que tienen masa, energía y/o momento. Tiene un rango infinito, no puede ser absorbida, transformada y tampoco se puede proteger contra esta. Es siempre atractiva.
- **Interacción Electromagnética:** Es la interacción que actúa entre las partículas eléctricamente cargadas. Este fenómeno incluye la fuerza electrostática actuando entre partículas cargadas en reposo, y el efecto combinado de la fuerza eléctrica y magnética actuando sobre partículas cargadas que se mueven relativamente una con respecto a la otra. Esta tiene rango infinito como la gravedad, pero es mucho más fuerte que ésta.
- **Interacción Nuclear Débil:** Es la responsable de la desintegración de partículas y núcleos atómicos en los fenómenos radioactivos. Esta interacción tiene un alcance muy limitado y es más fuerte que la gravitación, pero es mucho más débil que la interacción electromagnética. Cabe resaltar que el electromagnetismo y la fuerza débil se entiende ahora como dos aspectos de la interacción electrodébil.
- **Interacción Nuclear Fuerte:** Esta fuerza es responsable de que los quarks se unan para formar protones y neutrones, y de que estos se acoplen en el núcleo atómico, de manera que su intensidad es unas 1000 veces mayor que la fuerza de repulsión electromagnética. Es la más fuerte de las cuatro, pero estos efectos solo se aprecian a distancias muy pequeñas del tamaño de los núcleos atómicos.

En sus inicios la física de partículas consistía en estudiar el comportamiento del electrón, del protón y del neutrón, las únicas partículas conocidas hasta el año 1932. Sin embargo, con la llegada de los detectores se fueron descubriendo más y más partículas subatómicas hasta formar lo que se llamó el *zoo de partículas*, por lo que no era muy ventajoso hablar de muchas partículas elementales. Un gran avance se dio cuando se logró clasificarlas en dos grupos basándose en el espín de cada partícula. Se llamó bosones a aquellos que tienen espín entero y fermiones si tienen espín semientero. A su vez, los fermiones se clasifican según el tipo de interacción. Las partículas fermiónicas que tienen interacción fuerte se llaman hadrones. Entre ellas están, el protón, el neutrón, y el pión (π). Estas partículas también interactúan a través de la fuerza débil y electromagnética. Los hadrones se clasifican en bariones y mesones, la razón de subclasificarlos es que los mesones pueden destruirse, pueden aparecer y desaparecer y ser creados a voluntad mientras que el número de bariones en el universo se conserva. Si un barión desaparece tiene que aparecer otro barión que lo reemplace, así se mantiene el número total de bariones constante.

Es relevante tener en cuenta que los bariones y mesones no son partículas elementales, pues están constituidas de *Quarks*: up, down, charm, strange, top y bottom.

Los fermiones que no poseen interacción fuerte se denominan *Leptones*, que se pueden clasificar en cargados y no cargados. Entre los cargados encontramos el electrón (e), el muón (μ) y el tauón (τ). Por otra parte, los no cargados son conocidos como neutrinos, donde existen tres variedades de ellos: el neutrino electrónico (ν_e), el neutrino muónico (ν_μ) y el neutrino tauónico (ν_τ).

Las partículas elementales también se clasifican en familias o generaciones. Entre generaciones, las partículas difieren sólo en su número cuántico de sabor y en su masa, pero sus interacciones y los restantes números cuánticos son idénticos. Cada generación está dividida en dos leptones y dos quarks. Los dos leptones pueden ser clasificados en uno con carga eléctrica -1 (como el electrón) y uno neutro (como el neutrón); los dos quarks deben ser clasificados en uno con carga $-1/3$ (tipo down)

Tabla 2.1: Simetrías del Modelo Estándar.

Interacción	Grupo Gauge	Bosón	Símbolo
Electromagnética (QED)	$U(1)$	Fotón	γ
Débil	$SU(2)$	Bosones Intermediarios	$W^{\pm}, Z^0$
Fuerte (QCD)	$SU(3)$	Gluones	g

Fuente: Esta investigación

y uno con carga $+2/3$ (tipo arriba).

En cuanto a los bosones, estas partículas son las responsables de las interacciones entre las partículas fermiónicas; es decir, cuando existe una interacción, hay un intercambio de bosones, por ejemplo: Si el bosón que es intercambiado en la interacción es:

- El fotón (γ), decimos que se trata de una interacción electromagnética.
- Si se intercambia el gluón (g), decimos que hay una interacción fuerte.
- Si hay intercambio del bosón $W^{\pm}$ o Z^0 , decimos que existe una interacción débil.

La figura (2.1) resume todas las partículas fundamentales de la materia y sus interacciones dentro del ME.

La estructura de las partículas fundamentales del ME actualmente está completa. Debido a que con el transcurso de los años se han descubierto todas estas partículas.

Lo que hace del ME una teoría de relevancia científica es que logra unificar las tres teorías gauge basadas en grupos de simetrías, registradas en la tabla 2.1.

Una interacción donde solo existe una carga (carga del electrón) se conoce como la electrodinámica cuántica (QED), si consideramos dos cargas tenemos la teoría

Figura 2.1: Estructura de la materia en el Modelo Estándar.

Las tres generaciones de la
Materia (Fermiones)

	I	II	III	
masa→	3 MeV	1.24 GeV	172.5 GeV	0
carga→	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
spin→	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
nombre→	u up	c charm	t top	Y photon
	6 MeV	95 MeV	4.2 GeV	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
Quarks	d down	s strange	b bottom	g gluon
	<2 eV	<0.19 MeV	<18.2 MeV	90.2 GeV
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	ν_e electron neutrino	ν_μ muon neutrino	ν_τ tau neutrino	Z⁰ fuerza débil
Leptones	0.511 MeV	106 MeV	1.78 GeV	80.4 GeV
	-1	-1	-1	± 1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	e electron	μ muon	τ tau	W[±] fuerza débil
				Bosons (Fuerzas)

Fuente: Esta investigación

débil, y la extensión a tres cargas es lo que llamamos la cromodinámica cuántica (QCD).

A continuación se estudia la simetría $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, en la que se basa el Modelo Estándar que unifica las tres teorías anteriormente mencionadas.

2.2. La Matemática del Modelo Estándar

El ME está basado en el principio de invarianza de norma; es decir, la física no depende de la forma en que describamos los parámetros internos de un sistema. En el cual las fuerzas fundamentales de la naturaleza son descritas mediante teorías de grupos gauge. El Lagrangiano que describe el Modelo Estándar se expresa de la siguiente manera:

$$\mathcal{L}_{M.E} = \mathcal{L}_f + \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_g + \mathcal{L}_Y, \quad (2.1)$$

donde:

- $\mathcal{L}_f$ corresponde al Lagrangiano fermiónico.
- $\mathcal{L}_H$ corresponde al Lagrangiano del sector escalar.
- $\mathcal{L}_g$ se refiere al Lagrangiano de los campos gauge adicionales para asegurar la invarianza de norma.
- $\mathcal{L}_Y$ es el Lagrangiano de Yukawa o del acoplamiento de campos.

El Lagrangiano (2.1) es invariante bajo el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, donde los subíndices C , L , Y se refieren al sector de color, leptónico y Yukawa respectivamente.

2.2.1. El Sector Electrodébil

El Lagrangiano del sector electrodébil está asociado con la simetría $SU(2) \otimes U(1)$. En este los fermiones son descritos en términos de campos de Dirac, donde los dobletes izquierdos L se representan por espinores de cuatro componentes sujetos

a la simetría gauge $SU(2)$ y los singletes derechos R bajo el grupo de simetría $U(1)$. En esta teoría los neutrinos son considerados no masivos, debido a que no tienen representación derecha. Por lo tanto

$$L = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} \nu_e \\ e \end{array} \right)_L \\ \left(\begin{array}{c} \nu_\mu \\ \mu \end{array} \right)_L \\ \left(\begin{array}{c} \nu_\tau \\ \tau \end{array} \right)_L \end{array} \right. \quad R = \left\{ \begin{array}{l} e_R \\ \mu_R \\ \tau_R \end{array} \right. . \quad (2.2)$$

El Lagrangiano de Dirac del sector fermiónico para una partícula libre es

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi, \quad (2.3)$$

donde Ψ es el campo de Dirac, $\bar{\Psi}$ es el adjunto de Dirac del campo, γ^μ son las matrices de Dirac y m es la masa. Para que el Lagrangiano sea invariante $SU(2) \otimes U(1)$, se necesita introducir cuatro campos gauge relacionados con las simetrías

$$SU(2) \rightarrow F_{\mu\nu}^l = \partial_\mu b_\nu^l - \partial_\nu b_\mu^l + g\epsilon_{jkl}b_\mu^jb_\nu^k, \quad \text{con } i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

$$U(1) \rightarrow f_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.5)$$

De esta forma, el Lagrangiano invariante gauge del sector electrodébil está dado por

$$\mathcal{L} = \bar{R}i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1g'}{2}A_\mu \right) R + \bar{L}i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu + \frac{ig}{2}\sigma_l b_\mu^l \right) L - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^l F^{l\mu\nu} - \frac{1}{4}f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

donde las letras R y L indican el Lagrangiano del sector fermiónico derecho e izquierdo respectivamente, expresión (2.3). Además σ_l son los pgeneradores de $SU(2)$ (matrices de Pauli) y Por último, los g y g' son las constantes de acople de los grupos $SU(2)$ y $U(1)$ respectivamente.

La teoría de las interacciones electrodébiles descrita por (2.6) no es apropiada, por dos razones obvias. Contiene cuatro bosones gauge sin masa A_μ, b_μ^l , donde $l = 1, 2, 3$ mientras que en la naturaleza sólo existe un bosón no masivo denominado

fotón. Además, la invarianza $SU(2)$ prohíbe un término de masa para el electrón. Por lo tanto, se tiene que modificar la teoría para que solo quede una cantidad conservada (carga eléctrica) correspondiente a un bosón gauge sin masa (fotón), y que el electrón adquiriera masa. Para poder llegar a esto se introduce un campo escalar complejo

2.3. El Sector Escalar

En el Modelo Estándar, el Lagrangiano del sector escalar tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{esc} = |\mathcal{D}_\mu \Phi|^2 - \mu^2(\Phi^\dagger \Phi) - |\lambda|(\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (2.7)$$

donde Φ es un doblete escalar complejo, μ es una constante relacionada con la masa y $|\lambda|$ es el término de autointeracción. Además, la derivada convariante $\mathcal{D}_\mu$ debe ser tal que tiene que asegurar la invarianza del Lagrangiano (2.7) bajo $SU(2) \otimes U(1)$, entonces debe tener la forma

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'Y}{2}A_\mu + \frac{ig}{2}\sigma^l b_\mu^l, \quad (2.8)$$

donde Y es la hipercarga y de nuevo σ^l son las matrices de Pauli, que a su vez generan a $SU(2)$.

La interacción entre campos fermiónicos y campos escalares está descrita por el Lagrangiano de Yukawa

$$\mathcal{L}_Y = -G_e [\bar{\mathbf{R}}(\Phi^\dagger \mathbf{L}) + (\bar{\mathbf{L}}\Phi)\mathbf{R}], \quad (2.9)$$

el cual es invariante $SU(2) \otimes U(1)$, donde G_e es la constante de acople de la interacción.

Por lo pronto, el Lagrangiano más general toma la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \bar{R}i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1g'}{2}A_\mu \right) R + \bar{L}i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu + \frac{ig}{2}\sigma^l b_\mu^l \right) L - \frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^l F^{l\mu\nu} - f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}) \\ & + |\mathcal{D}_\mu \Phi|^2 - \mu^2(\Phi^\dagger \Phi) - |\lambda|(\Phi^\dagger \Phi)^2 - G_e [\bar{\mathbf{R}}(\Phi^\dagger \mathbf{L}) + (\bar{\mathbf{L}}\Phi)\mathbf{R}]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ahora consideramos el Lagrangiano (2.7) con $\mu^2 < 0$, para obtener un rompimiento espontáneo de simetría (ver sección 1.4). Bajo esta consideración, el vacío se ha degenerado al adquirir infinitud de valores alrededor del círculo de radio $-\mu^2/|\lambda|$, por lo tanto se puede escoger el siguiente valor para el vacío sobre la componente neutra del doblete escalar:

$$\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

donde $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{|\lambda|}}$.

Este valor esperado rompe la simetría $SU(2) \otimes U(1)$, y por el teorema de Goldstone se tiene un campo bosónico no masivo por cada generador roto de $SU(2) \otimes U(1)$.

Un generador se rompe si no deja invariante el vacío, en este caso se tiene como generadores de $SU(2) \otimes U(1)$, las matrices de Pauli para $SU(2)$ y el generador Y para $U(1)$. Ahora se usa la relación de Gell-Mann Nishijima, para obtener el generador de carga

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y. \quad (2.12)$$

Al aplicar estos generadores al vacío escogido se obtiene lo siguiente:

$$\sigma_1 \langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (2.13)$$

$$\sigma_2 \langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iv/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (2.14)$$

$$\sigma_3 \langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - v/\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0, \quad (2.15)$$

$$Y \langle \Phi \rangle_0 = +1 \langle \Phi \rangle_0 \neq 0, \quad (2.16)$$

$$Q \langle \Phi \rangle_0 = \left(I_3 + \frac{1}{2}Y \right) \langle \Phi \rangle_0 = 0. \quad (2.17)$$

Aquí se puede observar que los cuatro primeros generadores rompen espontáneamente la simetría, mientras que el último generador relacionado con la carga, no lo hace. Físicamente significa que el fotón permanece sin masa.

Ahora se realiza una parametrización del campo escalar complejo en forma exponencial con el objetivo de aplicar el mecanismo de Higgs, entonces

$$\Phi = e^{\frac{i\xi \cdot \sigma}{2v}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

también se transforma las siguientes cantidades

$$\begin{aligned} \Phi &\rightarrow \Phi' = e^{\frac{-i\xi \cdot \tau}{2v}} \Phi, \\ \sigma_l b_\mu^l &\rightarrow \sigma_l b_\mu'^l, \\ A_\mu &\rightarrow A_\mu, \\ R &\rightarrow R, \\ L &\rightarrow L' = e^{\frac{-i\xi \cdot \tau}{2v}} L. \end{aligned}$$

Sustituyendo estas cantidades transformadas en el Lagrangiano (2.10), se observa que el sector fermiónico permanece invariante. Para el sector escalar (2.7) se tiene que

$$\mathcal{L}_{esc} = \left| \left(\partial_\mu + \frac{ig'Y}{2} A_\mu + \frac{ig}{2} \sigma_l b_\mu^l \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 - \left[\mu^2 \left(\frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \right)^2 + |\lambda| \left(\frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \right)^4 \right]. \quad (2.19)$$

Los términos de masa para los bosones gauge surgen del término que contiene a la derivada covariante, ese término se puede escribir así

$$\left| \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu \mathbb{1}_2 + \frac{ig}{2} \sigma_1 b_\mu^1 + \frac{ig}{2} \sigma_2 b_\mu^2 + \frac{ig}{2} \sigma_3 b_\mu^3 \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2,$$

Se reemplaza el valor de las matrices de Pauli y se desarrolla las operaciones, obteniendo

$$\begin{aligned} &\left| \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{ig}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} b_\mu^1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} b_\mu^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} b_\mu^3 \right] \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \partial_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} + \frac{i}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} g' A_\mu + g b_\mu^3 & b_\mu^1 - i b_\mu^2 \\ b_\mu^1 + i b_\mu^2 & g' A_\mu - g b_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta \end{pmatrix} \right|^2. \quad (2.20) \end{aligned}$$

Ahora se define

$$\mathbf{W}^\pm = \frac{b_\mu^1 \mp i b_\mu^2}{\sqrt{2}}. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, se usa (2.20) en (2.21) y se desarrollan las operaciones

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \eta \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} (g' A_\mu + g b_\mu^3)/\sqrt{2} & g \mathbf{W}^+ \\ g \mathbf{W}^- & (g' A_\mu - g b_\mu^3)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ \partial_\mu \eta \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \begin{pmatrix} g \mathbf{W}^+(v + \eta) \\ (g' A_\mu - g b_\mu^3)(v + \eta)/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right|^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

De (2.21), se puede ver que el complejo conjugado de $\mathbf{W}^+$, es precisamente $\mathbf{W}^-$.

Aplicando esto sobre (2.22), se tiene

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{4} [g^2 \mathbf{W}_+ \mathbf{W}^- + (g' A_\mu - g b_\mu^3)^2] (v + \eta)^2 \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{4} g^2 v^2 \mathbf{W}_+ \mathbf{W}^- + \frac{1}{8} (g' A_\mu - g b_\mu^3)^2 v^2 + \dots \end{aligned} \quad (2.23)$$

En este análisis solo se presentará hasta potencias de segundo orden en los campos, por esta razón, solo se considera los términos dados en (2.23). El término $(g' A_\mu - g b_\mu^3)^2$, se puede representar como un producto matricial, de tal forma que se reescribe (2.23) en la forma

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{4} g^2 v^2 \mathbf{W}_+ \mathbf{W}^- + \frac{1}{8} v^2 \begin{pmatrix} b_\mu^2 & A_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 & -g g' \\ -g g' & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b^{3\mu} \\ A^\mu \end{pmatrix} + \dots \quad (2.24)$$

La matriz 2×2 puede ser llevada a forma diagonal con

$$A' = P A P^{-1}, \quad (2.25)$$

donde A es la matriz a diagonalizar y P es la matriz unitaria que surge de sus autovectores. Se usa en este cálculo el Software *Wolfram Mathematica 11* (ver figura 2.2), con el fin de facilitar el desarrollo.

De esto se puede ver que A' será

$$A' = \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz P tiene la siguiente estructura:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{|g|}{\sqrt{g^2 + g'^2}} & \frac{|g'|}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\ \frac{-g'|g|}{g\sqrt{g^2 + g'^2}} & \frac{g|g'|}{g'\sqrt{g^2 + g'^2}} \end{pmatrix}.$$

Figura 2.2: Diagonalización de la matriz A .

```
(%i1) /-Se define la matriz A con g'=q, para evitar errores de lectura-/
A: matrix([g^2,-g*q],[-g*q,q^2]);

(A) 
$$\begin{bmatrix} g^2 & -gq \\ -gq & q^2 \end{bmatrix}$$


(%i2) /-Determinar los autovalores-/
eigenvalues(A);

(%o2)  $[[q^2+g^2,0],[1,1]]$ 

(%i3) /-Calcular los autovectores-/
eigenvectors(A);

(%o3)  $[[[q^2+g^2,0],[1,1]],[[1,-\frac{q}{g}],[1,\frac{g}{q}]]]$ 

(%i4) /-Calcular los autovectores normalizados-/
uniteigenvectors(A);

(%o4)  $[[[q^2+g^2,0],[1,1]],[[\frac{|g|}{\sqrt{q^2+g^2}},-\frac{|g|q}{g\sqrt{q^2+g^2}}],[[\frac{|q|}{\sqrt{q^2+g^2}},\frac{g|q|}{q\sqrt{q^2+g^2}}]]]$ 
```

Fuente: Esta investigación

Esta matriz satisface la condición $P^T P = \mathbb{1}_2$, es decir $P^T = P^{-1}$, entonces la diagonalización de A se lleva a cabo realizando el producto $PAP^T = A'$. Con esta idea, en (2.24) usamos la propiedad $P^T P = \mathbb{1}_2$ apropiadamente

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{4} g^2 v^2 \mathbf{W}_+ \mathbf{W}_- + \frac{1}{8} v^2 \begin{pmatrix} b_\mu^2 & A_\mu \end{pmatrix} P \left[P^T \begin{pmatrix} g^2 & -gg' \\ -gg' & g'^2 \end{pmatrix} P \right] P^T \begin{pmatrix} b^{3\mu} \\ A^\mu \end{pmatrix} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{4} g^2 v^2 \mathbf{W}_+ \mathbf{W}_- + \frac{1}{8} v^2 \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_\mu & \mathbf{A}_\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^2 + g'^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_\mu \\ \mathbf{A}_\mu \end{pmatrix} + \dots \quad (2.26) \end{aligned}$$

Donde se ha encontrado los nuevos campos físicos

$$\mathbf{Z}_\mu = \frac{gb_\mu^3 - g'A_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}}, \quad \mathbf{A}_\mu = \frac{g'b_\mu^3 - gA_\mu}{\sqrt{g'^2 + g^2}}. \quad (2.27)$$

Por lo tanto, el Lagrangiano escalar (2.19) queda de la siguiente manera

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta - \mu^2 \eta^2 + \frac{1}{4} g^2 v^2 \mathbf{W}^+ \mathbf{W}^- + \frac{g^2 + g'^2}{8} v^2 \mathbf{Z}_\mu \mathbf{Z}^\mu + \dots \quad (2.28)$$

La estructura de (2.28), nos permite ver los términos de masa de los bosones gauge:

- Masa del bosón $W_\mu^\pm = \frac{gv}{\sqrt{2}}$.
- Masa del bosón $Z_\mu = \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}v$.
- Masa del bosón $A_\mu = 0$, debido a que este no aparece en la expresión del Lagrangiano.

Además, notamos que el campo escalar η tiene masa igual a $2|\mu^2| > 0$ y se lo conoce como el bosón de Higgs que es el responsable de que los bosones W y Z adquieran masa como consecuencia del rompimiento espontáneo de simetría.

Por otro lado, los fermiones consiguen su masa a través de los acoplamientos de Yukawa. De ahí, si se reemplaza el valor de Φ en el Lagrangiano de Yukawa (2.9), para los electrones se tiene que:

$$\mathcal{L}_Y = -G_e \frac{(\eta + v)}{\sqrt{2}} \bar{e}_R e_L - G_e \frac{(\eta + v)}{\sqrt{2}} \bar{e}_L e_R. \quad (2.29)$$

Reorganizando los términos

$$\mathcal{L}_Y = -G_e \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) + \dots$$

Usando el adjunto de Dirac ($\bar{e} = e^\dagger \gamma_0$), donde $\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y &= -G_e \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e_R^* & e_L^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix} + \dots \\ &= -G_e \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{e} e + \dots \end{aligned}$$

De esto se concluye que el electrón adquiere una masa igual a:

$$m_e = G_e \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (2.30)$$

Por último, se debe considerar la simetría $SU(3)$ que permite completar el Lagrangiano. Esta parte corresponde a la interacción fuerte, conocida como la cromodinámica cuántica. Para $SU(3)$ solo se adiciona el siguiente término al Lagrangiano

$$-\frac{1}{4} |G_{\mu\nu}^a|^2, \quad \text{con } a = 1, 2, \dots, 8, \quad (2.31)$$

con

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_c f_{ajk} G_\mu^j G_\nu^k, \quad (2.32)$$

en donde g_c es la constante de acople del sector fuerte, y f_{ajk} es la constante de estructura. El subíndice a se refiere a los 8 gluones y T_a son las 8 matrices de Gell-Mann¹, generadoras del grupo $SU(3)$. Además, la derivada covariante está definida como

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + ig_c T_a G_\mu^a. \quad (2.34)$$

Para finalizar, gran parte del estudio realizado en este capítulo está centrado en la primera familia de fermiones, sin embargo el ME tiene tres familias fermiónicas. No es de interés para el desarrollo de este trabajo abarcar todas las familias fermiónicas, por tal razón, no se toma en cuenta.

Aunque el ME tiene mucha aceptación científica en la descripción de fenómenos, este tiene ciertas limitaciones como las siguientes:

- El modelo contiene 19 parámetros libres, los cuales son: la masa del electrón, la masa del muón, la masa del tauón, la masa de los quarks (up, down, charm, strange, top y bottom), las constantes de acople de las simetrías $U(1)$, $SU(2)$ y $SU(3)$, la masa del bosón Higgs, el valor de expectación del vacío del campo Higgs, el ángulo de vacío de la cromodinámica cuántica y los parámetros de mezcla de la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa².
- No explica la razón de las tres generaciones de familias.
- No explica la jerarquía de las masas.

¹Las matrices de Gell-Mann son las siguientes

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.33)$$

²La matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa es una matriz unitaria que contiene información sobre la intensidad de las desintegraciones débiles que cambian el sabor

- Tiene problemas de unificación de las fuerzas.
- No considera masa para los neutrinos.
- El modelo es inconsistente con la explicación de la materia oscura y su contribución a la energía oscura.

Debido a esto, el Modelo Estándar no se considera la teoría final de la física de partículas y es necesario extender la teoría e ir más allá del Modelo Estándar [13].

Capítulo 3

El Modelo General de dos Dobletes de Higgs

3.1. Introducción

En este capítulo se estudian los modelos generales que tienen un sector escalar con dos dobletes de Higgs. La simetría gauge $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ se sigue manteniendo. En la versión más simple el contenido fermiónico de este modelo, es el mismo del ME. Surgen los mismos bosones gauge, lo que da lugar a las mismas interacciones fundamentales. Aunque el rompimiento espontáneo de simetría electrodébil no lo implementaremos en este trabajo, funciona de manera similar como en el ME, un estudio detallado acerca de este rompimiento se puede encontrar en [13]. El Lagrangiano contiene términos que sólo consisten de campos escalares. Estos términos forman un potencial escalar que es responsable de la estabilidad y el rompimiento de simetría. Además, a través de sus derivadas covariantes, los campos escalares se acoplan con los bosones gauge. El acoplamiento de fermiones proviene de los términos de Yukawa.

3.2. El Modelo General de dos Dobletes de Higgs y Cambios de Base

Denotamos los dos campos escalares complejos de dobletes de Higgs como

$$\varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i^+(x) \\ \varphi_i^0(x) \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

con $i = 1, 2$. A cada campo le corresponde cuatro grados de libertad escalares, debido a que cada φ_i^α con $\alpha = 0, +$ es un número complejo. Por lo tanto para este

caso existen ocho grados de libertad. El Lagrangiano invariante a $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ más general para el modelo general de dos dobletes Higgs puede ser escrito así

$$\mathcal{L}_{\text{THDM}} = \mathcal{L}_\varphi + \mathcal{L}_{\text{Yuk}} + \mathcal{L}', \quad (3.2)$$

donde $\mathcal{L}_{\text{Yuk}}$ son los términos de interacción de Yukawa de los campos Higgs con los fermiones, $\mathcal{L}'$ contiene todos los términos del Lagrangiano sin los campos Higgs. En este trabajo no se toman en cuenta $\mathcal{L}_{\text{Yuk}}$ y $\mathcal{L}'$, debido a que ellos no son relevantes para nuestro análisis. El Lagrangiano que solo depende de los bosones Higgs está dado por

$$\mathcal{L}_\varphi = \sum_{i=1,2} (\mathcal{D}_\mu \varphi_i)^\dagger (\mathcal{D}^\mu \varphi_i) - V(\varphi_1, \varphi_2). \quad (3.3)$$

Este término reemplazaría los términos cinéticos del bosón de Higgs y el potencial Higgs del Lagrangiano del modelo estándar (ver ecuación (2.7)). La derivada covariante es

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + igb_\mu^a \sigma_a + ig' A_\mu Y, \quad (3.4)$$

donde σ_a y Y son los generadores de las transformaciones de isospín débil e hipercarga débil respectivamente y los factores g y g' son las constantes de estructura. Para los dobletes de Higgs se tiene que $\sigma_a = \sigma_a/2$, donde σ_a ($a = 1, 2, 3$) son las matrices de Pauli. En este modelo se establece que ambos dobletes tienen la misma hipercarga $y = 1/2$.

El potencial invariante gauge y renormalizable $V(\varphi_1, \varphi_2)$ más general para los dos dobletes Higgs φ_1 y φ_2 es una combinación lineal hermítica de los siguientes términos

$$\varphi_i^\dagger \varphi_j, \quad (\varphi_i^\dagger \varphi_j) (\varphi_k^\dagger \varphi_l), \quad (3.5)$$

donde $i, j, k, l \in \{1, 2\}$. Dicho potencial tiene la forma

$$\begin{aligned} V(\varphi_1, \varphi_2) = & \mu_1^2 (\varphi_1^\dagger \varphi_1) + \mu_2^2 (\varphi_2^\dagger \varphi_2) + (\mu_3^2 \varphi_1^\dagger \varphi_2 + \mu_3^{2*} \varphi_2^\dagger \varphi_1) + \lambda_1 (\varphi_1^\dagger \varphi_1)^2 \\ & + \lambda_2 (\varphi_2^\dagger \varphi_2)^2 + \lambda_3 (\varphi_1^\dagger \varphi_1) (\varphi_2^\dagger \varphi_2) + \lambda_4 (\varphi_1^\dagger \varphi_2) (\varphi_2^\dagger \varphi_1) \\ & + (\lambda_5 \varphi_1^\dagger \varphi_2 + \lambda_5^* \varphi_2^\dagger \varphi_1)^2 + (\lambda_6 \varphi_1 \varphi_2 + \lambda_6^* \varphi_2^\dagger \varphi_1) (\varphi_1^\dagger \varphi_1) \\ & + (\lambda_7 \varphi_1 \varphi_2 + \lambda_7^* \varphi_2^\dagger \varphi_1) (\varphi_2^\dagger \varphi_2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Como μ_3^2 , λ_5 , λ_6 y λ_7 pueden ser números complejos, el potencial más general posee 14 parámetros libres. Es conveniente hablar de las propiedades de los potenciales tales como su estabilidad o su rompimiento de simetría en términos de sus expresiones invariantes gauge. Para poder lograr esto, es necesario organizar los productos escalares invariantes $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ para formar la matriz hermítica

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Ahora consideramos la siguiente descomposición de $\underline{K}$, en términos de la base formada por la matriz identidad ($\mathbb{1}_2$) y las matrices de Pauli (σ^a , $a = 1, 2, 3$)

$$\underline{K}_{ij} = \frac{1}{2} (K_0 \delta_{ij} + K_a \sigma_{ij}^a), \quad (3.8)$$

donde K_0 y K_a son coeficientes reales. Para conocer el valor de los coeficientes de la anterior descomposición, apliquemos la traza en (3.8).

$$\text{Tr}(\underline{K}) = \text{Tr}\left(\frac{1}{2}K_0\mathbb{1}_2 + \frac{1}{2}K_a\sigma^a\right), \quad (3.9)$$

usando (3.7) se obtiene $\text{Tr}(\underline{K}) = \varphi_i^\dagger \varphi_i$ con $i = 1, 2$ y aplicando la linealidad de la traza

$$\varphi_i^\dagger \varphi_i = \frac{1}{2}K_0 \text{Tr}(\mathbb{1}_2) + \frac{1}{2}K_a \text{Tr}(\sigma^a).$$

Pero las matrices de Pauli debido a su estructura tienen traza igual a cero, además $\text{Tr}(\mathbb{1}_2) = 2$, porque se trabaja con matrices 2×2 , es decir

$$K_0 = \varphi_i^\dagger \varphi_i = \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2. \quad (3.10)$$

Ahora se multiplica la ecuación (3.8) por σ_{jk}^b obteniendo

$$\begin{aligned} \underline{K}_{ij} \sigma_{jk}^b &= \frac{1}{2} K_0 \delta_{ij} \sigma_{jk}^b + \frac{1}{2} K_a \sigma_{ij}^a \sigma_{jk}^b. \\ \underline{K} \sigma^b &= \frac{1}{2} K_0 \sigma^b + \frac{1}{2} K_a \sigma^a \sigma^b. \end{aligned}$$

Calculando la traza de la última ecuación

$$\text{Tr}(\underline{K} \sigma^b) = \frac{1}{2} K_a \text{Tr}(\sigma^a \sigma^b) \quad (3.11)$$

$$\varphi_j^\dagger \varphi_i \sigma_{ji}^b = \frac{1}{2} K_a \sigma_{ij}^a \sigma_{ji}^b. \quad (3.12)$$

De la anticonmutación de las matrices de Pauli y la propiedad $\{\sigma^a, \sigma^b\} = 2\delta_{ab}\mathbb{1}_2$, entonces al evaluar la traza del anticonmutador

$$\text{Tr} \{\sigma^a, \sigma^b\} = 2 \text{Tr} (\sigma^a \sigma^b) = 2\delta_{ab} \text{Tr} (\mathbb{1}_2) = 4\delta_{ab}.$$

Este último resultado en componentes matriciales es

$$\sigma_{ij}^a \sigma_{ji}^b = 2\delta_{ab}. \quad (3.13)$$

Se reemplaza (3.13) en (3.12)

$$\begin{aligned} K_a \delta_{ab} &= \varphi_j^\dagger \varphi_i \sigma_{ji}^b, \\ K_b &= \varphi_i^\dagger \varphi_j \sigma_{ij}^b \end{aligned} \quad (3.14)$$

en donde en la última ecuación hubo un cambio en los índices mudos $i \rightarrow j$ y $j \rightarrow i$. Para lograr una expresión de la ecuación (3.14) en la que esté explícito un producto en forma matricial, definimos la matriz 2×2 de los campos Higgs

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

de la cual es fácil ver que

$$\phi(\phi)^\dagger = \begin{pmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^* & \varphi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^T \varphi_1^* & \varphi_1^T \varphi_2^* \\ \varphi_2^T \varphi_1^* & \varphi_2^T \varphi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix} = \underline{K}. \quad (3.16)$$

Reescribimos la ecuación (3.11) usando (3.16) de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} K_a \text{Tr} (\sigma^a \sigma^b) &= \text{Tr} (\underline{K} \sigma^b) \\ K_a \delta_{ab} &= \text{Tr} (\underline{K} \sigma^b) \\ K_b &= \text{Tr} (\phi(\phi)^\dagger \sigma^b). \end{aligned} \quad (3.17)$$

El siguiente paso es denotar las componentes de ϕ como ϕ_i con $i = 1, 2$ (donde $\phi_1 = \varphi_1^T$ y $\phi_2 = \varphi_2^T$). Por lo tanto, si se usa esto en la última ecuación

$$K_b = \text{Tr} (\phi(\phi)^\dagger \sigma^b) = \phi_i (\phi_j)^\dagger \sigma_{ji}^b = (\phi_j)^\dagger \sigma_{ji}^b \phi_i$$

$$K_a = (\phi)^\dagger \sigma^a \phi. \quad (3.18)$$

Usando las matrices de Pauli, se encuentran las siguientes relaciones para las variables orbitales con la ecuación (3.17)

$$K_1 = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \begin{pmatrix} \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_1^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_1^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$K_1 = \varphi_2^\dagger \varphi_1 + \varphi_1^\dagger \varphi_2, \quad (3.19)$$

$$K_2 = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \begin{pmatrix} i\varphi_2^\dagger \varphi_1 & -i\varphi_1^\dagger \varphi_1 \\ i\varphi_2^\dagger \varphi_2 & -i\varphi_1^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$K_2 = i\varphi_2^\dagger \varphi_1 - i\varphi_1^\dagger \varphi_2, \quad (3.20)$$

$$K_3 = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] = \text{Tr} \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & -\varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & -\varphi_2^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 - \varphi_2^\dagger \varphi_2. \quad (3.21)$$

Con los anteriores resultados se obtiene las expresiones para los productos $\varphi_i^\dagger \varphi_j$ en términos de las variables orbitales K_α con $\alpha = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \varphi_1^\dagger \varphi_1 &= (K_0 + K_3)/2 & \varphi_1^\dagger \varphi_2 &= (K_1 + iK_2)/2 \\ \varphi_2^\dagger \varphi_2 &= (K_0 - K_3)/2 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 &= (K_1 - iK_2)/2 \end{aligned} \quad (3.22)$$

El potencial más general (3.6) escrito en términos de las variables orbitales es

$$\begin{aligned} V &= \frac{\mu_1^2}{2} (K_0 + K_3) + \frac{\mu_2^2}{2} (K_0 - K_3) + \frac{1}{2} [\mu_3^2 (K_1 + iK_2) + \mu_3^{2*} (K_1 - iK_2)] \\ &+ \frac{\lambda_1}{4} (K_0 + K_3)^2 + \frac{\lambda_2}{4} (K_0 - K_3)^2 + \frac{\lambda_3}{4} (K_0^2 - K_3^2) + \frac{\lambda_4}{4} (K_1^2 + K_2^2) \\ &+ \frac{1}{4} [\lambda_5 (K_1 + iK_2) + \lambda_5^* (K_1 - iK_2)]^2 \\ &+ \frac{1}{4} [\lambda_6 (K_1 + iK_2) + \lambda_6^* (K_1 - iK_2)] (K_0 + K_3) \\ &+ \frac{1}{4} [\lambda_7 (K_1 + iK_2) + \lambda_7^* (K_1 - iK_2)] (K_0 - K_3). \end{aligned}$$

Al desarrollar la anterior ecuación se obtiene

$$V = \frac{\mu_1^2}{2} (K_0 + K_3) + \frac{\mu_2^2}{2} (K_0 - K_3) + \frac{1}{2} [\mu_3^2 (K_1 + iK_2) + \mu_3^{2*} (K_1 - iK_2)]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\lambda_1}{4} (K_0^2 + 2K_0K_3 + K_3^2) + \frac{\lambda_2}{4} (K_0^2 - 2K_0K_3 + K_3^2) + \frac{\lambda_3}{4} (K_0^2 - K_3^2) \\
& + \frac{\lambda_4}{4} (K_1^2 + K_2^2) + \frac{\lambda_5^2}{4} (K_1^2 - K_2^2 + 2iK_1K_2) + \frac{|\lambda_5|^2}{2} (K_1^2 + K_2^2) \\
& + \frac{\lambda_5^{*2}}{4} (K_1^2 - K_2^2 - 2iK_1K_2) + \frac{1}{4} [\lambda_6(K_0K_1 + iK_0K_2 + K_1K_3 + iK_2K_3) \\
& + \lambda_6^*(K_0K_1 - iK_0K_2 + K_1K_3 - iK_2K_3)] + \frac{1}{4} [\lambda_7(K_0K_1 + iK_0K_2 \\
& - K_1K_3 - iK_2K_3) + \lambda_7^*(K_0K_1 - iK_0K_2 - K_1K_3 + iK_2K_3)]
\end{aligned}$$

Reorganizando el potencial en potencias de las variables orbitales

$$\begin{aligned}
V = & K_0 \left(\frac{\mu_1^2}{2} + \frac{\mu_2^2}{2} \right) + K_1 \left(\frac{\mu_3^2}{2} + \frac{\mu_3^{*2}}{2} \right) + K_2 \left(\frac{i\mu_3^2}{2} - \frac{i\mu_3^{*2}}{2} \right) + K_3 \left(\frac{\mu_1^2}{2} - \frac{\mu_2^2}{2} \right) \\
& + K_0^2 \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_3}{4} \right) + 2K_0K_1 \left(\frac{\lambda_6}{8} + \frac{\lambda_6^*}{8} \right) + 2K_0K_2 \left(\frac{i\lambda_7}{8} - \frac{i\lambda_7^*}{8} \right) \\
& + 2K_0K_3 \left(\frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_2}{4} \right) + K_1^2 \left(\frac{\lambda_4}{4} + \frac{\lambda_5^2}{4} + \frac{|\lambda_5|^2}{2} + \frac{\lambda_5^{*2}}{4} \right) + K_1K_2 \left(\frac{i\lambda_5^2}{2} - \frac{i\lambda_5^{*2}}{2} \right) \\
& + K_1K_3 \left(\frac{\lambda_6}{4} + \frac{\lambda_6^*}{4} - \frac{\lambda_7}{4} - \frac{\lambda_7^*}{4} \right) + K_2^2 \left(\frac{\lambda_4}{4} - \frac{\lambda_5^2}{4} + \frac{|\lambda_5|^2}{2} - \frac{\lambda_5^{*2}}{4} \right) \\
& + K_2K_3 \left(\frac{i\lambda_6}{4} - \frac{i\lambda_6^*}{4} - \frac{i\lambda_7}{4} + \frac{i\lambda_7^*}{4} \right) + K_3^2 \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} - \frac{\lambda_3}{4} \right). \tag{3.23}
\end{aligned}$$

Con esto, se ha demostrado que el potencial general de dos dobletes Higgs se puede escribir en la forma

$$V(\varphi_1, \varphi_2) = V_2 + V_4, \tag{3.24}$$

$$V_2 = \xi_0 K_0 + \xi_a K_a, \tag{3.25}$$

$$V_4 = \eta_{00} K_0^2 + 2K_0 \eta_a K_a + K_a \eta_{ab} K_b, \tag{3.26}$$

donde los 14 parámetros independientes ξ_0 , ξ_a , η_{00} , η_a , y $\eta_{ab} = \eta_{ba}$ (matriz simétrica) tienen los siguientes valores

$$\begin{aligned}
\xi_0 = \frac{\mu_1^2}{2} + \frac{\mu_2^2}{2}, \quad \boldsymbol{\xi} = \left(\frac{\mu_3^2}{2} + \frac{\mu_3^{*2}}{2}, \frac{i\mu_3^2}{2} - \frac{i\mu_3^{*2}}{2}, \frac{\mu_1^2}{2} - \frac{\mu_2^2}{2} \right)^T, \quad \eta_0 = \frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_3}{4}, \\
\boldsymbol{\eta} = \left(\frac{\lambda_6}{8} + \frac{\lambda_6^*}{8}, \frac{i\lambda_7}{8} - \frac{i\lambda_7^*}{8}, \frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_2}{4} \right)^T,
\end{aligned}$$

$$(\eta_{ab}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_4}{4} + \frac{\lambda_5^2}{4} + \frac{|\lambda_5|^2}{2} + \frac{\lambda_5^{*2}}{4} & \frac{i\lambda_5^2}{4} - \frac{i\lambda_5^{*2}}{4} & \frac{\lambda_6}{8} + \frac{\lambda_6^*}{8} - \frac{\lambda_7}{8} - \frac{\lambda_7^*}{8} \\ \frac{i\lambda_5^2}{4} - \frac{i\lambda_5^{*2}}{4} & \frac{\lambda_4}{4} - \frac{\lambda_5^2}{4} + \frac{|\lambda_5|^2}{2} - \frac{\lambda_5^{*2}}{4} & \frac{i\lambda_6}{8} - \frac{i\lambda_6^*}{8} - \frac{i\lambda_7}{8} + \frac{i\lambda_7^*}{8} \\ \frac{\lambda_6}{8} + \frac{\lambda_6^*}{8} - \frac{\lambda_7}{8} - \frac{\lambda_7^*}{8} & \frac{i\lambda_6}{8} - \frac{i\lambda_6^*}{8} - \frac{i\lambda_7}{8} + \frac{i\lambda_7^*}{8} & \frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} - \frac{\lambda_3}{4} \end{pmatrix}.$$

Debido a que las variables orbitales y todos estos parámetros son reales, se puede afirmar que el potencial escalar es real. A continuación se define $\mathbf{K} = (K_a)$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_a)$, $\boldsymbol{\eta} = (\eta_a)$ y $E = (\eta_{ab})$, por lo tanto

$$V_2 = \xi_0 K_0 + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{K} \quad (4.25a)$$

$$V_4 = \eta_{00} K_0^2 + 2K_0 \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{K} + \mathbf{K}^T E \mathbf{K} \quad (4.26a)$$

Por otra parte, se puede considerar un cambio de base de los campos Higgs, $\varphi_i \rightarrow \varphi'_i$, tal que

$$\phi' = U\phi, \quad (3.27)$$

con ϕ definido por (3.14), donde

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix} \quad (U^\dagger U = \mathbb{1}), \quad (3.28)$$

es una transformación unitaria 2×2 . Con la transformación (3.27) las funciones invariantes gauge (3.18) y (3.22) quedan de la siguiente manera

$$K'_0 = (\phi')^\dagger \phi' = (U\phi)^\dagger U\phi = \phi^\dagger \underbrace{U^\dagger U}_{\mathbb{1}} \phi = \phi^\dagger \phi = K_0, \quad (3.29)$$

$$K'_a = (\phi')^\dagger \sigma^a \phi' = \phi^\dagger U^\dagger \sigma^a U \phi. \quad (3.30)$$

De la anterior ecuación se reescribe el producto $U^\dagger \sigma_a U$ en una nueva base, es decir

$$U^\dagger \sigma^a U = C\mathbb{1} + R_{ab}(U)\sigma^b, \quad (3.31)$$

donde C y $R_{ab}(U)$ son los coeficientes de expansión de la base. Ahora, tomando la traza en (3.31) se tiene que

$$\text{Tr}(U^\dagger \sigma^a U) = C \text{Tr}(\mathbb{1}) + R_{ab}(U) \underbrace{\text{Tr}(\sigma^b)}_{=0}. \quad (3.32)$$

De la propiedad cíclica de la traza $\text{Tr}(U^\dagger \sigma^a U) = \text{Tr}(\sigma^a U U^\dagger) = \text{Tr}(\sigma^a) = 0$, por lo tanto en (3.32) se obtiene $C = 0$; es decir

$$U^\dagger \sigma^a U = R_{ab}(U)\sigma^b, \quad (3.33)$$

reescribiendo (3.30) como

$$\begin{aligned} K'_a &= R_{ab}(U) \underbrace{\phi^\dagger \sigma^b \phi}_{K_b}, \\ K'_a &= R_{ab}(U) K_b \end{aligned} \quad (3.34)$$

La matriz $R(U)$ tiene ciertas propiedades interesantes. La primera propiedad surge de su conjugado hermítico, ecuación (3.33)

$$\begin{aligned} (U^\dagger \sigma^a U)^\dagger &= (R_{ab}(U) \sigma^b)^\dagger, \\ U^\dagger \sigma^a U &= R_{ab}(U)^* \sigma^b. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Si se compara (3.33) y (3.35) se obtiene que

$$R_{ab}^*(U) = R_{ab}(U). \quad (3.36)$$

La segunda propiedad de $R(U)$ es su ortogonalidad, para determinarla se eleva al cuadrado la ecuación (3.33)

$$\begin{aligned} (U^\dagger \sigma^a U) (U^\dagger \sigma^c U) &= (R_{ab}(U) \sigma^b) (R_{cd}(U) \sigma^d), \\ U^\dagger \sigma^a \sigma^c U &= R_{ab}(U) R_{cd}(U) \sigma^b \sigma^d, \end{aligned} \quad (3.37)$$

ahora, tomando la traza de esta última ecuación y teniendo en cuenta que (3.13)

$$\begin{aligned} \underbrace{\text{Tr} (U^\dagger \sigma^a \sigma^c U)}_{\text{Tr} (\sigma^a \sigma^c U U^\dagger) = \text{Tr} (\sigma^a \sigma^c)} &= R_{ab}(U) R_{cd}(U) \text{Tr} (\sigma^b \sigma^d), \\ 2\delta_{ac} &= 2R_{ab}(U) R_{cd}(U) \delta_{bd}, \\ \delta_{ac} &= R_{ab}(U) R_{cb}(U), \end{aligned} \quad (3.38)$$

es decir, la matriz $R(U)$ debe cumplir

$$R(U) R^T(U) = \mathbb{1}_3. \quad (3.39)$$

El determinante de (3.39), da como resultado $[\text{Det } R(U)]^2 = 1$, y como se trata de una transformación continua

$$\text{Det } (R(U)) = 1. \quad (3.40)$$

Las propiedades (3.35), (3.39) y (3.40) muestran que $R(U) \in SO(3)$. La forma del potencial escalar de Higgs (3.24) permanece inalterada por el cambio de base (3.27). Debido a esto se obtiene de acuerdo a (3.27) y (3.32)

$$\begin{aligned} V_2 &= \xi'_0 K'_0 + \xi'_a K'_a, \\ \Rightarrow V_2 &= \xi'_0 K_0 + \xi'_a R_{ab}(U) K_b, \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} V_4 &= \eta'_{00} (K'_0)^2 + 2K'_0 \eta'_a K'_a + K'_a \eta'_{ab} K'_b, \\ \Rightarrow V_4 &= \eta'_{00} K_0^2 + 2K_0 \eta'_a R_{ab}(U) K_b + K_c R_{ac}(U) \eta'_{ab} R_{bd}(U) K_d. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Si se compara (3.41) con (3.25), debe cumplirse que

$$\xi_0 = \xi'_0, \quad (3.43)$$

$$\xi_b = \xi'_a R_{ab}. \quad (3.44)$$

La forma matricial de la ecuación anterior es:

$$\xi^T = \xi'^T R(U),$$

multiplicando esto por $R(U)^T$ a derecha

$$\begin{aligned} \xi^T R(U)^T &= \xi'^T \underbrace{R(U) R(U)^T}_{=1}, \\ \xi'^T &= \xi^T R(U)^T, \\ \xi' &= R(U) \xi. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Ahora, comparando (3.42) con (3.26), se obtiene las siguientes igualdades en los parámetros

$$\eta'_{00} = \eta_{00}, \quad (3.46)$$

$$\eta_b = \eta'_a R_{ab}(U), \quad (3.47)$$

$$\eta_{bd} = R_{ac}(U) \eta'_{ab} R_{bd}(U). \quad (3.48)$$

De igual modo, para (3.47) se logra el siguiente resultado

$$\eta' = R(U) \eta. \quad (3.49)$$

La ecuación matricial de (3.48) es la siguiente:

$$E = R(U)^T E' R(U),$$

multiplicando en el lado izquierdo por $R(U)$ y en el lado derecho por $R(U)^T$, se obtiene

$$\begin{aligned} R(U)ER(U)^T &= \underbrace{R(U)R(U)^T}_{=1} E' \underbrace{R(U)^T R(U)}_{=1} \\ E' &= R(U)ER(U)^T \end{aligned} \quad (3.50)$$

Además, para cada matriz $R(U)$ con las propiedades (3.45), (3.49) y (3.50) existe una transformación unitaria (3.27). Se afirma lo anterior debido a que el número de parámetros reales independientes de una matriz unitaria 2×2 es 4, y para una matriz ortogonal 3×3 es 3 (ver capítulo 4 de [14]); es decir, con la transformación unitaria (3.27) se puede representar cualquier matriz ortogonal 3×3 . Por lo tanto, es posible diagonalizar E , reduciendo el número de parámetros de V en tres. El potencial Higgs es entonces determinado por solamente 11 parámetros reales (ξ_0 , ξ_a , η_{00} , η_a y las componentes de η_{ab} diagonalizada). Valga decir que una transformación de base de tipo (3.27), después del rompimiento espontáneo de simetría, los términos cinéticos del Lagrangiano, permanecen invariantes. Sin embargo, los acoplamientos Yukawa en un modelo realista no son invariantes bajo dicha transformación.

De la definición de la matriz $\underline{K}$ en (3.7) se puede demostrar que esta es semidefinida positiva, es decir $\mathbf{x}^\dagger \underline{K} \mathbf{x} \geq 0$, para cualquier vector $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\dagger \underline{K} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^* & b^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 a + \varphi_2^\dagger \varphi_1 b \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 a + \varphi_2^\dagger \varphi_2 b \end{pmatrix}, \\ &= \varphi_1^\dagger \varphi_1 a a^* + \varphi_2^\dagger \varphi_1 b a^* + \varphi_1^\dagger \varphi_2 a b^* + \varphi_2^\dagger \varphi_2 b b^*, \\ &= (\varphi_1 a^* + \varphi_1 b^*)^\dagger \varphi_1 a^* + (\varphi_1 a^* + \varphi_1 b^*)^\dagger \varphi_2 b^* = (\varphi_1 a^* + \varphi_1 b^*)^\dagger (\varphi_1 a^* + \varphi_1 b^*), \\ \mathbf{x}^\dagger \underline{K} \mathbf{x} &= |\varphi_1 a^* + \varphi_1 b^*|^2 \geq 0, \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde a y b son las componentes del vector $\mathbf{x}$. Estudiemos el determinante de $\underline{K}$

$$\text{Det } \underline{K} = \text{Det} \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix} = (\varphi_1^\dagger \varphi_1) (\varphi_2^\dagger \varphi_2) - (\varphi_1^\dagger \varphi_2) (\varphi_2^\dagger \varphi_1), \quad (3.52)$$

y de la desigualdad de Cauchy-Schwartz $(\varphi_1^\dagger \varphi_1)(\varphi_2^\dagger \varphi_2) \geq (\varphi_1^\dagger \varphi_2)(\varphi_2^\dagger \varphi_1)$, implica que

$$\text{Det } \underline{K} \geq 0. \quad (3.53)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.22) en (3.52)

$$\begin{aligned} \text{Det } \underline{K} &= \frac{1}{4} [(K_0 + K_3)(K_0 - K_3) - (K_1 + iK_2)(K_1 - iK_2)], \\ \text{Det } \underline{K} &= \frac{1}{4} (K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2). \end{aligned} \quad (3.54)$$

De (3.7) se tiene que $\text{Tr } \underline{K} = K_0$, el cual será un número positivo debido a que es la suma de dos cantidades positivas, y de (3.54) se obtiene que $K_0^2 + \mathbf{K}^2 = 4 \text{Det } \underline{K}$, lo cual conlleva

$$K_0 \geq 0, \quad K_0^2 - \mathbf{K}^2 \geq 0 \quad (3.55)$$

Por otra parte, para cualquier $K_0, \mathbf{K}$ que satisfacen (3.55), es posible encontrar campos φ_i que cumplan (3.10) y (3.14). Además, todos los campos que obedecen (3.10) y (3.14) para unos determinados $K_0, \mathbf{K}$ forman una órbita gauge¹, esto se demuestra en el apéndice A.

Así las funciones K_0, K_a parametrizan las órbitas gauge y no una configuración única de los campos Higgs. Especificando el dominio de las funciones K_0, K_a correspondientes a las orbitas gauge nos permite analizar el potencial en la forma (3.24), con todos los grados de libertad gauge eliminados. Es curioso notar que las órbitas gauge de los campos Higgs de este modelo de dobletes Higgs están parametrizadas por cuadvectores de tipo Minkowski $(K_0, \mathbf{K})$ los cuales yacen sobre o dentro del cono de luz futuro debido a que $K_0 \geq 0$ y $K_0^2 \geq \mathbf{K}^2$.

3.3. Estabilidad

Las propiedades del potencial (3.24), se pueden analizar como una función de K_0 y $\mathbf{K}$ sobre el dominio determinado por $K_0 \geq 0$ y $K_0^2 \geq \mathbf{K}^2$. Para $K_0 > 0$ se define

$$\mathbf{k} = \mathbf{K}/K_0. \quad (3.56)$$

¹ K_0 y $\mathbf{K}$ son cantidades que absorben las transformaciones gauge, las incluyen, de ahí su nombre órbitas gauge.

De hecho, $K_0 = 0$ ocurre sólo cuando $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, y el potencial es $V = 0$ para este caso. Haciendo uso de (3.56) en (4.25a) y (4.26a)

$$V_2 = K_0 J_2(\mathbf{k}), \quad \text{con} \quad J_2(\mathbf{k}) = \xi_0 + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{k}, \quad (3.57)$$

$$V_4 = K_0^2 J_4(\mathbf{k}), \quad \text{con} \quad J_4(\mathbf{k}) = \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{k} + \mathbf{k}^T E \mathbf{k}, \quad (3.58)$$

donde las funciones $J_2(\mathbf{k})$ y $J_4(\mathbf{k})$ se encuentran sobre el dominio $|\mathbf{k}| \leq 1$. Para que el potencial se considere estable este debe estar delimitado inferiormente, es decir la estabilidad está determinada por el comportamiento de V en el límite $K_0 \rightarrow \infty$; por lo tanto, por los signos de J_2 y J_4 en (3.57) y (3.58). Para que el potencial sea al menos *marginalmente* estable

$$\left. \begin{array}{l} J_4(\mathbf{k}) > 0 \quad \text{o} \\ J_4(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{y} \quad J_2(\mathbf{k}) \geq 0 \end{array} \right\} \text{ para todo } |\mathbf{k}| \leq 1 \quad (3.59)$$

es una condición necesaria y suficiente, debido a que si se usa la anterior ecuación en (3.24) se obtiene

$$V \geq 0 \quad \text{para} \quad K_0 \rightarrow \infty. \quad (3.60)$$

Equivalentemente si se cumple (3.60), usando (3.24), (3.25) y (3.26) se puede lograr la condición (3.59). La condición de estabilidad más robusta $V \rightarrow \infty$ con $K_0 \rightarrow \infty$ para cualesquiera $\mathbf{k}$ puede ser lograda, ya sea por

$$\left. \begin{array}{l} J_4(\mathbf{k}) > 0 \quad \text{o} \\ J_4(\mathbf{k}) = 0 \quad \text{y} \quad J_2(\mathbf{k}) > 0 \end{array} \right\} \text{ para todo } |\mathbf{k}| \leq 1 \quad (3.61)$$

para una estabilidad en el sentido *débil*, o para

$$J_4 > 0 \quad \text{para todo } |\mathbf{k}| \leq 1 \quad (3.62)$$

en un sentido *fuerte*; es decir, solamente por los términos cuárticos de V solamente.

Para asegurar que $J_4(\mathbf{k})$ es semidefinido positivo, es suficiente considerar el valor de todos sus puntos estacionarios en el dominio $|\mathbf{k}| < 1$, y sobre la frontera $|\mathbf{k}| = 1$. Esto es válido, porque el mínimo global de la función continua $J_4(\mathbf{k})$ se logra sobre el dominio compacto $|\mathbf{k}| \leq 1$, y está localizado entre aquellos puntos estacionarios.

Esto lleva a ligaduras sobre η_{00} , η_a y η_{ab} , los cuales parametrizan el término cuártico V_4 del potencial.

Ahora se pretende encontrar los puntos estacionarios de la función $J_4(\mathbf{k})$ para la región $|\mathbf{k}| < 1$; para ello se calcula la derivada de $J_4(\mathbf{k})$ con respecto a k_c (donde k_a son las componentes del vector $\mathbf{k}$ con $a = 1, 2, 3$) y se iguala a cero

$$\frac{\partial J_4(\mathbf{k})}{\partial k_c} = 2\eta_a \delta_{ac} + \delta_{ac} \eta_{ab} k_b + k_a \eta_{ab} \delta_{bc} = 2\eta_c + \eta_{cb} k_b + k_a \underbrace{\eta_{ac}}_{\eta_{ca}} = 2(\eta_c + \eta_{cb} k_b) = 0$$

Los puntos estacionarios (si existe alguno) deben cumplir

$$E\mathbf{k} = -\boldsymbol{\eta}. \quad (3.63)$$

Si $\text{Det } E \neq 0$ (asegura la existencia de la matriz inversa E^{-1}) explícitamente se obtiene

$$\mathbf{k} = -E^{-1}\boldsymbol{\eta} \quad (3.64)$$

El resultado anterior permite conocer el valor de la función J_4 en los puntos estacionarios cuando $\text{Det } E \neq 0$ y $|\mathbf{k}| < 1$, es decir, como E es simétrica tenemos que

$$\begin{aligned} J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}} &= \eta_{00} - 2\boldsymbol{\eta}^T E^{-1}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^T \underbrace{(E^{-1})^T}_{(E^T)^{-1}=E^{-1}} \underbrace{EE^{-1}}_{\mathbb{1}} \boldsymbol{\eta} \\ J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}} &= \eta_{00} - \boldsymbol{\eta}^T E^{-1}\boldsymbol{\eta} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Donde las soluciones regulares deben cumplir la desigualdad $|\mathbf{k}| < 1$, por lo tanto

$$1 - \boldsymbol{\eta}^T E^{-2}\boldsymbol{\eta} > 0. \quad (3.66)$$

Si $\text{Det } E = 0$ pueden existir una o mas soluciones excepcionales para el valor de $\mathbf{k}$ en la ecuación (3.63), donde estas deben cumplir $|\mathbf{k}| < 1$ para que sean válidas. Para la ligadura $|\mathbf{k}| = 1$, se tiene que encontrar los puntos estacionarios de la siguiente función

$$F_4(\mathbf{k}, u) = J_4(\mathbf{k}) + u(1 - \mathbf{k}^2) \quad (3.67)$$

donde u es un multiplicador de Lagrange. Aplicando el método de la primera derivada

$$\frac{\partial F_4(\mathbf{k}, u)}{\partial k_c} = 2\eta_c + 2\eta_{cb} k_b - 2uk_c = 0$$

$$\begin{aligned}
(\eta_{cb} - u\delta_{bc})k_b &= -\eta_c \\
(E - u)\mathbf{k} &= -\boldsymbol{\eta} \quad \text{con} \quad |\mathbf{k}| = 1
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Para valores de u donde se cumpla $\text{Det}(E - u) \neq 0$, los puntos estacionarios pueden expresarse como

$$\mathbf{k}(u) = -(E - u)^{-1}\boldsymbol{\eta} \tag{3.69}$$

Reemplazando esta solución en (3.67)

$$\begin{aligned}
J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}} &= \eta_{00} - 2\boldsymbol{\eta}^T(E - u)^{-1}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^T[(E - u)^{-1}]^T E(E - u)^{-1}\boldsymbol{\eta} \\
&\quad + u - \boldsymbol{\eta}^T[(E - u)^{-1}]^T u(E - u)^{-1}\boldsymbol{\eta} \\
&= u + \eta_{00} - 2\boldsymbol{\eta}^T(E - u)^{-1}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\eta}^T[(E - u)^{-1}]^T \underbrace{(E - u)(E - u)^{-1}}_{\mathbb{1}}\boldsymbol{\eta},
\end{aligned}$$

como E es simétrica, entonces la matriz $E - u$ también lo es debido a que u se puede entender como una matriz de la forma $u\mathbb{1}$; es decir, una matriz diagonal en donde todos sus elementos toman el valor de u . Por tanto $[(E - u)^{-1}]^T = [(E - u)^T]^{-1} = (E - u)^{-1}$. La función J_4 evaluada en sus puntos estacionarios cuando existe la ligadura $|\mathbf{k}| = 1$ es

$$J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}} = u + \eta_{00} - \boldsymbol{\eta}^T(E - u)^{-1}\boldsymbol{\eta}, \tag{3.70}$$

donde los multiplicadores u los se pueden determinar de la condición $\mathbf{k}^T\mathbf{k} = 1$ usando (3.69)

$$1 - \boldsymbol{\eta}^T(E - u)^{-2}\boldsymbol{\eta} = 0 \tag{3.71}$$

También para el caso $|\mathbf{k}| = 1$ pueden existir soluciones excepcionales en (3.68), dependiendo de los valores η_a y η_{ab} donde $\text{Det}(E - u) = 0$; es decir, donde u sea autovalor de E .

Las soluciones regulares para $|\mathbf{k}| < 0$ y $|\mathbf{k}| = 1$ pueden ser expresadas usando solo una función, para ello se define una función f la cual solo dependerá de u

$$f(u) = F_4(\mathbf{k}(u), u), \tag{3.72}$$

donde $F_4(\mathbf{k}(u), u)$ está definido como en (3.67) y $\mathbf{k}(u)$ como en (3.69). Esto lleva a las expresiones

$$f(u) = u + \eta_{00} - \boldsymbol{\eta}^T(E - u)^{-1}\boldsymbol{\eta}, \tag{3.73}$$

$$f'(u) = 1 - \boldsymbol{\eta}^T (E - u)^{-2} \boldsymbol{\eta}. \quad (3.74)$$

en las cuales se representan todos los puntos estacionarios regulares $\mathbf{k}$ de $J_4(\mathbf{k})$; puesto que, si $u \neq 0$ las ecuaciones (3.73) y (3.74) reproducen la función $J_4(\mathbf{k})$ en los puntos estacionarios cuando $|\mathbf{k}| = 1$ y la ligadura $1 - \mathbf{k}^T \mathbf{k} = 0$ en términos de los multiplicadores de Lagrange respectivamente; en cambio, si $u = 0$ para (3.73) y (3.74) se obtiene las ecuaciones de los puntos estacionarios para $J_4(\mathbf{k})$ cuando $|\mathbf{k}| < 1$ y la ligadura $1 - \mathbf{k}^T \mathbf{k} > 0$ respectivamente. Por lo tanto

$$f(u) = J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}}, \quad (3.75)$$

$$f'(u) = 1 - \mathbf{k}^2. \quad (3.76)$$

Existen puntos estacionarios de $J_4(\mathbf{k})$ con $|\mathbf{k}| < 1$ y $|\mathbf{k}| = 1$, cuando $f'(0) < 0$ y $f'(u) = 0$ respectivamente, y el valor de $J_4(\mathbf{k})$ está dado por $f(u)$.

En una base donde $E_k = \text{diag}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, para (3.73) se tiene

$$\begin{aligned} f(u) &= u + \eta_{00} - \boldsymbol{\eta}^T (E - u)^{-1} \boldsymbol{\eta}, \\ f(u) &= u + \eta_{00} - \begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_1 - u} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu_2 - u} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_3 - u} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}, \\ f(u) &= u + \eta_{00} - \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_i^2}{\mu_i - u}. \end{aligned} \quad (3.77)$$

de la anterior ecuación se obtiene lo siguiente

$$f'(u) = 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_i^2}{(\mu_i - u)^2}, \quad (3.78)$$

donde η_i con $i = 1, 2, 3$ son las componentes del vector $\boldsymbol{\eta}$. La forma de $f(u)$ y $f'(u)$ para un conjunto de parámetros donde $f'(u)$ tiene seis ceros puede ser visto en la figura (3.1). Note que no existen soluciones excepcionales en esta base cuando $\boldsymbol{\eta} \neq 0$, porque estas ocurren cuando $\text{Det}(E - u) = 0$; es decir cuando u son los autovalores de E , entonces en (3.77) se tiene una indeterminación debido al cociente en el segundo término.

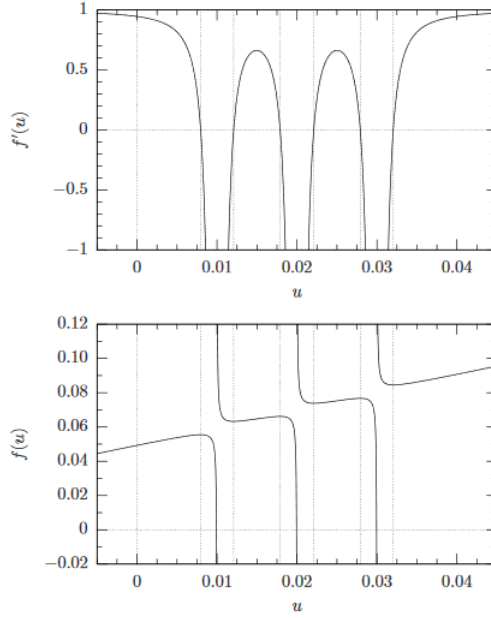


Figura 3.1: Las funciones determinantes de la estabilidad $f'(u)$ y $f(u)$, dadas por (3.78) y (3.77) con $\eta_{00} = 0,05$, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = (0,01, 0,02, 0,03)$ y $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0,002$

Fuente: Tomado de [13]

La función $f(u)$ definida en (3.73) permite discutir también las soluciones excepcionales de (3.63) y (3.68). Para ello se debe considerar primero que $|k| < 1$ y suponer que $\text{Det } K = 0$. Entonces en la base donde E es diagonal se tiene:

$$\text{Det } E = \mu_1 \mu_2 \mu_3 = 0 \quad (3.79)$$

en (3.63) se cumple que

$$\begin{aligned} \mu_1 k_1 &= \eta_1 \\ \mu_2 k_2 &= \eta_2 \\ \mu_3 k_3 &= \eta_3 \end{aligned} \quad (3.80)$$

Claramente una solución para (3.80) es únicamente posible si $\mu_a = 0$ y su respectivo η_a ($a = 1, 2, 3$) debe ser cero también. Por lo tanto, de (3.77) se puede ver que las soluciones excepcionales con $|k| < 1$ solamente son posibles si $f(u)$ se mantiene finito en $u = 0$. Es decir, el polo el cual corresponde a $\mu_a = 0$ debe tener residuo cero. En efecto $\eta_a = 0$ para todo a donde $\mu_a = 0$. Si se toma como ejemplo $\mu_1 = \mu_2 = 0$ y

$\eta_1 = \eta_2 = 0$, pero $\mu_3 \neq 0$. Entonces la solución general de (3.80) será

$$k_3 = -\frac{\eta_3}{\mu_3}, \quad (3.81)$$

con k_1 y k_2 arbitrarios, pero deben satisfacer

$$\mathbf{k}^2 = k_1^2 + k_2^2 + \left(\frac{\eta_3}{\mu_3}\right)^2 < 1. \quad (3.82)$$

Se puede reescribir $\mathbf{k}$ como

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}, \quad (3.83)$$

donde

$$\mathbf{k}_{\parallel} = -\frac{1}{\mu_3} \boldsymbol{\eta} \quad E\mathbf{k}_{\perp} = 0, \quad (3.84)$$

de la anterior ecuación se ve que $\mathbf{k}_{\parallel}$ solo va a tener una componente diferente de cero, correspondiente a k_3 ; mientras que para $\mathbf{k}_{\perp}$ se tiene dos componentes arbitrarias k_1 y k_2 y una tercera componente igual a cero. Usando la ecuación (3.82)

$$\mathbf{k}_{\perp}^2 + \mathbf{k}_{\parallel}^2 < 1 \implies \mathbf{k}_{\perp}^2 < 1 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 = 1 - \left(\frac{\eta_3}{\mu_3}\right)^2 \quad (3.85)$$

Para las funciones (3.77) y (3.78) se obtiene

$$f(u) = u + \eta_{00} - \frac{\eta_3^2}{\mu_3 - u} \quad (3.86)$$

$$f'(u) = 1 - \frac{\eta_3^2}{(\mu_3 - u)^2} \quad (3.87)$$

Insertando la solución (3.83) con las componentes (3.84) en $J_4(\mathbf{k})$ se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}} &= \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T (\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}) + (\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp})^T E (\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}), \\ J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}} &= \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{k}_{\parallel} + 2\underbrace{\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{k}_{\perp}}_{=0} + (\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp})^T E \mathbf{k}_{\parallel} + (\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp})^T \underbrace{E \mathbf{k}_{\perp}}_{=0}, \\ J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}} &= \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\parallel}^T E \mathbf{k}_{\parallel} + \underbrace{\mathbf{k}_{\perp}^T E}_{(E\mathbf{k})^T=0} \mathbf{k}_{\parallel}, \\ J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}} &= \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\parallel}^T E \mathbf{k}_{\parallel}, \end{aligned}$$

$$J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}} = \eta_{00} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & \eta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\eta_3}{\mu_3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{\eta_3}{\mu_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\eta_3}{\mu_3} \end{pmatrix},$$

$$J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}} = \eta_{00} - \frac{\eta_3}{\mu_3}.$$

Teniendo en cuenta la anterior ecuación y (3.85). Al evaluar (3.86) y (3.87) en $u = 0$:

$$f(0) = J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}} \quad (3.88)$$

$$f'(0) = 1 - \frac{\eta_3^2}{\mu_3^2} = 1 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 > \mathbf{k}_{\perp}^2 \geq 0 \quad (3.89)$$

Naturalmente estos argumentos se reproducen si solo uno de los μ_a es igual a cero o todos los tres μ_a son cero. En todos los casos (3.88) es válido para los puntos excepcionales con $|\mathbf{k}| < 1$, los cuales existen solo si $f(u)$ no tiene polo en $u = 0$. Además (3.88) solo involucra cantidades escalares, este es válido para cualquier base.

El caso de soluciones excepcionales para $|\mathbf{k}| = 1$ puede ser tratado de manera análoga. Una solución excepcional de (3.68) con $u = \mu_a$ ($a = 1, 2, 3$) puede existir si el correspondiente η_a tiene valor de cero. Entonces la función $f(u)$ no tiene polo para $u = \mu_a$ y las soluciones excepcionales de (3.68) satisfacen

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}, \quad (3.90)$$

donde las componentes se pueden expresar da la siguiente forma

$$\mathbf{k}_{\parallel} = - (E - u)^{-1} \boldsymbol{\eta}|_{u=\mu_a}, \quad (E - \mu_a) \mathbf{k}_{\perp} = 0, \quad (3.91)$$

y deben cumplir la siguiente ligadura

$$\mathbf{k}^2 = \mathbf{k}_{\parallel}^2 + \mathbf{k}_{\perp}^2 = 1. \quad (3.92)$$

Evidentemente también es válida la expresión

$$f(\mu_a) = J_4(\mathbf{k})|_{\text{stat}}, \quad (3.93)$$

$$f'(\mu_a) = 1 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 = \mathbf{k}_{\perp}^2 \geq 0. \quad (3.94)$$

Cabe resaltar que si la anterior solución es posible, $\mathbf{k}_\perp$ debe ser una combinación lineal de los autovectores correspondientes a los autovalores μ_a de E , donde la magnitud de estos está dada por

$$|\mathbf{k}_\perp| = \sqrt{1 - \mathbf{k}_\parallel^2} = \sqrt{f'(\mu_a)}. \quad (3.95)$$

Entonces se puede ver que la función $f(u)$ es muy útil para analizar la estabilidad del potencial general de los dos dobletes Higgs.

3.4. Criterios de Estabilidad

Supongamos dos soluciones $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ para (3.68), las cuales tendrán la forma (mirar [15])

$$(E - u_p)\mathbf{p} = -\boldsymbol{\eta} \quad \text{con} \quad |\mathbf{p}| = 1, \quad (3.96)$$

$$(E - u_q)\mathbf{q} = -\boldsymbol{\eta} \quad \text{con} \quad |\mathbf{q}| = 1, \quad (3.97)$$

donde u_p y u_q son los multiplicadores de Lagrange para $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ respectivamente. Para el desarrollo del criterio de estabilidad se asume que $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$, por lo tanto

$$u_q \neq u_p. \quad (3.98)$$

Al reescribir la función $J_4(\mathbf{k})$ definida en (3.70), para los puntos estacionarios (3.96) y (3.97) asumiendo que $\text{Det}(E - u_{(p,q)}) \neq 0$ se obtiene

$$J_4(\mathbf{p}) = u_p + \eta_{00} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{p} \quad (3.99)$$

$$J_4(\mathbf{q}) = u_q + \eta_{00} + \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{q}. \quad (3.100)$$

De las ecuaciones (3.96) y (3.97) teniendo en cuenta que la matriz E es simétrica se obtiene lo siguiente

$$(E - u_p)\mathbf{p}^T = -\boldsymbol{\eta}^T, \quad (3.101)$$

$$(E - u_q)\mathbf{q}^T = -\boldsymbol{\eta}^T, \quad (3.102)$$

Despejando E de estas ecuaciones

$$E = -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{p} + u_p, \quad (3.103)$$

$$E = -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{q} + u_q. \quad (3.104)$$

Igualando las dos ecuaciones y reorganizando términos

$$\begin{aligned} -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{q} + u_q &= -\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{p} + u_p, \\ u_q - u_p &= \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{q} - \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{p}. \end{aligned}$$

Ahora se multiplica por la derecha el vector $\mathbf{p}^T$

$$(u_q - u_p)\mathbf{p}^T = \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{q} \mathbf{p}^T - \boldsymbol{\eta}^T \underbrace{\mathbf{p} \mathbf{p}^T}_1.$$

Al reescribir el producto $\mathbf{q} \mathbf{p}^T = \mathbf{p} \mathbf{q}^T$ y multiplicar por la derecha por $\mathbf{q}$, se llega a la expresión

$$\begin{aligned} (u_q - u_p)\mathbf{p}^T \mathbf{q} &= \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{p} \underbrace{\mathbf{q}^T \mathbf{q}}_1 - \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{q}, \\ (u_q - u_p)\mathbf{p}^T \mathbf{q} &= \boldsymbol{\eta}^T (\mathbf{p} - \mathbf{q}). \end{aligned} \quad (3.105)$$

Se restan las ecuaciones (3.99) - (3.100)

$$J_4(\mathbf{p}) - J_4(\mathbf{q}) = u_p - u_q + \boldsymbol{\eta}^T (\mathbf{p} - \mathbf{q}),$$

usando (3.105)

$$\begin{aligned} J_4(\mathbf{p}) - J_4(\mathbf{q}) &= u_p - u_q + (u_q - u_p)\mathbf{p}^T \mathbf{q} \\ J_4(\mathbf{p}) - J_4(\mathbf{q}) &= (u_p - u_q)(1 - \mathbf{p}^T \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (3.106)$$

Se escribe el producto $\mathbf{p}^T \mathbf{q} = |\mathbf{p}| |\mathbf{q}| \cos \theta = \cos \theta < 1$, donde se ha quitado el valor $\theta = 0$ debido a que esto implica $\mathbf{p} = \mathbf{q}$ y usando esto en (3.105) se tiene $u_p = u_q$, lo cual contradice lo asumido en (3.98). Además, la desigualdad $\mathbf{p}^T \mathbf{q} < 1$ se cumple de inmediato si $|\mathbf{p}| < 1$; es decir, cuando tenemos el caso $u_p = 0$. Por lo tanto, en cualquier caso podemos afirmar que $(1 - \mathbf{p}^T \mathbf{q}) > 0$. Si u_p es el mínimo global, es decir $u_p < u_q$, entonces en (3.106)

$$J_4(\mathbf{p}) - J_4(\mathbf{q}) = \underbrace{(u_p - u_q)}_{<0} \underbrace{(1 - \mathbf{p}^T \mathbf{q})}_{>0} < 0,$$

$$J_4(\mathbf{p}) < J_4(\mathbf{q}).$$

Ahora si se considera que la función que tiene menor valor en sus puntos estacionarios es $J_4(\mathbf{p})$, por lo tanto, en (3.106) se tiene

$$\underbrace{J_4(\mathbf{p}) - J_4(\mathbf{q})}_{<0} = (u_p - u_q) \underbrace{(1 - \mathbf{p}^T \mathbf{q})}_{>0},$$

$$u_p - u_q = \frac{J_4(\mathbf{p}) - J_4(\mathbf{q})}{1 - \mathbf{p}^T \mathbf{q}} < 0,$$

$$u_p < u_q.$$

Los resultados anteriores llevan a la siguiente relación

$$u_p < u_q \iff J_4(\mathbf{p}) < J_4(\mathbf{q}) \quad (3.107)$$

El resultados (3.107) es muy útil para hallar los valores de los parámetros en donde el potencial escalar es estable. El proceso para encontrar estas condiciones de estabilidad es el siguiente: calcular todas las soluciones regulares para los multiplicadores de Lagrange $\{u_i\}$ en (3.74), donde el término que involucra los multiplicadores está al cuadrado y debido a que es una operación de matrices 3×3 el número máximo de estos será 6 ($i \leq 6$). Añadimos a este conjunto las soluciones excepcionales provenientes de $\text{Det}(E - u) = 0$, en la cual se encuentra a lo sumo tres valores μ_j , donde $j \leq 3$; aunque, si tenemos E de forma diagonal se debe asegurar que para cada autovalor μ_j su respectivo $\eta_j \neq 0$. Por último, se considerar el valor $u = 0$ para las soluciones dentro de la región $|\mathbf{k}| < 1$ y con este se formar el conjunto $S = \{u_i, \mu_j, 0\}$ que contiene a lo sumo 10 elementos.

Del resultado (3.107) se puede tomar el valor mínimo del conjunto S para determinar la estabilidad del potencial. Debido a que los elementos de este conjunto son parámetros libres, se va a tener diferentes casos cuando cada uno de ellos es el valor mínimo.

Si el valor mínimo es una solución regular $\{u_i\}$, se impone la condición $J_4(\mathbf{p}) > 0$, es decir, si en (3.73), se tiene $f(u_i) > 0$. En consecuencia, de la ecuación (3.107),

se obtiene la estabilidad para $J_4(\mathbf{k})$. Las condiciones provenientes de las soluciones regulares son necesarias, por lo tanto, estas van a estar presentes en el conjunto S .

Si el valor mínimo es una solución excepcional $\{\mu_j\}$, primero se debe verificar que es una solución válida haciendo uso de $f'(\mu_j) \geq 0$. Si esto no es cierto, el valor se puede descartar del conjunto. Si la condición se satisface, se impone $f(\mu_j) > 0$, y de (3.107) se obtiene la estabilidad para J_4 . Las condiciones que provienen de las soluciones excepcionales no son necesarias debido a que la desigualdad $f(\mu_j) \geq 0$ no siempre se satisface. Similarmente para el caso en que el valor mínimo de S sea 0, se debe verificar que sea un punto válido con $f'(0) > 0$; si no lo es, este valor queda fuera del conjunto, de lo contrario se establece la condición $f(0) > 0$ para asegurar la estabilidad de la función J_4 .

Los valores de S que debido a su estructura no pueden ser el mínimo, son descartados si el valor más pequeño da un punto estacionario válido. De otra forma estos tienen que ser analizados

Finalmente se construye el conjunto

$$I = \{\text{valores no descartados de } S\} \quad (3.108)$$

de los cuales se obtiene las condiciones suficientes para establecer la estabilidad fuerte del potencial escalar.

Si para alguno de los casos anteriormente mencionados el valor mínimo tiene una solución del tipo $f(u) < 0$ el potencial es inestable; por otra parte, si se llega a un resultado $f(u) = 0$, se procede a evaluar las funciones $J_2(\mathbf{k})$ para considerar la estabilidad del potencial. Para ello se define la siguiente función

$$g(u) = \xi_0 - \xi^T (E - u)^{-1} \eta. \quad (3.109)$$

Al evaluar los puntos estacionarios de $J_4(\mathbf{k})$ dados en (3.69), la función (3.57) tendrá la forma

$$J_2(\mathbf{k}) = \xi_0 - \xi^T (E - u)^{-1} \eta = g(u), \quad (3.110)$$

si $u_i \neq \mu_a$; entonces, u_i no es un autovalor de E . Si u es un autovalor de E , es decir $u_i = \mu_a$, donde μ_a con $a = 1, 2, 3$ son los autovalores de la matriz E . Las soluciones que se evalúan sobre (3.57) deben estar dadas por (3.90) y (3.91)

$$J_2(\mathbf{k}) = \xi_0 + \xi^T \mathbf{k} = \xi_0 + \xi^T (\mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}) = \underbrace{\xi_0 - \xi^T (E - u_i)^{-1} \boldsymbol{\eta}}_{g(u_i)} + \xi^T \mathbf{k}_{\perp},$$

$$J_2(\mathbf{k}) = g(u_i) + \xi^T \mathbf{k}_{\perp}. \quad (3.111)$$

Sean $\mathbf{e}_l(u_i)$ con $l = 1, \dots, N$ los $N \leq 3$ autovectores correspondientes a los autovalores u_i de E . Con esto se redefine ξ como

$$\xi = \xi_{\perp} + \xi_{\parallel}, \quad (3.112)$$

donde $\xi_{\perp}$ es la proyección de ξ sobre los autovectores de E , es decir

$$\xi_{\perp}(u_i) = \sum_{l=1}^N \frac{\mathbf{e}_l(u_i) \mathbf{e}_l^T(u_i)}{|\mathbf{e}_l(u_i)|^2} \xi, \quad (3.113)$$

mientras que $\xi_{\parallel}$, es la proyección de ξ sobre los vectores $\mathbf{c}_t$ con $t = 1, \dots, Q$ con $Q \leq 3$, los cuales en conjunto con los vectores $\mathbf{e}_l$ forman una base. Teniendo en cuenta que $\mathbf{k}_{\perp}$ es una combinación lineal de los autovectores $\mathbf{e}_l$ y reemplazando (3.112) en (3.111)

$$J_2(\mathbf{k}) = g(u_i) + (\xi_{\perp} + \xi_{\parallel})^T \mathbf{k}_{\perp} = g(u_i) + \xi_{\perp}^T \mathbf{k}_{\perp} + \xi_{\parallel}^T \mathbf{k}_{\perp},$$

Pero $\xi_{\parallel}^T \mathbf{k}_{\perp} = 0$, debido a que los vectores $\mathbf{c}_t$ y $\mathbf{e}_w$ deben ser ortogonales para formar una base. Usando las propiedades del producto escalar

$$J_2(\mathbf{k}) = g(u_i) + |\xi_{\perp}| |\mathbf{k}_{\perp}| \cos \alpha = g(u_i) + |\xi_{\perp}| \sqrt{f'(u_i)} \cos \alpha \quad (3.114)$$

donde α es el ángulo entre $\xi_{\perp}$ y $\mathbf{k}_{\perp}$. Si se toma el valor ínfimo sobre todas las soluciones excepcionales de $\mathbf{k}$ se llega a:

$$\inf_{\mathbf{k}} J_2(\mathbf{k}) = g(u_a) - |\xi_{\perp}| \sqrt{f'(u_i)}. \quad (3.115)$$

Por lo tanto el potencial es estable en sentido débil si para todo $u_i \in I$ donde $f(u_i) = 0$ lo siguiente se cumple

$$g(u_i) > 0 \text{ si } u_i \neq \mu_a, \quad (3.116)$$

$$g(u_i) - |\xi_\perp(u_i)|\sqrt{f'(u_i)} > 0 \text{ si } u_a = \mu_a, \quad (3.117)$$

si para los anteriores resultados tenemos $= 0$ el potencial tiene estabilidad marginal, pero si el resultado da < 0 el potencial es inestable.

Si el potencial solo tiene términos cuadráticos, la estabilidad estará solamente establecida por V_2 , es decir

$$J_2(\mathbf{k}) = \xi_0 + \xi^T \mathbf{k} = \xi_0 + |\xi||\mathbf{k}| \cos \theta \quad (3.118)$$

donde θ es el ángulo entre $\mathbf{k}$ y ξ . El valor mínimo que puede tomar V_2 ocurre cuando $\theta = \pi$ y $|\mathbf{k}| = 1$, es decir

$$\min_{\mathbf{k}} J_2(\mathbf{k}) = \xi_0 - |\xi|, \quad (3.119)$$

entonces el potencial es estable en sentido fuerte si $\xi_0 > |\xi|$, marginalmente estable si $\xi = |\xi|$ e inestable cuando $\xi < |\xi|$

3.5. Estabilidad para el Modelo de Gunion et al.

Considerar el modelo general de dos dobletes Higgs de [2] y [3] con el potencial

$$\begin{aligned} V(\varphi_1, \varphi_2) = & \lambda_1 \left(\varphi_1^\dagger \varphi_1 - v_1^2 \right)^2 + \lambda_2 \left(\varphi_2^\dagger \varphi_2 - v_2^2 \right)^2 + \lambda_3 \left(\varphi_1^\dagger \varphi_1 - v_1^2 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 - v_2^2 \right)^2 \\ & + \lambda_4 \left((\varphi_1^\dagger \varphi_1)(\varphi_2^\dagger \varphi_2) - (\varphi_1^\dagger \varphi_2)(\varphi_2^\dagger \varphi_1) \right) + \lambda_5 \left(\text{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) - v_1 v_2 \cos \xi \right)^2 \\ & + \lambda_6 \left(\text{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) - v_1 v_2 \sin \xi \right)^2 + \lambda_7 \left(\text{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) - v_1 v_2 \cos \xi \right) \\ & \times \left(\text{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) - v_1 v_2 \sin \xi \right), \end{aligned} \quad (3.120)$$

el cual contiene diez parámetros, de los cuales nueve son parámetros reales. El parámetro complejo está presente en el término que acompaña a $(\varphi_1^\dagger \varphi_2)^2$, debido al producto $\text{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) \text{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) = -i(\varphi_1^\dagger \varphi_2 + \varphi_2^\dagger \varphi_1)(\varphi_1^\dagger \varphi_2 - \varphi_2^\dagger \varphi_1)/4$ en el último término. Este potencial rompe la simetría discreta

$$\varphi_1 \longrightarrow -\varphi_1, \quad \varphi_2 \longrightarrow \varphi_2,$$

solo suavemente, es decir, por los términos de V_2 suprimiendo así grandes corrientes neutras que cambian el sabor. Esto se puede visualizar si el potencial es expresado como prosigue

$$\begin{aligned}
V(\varphi_1, \varphi_2) = & - (2\lambda_1 v_1^2 + 2\lambda_3 v_1^2 + 2\lambda_3 v_2^2) \varphi_1^\dagger \varphi_1 - (2\lambda_2 v_2^2 + 2\lambda_3 v_1^2 + 2\lambda_3 v_2^2) \varphi_2^\dagger \varphi_2 \\
& - (\lambda_5 v_1 v_2 \cos \xi + \lambda_7 v_1 v_2 \sin \xi) \operatorname{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) - (\lambda_6 v_1 v_2 \sin \xi \\
& + \lambda_7 v_1 v_2 \cos \xi) \operatorname{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) + (\lambda_1 + \lambda_3)(\varphi_1^\dagger \varphi_1)^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)(\varphi_2^\dagger \varphi_2)^2 \\
& + (2\lambda_3 + \lambda_4)(\varphi_1^\dagger \varphi_1)(\varphi_2^\dagger \varphi_2) + (\lambda_5 - \lambda_4)(\operatorname{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2))^2 \\
& + (\lambda_6 - \lambda_4)(\operatorname{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2))^2 + \lambda_7 \operatorname{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) \operatorname{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) + c,
\end{aligned}$$

donde c representa la suma de todos los términos constantes. El potencial en la anterior ecuación está en la forma $V = V_2 + V_4$, donde

$$\begin{aligned}
V_2 = & - (2\lambda_1 v_1^2 + 2\lambda_3 v_1^2 + 2\lambda_3 v_2^2) \varphi_1^\dagger \varphi_1 - (2\lambda_2 v_2^2 + 2\lambda_3 v_1^2 + 2\lambda_3 v_2^2) \varphi_2^\dagger \varphi_2 \\
& - (\lambda_5 v_1 v_2 \cos \xi + \lambda_7 v_1 v_2 \sin \xi) \operatorname{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) - (\lambda_6 v_1 v_2 \sin \xi \\
& + \lambda_7 v_1 v_2 \cos \xi) \operatorname{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2), \tag{1.117a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V_4 = & (\lambda_1 + \lambda_3)(\varphi_1^\dagger \varphi_1)^2 + (\lambda_2 + \lambda_3)(\varphi_2^\dagger \varphi_2)^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)(\varphi_1^\dagger \varphi_1)(\varphi_2^\dagger \varphi_2) \\
& + (\lambda_5 - \lambda_4)(\operatorname{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2))^2 + (\lambda_6 - \lambda_4)(\operatorname{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2))^2 \\
& + \lambda_7 \operatorname{Re}(\varphi_1^\dagger \varphi_2) \operatorname{Im}(\varphi_1^\dagger \varphi_2), \tag{1.117b}
\end{aligned}$$

de estas expresiones es fácil ver que

$$V_4(\varphi_1, \varphi_2) = V_4(-\varphi_1, \varphi_2), \quad V_2(\varphi_1, \varphi_2) \neq V_2(-\varphi_1, \varphi_2)$$

Ahora para analizar la estabilidad del potencial se deben aplicar desde la ecuación (3.22) hasta (3.120)

$$\begin{aligned}
V = & \lambda_1 \left((K_0 + K_3)/2 - v_1^2 \right)^2 + \lambda_2 \left((K_0 - K_3)/2 - v_2^2 \right)^2 \\
& + \lambda_3 \left(K_0 - v_1^2 - v_2^2 \right)^2 + \frac{\lambda_4}{4} (K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2) \\
& + \lambda_5 (K_1/2 - v_1 v_2 \cos \xi)^2 + \lambda_6 (K_2/2 - v_1 v_2 \sin \xi)^2 \\
& + \lambda_7 (K_1/2 - v_1 v_2 \cos \xi) \times (K_2/2 - v_1 v_2 \sin \xi), \tag{3.121}
\end{aligned}$$

Desarrollando potencias y quitando los términos constantes

$$V = \lambda_1 \left(\frac{K_0^2}{4} + \frac{K_0 K_3}{2} + \frac{K_3^2}{4} - v_1^2 K_0 - v_1^2 K_3 \right) + \lambda_2 \left(\frac{K_0^2}{4} - \frac{K_0 K_3}{2} + \frac{K_3^2}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}
& -v_2^2 K_0 + v_2^2 K_3) + \lambda_3 (K_0^2 - 2v_1^2 K_0 - 2v_2^2 K_0) + \frac{\lambda_4}{4} (K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 \\
& - K_3^2) + \lambda_5 \left(\frac{K_1^2}{4} - v_1 v_2 \cos \xi K_1 \right) + \lambda_6 \left(\frac{K_2^2}{4} - v_1 v_2 \sin \xi K_2 \right) \\
& + \lambda_7 \left(\frac{K_1 K_2}{4} - \frac{v_1 v_2 \sin \xi K_1}{2} - \frac{v_1 v_2 \cos \xi K_2}{2} \right)
\end{aligned} \tag{3.122}$$

Se divide el potencial en $V = V_2 + V_4$ donde

$$\begin{aligned}
V_2 = & -K_0 (\lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + 2\lambda_3 v_1^2 + 2\lambda_3 v_2^2) - K_1 \left(\lambda_5 v_1 v_2 \cos \xi + \frac{\lambda_7 v_1 v_2 \sin \xi}{2} \right) \\
& - K_2 \left(\lambda_6 v_1 v_2 \sin \xi + \frac{\lambda_7 v_1 v_2 \cos \xi}{2} \right) + K_3 (\lambda_2 v_2^2 - \lambda_1 v_1^2),
\end{aligned} \tag{3.123}$$

$$\begin{aligned}
V_4 = & K_0^2 \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} + \lambda_3 + \frac{\lambda_4}{4} \right) + \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \right) K_0 K_3 + \left(\frac{\lambda_5 - \lambda_4}{4} \right) K_1^2 \\
& + \left(\frac{\lambda_7}{4} \right) K_1 K_2 + \left(\frac{\lambda_6 - \lambda_4}{4} \right) K_2^2 + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4}{4} \right) K_3^2.
\end{aligned} \tag{3.124}$$

Comparamos (3.124) con (4.26a) para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}
\eta_{00} = & \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4), \quad \boldsymbol{\eta} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}, \\
E = & \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2(\lambda_5 - \lambda_4) & \lambda_7 & 0 \\ \lambda_7 & 2(\lambda_6 - \lambda_4) & 0 \\ 0 & 0 & 2(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4) \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.125}$$

Para construir las funciones $f(u)$ y $f'(u)$, debemos calcular la inversa de

$$E - u = \begin{pmatrix} (\lambda_5 - \lambda_4)/4 - u & \lambda_7/8 & 0 \\ \lambda_7/8 & (\lambda_6 - \lambda_4)/4 - u & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)/4 - u \end{pmatrix}. \tag{3.126}$$

Ahora se calcula la matriz de cofactores

$$C_A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}, \tag{3.127}$$

donde las componentes de C_a están dadas por

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \left(\frac{\lambda_6 - \lambda_4}{4} - u \right) \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4}{4} - u \right), \\
A_{12} &= -\frac{\lambda_7}{8} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4}{4} - u \right), \\
A_{13} &= 0, \\
A_{21} &= -\frac{\lambda_7}{8} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4}{4} - u \right), \\
A_{22} &= \left(\frac{\lambda_5 - \lambda_4}{4} - u \right) \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4}{4} - u \right), \\
A_{23} &= 0, \\
A_{31} &= 0, \\
A_{32} &= 0, \\
A_{33} &= \left(\frac{\lambda_5 - \lambda_4}{4} - u \right) \left(\frac{\lambda_6 - \lambda_4}{4} - u \right) - \frac{\lambda_7^2}{64}.
\end{aligned} \tag{3.128}$$

Teniendo en cuenta que la inversa de $E - u$ es $(E - u)^{-1} = C_A / \text{Det}(E - u)$. La función $f(u)$ para el potencial (3.120) será

$$\begin{aligned}
f(u) &= u + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) - \frac{1}{\text{Det}(E - u)} \boldsymbol{\eta}^T C_A \boldsymbol{\eta} \\
f(u) &= u + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) \\
&\quad - \frac{1}{16 \text{Det}(E - u)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 \end{pmatrix}, \\
f(u) &= u + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 A_{33}}{16 \text{Det}(E - u)},
\end{aligned} \tag{3.129}$$

se calcula el determinante y usando (3.128)

$$\begin{aligned}
f(u) &= u + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) \\
&\quad - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \{[(\lambda_5 - \lambda_4)/4 - u][(\lambda_6 - \lambda_4)/4 - u] - \lambda_7^2/64\}}{16 [(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)/4 - u] \{[(\lambda_5 - \lambda_4)/4 - u][(\lambda_6 - \lambda_4)/4 - u] - \lambda_7^2/64\}}, \\
f(u) &= u + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4u)}.
\end{aligned} \tag{3.130}$$

Naturalmente la derivada de (3.130) es

$$f'(u) = 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4u)^2} \tag{3.131}$$

Para discutir la estabilidad del modelo de Gunion et al. se debe construir el conjunto S para este potencial. Como primer paso se iguala a cero la ecuación (3.131), así se encuentran las soluciones regulares u_i cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{aligned} 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4u)^2} &= 0, \\ 1 &= \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4u)^2}, \\ (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4u)^2 &= (\lambda_1 - \lambda_2)^2. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Al aplicar la raíz cuadrada a la anterior ecuación se despeja u , debido a esto se obtiene dos soluciones posibles. De la raíz negativa

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4u_1 &= -\lambda_1 + \lambda_2, \\ u_1 &= \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_4). \end{aligned} \quad (3.133)$$

De la raíz positiva

$$u_2 = \frac{1}{4}(2\lambda_2 - \lambda_4). \quad (3.134)$$

Ahora se calcula $\text{Det}(E - u) = 0$ con el objetivo de determinar los autovalores de E

$$\text{Det}(E - u) = [(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)/4 - u] \{ [(\lambda_5 - \lambda_4)/4 - u] [(\lambda_6 - \lambda_4)/4 - u] - \lambda_7^2/64 \}. \quad (3.135)$$

Evidentemente la primer solución excepcional posible es

$$\mu = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4}{4}, \quad (3.136)$$

pero no es una solución excepcional válida, porque si se evalúa μ en (3.131):

$$\begin{aligned} f'(\mu) &= 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{[\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)]^2} = 1 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{0} \right)^2, \\ f'(\mu) &= 1 - \infty = -\infty, \end{aligned}$$

por lo tanto, al aplicar el criterio de estabilidad (sec 3.4.), se descarta este valor. Las otras dos posibles soluciones excepcionales se calculan de la expresión resultante de (3.135)

$$[(\lambda_5 - \lambda_4)/4 - u] [(\lambda_6 - \lambda_4)/4 - u] - \lambda_7^2/64 = 0,$$

expandiendo los paréntesis

$$u^2 - \frac{\lambda_5 + \lambda_6 - 2\lambda_4}{4}u - \frac{\lambda_7^2}{64} + \frac{(\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_4)}{16} = 0,$$

Claramente se ve que tenemos una ecuación cuadrática sobre u , por lo tanto, las dos soluciones excepcionales restantes vienen dadas en la expresión

$$\begin{aligned} u &= \frac{(\lambda_5 + \lambda_6 - 2\lambda_4)/4 \pm \sqrt{(\lambda_5 + \lambda_6 - 2\lambda_4)^2/16 + 4[\lambda_7^2/64 - (\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_4)/16]}}{2} \\ &= \frac{1}{8} \left[\lambda_5 + \lambda_6 - 2\lambda_4 \pm (\lambda_5^2 + \lambda_6^2 + 4\lambda_4^2 + 2\lambda_5\lambda_6 - 4\lambda_5\lambda_4 - 4\lambda_6\lambda_4 + \lambda_7^2 - 4\lambda_5\lambda_6 \right. \\ &\quad \left. - 4\lambda_4^2 + 4\lambda_5\lambda_4 + 4\lambda_6\lambda_4)^{-1/2} \right] \\ u &= \frac{1}{8} \left(\lambda_5 + \lambda_6 - 2\lambda_4 \pm \sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6)^2 + \lambda_7^2} \right) \end{aligned} \quad (3.137)$$

El conjunto S el cual contiene todas las posibles condiciones de estabilidad, incluido el valor $u_3 = 0$, es

$$\begin{aligned} S = \left\{ u_1 = \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_4), u_2 = \frac{1}{4}(2\lambda_2 - \lambda_4), u_3 = 0, \mu_4 = \frac{1}{4}(\kappa - \lambda_4), \right. \\ \left. \mu_5 = \frac{1}{8}(\lambda_5 + \lambda_6 - 2\lambda_4 + \sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6)^2 + \lambda_7^2}) \right\}, \end{aligned} \quad (3.138)$$

donde μ_4 y μ_5 vienen de (3.137) $\kappa = \frac{1}{2}(\lambda_5 + \lambda_6 - \sqrt{(\lambda_5 - \lambda_6)^2 + \lambda_7^2})$. Note que $\mu_4 < \mu_5$, pero no se puede descartar μ_5 debido a que hay que verificar primero si μ_4 es una solución válida con $f'(\mu_4) \geq 0$. A continuación se describe el mínimo global de $J_4(\mathbf{k})$ dependiendo de cual de los diferentes valores S es el mínimo valor válido

1. Si u_1 es el mínimo valor de S en (3.138), entonces

$$\begin{aligned} f(u_1) &= \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_4) + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - (2\lambda_1 - \lambda_4))}, \\ &= \frac{1}{4}(3\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3) - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{4(\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ &= \lambda_1 + \lambda_3, \end{aligned}$$

del criterio de estabilidad se establece

$$f(u_1) > 0 \implies \lambda_1 + \lambda_3 > 0. \quad (3.139)$$

2. Si u_2 es el mínimo valor de S en (3.138), análogamente se obtiene

$$f(u_2) > 0 \implies \lambda_2 + \lambda_3 > 0. \quad (3.140)$$

Debido a que u_1 y u_2 son soluciones regulares, las desigualdades (3.139) y (3.140) son necesarias.

3.

$$\text{Si } u_3 = 0 < u_1, u_2, \mu_4, \mu_5 \quad (3.141)$$

Primero hay que precisar si es una solución válida usando (3.131)

$$f'(u_3) = 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)^2}. \quad (3.142)$$

De (3.133) y (3.134) se encuentra

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4), \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 &= 2(u_1 + u_2), \end{aligned} \quad (3.143)$$

$$\begin{aligned} u_1 - u_2 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2) \\ \lambda_1 - \lambda_2 &= 2(u_1 - u_2). \end{aligned} \quad (3.144)$$

Al reemplazar (3.143) y (3.144) en (3.142)

$$f'(u_3) = 1 - \frac{(u_1 - u_2)^2}{(u_1 + u_2)^2} = \frac{(u_1 + u_2)^2 - (u_1 - u_2)^2}{(u_1 + u_2)^2} = \frac{2u_1u_2}{(u_1 + u_2)^2}.$$

Como $u_1, u_2 > 0$ se establece que

$$f'(u_3) = \frac{2u_1u_2}{(u_1 + u_2)^2} > 0, \quad (3.145)$$

entonces u_3 no es descartada porque es una solución válida. Del criterio de estabilidad fuerte se impone la condición $f(u_3) > 0$. Para poder establecer las ligaduras sobre los parámetros se realiza el siguiente proceso algebraico

$$\begin{aligned} f(u_3) &= \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)}, \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)}, \end{aligned}$$

$$f(u_3) = \frac{-\lambda_4^2 - 4\lambda_3\lambda_4 + 4\lambda_1\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2\lambda_3}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)}, \quad (3.146)$$

Para resolver algebraicamente la anterior ecuación, se debe sumar y restar el término $4\lambda_3^2$, es decir

$$\begin{aligned} f(u_3) &= \frac{-\lambda_4^2 - 4\lambda_3\lambda_4 - 4\lambda_3^2 + 4\lambda_3^2 + 4\lambda_1\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2\lambda_3}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)}, \\ &= \frac{4\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_3) + 4\lambda_2(\lambda_1 + \lambda_3) - (\lambda_4 + 2\lambda_3)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)}, \\ f(u_3) &= \frac{4(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3) - (\lambda_4 + 2\lambda_3)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4)} \end{aligned} \quad (3.147)$$

Usando la relación (3.143) para el denominador y si se factoriza el numerador como una diferencia de cuadrados se tiene

$$f(u_3) = \frac{\left[-\lambda_4 - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} \right] \left[\lambda_4 + 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} \right]}{8(u_1 + u_2)} > 0. \quad (3.148)$$

Es fácil ver que el denominador de esta expresión es mayor que cero porque $u_1, u_2 > 0$, por lo tanto, se procede a analizar el factor

$$-\lambda_4 - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}. \quad (3.149)$$

De (3.139) y (3.140) se tiene que $\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} > 0$. Ahora de las expresiones (3.133) y (3.134) se despeja λ_1 y λ_2 respectivamente

$$\lambda_1 = 2u_1 + \frac{\lambda_4}{2}, \quad (3.150)$$

$$\lambda_2 = 2u_2 + \frac{\lambda_4}{2}. \quad (3.151)$$

Al usar estas dos ecuaciones en (3.149) se obtiene

$$-\lambda_4 - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(2u_1 + \lambda_4/2 + \lambda_3)(2u_2 + \lambda_4/2 + \lambda_3)}. \quad (3.152)$$

En esta última expresión se puede analizar más fácil las condiciones sobre los parámetros para que el potencial sea estable; es decir, si

$$\lambda_4 + 2\lambda_3 > 0 \implies \lambda_4/2 + \lambda_3 > 0, \quad (3.153)$$

entonces

$$\begin{aligned} -\lambda_4 - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(2u_1 + \lambda_4/2 + \lambda_3)(2u_2 + \lambda_4/2 + \lambda_3)} &> -\lambda_4 - 2\lambda_3 \\ 2\sqrt{(\lambda_4/2 + \lambda_3)(\lambda_4/2 + \lambda_3)} &= -\lambda_4 - 2\lambda_3 + 2(\lambda_4/2 + \lambda_3) = 0, \end{aligned}$$

por lo tanto $-\lambda_4 - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} > 0$. Por otra parte, si

$$\lambda_4 + 2\lambda_3 < 0 \implies \lambda_4/2 + \lambda_3 < 0, \quad (3.154)$$

se tiene la condición

$$\begin{aligned} -\lambda_4 - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(2u_1 + \lambda_4/2 + \lambda_3)(2u_2 + \lambda_4/2 + \lambda_3)} &> 2[(2u_1 + \lambda_4/2 \\ &+ \lambda_3)(2u_2 + \lambda_4/2 + \lambda_3)]^{1/2} = 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} > 0. \end{aligned}$$

Se concluye entonces que el factor $-\lambda_4 - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}$ es siempre positivo. En consecuencia, de la ecuación (3.148) el término

$$\lambda_4 + 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} > 0, \quad (3.155)$$

lo cual nos lleva a

$$\lambda_4 > -2\lambda_3 - 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}, \quad (3.156)$$

4.

$$\text{Si } \mu_4 < u_1, u_2, u_3, \mu_5 \quad (3.157)$$

se debe comprobar que este sea un punto estacionario válido; es decir, hay que calcular el valor de $f'(\mu_4)$

$$\begin{aligned} f'(\mu_4) &= 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - \kappa + \lambda_4)^2} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa)^2}, \\ &= \frac{4\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\kappa - 2\lambda_2\kappa + \kappa^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa)^2} = \frac{\kappa(\kappa - 2\lambda_2) - 2\lambda_1(\kappa - 2\lambda_2)}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa)^2}, \\ f'(\mu_4) &= \frac{(2\lambda_1 - \kappa)(2\lambda_2 - \kappa)}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa)^2}. \end{aligned} \quad (3.158)$$

Para determinar el signo del término $2\lambda_1 - \kappa$, de la ecuación $\mu_4 = (\kappa - \lambda_4)/4$ se despeja κ

$$\kappa = 4\mu_4 + \lambda_4. \quad (3.159)$$

Se reemplaza este valor en $2\lambda_1 - \kappa$

$$\underbrace{2\lambda_1 - \lambda_4}_{4u_1} - 4\mu_4 = 4(u_1 - \mu_4),$$

pero $\mu_4 < u_1$, por lo tanto

$$4(u_1 - \mu_4) > 0 \implies 2\lambda_1 - \kappa > 0. \quad (3.160)$$

Análogamente para el segundo término del numerador en (3.158) se tiene:

$$2\lambda_2 - \kappa = \underbrace{2\lambda_2 - \lambda_4}_{4u_2} - 4\mu_4 = 4(u_2 - \mu_4) > 0 \implies 2\lambda_2 - \kappa > 0 \quad (3.161)$$

Con respecto a $\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa$, se usa (3.159), es decir

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4\mu_4.$$

Ahora, en la anterior ecuación se utiliza (3.143)

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - 4\mu_4 = 2(u_1 + u_2) - 4\mu_4 = 2(u_1 - \mu_4) + 2(u_2 - \mu_4).$$

Pero $\mu_4 < u_1, u_2$ por lo tanto

$$2(u_1 - \mu_4) + 2(u_2 - \mu_4) > 0 \implies \lambda_1 + \lambda_2 - \kappa > 0. \quad (3.162)$$

Con esto se concluye que

$$f'(\mu_4) = \frac{(2\lambda_1 - \kappa)(2\lambda_2 - \kappa)}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa)^2}, \quad (3.163)$$

lo cual implica que μ_4 es una solución válida. Además se impone la condición $f(\mu_4) > 0$, para que el potencial sea estable, es decir

$$\begin{aligned} f(\mu_4) &= \frac{1}{4}(\kappa - \lambda) + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4 - \kappa - \lambda_4)} \\ &= \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \kappa) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa)}, \\ &= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \kappa)(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa)}, \\ f(\mu_4) &= \frac{-\kappa^2 - \lambda_3\kappa + 4\lambda_1\lambda_2 + 4\lambda_1\lambda_3 + 4\lambda_2\lambda_3}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa)} \end{aligned} \quad (3.164)$$

De igual forma como se hizo para llegar de (3.146) a (3.148), se suma y se resta la cantidad $4\lambda_3^2$ y al factorizar términos se llega a lo siguiente

$$f(\mu_4) = \frac{\left[-\kappa - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} \right] \left[\kappa + 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} \right]}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \kappa)} > 0. \quad (3.165)$$

Anteriormente se mostró que el factor del denominador es mayor que cero (mire (3.162)). Si se toma en consideración el primer factor del numerador

$$-\kappa - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}. \quad (3.166)$$

La expresión $\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} > 0$, debido a que esto se establece de las condiciones (3.139) y (3.140) las cuales son necesarias. Ahora se despeja λ_4 de (3.159), para usarlo en (3.150) y (3.151), es decir

$$\lambda_1 = 2u_1 + \frac{\kappa}{2} - 2\mu_4, \quad (3.167)$$

$$\lambda_2 = 2u_2 + \frac{\kappa}{2} - 2\mu_4. \quad (3.168)$$

Al utilizar estos dos resultados en (3.166) se obtiene la expresión

$$-\kappa - 2\lambda_3 + 2\sqrt{[2(u_1 - \mu_4) + \kappa/2 + \lambda_3][2(u_2 - \mu_4) + \kappa/2 + \lambda_3]}. \quad (3.169)$$

Si para esta ecuación se cumple que

$$\kappa + 2\lambda_3 > 0 \implies \kappa/2 + \lambda_3 > 0, \quad (3.170)$$

entonces

$$\begin{aligned} & -\kappa - 2\lambda_3 + 2\sqrt{[2(u_1 - \mu_4) + \kappa/2 + \lambda_3][2(u_2 - \mu_4) + \kappa/2 + \lambda_3]} > -\kappa - 2\lambda_3 \\ & + 2\sqrt{(\kappa/2 + \lambda_3)(\kappa/2 + \lambda_3)} = -\kappa - 2\lambda_3 + 2(\kappa/2 + \lambda_3) = 0, \end{aligned}$$

es decir, en este caso $-\kappa - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} > 0$. Por otra parte si

$$\kappa + 2\lambda_3 < 0 \implies \kappa/2 + \lambda_3 < 0, \quad (3.171)$$

se tiene lo siguiente

$$-\kappa - 2\lambda_3 + 2\sqrt{[2(u_1 - \mu_4) + \kappa/2 + \lambda_3][2(u_2 - \mu_4) + \kappa/2 + \lambda_3]}$$

$$\begin{aligned}
&> 2\sqrt{[2(u_1 - \mu_4) + \kappa/2 + \lambda_3][2(u_2 - \mu_4) + \kappa/2 + \lambda_3]} \\
&= 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} > 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cualquier caso $-\kappa - 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} > 0$; entonces, la expresión 3.165 es válida únicamente cuando

$$\begin{aligned}
\kappa + 2\lambda_3 + 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} &> 0 \\
\kappa &> -\lambda_3 - 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}
\end{aligned} \tag{3.172}$$

No se considera el valor excepcional μ_5 debido a que $\mu_4 < \mu_5$.

Existe el caso especial cuando $\lambda_1 = \lambda_2$, debido a que esto conduce a $\eta = 0$, por lo tanto

$$f(u) = u + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4), \tag{3.173}$$

$$f'(u) = 1. \tag{3.174}$$

Esto quiere decir que, para este caso no existen soluciones regulares, además todas las soluciones excepcionales son válidas debido a que $f'(u) = 1 > 0$. El conjunto S está formado sólo por los autovalores de E y $u_3 = 0$, es decir

$$S = \left\{ u_3 = 0, \mu_4 = \frac{1}{4}(\kappa - \lambda_4), \mu_6 = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4) \right\}, \tag{3.175}$$

donde no se toma en consideración μ_5 debido a que $\mu_4 < \mu_5$ entonces se puede descartar, porque todos los puntos excepcionales son válidos. De nuevo, se toma cada una de las soluciones de S como posibles mínimos.

1. Si $u_3 = 0 < \mu_4, \mu_6$ se impone la condición

$$f(u_3) = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) = \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_3 + \frac{1}{4}\lambda_4 > 0, \tag{3.176}$$

la cual lleva a lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\lambda_4 &> -\frac{1}{2}\lambda_1 - \lambda_3, \\
\lambda_4 &> -2\lambda_1 - 4\lambda_3 = -2\lambda_3 - 2(\lambda_1 + \lambda_3) = -2\lambda_3 - 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_3)},
\end{aligned}$$

$$\lambda_4 > -2\lambda_3 - 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)}. \quad (3.177)$$

Como se puede ver, esto reproduce exactamente la misma condición sobre los parámetros cuando $u_3 = 0$ es el mínimo global ya sea, para $\lambda_1 = \lambda_2$ o $\lambda_1 \neq \lambda_2$

2. Si $\mu_4 < u_3, \mu_6$ se tiene que

$$f(\mu_4) = \frac{1}{4}(\kappa - \lambda_4) + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) = \frac{1}{4}(2\lambda_1 + 4\lambda_3 + \kappa) > 0, \quad (3.178)$$

esto nos conduce a

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 + 4\lambda_3 + \kappa &> 0, \\ \kappa &> -2\lambda_3 - 2(\lambda_1 + \lambda_3) = -2\lambda_3 - 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_3)}, \\ \kappa &> -2\lambda_3 - 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} \end{aligned} \quad (3.179)$$

De nuevo se reproduce la misma condición sobre los parámetros, cuando μ_4 es el mínimo global del potencial.

3. Si $\mu_6 < u_3, \mu_a$, entonces se impone la condición de estabilidad fuerte

$$\begin{aligned} f(\mu_6) &= \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_4) + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 + \lambda_4) = \frac{1}{4}(2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 4\lambda_3), \\ &= \frac{1}{4}(4\lambda_1 + 4\lambda_3) = \lambda_1 + \lambda_3 > 0, \end{aligned}$$

es decir, este mínimo da como resultado

$$\lambda_1 + \lambda_3 > 0 \implies \lambda_2 + \lambda_3 > 0, \quad (3.180)$$

donde estas dos condiciones eran reproducidas por las soluciones regulares cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Para ambos casos aparecen los mismos resultados. Concisamente, para que el potencial sea estable las siguientes condiciones sobre los parámetros son *suficientes*

$$\lambda_1 + \lambda_3 > 0, \quad \lambda_2 + \lambda_3 > 0, \quad \lambda_4, \kappa > 2 - \lambda_3 - 2\sqrt{(\lambda_1 + \lambda_3)(\lambda_2 + \lambda_3)} \quad (3.181)$$

3.6. El Modelo Económico 3-3-1

El modelo económico es una extensión del ME basada en el grupo gauge local $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, la cual se llamará en lo sucesivo como 3-3-1. Este grupo contiene en general, un sector escalar bastante complicado para ser analizado en detalle. Para este tipo de modelos, son necesarios tres tripletes Higgs (ver sección 5.2.5, o en su defecto [7]) y en algunos casos un sexteto adicional es usado, para romper la simetría y proveer de masa a los campos fermiónicos al mismo tiempo. Existen ocho clases diferentes de estos modelos, donde las representaciones de los campos escalares Higgs, el sector de bosones gauge y los campos fermiónicos están restringidos a partículas sin cargas eléctricas exóticas. Cada uno de estos modelos posee diferente estructura fermiónica pero contienen el mismo sector bosónico y el mismo sector escalar (dos tripletes Higgs). Debido a su contenido mínimo de campos escalares Higgs, estos reciben el nombre de “modelos económicos 3-3-1”.

El modelo económico que se estudiará en este trabajo, tiene la siguientes representaciones de fermiones libres de anomalías

$$\begin{aligned}
 \psi_L^a &= (l^{-a}, \nu^a, N^{0a})_L^T \sim (1, 3^*, -1/3), \\
 l_L^{+a} &\sim (1, 1, 1), \\
 Q_L^i &= (u^i, d^i, D^i)_L^T \sim (3, 3, 0), \\
 Q_L^1 &= (u^1, d^1, U)_L^T \sim (3, 3^*, 1/3), \\
 u_L^{ca} &\sim (3^*, 1, -2/3), \quad d_L^{ca} \sim (3^*, 1, 1/3), \\
 U_L^c &\sim (3^*, 1, -2/3), \quad D_L^{ca} \sim (3^*, 1, 1/3),
 \end{aligned}$$

donde los números adentro de los paréntesis indican los números cuánticos de $SU(3)_C$, $SU(3)_L$ y $U(1)_X$, además los $a = 1, 2, 3$ indican las familias o generaciones, $i = 1, 2$ está relacionado con la segunda o tercera familia respectivamente. D^i y U son tres quarks exóticos con cargas eléctricas $-1/3$, $-1/3$ y $2/3$ respectivamente.

3.6.1. El Sector Escalar

Si se pretende usar las representaciones más simples de $SU(3)_L$ para romper espontáneamente la simetría, por lo menos dos tripletes escalares complejos son requeridos (o equivalentemente doce campos escalares reales). Los dos escalares Higgs (junto con sus complejos conjugados) que pueden desarrollar valores de expectación en el vacío diferentes de cero², son

$$\varphi_1 \left(1, 3^*, -\frac{1}{3} \right) = \begin{pmatrix} \varphi_1^- \\ \varphi_1^0 \\ \varphi_1^0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 \left(1, 3^*, \frac{2}{3} \right) = \begin{pmatrix} \varphi_2^0 \\ \varphi_2^+ \\ \varphi_2'^+ \end{pmatrix}. \quad (3.182)$$

donde el primer número entre paréntesis indica que son singletes de color (1), el segundo muestra que estos se encuentran en la representación adjunta (3^*) y el último indica el valor de su hipercarga. Se puede notar que en este modelo los dobletes tienen diferente hipercarga, a diferencia del modelo general de dos dobletes Higgs en donde ambos dobletes tenían la misma hipercarga. Por esta razón, un cambio de base de los campos Higgs en este modelo no tiene importancia.

El potencial escalar económico más general, renormalizable e invariante 3-3-1 es presentado en [8], el tiene la forma

$$\begin{aligned} V(\varphi_1, \varphi_2) = & \mu_1^2 \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \mu_2^2 \varphi_2^\dagger \varphi_2 + \lambda_1 (\varphi_1^\dagger \varphi_1)^2 + \lambda_2 (\varphi_2^\dagger \varphi_2)^2 + \lambda_3 (\varphi_1^\dagger \varphi_1) (\varphi_2^\dagger \varphi_2) \\ & + \lambda_4 (\varphi_1^\dagger \varphi_2) (\varphi_2^\dagger \varphi_1). \end{aligned} \quad (3.183)$$

La simplicidad de este potencial se puede apreciar debido a la inexistencia de acoplamiento trilineal escalar, también se observa que el número de parámetros libres de este apenas son seis. Esto se debe a que los dos dobletes 3-3-1 no poseen la misma hipercarga $U(1)_X$, a diferencia del modelo general de dos dobletes Higgs, en donde al tener la misma hipercarga $U(1)$, eran necesarios 14 parámetros para poder describir el potencial más general. Nuestro enfoque para este potencial será realizar un estudio sobre las condiciones de estabilidad fuerte para los términos cuárticos.

²Si solo un triplete adquiere un valor de expectación diferente a cero, se dice que el modelo económico es inconsistente [8]

Por lo tanto, el potencial V_4 será

$$V_4 = \lambda_1(\varphi_1^\dagger \varphi_1)^2 + \lambda_2(\varphi_2^\dagger \varphi_2)^2 + \lambda_3(\varphi_1^\dagger \varphi_1)(\varphi_2^\dagger \varphi_2) + \lambda_4(\varphi_1^\dagger \varphi_2)(\varphi_2^\dagger \varphi_1). \quad (3.184)$$

3.6.2. Las Variables Orbitales

Siguiendo el método presentado en este capítulo, el potencial puede ser expresado en términos de las variables orbitales K_0, K_1, K_2 y K_3 , con ayuda de las fórmulas (3.22)

$$\begin{aligned} V_4 &= \frac{\lambda_1}{4}(K_0 + K_3)^2 + \frac{\lambda_2}{4}(K_0 - K_3)^2 + \frac{\lambda_3}{4}(K_0 + K_3)(K_0 - K_3) + \frac{\lambda_4}{4}(K_1^2 + K_2^2), \\ V_4 &= \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{4} \right) K_0^2 + K_0 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2} \right) K_3 + \frac{\lambda_4}{4} K_1^2 + \frac{\lambda_4}{4} K_2^2 \\ &\quad + \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3}{4} \right) K_3^2 \end{aligned} \quad (3.185)$$

Si se compara (3.185) con (4.26a), se tiene los siguientes parámetros reales

$$\eta_{00} = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \quad (3.186)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\lambda_1 - \lambda_2)/4 \end{pmatrix}, \quad (3.187)$$

$$E = \begin{pmatrix} \lambda_4/4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_4/4 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)/4 \end{pmatrix}. \quad (3.188)$$

3.6.3. Estabilidad

Debido a que la matriz E es diagonal, se puede expresar las funciones $f(u)$ y $f'(u)$ como en (3.77) y (3.78) respectivamente

$$f(u) = u + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) - 16u^2} \quad (3.189)$$

$$f'(u) = 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 4u)^2} \quad (3.190)$$

Para $\lambda_1 \neq \lambda_2$, las soluciones de $f'(u) = 0$ determinan los puntos estacionarios de $J_4(\mathbf{k})$ sobre la frontera $|\mathbf{k}| = 1$, lo que lleva a lo siguiente

$$(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 4u)^2.$$

Se puede ver que existen dos multiplicadores de Lagrange. El primero es la solución de la raíz negativa de la anterior ecuación

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + \lambda_2 &= \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 4u, \\ u_1 &= \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_3), \end{aligned} \quad (3.191)$$

mientras que el segundo es la solución de la raíz positiva, que mediante un proceso análogo se obtiene

$$u_2 = \frac{1}{4}(2\lambda_2 - \lambda_3), \quad (3.192)$$

Las soluciones excepcionales serán: el valor 0 y los autovalores de E , es decir

$$u_3 = 0, \quad \mu_4 = \frac{\lambda_4}{4}. \quad (3.193)$$

No se toma en cuenta el autovalor $\mu_5 = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)/4$, debido a que no es una solución válida, porque

$$f'(\mu_5) = 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)^2} = 1 - \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{0} \right)^2 = 1 - \infty = -\infty,$$

entonces, se puede descartar este valor. Por lo tanto, el conjunto de todas las soluciones posibles S está conformado por

$$S = \left\{ u_1 = \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_3), u_2 = \frac{1}{4}(2\lambda_2 - \lambda_3), u_3 = 0, \mu_4 = \frac{\lambda_4}{4} \right\} \quad (3.194)$$

Aplicando el criterio de estabilidad, se tiene que considerar los casos posibles cuando cada una de las soluciones en S es el valor mínimo, exceptuando aquellas que no sean válidas

1. Si $u_1 < u_2, u_3, \mu_4$, es el mínimo global, entonces se impone la condición $f(u_1) > 0$, es decir

$$f(u_1) = \frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_3) + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) - 4(2\lambda_1 - \lambda_3)},$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}(3\lambda_1 + \lambda_2) - \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2}{4(\lambda_2 - \lambda_1)} = \frac{1}{4}(3\lambda_1 + \lambda_2) - \frac{1}{4}(\lambda_2 - \lambda_1), \\
f(u_1) &= \lambda_1 > 0.
\end{aligned} \tag{3.195}$$

2. Si $u_2 < u_1, u_3, \mu_4$, según el criterio de estabilidad de la sección (3.4) se establece la condición $f(u_2) > 0$, que conduce a lo siguiente

$$\begin{aligned}
f(u_2) &= \frac{1}{4}(2\lambda_2 - \lambda_3) + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) - 4(2\lambda_2 - \lambda_3)}, \\
&= \frac{1}{4}(3\lambda_2 + \lambda_1) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 - \lambda_2)} = \frac{1}{4}(3\lambda_2 + \lambda_1) - \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2), \\
f(u_2) &= \lambda_2 > 0.
\end{aligned} \tag{3.196}$$

Estas condiciones sobre los parámetros son necesarias, porque provienen de las soluciones regulares.

3. Si $u_3 < u_1, u_2, \mu_4$, primero hay que verificar que sea una solución válida, esto es

$$\begin{aligned}
f'(u_3) &= 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2}, \\
&= \frac{4\lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 - 2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3^2}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2} = \frac{2\lambda_1(2\lambda_2 - \lambda_3) - \lambda_3(2\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2}. \\
f'(u_3) &= \frac{(2\lambda_1 - \lambda_3)(2\lambda_2 - \lambda_3)}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)^2}
\end{aligned} \tag{3.197}$$

Al usar las ecuaciones (3.191) y (3.192) se encuentra lo siguiente

$$16u_1u_2 = (2\lambda_1 - \lambda_3)(2\lambda_2 - \lambda_3), \tag{3.198}$$

$$2(u_1 + u_2) = \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3. \tag{3.199}$$

Teniendo en cuenta las anteriores dos ecuaciones en (3.197) y la condición $u_3 = 0 < u_1, u_2$, se obtiene

$$f'(u_3) = \frac{16u_1u_2}{4(u_1 + u_2)^2} = \frac{4u_1u_2}{(u_1 + u_2)^2} > 0. \tag{3.200}$$

Ahora se impone la condición $f(u_3) > 0$ para asegurar una estabilidad fuerte, entonces

$$f(u_3) = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)},$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - \lambda_3^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)}, \\
f(u_3) &= \frac{4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3)} > 0, \tag{3.201}
\end{aligned}$$

De (3.199) y la condición $u_3 = 0 < u_1, u_2$, se puede afirmar que el denominador de (3.201) es positivo; por lo tanto, para que (3.201) sea válida debe cumplirse que

$$4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 > 0 \implies 4\lambda_1\lambda_2 > \lambda_3^2 \tag{3.202}$$

4. Si $\mu_4 < u_1, u_2, u_3$, primero hay que verificar si es un punto estacionario válido

$$f'(\mu_4) = 1 - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - 4\mu_4)^2}. \tag{3.203}$$

Restando las ecuaciones (3,191) – (3,192)

$$\begin{aligned}
u_1 - u_2 &= \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2), \\
2(u_1 - u_2) &= (\lambda_1 - \lambda_2). \tag{3.204}
\end{aligned}$$

El siguiente paso es reemplazar (3.204) y (3.199) en (3.203)

$$\begin{aligned}
f'(\mu_4) &= 1 - \frac{4(u_1 - u_2)}{[2(u_1 + u_2)^2 - 4\mu_4]^2} = 1 - \frac{(u_1 - u_2)^2}{(u_1 + u_2 - 2\mu_4)^2}, \\
&= \frac{(u_1 + u_2 - 2\mu_4)^2 - (u_1 - u_2)^2}{(u_1 + u_2 - 2\mu_4)^2} = \frac{4u_1u_2 + 4\mu_4^2 - 4u_1\mu_4 - 4u_2\mu_4}{(u_1 + u_2 - 2\mu_4)^2}, \\
&= \frac{4u_1(u_2 - \mu_4) - 4\mu_4(u_2 - \mu_4)}{(u_1 + u_2 - 2\mu_4)^2}, \\
f'(\mu_4) &= \frac{4(u_1 - \mu_4)(u_2 - \mu_4)}{(u_1 + u_2 - 2\mu_4)^2} \tag{3.205}
\end{aligned}$$

Debido a la condición $\mu_4 < u_1, u_2$, se establece que el numerador de (3.205) es positivo. Obviamente el denominador de (3.205) es positivo. Por tanto se afirma que μ_4 es un punto estacionario válido debido a que $f'(\mu_4) > 0$. Con la condición $f(\mu_4) > 0$ se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
f(\mu_4) &= \frac{\lambda_4}{4} + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)}, \\
&= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - (\lambda_3 + \lambda_4)^2 - (\lambda_1 - \lambda_2)^2}{4(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) - 4\lambda_4} = \frac{4\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_3 + \lambda_4)^2}{8(u_1 + u_2) - 16\mu_4}, \\
f(\mu_4) &= \frac{4\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_3 + \lambda_4)^2}{8(u_1 - \mu_4) + 8(u_2 - \mu_4)} > 0
\end{aligned} \tag{3.206}$$

Debido a la condición $\mu_4 < u_1, u_2$ el denominador de la última expresión es mayor que cero, por lo tanto, el numerador debe cumplir lo siguiente

$$4\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_3 + \lambda_4)^2 > 0 \implies 4\lambda_1\lambda_2 > (\lambda_3 + \lambda_4)^2 \tag{3.207}$$

Tomando el caso $\lambda_1 = \lambda_2$, el cual produce $\eta = 0$, reduce $f(u)$ y $f'(u)$ a lo siguiente

$$f(u) = u + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3), \tag{3.208}$$

$$f'(u) = 1. \tag{3.209}$$

Claramente se puede ver que no existen soluciones regulares, tal que, todas las soluciones excepcionales son posibles debido a que $f'(u) = 1 > 0$. Ahora se tiene que S estará formado por los siguientes valores

$$S = \left\{ u_3 = 0, \mu_4 = \frac{\lambda_4}{4}, \mu_5 = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) \right\}. \tag{3.210}$$

Como todas las soluciones son válidas, solo basta considerar los casos cuando cada una de ellas es el mínimo global del potencial.

1. Si $u_3 < \mu_4, \mu_5$ se tiene que

$$f(u_3) = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \frac{1}{4}(2\lambda_1 + \lambda_3) > 0. \tag{3.211}$$

Debido a que $u_3 = 0 < \mu_5$, es decir

$$\frac{1}{4}(2\lambda_1 - \lambda_3) > 0. \tag{3.212}$$

Al combinar (3.211) y (3.212) se puede determinar

$$\begin{aligned}
\frac{1}{16}(2\lambda_1 + \lambda_3)(2\lambda_1 - \lambda_3) &= \frac{1}{16}(4\lambda_1^2 - \lambda_3^2) = \frac{1}{16}(4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2) > 0, \\
4\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 > 0 &\implies 4\lambda_1\lambda_2 > \lambda_3^2.
\end{aligned} \tag{3.213}$$

Esta condición es exactamente igual a la obtenida cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y u_3 es el mínimo global del potencial.

2. Si $\mu_4 < u_3, \mu_5$ se impone la condición $f(\mu_4) > 0$ para tener una estabilidad en el sentido fuerte

$$f(\mu_4) = \frac{\lambda_4}{4} + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) > 0. \quad (3.214)$$

Como $\mu_4 < \mu_5$, se afirma lo siguiente

$$\frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) > 0 \quad (3.215)$$

Se combina (3.214) y (3.215), para obtener

$$\begin{aligned} \frac{1}{16}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) &= \frac{1}{16}[(\lambda_1 + \lambda_2)^2 - (\lambda_3 + \lambda_4)^2] \\ &= \frac{1}{16}[4\lambda_1^2 - (\lambda_3 + \lambda_4)^2] = \frac{1}{16}[4\lambda_1\lambda_2 - (\lambda_3 + \lambda_4)^2] > 0, \\ 4\lambda_1\lambda_2 &> (\lambda_3 + \lambda_4)^2. \end{aligned} \quad (3.216)$$

De nuevo, se obtiene la misma condición de estabilidad cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y μ_4 es el mínimo global de $J_4(\mathbf{k})$.

3. Si $\mu_5 < u_3, \mu_4$ se impone $f(\mu_5)$ para obtener estabilidad fuerte

$$f(\mu_5) = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) + \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) = \frac{1}{4}(2\lambda_1 + 2\lambda_2) = \lambda_1 > 0$$

Como $\lambda_1 = \lambda_2$, se tiene las siguientes condiciones

$$\lambda_1 > 0 \implies \lambda_2 > 0. \quad (3.217)$$

Por lo tanto si μ_5 es el mínimo global, las condiciones sobre los parámetros son exactamente iguales a las obtenidas por las soluciones regulares cuando $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Resumiendo, las siguientes son condiciones suficientes (pero no necesarias) para garantizar la estabilidad fuerte del potencial

$$\begin{aligned} \lambda_1 &> 0 \\ \lambda_2 &> 0 \\ 4\lambda_1\lambda_2 &> \lambda_3^2 \\ 4\lambda_1\lambda_2 &> (\lambda_3 + \lambda_4)^2, \end{aligned} \quad (3.218)$$

donde las dos primeras desigualdades son también condiciones necesarias.

Capítulo 4

El Modelo General de Tres Dobletes Higgs

4.1. Introducción

Muchas de las propiedades de este modelo son generalizaciones directas del modelo general de dos dobletes Higgs, pero en este aparecen nuevos aspectos. Uno de ellos es el espacio de los bosones Higgs, que en términos de las bilineales no corresponde al cono de luz futuro, tal cual como sucede en el modelo de dos dobletes. De manera análoga al anterior capítulo, aquí se presenta el análisis de las variables orbitales, el potencial general de tres dobletes Higgs, los cambios de base sobre los campos Higgs y un estudio preliminar de la estabilidad. La parametrización del potencial en términos de las bilineales llevan a ligaduras, que lastimosamente producen ecuaciones no lineales (mirar [16]). Además de esto, el número de parámetros que caracterizan a un potencial de tres dobletes es mucho mayor en comparación al modelo de dos dobletes. Todo esto lleva el estudio de la estabilidad al caso experimental (mirar por ejemplo [16], [5], [6]). Por tal motivo, mediante este método fue infructuoso tratar de establecer la estabilidad de manera analítica sobre un potencial de tres dobletes Higgs no trivial.

4.2. Bilineales

Consideramos un potencial con tres dobletes de bosones Higgs que satisfacen la simetría gauge electrodébil $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Esto es una generalización del caso con dos dobletes de bosones Higgs vistos en el anterior capítulo.

Se asume que todos los dobletes llevan la hipercarga $y = +1/2$ y se denotan los campos complejos Higgs por

$$\varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i^+(x) \\ \varphi_i^0(x) \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1)$$

En el potencial Higgs más general que es invariante gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$, los dobletes de bosones Higgs están presentes como una combinación lineal de los siguientes productos:

$$\varphi_i(x)^\dagger \varphi_j(x), \quad (\varphi_i(x)^\dagger \varphi_j(x)) (\varphi_k(x)^\dagger \varphi_l(x)), \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.2)$$

Es conveniente analizar las propiedades del potencial Higgs tales como su estabilidad y sus puntos estacionarios en términos de las invariantes gauge bilineales.

Primero se introduce la matriz 3×2 de los campos Higgs de la siguiente manera

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1^+ & \varphi_1^0 \\ \varphi_2^+ & \varphi_2^0 \\ \varphi_3^+ & \varphi_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \varphi_3^T \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Se organizan todos los productos escalares invariantes $SU(2)_L \times U(1)_Y$ en la matriz 3×3 hermítica (tal cual como se realizó en (3.16))

$$\underline{K} = \phi^\dagger \phi = \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Una base para las matrices 3×3 está dada por

$$\lambda_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, 8 \quad (4.5)$$

donde

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \mathbb{1}_3 \quad (4.6)$$

y λ_α , $\alpha = 1, \dots, 8$ son las matrices de Gell-Mann (ver ecuación (2.33)). En este capítulo los índices griegos ($\alpha, \beta, \dots$) van desde 0 hasta 8 y los índices latinos ($a, b, \dots$) van de 1 a 8. Por definición se tiene

$$\text{Tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}, \quad \text{Tr}(\lambda_a) = \sqrt{6}\delta_{a0} \quad (4.7)$$

La descomposición de $\underline{K}$ (4.4) será

$$\underline{K} = \frac{1}{2} K_\alpha \lambda_\alpha \quad (4.8)$$

donde se usa la convención de Einstein sobre los índices, además los coeficientes K_α se pueden calcular usando las propiedades de las matrices de Gell-Mann; es decir, en (4.8) se multiplica por λ_β y se determina la traza como prosigue

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\underline{K} \lambda_\beta) &= \frac{1}{2} K_\alpha \text{Tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta), \\ K_\alpha \delta_{\alpha\beta} &= \text{Tr}(\underline{K} \lambda_\beta), \\ K_\beta &= \text{Tr}(\underline{K} \lambda_\beta). \end{aligned} \quad (4.9)$$

De (4.8) es factible ver que K_α son reales, ya que $\underline{K}$ y las matrices de Gell-Mann λ_α son hermíticas

$$\underline{K} = \underline{K}^\dagger = \frac{1}{2} K_\alpha^* \lambda_\alpha^\dagger = \frac{1}{2} K_\alpha \lambda_\alpha, \implies K_\alpha^* = K_\alpha.$$

Con la matriz $\underline{K}$ definida en términos de los dobletes en (4.4) y con (4.9) se escriben las variables orbitales bilineales en términos de los productos escalares

$$K_0 = \text{Tr}(\underline{K} \lambda_0) = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{Tr} \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 + \varphi_3^\dagger \varphi_3), \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} K_1 &= \text{Tr}(\underline{K} \lambda_1) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \text{Tr} \begin{pmatrix} \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_1^\dagger \varphi_1 & 0 \\ \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_1^\dagger \varphi_2 & 0 \\ \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_1^\dagger \varphi_3 & 0 \end{pmatrix} = \varphi_2^\dagger \varphi_1 + \varphi_1^\dagger \varphi_2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} K_2 &= \text{Tr}(\underline{K} \lambda_2) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= i \text{Tr} \begin{pmatrix} \varphi_2^\dagger \varphi_1 & -\varphi_1^\dagger \varphi_1 & 0 \\ \varphi_2^\dagger \varphi_2 & -\varphi_1^\dagger \varphi_2 & 0 \\ \varphi_2^\dagger \varphi_3 & -\varphi_1^\dagger \varphi_3 & 0 \end{pmatrix} = i(\varphi_2^\dagger \varphi_1 - \varphi_1^\dagger \varphi_2), \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned}
K_3 &= \text{Tr} (\underline{K}\lambda_3) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \text{Tr} \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & -\varphi_2^\dagger \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & -\varphi_2^\dagger \varphi_2 & 0 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & -\varphi_2^\dagger \varphi_3 & 0 \end{pmatrix} = \varphi_1^\dagger \varphi_1 - \varphi_2^\dagger \varphi_2,
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
K_4 &= \text{Tr} (\underline{K}\lambda_4) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \text{Tr} \begin{pmatrix} \varphi_3^\dagger \varphi_1 & 0 & \varphi_1^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_3^\dagger \varphi_2 & 0 & \varphi_1^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_3^\dagger \varphi_3 & 0 & \varphi_1^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} = \varphi_3^\dagger \varphi_1 + \varphi_1^\dagger \varphi_3,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
K_5 &= \text{Tr} (\underline{K}\lambda_5) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= i \text{Tr} \begin{pmatrix} \varphi_3^\dagger \varphi_1 & 0 & -\varphi_1^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_3^\dagger \varphi_2 & 0 & -\varphi_1^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_3^\dagger \varphi_3 & 0 & -\varphi_1^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} = i(\varphi_3^\dagger \varphi_1 - \varphi_1^\dagger \varphi_3),
\end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned}
K_6 &= \text{Tr} (\underline{K}\lambda_6) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right] \\
&= \text{Tr} \begin{pmatrix} 0 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ 0 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 \\ 0 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} = \varphi_3^\dagger \varphi_2 + \varphi_2^\dagger \varphi_3,
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$K_7 = \text{Tr} (\underline{K}\lambda_7) = \text{Tr} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= i \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} 0 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 & -\varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ 0 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 & -\varphi_2^\dagger \varphi_2 \\ 0 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 & -\varphi_2^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} = i(\varphi_3^\dagger \varphi_2 - \varphi_2^\dagger \varphi_3), \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} K_8 &= \operatorname{Tr}(\underline{K} \lambda_8) = \sqrt{\frac{1}{3}} \operatorname{Tr} \left[\begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \right] \\ &= \sqrt{\frac{1}{3}} \operatorname{Tr} \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & -2\varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & -2\varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & -2\varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{1}{3}} (\varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 - 2\varphi_3^\dagger \varphi_3). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Ahora con ayuda de las ecuaciones (4.10) a (4.18), se encuentran los productos escalares en términos de las variables orbitales bilineales. Entonces, de K_1 y K_2 se tiene

$$\varphi_1^\dagger \varphi_2 = \frac{1}{2} (K_1 + iK_2), \quad (4.19)$$

ahora, si se toma K_4 y K_5

$$\varphi_1^\dagger \varphi_3 = \frac{1}{2} (K_4 + iK_5), \quad (4.20)$$

de K_6 y K_7

$$\varphi_2^\dagger \varphi_3 = \frac{1}{2} (K_6 + iK_7), \quad (4.21)$$

por último, de K_0 , K_3 y K_8 se tiene los siguientes resultados

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2K_0 + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} K_3 + \sqrt{2} K_8 &= \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \varphi_1^\dagger \varphi_1, \\ \varphi_1^\dagger \varphi_1 &= \frac{K_0}{\sqrt{6}} + \frac{K_3}{2} + \frac{K_8}{2\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 2K_0 - \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} K_3 + \sqrt{2} K_8 &= \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \varphi_2^\dagger \varphi_2, \\ \varphi_2^\dagger \varphi_2 &= \frac{K_0}{\sqrt{6}} - \frac{K_3}{2} + \frac{K_8}{2\sqrt{3}}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow K_0 - \sqrt{2} K_8 &= \sqrt{6} \varphi_3^\dagger \varphi_3, \\ \varphi_3^\dagger \varphi_3 &= \frac{K_0}{\sqrt{6}} - \frac{K_8}{\sqrt{3}}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

En este capítulo frecuentemente se va a usar

$$K_+ = \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 = \frac{2}{\sqrt{6}} K_0 + \sqrt{\frac{1}{3}} K_8 = \sqrt{\frac{2}{3}} K_0 + \sqrt{\frac{1}{3}} K_8, \quad (4.25)$$

$$K_- = \sqrt{2} \varphi_3^\dagger \varphi_3 = \sqrt{\frac{1}{3}} K_0 - \sqrt{\frac{2}{3}} K_8. \quad (4.26)$$

De (4.13) se tiene la siguiente inecuación

$$K_+ \geq |K_3| \geq 0, \quad K_- \geq 0. \quad (4.27)$$

Además, se puede ver de (4.25) que si $K_+ = 0$, implicaría que los campos Higgs $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, entonces usando las ecuaciones (4.11) a (4.17) se tiene

$$K_1 = K_2 = \dots = K_7 = 0. \quad (4.28)$$

En el apéndice C damos información del cambio de base $\alpha = 0, \dots, 8$ a $+, 1, \dots, 7, -$.

Se puede comprobar fácilmente que la matriz $\underline{K}$ (4.4) es semidefinida positiva. Usando la definición de una matriz semidefinida positiva que establece $\mathbf{x}^\dagger \underline{K} \mathbf{x} \geq 0$ para cualquier $\mathbf{x}$, donde a, b y c son las componentes de $\mathbf{x}$, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\dagger \underline{K} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} a^* & b^* & c^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} a^* & b^* & c^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 a + \varphi_2^\dagger \varphi_1 b + \varphi_3^\dagger \varphi_1 c \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 a + \varphi_2^\dagger \varphi_2 b + \varphi_3^\dagger \varphi_2 c \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 a + \varphi_2^\dagger \varphi_3 b + \varphi_3^\dagger \varphi_3 c \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}^\dagger \underline{K} \mathbf{x} &= \varphi_1^\dagger \varphi_1 a a^* + \varphi_2^\dagger \varphi_1 b a^* + \varphi_3^\dagger \varphi_1 c a^* + \varphi_1^\dagger \varphi_2 a b^* + \varphi_2^\dagger \varphi_2 b b^* + \varphi_3^\dagger \varphi_2 c b^* + \varphi_1^\dagger \varphi_3 a c^* \\ &\quad + \varphi_2^\dagger \varphi_3 b c^* + \varphi_3^\dagger \varphi_3 c c^* \end{aligned} \quad (4.29)$$

Redefinimos $\varphi'_1 = a^* \varphi_1$, $\varphi'_2 = b^* \varphi_2$ y $\varphi'_3 = c^* \varphi_3$, en (4.29) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\dagger \underline{K} \mathbf{x} &= \varphi_1'^\dagger \varphi'_1 + \varphi_2'^\dagger \varphi'_1 + \varphi_3'^\dagger \varphi'_1 + \varphi_1'^\dagger \varphi'_2 + \varphi_2'^\dagger \varphi'_2 + \varphi_3'^\dagger \varphi'_2 + \varphi_1'^\dagger \varphi'_3 + \varphi_2'^\dagger \varphi'_3 + \varphi_3'^\dagger \varphi'_3, \\ &= (\varphi_1'^\dagger + \varphi_2'^\dagger + \varphi_3'^\dagger) \varphi'_1 + (\varphi_1'^\dagger + \varphi_2'^\dagger + \varphi_3'^\dagger) \varphi'_2 + (\varphi_1'^\dagger + \varphi_2'^\dagger + \varphi_3'^\dagger) \varphi'_3 \\ \mathbf{x}^\dagger \underline{K} \mathbf{x} &= (\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3)^\dagger (\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3) = |\varphi'_1 + \varphi'_2 + \varphi'_3|^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.30)$$

De hecho, debido a que una matriz sea semidefinida positiva implica a su vez lo siguiente

$$\sqrt{\frac{3}{2}}K_0 = \text{Tr}(\underline{K}) \geq 0, \quad \text{Det}(\underline{K}) \geq 0. \quad (4.31)$$

La matriz hermítica $\underline{K}$ (4.4) es construida de la matriz de campos Higgs, $\underline{K} = \phi\phi^\dagger$. Por lo tanto, los nueve coeficientes K_α de su descomposición (4.8) están completamente determinados dados los campos de bosones Higgs.

Debido a que ϕ es una matriz 3×2 , trivialmente tiene un rango menor o igual a 2, esto también es válido para la matriz $\underline{K}$. Por otra parte, cualquier matriz hermítica 3×3 con rango igual o menor que 2 la cual claramente tiene entonces un determinante igual a cero, define los campos de bosones Higgs φ_i , $i = 1, 2, 3$ únicamente por una transformación gauge. Esto se muestra con detalle en el apéndice B. En el apéndice C se muestra que las órbitas gauge de los tres campos Higgs (4.1) están caracterizadas por el siguiente conjunto en el espacio de las K_α :

$$\begin{aligned} K_0 &\geq 0, \\ (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) &= K_0^2 - \frac{1}{2}K_a K_a \geq 0, \\ \text{Det}(\underline{K}) &= \frac{1}{12}G_{\alpha\beta\gamma}K_\alpha K_\beta K_\gamma = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Aquí $G_{\alpha\beta\gamma}$ es una constante completamente simétrica definida en (C.59). Es decir, para cada órbita gauge de los campos de bosones Higgs exactamente corresponde un vector (K_α) que satisface (4.32) y vice versa. Las dos primeras condiciones de (4.32) son análogas a las condiciones del *cono de luz* del modelo de los dos dobletes Higgs (3.55). La relación del determinante, la cual es de tercer grado en K_α , es específica del modelo de tres dobletes Higgs. Un análisis adicional de las matrices $\underline{K}$ de rango 0, 1, 2 es presentado en el apéndice B.

Con base en estas bilineales se procede a estudiar el potencial, las transformaciones de base y la estabilidad del modelo general de tres dobletes

4.3. El Potencial General de Tres Dobletes Higgs y Transformaciones de Base

En términos de los coeficientes bilineales K_α el potencial general para los tres dobletes Higgs se escribe en la forma

$$V = \xi_0 K_0 + \xi_a K_a + \eta_{00} K_0^2 + 2K_0 \eta_a K_a + K_a \eta_{ab} K_b, \quad (4.33)$$

el cual es una generalización directa del potencial obtenido para el modelo de dos dobletes Higgs (ver ecuaciones (3.24), (3.25) y (3.26)), incluso el proceso para obtener la anterior ecuación es totalmente análogo al que se utilizó para obtener el potencial general de dos dobletes Higgs. Para (4.33), por conteo se tiene el siguiente número de parámetros independientes: de ξ_0 y η_{00} dos parámetros, a esto se añade los ocho parámetros de η_a y de ξ_a , por último se añade los parámetros independientes de η_{ab} , para ello, se tiene en cuenta que esta es simétrica $\eta_{ab} = \eta_{ba}$ y que tiene dimensiones 8×8 ; por lo tanto, el número de parámetros independientes de esta serán los elementos triangulares superiores que serían $\sum_{i=1}^8 i = 36$, entonces la suma del total de parámetros independientes es 54. Teniendo en cuenta que las variables orbitales K_α son reales y que el potencial escalar debe ser real $V = V^*$, entonces en (4.33)

$$V^* = \xi_0^* K_0 + \xi_a^* K_a + \eta_{00}^* K_0^* + 2K_0 \eta_a^* K_a + K_a \eta_{ab}^* K_b, \quad (4.34)$$

si se compara (4.33) con (4.34), se logra ver que todos los 54 parámetros ξ_0 , ξ_a , η_{00} , η_a y $\eta_{ab} = \eta_{ba}$ son reales. El potencial (4.33) contiene todas las combinaciones lineales y cuadráticas de las bilineales K_α , correspondientes a todos los productos cuadráticos y cuárticos de los campos Higgs que son invariantes gauge. Los términos mayores a los cuárticos no deben aparecer en el potencial, desde el punto de vista de la renormalización. Cualquier término constante en el potencial puede ser retirado y por lo tanto (4.33) es el potencial de tres dobletes Higgs más general. Ahora introducimos la notación

$$\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_8)^T, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_8)^T, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_8)^T, \quad E = (\eta_{ab}),$$

$$(\hat{E}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_b \\ \eta_a & \eta_{ab} \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Con esto se puede escribir el potencial (4.33) en la forma compacta

$$V = \xi_\alpha K_\alpha + K_\alpha \hat{E}_{\alpha\beta} K_\beta. \quad (4.36)$$

Ahora se considera un cambio de base $\varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i(x)$ de los campos de bosones Higgs, donde

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1(x)^T \\ \varphi'_2(x)^T \\ \varphi'_3(x)^T \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \varphi_1(x)^T \\ \varphi_2(x)^T \\ \varphi_3(x)^T \end{pmatrix} \implies \phi'(x) = U\phi(x), \quad (4.37)$$

con $U \in U(3)$, la cual es una transformación unitaria 3×3 , es decir $UU^\dagger = \mathbb{1}_3$. Para la matriz $\underline{K}$ se obtiene

$$\underline{K}' = \phi' \phi'^\dagger = U\phi\phi^\dagger U^\dagger = U\underline{K}U^\dagger. \quad (4.38)$$

Para las variables orbitales bilineales, el cambio de base $\varphi_i \longrightarrow \varphi'_i$ produce resultados análogos a los presentados en el capítulo 3 (mirar (3.29) y (3.33)), entonces se tiene lo siguiente

$$K'_0(x) = K_0(x), \quad K'_a(x) = R_{ab}(U)K_b(x). \quad (4.39)$$

Aquí $R_{ab}(U)$ está definida por

$$U^\dagger \lambda_a U = R_{ab}(U) \lambda_b. \quad (4.40)$$

Al usar los mismos argumentos presentados en (3.36), (3.39) y (3.40), la matriz $R(U)$ tiene las propiedades

$$R^*(U) = R(U), \quad R^T(U)R(U) = \mathbb{1}_8, \quad \text{Det } R(U) = 1, \quad (4.41)$$

es decir, $R(U) \in SO(8)$. Para este caso $R(U)$ hace parte de un subconjunto de $SO(8)$, debido a que la matriz $R(U)$ es generada por la transformación U de dimensión 3×3 , es decir tendrá un número de parámetros independientes igual a 9; mientras que el número de parámetros independientes de una matriz perteneciente a $SO(8)$ es 28 (ver capítulo 4 de [14]). Entonces no siempre será posible encontrar un matriz $R(U)$ a partir de una transformación unitaria U , esto repercute en la disminución de parámetros del potencial, debido a que ya no será posible encontrar una

matriz E' de la forma (3.50) para este caso.

Para las variables orbitales bilineales, una transformación de fase $U = \exp(i\alpha)\mathbb{1}_3$ no desempeña ninguna importancia, para poder visualizar esto se usa (4.9) bajo dicha transformación

$$K'_\alpha = \text{Tr}(\underline{K}'\lambda_\alpha) = \text{Tr}(U\underline{K}U^\dagger\lambda_\alpha) = \text{Tr}(\underline{K}U^\dagger\lambda_\alpha U) = \text{Tr}(\underline{K}\lambda_\alpha U^\dagger U) = \text{Tr}(\underline{K}\lambda_\alpha) = K_\alpha, \quad (4.42)$$

donde se ha usado la propiedad cíclica de la traza y la conmutación entre la matriz identidad $\mathbb{1}$ y las matrices de Gell-Mann ($U\lambda_\alpha = \lambda_\alpha U$). Se tiene que considerar entonces, solamente transformaciones (4.37) con $U \in SU(3)$, en el cual los generadores toman la forma $T_a = \lambda_a/2$. En la transformación de las bilineales (4.39) $R_{ab}(U)$ es entonces la matriz 8×8 correspondiente a U en la representación adjunta de $SU(3)$.

El potencial escalar (4.33) debe permanecer inalterado cuando se hace el reemplazo (4.39), bajo una transformación adecuada de parámetros

$$\begin{aligned} \xi'_0 &= \xi_0, & \boldsymbol{\xi}' &= R(U)\boldsymbol{\xi} \\ \eta'_{00} &= \eta_{00}, & \boldsymbol{\eta}' &= R(U)\boldsymbol{\eta}, & E' &= R(U)ER^T(U), \end{aligned} \quad (4.43)$$

esto se obtiene de manera equivalente a (3.43), (3.45), (3.46), (3.49) y (3.50). En un modelo de tres dobletes Higgs puro, es decir en un modelo sin fermiones, podemos usar (4.43) para convertir por ejemplo a ξ a una forma estándar. Considere la matriz

$$\underline{\Lambda}_\xi = \xi_a \lambda_a, \quad (4.44)$$

como $\lambda_a^\dagger = \lambda_a$ y $\xi_a^* = \xi_a$, entonces se puede afirmar que la matriz es hermítica $\underline{\Lambda}_\xi^\dagger = \underline{\Lambda}_\xi$. Aplicando una transformación $U \in SU(3)$, si se multiplica ξ_a en (4.40) y al aplicar (4.43)

$$\begin{aligned} U^\dagger \xi_a \lambda_a U &= R_{ba}(U) \xi_a \lambda_b \\ U^\dagger \underline{\Lambda}_\xi U &= \xi'_b \lambda_b \equiv \underline{\Lambda}_{\xi'}. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Con una transformación U adecuada, por lo tanto, se puede diagonalizar $\underline{\Lambda}_\xi$. Es decir, teniendo en cuenta que las matrices de Gell-Mann diagonales son λ_3 y λ_8 , siempre se logra la forma

$$\underline{\Lambda}_{\xi'} = \xi'_3 \lambda_3 + \xi'_8 \lambda_8, \quad \xi' = (0, 0, \xi'_3, 0, 0, 0, 0, \xi'_8)^T. \quad (4.46)$$

El número de parámetros relevantes del potencial es.

$$54 - 6 = 48. \quad (4.47)$$

Cabe resaltar que en vez de ξ , se hubiera podido escoger η en el anterior argumento y obtener el mismo número de parámetros.

Con respecto al modelo de tres dobletes Higgs. En un modelo realista se tiene que considerar, además del potencial Higgs, los términos cinéticos de los campos de bosones Higgs, así como los términos Yukawa los cuales proporcionan acoplamientos de los dobletes de bosones Higgs con los fermiones. Bajo una transformación de base, es decir, una transformación de los dobletes de bosones Higgs de la forma (4.37), o equivalentemente, en términos de las bilineales, una transformación de la forma (4.39), después del rompimiento espontáneo de simetría, los términos cinéticos de los dobletes Higgs permanecen invariantes. Pero, en general, los acoplamientos Yukawa no son invariantes bajo dicho cambio de base.

Para ilustrar el uso de las bilineales se considera dos ejemplos simples de potenciales con tres dobletes Higgs

$$\text{Ejemplo I} \quad V_I = -\mu^2 \varphi_3^\dagger \varphi_3 + \lambda (\varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 + \varphi_3^\dagger \varphi_3)^2. \quad (4.48)$$

Aquí μ^2 es un parámetro de dimensiones de masa al cuadrado y λ no tiene dimensiones. Al emplear (4.22), (4.23) y (4.24) se escribe este potencial en términos de las bilineales como

$$V_I = -\mu^2 \left(\frac{K_0}{\sqrt{6}} - \frac{K_8}{\sqrt{3}} \right) + \lambda \left(\frac{3}{\sqrt{6}} K_0 \right)^2 = -\frac{\mu^2}{\sqrt{6}} K_0 + \frac{\mu^2}{\sqrt{3}} K_8 + \frac{3}{2} \lambda K_0^2 \quad (4.49)$$

Esto corresponde a la forma general (4.33) con parámetros

$$\xi_0 = -\frac{\mu^2}{\sqrt{6}}, \quad \xi = \mu^2 (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{3}})^T, \quad \eta_{00} = \frac{3}{2} \lambda, \quad \eta = 0, \quad E = 0. \quad (4.50)$$

Se expresa el potencial en la base $+, 1, \dots, 7, -$, usando (4.25) y (4.26)

$$V_I = -\frac{\mu^2}{\sqrt{2}}K_- + \lambda(K_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}K_-)^2, \quad (4.51)$$

los parámetros en la nueva base se encuentran usando desde la ecuación (C.67) hasta la (C.70)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \xi_+ \\ \xi_a \\ \xi_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \mathbb{1}_7 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\mu^2}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{\mu^2}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = -\mu^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{2}{\sqrt{18}} \end{pmatrix} = -\frac{\mu^2}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.52)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{E}_{++} & \hat{E}_{+b} & \hat{E}_{+-} \\ \hat{E}_{a+} & \hat{E}_{ab} & \hat{E}_{a-} \\ \hat{E}_{-+} & \hat{E}_{-b} & \hat{E}_{--} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \mathbb{1}_7 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\lambda & 0 \\ 0 & \mathbb{0}_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \mathbb{1}_7 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \mathbb{1}_7 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda \\ 0 & \mathbb{0}_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{2}} \\ 0 & \mathbb{0}_7 & 0 \\ \frac{\lambda}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.53)$$

De acuerdo con lo obtenido se tiene

$$\begin{aligned} \xi_- &= \frac{\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad \xi_+ = \xi_1 = \dots = \xi_7 = 0, \\ \hat{E}_{++} &= \lambda, \quad \hat{E}_{+-} = \hat{E}_{-+} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}, \quad \hat{E}_{--} = \frac{\lambda}{2}, \text{ el resto de elementos son cero} \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\text{Ejemplo II} \quad V_{II} = m_1^2 \varphi_1^\dagger \varphi_1 + m_2^2 \varphi_2^\dagger \varphi_2 - \mu^2 \varphi_3^\dagger \varphi_3 + \lambda (\varphi_3^\dagger \varphi_3)^2. \quad (4.55)$$

Donde m_1^2 , m_2^2 y μ^2 son parámetros con dimensiones de masa al cuadrado y λ no tiene dimensiones. Se escribe el potencial en términos de las bilineales

$$\begin{aligned} V_{II} &= m_1^2 \left(\frac{K_0}{\sqrt{6}} + \frac{K_3}{2} + \frac{K_8}{2\sqrt{3}} \right) + m_2^2 \left(\frac{K_0}{\sqrt{6}} - \frac{K_3}{2} + \frac{K_8}{2\sqrt{3}} \right) - \mu \left(\frac{K_0}{\sqrt{6}} - \frac{K_8}{\sqrt{3}} \right) \\ &\quad + \lambda \left(\frac{K_0}{\sqrt{6}} - \frac{K_8}{\sqrt{3}} \right)^2. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Al reescribir el potencial en la forma (4.33) se obtiene

$$V_{II} = \left(\sqrt{\frac{1}{6}}m_1^2 + \sqrt{\frac{1}{6}}m_2^2 - \sqrt{\frac{1}{6}}\mu^2 \right) K_0 + \left(\frac{m_1^2}{2} - \frac{m_2^2}{2} \right) K_3$$

$$+ \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}m_1^2 + \frac{1}{2\sqrt{3}}m_2^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mu \right) K_8 + \frac{\lambda}{6}K_0^2 - \frac{\sqrt{2}}{3}\lambda K_0 K_8 + \frac{\lambda}{3}K_8^2, \quad (4.57)$$

de la cual se identifica los parámetros

$$\begin{aligned} \xi_0 &= (m_1^2 + m_2^2 - \mu^2)/\sqrt{6}, & \xi_3 &= (m_1^2 - m_2^2)/2, & \xi_8 &= (m_1^2/2 + m_2^2/2 + \mu^2)/\sqrt{3} \\ \eta_{00} &= \lambda/6, & \eta_8 &= -\sqrt{2}\lambda/6, & \eta_{88} &= \lambda/3 \quad \text{el resto de términos son cero.} \end{aligned} \quad (4.58)$$

En la base $+, 1, \dots, 7, -$, se usa desde la ecuación (C.67) hasta la (C.70) para obtener el valor de los parámetros en dicha base

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \xi_+ \\ \xi_a \\ \xi_- \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \mathbb{1}_7 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_a \\ \xi_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}}\xi_0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\xi_8 \\ \xi_a \\ \sqrt{\frac{1}{3}}\xi_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}\xi_8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(m_1^2 + m_2^2 - \mu) + \frac{1}{6}(m_1^2 + m_2^2 + 2\mu) \\ \xi_a \\ \frac{1}{3\sqrt{2}}(m_1^2 + m_2^2 - \mu) - \frac{1}{3\sqrt{2}}(m_1^2 + m_2^2 + 2\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2) \\ \xi_a \\ -\sqrt{\frac{1}{3}}\mu^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.59)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{E}_{++} & \hat{E}_{+b} & \hat{E}_{+-} \\ \hat{E}_{a+} & \hat{E}_{ab} & \hat{E}_{a-} \\ \hat{E}_{-+} & \hat{E}_{-b} & \hat{E}_{--} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \mathbb{1}_7 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{6} & 0 & -\frac{\sqrt{2}\lambda}{6} \\ 0 & \mathbb{0}_7 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\lambda}{6} & 0 & \frac{\lambda}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \mathbb{1}_7 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} \\ 0 & \mathbb{1}_7 & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{3\lambda}{6\sqrt{3}} \\ 0 & \mathbb{0}_7 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3\sqrt{2}\lambda}{6\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{0}_7 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Entonces en la nueva base quedan los elementos

$$\xi_+ = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2), \quad \xi_- = -\frac{1}{\sqrt{2}}\mu^2, \quad E_{--} = \frac{1}{2}\lambda. \quad (4.61)$$

Por último se determina el potencial V_{II} en la base $+, 1, \dots, 7, -$, para ello se usa (4.56)

$$\begin{aligned} V_{II} &= \frac{m_1^2}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}K_0 + \frac{K_8}{\sqrt{3}} + K_3 \right) + \frac{m_2^2}{2} \left(\sqrt{\frac{2}{3}}K_0 + \frac{K_8}{\sqrt{3}} - K_3 \right) - \frac{\mu}{\sqrt{2}} \left(\frac{K_0}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}K_8 \right) \\ &\quad + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{K_0}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{2}{3}}K_8 \right)^2, \end{aligned} \quad (4.62)$$

ahora, se reemplaza (4.25) y (4.26) en (4.62)

$$V_{II} = \frac{m_1^2}{2}(K_+ + K_3) + \frac{m_2^2}{2}(K_+ - K_3) - \frac{\mu}{\sqrt{2}}K_- + \frac{\lambda}{2}K_-^2. \quad (4.63)$$

4.4. Estabilidad del Modelo de Tres Dobletes

Ahora se realiza el análisis de la estabilidad del potencial del modelo general de tres dobletes Higgs (4.33), dado en términos de las bilineales K_0 y $\mathbf{K}$ sobre el dominio determinado por (4.32). Esto se puede lograr de manera análoga a como se realizó para el modelo de dos dobletes Higgs. El caso $\sqrt{3/2}K_0 = \varphi_1^\dagger\varphi_1 + \varphi_2^\dagger\varphi_2 + \varphi_3^\dagger\varphi_3 = 0$ corresponde a que todos los campos Higgs sean cero, por ende $V = 0$. Para $K_0 > 0$ se define

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{K}}{K_0} = \left(\frac{K_a}{K_0} \right). \quad (4.64)$$

Se reescribe la segunda y tercera ecuación de (4.33) en términos de $\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \implies (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) &= K_0^2 - \frac{1}{2}K_a K_a = \frac{K_0^2}{2} \left(2 - \frac{K_a}{K_0} \frac{K_a}{K_0} \right) \geq 0, \\ 2 - \mathbf{k}^2 &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned} \implies \text{Det}(\underline{K}) &= \text{Det}\left(\frac{1}{2}K_a \lambda_a\right) = \frac{K_0^3}{8} \text{Det}(\sqrt{2/3}\mathbb{1}_3 + k_a \lambda_a) = 0, \\ \text{Det}(\sqrt{2/3}\mathbb{1}_3 + k_a \lambda_a) &= 0. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Las ecuaciones (4.65) y (4.66) describen el dominio $\mathcal{D}_{\mathbf{k}}$ de $\mathbf{k}$, donde el límite de este será $\partial\mathcal{D}_{\mathbf{k}}$, el cual está caracterizado por

$$2 - \mathbf{k}^2 = 0. \quad (4.67)$$

De (4.33) y (4.64), se obtiene para $K_0 > 0$, $V = V_2 + V_4$ con

$$V_2 = K_0 J_2(\mathbf{k}), \quad J_2(\mathbf{k}) = \xi_0 + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{k} \quad (4.68)$$

$$V_4 = K_0^2 J_4(\mathbf{k}), \quad J_4(\mathbf{k}) = \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{k} + \mathbf{k}^T E \mathbf{k} \quad (4.69)$$

donde se ha introducido las funciones $J_2(\mathbf{k})$ y $J_4(\mathbf{k})$ en el dominio (4.64).

Un potencial estable significa que este debe estar acotado inferiormente. La estabilidad está determinada por el comportamiento de V en el límite $K_0 \rightarrow \infty$, es decir, por los signos de $J_4(\mathbf{k})$ y $J_2(\mathbf{k})$ en (4.68) y (4.69). Para que un modelo sea al menos *marginalmente* estable, las condiciones

$$\begin{aligned} J_4(\mathbf{k}) &> 0 \quad \text{o} \\ J_2(\mathbf{k}) &= 0 \quad \text{y} \quad J_2(\mathbf{k}) \geq 0 \end{aligned} \tag{4.70}$$

para todo $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_k$, es decir, todos los $\mathbf{k}$ que satisfacen (4.65) y (4.66) son necesarios y suficientes, debido a que esto es equivalente a $V \geq 0$ para $K_0 \rightarrow \infty$ en todas las posibles direcciones de $\mathbf{k}$. La propiedad de estabilidad más estricta $V \rightarrow \infty$ para $K_0 \rightarrow \infty$ para cualquier $\mathbf{k}$, requiere que V sea estable en sentido fuerte o en sentido débil. Para estabilidad fuerte se requiere

$$J_4(\mathbf{k}) > 0, \tag{4.71}$$

para todo $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_k$. Para estabilidad en el sentido débil es requerido que para todo $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_k$

$$\begin{aligned} J_4(\mathbf{k}) &\geq 0 \\ J_2(\mathbf{k}) &> 0 \text{ para todo } \mathbf{k} \text{ donde } J_4(\mathbf{k}) = 0. \end{aligned} \tag{4.72}$$

Para comprobar que $J_4(\mathbf{k})$ es positiva, es suficiente considerar el valor para todos sus puntos estacionarios sobre el dominio $\mathcal{D}_k$. Esto es válido porque el mínimo global de la función continua $J_4(\mathbf{k})$ está sobre el dominio compacto $\mathcal{D}_k$, y el mínimo global esta entre estos puntos estacionarios.

Para obtener los puntos estacionarios de $J_4(\mathbf{k})$ en el interior del dominio $\mathcal{D}_k$, aplicamos el criterio de la primera derivada, que en este caso es necesario añadir a $J_4(\mathbf{k})$ la condición (4.66) con un multiplicador de Lagrange u . Los puntos estacionarios son entonces obtenidos de

$$\begin{aligned} \nabla_{k_1, \dots, k_8} [J_4(\mathbf{k}) - ug(\mathbf{k})] &= 0, \\ g(\mathbf{k}) &= \text{Det} (\sqrt{2/3}\mathbb{1}_3 + k_a \lambda_a) = 0, \\ 2 - \mathbf{k}^2 &> 0, \end{aligned} \tag{4.73}$$

en donde la matriz gradiente de la ecuación que contiene la ligadura tiene rango 1. Esto puede ser fácilmente comprobado, si se considera $k_0 = 1$ y de (C.64) se tiene lo siguiente:

$$\frac{1}{K_0} \underline{K} = \frac{1}{2} \frac{K_\alpha}{K_0} \lambda_\alpha = \frac{1}{2} k_\alpha \lambda_\alpha, \quad (4.74)$$

$$g(\mathbf{k}) = \text{Det} \left(2 \frac{\underline{K}}{K_0} \right) = \frac{8}{K_0^3} \text{Det} (\underline{K}) = \frac{8}{12} G_{\alpha\beta\gamma} \frac{K_\alpha}{K_0} \frac{K_\beta}{K_0} \frac{K_\gamma}{K_0} = \frac{2}{3} G_{\alpha\beta\gamma} k_\alpha k_\beta k_\gamma, \quad (4.75)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\mathbf{k})}{\partial k_a} &= \frac{2}{3} G_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial k_\alpha}{\partial k_a} k_\beta k_\gamma + \frac{2}{3} G_{\alpha\beta\gamma} k_\alpha \frac{\partial k_\beta}{\partial k_a} k_\gamma + \frac{2}{3} G_{\alpha\beta\gamma} k_\alpha k_\beta \frac{\partial k_\gamma}{\partial k_a} = \frac{2}{3} G_{a\beta\gamma} k_\beta k_\gamma \\ &+ \frac{2}{3} G_{\alpha a\gamma} k_\alpha k_\gamma + \frac{2}{3} G_{\alpha\beta a} k_\alpha k_\beta, \end{aligned} \quad (4.76)$$

como $G_{\alpha\beta\gamma}$ es una constante completamente simétrica en α, β y γ

$$\frac{\partial g(\mathbf{k})}{\partial k_a} = \frac{2}{3} G_{a\beta\gamma} k_\beta k_\gamma + \frac{2}{3} G_{a\alpha\gamma} k_\alpha k_\gamma + \frac{2}{3} G_{a\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 2 G_{a\beta\gamma} k_\beta k_\gamma = 2 \frac{M_a}{K_0^2}, \quad (4.77)$$

donde se ha considerado (C.58) y se ha cambiado los índices mudos, para que los tres términos inmersos en la anterior ecuación sean totalmente iguales. En este caso la matriz correspondiente $\underline{M} = M_\alpha \lambda_\alpha$ tiene rango 1. Para mirar esto se parte de lo siguiente: suponer que hay una base donde $\underline{K}$ es una matriz diagonal semidefinida positiva, por ende sus componentes son $\kappa_i > 0$ con $i = 1, 2, 3$, sobre la diagonal (C.1), además $\underline{K}$ es de rango 2, por lo tanto, esto implica que $\text{Det } \underline{K} = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = 0$; es decir, por lo menos un κ_i debe ser cero. Sin pérdida de generalidad se toma $\kappa_3 = 0$, en C.48, es decir

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\kappa_1 \kappa_2 \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

Al aplicar el teorema 4 sobre (4.78)

$$\begin{aligned} \text{Tr } \underline{M} &= 2\kappa_1 \kappa_2 > 0, \\ M_0^2 - \frac{1}{2} M_a M_a &= (\text{Tr } \underline{M})^2 - \text{Tr} (\underline{M})^2 = 4\kappa_1^2 \kappa_2^2 - 4\kappa_1^2 \kappa_2^2 = 0, \\ \text{Det } \underline{M} &= 0, \end{aligned} \quad (4.79)$$

se ve que $\underline{M}$ efectivamente tiene rango 1, además, de la segunda condición de (4.81) M_0 y al menos un elemento de M_a con $a \in \{1, \dots, 8\}$ debe ser diferente de

cero. Entonces $(\partial g(\mathbf{k})/\partial k_a)$ tiene rango 1, y por lo tanto, el método de los multiplicadores de Lagrange es válido¹.

Para los puntos estacionarios sobre el límite $\partial\mathcal{D}_k$ existen dos ligaduras

$$g_1(\mathbf{k}) = \text{Det}(\sqrt{2/3}\mathbb{1}_3 + k_a\lambda_a) = 0, \quad g_2(\mathbf{k}) = 2 - k_a k_a = 0. \quad (4.80)$$

Estas condiciones equivalentemente definen una matriz $\underline{K}$ 3×3 semidefinida positiva de rango 1 (mirar ecuación (C.32)). Aquí la matriz gradiente será

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{k})}{\partial k_a} \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{k})}{\partial k_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \frac{M_a}{K_0^2} \\ -2k_a \end{pmatrix}. \quad (4.81)$$

Como $\underline{K}$ tiene rango 1, tenemos que $\underline{M} = 0$. Esto se demuestra análogamente a como se obtuvo (4.78). Se escribe $\underline{K}$ en una base la cual sea diagonal, como tiene rango 1 implica que dos de sus componentes diagonales deben ser cero. Suponer que dichas componentes sean $\kappa_3 = \kappa_2 = 0$, por lo tanto, en (4.78) se obtiene $\underline{M} = 0$. Esto quiere decir que $M_a = 0$, $a = 1, \dots, 8$. En consecuencia la matriz gradiente (4.81) tendrá rango 1 y no el rango 2 requerido para la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange². Para resolver esta inconsistencia, se toma la parametrización de las matrices $\underline{K}$ de rango 1 (ecuaciones (C.26) a (C.28):

$$\frac{\underline{K}}{K_0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{w} \mathbf{w}^\dagger, \quad (4.82)$$

donde

$$\mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} = 1. \quad (4.83)$$

Acorde a (4.9) y (4.64), se redefine

$$k_a \equiv k_a(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w}) = \text{Tr} \left(\frac{1}{K_0} \underline{K} \lambda_a \right) = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{Tr}(\mathbf{w} \mathbf{w}^\dagger \lambda_a). \quad (4.84)$$

¹Con esto logramos que el gradiente de la ligadura sea un vector diferente del vector nulo; tal que, al aplicar la primer ecuación de (4.81), el multiplicador de Lagrange esté presente en el sistema de ecuaciones.

²Al tener rango 1, la matriz solo tiene un vector linealmente independiente, es decir, el gradiente de una ligadura se puede expresar en términos del gradiente de la otra. Por otra parte, al construir el conjunto de ecuaciones $\nabla_{k_1, \dots, k_8} [J_4(\mathbf{k}) - u_1 g_1(\mathbf{k}) - u_2 g_2(\mathbf{k})] = \nabla_{k_1, \dots, k_8} J_4(\mathbf{k}) - u_2 \nabla_{k_1, \dots, k_8} g_2(\mathbf{k}) = 0$, con las ligaduras $g_1(\mathbf{k}) = 0$ y $g_2(\mathbf{k}) = 0$, podemos ver que la ligadura u_1 queda indeterminada.

El vector $\mathbf{w}$ se puede entender como una matriz 3×1 , de tal forma que las componentes se escriben como w_{a1} , usando esto en (4.84)

$$k_a(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w}) = \sqrt{\frac{3}{2}} w_{b1} w_{1c}^* (\lambda_a)_{cb} = \sqrt{\frac{3}{2}} w_{1c}^* (\lambda_a)_{cb} w_{b1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{w}^\dagger \lambda_a \mathbf{w}. \quad (4.85)$$

Redefinir ahora la función $J_4(\mathbf{k})$ de (4.69), usando (4.85)

$$J_4(\mathbf{k}) \equiv J_4(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w}) = \eta_{00} + 2\eta_a \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{w}^\dagger \lambda_a \mathbf{w} + \frac{3}{2} (\mathbf{w}^\dagger \lambda_a \mathbf{w}) \eta_{ab} (\mathbf{w}^\dagger \lambda_b \mathbf{w}). \quad (4.86)$$

Los puntos estacionarios de $J_4(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w})$ sujetos a la ligadura (4.83) con el multiplicador de Lagrange u se determinan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}^\dagger} [J_4(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w}) - u(\mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} - 1)] &= 0, \\ \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Aquí la matriz gradiente de la ligadura es de rango 1, como lo requiere el método de multiplicadores de Lagrange. Explícitamente se obtiene

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}^\dagger} [J_4(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w}) - u(\mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} - 1)] &= \sqrt{6} \eta_a \lambda_a \mathbf{w} + \frac{3}{2} \lambda_a \mathbf{w} E_{ab} (\mathbf{w}^\dagger \lambda_b \mathbf{w}) + \frac{3}{2} (\mathbf{w}^\dagger \lambda_a \mathbf{w}) \underbrace{E_{ab}}_{E_{ba}} \lambda_b \mathbf{w}, \\ &= \sqrt{6} \eta_a \lambda_a \mathbf{w} + \frac{3}{2} E_{ab} (\mathbf{w}^\dagger \lambda_b \mathbf{w}) \lambda_a \mathbf{w} + \frac{3}{2} E_{ba} (\mathbf{w}^\dagger \lambda_a \mathbf{w}) \lambda_b \mathbf{w} = 0. \end{aligned} \quad (4.88)$$

En el tercer término de (4.88), se realiza el siguiente cambio sobre los índices mudos $a \rightarrow b$ y $b \rightarrow a$, de tal forma que

$$\begin{aligned} [\sqrt{6} \eta_a \lambda_a + 3 E_{ab} (\mathbf{w}^\dagger \lambda_b \mathbf{w}) \lambda_a] \mathbf{w} &= 0 \\ \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.89)$$

La razón por la cual no se considera $\nabla_{\mathbf{w}} [J_4(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w}) - u(\mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} - 1)] = 0$, es que esta ecuación reproduce el complejo conjugado de la primera ecuación de (4.89).

Todos los puntos estacionarios obtenidos de (4.73) y (4.89) deben de cumplir la condición $J_4(\mathbf{k}) > 0$ para estabilidad en el sentido fuerte. Si para todos los puntos estacionarios obtenemos que $J_4(\mathbf{k}) \geq 0$, entonces para cada solución $\mathbf{k}$ con $J_4(\mathbf{k}) = 0$ debemos tener $J_2(\mathbf{k}) > 0$, para estabilidad en el sentido débil, o por lo menos $J_2(\mathbf{k}) = 0$ para estabilidad marginal. Si ninguna de estas condiciones se cumple,

es decir, si por lo menos en una dirección estacionaria $\mathbf{k}$ con $J_4(\mathbf{k}) < 0$, o $J_4(\mathbf{k}) = 0$ con $J_2(\mathbf{k}) < 0$, el potencial es inestable.

En el ejemplo *I*, con V_I definido en (4.48), se construye las funciones $J_2(\mathbf{k})$ y $J_4(\mathbf{k})$, con ayuda de (4.50)

$$J_2(\mathbf{k}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{k_8}{\sqrt{3}} \right) \mu^2, \quad J_4(\mathbf{k}) = \frac{3}{2} \lambda. \quad (4.90)$$

Obviamente, $J_4(\mathbf{k})$ es siempre positivo para $\lambda > 0$ en cualquier dirección $\mathbf{k}$, por lo tanto, el potencial es estable en el sentido fuerte. Es decir, la estabilidad aquí es garantizada por los términos cuárticos del potencial solamente.

Para el ejemplo *II* de (4.63) se tiene

$$V_{II_2} = \frac{m_1^2}{2}(K_+ + K_3) + \frac{m_2^2}{2}(K_+ - K_3) - \frac{\mu}{\sqrt{2}}K_-, \quad V_{II_4} = \frac{\lambda}{2}K_-^2. \quad (4.91)$$

Entonces $V_{II_4} > 0$ para $K_- > 0$ y $\lambda > 0$, pero $V_4 = 0$ cuando $K_- = 0$. En consecuencia, hay que considerar V_{II_2} para $K_- = 0$

$$V_{II_2} \Big|_{K_-=0} = \frac{m_1^2}{2}(K_+ + K_3) + \frac{m_2^2}{2}(K_+ - K_3). \quad (4.92)$$

Debido a (4.27) y (4.28), si $m_1^2 > 0$ y $m_2^2 > 0$ se tiene

$$V_2 \Big|_{K_-=0} \geq 0, \quad (4.93)$$

donde $V_{II_2} \Big|_{K_-=0} = 0$ solamente es válido cuando

$$K_+ + K_3 = 0, \quad K_+ - K_3 = 0, \quad (4.94)$$

es decir, para $K_+ = 0$. Pero esto implica que $\underline{K} = 0$. En efecto, el potencial V_{II} es estable en el sentido débil.

Capítulo 5

El Modelo General de Tres Tripletas Higgs

En este capítulo se van a desarrollar dos métodos para poder determinar la estabilidad de un potencial escalar, generado por tres tripletas Higgs. En general, se asume en ambos métodos que dichos tripletas son invariantes $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$, en donde, los tres tripletas no siempre tienen la misma hipercarga. Entonces, como se mencionó anteriormente en la sección 3.6 existen en la literatura ocho diferentes tipos de modelos $3 - 3 - 1$, los cuales tienen un sector escalar bastante complicado de estudiar en detalle. Para los modelos $3 - 3 - 1$ que no contienen cargas eléctricas exóticas, la situación es mas sencilla debido a que el sector escalar es mas simple, como ocurre en el modelo económico $3 - 3 - 1$ el cual necesita dos tripletas Higgs para romper la simetría en una manera consistente, sin embargo, ellos no pueden producir un espectro de masa fermiónica a tercer nivel [8]. Una manera alternativa es tratar el modelo con tres tripletas Higgs en vez de dos [7].

5.1. Método 1: Parametrización por Bilineales

5.1.1. Bilineales

En esta sección se considera el tratamiento usado en el capítulo 4 para el caso de un modelo general de tres tripletas Higgs, por lo tanto, no se especifica procesos ya realizados de dicho capítulo. Los campos complejos Higgs estarán denotados por

$$\varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i^{c_{i1}}(x) \\ \varphi_i^{c_{i2}}(x) \\ \varphi_i^{c_{i3}}(x) \end{pmatrix}; \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.1)$$

donde c_{i1} , c_{i2} y c_{i3} son la carga de los campos Higgs. En el potencial Higgs más general que es invariante gauge $SU(3)_L \times U(1)_X$, los tripletes de bosones Higgs están presentes como una combinación lineal de todos los posibles productos de la siguiente forma:

$$\varphi_i(x)^\dagger \varphi_j(x), \quad (\varphi_i(x)^\dagger \varphi_j(x)) (\varphi_k(x)^\dagger \varphi_l(x)) \quad i, j, k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (5.2)$$

Tal cual como se hizo en el anterior capítulo, se define la matriz 3×3 de los campos Higgs, para poder determinar las propiedades del potencial Higgs en términos de las variables bilineales gauge

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1^{c11} & \varphi_1^{c12} & \varphi_1^{c13} \\ \varphi_2^{c21} & \varphi_2^{c22} & \varphi_2^{c23} \\ \varphi_3^{c31} & \varphi_3^{c32} & \varphi_3^{c33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \varphi_3^T \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

Se define a $\underline{K}$ como la matriz hermítica que contiene todos los posibles productos escalares invariantes $SU(3)_L \times U(1)_X$

$$\underline{K} = \phi^\dagger \phi = \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Se descompone $\underline{K}$ (5.4) en la base de las matrices 3×3 , generada por las matrices de Gell-Mann y la matriz unitaria de dimensión 3, las cuales se han condensado con la notación λ_α (ver ecuaciones 4.5), (4.6) y (4.7)

$$\underline{K} = \frac{1}{2} K_\alpha \lambda_\alpha, \quad (5.5)$$

donde los coeficientes reales K_α están dados por

$$K_\alpha = K_\alpha = \text{Tr}(\underline{K} \lambda_\alpha), \quad (5.6)$$

cabe recordar, que al igual que en el capítulo 4, desde aquí hasta el final de esta sección, los índices latinos van de 0 a 8 y los índices griegos van de 0 a 8. Con la matriz $\underline{K}$ definida en términos de los tripletes en (5.4) y con la descomposición (5.4) y (5.5), inmediatamente se expresa los productos escalares en términos de las bilineales

$$\varphi_1^\dagger \varphi_1 = \frac{K_0}{\sqrt{6}} + \frac{K_3}{2} + \frac{K_8}{2\sqrt{3}}, \quad \varphi_1^\dagger \varphi_2 = \frac{1}{2}(K_1 + iK_2), \quad \varphi_1^\dagger \varphi_3 = \frac{1}{2}(K_4 + iK_5),$$

$$\varphi_2^\dagger \varphi_2 = \frac{K_0}{\sqrt{6}} - \frac{K_3}{2} + \frac{K_8}{2\sqrt{3}}, \quad \varphi_2^\dagger \varphi_3 = \frac{1}{2}(K_6 + iK_7), \quad \varphi_3^\dagger \varphi_3 = \frac{K_0}{\sqrt{6}} - \frac{K_8}{\sqrt{3}} \quad (5.7)$$

La matriz $\underline{K}$ (5.4) es semidefinida positiva, esto se deduce directamente de su definición (la demostración es exactamente igual al caso en que $\underline{K}$ es construida por los tres dobletes Higgs). Esto a su vez da

$$\sqrt{\frac{3}{2}}K_0 = \text{Tr}(\underline{K}) \geq 0, \quad \text{Det}(\underline{K}) \geq 0. \quad (5.8)$$

La matriz hermítica $\underline{K}$ (5.4) es construida de la matriz de campos Higgs, $\underline{K} = \phi\phi^\dagger$. Por lo tanto, los nueve coeficientes K_α de su descomposición (4.8) están completamente determinados dados los campos de bosones Higgs.

En este caso, a diferencia del modelo de dos dobletes Higgs, la matriz de los campos Higgs ϕ (5.3) tiene rango 3, por lo tanto, la matriz $\underline{K}$ también posee este rango. En el apéndice C se demostró que las matrices semidefinidas positivas de rango 3 están caracterizadas por

$$\begin{aligned} K_0 &\geq 0, \\ (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) &= K_0^2 - \frac{1}{2}K_a K_a \geq 0, \\ \text{Det}(\underline{K}) &= \frac{1}{12}G_{\alpha\beta\gamma}K_\alpha K_\beta K_\gamma \geq 0. \end{aligned} \quad (5.9)$$

La única diferencia que radica en este modelo con respecto al modelo de dos dobletes, es la condición sobre el determinante la cual surge a partir de la naturaleza de los campos Higgs. Basados en estas bilineales se procede a estudiar el potencial, las transformaciones de base y la estabilidad del modelo general de tres dobletes

5.1.2. El Potencial General de Tres Tripletes Higgs y Transformaciones de Base

El potencial general de tres tripletes Higgs se puede escribir en términos de las variables bilineales gauge de la siguiente forma

$$V = \xi_0 K_0 + \xi_a K_a + \eta_{00} K_0^2 + 2K_0 \eta_a K_a + K_a \eta_{ab} K_b, \quad (5.10)$$

donde los 54 parámetros $\xi_0, \xi_a, \eta_{00}, \eta_a$ y η_{ab} son reales (la demostración es análoga a la realizada en el anterior capítulo). El potencial (5.10) contiene todas las combinaciones lineales y cuadráticas de las bilineales, correspondientes a todos los productos cuadráticos y cuárticos de los campos Higgs que son invariantes gauge. Los términos mayores a los cuárticos no aparecen en el potencial para que este sea renormalizable. Del potencial (5.10) puede ser extraído cualquier término constante, por tal razón (5.10) es el potencial de tres tripletes Higgs más general. Ahora se introduce la notación

$$\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_8)^T, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_8)^T, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_8)^T, \quad E = (\eta_{ab}),$$

$$(\hat{E}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_b \\ \eta_a & \eta_{ab} \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Entonces se puede escribir el potencial (5.10) en la forma compacta

$$V = \xi_\alpha K_\alpha + K_\alpha \hat{E}_{\alpha\beta} K_\beta. \quad (5.12)$$

Ahora se considera un cambio de base $\varphi_i(x) \longrightarrow \varphi'_i(x)$ de los campos de bosones Higgs, donde

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1(x)^T \\ \varphi'_2(x)^T \\ \varphi'_3(x)^T \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \varphi_1(x)^T \\ \varphi_2(x)^T \\ \varphi_3(x)^T \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

donde consideramos U como una transformación unitaria 3×3 , es decir $U \in U(3)$ con $UU^\dagger = \mathbb{1}_3$. De (5.13) tenemos $\phi'(x) = U\phi(x)$, mientras que para la matriz $\underline{K}$ tenemos

$$\underline{K}'(x) = U \underline{K}(x) U^\dagger. \quad (5.14)$$

Tomando como referencia los procesos desarrollados en los capítulos 3 y 4 (ver ecuaciones (3.29), (3.33) y (4.39)), para las bilineales obtenemos las siguientes expresiones

$$K'_0(x) = K_0(x), \quad K'_a(x) = R_{ab}(U) K_b(x). \quad (5.15)$$

Aquí, al igual que en el capítulo 4, la matriz $R_{ab}(U)$ (ver ecuación (4.40)) está definida por

$$U^\dagger \lambda_a U = R_{ab}(U) \lambda_b. \quad (5.16)$$

De nuevo, los argumentos presentados en el capítulo 3 para obtener los resultados (3.36), (3.39) y (3.40), se pueden llevar a cabo en este caso, obteniendo así las siguientes propiedades sobre la matriz $R(U)$

$$R^*(U) = R(U), \quad R^T(U)R(U) = \mathbb{1}_8, \quad \text{Det } R(U) = 1, \quad (5.17)$$

es decir, $R(U) \in SO(8)$. Pero $R(U)$ forma solo un subconjunto de $SO(8)$.

Para las bilineales una transformación de fase pura $U = \exp(i\alpha)\mathbb{1}_3$, no ejerce ningún efecto sobre ellas. Por lo tanto, solo se considera transformaciones (5.13) con $U \in SU(3)$. De nuevo, como en el capítulo 4, para este caso se cumple que en la transformación de las bilineales (5.15) $R_{ab}(U)$ es entonces, la matriz 8×8 correspondiente a U en la representación adjunta de $SU(3)$.

El potencial escalar (5.10) debe permanecer inalterado bajo el reemplazo (5.15), si se transforma apropiadamente los parámetros se obtiene

$$\begin{aligned} \xi'_0 &= \xi_0, & \xi' &= R(U)\xi \\ \eta'_{00} &= \eta_{00}, & \eta' &= R(U)\eta, & E' &= R(U)ER^T(U), \end{aligned} \quad (5.18)$$

En un modelo de tres tripletes Higgs sin fermiones, se puede usar (5.18) para convertir, por ejemplo a ξ o a η a una forma estándar, tal cual como se hizo para el modelo de los tres dobletes Higgs. Este proceso conlleva a una reducción en 6 al número de parámetros, llegando a un total de 48 parámetros.

En un modelo completo tenemos que considerar, además del potencial Higgs, los términos cinéticos de los campos de bosones Higgs, así como los términos Yukawa los cuales proporcionan acoplamientos de los dobletes de bosones Higgs con los fermiones. Bajo una transformación de base, sobre los tripletes Higgs de la forma (5.13) (o en términos de las bilineales por (5.15)), después del rompimiento espontáneo de simetría, los términos cinéticos de los dobletes Higgs permanecen invariantes. Sin embargo, enfatizamos que, en general, los acoplamientos Yukawa no son invariantes bajo dicho cambio de base.

5.1.3. Estabilidad del Modelo de Tres Tripletas Higgs

La estabilidad del potencial del modelo general de tres tripletas Higgs (5.10), dado en términos de las bilineales K_0 y $\mathbf{K}$ sobre el dominio determinado por (5.9). Se analiza de manera análoga al modelo de tres dobletes Higgs. El caso $\sqrt{3/2}K_0 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 + \varphi_3^\dagger \varphi_3 = 0$ corresponde a que todos los campos Higgs sean cero, por ende $V = 0$. Para $K_0 > 0$ se define

$$\mathbf{k} = \frac{\mathbf{K}}{K_0} = \left(\frac{K_a}{K_0} \right). \quad (5.19)$$

Debido a (5.9) el dominio $\mathcal{D}_{\mathbf{k}}$ para $\mathbf{k}$ estará definido por las dos condiciones:

$$\begin{aligned} 2 - \mathbf{k}^2 &\geq 0, \\ \text{Det}(\sqrt{2/3}\mathbb{1}_3 + k_a \lambda_a) &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Cabe resaltar que las condiciones de frontera cambian en este modelo de tres tripletas, porque la segunda ecuación de (5.20) añade una nueva condición sobre el potencial. Por esta razón especificamos la frontera $\partial\mathcal{D}_{\mathbf{k}1}$, donde

$$\begin{aligned} 2 - \mathbf{k}^2 &> 0, \\ \text{Det}(\sqrt{2/3}\mathbb{1}_3 + k_a \lambda_a) &= 0, \end{aligned} \quad (5.21)$$

más aún, esta es equivalente a la ligadura sobre una matriz $\underline{K}$ semidefinida positiva de rango 2 (ver (C.31)). Ahora se especifica la frontera $\partial\mathcal{D}_{\mathbf{k}2}$ definida por

$$\begin{aligned} 2 - \mathbf{k}^2 &= 0, \\ \text{Det}(\sqrt{2/3}\mathbb{1}_3 + k_a \lambda_a) &= 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

De nuevo, esta condición es equivalente a las ligaduras sobre una matriz $\underline{K}$ semidefinida positiva de rango 1 (ver (C.32)).

De (5.10) y (5.19), para $K_0 > 0$, obtenemos $V = V_2 + V_4$ donde

$$V_2 = K_0 J_2(\mathbf{k}), \quad J_2(\mathbf{k}) = \xi_0 + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{k} \quad (5.23)$$

$$V_4 = K_0^2 J_4(\mathbf{k}), \quad J_4(\mathbf{k}) = \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{k} + \mathbf{k}^T E \mathbf{k} \quad (5.24)$$

donde definimos las funciones $J_2(\mathbf{k})$ y $J_4(\mathbf{k})$ en el dominio (5.20).

Un potencial es estable cuando esta acotado inferiormente, por lo tanto está es completamente determinada por el comportamiento de V en el límite $K_0 \rightarrow \infty$, es decir, por los signos de $J_4(\mathbf{k})$ y $J_2(\mathbf{k})$ en (5.23) y (5.24). Para que el potencial sea *marginamente* estable, se debe cumplir

$$\begin{aligned} J_4(\mathbf{k}) &> 0 \quad \text{o} \\ J_2(\mathbf{k}) &= 0 \quad \text{y} \quad J_2(\mathbf{k}) \geq 0 \end{aligned} \tag{5.25}$$

para todo $\mathbf{k}$ que satisface (5.21), dicho de otra forma, para todo $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_k$ son necesarios y suficientes, debido a que esto implica que $V \geq 0$ cuando $K_0 \rightarrow \infty$ en todos los posibles valores de $\mathbf{k}$. La propiedad de estabilidad fuerte establece $V \rightarrow \infty$ para $K_0 \rightarrow \infty$ para cualquier $\mathbf{k}$, es decir

$$J_4(\mathbf{k}) > 0, \tag{5.26}$$

para todo $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_k$. Para estabilidad en el sentido débil es necesario que para todo $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_k$ se cumpla que

$$\begin{aligned} J_4(\mathbf{k}) &\geq 0 \\ J_2(\mathbf{k}) &> 0 \text{ para todo } \mathbf{k} \text{ donde } J_4(\mathbf{k}) = 0. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Igual que en los anteriores capítulos, para comprobar que $J_4(\mathbf{k})$ es positiva, solo basta considerar el valor para todos sus puntos estacionarios sobre el dominio $\mathcal{D}_k$. Esto es válido porque el mínimo global de la función continua $J_4(\mathbf{k})$ está sobre el dominio compacto $\mathcal{D}_k$, y el mínimo global esta entre estos puntos estacionarios.

Los puntos estacionarios regulares de $J_4(\mathbf{k})$ se encuentran en el interior del dominio $\mathcal{D}_k$. Estos se obtienen de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \nabla_{k_1, \dots, k_8} J_4(\mathbf{k}) &= 0, \\ \text{Det}(\sqrt{2/3}\mathbb{1}_3 + k_a \lambda_a) &> 0, \\ 2 - \mathbf{k}^2 &> 0, \end{aligned} \tag{5.28}$$

Los puntos estacionarios excepcionales sobre la frontera $\partial\mathcal{D}_{k1}$, se obtienen añadiendo a $J_4(\mathbf{k})$ la segunda ecuación de (5.21) con un multiplicador de Lagrange u_1 . Di-

chos puntos se consiguen a través de

$$\begin{aligned}\nabla_{k_1, \dots, k_8} [J_4(\mathbf{k}) - u_1 g_1(\mathbf{k})] &= 0, \\ g_1(\mathbf{k}) &= \text{Det}(\sqrt{2/3} \mathbb{1}_3 + k_a \lambda_a) = 0, \\ 2 - \mathbf{k}^2 &> 0.\end{aligned}\tag{5.29}$$

En el capítulo 4 se demostró que la matriz gradiente para este caso tiene rango 1 (ver ecuaciones (4.76) a (4.81)), por lo tanto, el método de multiplicadores de Lagrange es válido¹.

Para los puntos estacionarios sobre el límite $\partial\mathcal{D}_{k_2}$ tenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla_{k_1, \dots, k_8} [J_4(\mathbf{k}) - u_1 g_1(\mathbf{k}) - u_2 g_2(\mathbf{k})] &= 0, \\ g_1(\mathbf{k}) &= \text{Det}(\sqrt{2/3} \mathbb{1}_3 + k_a \lambda_a) = 0, \\ g_2(\mathbf{k}) &= 2 - k_a k_a = 0.\end{aligned}\tag{5.30}$$

La anterior ecuación es equivalente a las ligaduras sobre una matriz $\underline{K}$ de rango 1. La matriz gradiente en este caso es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{k})}{\partial k_a} \\ \frac{\partial g_2(\mathbf{k})}{\partial k_a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \frac{M_a}{K_0^2} \\ -2k_a \end{pmatrix},\tag{5.31}$$

donde hemos usado (4.77). Si $\underline{K}$ tiene rango 1, por lo tanto, tenemos que $\underline{M} = 0$ (ver párrafo anterior a la ecuación (4.78)). En consecuencia la matriz gradiente (5.31) tendrá rango 1 y no el rango 2 requerido para la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange². Por lo tanto, se toma la parametrización de las matrices $\underline{K}$ de rango 1 con las ecuaciones (C.26) a (C.28)

$$\frac{\underline{K}}{K_0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{w} \mathbf{w}^\dagger,\tag{5.32}$$

donde

$$\mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} = 1.\tag{5.33}$$

¹Con esto se logra que el gradiente de la ligadura sea un vector diferente del vector nulo; tal que, al aplicar la primer ecuación de (5.29), el multiplicador de Lagrange esté presente en el sistema de ecuaciones.

²Al tener rango 1, la matriz solo tiene un vector linealmente independiente, es decir, el gradiente de una ligadura se puede expresar en términos del gradiente de la otra. Por otra parte, al construir el conjunto de ecuaciones $\nabla_{k_1, \dots, k_8} [J_4(\mathbf{k}) - u_1 g_1(\mathbf{k}) - u_2 g_2(\mathbf{k})] = \nabla_{k_1, \dots, k_8} J_4(\mathbf{k}) - u_2 \nabla_{k_1, \dots, k_8} g_2(\mathbf{k}) = 0$, con las ligaduras $g_1(\mathbf{k}) = 0$ y $g_2(\mathbf{k}) = 0$, podemos ver que la ligadura u_1 queda indeterminada.

Se redefinen las bilineales y la función $J_4(\mathbf{k})$ usando la nueva parametrización

$$\begin{aligned} k_a &\equiv k_a(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{w}^\dagger \lambda_a \mathbf{w}, \\ J_4(\mathbf{k}) &\equiv J_4(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w}) = \eta_{00} + 2\eta_a \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{w}^\dagger \lambda_a \mathbf{w} + \frac{3}{2} (\mathbf{w}^\dagger \lambda_a \mathbf{w}) \eta_{ab} (\mathbf{w}^\dagger \lambda_b \mathbf{w}), \end{aligned} \quad (5.34)$$

Debido al cambio de variables, los puntos estacionarios excepcionales de $\partial\mathcal{D}_{\mathbf{k}2}$ se determinarán a partir de la función $J_4(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w})$, junto a la ligadura (5.33) con el multiplicador de Lagrange u , de los cuales se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{w}^\dagger} [J_4(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w}) - u(\mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} - 1)] &= 0, \\ \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Trivialmente la matriz gradiente de la ligadura es de rango 1, como lo requiere el método de multiplicadores de Lagrange, por lo tanto, las definiciones (5.34) nos resuelven el problema del rango sobre la matriz gradiente (5.31). Explícitamente obtenemos

$$\begin{aligned} [\sqrt{6}\eta_a \lambda_a + 3E_{ab}(\mathbf{w}^\dagger \lambda_b \mathbf{w}) \lambda_a] \mathbf{w} &= 0 \\ \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (5.36)$$

Todos los puntos estacionarios obtenidos de (5.28), (5.29) y (5.36) deben de cumplir la condición $J_4(\mathbf{k}) > 0$ para estabilidad en el sentido fuerte. Si para todos los puntos estacionarios obtenemos que $J_4(\mathbf{k}) \geq 0$, entonces para cada solución $\mathbf{k}$ con $J_4(\mathbf{k}) = 0$ debemos tener $J_2(\mathbf{k}) > 0$, para estabilidad en el sentido débil, o por lo menos $J_2(\mathbf{k}) = 0$ para estabilidad marginal. Si ninguna de estas condiciones se cumple, es decir, si por lo menos en una dirección estacionaria $\mathbf{k}$ con $J_4(\mathbf{k}) < 0$, o $J_4(\mathbf{k}) = 0$ con $J_2(\mathbf{k}) < 0$, el potencial es inestable.

Existen problemas en la resolución de potenciales complejos mediante este método, debido a que la parametrización presentada en esta sección, conlleva a que las condiciones de estabilidad nacen de ecuaciones no lineales sobre las K_a (ver ecuaciones (5.28) y (5.29)). Cabe resaltar que se usó software computacional (*Wx-Maxima 17.10.1* y *Wolfram Mathematica 11*) para tratar de resolver un potencial no trivial (5.250) mediante este método, el cual fue en vano, debido a que se dispuso de muchos días de desarrollo computacional sin obtener fruto alguno. Por otra parte, en el apéndice B de [16], realizan un ejemplo de en el cual se resuelve un potencial

no trivial pero con métodos numéricos, específicamente usan la aproximación de continuación homotópica presentada en [6], aunque resaltan la posibilidad de usar también otro método numérico denominado, la aproximación por bases de Gröbner. A continuación se presenta otro método desarrollado en [7], el cual es eficaz en el análisis de estabilidad de un potencial escalar no trivial.

5.2. Método 2: Parametrización por Variables Orbitales

5.2.1. Variables Orbitales

El potencial escalar más general $V(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ donde φ_1, φ_2 y φ_3 son tripletes escalares Higgs, es una combinación lineal hermítica de los siguientes términos

$$\varphi_i^\dagger \varphi_j, \quad (\varphi_i^\dagger \varphi_j)(\varphi_k^\dagger \varphi_l); \quad i, j, k, l \in 1, 2, 3. \quad (5.37)$$

De acuerdo con el método usado en [7] se organizan los productos invariantes gauge $SU(3)_L$ en los arreglos matriciales 2×2

$$\underline{K} = \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_2^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_2 & \varphi_2^\dagger \varphi_2 \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger \varphi_1 & \varphi_3^\dagger \varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

$$\underline{M} = \begin{pmatrix} \varphi_2^\dagger \varphi_2 & \varphi_3^\dagger \varphi_2 \\ \varphi_2^\dagger \varphi_3 & \varphi_3^\dagger \varphi_3 \end{pmatrix} \quad (5.40)$$

los cuales, sirven para estudiar las propiedades del potencial tales como su estabilidad y sus puntos estacionarios.

Las matrices $\underline{K}$, $\underline{L}$ y $\underline{M}$ se reescriben en una nueva base formada por la matriz identidad de orden 2 ($\mathbb{1}_2$) y las matrices de Pauli (σ^a , $a = 1, 2, 3$)

$$\begin{aligned} \underline{K}_{ij} &= \frac{1}{2}(K_0 \delta_{ij} + K_a \sigma_{ij}^a), \\ \underline{L}_{ij} &= \frac{1}{2}(L_0 \delta_{ij} + L_a \sigma_{ij}^a), \\ \underline{M}_{ij} &= \frac{1}{2}(M_0 \delta_{ij} + M_a \sigma_{ij}^a), \end{aligned} \quad (5.41)$$

en donde se hace uso del convenio de Einstein sobre la suma de índices repetidos. Las variables orbitales reales K_α , L_α y M_α con $\alpha = 0, 1, 2, 3$ están dadas por

$$\begin{aligned} K_0 &= \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 & K_a &= \text{Tr}(\underline{K}\sigma^a), \\ L_0 &= \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_3^\dagger \varphi_3 & L_a &= \text{Tr}(\underline{L}\sigma^a), \\ M_0 &= \varphi_2^\dagger \varphi_2 + \varphi_3^\dagger \varphi_3 & M_a &= \text{Tr}(\underline{M}\sigma^a). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Se definen las matrices 2×3 de los campos Higgs ϕ^k , ϕ^l y ϕ^m , de la siguiente manera

$$\phi^k = \begin{pmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \end{pmatrix}, \quad \phi^l = \begin{pmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_3^T \end{pmatrix}, \quad \phi^m = \begin{pmatrix} \varphi_2^T \\ \varphi_3^T \end{pmatrix}, \quad (5.43)$$

en donde, estas matrices de los campos Higgs reproducen

$$\underline{K} = \phi^k (\phi^k)^\dagger, \quad \underline{L} = \phi^l (\phi^l)^\dagger, \quad \underline{M} = \phi^m (\phi^m)^\dagger \quad (5.44)$$

Usando las matrices de Pauli y la ecuación (5.42), se encuentran las siguientes relaciones para las variables orbitales

$$K_1 = \varphi_2^\dagger \varphi_1 + \varphi_1^\dagger \varphi_2, \quad K_2 = i\varphi_2^\dagger \varphi_1 - i\varphi_1^\dagger \varphi_2, \quad K_3 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 - \varphi_2^\dagger \varphi_2. \quad (5.45)$$

$$L_1 = \varphi_3^\dagger \varphi_1 + \varphi_1^\dagger \varphi_3, \quad L_2 = i\varphi_3^\dagger \varphi_1 - i\varphi_1^\dagger \varphi_3, \quad L_3 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 - \varphi_3^\dagger \varphi_3. \quad (5.46)$$

$$M_1 = \varphi_3^\dagger \varphi_2 + \varphi_2^\dagger \varphi_3, \quad M_2 = i\varphi_3^\dagger \varphi_2 - i\varphi_2^\dagger \varphi_3, \quad M_3 = \varphi_2^\dagger \varphi_2 - \varphi_3^\dagger \varphi_3. \quad (5.47)$$

Las ecuaciones (5.45), (5.46) y (5.47), son suficientes para encontrar las expresiones $\varphi_i^\dagger \varphi_j$ en términos de las variables orbitales K_0, K_a, L_0, L_a, M_0 y M_a , es decir

$$\underline{K} : \begin{cases} \varphi_1^\dagger \varphi_1 = \frac{1}{2}(K_0 + K_3), & \varphi_2^\dagger \varphi_2 = \frac{1}{2}(K_0 - K_3), \\ \varphi_2^\dagger \varphi_1 = \frac{1}{2}(K_1 - iK_3), & \varphi_1^\dagger \varphi_2 = \frac{1}{2}(K_1 + iK_3). \end{cases} \quad (5.48)$$

$$\underline{L} : \begin{cases} \varphi_1^\dagger \varphi_1 = \frac{1}{2}(L_0 + L_3), & \varphi_3^\dagger \varphi_3 = \frac{1}{2}(L_0 - L_3), \\ \varphi_3^\dagger \varphi_1 = \frac{1}{2}(L_1 - iL_3), & \varphi_1^\dagger \varphi_3 = \frac{1}{2}(L_1 + iL_3). \end{cases} \quad (5.49)$$

$$\underline{M} : \begin{cases} \varphi_2^\dagger \varphi_2 = \frac{1}{2}(M_0 + M_3), & \varphi_3^\dagger \varphi_3 = \frac{1}{2}(M_0 - M_3), \\ \varphi_3^\dagger \varphi_2 = \frac{1}{2}(M_1 - iM_3), & \varphi_2^\dagger \varphi_3 = \frac{1}{2}(M_1 + iM_3). \end{cases} \quad (5.50)$$

Las matrices $\underline{K}$, $\underline{L}$ y $\underline{M}$ son semi definidas positivas, lo cual se puede demostrar con un proceso análogo al realizado para la matriz $\underline{K}$ en el capítulo 3 (ver ecuación (3.51)), esto implica que tanto el determinante y la traza de dichas matrices sean

positivos. Ahora se procede a encontrar una expresión para los determinantes, en términos de las variables orbitales. Para $\underline{K}$ usando (5.48)

$$\begin{aligned} \text{Det } \underline{K} &= \left(\varphi_1^\dagger \varphi_1 \right) \left(\varphi_2^\dagger \varphi_2 \right) - \left(\varphi_1^\dagger \varphi_2 \right) \left(\varphi_2^\dagger \varphi_1 \right) = \frac{1}{2}(K_0 + K_3) \frac{1}{2}(K_0 - K_3) \\ &\quad - \frac{1}{2}(K_1 - iK_3) \frac{1}{2}(K_1 + iK_3) = \frac{1}{4}(K_0^2 - K_1^2 - K_2^2 - K_3^2) = \frac{1}{4}(K_0^2 - \mathbf{K}^2) \geq 0, \\ K_0^2 - \mathbf{K}^2 &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.51)$$

donde $\mathbf{K}$ es un vector de componentes K_1, K_2 y K_3 . Similarmente para $\underline{L}$ y $\underline{M}$ usando (5.49) y (5.50) respectivamente se obtiene

$$L_0^2 - \mathbf{L}^2 \geq 0. \quad (5.52)$$

$$M_0^2 - \mathbf{M}^2 \geq 0. \quad (5.53)$$

con $\mathbf{L}, \mathbf{M}$ vectores de componentes L_1, L_2, L_3 y M_1, M_2, M_3 respectivamente. Los productos escalares $\varphi_1^\dagger \varphi_1, \varphi_2^\dagger \varphi_2$ y $\varphi_3^\dagger \varphi_3$ en términos de las variables orbitales permiten eliminar tres de las 12 variables obtenidas en la parametrización, es decir

$$\begin{aligned} \varphi_1^\dagger \varphi_1 &= \frac{1}{2}(K_0 + K_3) & \varphi_1^\dagger \varphi_1 &= \frac{1}{2}(L_0 + L_3) \\ \varphi_2^\dagger \varphi_2 &= \frac{1}{2}(K_0 - K_3) & \varphi_2^\dagger \varphi_2 &= \frac{1}{2}(M_0 + M_3) \\ \varphi_3^\dagger \varphi_3 &= \frac{1}{2}(L_0 - L_3) & \varphi_3^\dagger \varphi_3 &= \frac{1}{2}(M_0 - M_3) \end{aligned}$$

Por lo tanto de los resultados de $\varphi_1^\dagger \varphi_1$

$$\begin{aligned} K_0 + K_3 &= L_0 + L_3 \\ K_3 &= L_0 + \underbrace{L_3}_{\varphi_1^\dagger \varphi_1 - \varphi_3^\dagger \varphi_3} - \underbrace{K_0}_{\varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2} \\ K_3 &= L_0 - \underbrace{(\varphi_2^\dagger \varphi_2 + \varphi_3^\dagger \varphi_3)}_{M_0} \\ K_3 &= L_0 - M_0 \end{aligned} \quad (5.54)$$

Para $\varphi_3^\dagger \varphi_3$

$$\begin{aligned} L_0 - L_3 &= M_0 - M_3 \\ L_3 &= \underbrace{L_0}_{\varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_3^\dagger \varphi_3} + \underbrace{M_3}_{\varphi_2^\dagger \varphi_2 - \varphi_3^\dagger \varphi_3} - M_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_3 &= \underbrace{(\varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2)}_{K_0} - M_0 \\
L_3 &= K_0 - M_0
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Por último con $\varphi_2^\dagger \varphi_2$ se obtiene

$$\begin{aligned}
M_0 + M_3 &= K_0 - K_3 \\
M_3 &= K_0 - \underbrace{K_3}_{\varphi_1^\dagger \varphi_1 - \varphi_2^\dagger \varphi_2} + \underbrace{M_0}_{\varphi_2^\dagger \varphi_2 + \varphi_3^\dagger \varphi_3} \\
M_3 &= K_0 - \underbrace{(\varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_3^\dagger \varphi_3)}_{L_0} \\
L_3 &= K_0 - L_0
\end{aligned} \tag{5.56}$$

5.2.2. El Potencial General de Tres Tripletes Higgs

El potencial escalar $V(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ es una combinación lineal de los productos invariantes gauge. Estos productos pueden ser expresados en términos de las variables orbitales K_α , L_α , y M_α . Con ayuda de (5.54), (5.55) y (5.56), el potencial quedará totalmente expresado en términos de las siguientes variables orbitales

$$K_0, L_0, M_0, K_1, K_2, L_1, L_2, M_1, M_2 \tag{5.57}$$

Con esta parametrización se expresará el potencial escalar Higgs en la siguiente manera

$$V(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (V_{K2} + V_{K4}) + (V_{L2} + V_{L4}) + (V_{M2} + V_{M4}) \tag{5.58}$$

donde se puede ver que, el espacio general del potencial se puede dividir en tres subespacios, donde el primer subespacio depende netamente de las variables orbitales de $\underline{K}$, el segundo de las variables de $\underline{L}$ y el tercero corresponde a $\underline{M}$.

Al tomar como referencia lo visto en el capítulo 3, se puede escribir los términos del potencial (5.36) de la siguiente manera

$$V_{K2} = \xi_{k0} K_0 + \xi_{ka} K_a = K_0 J_{k2}(\mathbf{k}), \tag{5.59}$$

$$V_{K4} = \eta_{k00}K_0^2 + 2K_0\eta_{ka}K_a + K_a\eta_{kab}K_b = K_0^2 J_{k4}(\mathbf{k}), \quad (5.60)$$

$$V_{L2} = \xi_{L0}L_0 + \xi_{La}L_a = L_0 J_{l2}(\mathbf{l}), \quad (5.61)$$

$$V_{L4} = \eta_{l00}L_0^2 + 2L_0\eta_{la}L_a + L_a\eta_{lab}L_b = L_0^2 J_{l4}(\mathbf{l}), \quad (5.62)$$

$$V_{M2} = \xi_{M0}K_0 + \xi_{Ma}M_a = M_0 J_{m2}(\mathbf{m}), \quad (5.63)$$

$$V_{M4} = \eta_{m00}M_0^2 + 2M_0\eta_{ma}M_a + M_a\eta_{mab}M_b = M_0^2 J_{m4}(\mathbf{m}), \quad (5.64)$$

donde los vectores $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ y $\mathbf{m}$ se pueden definir con lo obtenido en las ecuaciones (5.51) a (5.53) como

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{\mathbf{K}}{K_0}, (|\mathbf{k}| \leq 1), \\ \mathbf{l} &= \frac{\mathbf{L}}{L_0}, (|\mathbf{l}| \leq 1), \\ \mathbf{m} &= \frac{\mathbf{M}}{M_0}, (|\mathbf{m}| \leq 1). \end{aligned} \quad (5.65)$$

Los parámetros $\xi_{k(l,m)0}$, $\xi_{k(l,m)a}$, $\eta_{k(l,m)00}$, $\eta_{k(l,m)a}$ y $\eta_{k(l,m)ab} = \eta_{k(l,m)ba}$ son reales y las funciones $J_{k(l,m)2}$ y $J_{k(l,m)4}$ están definidas en los dominios $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| \leq 1$ de la siguiente manera

$$J_{k2}(\mathbf{k}) = \xi_{k0} + \boldsymbol{\xi}_k^T \mathbf{k}, \quad (5.66)$$

$$J_{k4}(\mathbf{k}) = \eta_{k00} + 2\boldsymbol{\eta}_k^T \mathbf{k} + \mathbf{k}^T E_k \mathbf{k}, \quad (5.67)$$

$$J_{l2}(\mathbf{l}) = \xi_{l0} + \boldsymbol{\xi}_l^T \mathbf{l}, \quad (5.68)$$

$$J_{l4}(\mathbf{l}) = \eta_{l00} + 2\boldsymbol{\eta}_l^T \mathbf{l} + \mathbf{l}^T E_l \mathbf{l}, \quad (5.69)$$

$$J_{m2}(\mathbf{m}) = \xi_{m0} + \boldsymbol{\xi}_m^T \mathbf{m}, \quad (5.70)$$

$$J_{m4}(\mathbf{m}) = \eta_{m00} + 2\boldsymbol{\eta}_m^T \mathbf{m} + \mathbf{m}^T E_m \mathbf{m}, \quad (5.71)$$

donde se ha redefinido $(E_{k(l,m)})_{ab} = \eta_{k(l,m)ab}$.

En cuanto a las transformaciones de cambio de base empleadas en los capítulos 3 y 4, la nueva parametrización no permite transformar los campos Higgs, porque si

se transforma el campo $\phi_1 \rightarrow \phi'_1$ se tiene que las componentes $\varphi_1 \rightarrow \varphi'_1$ y $\varphi_2 \rightarrow \varphi'_2$, pero esto también altera a ϕ_2 que tiene dentro de sus componentes a φ_1 y a ϕ_3 que tiene a φ_2 . Debido a esto, en esta sección no fue posible determinar un estudio de cambio de base.

5.2.3. Condiciones de Estabilidad

Para que el potencial se considere estable, este debe estar acotado inferiormente, es decir la estabilidad está determinada por el comportamiento de V en el límite $K_0 \rightarrow \infty, L_0 \rightarrow \infty$ y/o $M_0 \rightarrow \infty$; por lo tanto, por los signos de $J_{k(l,m)4}$ y $J_{k(l,m)2}$ en las ecuaciones (5.59) hasta (5.64). Es necesario mencionar que usando este método se llega a unas condiciones suficientes para determinar la estabilidad; sin embargo, estas no serán necesarias. Para que el potencial sea al menos *marginalmente* estable la condición

$$\left. \begin{array}{l} J_{k4}(\mathbf{k}), J_{l4}(\mathbf{l}), J_{m4}(\mathbf{m}) > 0 \quad \text{o} \\ J_{k4}(\mathbf{k}), J_{l4}(\mathbf{l}), J_{m4}(\mathbf{m}) = 0 \quad \text{y} \quad J_{k2}(\mathbf{k}), J_{l2}(\mathbf{l}), J_{m2}(\mathbf{m}) \geq 0 \end{array} \right\} \text{ para todo } |\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| \leq 1 \quad (5.72)$$

es necesaria y suficiente, debido que si se usa (5.72) en (5.58) se tiene

$$V \geq 0 \text{ para } K_0, L_0, M_0 \rightarrow \infty. \quad (5.73)$$

Equivalentemente si se tiene (5.73), usando (5.58) se puede lograr la condición (5.72). La condición de estabilidad más principal $V \rightarrow \infty$ con $K_0, L_0, M_0 \rightarrow \infty$ para cualesquiera $\mathbf{k}, \mathbf{l}$ y $\mathbf{m}$ puede ser lograda, ya sea por

$$\left. \begin{array}{l} J_{k4}(\mathbf{k}), J_{l4}(\mathbf{l}), J_{m4}(\mathbf{m}) > 0 \quad \text{o} \\ J_{k4}(\mathbf{k}), J_{l4}(\mathbf{l}), J_{m4}(\mathbf{m}) = 0 \quad \text{y} \quad J_{k2}(\mathbf{k}), J_{l2}(\mathbf{l}), J_{m2}(\mathbf{m}) > 0 \end{array} \right\} \text{ para todo } |\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| \leq 1 \quad (5.74)$$

para una estabilidad en el sentido *débil*, o por

$$J_{k4}(\mathbf{k}), J_{l4}(\mathbf{l}), J_{m4}(\mathbf{m}) > 0 \text{ para todo } |\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| \quad (5.75)$$

en un sentido *fuerte*; es decir, solamente por los términos cuárticos de V .

Para asegurar la existencia de un valor positivo para las funciones $J_{k(l,m)4}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$, se debe considerar el valor sus puntos estacionarios en el dominio $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| < 1$,

y los puntos estacionarios sobre el contorno $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| = 1$. Esto es válido, porque el mínimo global de $J_{k(l,m)4}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ se encuentra sobre el dominio compacto $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| \leq 1$, y está situado entre aquellos puntos estacionarios. Esto lleva a límites sobre $\eta_{k(l,m)00}, \eta_{k(l,m)a}$ y $\eta_{k(l,m)ab}$, los cuales parametrizan el término cuártico $V_{K(L,M)4}$ del potencial.

Por otra parte, si alguna o varias de las funciones $J_{k(l,m)4}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$, en sus puntos mínimos es negativa, se pasa a analizar lo siguiente

$$V_4 = K_0^2 J_{k4}(\mathbf{k}) \Big|_{\text{stat}} + L_0^2 J_{l4}(\mathbf{l}) \Big|_{\text{stat}} + M_0^2 J_{m4}(\mathbf{m}) \Big|_{\text{stat}}, \quad (5.76)$$

donde el subíndice *stat*, indica que la función está evaluada en sus puntos estacionarios. La anterior ecuación es el valor mínimo que puede tomar el potencial V_4 . Si este valor nos da positivo $V_4 > 0$, entonces el potencial tiene estabilidad fuerte. Si $V_4 = 0$, se toma los puntos estacionarios de las funciones $J_{k(l,m)4}$ y los se evalúan sobre las funciones $J_{k(l,m)2}$, estas a su vez deben ser evaluadas en V_2 . Entonces, si $V_2 > 0$, el potencial es estable en el sentido débil. Si $V_2 \geq 0$, el potencial es estable marginalmente. Si por el contrario, si en los casos anteriormente mencionados da un valor < 0 , el potencial no es estable.

El cálculo de los puntos estacionarios de las funciones $J_{k4}(\mathbf{k})$, $J_{l4}(\mathbf{l})$ y $J_{m4}(\mathbf{m})$ para las regiones $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| < 1$, es completamente análogo al realizado en el capítulo 3, por esta razón, no se especifica el proceso para obtener los resultados. Por lo tanto, los puntos estacionarios (si existe alguno) deben cumplir

$$\begin{aligned} E_k \mathbf{k} &= -\boldsymbol{\eta}_k, \\ E_l \mathbf{l} &= -\boldsymbol{\eta}_l, \\ E_m \mathbf{m} &= -\boldsymbol{\eta}_m. \end{aligned} \quad (5.77)$$

Si $\text{Det } E_{k(l,m)} \neq 0$ (se asegura la existencia de la matriz $E_{k(l,m)}^{-1}$) explícitamente se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= -E_k^{-1} \boldsymbol{\eta}_k \\ \mathbf{l} &= -E_l^{-1} \boldsymbol{\eta}_l \\ \mathbf{m} &= -E_m^{-1} \boldsymbol{\eta}_m. \end{aligned} \quad (5.78)$$

El resultado anterior permite conocer el valor de $J_{k(l,m)4}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ en los puntos estacionarios cuando $\text{Det } E_{k(l,m)} \neq 0$ y $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| < 1$, es decir

$$\begin{aligned} J_{k4}(\mathbf{k})|_{\text{stat}} &= \eta_{k00} - \boldsymbol{\eta}_k^T E_k^{-1} \boldsymbol{\eta}_k \\ J_{l4}(\mathbf{l})|_{\text{stat}} &= \eta_{l00} - \boldsymbol{\eta}_l^T E_l^{-1} \boldsymbol{\eta}_l \\ J_{m4}(\mathbf{m})|_{\text{stat}} &= \eta_{m00} - \boldsymbol{\eta}_m^T E_m^{-1} \boldsymbol{\eta}_m \end{aligned} \quad (5.79)$$

Donde las soluciones regulares deben cumplir la desigualdad $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| < 1$, por lo tanto

$$1 - \boldsymbol{\eta}_k^T E_k^{-2} \boldsymbol{\eta}_k < 0, \quad 1 - \boldsymbol{\eta}_l^T E_l^{-2} \boldsymbol{\eta}_l < 0, \quad 1 - \boldsymbol{\eta}_m^T E_m^{-2} \boldsymbol{\eta}_m < 0. \quad (5.80)$$

Si $\text{Det } E_{k(l,m)} = 0$, pueden existir una o mas soluciones regulares para $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ y $\mathbf{m}$ en la ecuación (5.77), donde estas deben cumplir $|\mathbf{k}| < 1$ para que sean válidas. Para las ligaduras $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| = 1$, hay que encontrar los puntos estacionarios de la siguientes funciones

$$F_{k4}(\mathbf{k}, u_k) = J_{k4}(\mathbf{k}) + u_k(1 - \mathbf{k}^2), \quad (5.81)$$

$$F_{l4}(\mathbf{l}, u_l) = J_{l4}(\mathbf{l}) + u_l(1 - \mathbf{l}^2), \quad (5.82)$$

$$F_{m4}(\mathbf{m}, u_m) = J_{m4}(\mathbf{m}) + u_m(1 - \mathbf{m}^2), \quad (5.83)$$

donde u_k , u_l y u_m son los multiplicadores de Lagrange correspondientes a cada una de las ligaduras $|\mathbf{k}| = 1$, $|\mathbf{l}| = 1$ y $|\mathbf{m}| = 1$, los cuales deben cumplir

$$(E_k - u_k)\mathbf{k} = -\boldsymbol{\eta}_k \quad \text{con} \quad |\mathbf{k}| = 1, \quad (5.84)$$

$$(E_l - u_l)\mathbf{l} = -\boldsymbol{\eta}_l \quad \text{con} \quad |\mathbf{l}| = 1, \quad (5.85)$$

$$(E_m - u_m)\mathbf{m} = -\boldsymbol{\eta}_m \quad \text{con} \quad |\mathbf{m}| = 1. \quad (5.86)$$

Para valores de u_k , u_l y u_m donde se cumpla $\text{Det } (E_{k(l,m)} - u_{k(l,m)}) \neq 0$, los puntos estacionarios pueden expresarse como

$$\mathbf{k}(u_k) = -(E_k - u_k)^{-1} \boldsymbol{\eta}_k, \quad (5.87)$$

$$\mathbf{l}(u_l) = -(E_l - u_l)^{-1} \boldsymbol{\eta}_l, \quad (5.88)$$

$$\mathbf{m}(u_m) = -(E_m - u_m)^{-1} \boldsymbol{\eta}_m, \quad (5.89)$$

donde los multiplicadores de Lagrange se pueden determinar de las condiciones $\mathbf{k}^T \mathbf{k} = 1$, $\mathbf{l}^T \mathbf{l} = 1$ y $\mathbf{m}^T \mathbf{m} = 1$; es decir, usando (5.87), (5.88) y (5.89) en las ligaduras

$$\begin{aligned} 1 - \boldsymbol{\eta}_k^T (E_k - u_k)^{-2} \boldsymbol{\eta}_k &= 0, \\ 1 - \boldsymbol{\eta}_l^T (E_l - u_l)^{-2} \boldsymbol{\eta}_l &= 0, \\ 1 - \boldsymbol{\eta}_m^T (E_m - u_m)^{-2} \boldsymbol{\eta}_m &= 0. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Las soluciones que hay en este caso, tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned} J_{k4}(\mathbf{k})|_{\text{stat}} &= u_k + \eta_{k00} - \boldsymbol{\eta}_k^T (E_k - u_k)^{-1} \boldsymbol{\eta}_k, \\ J_{l4}(\mathbf{l})|_{\text{stat}} &= u_l + \eta_{l00} - \boldsymbol{\eta}_l^T (E_l - u_l)^{-1} \boldsymbol{\eta}_l, \\ J_{m4}(\mathbf{m})|_{\text{stat}} &= u_m + \eta_{m00} - \boldsymbol{\eta}_m^T (E_m - u_m)^{-1} \boldsymbol{\eta}_m. \end{aligned} \quad (5.91)$$

También para $|\mathbf{k}|$, $|\mathbf{l}|$, $|\mathbf{m}| = 1$, pueden existir soluciones excepcionales en (5.84), (5.85) y 5.86, dependiendo de los valores $\eta_{k(l,m)a}$ y $\eta_{k(l,m)ab}$ donde $\text{Det}(E_{k(l,m)} - u_{k(l,m)}) = 0$; es decir, donde u_k , u_l y u_m sean autovalores de E_k , E_l y E_m respectivamente.

Las soluciones regulares para $|\mathbf{k}| < 1$ y $|\mathbf{k}| = 1$ pueden ser expresadas usando solo una función f_k la cual sólo depende de u_k . Análogamente existen también las funciones f_l que depende de u_l y f_m que depende u_m , con las cuales se podrá expresar las soluciones regulares de $|\mathbf{l}|$, $|\mathbf{m}| < 1$ y $|\mathbf{l}|$, $|\mathbf{m}| = 1$. Para lograr esto se define

$$\begin{aligned} f_k(u_k) &= F_{k4}(\mathbf{k}(u_k), u_k), \\ f_l(u_l) &= F_{l4}(\mathbf{l}(u_l), u_l), \\ f_m(u_m) &= F_{m4}(\mathbf{m}(u_m), u_m), \end{aligned} \quad (5.92)$$

donde las funciones F_{k4} , F_{l4} y F_{m4} están definidas como en (5.81), (5.82) y (5.83) respectivamente, y las soluciones $\mathbf{k}(u_k)$, $\mathbf{l}(u_l)$ y $\mathbf{m}(u_m)$ como en (5.87), (5.88) y (5.89). Esto lleva a las expresiones

$$f_k(u_k) = u_k + \eta_{k00} - \boldsymbol{\eta}_k^T (E_k - u_k)^{-1} \boldsymbol{\eta}_k, \quad (5.93)$$

$$f'_k(u_k) = 1 - \boldsymbol{\eta}_k^T (E_k - u_k)^{-2} \boldsymbol{\eta}_k. \quad (5.94)$$

$$f_l(u_l) = u_l + \eta_{l00} - \boldsymbol{\eta}_l^T (E_l - u_l)^{-1} \boldsymbol{\eta}_l, \quad (5.95)$$

$$f'_l(u_l) = 1 - \boldsymbol{\eta}_l^T (E_l - u_l)^{-2} \boldsymbol{\eta}_l. \quad (5.96)$$

$$f_m(u_m) = u_m + \eta_{m00} - \boldsymbol{\eta}_m^T (E_m - u_m)^{-1} \boldsymbol{\eta}_m, \quad (5.97)$$

$$f'_m(u_m) = 1 - \boldsymbol{\eta}_m^T (E_m - u_m)^{-2} \boldsymbol{\eta}_m. \quad (5.98)$$

en las cuales representamos todos los puntos estacionarios regulares $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ para las funciones $J_{k(l,m)4}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$; puesto que, si $u_{k(l,m)} \neq 0$ en las ecuaciones (5.93) a (5.98) reproducen las funciones $J_{k(l,m)4}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ en los puntos estacionarios cuando estos toman los valores $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| = 1$ y satisfacen (5.90); en cambio, si se tiene $u_{k(l,m)} = 0$ para las ecuaciones (5.93) hasta (5.98) obtenemos las ecuaciones de los puntos estacionarios para $J_{k(l,m)4}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ cuando $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| < 1$ y estos puntos estacionarios cumplen (5.80). Por lo tanto

$$f_k(u_k) = J_{k4}(\mathbf{k})|_{\text{stat}}, \quad (5.99)$$

$$f'_k(u_k) = 1 - \mathbf{k}^2, \quad (5.100)$$

$$f_l(u_l) = J_{l4}(\mathbf{l})|_{\text{stat}}, \quad (5.101)$$

$$f'_l(u_l) = 1 - \mathbf{l}^2, \quad (5.102)$$

$$f_m(u_m) = J_{m4}(\mathbf{m})|_{\text{stat}}, \quad (5.103)$$

$$f'_m(u_m) = 1 - \mathbf{m}^2. \quad (5.104)$$

$$(5.105)$$

Concluimos que existen puntos estacionarios de $J_{k(l,m)4}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ con $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| < 1$ y $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| = 1$, cuando $f'_{k(l,m)}(0) < 0$ y $f'_{k(l,m)}(u) = 0$ respectivamente, y el valor de $J_{k(l,m)4}(\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m})$ está dado por $f_{k(l,m)}(u_k, u_l, u_m)$.

Anteriormente se mencionó que no es posible establecer cambios de base para los campos de Higgs en este modelo; sin embargo, matemáticamente es posible diagonalizar las matrices E_k , E_l o E_m de la siguiente manera.

$$E'_k = O_k^T E_k O_k, \quad (5.106)$$

$$E'_l = O_l^T E_l O_l, \quad (5.107)$$

$$E'_m = O_m^T E_m O_m, \quad (5.108)$$

donde $O_k, O_l, O_m \in O(3)$. Tomando el caso para E_k , de la ecuación (5.84), se multi-

plica en sentido izquierdo por O_k^T

$$\begin{aligned}
O_k^T (E_k - u_k) \mathbf{k} &= -O_k^T \boldsymbol{\eta}_k \\
(O_k^T E_k - O_k^T u_k) \underbrace{\mathbf{1}}_{O_k O_k^T} \mathbf{k} &= -O_k^T \boldsymbol{\eta}_k, \\
\underbrace{(O_k^T E_k O_k - u_k O_k^T O_k)}_{E'_k} O_k^T \mathbf{k} &= -O_k^T \boldsymbol{\eta}_k, \\
(E'_k - u_k) O_k^T \mathbf{k} &= -O_k^T \boldsymbol{\eta}_k.
\end{aligned}$$

Se redefine $\mathbf{k}' = O_k^T \mathbf{k}$ y $\boldsymbol{\eta}'_k = O_k^T \boldsymbol{\eta}_k$, entonces en la última ecuación se tiene lo siguiente

$$(E'_k - u_k) \mathbf{k}' = -\boldsymbol{\eta}'_k, \quad (5.109)$$

por otra parte, para las E_l y E_m de (5.85) y (5.86) se obtiene los siguientes resultados

$$(E'_l - u_l) \mathbf{l}' = -\boldsymbol{\eta}'_l, \quad (5.110)$$

$$(E'_m - u_m) \mathbf{m}' = -\boldsymbol{\eta}'_m, \quad (5.111)$$

donde $\mathbf{l}' = O_l^T \mathbf{l}$, $\boldsymbol{\eta}'_l = O_l^T \boldsymbol{\eta}_l$, $\mathbf{m}' = O_m^T \mathbf{m}$ y $\boldsymbol{\eta}'_m = O_m^T \boldsymbol{\eta}_m$. Debido a que el potencial es escalar, este cambio de base producido por $O_{k(l,m)}^T$ no debe cambiar su estructura.

Dado el caso en que se trabaje un potencial escalar en el cual la matriz $E_{k(l,m)}$ sea diagonal, o que se pueda establecer la transformación $O_{k(l,m)}$ que diagonaliza $E_{k(l,m)}$, tal que

$$E_k = \text{diag}(\mu_{k1}, \mu_{k2}, \mu_{k3}),$$

$$E_l = \text{diag}(\mu_{l1}, \mu_{l2}, \mu_{l3}),$$

$$E_m = \text{diag}(\mu_{m1}, \mu_{m2}, \mu_{m3}),$$

por lo tanto, de la ecuación (5.93) hasta (5.98) se tiene

$$f_k(u_k) = u_k + \eta_{k00} - \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_{ki}^2}{\mu_{ki} - u_k}, \quad (5.112)$$

$$f'_k(u_k) = 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_{ki}^2}{(\mu_{ki} - u_k)^2}, \quad (5.113)$$

$$f_l(u_l) = u_l + \eta_{l00} - \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_{li}^2}{\mu_{li} - u_l}, \quad (5.114)$$

$$f'_l(u_l) = 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_{li}^2}{(\mu_{li} - u_l)^2}, \quad (5.115)$$

$$f_m(u_m) = u_m + \eta_{m00} - \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_{mi}^2}{\mu_{mi} - u_m}, \quad (5.116)$$

$$f'_m(u_m) = 1 - \sum_{i=1}^3 \frac{\eta_{mi}^2}{(\mu_{mi} - u_m)^2}, \quad (5.117)$$

donde $\eta_{k(l,m)i}$ con $i = 1, 2, 3$ son las componentes del vector $\boldsymbol{\eta}_{k(l,m)}$. Note que si $E_{k(l,m)}$ tiene forma diagonal no existen soluciones excepcionales cuando $\boldsymbol{\eta}_{k(l,m)} \neq 0$, porque estas ocurren cuando $\text{Det}(E_{k(l,m)} - u_{k(l,m)})$, entonces $u_{k(l,m)}$ son los autovalores de $E_{k(l,m)}$, es decir en (5.113), (5.115) y (5.117) se tiene una indeterminación debido al cociente en el segundo término.

De nuevo, del capítulo 3, si las matrices $E_{k(l,m)}$ tienen forma diagonal, las soluciones excepcionales cuando $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| < 1$, son posibles si $f_k(u_k)$, $f_l(u_l)$ y $f_m(u_m)$ son finitas en $u_k = u_l = u_m = 0$ (ver ecuaciones (3.79), (3.80) y 3.81). Este análisis lleva a deducir que las soluciones vienen de la siguiente forma

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}, \quad (5.118)$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_{\parallel} + \mathbf{l}_{\perp}, \quad (5.119)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\parallel} + \mathbf{m}_{\perp}, \quad (5.120)$$

donde

$$\mathbf{k}_{\parallel} = -E_k^{-1} \boldsymbol{\eta}_k, \quad E_k \mathbf{k}_{\perp} = 0, \quad \mathbf{k}_{\perp}^2 < 1 - \mathbf{k}_{\parallel}^2, \quad (5.121)$$

$$\mathbf{l}_{\parallel} = -E_l^{-1} \boldsymbol{\eta}_l, \quad E_l \mathbf{l}_{\perp} = 0, \quad \mathbf{l}_{\perp}^2 < 1 - \mathbf{l}_{\parallel}^2, \quad (5.122)$$

$$\mathbf{m}_{\parallel} = -E_m^{-1} \boldsymbol{\eta}_m, \quad E_m \mathbf{m}_{\perp} = 0, \quad \mathbf{m}_{\perp}^2 < 1 - \mathbf{m}_{\parallel}^2. \quad (5.123)$$

Estos resultados permiten conocer el valor de las siguientes funciones

$$f_k(0) = J_{k4}(\mathbf{k})|_{\text{stat}}, \quad (5.124)$$

$$f'_k(0) = 1 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 > \mathbf{k}_{\perp}^2 \geq 0, \quad (5.125)$$

$$f_l(0) = J_{l4}(\mathbf{l})|_{\text{stat}}, \quad (5.126)$$

$$f'_l(0) = 1 - \mathbf{l}_{\parallel}^2 > \mathbf{l}_{\perp}^2 \geq 0, \quad (5.127)$$

$$f_m(0) = J_{m4}(\mathbf{m})|_{\text{stat}}, \quad (5.128)$$

$$f'_m(0) = 1 - \mathbf{m}_{\parallel}^2 > \mathbf{m}_{\perp}^2 \geq 0. \quad (5.129)$$

Las cuales son válidas para $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| < 1$ solamente si las funciones $f_k(u_k)$, $f_l(u_l)$ y $f_m(u_m)$ no tienen polo en $u_k = u_l = u_m = 0$. Como las tres funciones solo involucran cantidades escalares, estos resultados son válidos para cualquier base.

Análogamente para el caso $|\mathbf{k}|, |\mathbf{l}|, |\mathbf{m}| = 1$, las soluciones excepcionales ocurren cuando $u_k = \mu_{ka}$, $u_l = \mu_{la}$ y $u_m = \mu_{ma}$ con $a = 1, 2, 3$ solo pueden existir cuando $f_k(u_k)$, $f_l(u_l)$ y $f_m(u_m)$ no tienen polo en los puntos mencionados anteriormente. Estas soluciones deben cumplir lo siguiente

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{\parallel} + \mathbf{k}_{\perp}, \quad (5.130)$$

$$\mathbf{l} = \mathbf{l}_{\parallel} + \mathbf{l}_{\perp}, \quad (5.131)$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\parallel} + \mathbf{m}_{\perp}, \quad (5.132)$$

con las siguientes características

$$\mathbf{k}_{\parallel} = - (E_k - u_k)^{-1} \boldsymbol{\eta}_k|_{u_k=\mu_{ka}} \quad (E_k - u_k) \mathbf{k}_{\perp} = 0, \quad \mathbf{k}_{\perp}^2 = 1 - \mathbf{k}_{\parallel}^2, \quad (5.133)$$

$$\mathbf{l}_{\parallel} = - (E_l - u_l)^{-1} \boldsymbol{\eta}_l|_{u_l=\mu_{la}} \quad (E_l - u_l) \mathbf{l}_{\perp} = 0, \quad \mathbf{l}_{\perp}^2 = 1 - \mathbf{l}_{\parallel}^2, \quad (5.134)$$

$$\mathbf{m}_{\parallel} = - (E_m - u_m)^{-1} \boldsymbol{\eta}_m|_{u_m=\mu_{ma}} \quad (E_m - u_m) \mathbf{m}_{\perp} = 0, \quad \mathbf{m}_{\perp}^2 = 1 - \mathbf{m}_{\parallel}^2. \quad (5.135)$$

Las funciones $f_k(u_k)$, $f_l(u_l)$ y $f_m(u_m)$ en estos puntos estacionarios toman la forma

$$f_k(\mu_{ka}) = J_{k4}(\mathbf{k})|_{\text{stat}} \quad (5.136)$$

$$f'_k(\mu_{ka}) = 1 - \mathbf{k}_{\parallel}^2 = \mathbf{k}_{\perp}^2 \geq 0. \quad (5.137)$$

$$f_l(\mu_{la}) = J_{l4}(\mathbf{l})|_{\text{stat}} \quad (5.138)$$

$$f'_l(\mu_{la}) = 1 - \mathbf{l}_{\parallel}^2 = \mathbf{l}_{\perp}^2 \geq 0. \quad (5.139)$$

$$f_m(\mu_{ma}) = J_{m4}(\mathbf{m})|_{\text{stat}} \quad (5.140)$$

$$f'_m(\mu_{ma}) = 1 - \mathbf{m}_{\parallel}^2 = \mathbf{m}_{\perp}^2 \geq 0. \quad (5.141)$$

De ser posibles estas soluciones, de las ecuaciones (5.133), (5.134) y (5.135) se nota que $\mathbf{k}_\perp$, $\mathbf{l}_\perp$ y $\mathbf{m}_\perp$ deben ser una combinación lineal de los autovectores de E_k , E_l y E_m respectivamente, donde las magnitudes están dadas por

$$|\mathbf{k}_\perp| = \sqrt{1 - \mathbf{k}_\parallel^2} = \sqrt{f'_k(\mu_{ka})} \quad (5.142)$$

$$|\mathbf{l}_\perp| = \sqrt{f'_l(\mu_{la})} \quad (5.143)$$

$$|\mathbf{m}_\perp| = \sqrt{f'_m(\mu_{ma})} \quad (5.144)$$

5.2.4. Criterios de estabilidad.

El criterio de estabilidad establecido en este modelo es totalmente análogo al presentado en la sección 3.5. El razonamiento llevado a cabo en dicha sección ayudaba a determinar que el mínimo valor entre los puntos estacionarios válidos, era el responsable de llevar a la función $J_4(\mathbf{k})$ a su mínimo valor (ver ecuación (3.107)). Para el caso de los tres tripletes Higgs, se tiene el siguiente resultado

$$u_{kp} < u_{kq} \iff J_{k4}(\mathbf{p}) < J_{k4}(\mathbf{q}), \quad (5.145)$$

$$u_{lr} < u_{ls} \iff J_{l4}(\mathbf{r}) < J_{l4}(\mathbf{s}), \quad (5.146)$$

$$u_{ma} < u_{mb} \iff J_{m4}(\mathbf{a}) < J_{m4}(\mathbf{b}), \quad (5.147)$$

donde $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ son soluciones de (5.81) de la forma (5.84). Mientras que $\mathbf{r}$ y $\mathbf{s}$ son soluciones de (5.82) definidas en (5.85). Por último $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ son soluciones de (5.83), expresadas como en (5.86)

Retomando el análisis de la sección 3.5, las ecuaciones (5.145), (5.146) y (5.146) llevan a construir los siguientes conjuntos de soluciones

$$S_k = \{u_{ki}, \mu_{kj}, 0\}, \quad (5.148)$$

$$S_l = \{u_{li}, \mu_{lj}, 0\}, \quad (5.149)$$

$$S_m = \{u_{mi}, \mu_{mj}, 0\}, \quad (5.150)$$

donde u_{ki} , u_{li} y u_{mi} con $i = 1, \dots, 6$ son las soluciones regulares de (5.100), (5.102) y (5.104) respectivamente. Mientras que los $\mu_{k(l,m)j}$ con $j = 1, 2, 3$ son las soluciones

excepcionales, que provienen de los autovalores de las matrices $E_{k(l,m)}$.

De los conjuntos $S_{k(l,m)}$, se descartan las soluciones excepcionales (incluido el cero), que no sean puntos estacionarios válidos, es decir, aquellos puntos que no cumplan con las ligaduras $f_{k(l,m)}(\mu_{k(l,m)j}) \geq 0$, teniendo en cuenta si la matriz $E_{k(l,m)}$ tiene forma diagonal, se debe asegurar que para cada autovalor $\mu_{k(l,m)j}$ su respectivo $\eta_{kj} \neq 0$. Con esto se forman los conjuntos

$$I_k = \{\text{valores no descartados de } S_k\}, \quad (5.151)$$

$$I_l = \{\text{valores no descartados de } S_l\}, \quad (5.152)$$

$$I_m = \{\text{valores no descartados de } S_m\}. \quad (5.153)$$

Ahora de (5.145), (5.146) y (5.147) se toma el valor mínimo de los conjuntos de I_k , I_l y I_m para determinar la estabilidad del potencial. Debido a que los elementos de estos conjuntos son parámetros, vamos a tener diferentes casos cuando cada uno de ellos es el valor mínimo. Además como las funciones J_{k4} , J_{l4} y J_{m4} son independientes tendremos que determinar las condiciones de estabilidad para cada función por separado.

Si el valor mínimo es una solución regular; ya sea $\{u_{ki}\}$, $\{u_{li}\}$ o $\{u_{mi}\}$, se impone la condición $J_{4k}(\mathbf{p}) > 0$, $J_{4l}(\mathbf{r}) > 0$ o $J_{4m}(\mathbf{a}) > 0$, es decir. Si en (5.93), (5.95) y (5.97) se tiene $f_k(u_{ki}) > 0$, $f_l(u_{li}) > 0$ y $f_m(u_{mi}) > 0$, en consecuencia al usar las ecuaciones (5.145), (5.146) y (5.147) se fija la estabilidad para $J_{k4}(\mathbf{k})$, $J_{k4}(\mathbf{l})$ y $J_{k4}(\mathbf{m})$ respectivamente. Las condiciones provenientes de las soluciones regulares son necesarias, por lo tanto, estas van a estar presentes en los conjuntos S_k , S_l y S_m .

Si el valor mínimo es una solución excepcional $\{\mu_{k(l,m)j}\}$ válida de $I_{k(l,m)}$ se impone $f_{k(l,m)}(\mu_{k(l,m)j}) > 0$, y usando las ecuaciones (5.145), (5.146) y (5.147) se asegura la estabilidad para $J_{k(l,m)4}$. Las condiciones que provienen de las soluciones excepcionales no son necesarias debido a que la desigualdad $f_{k(l,m)}(\mu_{k(l,m)j}) \geq 0$ no siempre se satisface. Similarmente para el caso en que el valor mínimo de $I_{k(l,m)}$ sea 0, se establece la condición $f_{k(l,m)} > 0$ para asegurar la estabilidad de la función $J_{k(l,m)4}$.

Usando desde la ecuación (5.145) hasta (5.147) se establece que los valores de $I_{k(l,m)}$ los cuales debido a su forma no pueden ser el valor más pequeño, son descartados si el valor más pequeño es un punto estacionario válido. Si esto no ocurre, los puntos deben ser analizados. Por lo tanto, los conjuntos $I_{k(l,m)}$ sirven para obtener las condiciones suficientes para establecer la estabilidad fuerte del potencial escalar. Si para los tres conjuntos se obtiene que el valor mínimo tiene una solución del tipo $f_{k(l,m)}(u_{k(l,m)}) = 0$, procedemos a evaluar las funciones $J_{k2}(\mathbf{k})$, $J_{l2}(\mathbf{l})$ y $J_{m2}(\mathbf{m})$ para considerar la estabilidad del potencial.

Tomando el último caso, se define las siguientes funciones

$$g_k(u_k) = \xi_{k0} - \xi_k^T (E_k - u_k)^{-1} \eta_k, \quad (5.154)$$

$$g_l(u_l) = \xi_{l0} - \xi_l^T (E_l - u_l)^{-1} \eta_l, \quad (5.155)$$

$$g_m(u_m) = \xi_{m0} - \xi_m^T (E_m - u_m)^{-1} \eta_m. \quad (5.156)$$

Si se toman las soluciones $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ y $\mathbf{m}$ que satisfacen

$$J_{k4}(\mathbf{l})|_{\text{stat}} = f_k(u_{ki}) = 0, \quad (5.157)$$

$$J_{l4}(\mathbf{l})|_{\text{stat}} = f_l(u_{li}) = 0, \quad (5.158)$$

$$J_{m4}(\mathbf{m})|_{\text{stat}} = f_m(u_{mi}) = 0, \quad (5.159)$$

sobre las funciones $J_{k(l,m)2}$, se tiene lo siguiente

$$J_{k2}(\mathbf{k}) = g_k(u_{ki}), \quad (5.160)$$

$$J_{l2}(\mathbf{l}) = g_l(u_{li}), \quad (5.161)$$

$$J_{m2}(\mathbf{m}) = g_m(u_{mi}), \quad (5.162)$$

para el caso en que $u_{ki} \neq \mu_{ki}$, $u_{li} \neq \mu_{li}$ y $u_{mi} \neq \mu_{mi}$, es decir, cuando $u_{k(l,m)i}$ no es autovalor de $E_{k(l,m)}$. Al tomar el caso contrario cuando $u_{k(l,m)i} = \mu_{k(l,m)i}$, se debe hacer lo siguiente: primero se define los vectores $\mathbf{e}_w(u_{ka})$ con $w = 1, \dots, N$ como los $N \leq 3$ autovectores correspondientes a los autovalores u_{ka} de E_k . Ahora se define a $\mathbf{x}_j(u_{li})$ ($j = 1, \dots, Y$) como los $Y \leq 3$ autovectores correspondientes a μ_{li} y por

último a $\mathbf{z}_s(u_{mi})$ ($s = 1, \dots, H$) como los $H \leq 3$ autovectores correspondientes a μ_{mi} . Esto conduce a los resultados

$$\inf_{\mathbf{k}} J_{k2}(\mathbf{k}) = g_k(u_{ki}) - |\xi_{k\perp}(u_{ki})| \sqrt{f'_k(u_{ki})}, \quad (5.163)$$

$$\inf_{\mathbf{l}} J_{l2}(\mathbf{l}) = g_l(u_{li}) - |\xi_{l\perp}(u_{li})| \sqrt{f'_l(u_{li})}, \quad (5.164)$$

$$\inf_{\mathbf{m}} J_{m2}(\mathbf{m}) = g_m(u_{mi}) - |\xi_{m\perp}(u_{mi})| \sqrt{f'_m(u_{mi})}, \quad (5.165)$$

donde los valores ínfimos se tomaron sobre todas las soluciones excepcionales $\mathbf{k}$, $\mathbf{l}$ y $\mathbf{m}$ y los vectores $\xi_{k\perp}$, $\xi_{l\perp}$ y $\xi_{m\perp}$ se definen así

$$\xi_{k\perp}(u_{ka}) = \sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{e}_w(u_{ka}) \mathbf{e}_w^T(u_{ka})}{|\mathbf{e}_w(u_{ka})|^2} \xi_k, \quad (5.166)$$

$$\xi_{l\perp}(u_{li}) = \sum_{j=1}^Y \frac{\mathbf{x}_j(u_{li}) \mathbf{x}_j^T(u_{li})}{|\mathbf{x}_j(u_{li})|^2} \xi_l, \quad (5.167)$$

$$\xi_{m\perp}(u_{mi}) = \sum_{s=1}^H \frac{\mathbf{z}_s(u_{mi}) \mathbf{z}_s^T(u_{mi})}{|\mathbf{z}_s(u_{mi})|^2} \xi_m, \quad (5.168)$$

entonces, si los tres resultados (5.163), (5.164) y (5.165) son positivos existe estabilidad débil. Si son cero, el potencial es marginalmente estable. Si los tres resultados en conjunto son negativos, podemos afirmar que el potencial es inestable. Ahora, si por lo menos una de las ecuaciones (5.163), (5.164) y (5.165) tiene resultado negativo se debe realizar la suma

$$V_2 = K_0 \inf_{\mathbf{k}} J_{k2}(\mathbf{k}) + L_0 \inf_{\mathbf{l}} J_{l2}(\mathbf{l}) + M_0 \inf_{\mathbf{m}} J_{m2}(\mathbf{m}), \quad (5.169)$$

si se obtiene un resultado positivo en (5.169), el potencial es estable en sentido débil. Si el resultado es cero, el potencial es estable marginalmente. Obviamente si el resultado es negativo, el potencial es inestable.

Para el caso en que el potencial solo posea términos cuadráticos, la estabilidad va a estar determinada por el comportamiento de V_2 , es decir

$$V_2 = K_0 J_{k2}(\mathbf{k}) + L_0 J_{l2}(\mathbf{l}) + M_0 J_{m2}(\mathbf{m}). \quad (5.170)$$

Se debe tomar el valor mínimo de (5.170) cuando $K_0, L_0, M_0 \rightarrow \infty$, por lo tanto, se considera el valor mínimo de las funciones $J_{k(l,m)2}$, las cuales van a tener la forma

de la ecuación (3.119), debido a que el proceso de obtención de estas se realiza de manera análoga

$$\min_{\mathbf{k}} J_{k2}(\mathbf{k}) = \xi_{k0} - |\xi_k|, \quad (5.171)$$

$$\min_{\mathbf{l}} J_{l2}(\mathbf{l}) = \xi_{l0} - |\xi_l|, \quad (5.172)$$

$$\min_{\mathbf{m}} J_{m2}(\mathbf{m}) = \xi_{m0} - |\xi_m|. \quad (5.173)$$

Con esto el mínimo valor de V_2 será

$$\min_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}} V_2 = K_0(\xi_{k0} - |\xi_k|) + L_0(\xi_{l0} - |\xi_l|) + M_0(\xi_{m0} - |\xi_m|). \quad (5.174)$$

Si (5.174) tiene un resultado positivo, el potencial es estable en el sentido fuerte. Si el resultado es igual a cero, el potencial es estable marginalmente. Por último si el resultado es negativo, el potencial es inestable.

Ahora se aplica todo este razonamiento teórico a una serie de ejemplos.

• Ejemplo I

Del ejemplo I del capítulo 4 se reescribe el potencial $V_I = -\mu^2 \varphi_3^\dagger \varphi_3 + \lambda (\varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 + \varphi_3^\dagger \varphi_3)$ usando adecuadamente (5.48), (5.49) y (5.50) y expandiendo el factor

$$\begin{aligned} V_I &= -\frac{\mu^2}{2} (L_0 - L_3) + \frac{\lambda}{4} (K_0 + K_3 + K_0 - K_3 + L_0 - L_3)^2, \\ &= -\frac{\mu^2}{2} (L_0 - L_3) + \frac{\lambda}{4} (L_3^2 - 2L_0L_3 - 4K_0L_3 + L_0^2 + 4K_0L_0 + 4K_0^2). \end{aligned}$$

Ahora se usa (5.54), (5.55) y (5.56)

$$\begin{aligned} V_I &= -\frac{\mu^2}{2} (L_0 - K_0 + M_0) + \frac{\lambda}{4} (L_3^2 - 2L_0L_3 - 4K_0L_3 + L_0^2 + 4K_0L_0 + 4K_0^2), \\ &= -\frac{\mu^2}{2} (L_0 - K_0 + M_0) + \frac{\lambda}{4} [(K_0 - M_0)^2 - 2L_0(K_0 - M_0) - 4K_0(K_0 - M_0) \\ &\quad + L_0^2 + 4K_0L_0 + 4K_0^2], \\ &= -\frac{\mu^2}{2} (L_0 - K_0 + M_0) + \frac{\lambda}{4} [K_0^2 + 2K_0L_0 + L_0^2 + 2L_0M_0 + M_0^2 + 2K_0M_0]. \end{aligned}$$

Al reorganizar la anterior ecuación se tiene

$$V_I = -\frac{\mu^2}{2} (L_0 - K_0 + M_0) + \frac{\lambda}{4} [3K_0^2 - K_0^2 + 2K_0L_0 - L_0^2 + 3L_0^2 - L_0^2 + 2L_0M_0$$

$$\begin{aligned}
& -M_0^2 + 3M_0^2 - K_0^2 + 2K_0M_0 - M_0^2], \\
& = -\frac{\mu^2}{2}(L_0 - K_0 + M_0) + \frac{\lambda}{4}[3K_0^2 - (K_0 - L_0)^2 + 3L_0^2 - (L_0 - M_0)^2 + 3M_0^2 \\
& \quad - (K_0 - M_0)^2], \\
V_I & = -\frac{\mu^2}{2}(L_0 - K_0 + M_0) + \frac{\lambda}{4}[3K_0^2 - M_3^2 + 3L_0^2 - K_3^2 + 3M_0^2 - L_3^2]. \quad (5.175)
\end{aligned}$$

Se puede observar que en (5.175) el potencial se puede escribir de la forma (5.58), es decir

$$V_I = \frac{\mu^2}{2}K_0 + \frac{\lambda}{4}(3K_0^2 - K_3^2) - \frac{\mu^2}{2}L_0 + \frac{\lambda}{4}(3L_0^2 - L_3^2) - \frac{\mu^2}{2}M_0 + \frac{\lambda}{4}(3M_0^2 - M_3^2), \quad (5.176)$$

se puede identificar

$$V_{IK2} = \frac{\mu^2}{2}K_0, \quad (5.177)$$

$$V_{IK4} = \frac{\lambda}{4}(3K_0^2 - K_3^2), \quad (5.178)$$

$$V_{IL2} = -\frac{\mu^2}{2}L_0, \quad (5.179)$$

$$V_{IL4} = \frac{\lambda}{4}(3L_0^2 - L_3^2), \quad (5.180)$$

$$V_{IM2} = -\frac{\mu^2}{2}M_0, \quad (5.181)$$

$$V_{IM4} = \frac{\lambda}{4}(3M_0^2 - M_3^2). \quad (5.182)$$

Se construye a partir de las ecuaciones (5.177) hasta (5.182) las funciones

$$J_{k2}(\mathbf{k}) = \frac{\mu^2}{2}, \quad (5.183)$$

$$J_{k4}(\mathbf{k}) = \frac{3}{4}\lambda - \frac{\lambda}{4}k_3^2, \quad (5.184)$$

$$J_{l2}(\mathbf{l}) = -\frac{\mu^2}{2}, \quad (5.185)$$

$$J_{l4}(\mathbf{l}) = \frac{3}{4}\lambda - \frac{\lambda}{4}l_3^2, \quad (5.186)$$

$$J_{m2}(\mathbf{m}) = -\frac{\mu^2}{2}, \quad (5.187)$$

$$J_{m4}(\mathbf{m}) = \frac{3}{4}\lambda - \frac{\lambda}{4}m_3^2, \quad (5.188)$$

La estabilidad fuerte está determinada por las condiciones generadas por las funciones $J_{k4}(\mathbf{k})$, $J_{l4}(\mathbf{l})$ y $J_{m4}(\mathbf{m})$. En este caso se tiene que las tres funciones tienen la misma estructura, entonces las condiciones de estabilidad que surgen de estas serán exactamente las mismas, por lo tanto, solo bastará con determinar una. Tomando la función $J_{k4}(\mathbf{k})$ se determina que

$$\eta_{k00} = \frac{3}{4}\lambda, \quad \boldsymbol{\eta}_k = 0, \quad E_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4} \end{pmatrix}, \quad (5.189)$$

Con estos parámetros se construye $f_k(u_k)$ y $f'_k(u_k)$

$$f_k(u_k) = u_k + \frac{3}{4}\lambda, \quad (5.190)$$

$$f'_k(u_k) = 1. \quad (5.191)$$

En este ejemplo, se puede ver que no existen soluciones regulares; además, la ecuación (5.191) implica $f'_k(u_k) > 0$, esto quiere decir que todas las soluciones excepcionales (incluyendo a $u_k = 0$) son válidas. De (5.189) se determina que solo hay una solución excepcional diferente de cero $\mu_{k1} = -\lambda/4$; entonces, el conjunto I_k será

$$I_k = \left\{ 0, -\frac{\lambda}{4} \right\} \quad (5.192)$$

En el capítulo 4 se encontró que el valor de $\lambda > 0$, por lo tanto, el mínimo global será $\mu_{k1} = -\lambda/4$, entonces por el criterio de estabilidad

$$f_k(\mu_{k1}) = -\frac{\lambda}{4} + \frac{3}{4}\lambda = \frac{1}{2}\lambda > 0 \quad (5.193)$$

Como la condición (5.193) se satisface para J_{l4} y J_{m4} se establece que el potencial V_I es estable en el sentido fuerte

• Ejemplo II

Tomando el ejemplo II del capítulo 4, se reescribe el potencial $V_{II} = m_1^2 \varphi_1^\dagger \varphi_1 + m_2^2 \varphi_2^\dagger \varphi_2 - \mu^2 \varphi_3^\dagger \varphi_3 + \lambda (\varphi_3^\dagger \varphi_3)^2$ usando (5.48), (5.49) y (5.50)

$$V_{II} = \frac{m_1^2}{2}(K_0 + K_3) + \frac{m_2^2}{2}(K_0 - K_3) - \frac{\mu^2}{2}(L_0 - L_3) + \frac{\lambda}{4}(L_0 - L_3)^2,$$

$$= \frac{m_1^2}{2}(K_0 + K_3) + \frac{m_2^2}{2}(K_0 - K_3) - \frac{\mu^2}{2}(L_0 - L_3) + \frac{\lambda}{4}(L_0^2 - 2L_0L_3 + L_3^2).$$

Se aplican las ecuaciones (5.54), (5.55) y (5.56)

$$\begin{aligned} V_{II} &= \frac{m_1^2}{2}(K_0 + L_0 - M_0) + \frac{m_2^2}{2}(K_0 - L_0 + M_0) - \frac{\mu^2}{2}(L_0 - K_0 + M_0) + \frac{\lambda}{4}[L_0^2 \\ &\quad - 2L_0(K_0 - M_0) + (K_0 - M_0)^2], \\ &= \frac{m_1^2}{2}(K_0 + L_0 - M_0) + \frac{m_2^2}{2}(K_0 - L_0 + M_0) - \frac{\mu^2}{2}(L_0 - K_0 + M_0) + \frac{\lambda}{4}[L_0^2 + \\ &\quad M_0^2 + K_0^2 - 2L_0K_0 + 2L_0M_0 - 2K_0M_0]. \end{aligned}$$

Al completar cuadrados se tiene

$$\begin{aligned} V_{II} &= \frac{m_1^2}{2}(K_0 + L_0 - M_0) + \frac{m_2^2}{2}(K_0 - L_0 + M_0) - \frac{\mu^2}{2}(L_0 - K_0 + M_0) + \frac{\lambda}{4}[L_0^2 \\ &\quad + M_0^2 - K_0^2 + (L_0 - K_0)^2 - (L_0 - M_0)^2 + (K_0 - M_0)^2], \\ V_{II} &= \frac{m_1^2}{2}(K_0 + L_0 - M_0) + \frac{m_2^2}{2}(K_0 - L_0 + M_0) - \frac{\mu^2}{2}(L_0 - K_0 + M_0) + \frac{\lambda}{4}(L_0^2 \\ &\quad + M_0^2 - K_0^2 + M_3^2 - K_3^2 + L_3^2). \end{aligned} \quad (5.194)$$

Es fácil ver que (5.194) puede ser escrita en la forma (5.58), lo cual llevará a las siguientes ecuaciones

$$V_{IIK2} = (m_1^2 + m_2^2 + \mu^2) \frac{K_0}{2}, \quad (5.195)$$

$$V_{IIK4} = -\frac{\lambda}{4}(K_0^2 + K_3^2), \quad (5.196)$$

$$V_{IIL2} = (m_1^2 - m_2^2 - \mu^2) \frac{L_0}{2}, \quad (5.197)$$

$$V_{IIL4} = \frac{\lambda}{4}(L_0^2 + L_3^2), \quad (5.198)$$

$$V_{IIM2} = (-m_1^2 + m_2^2 - \mu^2) \frac{M_0}{2}, \quad (5.199)$$

$$V_{IIM4} = \frac{\lambda}{4}(M_0^2 + M_3^2). \quad (5.200)$$

De las anteriores ecuaciones se construye

$$J_{k2}(\mathbf{k}) = \frac{m_1^2 + m_2^2 + \mu^2}{2}, \quad (5.201)$$

$$J_{k4}(\mathbf{k}) = -\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4}k_3^2, \quad (5.202)$$

$$J_{l2}(\mathbf{l}) = \frac{m_1^2 - m_2^2 - \mu^2}{2}, \quad (5.203)$$

$$J_{l4}(\mathbf{l}) = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} l_3^2, \quad (5.204)$$

$$J_{m2}(\mathbf{m}) = \frac{-m_1^2 + m_2^2 + \mu^2}{2}, \quad (5.205)$$

$$J_{m4}(\mathbf{m}) = \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} m_3^2. \quad (5.206)$$

Ahora se determinan las condiciones para que exista estabilidad. Entonces, de la ecuación (5.202) se obtiene

$$\eta_{k00} = -\frac{\lambda}{4}, \quad \boldsymbol{\eta}_k = 0, \quad E_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\lambda}{4} \end{pmatrix}. \quad (5.207)$$

Con esto se determina las funciones

$$f_k(u_k) = u_k - \frac{\lambda}{4}, \quad (5.208)$$

$$f'_k(u_k) = 1. \quad (5.209)$$

Debido a (5.209), todas las soluciones excepcionales son válidas (incluida $u_k = 0$). Además (5.208) no presenta soluciones regulares. Es evidente de (5.207). que el único autovalor diferente de cero de E_k es $\mu_{k1} = -\lambda/4$. El conjunto I_k estará conformado por los siguientes valores

$$I_k = \left\{ 0, -\frac{\lambda}{4} \right\}. \quad (5.210)$$

En el capítulo (4) se determinó que $\lambda > 0$ para que exista estabilidad. Como los dos métodos deben ser compatibles, entonces el mínimo global de I_k será el punto $\mu_{k1} = -\lambda/4$, por lo tanto

$$f_k(\mu_{k1}) = -\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4} = -\frac{\lambda}{2} < 0. \quad (5.211)$$

Debido a que $J_{l4}(\mathbf{l})$ y $J_{m4}(\mathbf{m})$ tienen formas idénticas, ambos potenciales deben dar las mismas condiciones de estabilidad. De (5.204) se identifica

$$\eta_{l00} = \frac{\lambda}{4}, \quad \boldsymbol{\eta}_l = 0, \quad E_l = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda}{4} \end{pmatrix}. \quad (5.212)$$

Se construye las funciones (5.95) y (5.96)

$$f_l(1) = u_l + \frac{\lambda}{4}, \quad (5.213)$$

$$f'_l(1) = 1. \quad (5.214)$$

De nuevo para este caso no existen soluciones regulares, además todas las soluciones excepcionales son válidas, incluida la solución $u_l = 0$. De (5.212) se tiene que la única solución excepcional diferente de cero es $\mu_{li} = \lambda/4$. El conjunto I_l está formado por los siguientes elementos

$$I_l = \left\{ 0, \frac{\lambda}{4} \right\}. \quad (5.215)$$

El mínimo global ocurre en $\mu_{l1} = 0$, entonces

$$f_l(0) = \frac{\lambda}{4} > 0, \quad (5.216)$$

La anterior condición también se satisface para $J_{m4}(\mathbf{m})$. Es decir, el valor mínimo que puede tomar la función $J_{m4}(\mathbf{m})$, será

$$f_m(0) = \frac{\lambda}{4} > 0, \quad (5.217)$$

donde 0 es el valor mínimo entre los elementos del conjunto I_m definido por

$$I_m = \left\{ 0, \frac{\lambda}{4} \right\}. \quad (5.218)$$

En principio, tenemos que $J_{k4}(\mathbf{k})$ (5.211) tiene comportamiento inestable, pero esto no significa inestabilidad en el potencial V_{II} . Para determinar la estabilidad de este potencial se usa (5.76), entonces

$$V_4 = -\frac{\lambda}{2}K_0^2 + \frac{\lambda}{4}L_0^2 + \frac{\lambda}{4}M_0^2. \quad (5.219)$$

La ecuación (5.211) da el resultado de la función $J_{k4}(\mathbf{k})$ (5.202) evaluada en sus puntos estacionarios, por lo tanto, al igualar estas dos ecuaciones

$$\begin{aligned} -\frac{\lambda}{2} &= -\frac{\lambda}{4} - \frac{\lambda}{4}k_3^2 \\ -\frac{\lambda}{4} &= -\frac{\lambda}{4}k_3^2 \implies k_3 = \pm 1. \end{aligned} \quad (5.220)$$

De la definición del vector k (5.65) y de las las ecuaciones (5.42) y (5.45) se establece lo siguiente

$$\begin{aligned}\frac{K_3}{K_0} &= \pm 1, \\ K_3 &= \pm K_0, \\ \varphi_1^\dagger \varphi_1 - \varphi_2^\dagger \varphi_2 &= \pm (\varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2), \\ \varphi_1 &= 0, \quad \text{o} \quad \varphi_2 = 0\end{aligned}\tag{5.221}$$

Para la función $J_{l_4}(1)$ (5.204), su valor mínimo está dado por (5.216), entonces, de nuevo al igualar estas dos ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{4} &= \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} l_3^2, \\ l_3 &= 0.\end{aligned}\tag{5.222}$$

Se usa (5.46) sobre (5.222)

$$\begin{aligned}\varphi_1^\dagger \varphi_1 - \varphi_3^\dagger \varphi_3 &= 0, \\ \varphi_1^\dagger \varphi_1 &= \varphi_3^\dagger \varphi_3.\end{aligned}\tag{5.223}$$

De manera análoga para la función $J_{m_4}(\mathbf{m})$ (5.206), su valor mínimo está dado por (5.217). De esto obtenemos

$$m_3 = 0,\tag{5.224}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2^\dagger \varphi_2 - \varphi_3^\dagger \varphi_3 &= 0, \\ \varphi_2^\dagger \varphi_2 &= \varphi_3^\dagger \varphi_3.\end{aligned}\tag{5.225}$$

De la condición (5.221) al escoger $\varphi_1 = 0$, debido a (5.223) inmediatamente se tiene $\varphi_3 = 0$, y por ende de (5.225) se tiene que $\varphi_2 = 0$, es decir, tenemos el caso trivial cuando $\underline{K}, \underline{L}, \underline{M} = 0$. Lo mismo ocurre si se escoge de (5.221) la solución $\varphi_2 = 0$, porque con (5.225) se tiene $\varphi_3 = 0$ y por consiguiente en (5.223) $\varphi_1 = 0$. Esta solución implicaría que el potencial escalar tiene una solución de tipo trivial $V = 0$ en su punto mínimo. Sin embargo, esta solución es compatible con el resultado del capítulo 4, en donde el caso $V = 0$ significaba que todos los campos $\varphi_i = 0$, tal cual como está sucediendo en este

momento. No obstante se puede tomar el caso en que la función V_4 toma el valor más próximo al mínimo. Teniendo en cuenta que las funciones $J_{l4}(\mathbf{l})$ y $J_{m4}(\mathbf{m})$ tienen la misma forma, el valor más próximo al mínimo puede ocurrir de dos maneras: la primera es en la cual las funciones $J_{k4}(\mathbf{k})$ y $J_{l4}(\mathbf{l})$ están calculadas en el punto estacionario mínimo y la función restante $J_{m4}(\mathbf{m})$ esté evaluada en cualquier $\mathbf{m}$; la segunda forma posible es que las funciones $J_{k4}(\mathbf{k})$ y $J_{m4}(\mathbf{m})$ están evaluadas en su punto estacionario mínimo y $J_{l4}(\mathbf{l})$ pueda tomar cualquier valor válido para $\mathbf{l}$. Tomando el primer caso

$$V_4 = K_0^2 J_{k4}(\mathbf{k}) \Big|_{\text{stat}} + L_0^2 J_{l4}(\mathbf{l}) \Big|_{\text{stat}} + M_0^2 J_{m4}(\mathbf{m}), \quad (5.226)$$

$$= -\frac{\lambda}{2} K_0^2 + \frac{\lambda}{4} L_0^2 + \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4} m_3^2 \right) M_0^2. \quad (5.227)$$

En esta ocasión se cumplen las condiciones (5.221) y (5.223), es decir

$$\varphi_1 = 0, \quad \text{o} \quad \varphi_2 = 0, \quad \text{y} \quad \varphi_1^\dagger \varphi_1 = \varphi_3^\dagger \varphi_3. \quad (5.228)$$

Con estas condiciones los escalares K_0 , L_0 y M_0 de (5.42), quedan de la siguiente forma si $\varphi_1 = 0$

$$\begin{aligned} K_0 &= \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 = \varphi_2^\dagger \varphi_2, \\ L_0 &= \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_3^\dagger \varphi_3 = 0, \\ M_0 &= \varphi_2^\dagger \varphi_2 + \varphi_3^\dagger \varphi_3 = \varphi_2^\dagger \varphi_2, \end{aligned} \quad (5.229)$$

en cambio, si se toma $\varphi_2 = 0$

$$\begin{aligned} K_0 &= \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 = \varphi_1^\dagger \varphi_1, \\ L_0 &= \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_3^\dagger \varphi_3 = 2\varphi_1^\dagger \varphi_1, \\ M_0 &= \varphi_2^\dagger \varphi_2 + \varphi_3^\dagger \varphi_3 = \varphi_1^\dagger \varphi_1. \end{aligned} \quad (5.230)$$

Como los escalares K_0 , L_0 , $M_0 \rightarrow \infty$. Por tanto (5.229), da la condición más próxima al mínimo global, cuando J_{k4} y J_{l4} están evaluadas en su punto estacionario mínimo y J_{m4} pueda tomar cualquier valor permitido para $\mathbf{m}$. En (5.227) se tiene

$$V_4 = -\frac{\lambda}{2} \underbrace{K_0^2}_{M_0^2} + \frac{\lambda}{4} M_0^2 + \frac{\lambda}{4} M_3^2 = -\frac{\lambda}{4} M_0^2 + \frac{\lambda}{4} M_3^2. \quad (5.231)$$

De la definición de M_3 (5.47) se tiene que $M_3 = \varphi_2^\dagger \varphi_2 = M_0$, reemplazando esto en (5.231)

$$V_4 = -\frac{\lambda}{4}M_0^2 + \frac{\lambda}{4}M_3^2 = -\frac{\lambda}{4}M_0^2 + \frac{\lambda}{4}M_0^2 = 0. \quad (5.232)$$

Se obtiene que $V_4 = 0$, entonces ahora se analiza el comportamiento de V_2 en los puntos estacionarios que consideramos para (5.226)

$$V_2 = \underbrace{K_0}_{=M_0} J_{k2} + \underbrace{L_0}_{=0} J_{l2} + M_0 J_{m2} = \left(\frac{m_1^2 + m_2^2 + \mu^2}{2} \right) M_0 + \left(\frac{-m_1^2 + m_2^2 - \mu^2}{2} \right) M_0, \\ V_2 = m_2^2 M_0. \quad (5.233)$$

Si $m_2^2 > 0$, el potencial $V_2 \geq 0$, por lo tanto el potencial es estable en sentido débil.

Tomando el segundo caso tenemos

$$V_4 = K_0^2 J_{k4}(\mathbf{k}) \Big|_{\text{stat}} + L_0^2 J_{l4}(\mathbf{l}) + M_0^2 J_{m4}(\mathbf{m}) \Big|_{\text{stat}}, \quad (5.234)$$

$$V_4 = -\frac{\lambda}{2}K_0^2 + \left(\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{4}l_3^2 \right) L_0^2 + \frac{\lambda}{4}M_0^2. \quad (5.235)$$

Ahora se cumplen las condiciones (5.221) y (5.223)

$$\varphi_1 = 0, \quad \text{o} \quad \varphi_2 = 0, \quad \text{y} \quad \varphi_2^\dagger \varphi_2 = \varphi_3^\dagger \varphi_3. \quad (5.236)$$

Si $\varphi_1 = 0$, para los escalares K_0 , L_0 y M_0 quedan de la forma

$$K_0 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 = \varphi_2^\dagger \varphi_2, \\ L_0 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_3^\dagger \varphi_3 = \varphi_2^\dagger \varphi_2, \\ M_0 = \varphi_2^\dagger \varphi_2 + \varphi_3^\dagger \varphi_3 = 2\varphi_2^\dagger \varphi_2. \quad (5.237)$$

Al tomar $\varphi_2 = 0$, se obtiene

$$K_0 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_2^\dagger \varphi_2 = \varphi_1^\dagger \varphi_1, \\ L_0 = \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \varphi_3^\dagger \varphi_3 = \varphi_1^\dagger \varphi_1, \\ M_0 = \varphi_2^\dagger \varphi_2 + \varphi_3^\dagger \varphi_3 = 0. \quad (5.238)$$

Como los escalares $K_0, L_0, M_0 \rightarrow \infty$. La condición que lleva a V_4 a su valor más próximo al mínimo será (5.238). Por consiguiente V_4 quedará

$$V_4 = -\frac{\lambda}{2} \underbrace{K_0^2}_{=L_0^2} + \frac{\lambda}{4} L_0^2 + \frac{\lambda}{4} L_3^2 = -\frac{\lambda}{4} L_0^2 + \frac{\lambda}{4} L_3^2. \quad (5.239)$$

De la ecuación (5.46) se tiene que $L_0 = L_3$, al aplicar esto en (5.239)

$$V_4 = -\frac{\lambda}{4} L_0^2 + \frac{\lambda}{4} L_0^2 = 0. \quad (5.240)$$

Como $V_4 = 0$, se debe tomar el valor V_2 en los puntos estacionarios considerados en (5.234)

$$V_2 = \underbrace{K_0}_{=L_0} J_{k2} + L_0 J_{l2} + \underbrace{M_0}_{=0} J_{m2} = \left(\frac{m_1^2 + m_2^2 + \mu^2}{2} \right) L_0 + \left(\frac{m_1^2 - m_2^2 - \mu^2}{2} \right) M_0, \\ V_2 = m_1^2 L_0. \quad (5.241)$$

Si $m_1^2 > 0$, el potencial obtiene un valor $V_2 \geq 0$, de nuevo, da como resultado un potencial estable en el sentido débil.

5.2.5. Estabilidad del Potencial Escalar sin Término Cúbico en los Modelos 3-3-1 sin Carga Eléctrica Exótica.

Este modelo comparte el mismo sector fermiónico y escalar descrito en la sección 3.6. A pesar de su simplicidad, tiene la desventaja de ser incapaz de producir un espectro de masa fermiónica a tercer nivel, para ello en [7] se añade un tercer triplete, formando el siguiente conjunto

$$\varphi_1 \left(1, 3^*, -\frac{1}{3} \right) = \begin{pmatrix} \varphi_1^- \\ \varphi_1'^0 \\ \varphi_1^0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_2(1, 3^*, -1/3) = \begin{pmatrix} \varphi_2^- \\ \varphi_2^0 \\ \varphi_2'^0 \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 \left(1, 3^*, \frac{2}{3} \right) = \begin{pmatrix} \varphi_3^0 \\ \varphi_3^+ \\ \varphi_3'^+ \end{pmatrix}. \quad (5.242)$$

El conjunto de tres campos escalares Higgs es capaz de producir masas fermiónicas de tercer nivel.

El potencial escalar más general el cual es invariante $3-3-1$ para el conjunto de los tres tripletes escalares φ_1 , φ_2 y φ_3 es bastante extenso y complicado. Debido a esto en [7] se asume la simetría discreta $\varphi_1 \rightarrow -\varphi_1$, lo cual lleva al potencial reducido

$$\begin{aligned} V(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = & \mu_1^2 \varphi_1^\dagger \varphi_1 + \mu_2^2 \varphi_2^\dagger \varphi_2 + \mu_3^2 \varphi_3^\dagger \varphi_3 + \lambda_1 (\varphi_1^\dagger \varphi_1)^2 + \lambda_2 (\varphi_2^\dagger \varphi_2)^2 \\ & + \lambda_3 (\varphi_3^\dagger \varphi_3)^2 + \lambda_4 (\varphi_1^\dagger \varphi_1) (\varphi_2^\dagger \varphi_2) + \lambda_5 (\varphi_1^\dagger \varphi_1) (\varphi_3^\dagger \varphi_3) \\ & + \lambda_6 (\varphi_2^\dagger \varphi_2) (\varphi_3^\dagger \varphi_3) + \lambda_7 (\varphi_1^\dagger \varphi_2) (\varphi_2^\dagger \varphi_1) + \lambda_8 (\varphi_1^\dagger \varphi_3) (\varphi_3^\dagger \varphi_1) \\ & + \lambda_9 (\varphi_2^\dagger \varphi_3) (\varphi_3^\dagger \varphi_2) + \frac{\lambda_{10}}{2} (\varphi_1^\dagger \varphi_2 + \varphi_2^\dagger \varphi_1)^2, \end{aligned} \quad (5.243)$$

el cual contiene solo 13 parámetros libres. Con la ayuda de las ecuaciones (5.48), (5.49) y (5.50), se reescribe el potencial escalar en términos de las variables orbitales

$$\begin{aligned} V = & \frac{\mu_1^2}{2} (K_0 + K_3) + \frac{\mu_2^2}{2} (K_0 - K_3) + \frac{\mu_3^2}{2} (L_0 - L_3) + \frac{\lambda_1}{4} (K_0 + K_3)^2 + \frac{\lambda_2}{4} (K_0 - K_3)^2 \\ & + \frac{\lambda_3}{4} (L_0 - L_3)^2 + \frac{\lambda_4}{4} (K_0 + K_3) (K_0 - K_3) + \frac{\lambda_5}{4} (L_0 + L_3) (L_0 - L_3) \\ & + \frac{\lambda_6}{4} (M_0 + M_3) (M_0 - M_3) + \frac{\lambda_7}{4} (K_1 + iK_2) (K_1 - iK_2) \\ & + \frac{\lambda_8}{4} (L_1 + iL_2) (L_1 - iL_2) + \frac{\lambda_9}{4} (M_1 + iM_2) (M_1 - iM_2) + \frac{\lambda_{10}}{2} K_1^2. \end{aligned} \quad (5.244)$$

El anterior potencial tiene una estructura $V = V_2 + V_4$; donde, con ayuda de (5.54), (5.55) y (5.56) la parte correspondiente a los términos cuadráticos del potencial será

$$V_2 = \frac{\mu_1^2}{2} (K_0 + L_0 - M_0) + \frac{\mu_2^2}{2} (K_0 - L_0 + M_0) + \frac{\mu_3^2}{2} (L_0 - K_0 + M_0). \quad (5.245)$$

De esta ecuación se identifica las funciones $J_{k(l,m)2}$ como prosigue

$$J_{k2} = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2}{2}, \quad (5.246)$$

$$J_{l2} = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_3^2}{2}, \quad (5.247)$$

$$J_{m2} = \frac{-\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}{2}. \quad (5.248)$$

Los parámetros que caracterizan estas funciones son

$$\xi_{k0} = \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2 - \mu_3^2}{2}, \quad \xi_{l0} = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_3^2}{2}, \quad \xi_{m0} = \frac{-\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2}{2}. \quad (5.249)$$

El resto de parámetros relacionados con V_2 son cero. Ahora, para el potencial V_4 , que tiene la forma

$$\begin{aligned}
 V_4 = & \frac{\lambda_1}{4}(K_0 + K_3)^2 + \frac{\lambda_2}{4}(K_0 - K_3)^2 + \frac{\lambda_3}{4}(L_0 - L_3)^2 \\
 & + \frac{\lambda_4}{4}(K_0 + K_3)(K_0 - K_3) + \frac{\lambda_5}{4}(L_0 + L_3)(L_0 - L_3) \\
 & + \frac{\lambda_6}{4}(M_0 + M_3)(M_0 - M_3) + \frac{\lambda_7}{4}(K_1 + iK_2)(K_1 - iK_2) \\
 & + \frac{\lambda_8}{4}(L_1 + iL_2)(L_1 - iL_2) + \frac{\lambda_9}{4}(M_1 + iM_2)(M_1 - iM_2) + \frac{\lambda_{10}}{2}K_1^2. \quad (5.250)
 \end{aligned}$$

Se realiza las operaciones entre paréntesis

$$\begin{aligned}
 V_4 = & \frac{\lambda_1}{4}(K_0^2 + 2K_0K_3 + K_3^2) + \frac{\lambda_2}{4}(K_0^2 - 2K_0K_3 + K_3^2) + \frac{\lambda_3}{4}(L_0^2 - 2L_0L_3 + L_3^2) \\
 & + \frac{\lambda_4}{4}(K_0^2 - K_3^2) + \frac{\lambda_5}{4}(L_0^2 - L_3^2) + \frac{\lambda_6}{4}(M_0^2 - M_3^2) + \frac{\lambda_7}{4}(K_1^2 + K_2^2) \\
 & + \frac{\lambda_8}{4}(L_1^2 + L_2^2) + \frac{\lambda_9}{4}(M_1^2 + M_2^2) + \frac{\lambda_{10}}{2}K_1^2. \quad (5.251)
 \end{aligned}$$

Se usa adecuadamente las ecuaciones (5.54), (5.55) y (5.56), sobre V_4

$$\begin{aligned}
 V_4 = & \frac{\lambda_1}{4}(K_0^2 + 2K_0(L_0 - M_0) + K_3^2) + \frac{\lambda_2}{4}(K_0^2 - 2K_0(L_0 - M_0) + K_3^2) \\
 & + \frac{\lambda_3}{4}(L_0^2 - 2L_0(K_0 - M_0) + L_3^2) + \frac{\lambda_4}{4}(K_0^2 - K_3^2) + \frac{\lambda_5}{4}(L_0^2 - L_3^2) \\
 & + \frac{\lambda_6}{4}(M_0^2 - M_3^2) + \frac{\lambda_7}{4}(K_1^2 + K_2^2) + \frac{\lambda_8}{4}(L_1^2 + L_2^2) \\
 & + \frac{\lambda_9}{4}(M_1^2 + M_2^2) + \frac{\lambda_{10}}{2}K_1^2. \quad (5.252)
 \end{aligned}$$

El siguiente paso es sumar y restar términos con el objetivo de completar cuadrados

$$\begin{aligned}
 V_4 = & \frac{\lambda_1}{4}(K_0^2 - K_0^2 + 2K_0L_0 - L_0^2 + L_0^2 + K_0^2 - 2K_0M_0 + M_0^2 - M_0^2 + K_3^2) \\
 & + \frac{\lambda_2}{4}(K_0^2 - 2K_0L_0 + L_0^2 - L_0^2 + K_0^2 - K_0^2 + 2K_0M_0 - M_0^2 + M_0^2 + K_3^2) \\
 & + \frac{\lambda_3}{4}(L_0^2 - 2L_0K_0 + K_0^2 - K_0^2 + L_0^2 - L_0^2 + 2L_0M_0 - M_0^2 + M_0^2 + L_3^2) \\
 & + \frac{\lambda_4}{4}(K_0^2 - K_3^2) + \frac{\lambda_5}{4}(L_0^2 - L_3^2) + \frac{\lambda_6}{4}(M_0^2 - M_3^2) + \frac{\lambda_7}{4}(K_1^2 + K_2^2) \\
 & + \frac{\lambda_8}{4}(L_1^2 + L_2^2) + \frac{\lambda_9}{4}(M_1^2 + M_2^2) + \frac{\lambda_{10}}{2}K_1^2. \quad (5.253)
 \end{aligned}$$

$$V_4 = \frac{\lambda_1}{4}(K_0^2 - (L_0 - K_0)^2 + L_0^2 + (K_0 - M_0)^2 - M_0^2 + K_3^2) + \frac{\lambda_2}{4}((K_0 - L_0)^2$$

$$\begin{aligned}
& -L_0^2 + K_0^2 - (K_0 - M_0)^2 + M_0^2 + K_3^2) + \frac{\lambda_3}{4} ((L_0 - K_0)^2 - K_0^2 + L_0^2 \\
& - (L_0 - M_0)^2 + M_0^2 + L_3^2) + \frac{\lambda_4}{4} (K_0^2 - K_3^2) + \frac{\lambda_5}{4} (L_0^2 - L_3^2) \\
& + \frac{\lambda_6}{4} (M_0^2 - M_3^2) + \frac{\lambda_7}{4} (K_1^2 + K_2^2) + \frac{\lambda_8}{4} (L_1^2 + L_2^2) + \frac{\lambda_9}{4} (M_1^2 + M_2^2) + \frac{\lambda_{10}}{2} K_1^2.
\end{aligned} \tag{5.254}$$

El potencial queda en la forma

$$\begin{aligned}
V_4 = & \frac{\lambda_1}{4} (K_0^2 - M_3^2 + L_0^2 + L_3^2 - M_0^2 + K_3^2) + \frac{\lambda_2}{4} (M_3^2 - L_0^2 + K_0^2 - L_3^2 + M_0^2 \\
& + K_3^2) + \frac{\lambda_3}{4} (M_3^2 - K_0^2 + L_0^2 - K_3^2 + M_0^2 + L_3^2) + \frac{\lambda_4}{4} (K_0^2 - K_3^2) \\
& + \frac{\lambda_5}{4} (L_0^2 - L_3^2) + \frac{\lambda_6}{4} (M_0^2 - M_3^2) + \frac{\lambda_7}{4} (K_1^2 + K_2^2) + \frac{\lambda_8}{4} (L_1^2 + L_2^2) \\
& + \frac{\lambda_9}{4} (M_1^2 + M_2^2) + \frac{\lambda_{10}}{2} K_1^2.
\end{aligned} \tag{5.255}$$

Ahora, el potencial queda en la forma $V_4 = V_{K4} + V_{L4} + V_{M4}$, donde

$$\begin{aligned}
V_{K4} = & \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} - \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_4}{4} \right) K_0^2 + \left(\frac{\lambda_7}{4} + \frac{\lambda_{10}}{2} \right) K_1^2 + \frac{\lambda_7}{4} K_2^2 \\
& + \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} - \frac{\lambda_3}{4} - \frac{\lambda_4}{4} \right) K_3^2,
\end{aligned} \tag{5.256}$$

$$\begin{aligned}
V_{L4} = & \left(\frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_5}{4} \right) L_0^2 + \frac{\lambda_8}{4} L_1^2 + \frac{\lambda_8}{4} L_2^2 \\
& + \left(\frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_3}{4} - \frac{\lambda_5}{4} \right) L_3^2,
\end{aligned} \tag{5.257}$$

$$\begin{aligned}
V_{M4} = & \left(-\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_6}{4} \right) M_0^2 + \frac{\lambda_9}{4} M_1^2 + \frac{\lambda_9}{4} M_2^2 \\
& + \left(-\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_3}{4} - \frac{\lambda_6}{4} \right) M_3^2.
\end{aligned} \tag{5.258}$$

Con esto se construye las funciones $J_{k(l,m)4}$ como prosigue

$$\begin{aligned}
J_{k4}(\mathbf{k}) = & \frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} - \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_4}{4} + \left(\frac{\lambda_7}{4} + \frac{\lambda_{10}}{2} \right) k_1^2 + \frac{\lambda_7}{4} k_2^2 \\
& + \left(\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} - \frac{\lambda_3}{4} - \frac{\lambda_4}{4} \right) k_3^2,
\end{aligned} \tag{5.259}$$

$$\begin{aligned}
J_{l4}(\mathbf{l}) = & \frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_5}{4} + \frac{\lambda_8}{4} l_1^2 + \frac{\lambda_8}{4} l_2^2 \\
& + \left(\frac{\lambda_1}{4} - \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_3}{4} - \frac{\lambda_5}{4} \right) l_3^2,
\end{aligned} \tag{5.260}$$

$$J_{m4}(\mathbf{m}) = -\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_3}{4} + \frac{\lambda_6}{4} + \frac{\lambda_9}{4}m_1^2 + \frac{\lambda_9}{4}m_2^2 + \left(-\frac{\lambda_1}{4} + \frac{\lambda_2}{4} + \frac{\lambda_3}{4} - \frac{\lambda_6}{4}\right)m_3^2. \quad (5.261)$$

De estas ecuaciones se identifica los parámetros correspondientes a cada una de las funciones, que en este caso son

$$\eta_{k00} = (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4)/4, \quad \boldsymbol{\eta}_k = 0, \quad (5.262)$$

$$E_k = \begin{pmatrix} (\lambda_7 + 2\lambda_{10})/4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_7/4 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4)/4 \end{pmatrix}, \quad (5.263)$$

$$\eta_{l00} = (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5)/4, \quad \boldsymbol{\eta}_l = 0, \quad (5.264)$$

$$E_l = \begin{pmatrix} \lambda_8/4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_8/4 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5)/4 \end{pmatrix}, \quad (5.265)$$

$$\eta_{m00} = (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_6)/4, \quad \boldsymbol{\eta}_m = 0, \quad (5.266)$$

$$E_m = \begin{pmatrix} \lambda_9/4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_9/4 & 0 \\ 0 & 0 & (-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_6)/4 \end{pmatrix}. \quad (5.267)$$

La estabilidad del potencial se puede determinar analizando el comportamiento de las funciones $J_{k(l,m)4}$ en sus puntos estacionarios. Primero, al tomar el caso para $\underline{K}$ de las ecuaciones (5.93) y (5.94) se tiene

$$f_k(u) = u_k + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4}{4}, \quad (5.268)$$

$$f'_k(u) = 1. \quad (5.269)$$

Debido a la estructura de $f'_k(u)$, no hay soluciones regulares para $J_{k4}(\mathbf{k})$. Además $f'_k(u) > 1$, por lo tanto todas las soluciones excepcionales son válidas. Dichas soluciones conforman el conjunto I_k , en el cual puede encontrarse el mínimo global de la función $J_{k4}(\mathbf{k})$, es decir

$$I_k = \left\{ u_{k1} = 0, \mu_{k1} = \frac{1}{4}(\lambda_7 + 2\lambda_{10}), \mu_{k2} = \frac{\lambda_7}{4}, \mu_{k3} = \frac{1}{4}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4) \right\}. \quad (5.270)$$

Ahora se calcula las condiciones provenientes de cada uno de los elementos de I_k , cuando toman el valor mínimo entre ellos

- Si $u_{k1} = 0 < \mu_{k1}, \mu_{k2}, \mu_{k3}$ se impone la condición $f(0) > 0$, es decir

$$\begin{aligned} f_k(0) &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4}{4} > 0, \\ \implies \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &> 0. \end{aligned} \quad (5.271)$$

- Si $\mu_{k1} < u_{k1}, \mu_{k2}, \mu_{k3}$ ocurre lo siguiente

$$\begin{aligned} f_k(\mu_{k1}) &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_7 + 2\lambda_{10}}{4} > 0, \\ \implies \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_7 + 2\lambda_{10} &> 0. \end{aligned} \quad (5.272)$$

- Si $\mu_{k2} < u_{k1}, \mu_{k1}, \mu_{k3}$ la condición sobre los parámetros quedará

$$\begin{aligned} f_k(\mu_{k2}) &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_7}{4} > 0, \\ \implies \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_7 &> 0. \end{aligned} \quad (5.273)$$

- Si $\mu_{k3} < u_{k1}, \mu_{k1}, \mu_{k2}$ se obtiene

$$\begin{aligned} f_k(\mu_{k3}) &= \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3}{2} > 0, \\ \implies \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &> 0. \end{aligned} \quad (5.274)$$

Para $\underline{L}$, de (5.95) y (5.96) se tiene las siguientes funciones

$$f_l(u_l) = u_l + \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5}{4}, \quad (5.275)$$

$$f'_l(u_l) = 1. \quad (5.276)$$

En esta ocasión, vuelve a ocurrir que no hay soluciones regulares. Además todas las soluciones excepcionales son válidas debido a que $f_l(u_l) > 0$. Por lo tanto, el conjunto I_l será el siguiente

$$I_l = \left\{ u_{l1} = 0, \mu_{l1} = \frac{\lambda_8}{4}, \mu_{l2} = \frac{1}{4}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_5) \right\}. \quad (5.277)$$

El mínimo global de $J_{l4}(1)$ ocurre en el mínimo valor de I_l , entonces:

- Si u_{l1} es el mínimo de I_l , se impone $f_l(0) > 0$, es decir

$$\begin{aligned} f_l(0) &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5}{4} > 0, \\ \implies \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 &> 0. \end{aligned} \quad (5.278)$$

- Si μ_{l1} es el mínimo de I_l , se obtiene la siguiente condición

$$\begin{aligned} f_l(\mu_{l1}) &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_8}{4}, \\ \implies \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_8 &> 0. \end{aligned} \quad (5.279)$$

- Si μ_{l2} es el mínimo de I_l , las condiciones sobre los parámetros serán las siguientes

$$\begin{aligned} f_l(\mu_{l2}) &= \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3}{2} > 0, \\ \implies \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &> 0. \end{aligned} \quad (5.280)$$

Para $\underline{M}$, de los parámetros obtenidos en (5.266) y (5.267) se pueden escribir las funciones $f_m(u_m)$ (5.97) y $f'_m(u_m)$ (5.98)

$$f_m(u_m) = u_m + \frac{-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_6}{4}, \quad (5.281)$$

$$f'_m(u_m) = 1. \quad (5.282)$$

De nuevo, no existen soluciones regulares para este potencial. Además todas las soluciones excepcionales son válidas, por lo tanto el conjunto I_m será

$$I_m = \left\{ u_{m1} = 0, \mu_{m1} = \frac{\lambda_9}{4}, \mu_{m2} = \frac{1}{4}(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_6) \right\}. \quad (5.283)$$

El valor que minimiza el potencial $J_{m4}(\mathbf{m})$, es el mínimo de I_m , entonces

- Si $u_{m1} = 0$ es el mínimo de I_m , se impone la condición

$$\begin{aligned} f_m(0) &= \frac{-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_6}{4} > 0, \\ \implies -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_6 &> 0 \end{aligned} \quad (5.284)$$

- Si $\mu_{m1} < u_{m1}, \mu_{m2}$, entonces

$$\begin{aligned} f_m(\mu_{m1}) &= \frac{-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_6 + \lambda_9}{4} > 0, \\ \implies -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_6 + \lambda_9 &> 0. \end{aligned} \quad (5.285)$$

- Si $\mu_{m2} < u_{m1}, \mu_{m1}$, las condiciones resultantes serán

$$\begin{aligned} f_m(\mu_{m2}) &= \frac{-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{2} > 0, \\ \implies -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &> 0. \end{aligned} \quad (5.286)$$

En resumen, las condiciones sobre los parámetros son las siguientes.

Para $\underline{K}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &> 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 &> 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_7 &> 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_7 + 2\lambda_{10} &> 0. \end{aligned} \quad (5.287)$$

Para $\underline{L}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &> 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 &> 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_5 + \lambda_8 &> 0. \end{aligned} \quad (5.288)$$

Para $\underline{M}$:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &> 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_6 &> 0, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_6 + \lambda_9 &> 0. \end{aligned} \quad (5.289)$$

De esta forma, cuando todas las ligaduras sobre los parámetros del potencial se satisfacen (ecuaciones (5.287), (5.288) y (5.289), el potencial es estable en sentido fuerte. Las ligaduras iniciales pueden ser combinadas: sumando (5,274)+(5,280), (5,274)+(5,286) y (5,280) + (5,286), se obtiene respectivamente

$$\lambda_1 > 0, \quad \lambda_2 > 0, \quad \lambda_3 > 0. \quad (5.290)$$

De las sumas $(5,274) + (5,278)$, $(5,271) + (5,280)$, $(5,274) + (5,284)$, $(5,271) + (5,286)$, $(5,280) + (5,284)$, $(5,278) + (5,286)$, dan como resultado

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &> -\lambda_5, & 2\lambda_1 &> -\lambda_4 & 2\lambda_2 &> -\lambda_6, \\ 2\lambda_2 &> -\lambda_4 & 2\lambda_3 &> -\lambda_6 & 2\lambda_3 &> -\lambda_5. \end{aligned} \tag{5.291}$$

Las siguientes operaciones $(5,271) + (5,278)$, $(5,273) + (5,280)$, $(5,274) + (5,279)$, $(5,271) + (5,284)$, $(5,273) + (5,286)$, $(5,274) + (5,285)$, $(5,271) + (5,284)$, $(5,279) + (5,286)$, $(5,280) + (5,285)$ se tiene que

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &> -(\lambda_4 + \lambda_5), & 2\lambda_1 &> -(\lambda_4 + \lambda_7), \\ 2\lambda_1 &> -(\lambda_5 + \lambda_8), & 2\lambda_2 &> -(\lambda_4 + \lambda_6), \\ 2\lambda_2 &> -(\lambda_4 + \lambda_7), & 2\lambda_2 &> -(\lambda_6 + \lambda_9), \\ 2\lambda_3 &> -(\lambda_5 + \lambda_6), & 2\lambda_3 &> -(\lambda_5 + \lambda_8), \\ 2\lambda_3 &> -(\lambda_6 + \lambda_9). \end{aligned} \tag{5.292}$$

Otras dos condiciones interesantes son $(5,272) + (5,280)$, $(5,272) + (5,286)$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 &> -(\lambda_4 + \lambda_7 + 2\lambda_{10}) \\ 2\lambda_2 &> -(\lambda_4 + \lambda_7 + 2\lambda_{10}) \end{aligned} \tag{5.293}$$

También otras inecuaciones que no han sido obtenidas, pueden ser encontradas.

Capítulo 6

El Modelo General de N Dobletes Higgs

A pesar del hecho de que el Modelo Estándar tiene solo un doblete Higgs, no existe una restricción teórica para imponer un número muy grande de dobletes Higgs. Aquí se quiere hacer un enfoque en el potencial general de n dobletes Higgs, donde se asume que todos los campos tienen la misma hipercarga. El objetivo es precisar las condiciones exactas de estabilidad para dicho potencial, por medio de la formulación bilineal desarrollada en el capítulo 4. Cabe resaltar que esta parte del trabajo está desarrollada como un complemento teórico adicional de los capítulos 3 y 4.

6.1. Bilineales

En este capítulo se considera los potenciales Higgs de tercer nivel con n dobletes que satisfacen la simetría gauge electrodébil $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. El caso de n dobletes es una generalización de los casos con dos dobletes y tres dobletes presentados en los capítulos 3 y 4.

Se asume que tenemos $n \geq 2$ dobletes, los cuales llevan la misma hipercarga $y = +1/2$ y los campos Higgs están dados por

$$\varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i^+(x) \\ \varphi_i^0(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (6.1)$$

El potencial invariante $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ más general, es una combinación lineal de los siguientes productos invariantes gauge

$$\varphi_i(x)^\dagger \varphi_j(x), \quad (\varphi_i(x)^\dagger \varphi_j(x)) (\varphi_k(x)^\dagger \varphi_l(x)), \quad i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}. \quad (6.2)$$

Se define las bilineales invariantes gauge, que resultan convenientes para determinar las propiedades del potencial Higgs, tales como su estabilidad y sus puntos

estacionarios [4]. Para tal fin, se construye las matrices $n \times 2$ de los campos Higgs

$$\phi = \begin{pmatrix} \varphi_1^+ & \varphi_1^0 \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_n^+ & \varphi_n^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1^T \\ \vdots \\ \varphi_n^T \end{pmatrix}. \quad (6.3)$$

Todos los productos invariantes gauge posibles, están organizados en la matriz hermítica $n \times n$

$$\underline{K} = \phi\phi^\dagger = \begin{pmatrix} \varphi_1^\dagger\varphi_1 & \varphi_2^\dagger\varphi_1 & \dots & \varphi_n^\dagger\varphi_1 \\ \varphi_1^\dagger\varphi_2 & \varphi_2^\dagger\varphi_2 & \dots & \varphi_n^\dagger\varphi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^\dagger\varphi_n & \varphi_2^\dagger\varphi_n & \dots & \varphi_n^\dagger\varphi_n \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Una base para las matrices $n \times n$, está dada por las n^2 matrices

$$\lambda_\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n^2 - 1 \quad (6.5)$$

donde

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{n}} \mathbb{1}_n, \quad (6.6)$$

es la matriz unidad convenientemente escalada y λ_a , $a = 1, \dots, n^2 - 1$, son las matrices de Gell-Mann generalizadas. Una construcción explícita y un esquema de numeración de las matrices de Gell-Mann generalizadas está dado en el apéndice D. En este capítulo se asume que los índices griegos ($\alpha, \beta, \dots$) van desde 0 a $n^2 - 1$ y los índices latinos ($a, b, \dots$) van desde 1 hasta $n^2 - 1$. Por definición se cumple

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta) &= 2\delta_{\alpha\beta}, \\ \text{Tr}(\lambda_\alpha) &= \sqrt{2n}\delta_{\alpha 0}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

La descomposición de $\underline{K}$ (6.4), será

$$\underline{K} = \frac{1}{2} K_\alpha \lambda_\alpha, \quad (6.8)$$

donde los coeficientes reales K_α están dados por

$$K_\alpha = K_\alpha^* = \text{Tr}(\underline{K} \lambda_\alpha). \quad (6.9)$$

La demostración de esto es totalmente análogo a los casos de 3 dobletes y 2 dobletes en los capítulos 3 y 4. El caso particular de K_0 , toma el valor

$$K_0 = \text{Tr}(\underline{K}\lambda_0) = \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\varphi_1^\dagger \varphi_1 + \cdots + \varphi_n^\dagger \varphi_n \right) \quad (6.10)$$

Con la matriz $\underline{K}$ definida en términos de los dobletes en (6.4), además de la descomposición (6.8) con los coeficientes (6.9), se puede inmediatamente expresar los productos escalares en términos de las bilineales.

Ahora, sea $\mathbf{a}$ un vector de n componentes, en donde, al realizar la operación $\mathbf{a}^\dagger \underline{K} \mathbf{a}$, se tiene que

$$\mathbf{a}^\dagger \underline{K} \mathbf{a} = \mathbf{a}^\dagger \phi \phi^\dagger \mathbf{a} = (\phi^\dagger \mathbf{a}) \phi^\dagger \mathbf{a} = |\phi^\dagger \mathbf{a}|^2 \geq 0,$$

lo cual comprueba la condición para que la matriz $\underline{K}$ sea semidefinida positiva. Los n^2 coeficientes K_α quedan totalmente predeterminados por los campos Higgs.

La matriz ϕ tiene trivialmente rango igual o menor a 2, lo cual también es válido para la matriz $\underline{K}$ (la demostración se realiza en el apéndice B, ecuaciones (B.11) y (B.12)). Como se muestra en detalle en el teorema 3 del apéndice B, cualquier matriz hermítica $n \times n$ con rango igual o menor que 2 determina los campos de bosones Higgs φ_i , con $i = 1, \dots, n$ únicamente por una transformación gauge.

Ahora se describen las propiedades de la matriz $\underline{K}$, con respecto a su rango. En principio, debido a que esta matriz es semidefinida positiva, con una transformación unitaria U , se puede llevarla a una representación diagonal de la forma

$$U \underline{K} U^\dagger = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \kappa_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \kappa_n \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

con todos los $\kappa_i \geq 0$. Se define las sumas simétricas¹ para cualquier matriz hermítica

¹Estas matrices son simétricas a permutaciones en sus variables, ejemplo: $s(x, y, z) = s(y, z, x) = s(x, z, y) = s(z, x, y) = s(y, x, z) = s(z, y, x)$

$\underline{K}$ con autovalores $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ como

$$\begin{aligned}
 s_0 &= 1, \\
 s_1 &= \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n, \\
 s_2 &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \kappa_{i_1} \kappa_{i_2}, \\
 s_k &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \kappa_{i_1} \kappa_{i_2} \dots \kappa_{i_k}, \\
 s_n &= \kappa_1 \cdot \kappa_2 \cdot \dots \cdot \kappa_n = \text{Det}(\underline{K}).
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

Si la matriz $\underline{K}$ tiene rango 0, entonces, claramente todos los κ_i son cero, lo que corresponde a

$$s_1 = s_2 = \dots = s_n = 0. \tag{6.13}$$

Viceversa, al partir de las ecuaciones (6.13) para una matriz hermítica $\underline{K}$, la última condición $s_n = 0$ requiere que un autovalor sea cero, por ejemplo, sin pérdida de generalidad se toma $\kappa_n = 0$. La penúltima condición, de hecho, requiere que otro autovalor también sea cero, por ejemplo κ_{n-1} , y así sucesivamente. Por lo tanto, se obtiene $\underline{K} = 0$.

Se toma el caso cuando $\underline{K}$ tiene rango 1, entonces, se puede asumir que

$$\begin{aligned}
 \kappa_1 &> 0 \\
 \kappa_2 &= \dots = \kappa_n = 0.
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

Se puede deducir inmediatamente de (6.12) que

$$\begin{aligned}
 s_1 &> 0, \\
 s_2 &= \dots = s_n = 0.
 \end{aligned} \tag{6.15}$$

Por otra parte, si la condición (6.15) es válida para una matriz hermítica $\underline{K}$, al emplear (6.12), la última condición $s_n = 0$ requiere que por lo menos uno de los κ_i sea cero, por ejemplo $\kappa_n = 0$. Entonces, la penúltima condición requiere que otro autovalor sea cero, por ejemplo $\kappa_{n-1} = 0$. Es decir, se tiene que $\kappa_n = \dots = \kappa_2 = 0$. Finalmente, la primera condición impone que $\kappa_1 > 0$, así, la matriz $\underline{K}$ tiene rango 1 y es semidefinida positiva.

Suponer ahora que la matriz hermítica $\underline{K}$ tiene rango 2, entonces, sin pérdida de generalidad, se asume que

$$\begin{aligned}\kappa_1 &> 0, \kappa_2 > 0, \\ \kappa_3 &= \cdots = \kappa_n = 0.\end{aligned}\tag{6.16}$$

De (6.12) se deduce inmediatamente que

$$\begin{aligned}s_1 &> 0, s_2 > 0, \\ s_3 &= \cdots = s_n = 0.\end{aligned}\tag{6.17}$$

Al tomar el caso contrario, si se cumplen las condiciones (6.17) para una matriz hermítica $\underline{K}$, empleando (6.12), las condiciones $s_3 = \cdots = s_n = 0$ requieren que $\kappa_3 = \cdots = \kappa_n = 0$, sin pérdida de generalidad. Entonces las primeras dos condiciones de (6.17) serán $\kappa_1 + \kappa_2 > 0$ y $\kappa_1 \cdot \kappa_2 > 0$, es decir, se tiene que $\kappa_1 > 0$ y $\kappa_2 > 0$. Así, $\underline{K}$ tiene rango 2 y es semidefinida positiva.

Por lo tanto, con estos resultados se ha demostrado el siguiente teorema

Teorema 1 *Sea $\underline{K} = K_\alpha \lambda_\alpha / 2$ una matriz hermítica. Esta tiene rango k con $k = 0, 1, 2$, y es semidefinida positiva si y solo si*

$$\begin{aligned}s_0 &> 0, \dots, s_k > 0, \\ s_{k+1} &= \cdots = s_n = 0.\end{aligned}\tag{6.18}$$

Se debe expresar las sumas simétricas s_k definidas en (6.12) en términos de las trazas de $\underline{K}$, debido a que estas son independientes de la base que se tome. Para ello, se considera que $1 \leq k \leq n$. De (6.12), se observa que la suma simétrica $s_k(\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ es una función homogénea de grado k en $\kappa_1, \dots, \kappa_n$. Por lo tanto, se tiene

$$s_k(\alpha \boldsymbol{\kappa}) = \alpha^k s_k(\boldsymbol{\kappa}),\tag{6.19}$$

donde $\boldsymbol{\kappa}$ es el vector de componentes κ_j con $j = 1, \dots, n$. Al derivar la anterior ecuación con respecto a α , se obtiene

$$\kappa_1 \frac{\partial s_k(\alpha \boldsymbol{\kappa})}{\partial \alpha \kappa_1} + \cdots + \kappa_n \frac{\partial s_k(\alpha \boldsymbol{\kappa})}{\partial \alpha \kappa_n} = k \alpha^{k-1} s_k(\boldsymbol{\kappa}).\tag{6.20}$$

Si $\alpha = 1$, se tiene

$$\sum_{l=1}^n \kappa_l \frac{\partial}{\partial \kappa_l} s_k(\kappa_1, \dots, \kappa_n) = k s_k(\kappa_1, \dots, \kappa_n). \quad (6.21)$$

Por otra parte, al derivar la expresión s_k por κ_l , todos los términos que no contengan κ_l se van, es decir, quedará una suma simétrica de todos los términos que contienen κ_l , pero sin él, por lo tanto, la derivada de la suma simétrica es

$$\frac{\partial s_k}{\partial \kappa_l} = \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n \\ i_r \neq l}} \kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_{k-1}}, \quad (6.22)$$

la cual es otra suma simétrica de un orden menor. Entonces, esta ecuación se puede expresar como s_{k-1} menos la suma simétrica de orden $k-1$ de todos los términos que contienen κ_l

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq n \\ i_r \neq l}} \kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_{k-1}} = s_{k-1} - \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-2} \leq n \\ i_r \neq l}} \kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_{k-2}} \right) \kappa_l. \quad (6.23)$$

Análogamente, para la sumatoria del segundo término en el lado derecho de la ecuación (6.23), se tiene que es una suma simétrica de orden $k-2$, en la cual se ha restado la suma simétrica de orden $k-2$ que contiene todos los términos con κ_l , es decir

$$\frac{\partial s_k}{\partial \kappa_l} = s_{k-1} - \kappa_l s_{k-2} + \left(\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{k-3} \leq n \\ i_r \neq l}} \kappa_{i_1} \dots \kappa_{i_{k-3}} \right) \kappa_l^2. \quad (6.24)$$

De nuevo, al aplicar los mismos argumentos sobre la sumatoria presente en (6.24) y en las sumatorias resultantes que este análisis conlleva, se obtiene lo siguiente

$$\frac{\partial s_k}{\partial \kappa_l} = s_{k-1} - \kappa_l s_{k-2} + \kappa_l^2 s_{k-3} - \dots + (-1)^{k-1} s_0 \kappa_l^{k-1} \quad (6.25)$$

Se multiplica en (6.25) por κ_l y se realiza una suma sobre todos los l para obtener

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^n \kappa_l \frac{\partial s_k}{\partial \kappa_l} &= \sum_{l=1}^n \kappa_l (s_{k-1} - \kappa_l s_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} s_0 \kappa_l^{k-1}) \\ &= s_{k-1} \sum_{l=1}^n \kappa_l - s_{k-2} \sum_{l=1}^n \kappa_l^2 + \dots + (-1)^{k-1} s_0 \sum_{l=1}^n \kappa_l^k, \end{aligned} \quad (6.26)$$

donde es fácil identificar que $\sum_{i=1}^n \kappa_l^j = \text{Tr}(\underline{K}^j)$. Usando (6.21) sobre (6.26) se tiene que

$$k s_k = s_{k-1} \text{Tr}(\underline{K}) - s_{k-2} \text{Tr}(\underline{K}^2) + \cdots + (-1)^{k-1} s_0 \text{Tr}(\underline{K}^k). \quad (6.27)$$

Se reescribe (6.27) en una ecuación condensada y se despeja s_k , tal que

$$s_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} s_{k-i} \text{Tr}(\underline{K}^i), \quad k = 1, \dots, n. \quad (6.28)$$

Explícitamente, para $k = 1, 2, 3$ se tiene que

$$\begin{aligned} s_1 &= \text{Tr}(\underline{K}) = \text{Tr}\left(\frac{k_\alpha \lambda_\alpha}{2}\right) = \frac{K_\alpha}{2} \text{Tr}(\lambda_\alpha) = \frac{\sqrt{2n}}{2} K_\alpha \delta_{\alpha 0} = \sqrt{\frac{n}{2}} K_0, \\ s_2 &= \frac{1}{2} (s_1 \text{Tr}(\underline{K}) - \text{Tr}(\underline{K}^2)) = \frac{1}{2} (\text{Tr}^2(\underline{K}) - \text{Tr}(\underline{K}^2)), \\ s_3 &= \frac{1}{3} [s_2 \text{Tr}(\underline{K}) - s_1 \text{Tr}(\underline{K}^2) + \text{Tr}(\underline{K}^3)] \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \text{Tr}^3(\underline{K}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\underline{K}^2) \text{Tr}(\underline{K}) - \text{Tr}(\underline{K}^2) \text{Tr}(\underline{K}) + \text{Tr}(\underline{K}^3) \right] \\ &= \frac{1}{6} [\text{Tr}^3(\underline{K}) - 3 \text{Tr}(\underline{K}^2) \text{Tr}(\underline{K}) + \text{Tr}(\underline{K}^3)]. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Con el teorema 1 y (6.28), se ha expresado las propiedades de $\underline{K}$ con respecto a su rango en términos de sus autovalores, o también, potencias de la traza de la matriz $\underline{K}$.

Con respecto al teorema 1, y las ecuaciones (6.28) y (6.29) se puede demostrar que las órbitas gauge de los n campos de dobletes Higgs están en correspondencia uno a uno con los vectores $(K_0, \dots, K_{n^2-1})^T$ en el espacio $\mathbb{R}^{n^2}$ de dimensión n^2 , que satisface

$$\begin{aligned} s_1 &\geq 0, \quad s_2 \geq 0 \\ s_3 &= \cdots = s_n = 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

Aquí los s_k , con $k = 1, \dots, n$ están contruidos de la matriz $\underline{K} = K_\alpha \lambda_\alpha / 2$ acorde con (6.28) y (6.29). Es decir, para cada órbita gauge de los campos de bosones Higgs corresponde exactamente un vector (K_α) que satisface (6.30) y vice versa. Las dos primeras relaciones de (6.30) son análogas a las condiciones de cono de luz del

modelo general de dos dobletes Higgs (mirar ecuación (3.55)). Las relaciones restantes en el caso $n > 2$ son específicas del modelo de n dobletes Higgs.

En este modelo se usará la parametrización de las matrices $\underline{K}$ de rango 1 y rango 2, especificada en el apéndice C. Por tal razón, en este capítulo no se desarrolla el proceso matemático para lograr dichas parametrizaciones, debido a que este es totalmente análogo al proceso que se realiza en el apéndice anteriormente citado.

Para el rango 1, la matriz $\underline{K}$ solo tiene un autovalor diferente de cero, donde $\kappa_1 > 0$, $\kappa_2 = \dots = \kappa_n = 0$. Sea $\mathbf{w}$ el autovector normalizado de $\underline{K}$ con respecto a κ_1 . Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned}\underline{K} &= \sqrt{\frac{n}{2}} K_0 \mathbf{w} \mathbf{w}^\dagger, \\ \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} &= 1, \\ K_0 &> 0, \quad \kappa_1 = \frac{n}{2} K_0.\end{aligned}\tag{6.31}$$

Con (6.31), se obtiene el siguiente resultado para las bilineales

$$K_\alpha = \text{Tr}(\underline{K} \lambda_\alpha) = \sqrt{\frac{n}{2}} K_0 \mathbf{w}^\dagger \lambda_\alpha \mathbf{w}.\tag{6.32}$$

Claramente, para cualquier vector normalizado $\mathbf{w}$ de $\mathbb{C}^n$ se tiene con (6.31) una matriz semidefinida positiva de rango 1.

Para rango 2, la matriz $\underline{K}$ tiene 2 autovalores diferentes de cero. Sin pérdida de generalidad se puede tomar

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \sqrt{\frac{n}{2}} K_0 \sin^2(\chi), \\ \kappa_2 &= \sqrt{\frac{n}{2}} K_0 \cos^2(\chi), \\ K_0 &> 0, \quad 0 < \chi \leq \frac{\pi}{4}.\end{aligned}\tag{6.33}$$

Sean $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ los autovectores normalizados de $\underline{K}$ con respecto a κ_1 y κ_2 respectivamente. Entonces, se tiene que

$$\underline{K} = \sqrt{\frac{n}{2}} K_0 \left(\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^\dagger + \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^\dagger \right),$$

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{w}_j &= \delta_{ij}, \\ K_0 &> 0, \quad 0 < \chi \leq \frac{\pi}{4}.\end{aligned}\tag{6.34}$$

Aquí, para las bilineales se tiene lo siguiente

$$K_\alpha = \text{Tr}(\underline{K}\lambda_\alpha) = \sqrt{\frac{n}{2}}K_0 \left(\sin^2(\chi)\mathbf{w}_1^\dagger \lambda_\alpha \mathbf{w}_1 + \cos^2(\chi)\mathbf{w}_2^\dagger \lambda_\alpha \mathbf{w}_2 \right).\tag{6.35}$$

Claramente, el caso contrario también se cumple. Para dos vectores ortonormales $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, las condiciones (6.34) dan una matriz semidefinida positiva $\underline{K}$ de rango 2.

Las ecuaciones (6.31) y (6.34), son la parametrización general de todas las posibles matrices semidefinidas positivas de rango 1 y 2 respectivamente. La parametrización de las correspondientes bilineales está dada en (6.32) y (6.35), en donde, con base en estas se discutirá el potencial general de n dobletes Higgs, sus transformaciones de base y su estabilidad.

6.2. El Potencial General y Transformaciones de Base

El potencial de n dobletes Higgs, es una combinación lineal de los productos invariantes gauge en la forma (6.2) correspondientes a todos los términos cuadráticos y cuárticos posibles. En los cuales, mediante el uso de las bilineales K_0 , y K_a con $a = 1, \dots, n^2 - 1$ queda de la forma

$$V = \xi_0 K_0 + \xi_a K_a + \eta_{00} K_0^2 + 2\eta_a K_a + K_a \eta_{ab} K_b.\tag{6.36}$$

La deducción de la anterior fórmula es similar a el proceso llevado a cabo para obtener (3.24). Para este potencial, los parámetros son reales y el número total de estos será el siguiente: por ξ_0 y η_{00} se tiene dos. De ξ_a y η_a se tiene $n^2 - 1$ parámetros por cada uno. Por último, de η_{ab} al tener un tamaño de $(n^2 - 1) \times (n^2 - 1)$ y ser simétrica real, se tiene que el número de parámetros que aporta será $\sum_{i=1}^{n^2-1} i = (n^2 - 1)n^2/2$. El número total de parámetros es

$$2 + 2(n^2 - 1) + \frac{(n^2 - 1)n^2}{2} = \frac{n^2(n^2 + 3)}{2}.$$

Los términos de orden superior en (6.36) no deben aparecer, para que el potencial sea renormalizable. Además, cualquier término constante del potencial se puede suprimir, tal que (6.36) es el potencial más general de n dobletes Higgs. Ahora se introduce la notación

$$\mathbf{K} = (K_1, \dots, K_{n^2-1})^T, \quad \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_{n^2-1})^T, \quad \boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_{n^2-1})^T$$

$$E = (\eta_{ab}), \quad \left(\hat{E}_{\alpha\beta} \right) \begin{pmatrix} \eta_{00} & \eta_b \\ \eta_a & \eta_{ab} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_{00} & \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\eta} & E \end{pmatrix}. \quad (6.37)$$

Con esto, se puede escribir el potencial (6.36) como

$$V = \xi_\alpha K_\alpha + K_\alpha \hat{E}_{\alpha\beta} K_\beta. \quad (6.38)$$

Ahora se considera un cambio de base de los campos Higgs $\varphi_i(x) \rightarrow \varphi'_i(x)$, con

$$\begin{pmatrix} \varphi'_1(x)^T \\ \varphi'_2(x)^T \\ \vdots \\ \varphi'_n(x)^T \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \varphi_1(x)^T \\ \varphi_2(x)^T \\ \vdots \\ \varphi_n(x)^T \end{pmatrix}, \quad (6.39)$$

donde $U \in U(n)$, es una transformación unitaria $n \times n$; es decir, $U^\dagger U = \mathbb{1}_n$. De (6.39), se puede ver que $\phi'(x) = U\phi(x)$, y para la matriz $\underline{K}$ (6.4) y las bilineales se tiene que

$$\underline{K}'(x) = U \underline{K}(x) U^\dagger, \quad (6.40)$$

$$K'_0(x) = K_0(x), \quad K'_a(x) = R_{ab}(U) K_b(x). \quad (6.41)$$

El proceso para obtener estas dos ecuaciones, es totalmente análogo al realizado en la sección 3.2, por tal motivo, no se especifica la deducción de los resultados. Aquí $R_{ab}(U)$ está definida por

$$U^\dagger \lambda_a U = R_{ab}(U) \lambda_b, \quad (6.42)$$

además, esta matriz tiene un tamaño de $(n^2 - 1) \times (n^2 - 1)$, con las siguientes propiedades

$$R^*(U) = R(U), \quad R^T(U) R(U) = \mathbb{1}_{n^2-1}, \quad \text{Det}(R(U)) = 1. \quad (6.43)$$

es decir, $R(U) \in SO(n^2 - 1)$. Ahora, se puede demostrar que $R(U)$ forma un subconjunto de $SO(n^2 - 1)$. El número de parámetros independientes que posee U es n^2 , mientras que el número de parámetros libres que se necesitan para construir el conjunto de matrices ortogonales de tamaño $(n^2 - 1) \times (n^2 - 1)$ es $(n^2 - 1)(n^2 - 2)/2$ (ver capítulo 4 [14]). Cabe resaltar que en este capítulo se ha considerado que el número de dobletes Higgs es $n > 2$. Por lo tanto

$$\frac{(n^2 - 1)(n^2 - 2)}{2} = \frac{n^4 - 3n^2 + 2}{2} > \frac{n^4 - 3n^2}{2} = \frac{n^2(n^2 - 3)}{2}.$$

Pero, $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto, el mínimo valor que puede tomar n es 3, entonces $(n^2 - 3)/2 > 1$, esto lleva a lo siguiente

$$\frac{(n^2 - 1)(n^2 - 2)}{2} > \frac{n^2(n^2 - 3)}{2} > n^2.$$

Con esto se demuestra que el número de parámetros que proporciona U , no son suficientes para construir el conjunto completo de $SO(n^2 - 1)$.

Una transformación de fase pura $U = \exp(i\alpha)\mathbb{1}_n$, no desempeña un cambio en las bilineales. Por lo tanto, se considera solamente transformaciones (6.39) con $U \in SU(n)$. En la transformaciones de las bilineales (6.41) $R_{ab}(U)$ es entonces la matriz $(n^2 - 1) \times (n^2 - 1)$ correspondiente a U en la representación adjunta de $SU(n)$.

Bajo el reemplazo (6.41), el potencial Higgs (6.36), permanece sin cambios si se ejecuta una transformación simultanea adecuada de los parámetros se tiene

$$\begin{aligned} \xi'_0 &= \xi_0 & \xi' &= R(U)\xi \\ \eta'_{00=\eta_{00}} & & \eta' &= R(U)\eta \\ E' &= R(U)ER^T(U) \end{aligned} \tag{6.44}$$

Un modelo realista de n dobletes Higgs contiene además de los términos del potencial Higgs, términos cinéticos para los dobletes, así como términos de acoplamiento de Yukawa, los cuales acoplan los bosones Higgs con los fermiones.

Bajo una transformación de base de la forma (6.39) de los campos de bosones Higgs, o en términos de las bilineales (6.41), después del rompimiento espontáneo

de simetría, los términos cinéticos del potencial permanecen invariantes, pero en general los términos Yukawa no son invariantes bajo tal cambio de base.

6.3. Estabilidad del Modelo de N Dobletes Higgs

Ahora se estudia la estabilidad del potencial general de n dobletes Higgs (6.36), dado en términos de las bilineales K_0 y $\mathbf{K}$, sobre el dominio determinado por (6.30). Esto se realiza de manera análoga a los casos con $n = 2, 3$; es decir, los casos trabajados en los capítulos 3 y 4. El caso $\sqrt{n/2}K_0 = \varphi_1^\dagger\varphi_1 + \cdots + \varphi_n^\dagger\varphi_n = 0$ corresponde a que todos los campos Higgs son cero, y por ende $V = 0$. Para $K_0 > 0$ se define

$$\underline{k} = \frac{\underline{K}}{K_0}, \quad k_\alpha = \frac{K_\alpha}{K_0}, \quad \mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{n^2-1})^T. \quad (6.45)$$

Ahora se escribe las condiciones del rango del teorema 1 en términos de $\mathbf{k}$. Con ayuda de (6.8), se puede ver que $\underline{K} = K_0(\lambda_0 + k_a\lambda_a)/2$. Por lo tanto, las expresiones s_k (6.28) son proporcionales a K_0^k . Se define las expresiones sin dimensión $\bar{s}_k$ por

$$\bar{s}_k = \frac{s_k}{K_0^k}. \quad (6.46)$$

Para $\bar{s}_1$, usando (6.28) se obtiene

$$\bar{s}_1 = \frac{s_1}{K_0} = \frac{1}{K_0} \text{Tr}(\underline{K}) = \frac{1}{K_0} \text{Tr}\left(\frac{K_\alpha\lambda_\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2K_0} \text{Tr}(K_0\lambda_0 + K_a\lambda_a) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda_0 + k_a\lambda_a),$$

por otra parte, de (6.29)

$$\bar{s}_1 = \frac{s_1}{K_0} = \sqrt{\frac{n}{2}} = \frac{1}{2} \text{Tr}(\lambda_0 + k_a\lambda_a). \quad (6.47)$$

Para $\bar{s}_2$, de las ecuaciones (6.28) y (6.29) se tiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \bar{s}_2 &= \frac{s_2}{K_0^2} = \frac{1}{K_0^2} \left[\frac{1}{2} (\text{Tr}^2(\underline{K}) - \text{Tr}(\underline{K}^2)) \right] = \frac{1}{2K_0^2} \left[\text{Tr}^2\left(\frac{K_\alpha\lambda_\alpha}{2}\right) - \text{Tr}\left(\frac{K_\alpha\lambda_\alpha K_\beta\lambda_\beta}{4}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{4} \text{Tr}^2(\lambda_0 + k_a\lambda_a) - \frac{K_\alpha K_\beta}{4K_0^2} \text{Tr}(\lambda_\alpha\lambda_\beta) \right]. \end{aligned}$$

De (6.47) se tiene que $\text{Tr}^2(\lambda_0 + k_a\lambda_a) = 2n$, mientras que de las propiedades de las matrices generalizadas de Gell-Mann (6.7), se toma la primer ecuación $\text{Tr}(\lambda_\alpha\lambda_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}$, es decir

$$\bar{s}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} - \frac{K_\alpha K_\alpha}{2K_0^2} \right) = \frac{1}{4} (n - 1 - k_a k_a). \quad (6.48)$$

Por último, se toma el caso general de (6.28), donde

$$\begin{aligned}\bar{s}_k &= \frac{s_k}{K_0^k} = \frac{1}{k K_0^k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} s_{k-i} \text{Tr}(\underline{K}^i) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \frac{s_{k-i}}{K_0^{k-i}} \text{Tr} \left[\left(\frac{K_\alpha \lambda_\alpha}{2K_0} \right)^i \right] \\ &= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \bar{s}_{k-i} \text{Tr} \left[\left(\frac{\lambda_0 + k_a \lambda_a}{2} \right)^i \right], \quad \text{con } k = 1, \dots, n.\end{aligned}\quad (6.49)$$

En términos de los k_a , se tiene para k el dominio $\mathcal{D}_k$:

$$\begin{aligned}\bar{s}_2 &\geq 0, \\ \bar{s}_3 &= \bar{s}_4 = \dots = \bar{s}_n = 0.\end{aligned}\quad (6.50)$$

La frontera del dominio, $\partial\mathcal{D}_k$ está dada por

$$\bar{s}_2 = \frac{1}{4}(n-1-k_a k_a) = 0. \quad (6.51)$$

De (6.45) y (6.36) se obtiene, para $K_0 > 0$ y $V = V_2 + V_4$ con

$$V_2 = K_0 J_2(\mathbf{k}), \quad J_2(\mathbf{k}) = \xi_0 + \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{k}, \quad (6.52)$$

$$V_4 = K_0^2 J_4(\mathbf{k}), \quad J_4(\mathbf{k}) = \eta_{00} + 2\boldsymbol{\eta}^T \mathbf{k} + \mathbf{k}^T E \mathbf{k}, \quad (6.53)$$

donde se ha introducido las funciones $J_2(\mathbf{k})$ y $J_4(\mathbf{k})$ sobre el dominio (6.50).

La estabilidad del potencial quiere decir que este está acotado inferiormente. La estabilidad entonces se deduce del comportamiento de V en el límite $K_0 \rightarrow \infty$; por lo tanto, por los signos de $J_4(\mathbf{k})$ y $j_2(\mathbf{k})$ en (6.52) y (6.53). Para que un modelo sea al menos *marginalmente* estable, las condiciones

$$\begin{aligned}J_4(\mathbf{k}) &> 0 \quad \text{o} \\ J_4(\mathbf{k}) &= 0 \quad \text{y} \quad J_2(\mathbf{k}) \geq 0\end{aligned}\quad (6.54)$$

para todo $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_k$, es decir, todo los $\mathbf{k}$ que satisfacen (6.50) son necesarios y suficientes, debido a que esto es equivalente a $V \geq 0$ para $K_0 \rightarrow \infty$ en todas las posibles direcciones de $\mathbf{k}$. La condición de estabilidad más estricta $V \rightarrow \infty$ para $K_0 \rightarrow \infty$ para cualquier $\mathbf{k}$ permitido, requiere que V sea estable ya sea en el sentido fuerte, o en el sentido débil. Para estabilidad fuerte se requiere

$$j_4(\mathbf{k}) > 0, \quad (6.55)$$

para todo $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_k$. Para estabilidad débil, se requiere que para todo $\mathbf{k} \in \mathcal{D}_k$

$$\begin{aligned} J_4(\mathbf{k}) &\geq 0 \\ J_2(\mathbf{k}) &> 0 \text{ para todo } \mathbf{k} \text{ donde } j_4(\mathbf{k}) = 0. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Para determinar que $J_4(\mathbf{k})$ es positivo semi definido, es suficiente considerar su valor en todos los puntos estacionarios del dominio $\mathcal{D}_k$. Esto es verdadero debido a que el mínimo global de la función continua $J_4(\mathbf{k})$ se logra sobre el dominio compacto $\mathcal{D}_k$, donde el mínimo global está entre los puntos estacionarios.

Para encontrar los puntos estacionarios de $J_4(\mathbf{k})$ en el interior del dominio $\mathcal{D}_k$, la matriz $\underline{K}$ tiene rango 2, por lo tanto, $\underline{k}$ de (6.45) también posee el mismo rango. Entonces, $\underline{k}$ y k_α pueden ser representados como en (6.34) y (6.35) respectivamente, es decir

$$k_\alpha = \sqrt{\frac{n}{2}} \left(\sin^2(\chi) \mathbf{w}_1^\dagger \lambda_\alpha \mathbf{w}_1 + \cos^2(\chi) \mathbf{w}_2^\dagger \lambda_\alpha \mathbf{w}_2 \right), \quad (6.57)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^\dagger \mathbf{w}_1 - 1 &= 0, \\ \mathbf{w}_2^\dagger \mathbf{w}_2 - 1 &= 0, \\ \left(\mathbf{w}_1^\dagger \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_2^\dagger \mathbf{w}_1 \right) / 2 &= 0, \\ \left(\mathbf{w}_1^\dagger \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_2^\dagger \mathbf{w}_1 \right) / (2i) &= 0, \end{aligned} \quad (6.58)$$

y el parámetro χ tiene el siguiente rango

$$0 < \chi \leq \frac{\pi}{4}. \quad (6.59)$$

Se tiene encontrar los puntos estacionarios de $J_4(\mathbf{k})$ con las ligaduras (6.58) y (6.59), que en forma condensada se escribe así

$$J_4(\mathbf{k}) = k_\alpha \hat{E}_{\alpha\beta} k_\beta. \quad (6.60)$$

La matriz gradiente generada por las ligaduras (6.58), tiene rango 4. Por lo tanto, se puede añadir el método de los multiplicadores de Lagrange y añadir estas cuatro ligaduras con cuatro multiplicadores a $J_4(\mathbf{k})$. Entonces, se construye la función

$$F(\mathbf{w}_1^\dagger, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2^\dagger, \mathbf{w}_2, \chi, u_1, u_2, u_3, u_4) = J_4(\mathbf{k}) - u_1(\mathbf{w}_1^\dagger \mathbf{w}_1 - 1) - u_2(\mathbf{w}_2^\dagger \mathbf{w}_2 - 1)$$

$$-u_3 \frac{1}{2}(\mathbf{w}_1^\dagger \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_2^\dagger \mathbf{w}_1) - u_4 \frac{1}{2i}(\mathbf{w}_1^\dagger \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_2^\dagger \mathbf{w}_1) \quad (6.61)$$

donde $\mathbf{k} = (k_a)$, debe ser introducido en la forma (6.57). Las ecuaciones para los puntos estacionarios de J_4 son obtenidas de

$$\nabla_{\mathbf{w}_1^\dagger, \mathbf{w}_2^\dagger, \chi, u_1, u_2, u_3, u_4} F(\mathbf{w}_1^\dagger, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2^\dagger, \mathbf{w}_2, \chi, u_1, u_2, u_3, u_4) = 0, \text{ para } 0 < \chi < \frac{\pi}{4}. \quad (6.62)$$

Para el límite sobre la frontera $\chi = \pi/4$, se tiene

$$\nabla_{\mathbf{w}_1^\dagger, \mathbf{w}_2^\dagger, u_1, u_2, u_3, u_4} F(\mathbf{w}_1^\dagger, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2^\dagger, \mathbf{w}_2, \pi/4, u_1, u_2, u_3, u_4) = 0. \quad (6.63)$$

El gradiente de F con respecto a $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ da el conjugado hermítico del gradiente con respecto a $\mathbf{w}_1^\dagger$ y $\mathbf{w}_2^\dagger$ respectivamente. Esto puede ser visto de la siguiente manera: la función $J_4(\mathbf{k})$ definida en (6.60), depende de k_α el cual a su vez está definido por (6.57). Por lo tanto, al tomar la derivada de k_α y de las ligaduras (6.58), ya sea por $\mathbf{w}_1$ o por $\mathbf{w}_2$ da como resultado la derivada del conjugado hermítico de $\mathbf{w}_1^\dagger$ o de $\mathbf{w}_2^\dagger$.

Para $\underline{k}$ (6.45) de rango 1, se usa (6.31) y (6.32) para obtener

$$\begin{aligned} \underline{l} &= \sqrt{\frac{n}{2}} \mathbf{w} \mathbf{w}^\dagger, \\ k_\alpha &= \sqrt{\frac{n}{2}} \mathbf{w}^\dagger \lambda_\alpha \mathbf{w}, \end{aligned} \quad (6.64)$$

donde se tiene la ligadura

$$\mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} - 1 = 0. \quad (6.65)$$

Fácilmente se puede observar que la matriz gradiente de la ligadura tiene rango 1. Por lo tanto, se puede añadir (6.65) con un multiplicador de Lagrange a J_4 y obtener

$$\begin{aligned} F(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w}, u) &= J_4(\mathbf{k}) - u(\mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} - 1) \\ &= \frac{n}{2} \mathbf{w}^\dagger \lambda_\alpha \mathbf{w} \hat{E}_{\alpha\beta} \mathbf{w}^\dagger \lambda_\beta \mathbf{w} - u(\mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} - 1). \end{aligned} \quad (6.66)$$

Las ecuaciones que determinan los puntos estacionarios de $J_4(\mathbf{k})$ en la frontera $\partial\mathcal{D}_k$, es decir, para $\underline{k}$ de rango 1, son entonces

$$\nabla_{\mathbf{w}^\dagger, u} F(\mathbf{w}^\dagger, \mathbf{w}, u) = 0. \quad (6.67)$$

Todos los puntos estacionarios obtenidos de (6.62), (6.63) y (6.66) deben cumplir la condición $J_4(\mathbf{k}) > 0$ para estabilidad en el sentido fuerte. Si para todos los puntos estacionarios se tiene que $J_4(\mathbf{k}) \geq 0$, entonces para cada solución $\mathbf{k}$ con $j_4(\mathbf{k}) = 0$, se debe tener $J_2(\mathbf{k}) > 0$ para estabilidad en el sentido débil, o por lo menos $J_2(\mathbf{k}) = 0$ para estabilidad marginal. Si ninguna de estas condiciones se cumple, es decir, si se encuentra al menos una dirección estacionaria $\mathbf{k}$ con $J_4(\mathbf{k}) < 0$ o $J_4(\mathbf{k}) = 0$ pero $J_2(\mathbf{k}) < 0$, el potencial es inestable.

De nuevo, en este capítulo se obtiene que las ecuaciones que determinan la estabilidad (6.62), (6.63) y (6.66), no son lineales y para poder solucionar este tipo de ecuaciones hay que recurrir a métodos numéricos como los mencionados en el capítulo anterior (continuación homotópica [6] o bases de Gröbner [5]).

Capítulo 7

Conclusiones

Con este trabajo se ha podido desarrollar una teoría que puede determinar la estabilidad de potenciales escalares de manera muy general. Tomando en principio las ideas básicas del Modelo Estándar el cual contiene un doblete de Higgs en su sector escalar, se ha logrado formar una teoría que explica la estabilidad en las extensiones de dicho sector. Como queda plasmado en el capítulo 3, en el cual se plantean el modelo general de dos dobletes de Higgs y la obtención de las condiciones de estabilidad de este. En dicho capítulo se logra satisfactoriamente las condiciones de estabilidad sobre el modelo económico $3 - 3 - 1$, que a pesar de ser un potencial de dos tripletes de Higgs, no hay ninguna restricción para poder ser tratado mediante el método planteado.

El caso de tres dobletes Higgs planteado en el capítulo 4, es una generalización directa del método desarrollado en el capítulo 3 usando bilineales. El problema de este método es que no logra conseguir la estabilidad de potenciales escalares de manera analítica, debido a que este produce ecuaciones no lineales.

En el capítulo 6, hemos desarrollado dos métodos los cuales nos permitan determinar las condiciones de estabilidad sobre un potencial de tres tripletes. En la sección 5.1 se explica el funcionamiento del primero método el cual consiste en una parametrización del potencial Higgs mediante el uso de bilineales. El principal problema de este método es que solo funciona sobre potenciales que tienen expresiones sencillas, debido a que las condiciones de estabilidad en las bilineales conlleva a ecuaciones de tipo no lineal, Por tal motivo, la resolución de este tipo de problemas ya pasa al ámbito experimental, más concretamente, con el desarrollo de métodos numéricos como la continuación Homotópica [6] y las bases de Gröbner [5]. El segundo método está plasmado en la sección 5.2, dicho método ya fue tratado por primera

vez en la literatura en [7], siendo este mucho más eficaz a la hora de determinar las condiciones de estabilidad sobre un potencial escalar de tres tripletes de Higgs, como es el caso del potencial escalar $3 - 3 - 1$ sin término cúbico en modelos sin carga eléctrica exótica y unos potenciales más sencillos presentados a lo largo del documento. Por último, en el capítulo 7, se añade el modelo general de n dobletes de Higgs y su estabilidad. Para este tipo de teorías ocurre el mismo problema que en el capítulo 4. La parametrización del potencial escalar se debe llevar a cabo a través del uso de bilineales. Esto conlleva a ecuaciones de tipo no lineal, las cuales no permiten el desarrollo analítico del problema.

Bibliografía

- [1] J Alexis Rodríguez, Jackson Poveda, and Nicanor Poveda. El modelo estándar de partículas elementales. *CIENCIA EN DESARROLLO*, 2(2), 2006.
- [2] John F. Gunion, Howard E. Haber, Gordon L. Kane, and Sally Dawson. The Higgs Hunter's Guide. *Front. Phys.*, 80:1–404, 2000.
- [3] John F. Gunion, Howard E. Haber, Gordon L. Kane, and Sally Dawson. Errata for the Higgs hunter's guide. 1992.
- [4] M. Maniatis and O. Nachtmann. Stability and symmetry breaking in the general n -Higgs-doublet model. *Phys. Rev.*, D92(7):075017, 2015.
- [5] M. Maniatis, A. von Manteuffel, and O. Nachtmann. Determining the global minimum of higgs potentials via groebner bases – applied to the nmssm. *The European Physical Journal C*, 49(4):1067–1076, Mar 2007.
- [6] M. Maniatis and D. Mehta. Minimizing higgs potentials via numerical polynomial homotopy continuation. *The European Physical Journal Plus*, 127(8):91, Aug 2012.
- [7] Yithsbey Giraldo and William A. Ponce. Scalar Potential Without Cubic Term in 3-3-1 Models Without Exotic Electric Charges. *Eur. Phys. J.*, C71:1693, 2011.
- [8] Yithsbey Giraldo, William A. Ponce, and Luis A. Sanchez. Stability of the Scalar Potential and Symmetry Breaking in the Economical 3-3-1 Model. *Eur. Phys. J.*, C63:461–475, 2009.
- [9] Tom M. Apostol. *Calculus, Vol. 2: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra with Applications to Differential Equations and Probability*. J. Wiley, New York, 1967.
- [10] John F Donoghue, Eugene Golowich, and Barry R Holstein. *Dynamics of the Standard Model*. Cambridge monographs on particle physics, nuclear physics, and cosmology. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992. Includes exercises.

- [11] David J Griffiths. *Introduction to elementary particles; 2nd rev. version*. Physics textbook. Wiley, New York, NY, 2008.
- [12] O. Nachtmann. *Elementary particle physics: concepts and phenomena*. Theoretical and Mathematical Physics. Springer-Verlag, 1990.
- [13] M. Maniatis, A. von Manteuffel, O. Nachtmann, and F. Nagel. Stability and symmetry breaking in the general two-Higgs-doublet model. *Eur. Phys. J.*, C48:805–823, 2006.
- [14] G.B. Arfken, H.J. Weber, and F.E. Harris. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*. Elsevier Science, 2013.
- [15] Yithsbey Giraldo and Larry Burbano. Revised Criteria for Stability in the General Two-Higgs Doublet Model. 2018.
- [16] M. Maniatis and O. Nachtmann. Stability and symmetry breaking in the general three-Higgs-doublet model. *JHEP*, 02:058, 2015. [Erratum: *JHEP*10,149(2015)].
- [17] I. P. Ivanov and C. C. Nishi. Properties of the general NHDM. I. The Orbit space. *Phys. Rev.*, D82:015014, 2010.
- [18] S. Pokorski and P.V. Landshoff. *Gauge Field Theories*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2000.
- [19] S. Hassani. *Mathematical Physics: A Modern Introduction to Its Foundations*. Springer International Publishing, 2013.

Apéndice A

Órbitas Gauge para Dos Dobletes Higgs

En este apéndice se demuestra que las órbitas gauge para los campos Higgs del modelo general de dos dobletes Higgs son parametrizadas por cuatro vectores $(K_0, \mathbf{K})$ que satisfacen (3.55), o equivalentemente, por las matrices semidefinidas positivas $\underline{K}$; mirar (3.7) y (3.8). En efecto, se considera dos dobletes Higgs como en (3.1),

$$\varphi_i^\alpha(x), \quad i = 1, 2, \quad \alpha = +, 0. \quad (\text{A.1})$$

Estos se organizan en una matriz 2×2 como en (3.15)

$$\phi(x) = (\varphi_i^\alpha(x)) = \begin{pmatrix} \varphi_1^+(x) & \varphi_1^0(x) \\ \varphi_2^+(x) & \varphi_2^0(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

donde se construye la matriz

$$\underline{K} = \phi(x)\phi(x)^\dagger. \quad (\text{A.3})$$

Con el cambio de base (3.28) se obtiene la transformación

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U\phi(x). \quad (\text{A.4})$$

Una transformación del grupo gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$ quiere decir

$$\varphi_i^\alpha(x) \rightarrow \varphi_i'^\alpha(x) = (U_G(x))_{\alpha\beta} \varphi_i^\beta(x), \quad (\text{A.5})$$

donde

$$U_G(x) \in U(2). \quad (\text{A.6})$$

Por lo tanto, bajo una transformación gauge los campos Higgs serán

$$\varphi_1'^+ = (U_G(x))_{+\beta} \varphi_1^\beta(x) = (U_G(x))_{++} \varphi_1^+(x) + (U_G(x))_{+0} \varphi_1^0(x), \quad (\text{A.7})$$

$$\varphi_1'^0 = (U_G(x))_{0\beta} \varphi_1^\beta(x) = (U_G(x))_{0+} \varphi_1^+(x) + (U_G(x))_{00} \varphi_1^0(x), \quad (\text{A.8})$$

$$\varphi_2'^+ = (U_G(x))_{+\beta} \varphi_2^\beta(x) = (U_G(x))_{++} \varphi_2^+(x) + (U_G(x))_{+0} \varphi_2^0(x), \quad (\text{A.9})$$

$$\varphi_2^0 = (U_G(x))_{0\beta} \varphi_2^\beta(x) = (U_G(x))_{0+} \varphi_2^+(x) + (U_G(x))_{00} \varphi_2^0(x). \quad (\text{A.10})$$

Mientras que la matriz (A.2) tendrá la forma

$$\phi'(x) = \begin{pmatrix} (U_G(x))_{++} \varphi_1^+(x) + (U_G(x))_{+0} \varphi_1^0(x) & (U_G(x))_{0+} \varphi_1^+(x) + (U_G(x))_{00} \varphi_1^0(x) \\ (U_G(x))_{++} \varphi_2^+(x) + (U_G(x))_{+0} \varphi_2^0(x) & (U_G(x))_{0+} \varphi_2^+(x) + (U_G(x))_{00} \varphi_2^0(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.11})$$

Se define la matriz $U_G(x)$ de la siguiente manera

$$U_G(x) = \begin{pmatrix} (U_G(x))_{++} & (U_G(x))_{+0} \\ (U_G(x))_{0+} & (U_G(x))_{00} \end{pmatrix} \Rightarrow U_G^T(x) = \begin{pmatrix} (U_G(x))_{++} & (U_G(x))_{0+} \\ (U_G(x))_{+0} & (U_G(x))_{00} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.12})$$

Con (A.12) se reescribe (A.11) así:

$$\begin{aligned} \phi'(x) &= \begin{pmatrix} \varphi_1^+(x) & \varphi_1^0(x) \\ \varphi_2^+(x) & \varphi_2^0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U_G(x))_{++} & (U_G(x))_{0+} \\ (U_G(x))_{+0} & (U_G(x))_{00} \end{pmatrix}, \\ \phi'(x) &= \phi(x) U_G^T(x). \end{aligned}$$

En consecuencia, bajo una transformación gauge la matriz $\phi(x)$ se comporta como

$$\phi \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) U_G^T(x). \quad (\text{A.13})$$

Como se mencionó en la sección (3.3) cualquier matriz $\underline{K}(x)$ formada de los campos Higgs acorde con (3.7), lo cual es equivalente a (A.3), debe ser semidefinida positiva. Caso contrario, cualquier matriz semidefinida positiva $\underline{K}(x)$, se puede diagonalizar por una transformación $W(x)$ unitaria 2×2 :

$$\begin{aligned} \underline{K}(x) &= W(x) \begin{pmatrix} \kappa_1(x) & 0 \\ 0 & \kappa_2(x) \end{pmatrix} W^\dagger(x), \\ W^\dagger(x) W(x) &= \mathbb{1}_2. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Donde $\kappa_1 \geq 0$ y $\kappa_2 \geq 0$ son los autovalores de $\underline{K}$, además se puede establecer

$$\phi(x) = W(x) \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa_1(x)} & 0 \\ 0 & \sqrt{\kappa_2(x)} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

para obtener

$$\underline{K}(x) = \phi(x) \phi^\dagger(x). \quad (\text{A.16})$$

Con esto se ha demostrado lo siguiente

- Para cualquier matriz $\underline{K}(x)$ semidefinida positiva existen campos Higgs que satisfacen (A.3), o en su defecto (3.7).

Ahora se considera una matriz $\underline{K}$ semidefinida positiva y dos matrices de campos Higgs $\phi(x)$ y $\phi'(x)$, las cuales satisfacen (A.3), por lo tanto

$$\underline{K}(x) = \phi(x)\phi^\dagger(x) = \phi'(x)\phi'^\dagger(x). \quad (\text{A.17})$$

Se quiere demostrar que $\phi'(x)$ y $\phi(x)$ están relacionadas por una transformación gauge (A.13). Para esto se toman tres casos.

1. $\underline{K}(x) = 0$. Entonces $\phi(x) = \phi'(x) = 0$ y (A.13) se cumple trivialmente.

2. $\underline{K}(x) > 0$, es decir $\underline{K}(x)$ es definida positiva. Entonces en (A.17)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Det } \underline{K}(x) &= \text{Det } (\phi(x)\phi^\dagger(x)) = \text{Det } \phi(x) \text{Det } \phi^\dagger(x) = \text{Det } \phi(x) \text{Det } (\phi^*(x))^T, \\ \text{Det } \underline{K}(x) &= |\text{Det } \phi(x)| = |\text{Det } \phi'(x)| > 0, \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

es decir, ambos $\phi(x)$ y $\phi'(x)$ tienen inversa. Se fija el siguiente valor

$$\phi^{-1}(x)\phi'(x) = U_G^T(x), \quad (\text{A.19})$$

ahora al usar (A.17), se puede añadir el factor $\phi(x)\phi^{-1} = \mathbb{1}_2$

$$\begin{aligned} \underline{K}(x) &= \phi'(x)\phi'^\dagger(x) = \phi(x) \underbrace{\phi^{-1}(x)\phi'(x)}_{U_G^T(x)} \phi'^\dagger(x), \\ \underline{K}(x) &= \phi(x)U_G^T(x)\phi'^\dagger(x). \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

De (A.19) se tiene la expresión

$$\phi'(x) = \phi(x)U_G^T(x) \implies \phi'^\dagger(x) = (U_G^T(x))^\dagger \phi^\dagger(x) \quad (\text{A.21})$$

Al usar (A.21) en (A.20) se obtiene

$$\underline{K}(x) = \phi(x)U_G^T(x) (U_G^T(x))^\dagger \phi^\dagger(x) = \phi(x)\phi^\dagger(x). \quad (\text{A.22})$$

Con la anterior ecuación se concluye

$$U_G^T(x) (U_G^T(x))^\dagger = \mathbb{1}_2,$$

$$U_G^\dagger U_G = \mathbb{1}_2; \quad (\text{A.23})$$

es decir, $U_G(x) \in U(2)$. Con (A.23) y (A.21) se ve que las matrices $\phi(x)$ y $\phi'(x)$ están relacionadas por una transformación gauge

3. $\underline{K}(x)$ tiene rango 1; es decir, los autovalores son:

$$\kappa_1(x) > 0, \quad \kappa_2(x) = 0. \quad (\text{A.24})$$

Con la matriz $W(x)$ se diagonaliza la matriz $\underline{K}(x)$ (mirar (A.14)) de (A.17)

$$W(x)\underline{K}(x)W^\dagger(x) = \begin{pmatrix} \kappa_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} (W^\dagger(x)\phi(x)) (W^\dagger(x)\phi(x))^\dagger \\ (W^\dagger(x)\phi'(x)) (W^\dagger(x)\phi'(x))^\dagger \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

La matriz $W(x)$ se define con las siguientes componentes

$$W(x) = \begin{pmatrix} W_{11}(x) & W_{12}(x) \\ W_{21}(x) & W_{22}(x) \end{pmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

En la primer ecuación de (A.25) se tiene

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \kappa_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} W_{11}^*(x) & W_{21}^*(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^+(x) & \varphi_1^0(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} W_{12}^*(x) & W_{22}^*(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_2^+(x) & \varphi_2^0(x) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ &\quad \begin{bmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^{+*}(x) & \varphi_2^{+*}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11}(x) & W_{12}(x) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \varphi_1^{0*}(x) & \varphi_2^{0*}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{21}(x) & W_{22}(x) \end{pmatrix} \end{bmatrix} \\ \begin{pmatrix} \kappa_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W_{11}^*(x)\phi_1^+(x) + W_{21}^*(x)\phi_2^+(x) & W_{11}^*(x)\phi_1^0(x) + W_{21}^*(x)\phi_2^0(x) \\ W_{12}^*(x)\phi_1^+(x) + W_{22}^*(x)\phi_2^+(x) & W_{12}^*(x)\phi_1^0(x) + W_{22}^*(x)\phi_2^0(x) \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \phi_1^{+*}(x)W_{11}(x) + \phi_2^{+*}(x)W_{21}(x) & \phi_1^{+*}(x)W_{12}(x) + \phi_2^{+*}(x)W_{22}(x) \\ \phi_1^{0*}(x)W_{11}(x) + \phi_2^{0*}(x)W_{21}(x) & \phi_1^{0*}(x)W_{12}(x) + \phi_2^{0*}(x)W_{22}(x) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Se reescribe la anterior ecuación en la forma

$$\begin{pmatrix} \kappa_1(x) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1^+(x) & \chi_1^0(x) \\ \chi_2^+(x) & \chi_2^0(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1^{+*}(x) & \chi_2^{+*}(x) \\ \chi_1^{0*}(x) & \chi_2^{0*}(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

donde

$$\chi_1^+(x) = W_{11}^*(x)\phi_1^+(x) + W_{21}^*(x)\phi_2^+(x), \quad (\text{A.29})$$

$$\chi_1^0(x) = W_{11}^*(x)\phi_1^0(x) + W_{21}^*(x)\phi_2^0(x), \quad (\text{A.30})$$

$$\chi_2^+(x) = W_{12}^*(x)\phi_1^+(x) + W_{22}^*(x)\phi_2^+(x), \quad (\text{A.31})$$

$$\chi_2^0(x) = W_{12}^*(x)\phi_1^0(x) + W_{22}^*(x)\phi_2^0(x). \quad (\text{A.32})$$

De (A.28) se forma el siguiente sistema de ecuaciones

$$\kappa_1(x) = |\chi_1^+(x)|^2 + |\chi_1^0(x)|^2, \quad (\text{A.33})$$

$$0 = \chi_1^+(x)\chi_2^{+*}(x) + \chi_1^0(x)\chi_2^{0*}(x), \quad (\text{A.34})$$

$$0 = \chi_2^+(x)\chi_1^{+*}(x) + \chi_2^0(x)\chi_1^{0*}(x), \quad (\text{A.35})$$

$$0 = |\chi_2^+(x)|^2 + |\chi_2^0(x)|^2. \quad (\text{A.36})$$

Para que la ecuación (A.36) sea válida, debe ocurrir que $\chi_2^+(x) = \chi_2^0(x) = 0$.

Además, al relacionar (A.28) con la primer ecuación de (A.25) se tiene

$$W^\dagger(x)\phi(x) = \begin{pmatrix} \chi_1^+(x) & \chi_1^0(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

Análogamente para la segunda ecuación de (A.25)

$$W^\dagger(x)\phi'(x) = \begin{pmatrix} \chi_1'^+(x) & \chi_1'^0(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.38})$$

Por otra parte, se puede definir los siguientes vectores

$$\chi_1(x) = \begin{pmatrix} \chi_1^+(x) \\ \chi_1^0(x) \end{pmatrix}, \quad \chi_1'(x) = \begin{pmatrix} \chi_1'^+(x) \\ \chi_1'^0(x) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.39})$$

los cuales, a partir de (A.37), (A.38) y (A.25), se observa que cumplen la condición

$$\chi_1(x)^\dagger \chi_1(x) = \chi_1'^\dagger(x) \chi_1'(x) = \kappa_1(x). \quad (\text{A.40})$$

Por lo tanto, se puede construir una matriz $U_G(x) \in U(2)$ tal que

$$\chi_1'^\alpha(x) = (U_G(x))_{\alpha\beta} \chi_1^\beta(x), \quad (\text{A.41})$$

entonces en (A.38) se tiene

$$\chi_1'^+ = (U_G(x))_{++} \chi_1^+(x) + (U_G(x))_{+0} \chi_1^0(x), \quad (\text{A.42})$$

$$\chi_1'^0 = (U_G(x))_{0+} \chi_1^+(x) + (U_G(x))_{00} \chi_1^0(x). \quad (\text{A.43})$$

Con esto se reescribe (A.38) así

$$\begin{aligned} W^\dagger(x)\phi'(x) &= \begin{pmatrix} \chi_1'^+(x) & \chi_1'^0(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} (U_G(x))_{++} \chi_1^+(x) + (U_G(x))_{+0} \chi_1^0(x) & (U_G(x))_{0+} \chi_1^+(x) + (U_G(x))_{00} \chi_1^0(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ &= \begin{pmatrix} \chi_1^+(x) & \chi_1^0(x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U_G(x))_{++} & (U_G(x))_{0+} \\ (U_G(x))_{+0} & (U_G(x))_{00} \end{pmatrix}, \\ W^\dagger(x)\phi'(x) &= W^\dagger(x)\phi(x)U_G^T. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

Se multiplica por izquierda la matriz $W(x)$ en (A.44)

$$\begin{aligned} \underbrace{W(x)W^\dagger(x)}_{\mathbb{1}_2} \phi'(x) &= \underbrace{W(x)W^\dagger}_{\mathbb{1}_2} \phi(x)U_G^T, \\ \phi'(x) &= \phi(x)U_G^T \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Es decir, $\phi'(x)$ y $\phi(x)$ están relacionados por una transformación gauge.

Con esto se ha completado la demostración del siguiente enunciado.

Teorema 2 *Dos matrices de campos de dobletes Higgs que dan la misma matriz $\underline{K}$ (3.7), o equivalentemente (A.3), están relacionadas por una transformación gauge. El espacio de las órbitas gauge puede ser parametrizado por cuadvectores $(K_0, \mathbf{K})$ que yace sobre y dentro del cono de luz futuro; mirar (3.55)*

Apéndice B

Órbitas Gauge Para el Caso de n Dobletes

En este apéndice se generaliza los métodos de la sección 3.3 y el apéndice A para el caso de $n > 2$ dobletes Higgs. Para ello se considera n campos de dobletes Higgs complejos

$$\varphi_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i^+(x) \\ \varphi_i^0(x) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.1})$$

Suponer que todos los dobletes tienen la misma hipercarga $y = +1/2$. En analogía con (3.7) se define la matriz

$$\underline{K}(x) = (\underline{K}_{ij}(x)) = \left(\varphi_j^\dagger \varphi_i(x) \right), \quad (\text{B.2})$$

la cual es ahora una matriz $n \times n$. El objetivo es discutir las propiedades de $\underline{K}(x)$. Para esto se define $\phi(x)$ como una matriz $n \times n$

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^+(x) & \varphi_1^0(x) & 0 & \dots & 0 \\ \varphi_2^+(x) & \varphi_2^0(x) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n^+(x) & \varphi_n^0(x) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

De nuevo para este caso se tiene

$$\underline{K}(x) = \phi(x)\phi^\dagger(x). \quad (\text{B.4})$$

Un cambio de base en los dobletes quiere decir

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = U\phi(x), \quad (\text{B.5})$$

con la matriz unitaria $U \in U(n)$,

$$U^\dagger U = \mathbb{1}_n. \quad (\text{B.6})$$

Una transformación gauge de $SU(2)_L \times U(1)_Y$ designa

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) \hat{U}_G^T(x), \quad (\text{B.7})$$

donde $\hat{U}_G(x)$, es una matriz en forma diagonal por bloques

$$\hat{U}_G(x) = \begin{pmatrix} U_G(x) & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.8})$$

con $U_G(x) \in U(2)$, y así $\hat{U}_G(x) \in U(n)$. Entonces de (B.7) se tiene

$$\varphi_i'^\alpha(x) = (U_G(x))_{\alpha\beta} \varphi_i^\beta(x), \quad i = 1, \dots, n. \quad (\text{B.9})$$

De (B.3) y (B.4), la matriz $\underline{K}(x)$ tiene las siguientes propiedades

- $\underline{K}(x)$ es semidefinida positiva.

Esta condición se demuestra al usar la ecuación (B.4), sobre la operación que define el signo de la matriz $\mathbf{v}^\dagger \underline{K} \mathbf{v}$ donde $\mathbf{v}$ es un vector arbitrario

$$\mathbf{v}^\dagger \underline{K}(x) \mathbf{v} = \mathbf{v}^\dagger \phi(x) \phi^\dagger(x) \mathbf{v} = (\phi^\dagger(x) \mathbf{v})^\dagger \phi^\dagger(x) \mathbf{v} = |\phi^\dagger(x) \mathbf{v}|^2 \geq 0. \quad (\text{B.10})$$

Como se obtiene un resultado ≥ 0 , la matriz $\underline{K}(x)$ es semidefinida positiva.

- $\underline{K}(x)$ tiene rango ≤ 2 .

La condición sobre el rango puede ser vista de la siguiente manera. Se denota $\psi^+(x)$ y $\psi^0(x)$ como los dos primeros vectores columna de $\phi(x)$. Entonces se tiene

$$\phi(x) = (\psi^+(x), \psi^0(x), 0, \dots, 0). \quad (\text{B.11})$$

La matriz $\underline{K}(x)$ (B.4), por lo tanto, se reescribe de la siguiente forma

$$\underline{K}(x) = (\psi^+(x), \psi^0(x), 0, \dots, 0) \begin{pmatrix} \varphi_1^{+*} & \varphi_2^{+*} & \dots & \varphi_n^{+*} \\ \varphi_1^{0*} & \varphi_2^{0*} & \dots & \varphi_n^{0*} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\underline{K}(x) = (\varphi_1^{+*}\psi^+(x) + \varphi_1^{0*}\psi^0(x), \dots, \varphi_n^{+*}\psi^+(x) + \varphi_n^{0*}\psi^0(x)). \quad (\text{B.12})$$

Es decir, a lo sumo dos vectores columna de $\underline{K}(x)$ son linealmente independientes.

Suponer ahora que la matriz $\underline{K}(x)$ es semidefinida positiva de rango ≤ 2 . Entonces se puede diagonalizar $\underline{K}(x)$ y representarlo como

$$\underline{K}(x) = W(x) \begin{pmatrix} \kappa_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{0}_{n-2} \end{pmatrix} W^\dagger(x), \quad (\text{B.13})$$

con $W(x) \in U(n)$ y $\kappa_1(x) \geq 0$, $\kappa_2(x) \geq 0$. Se define ahora

$$\phi(x) = W(x) \begin{pmatrix} \sqrt{\kappa_1(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\kappa_2(x)} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{0}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.14})$$

donde fácilmente se observa que $\phi(x)$ es de la forma (B.3) y satisface (B.4). En consecuencia para cualquier matriz semidefinida positiva $\underline{K}(x)$ de rango ≤ 2 , hay por lo menos una configuración para los campos de los n dobletes Higgs tal que (B.2) se cumple.

Suponer ahora que hay dos configuraciones de campos; es decir, dos matrices $\varphi(x)$ y $\varphi'(x)$ de tipo (B.3) tales que

$$\underline{K}(x) = \phi(x)\phi^\dagger(x) = \phi'(x)\phi'^\dagger(x). \quad (\text{B.15})$$

Se puede diagonalizar $\underline{K}(x)$ como en (B.13) mediante una matriz $W(x)$ para obtener

$$W^\dagger(x)\underline{K}W(x) = \begin{pmatrix} \kappa_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{0}_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{cases} (W^\dagger(x)\phi(x)) (W^\dagger(x)\phi(x))^\dagger \\ (W^\dagger(x)\phi'(x)) (W^\dagger(x)\phi'(x))^\dagger \end{cases} \quad (\text{B.16})$$

La matriz $W(x)$ se define de la siguiente manera

$$W(x) = \begin{pmatrix} W(x)_{11} & W(x)_{12} & \dots & W(x)_{1n} \\ W(x)_{21} & W(x)_{22} & \dots & W(x)_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W(x)_{n1} & W(x)_{n2} & \dots & W(x)_{nn} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

Al calcular el término $W^\dagger(x)\phi(x)$ se tiene

$$\begin{aligned}
 W^\dagger(x)\phi(x) &= \begin{pmatrix} W^*(x)_{11} & W^*(x)_{21} & \dots & W^*(x)_{n1} \\ W^*(x)_{12} & W^*(x)_{22} & \dots & W^*(x)_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W^*(x)_{1n} & W^*(x)_{2n} & \dots & W^*(x)_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1^+(x) & \phi_1^0(x) & 0 & \dots & 0 \\ \phi_2^+(x) & \phi_2^0(x) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_n^+(x) & \phi_n^0(x) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \\
 W^\dagger(x)\phi(x) &= \begin{pmatrix} \chi_1^+(x) & \chi_1^0(x) & 0 & \dots & 0 \\ \chi_2^+(x) & \chi_2^0(x) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_n^+(x) & \chi_n^0(x) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{B.18}
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \chi_1^+ &= W^*(x)_{11}\phi_1^+(x) + W^*(x)_{21}\phi_2^+(x) + \dots + W^*(x)_{n1}\phi_n^+(x), \\
 \chi_1^0 &= W^*(x)_{11}\phi_1^0(x) + W^*(x)_{21}\phi_2^0(x) + \dots + W^*(x)_{n1}\phi_n^0(x), \\
 \chi_2^+ &= W^*(x)_{12}\phi_1^+(x) + W^*(x)_{22}\phi_2^+(x) + \dots + W^*(x)_{n2}\phi_n^+(x), \\
 \chi_2^0 &= W^*(x)_{12}\phi_1^0(x) + W^*(x)_{22}\phi_2^0(x) + \dots + W^*(x)_{n2}\phi_n^0(x), \\
 &\vdots \\
 \chi_n^+ &= W^*(x)_{1n}\phi_1^+(x) + W^*(x)_{2n}\phi_2^+(x) + \dots + W^*(x)_{nn}\phi_n^+(x), \\
 \chi_n^0 &= W^*(x)_{1n}\phi_1^0(x) + W^*(x)_{2n}\phi_2^0(x) + \dots + W^*(x)_{nn}\phi_n^0(x). \tag{B.19}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la primer ecuación de (B.16) quedará de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \kappa_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2(x) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{O}_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_1^+(x) & \chi_1^0(x) & 0 & \dots & 0 \\ \chi_2^+(x) & \chi_2^0(x) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \chi_n^+(x) & \chi_n^0(x) & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1^{+*}(x) & \chi_2^{+*}(x) & \dots & \chi_n^{+*}(x) \\ \chi_1^{0*}(x) & \chi_2^{0*}(x) & \dots & \chi_n^{0*}(x) \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Del anterior resultado se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \chi_i^\alpha(x)\chi_i^{\alpha*}(x) &= \kappa_i(x), \quad \text{para } i = 1, 2, \\
 \chi_j^\alpha(x)\chi_j^{\alpha*}(x) &= 0, \quad \text{para } j = 2, \dots, n, \\
 \chi_i^\alpha(x)\chi_j^{\alpha*}(x) &= 0, \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ con } i \neq j. \tag{B.20}
 \end{aligned}$$

Las condiciones (B.20) implican que los únicos $\chi_i^\alpha(x)$ diferentes de cero son $\chi_1^+(x)$, $\chi_1^0(x)$, $\chi_2^+(x)$ y $\chi_2^0(x)$. Por lo tanto en (B.18) se tiene

$$W^\dagger(x)\phi(x) = \begin{pmatrix} \chi_1^+(x) & \chi_1^0(x) & 0 \\ \chi_2^+(x) & \chi_2^0(x) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{0}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

Análogamente para la segunda ecuación de (B.16) se obtiene lo siguiente

$$W^\dagger(x)\phi'(x) = \begin{pmatrix} \chi_1'^+(x) & \chi_1'^0(x) & 0 \\ \chi_2'^+(x) & \chi_2'^0(x) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{0}_{n-2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.22})$$

donde los $\chi_i'^\alpha(x)$ deben cumplir condiciones en la forma de (B.20). Ahora se define los vectores

$$\chi_i(x) = \begin{pmatrix} \chi_i^+(x) \\ \chi_i^0(x) \end{pmatrix}, \quad \chi_i'(x) = \begin{pmatrix} \chi_i'^+(x) \\ \chi_i'^0(x) \end{pmatrix}, \quad \text{con } i = 1, 2. \quad (\text{B.23})$$

de los cuales se deduce

$$\begin{aligned} \chi_1^\dagger(x)\chi_1(x) &= \chi_1'^\dagger(x)\chi_1'(x) = \kappa_1(x), \\ \chi_2^\dagger(x)\chi_2(x) &= \chi_2'^\dagger(x)\chi_2'(x) = \kappa_2(x), \\ \chi_1^\dagger(x)\chi_2(x) &= \chi_1'^\dagger(x)\chi_2'(x) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

En conclusión, se puede encontrar una matriz $U_G(x) \in U(2)$ tal que

$$\chi_i'^\alpha(x) = (U_G(x))_{\alpha\beta} \chi_i^\beta(x), \quad i = 1, 2. \quad (\text{B.25})$$

Donde esta matriz $U_G(x)$ tendrá la forma

$$U_G(x) = \begin{pmatrix} (U_G(x))_{++} & (U_G(x))_{+0} \\ (U_G(x))_{0+} & (U_G(x))_{00} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.26})$$

Al reemplazar $U_G(x)$ en (B.8), se obtiene la matriz $\hat{U}_G(x)$. Ahora de (B.22) se tiene lo siguiente

$$W^\dagger(x)\phi'(x) = \begin{pmatrix} \chi_1'^+(x) & \chi_1'^0(x) & 0 \\ \chi_2'^+(x) & \chi_2'^0(x) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{0}_{n-2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} (U_G(x))_{++} \chi_1^+(x) + (U_G(x))_{+0} \chi_1^0(x) & (U_G(x))_{0+} \chi_1^+(x) + (U_G(x))_{00} \chi_1^0(x) & 0 \\ (U_G(x))_{++} \chi_2^+(x) + (U_G(x))_{+0} \chi_2^0(x) & (U_G(x))_{0+} \chi_2^+(x) + (U_G(x))_{00} \chi_2^0(x) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{0}_{n-2} \end{pmatrix}, \\
W^\dagger(x) \phi'(x) &= \begin{pmatrix} \chi_1^+(x) & \chi_1^0(x) & 0 \\ \chi_2^+(x) & \chi_2^0(x) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{0}_{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (U_G(x))_{++} & (U_G(x))_{0+} & 0 \\ (U_G(x))_{+0} & (U_G(x))_{00} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{n-2} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.27})
\end{aligned}$$

La anterior ecuación se reescribe como

$$W^\dagger \phi'(x) = W^\dagger \phi(x) \hat{U}_G^T(x), \quad (\text{B.28})$$

además $W(x) \in U(n)$, entonces al multiplicar por izquierda $W(x)$ en (B.28)

$$\phi'(x) = \phi(x) \hat{U}_G^T(x). \quad (\text{B.29})$$

Es decir, $\phi'(x)$ y $\phi(x)$ están relacionados por una transformación gauge. Se resume los conceptos presentados en este apéndice en un teorema.

Teorema 3 *Para n dobletes de campos Higgs de la misma hipercarga débil $y = +1/2$, la matriz $\underline{K}(x) = \left(\varphi_j^\dagger(x) \varphi_i(x) \right)$ es una matriz $n \times n$ semidefinida positiva de rango ≤ 2 . Para cualquier matriz $\underline{K}(x)$ de dimensiones $n \times n$, que es semidefinida positiva de rango ≤ 2 , existen campos Higgs tales que (B.2) se satisface. Si tenemos dos configuraciones de campos cualesquiera, que dan la misma matriz $\underline{K}(x)$, estas estarán relacionados por una transformación gauge $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Las matrices $\underline{K}(x)$ forman, por lo tanto, el espacio de las órbitas gauge de los n campos de dobletes Higgs.*

Apéndice C

Propiedades de la Matriz $\underline{K}$

Aquí vamos a discutir las propiedades de la matriz $\underline{K}$ (4.4) con respecto a su rango. Primero, se puede ver que la matriz (4.4) es hermítica y semidefinida positiva. Consecuentemente, se encuentra una transformación unitaria que diagonaliza $\underline{K}$,

$$\underline{K}' = \underline{U} \underline{K} \underline{U}^\dagger = \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.1})$$

con todos los $\kappa_i \geq 0$. En particular,

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\underline{K}) &= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3, \\ (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) &= (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2 - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2) = 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_3 \\ \text{Det}(\underline{K}) &= \kappa_1\kappa_2\kappa_3 \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Se descompone la matriz $\underline{K}'$ como en (4.8) y de las propiedades de las matrices de Gell-Mann (4.7) se reescribe la segunda condición de (C.2) en la forma

$$\begin{aligned} (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) &= \frac{1}{4} K_\alpha^2 (\text{Tr}(\lambda_\alpha))^2 - \frac{1}{4} K_\alpha K_\beta \text{Tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta) = \frac{3}{2} K_\alpha^2 \delta_{\alpha 0} - \frac{1}{2} K_\alpha K_\beta \delta_{\alpha\beta}, \\ &= \frac{3}{2} K_0^2 - \frac{1}{2} K_\alpha^2 = K_0^2 - \frac{1}{2} K_a^2. \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

Suponer ahora que la matriz $\underline{K}$ tiene rango 3, entonces, para todos los tres κ_i

$$\kappa_i > 0. \quad (\text{C.4})$$

Se deduce inmediatamente de (C.2)

$$\text{Tr}(\underline{K}) > 0, \quad (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) > 0, \quad \text{Det}(\underline{K}) > 0. \quad (\text{C.5})$$

Al tomar el proceso contrario, se considera una matriz hermítica $\underline{K}$, la cual mediante una transformación unitaria pueda ser diagonalizada, en donde se satisface (C.5),

es decir

$$\text{Tr}(\underline{K}) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 > 0, \quad (\text{C.6})$$

$$(\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) = 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_3 > 0, \quad (\text{C.7})$$

$$\text{Det}(\underline{K}) = \kappa_1\kappa_2\kappa_3 > 0. \quad (\text{C.8})$$

De (C.8) se tiene dos posibilidades para que se cumpla la desigualdad. La primera, es que los tres $\kappa_i > 0$, los cuales a su vez, satisfacen las dos condiciones sobre la traza de manera trivial. La segunda posibilidad es que uno de ellos sea positivo y los dos restantes negativos. De la última, sin pérdida de generalidad se asume que $\kappa_2, \kappa_3 < 0$, por lo tanto, la expresión

$$(\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) = 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_3,$$

se puede reescribir así

$$\begin{aligned} 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_3 &= 2\kappa_1(\kappa_2 + \kappa_3) - \kappa_2^2 + \kappa_2^2 + 2\kappa_2\kappa_3 + \kappa_3^2 - \kappa_3^2, \\ &= 2\kappa_1(\kappa_2 + \kappa_3) + (\kappa_2 + \kappa_3)^2 - \kappa_2^2 - \kappa_3^2, \\ 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_3 &= (2\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)(\kappa_2 + \kappa_3) - \kappa_2^2 - \kappa_3^2. \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Si $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 > 0$, como $\kappa_1 > 0$, entonces bajo esta suposición $2\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 > \kappa_1 > 0$. En (C.9) se tiene

$$2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_3 = \underbrace{(2\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)}_{>0} \underbrace{(\kappa_2 + \kappa_3)}_{<0} - \kappa_2^2 - \kappa_3^2 < 0, \quad (\text{C.10})$$

es decir, no se cumple la condición (C.7). De otro modo si $2\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 < 0$, puede que la condición (C.9) sea positiva, pero esto implicaría que

$$\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 < -\kappa_1 < 0, \quad (\text{C.11})$$

es decir, no se cumple la condición (C.6). Por lo tanto, si una matriz hermítica 3×3 satisface las condiciones (C.5), implica que todos los $\kappa_i > 0$. Esto es, $\underline{K}$ tiene rango 3 y es semidefinida positiva.

Suponer ahora que la matriz $\underline{K}$ tiene rango 2, entonces, sin pérdida de generalidad se puede asumir

$$\kappa_1 > 0, \quad \kappa_2 > 0, \quad \kappa_3 = 0. \quad (\text{C.12})$$

De (C.2) inmediatamente se deduce que

$$\text{Tr}(\underline{K}) > 0, \quad (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) > 0, \quad \text{Det}(\underline{K}) = 0. \quad (\text{C.13})$$

Ahora se realiza el proceso contrario. Se toma una matriz hermítica $\underline{K}$, que pueda ser diagonalizada mediante una transformación unitaria, tal que, cumple las condiciones (C.13). De la última ecuación de (C.2), por lo menos uno de los $\kappa_i = 0$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\kappa_3 = 0$. Por lo tanto, se tiene

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\underline{K}) &= \kappa_1 + \kappa_2 > 0 \\ (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) &= 2\kappa_1\kappa_2 > 0 \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

lo cual implica que $\kappa_1 > 0$ y $\kappa_2 > 0$. Es decir, $\underline{K}$ tiene rango 2 y es semidefinida positiva.

Otra forma de caracterizar las matrices semidefinidas positivas de rango 2 es como sigue. Se establece

$$\kappa_1 = L^2 \sin^2(\chi), \quad \kappa_2 = L^2 \cos^2(\chi), \quad \kappa_3 = 0. \quad (\text{C.15})$$

Al combinar la primer desigualdad de (C.14) con (4.31)

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\underline{K}) &= \kappa_1 + \kappa_2 = L^2 (\sin^2(\chi) + \cos^2(\chi)) = L^2 = \sqrt{\frac{3}{2}} K_0 > 0. \\ \kappa_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} K_0 \sin^2(\chi), \quad \kappa_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} K_0 \cos^2(\chi). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

De la segunda condición de (C.14), se tiene

$$2\kappa_1\kappa_2 = \frac{3}{2} K_0^2 \sin^2(\chi) \cos^2(\chi) > 0 \rightarrow \sin^2(\chi) \cos^2(\chi) > 0. \quad (\text{C.17})$$

Se aplica identidades trigonométricas sobre (C.17)

$$\frac{1}{4} (1 - \cos(2\chi)) (1 + \cos(2\chi)) = \frac{1}{4} (1 - \cos^2(2\chi)) = \frac{1}{4} \sin^2(2\chi) = \frac{1}{8} (1 - \cos(4\chi)) > 0,$$

$$1 > \cos(4\chi). \quad (\text{C.18})$$

Como el mínimo valor que puede tomar la función coseno es -1 , entonces el parámetro χ quedará definido de la siguiente manera

$$\begin{aligned} -1 &\leq \cos(4\chi) < 1, \\ 0 &< \chi \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Por lo tanto, los autovalores de $\underline{K}$ se pueden reparametrizar como

$$\kappa_1 = \sqrt{\frac{3}{2}} K_0 \sin^2(\chi), \quad \kappa_2 = \sqrt{\frac{3}{2}} K_0 \cos^2(\chi), \quad \kappa_3 = 0, \quad K_0 > 0, \quad 0 \leq \chi < \frac{\pi}{4}. \quad (\text{C.20})$$

Sean $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$ los autovectores ortonormales de $\underline{K}$ provenientes de κ_1 y κ_2 respectivamente, entonces se puede definir $\underline{K}$ como

$$\underline{K} = \sqrt{\frac{3}{2}} K_0 \left(\sin^2(\chi) \mathbf{w}_1 \mathbf{w}_1^\dagger + \cos^2(\chi) \mathbf{w}_2 \mathbf{w}_2^\dagger \right), \quad (\text{C.21})$$

donde

$$\mathbf{w}_i^\dagger \mathbf{w}_j = \delta_{ij}. \quad (\text{C.22})$$

Para $0 < \chi < \pi/4$ los $\mathbf{w}_i$ están ajustados a transformaciones de fase, para $\chi = \pi/4$ se pueden realizar rotaciones arbitrarias $U(2)$ de $\mathbf{w}_1$ y $\mathbf{w}_2$, porque los autovalores al ser degenerados, generan un subespacio vectorial. Claramente cada matriz semidefinida positiva $\underline{K}$ de la forma (C.21) tiene rango 2 y cada matriz semidefinida positiva $\underline{K}$ de rango 2 puede ser escrita en la forma (C.21).

Ahora, se supone que la matriz $\underline{K}$ tiene rango 1, entonces, sin pérdida de generalidad, se puede asumir

$$\kappa_1 > 0, \quad \kappa_2 = 0, \quad \kappa_3 = 0. \quad (\text{C.23})$$

De (C.2), se deduce inmediatamente que

$$\text{Tr}(\underline{K}) > 0, \quad (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) = 0, \quad \text{Det}(\underline{K}) = 0. \quad (\text{C.24})$$

Por otra parte, si las condiciones (C.24) se cumplen para una matriz $\underline{K}$, al emplear (C.2), la condición sobre el determinante requiere que por lo menos uno de los κ_i sea

cero, sin pérdida de generalidad se puede tomar por ejemplo a $\kappa_3 = 0$. La segunda condición quedará de la forma

$$(\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) = 2\kappa_1\kappa_2 = 0, \quad (\text{C.25})$$

lo cual requiere que otro autovalor sea cero, se puede tomar por ejemplo a $\kappa_2 = 0$. Eventualmente la primera condición establece que el autovalor restante $\kappa_1 > 0$. Por consiguiente, la matriz $\underline{K}$ tiene rango 1 y es semidefinida positiva.

Sea $\mathbf{w}$ el autovalor de $\underline{K}$ con respecto al autovalor κ_1 para una matriz de rango 1, en donde

$$\mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} = 1. \quad (\text{C.26})$$

De la ecuación (4.31) se encuentra que

$$\text{Tr}(\underline{K}) = \kappa_1 = K_0 \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad K_0 > 0. \quad (\text{C.27})$$

Entonces, cualquier matriz semidefinida positiva $\underline{K}$ de rango 1 puede ser representada como

$$\underline{K} = K_0 \sqrt{\frac{3}{2}} \mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} \quad (\text{C.28})$$

Además, cualquier matriz de la forma (C.28) con $K_0 > 0$ y $\mathbf{w}^\dagger \mathbf{w} = 1$, es una matriz semidefinida positiva de rango 1. Claramente $\mathbf{w}$ está fijo a transformaciones de fase.

Finalmente, se supone que la matriz $\underline{K}$ tiene rango 0; entonces, evidentemente todos los κ_i serán cero, correspondiendo a

$$\text{Tr}(\underline{K}) = 0, \quad (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) = 0, \quad \text{Det}(\underline{K}) = 0. \quad (\text{C.29})$$

El proceso opuesto en este caso será: se tiene las condiciones (C.29), la condición sobre el determinante implicaría que por lo menos un κ_i sea cero, por ejemplo $\kappa_3 = 0$, la segunda condición sobre la traza, de hecho requiere que otro autovalor sea cero, por ejemplo $\kappa_2 = 0$, y la primera condición de la traza implicaría que $\kappa_1 = 0$. Esto significa que $\underline{K} = 0$. Por lo tanto, hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema 4 Sea $\underline{K} = K_\alpha \lambda_\alpha / 2$ una matriz hermítica. $\underline{K}$ tiene rango 3 y es semidefinida positiva si y solo si

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\underline{K}) &= \sqrt{\frac{3}{2}} K_0 > 0, \\ 2K_0^2 - K_a K_a &> 0, \\ \text{Det}(\underline{K}) &> 0.\end{aligned}\tag{C.30}$$

$\underline{K}$ tiene rango 2 y es semidefinida positiva si y solo si

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\underline{K}) &= \sqrt{\frac{3}{2}} K_0 > 0, \\ 2K_0^2 - K_a K_a &> 0, \\ \text{Det}(\underline{K}) &= 0.\end{aligned}\tag{C.31}$$

$\underline{K}$ tiene rango 1 y es semidefinida positiva si y solo si

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\underline{K}) &= \sqrt{\frac{3}{2}} K_0 > 0, \\ 2K_0^2 - K_a K_a &= 0, \\ \text{Det}(\underline{K}) &= 0.\end{aligned}\tag{C.32}$$

$\underline{K} = 0$ si y solo si

$$\begin{aligned}\text{Tr}(\underline{K}) &= \sqrt{\frac{3}{2}} K_0 = 0, \\ 2K_0^2 - K_a K_a &= 0, \\ \text{Det}(\underline{K}) &= 0.\end{aligned}\tag{C.33}$$

Con este teorema se ha expresado las propiedades de la matriz $\underline{K}$ en términos de los coeficientes de expansión K_α , $\alpha = 0, \dots, 8$. Para expresar $\text{Det}(\underline{K})$ en términos de los coeficientes de expansión K_α , se procede de la siguiente manera (mirar también [17]). Se define, junto con la matriz $\underline{K}$, una matriz $\underline{M} = (M_{ij})$, tal que:

$$M_{ij} = \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} K_{mk} K_{nl}.\tag{C.34}$$

Para una matriz $\underline{K}$ hermítica se tiene lo siguiente

$$M_{ji}^* = \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} K_{km}^* K_{ln}^* = \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} K_{mk} K_{nl} = M_{ij},\tag{C.35}$$

es decir, $\underline{M}$ es también hermítica. Para cualquier matriz $U \in U(3)$ se tiene la relación

$$\epsilon_{ijk} U_{ii'} U_{jj'} U_{kk'} = \epsilon_{1jk} U_{1i'} U_{jj'} U_{kk'} + \epsilon_{2jk} U_{2i'} U_{jj'} U_{kk'} + \epsilon_{3jk} U_{3i'} U_{jj'} U_{kk'},$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_{123} U_{1i'} U_{2j'} U_{3k'} + \epsilon_{132} U_{1i'} U_{3j'} U_{2k'} + \epsilon_{213} U_{2i'} U_{1j'} U_{3k'}, \\
&+ \epsilon_{231} U_{2i'} U_{3j'} U_{1k'} + \epsilon_{312} U_{3i'} U_{1j'} U_{2k'} + \epsilon_{321} U_{3i'} U_{2j'} U_{1k'}.
\end{aligned}$$

Al reagrupar términos y recordando que $\epsilon_{ijk} = \pm 1$, positivo para una permutación par y negativo para una permutación impar

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijk} U_{ii'} U_{jj'} U_{kk'} &= U_{1i'} (U_{2j'} U_{3k'} - U_{3j'} U_{2k'}) - U_{2i'} (U_{1j'} U_{3k'} - U_{3j'} U_{1k'}) \\
&+ U_{3i'} (U_{1j'} U_{2k'} - U_{2j'} U_{1k'}).
\end{aligned} \tag{C.36}$$

La anterior expresión se puede reescribir como

$$\epsilon_{ijk} U_{ii'} U_{jj'} U_{kk'} = \epsilon_{i'j'k'} \text{Det}(U). \tag{C.37}$$

Realizando una transformación (4.38) de $\underline{K}$, en $\underline{M}$ se tiene que:

$$M'_{ij} = \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} K'_{mk} K'_{nl}, \tag{C.38}$$

donde $K'_{ij} = U_{im} K_{ml} U_{jl}^*$, por lo tanto

$$\begin{aligned}
M'_{ij} &= \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} U_{mo} K_{op} U_{kp}^* U_{nq} K_{qw} U_{lw}^*, \\
&= \epsilon_{ikl} U_{kp}^* U_{lw}^* \epsilon_{jmn} U_{mo} U_{nq} K_{op} K_{qw}.
\end{aligned} \tag{C.39}$$

Debido a que $U \in U(2)$, se tiene que $UU^\dagger = \mathbb{1}_3$. Si se usa la notación indicial $U_{iz} U_{yz}^* = \delta_{iy}$, entonces en (C.39)

$$M'_{ij} = \epsilon_{ikl} U_{kp}^* U_{lw}^* (U_{iz}^* U_{yz}) \epsilon_{jmn} U_{mo} U_{nq} (U_{jf} U_{rf}^*) K_{op} K_{qw}. \tag{C.40}$$

Al usar (C.38), se obtiene

$$\begin{aligned}
M'_{yr} &= U_{yz} \epsilon_{zpw} \underbrace{\text{Det}(U^*)}_{=\text{Det}(U^\dagger)} \epsilon_{foq} \text{Det}(U) K_{op} K_{qw} U_{rf}^*. \\
&= U_{yz} \underbrace{\epsilon_{zpw} \epsilon_{foq} K_{op} K_{qw}}_{=M_{zf}} U_{rf}^* \underbrace{\text{Det}(U^\dagger U)}_{=1}. \\
M'_{yr} &= U_{yz} M_{zf} U_{rf}^*.
\end{aligned} \tag{C.41}$$

Se usa notación matricial para obtener

$$\underline{M}' = \underline{U} \underline{K} \underline{U}^\dagger. \tag{C.42}$$

Además se puede encontrar

$$\text{Tr}(\underline{KM}) = M_{ij}K_{ji} = \epsilon_{ikl}\epsilon_{jmn}K_{mk}K_{nl}K_{ji} = \epsilon_{ikl}\epsilon_{ikl}\text{Det}(K) = \delta_{ikl}^{ikl}\text{Det}(K) \quad (\text{C.43})$$

Se contrae índices

$$\delta_{ikl}^{ikl} = 3!.$$

Con esto se tiene

$$\text{Det}(\underline{K}) = \frac{1}{3!} \text{Tr}(\underline{KM}) \quad (\text{C.44})$$

Se considera ahora una transformación unitaria U la cual diagonaliza $\underline{K}$; mirar (C.1).

Entonces de (C.34) se encuentra lo siguiente

$$U\underline{M}U^\dagger = U_{ie}M_{ep}U_{jp}^* = U_{ie}\epsilon_{ekl}\epsilon_{pmn}K_{mk}K_{nl}U_{jp}^* = U_{ie}\delta_{ekl}^{pmn}K_{mk}K_{nl}U_{jp}^*. \quad (\text{C.45})$$

El tensor numérico δ_{ekl}^{pmn} tiene el siguiente desarrollo:

$$\delta_{ekl}^{pmn} = \begin{vmatrix} \delta_e^p & \delta_k^p & \delta_l^p \\ \delta_e^m & \delta_k^m & \delta_l^m \\ \delta_e^n & \delta_k^n & \delta_l^n \end{vmatrix} = \delta_e^p(\delta_k^m\delta_l^n - \delta_k^n\delta_l^m) - \delta_k^p(\delta_e^m\delta_l^n - \delta_e^n\delta_l^m) + \delta_l^p(\delta_e^m\delta_k^n - \delta_e^n\delta_k^m). \quad (\text{C.46})$$

se reemplaza esto en (C.45)

$$\begin{aligned} U\underline{M}U^\dagger &= \delta_e^p\delta_k^m\delta_l^n U_{ie}K_{mk}K_{nl}U_{jp}^* - \delta_e^p\delta_k^n\delta_l^m U_{ie}K_{mk}K_{nl}U_{jp}^* - \delta_k^p\delta_e^m\delta_l^n U_{ie}K_{mk}K_{nl}U_{jp}^* \\ &\quad + \delta_k^p\delta_e^n\delta_l^m U_{ie}K_{mk}K_{nl}U_{jp}^* + \delta_l^p\delta_e^m\delta_k^n U_{ie}K_{mk}K_{nl}U_{jp}^* - \delta_l^p\delta_e^n\delta_k^m U_{ie}K_{mk}K_{nl}U_{jp}^*, \\ &= U_{ie}U_{je}^*K_{mm}K_{nn} - U_{ie}U_{je}^*K_{mn}K_{nm} - U_{im}K_{mp}U_{jp}^*K_{nn} + U_{in}K_{nm}K_{mp}U_{jp}^*, \\ &\quad + U_{im}K_{mn}K_{np}U_{jp}^* - U_{in}K_{np}U_{jp}^*K_{mm}, \\ &= (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) - 2U\underline{K}U^\dagger \text{Tr}(\underline{K}) + 2U\underline{K}\underline{K}U^\dagger, \\ &= (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) - 2\underline{K}' \text{Tr}(\underline{K}) + 2U\underline{K}U^\dagger U\underline{K}U^\dagger, \\ U\underline{M}U^\dagger &= (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2) - 2\underline{K}' \text{Tr}(\underline{K}) + 2\underline{K}'^2 \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

La anterior ecuación en forma matricial queda

$$U\underline{M}U^\dagger = (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2 \mathbb{1}_3 - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2) \mathbb{1}_3 - 2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) \begin{pmatrix} \kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \begin{pmatrix} \kappa_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_3^2 \end{pmatrix}, \\
& = \begin{pmatrix} 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_3 \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_2\kappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_3 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$U \underline{M} U^\dagger = \begin{pmatrix} 2\kappa_2\kappa_3 & 0 & 0 \\ 0 & 2\kappa_1\kappa_3 & 0 \\ 0 & 0 & 2\kappa_1\kappa_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{C.48})$$

Para la condición sobre el determinante (C.44) se tiene

$$\text{Det}(\underline{K}) = \frac{1}{3!} \text{Tr}(\underline{K} \underline{M}) = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3. \quad (\text{C.49})$$

Ahora se calcula la traza de $\underline{M}$

$$\text{Tr}(\underline{M}) = \epsilon_{ikl} \epsilon_{imn} K_{mk} K_{nl} = \delta_{ikl}^{imn} K_{mk} K_{nl},$$

Si se contrae índices

$$\delta_{imn}^{ikl} = \delta_{mn}^{kl} = \delta_m^k \delta_n^l - \delta_n^k \delta_m^l,$$

es decir

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\underline{M}) &= (\delta_m^k \delta_n^l - \delta_n^k \delta_m^l) K_{mk} K_{nl} = K_{mm} K_{nn} - K_{mn} K_{nm}, \\
\text{Tr}(\underline{M}) &= (\text{Tr}(\underline{K}))^2 - \text{Tr}(\underline{K}^2)
\end{aligned} \quad (\text{C.50})$$

Como se hizo para $(\underline{K})$ en (4.8), se puede expandir $\underline{M}$ en términos de λ_α ,

$$\underline{M} = \frac{1}{2} M_\alpha \lambda_\alpha, \quad M_\alpha = \text{Tr}(\underline{M} \lambda_\alpha) \quad (\text{C.51})$$

Al reemplazar (C.34) en la segunda ecuación de (C.51), se encontrará la expresión de M_α en términos de K_β (4.9)

$$M_\alpha = \text{Tr} (\underline{M} \lambda_\alpha) = \frac{1}{2} M_{ij} (\lambda_\alpha)_{ji} = \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} K_{mk} K_{nl} (\lambda_\alpha)_{ji}, \quad (\text{C.52})$$

donde los elementos de $\underline{K}$ se pueden representar como

$$K_{ij} = \frac{1}{2} K_\beta (\lambda_\beta)_{ij}. \quad (\text{C.53})$$

Por lo tanto en (C.52) se tiene

$$M_\alpha = \frac{1}{4} K_\beta K_\gamma \delta_{ikl}^{jmn} (\lambda_\alpha)_{ji} (\lambda_\beta)_{mk} (\lambda_\gamma)_{nl}. \quad (\text{C.54})$$

De (C.46), se puede inferir el siguiente resultado

$$\delta_{ikl}^{jmn} = \delta_i^j (\delta_k^m \delta_l^n - \delta_k^n \delta_l^m) - \delta_k^j (\delta_i^m \delta_l^n - \delta_i^n \delta_l^m) + \delta_l^j (\delta_i^m \delta_k^n - \delta_i^n \delta_k^m). \quad (\text{C.55})$$

Se reemplaza esto en (C.54)

$$M_\alpha = \frac{1}{4} K_\beta K_\gamma [\delta_i^j (\delta_k^m \delta_l^n - \delta_k^n \delta_l^m) - \delta_k^j (\delta_i^m \delta_l^n - \delta_i^n \delta_l^m) + \delta_l^j (\delta_i^m \delta_k^n - \delta_i^n \delta_k^m)] (\lambda_\alpha)_{ji} (\lambda_\beta)_{mk} (\lambda_\gamma)_{nl}, \quad (\text{C.56})$$

destruyendo los paréntesis

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \frac{1}{4} K_\beta K_\gamma \left[(\lambda_\alpha)_{ii} (\lambda_\beta)_{mm} (\lambda_\gamma)_{nn} - (\lambda_\alpha)_{ii} (\lambda_\beta)_{mn} (\lambda_\gamma)_{nm} - (\lambda_\alpha)_{ji} (\lambda_\beta)_{ij} (\lambda_\gamma)_{nn} \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_\alpha)_{ji} (\lambda_\gamma)_{im} (\lambda_\beta)_{mj} + (\lambda_\alpha)_{ji} (\lambda_\beta)_{in} (\lambda_\gamma)_{nj} - (\lambda_\alpha)_{ji} (\lambda_\gamma)_{ij} (\lambda_\beta)_{mm} \right], \\ M_\alpha &= \frac{1}{4} K_\beta K_\gamma \left[\text{Tr} (\lambda_\alpha) \text{Tr} (\lambda_\beta) \text{Tr} (\lambda_\gamma) - \text{Tr} (\lambda_\alpha) \text{Tr} (\lambda_\beta \lambda_\gamma) - \text{Tr} (\lambda_\gamma) \text{Tr} (\lambda_\alpha \lambda_\beta) \right. \\ &\quad \left. + \text{Tr} (\lambda_\alpha \lambda_\gamma \lambda_\beta) + \text{Tr} (\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma) - \text{Tr} (\lambda_\beta) \text{Tr} (\lambda_\gamma \lambda_\alpha) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

La expresión que define a M_α en términos de las variables orbitales K_α será la siguiente

$$M_\alpha = G_{\alpha\beta\gamma} K_\beta K_\gamma, \quad (\text{C.58})$$

donde

$$G_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4} \left\{ \text{Tr} (\lambda_\alpha) \text{Tr} (\lambda_\beta) \text{Tr} (\lambda_\gamma) + \text{Tr} (\lambda_\alpha \lambda_\gamma \lambda_\beta) + \text{Tr} (\lambda_\alpha \lambda_\beta \lambda_\gamma) - \text{Tr} (\lambda_\alpha) \text{Tr} (\lambda_\beta \lambda_\gamma) \right\}$$

$$- \text{Tr}(\lambda_\beta) \text{Tr}(\lambda_\gamma \lambda_\alpha) - \text{Tr}(\lambda_\gamma) \text{Tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta) \}. \quad (\text{C.59})$$

Claramente, $G_{\alpha\beta\gamma}$ es completamente simétrica en α , β y γ . Se hace uso de las propiedades de las matrices de Gell-Mann (4.7), para considerar ciertos valores explícitos de la constante,

$$\begin{aligned} G_{0\beta\gamma} &= \frac{1}{4} \left\{ \text{Tr}(\lambda_0) \text{Tr}(\lambda_\beta) \text{Tr}(\lambda_\gamma) + \text{Tr}(\lambda_0 \lambda_\gamma \lambda_\beta) + \text{Tr}(\lambda_0 \lambda_\beta \lambda_\gamma) - \text{Tr}(\lambda_0) \text{Tr}(\lambda_\beta \lambda_\gamma) \right. \\ &\quad \left. - \text{Tr}(\lambda_\beta) \text{Tr}(\lambda_\gamma \lambda_0) - \text{Tr}(\lambda_\gamma) \text{Tr}(\lambda_0 \lambda_\beta) \right\}. \\ G_{0\beta\gamma} &= \frac{1}{4} \left\{ 6\sqrt{6}\delta_{\beta 0}\delta_{\gamma 0} + 4\sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{\beta\gamma} - 2\sqrt{6}\delta_{\beta\gamma} - 12\sqrt{\frac{2}{3}}\delta_{\beta 0}\delta_{\gamma 0} \right\} = \frac{1}{4} \left\{ 2\sqrt{6}\delta_{\beta 0}\delta_{\gamma 0} - \frac{2}{3}\sqrt{6}\delta_{\beta\gamma} \right\}, \\ G_{0\beta\gamma} &= \frac{2}{\sqrt{6}}\delta_{\beta 0}\delta_{\gamma 0} - \frac{\sqrt{6}}{6}\delta_{\beta\gamma} \end{aligned} \quad (\text{C.60})$$

Un cálculo muy interesante con respecto a la constante $G_{\alpha\beta\gamma}$, es cuando toma el valor G_{abc} . Para esta deducción se toma en cuenta que $\lambda_a = 0$, es decir

$$G_{abc} = \frac{1}{4} \text{Tr} [\lambda_a (\lambda_b \lambda_c + \lambda_c \lambda_b)] = \frac{1}{4} \text{Tr} [\lambda_a \{\lambda_b, \lambda_c\}]. \quad (\text{C.61})$$

El anticonmutador de las matrices de Gell-Mann tiene el siguiente resultado

$$\{\lambda_b, \lambda_c\} = \frac{4}{3}\delta_{bc} + 2d_{bcd}\lambda_d, \quad (\text{C.62})$$

donde d_{bcd} son las constantes simétricas usuales de $SU(3)$ (mirar el apéndice C de [12]). Con esto la constante G_{abc} tiene el siguiente valor

$$\begin{aligned} G_{abc} &= \frac{1}{4} \text{Tr} \left[\lambda_a \left(\frac{4}{3}\delta_{bc} + 2d_{bcd}\lambda_d \right) \right] = \frac{1}{4} \text{Tr} \left(\frac{4}{3}\delta_{bc}\lambda_a + 2d_{bcd}\lambda_a\lambda_d \right), \\ G_{abc} &= \frac{1}{3}\delta_{bc} \text{Tr}(\lambda_a) + \frac{1}{2}d_{bcd} \text{Tr}(\lambda_a\lambda_d) = d_{bcd}\delta_{ad} = d_{abc}. \end{aligned} \quad (\text{C.63})$$

De (C.44), (C.51) y (C.58), se encuentra que

$$\text{Det}(\underline{K}) = \frac{1}{24} K_\alpha M_\beta \text{Tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta) = \frac{1}{12} K_\alpha M_\alpha = \frac{1}{12} G_{\alpha\beta\gamma} K_\alpha K_\beta K_\gamma. \quad (\text{C.64})$$

Esta es la expresión deseada de $\text{Det}(\underline{K})$ en términos de los K_α .

Finalmente se discute acerca de la transformación de la base $\alpha = 0, 1, \dots, 7, 8$ a $+, 1, \dots, 7, -$. Esto puede ser logrado por la matriz

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 0 & \sqrt{1/3} \\ 0 & \mathbb{1}_7 & 0 \\ \sqrt{1/3} & 0 & -\sqrt{2/3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{+0} & 0 & S_{+8} \\ 0 & \mathbb{1}_7 & 0 \\ S_{-0} & 0 & S_{-8} \end{pmatrix}. \quad (\text{C.65})$$

Entonces, acorde con (4.25) y (4.26),

$$\begin{aligned} K_+ &= S_{+0}K_0 + S_{+8}K_8 = \sqrt{\frac{2}{3}}K_0 + \sqrt{\frac{1}{3}}K_8, \\ K_- &= S_{-0}K_0 + S_{-8}K_8 = \sqrt{\frac{1}{3}}K_0 - \sqrt{\frac{2}{3}}K_8, \\ K_a, \quad a &= 1, \dots, 7 \quad \text{sin cambios.} \end{aligned} \tag{C.66}$$

Se puede escribir esto como una ecuación matricial de la forma

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} K_+ \\ K_a \\ K_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{+0} & 0 & S_{+8} \\ 0 & \mathbb{1}_7 & 0 \\ S_{-0} & 0 & S_{-8} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_0 \\ k_a \\ K_8 \end{pmatrix}. \tag{C.67}$$

La matriz S satisface

$$SS^T = \mathbb{1}_9, \quad S = S^T - \tag{C.68}$$

El cambio de base para (ξ_α) y $E = (\hat{E}_{\alpha\beta})$ (4.36), se realiza en una manera análoga

$$\begin{pmatrix} \xi_+ \\ \xi_a \\ \xi_- \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_a \\ \xi_8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \hat{E}_{++} & \hat{E}_{+b} & \hat{E}_{+-} \\ \hat{E}_{a+} & \hat{E}_{ab} & \hat{E}_{a-} \\ \hat{E}_{-+} & \hat{E}_{-b} & \hat{E}_{--} \end{pmatrix} = S(\hat{E}_{\alpha\beta})S^T, \quad a, b \in \{1, \dots, 7\}, \quad \alpha\beta \in \{0, \dots, 8\}. \tag{C.69}$$

Por ejemplo, debido a (C.68), se puede realizar el siguiente cálculo

$$\xi_\alpha K_\alpha = \xi_\alpha SS^T K_\alpha = S\xi_\alpha SK_\alpha = \begin{pmatrix} \xi_+ & \xi_a & \xi_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_+ \\ K_a \\ K_- \end{pmatrix} = \xi_+ K_+ + \sum_{a=1}^7 \xi_a K_a + \xi_- K_-. \tag{C.70}$$

Apéndice D

Las Matrices de Gell-Mann Generalizadas

Para la construcción de las matrices de Gell-Mann λ_a de dimensión n , donde, $a = 1, \dots, n^2 - 1$, se parte de las matrices $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k^\dagger$ con tamaño $n \times n$, las cuales tienen un 1 en la j -ésima fila y k -ésima columna y 0 en el resto de casillas. Aquí $\mathbf{e}_j$, con $j = 1, \dots, n$ son los vectores unitarios cartesianos de $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0)^T, \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, \dots, 0, 1)^T. \end{aligned} \tag{D.1}$$

En términos de estas matrices, se construye las $n^2 - 1$ matrices hermíticas sin traza λ_a , con $a = 1, \dots, n^2 - 1$, de la siguiente manera: Con $k = 1, \dots, n - 1$ y $j = 1, \dots, k$ se define

$$\lambda_a = \mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger + \mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger, \quad \text{para } a = k^2 + 2j - 2, \tag{D.2}$$

$$\lambda_a = -i\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger + i\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger, \quad \text{para } a = k^2 + 2j - 1. \tag{D.3}$$

Adicionalmente se construye las $n - 1$ matrices diagonales

$$\lambda_{(l+1)^2-1} = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left[\left(\sum_{j=1}^l \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\dagger \right) - l \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger \right], \quad 1 \leq l \leq n - 1. \tag{D.4}$$

Eventualmente se define la matriz λ_0 , proporcional a la matriz unitaria

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{2}{n}} \mathbb{1}_n. \tag{D.5}$$

Las matrices λ_α ($\alpha = 0, 1, \dots, n^2 - 1$) definidas de esta manera, en particular cumplen las condiciones (6.7). Para demostrar esto, se calcula $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b)$ y $\text{Tr}(\lambda_a)$ con λ_a

definido por (D.2), (D.3) y (D.4). Claramente se puede ver que la condición $\text{Tr}(\lambda_a)$ es siempre cero si $a \neq 0$. Es decir, si λ_a está definido por (D.2), se tiene que

$$\text{Tr}(\lambda_a) = \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger) + \text{Tr}(\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger) = 0,$$

debido a que, el valor máximo que tiene j es k , por lo tanto, el producto $\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger$ da una matriz que tiene todos sus elementos de la diagonal iguales a cero, esto mismo ocurre para $\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger$. Si λ_a está definido por (D.3), se tiene el mismo resultado

$$\text{Tr}(\lambda_a) = -i \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger) + i \text{Tr}(\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger) = 0.$$

Ahora, si λ_a está definido por (D.4) se tiene que

$$\text{Tr}(\lambda_a) = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left[\sum_{j=1}^l \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\dagger) - l \text{Tr}(\mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) \right] = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} (l - l) = 0.$$

Entonces, la única forma de que el cálculo de la traza de λ_a sea diferente de cero es cuando $a = 0$

$$\text{Tr}(\lambda_0) = \sqrt{\frac{2}{n}} \text{Tr}(\mathbb{1}_n) = \sqrt{2n}.$$

Con estos resultados se puede concluir que

$$\text{Tr}(\lambda_\alpha) = \sqrt{2n} \delta_{\alpha 0}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, n^2 - 1.$$

Al tomar la condición $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b)$, se considera todos las combinaciones posibles entre λ_a y λ_b : En primer lugar, se toma el caso cuando estas dos comparten la misma definición, entonces

- Si λ_a y λ_b se definen por (D.2), con $b = 1, \dots, n^2 - 1$, $l = 1, \dots, n - 1$ e $i = 1, \dots, l$ para $b = l^2 + 2i - 2$, se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) &= \text{Tr} \left[(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger + \mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger) (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_{l+1}^\dagger + \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_i^\dagger) \right] = \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) \\ &\quad + \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_i^\dagger) + \text{Tr}(\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) + \text{Tr}(\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_i^\dagger) \\ &= \delta_{k+1,i} \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) + \delta_{k+1,l+1} \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^\dagger) + \delta_{ji} \text{Tr}(\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) \\ &\quad + \delta_{j,l+1} \text{Tr}(\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_i^\dagger) \end{aligned}$$

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{k+1,i}\delta_{j,l+1} + 2\delta_{ji}\delta_{k+1,l+1}. \quad (\text{D.6})$$

De esta última ecuación, al tomar el primer término de la parte derecha se tiene que $k+1=i$ y $j=l+1$, es decir, al realizar el reemplazo adecuadamente se tiene

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2 + 2\delta_{l+1,i}\delta_{i,l+1}$$

Pero el índice i tiene como máximo valor l , por lo tanto $\delta_{i,l+1} = 0$, además esto implicaría que

$$\lambda_b = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_{l+1}^\dagger + \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_i^\dagger = \mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger + \mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger = \lambda_a. \implies \text{Tr}(\lambda_a \lambda_a) = 2 \quad (\text{D.7})$$

Al tomar el segundo término de (D.6) se tiene que $i=j$ y $j+1=k+1$, por lo tanto,

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{k+1,j}\delta_{j,k+1} + 2,$$

de nuevo, el valor máximo de j es k , entonces $\delta_{k+1,j} = 0$. Nuevamente esto implica que

$$\lambda_b = \lambda_a, \implies \text{Tr}(\lambda_a \lambda_a) = 2. \quad (\text{D.8})$$

Si $\lambda_a \neq \lambda_b$, inmediatamente el resultado de la traza es cero.

- Si λ_a y λ_b se definen por (D.3), con $b = 1, \dots, n^2-1$, $l = 1, \dots, n-1$ e $j' = 1, \dots, l$ para $b = l^2 + 2i - 1$, la traza tiene el siguiente resultado

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) &= \text{Tr} \left[(-i\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger + i\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger)(-i\mathbf{e}_{j'} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger + i\mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{j'}^\dagger) \right] = -\text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger \mathbf{e}_{j'} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) \\ &\quad + \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{j'}^\dagger) + \text{Tr}(\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger \mathbf{e}_{j'} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) - \text{Tr}(\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{j'}^\dagger) \\ \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) &= -2\delta_{k+1,j'}\delta_{j,l+1} + 2\delta_{jj'}\delta_{k+1,l+1}. \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

Tomando el primer término de (D.9) se tiene que $k+1=j'$ y $j=l+1$, esto implica que $\delta_{j,k+1} = 0$, además

$$\lambda_b = -i\mathbf{e}_{j'} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger + i\mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{j'}^\dagger = -i\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger + i\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger = -\lambda_a.$$

Con esto, la condición sobre la traza queda así

$$\text{Tr}[\lambda_a(-\lambda_a)] = -2 \implies \text{Tr}[\lambda_a(\lambda_a)] = 2. \quad (\text{D.10})$$

Al tomar el segundo término de (D.9), se tiene que $j = j'$ y $k + 1 = l + 1$, lo cual implicaría que $\delta_{k+1,j} = 0$, además se obtiene

$$\lambda_b - i\mathbf{e}_{j'}\mathbf{e}_{l+1}^\dagger + i\mathbf{e}_{l+1}\mathbf{e}_{j'}^\dagger = -i\mathbf{e}_j\mathbf{e}_{k+1}^\dagger + i\mathbf{e}_{k+1}\mathbf{e}_j^\dagger = \lambda_a, \implies \text{Tr}(\lambda_a\lambda_a) = 2 \quad (\text{D.11})$$

De otra manera, si $\lambda_a \neq \lambda_b$ da como resultado $\text{Tr}(\lambda_a\lambda_b) = 0$.

- Si $\lambda_{(l+1)^2-1}$ y $\lambda_{(m+1)^2-1}$ están definidos por (D.4), con $1 \leq m \leq n - 1$ se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda_{(l+1)^2-1}\lambda_{(m+1)^2-1}) &= \frac{2}{\sqrt{l(l+1)m(m+1)}} \left[\text{Tr} \left(\sum_{j=1}^l \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\dagger \sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\dagger \right) \right. \\ &\quad - m \text{Tr} \left(\sum_{j=1}^l \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\dagger \mathbf{e}_{m+1} \mathbf{e}_{m+1}^\dagger \right) - l \text{Tr} \left(\sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\dagger \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger \right) \\ &\quad \left. + ml \text{Tr} \left(\mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger \mathbf{e}_{m+1} \mathbf{e}_{m+1}^\dagger \right) \right]. \\ \text{Tr}(\lambda_{(l+1)^2-1}\lambda_{(m+1)^2-1}) &= \frac{2}{\sqrt{l(l+1)m(m+1)}} \left[\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^m \delta_{ji} \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^\dagger) \right. \\ &\quad - m \sum_{j=1}^l \delta_{j,m+1} \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{m+1}^\dagger) - l \sum_{i=1}^m \delta_{i,l+1} \text{Tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) \\ &\quad \left. + ml \delta_{l+1,m+1} \right]. \end{aligned} \quad (\text{D.12})$$

El primer término de la anterior ecuación determina que $i = j$, por otra parte, el último término toma valor cuando $l = m$, entonces con esto se obtiene que $\lambda_{(l+1)^2-1} = \lambda_{(m+1)^2-1}$, por lo tanto, con este resultado se tiene que $\delta_{j,m+1} = \delta_{j,l+1}$ lo cual lleva a cancelar el segundo término de (D.12), debido a que el último término de la sumatoria es l . El tercer término también se hace cero, debido a que $\delta_{i,l+1} = \delta_{i,m+1}$. Por estos resultados se tiene que

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda_{(l+1)^2-1}\lambda_{(l+1)^2-1}) &= \frac{2}{l(l+1)} \left[\sum_{j=1}^l \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\dagger) + l^2 \right] = \frac{2}{l(l+1)} (l + l^2) \\ \text{Tr}(\lambda_{(l+1)^2-1}\lambda_{(l+1)^2-1}) &= 2. \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Por otra parte, si se toma $l \neq m$, se obtiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda_{(l+1)^2-1} \lambda_{(m+1)^2-1}) &= \frac{2}{\sqrt{l(l+1)m(m+1)}} \left[\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^m \delta_{ji} \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^\dagger) \right. \\ &\quad \left. - m \sum_{j=1}^l \delta_{j,m+1} \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{m+1}^\dagger) - l \sum_{i=1}^m \delta_{i,l+1} \text{Tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) \right]. \end{aligned}$$

Una forma de desarrollar la anterior ecuación es considerar $l < m$, de tal forma que, el segundo término se vuelve cero, llevando al siguiente resultado

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda_{(l+1)^2-1} \lambda_{(m+1)^2-1}) &= \frac{2}{\sqrt{l(l+1)m(m+1)}} \left[\sum_{j=1}^l \sum_{i=1}^m \delta_{ji} \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_i^\dagger) \right. \\ &\quad \left. - l \sum_{i=1}^m \delta_{i,l+1} \text{Tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{l(l+1)m(m+1)}} \left[\sum_{j=1}^l \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\dagger) - l \right] \\ \text{Tr}(\lambda_{(l+1)^2-1} \lambda_{(m+1)^2-1}) &= \frac{2}{\sqrt{l(l+1)m(m+1)}} (l - l) = 0. \end{aligned} \quad (\text{D.14})$$

Esto mismo sucede al tomar $m < l$, entonces, se puede resumir estos dos resultados en

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 2\delta_{ab},$$

cuando λ_a y λ_b están definidos por (D.4)

- Es fácil ver que cuando se tiene dos matrices definidas por D.5 se obtiene que el valor de su traza es 2

Ahora se procede a calcular $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b)$ cuando ambas matrices no tienen la misma definición

- Si λ_a está definida por (D.2) y λ_b está definida por (D.3) con $l = 1, \dots, n-1$, $j' = 1, \dots, n$ y $b = l^2 + 2i - 1$, se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) &= \text{Tr} \left[(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger + \mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger) (-i \mathbf{e}_{j'} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger + i \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{j'}^\dagger) \right] = -i \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger \mathbf{e}_{j'} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) \\ &\quad + i \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{j'}^\dagger) - i \text{Tr}(\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger \mathbf{e}_{j'} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger) + i \text{Tr}(\mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{j'}^\dagger) \\ \text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) &= -i \delta_{k+1,j'} \delta_{j,l+1} + i \delta_{k+1,l+1} \delta_{jj'} - i \delta_{jj'} \delta_{k+1,l+1} + i \delta_{j,l+1} \delta_{k+1,j'} = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.15})$$

- Si λ_a está definida por (D.2) y $\lambda_{(l+1)^2-1}$ por (D.4), el cálculo de la traza es el siguiente

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\lambda_a \lambda_{(l+1)^2-1}) &= \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \text{Tr} \left[\left(\sum_{i=1}^l \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\dagger - l \mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{l+1}^\dagger \right) (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger + \mathbf{e}_{k+1} \mathbf{e}_j^\dagger) \right] \\
&= \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left[\sum_{i=1}^l \delta_{ij} \text{Tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_{k+1}^\dagger) + \sum_{i=1}^l \delta_{i,k+1} \text{Tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\dagger) \right. \\
&\quad \left. - l \delta_{l+1,j} \text{Tr}(\mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_{k+1}^\dagger) - l \delta_{l+1,k+1} \text{Tr}(\mathbf{e}_{l+1} \mathbf{e}_j^\dagger) \right] \\
\text{Tr}(\lambda_a \lambda_{(l+1)^2-1}) &= \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left[\sum_{i=1}^l \delta_{ij} \text{Tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_{k+1}^\dagger) + \sum_{i=1}^l \delta_{i,k+1} \text{Tr}(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j^\dagger) \right. \\
&\quad \left. - 2l \delta_{l+1,j} \delta_{l+1,k+1} \right]. \tag{D.16}
\end{aligned}$$

Cualquier vía que se tome para desarrollar la anterior ecuación da como resultado cero. Tomando el primer término del lado izquierdo, cuando $i = j$ se tiene que

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_{(l+1)^2-1}) = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} \left[\text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger) + \sum_{j=1}^l \delta_{j,k+1} \text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_j^\dagger) - 2l \delta_{l+1,j} \delta_{l+1,k+1} \right],$$

como el valor máximo que puede tomar j es k , se tiene que $\text{Tr}(\mathbf{e}_j \mathbf{e}_{k+1}^\dagger) = 0$ y $\delta_{j,k+1} = 0$, es decir

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_{(l+1)^2-1}) = \sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} (-2l \delta_{l+1,j} \delta_{l+1,k+1}) = -\sqrt{\frac{2}{l(l+1)}} (2l \delta_{j,k+1}) = 0.$$

Sucede exactamente el mismo proceso si se escoge cualquier alternativa que ofrece la ecuación (D.16), por lo tanto se concluye que

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 0,$$

si λ_a está definido por (D.2) y λ_b por (D.4)

- Al tomar las matrices λ_a y λ_b definidas por (D.3) y (D.4) respectivamente. El calculo de $\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b)$ es totalmente análogo al proceso llevado en el anterior numeral, por lo tanto, se concluye que

$$\text{Tr}(\lambda_a \lambda_b) = 0 \tag{D.17}$$

- El último caso es el cálculo de $\text{Tr}(\lambda_0 \lambda_a)$ con $a \neq 0$, donde λ_a puede estar definido en cualquiera de sus formas, dando el siguiente resultado

$$\text{Tr}(\lambda_0 \lambda_a) = \sqrt{\frac{2}{n}} \text{Tr}(\lambda_a) = 0$$

Un método fácil de recordar para este esquema de numeración es el siguiente. Se dibuja una tabla de tamaño $n \times n$ y se inserta los números $\alpha = 0, 1, \dots, n^2 - 1$ como se muestra en la tabla D.1. Si α es un número superior (inferior) en un cuadrado fuera de la diagonal entonces λ_α toma un 1 ($-i$) en ese lugar, 1 ($+i$) en el lugar transpuesto y cero en el resto de casillas. Si α está sobre alguna casilla diagonal, entonces λ_α esta dado por (D.4) para $\alpha > 0$ y por (D.5) para $\alpha = 0$

Tabla D.1: Esquema de numeración para las matrices generalizadas de Gell-Mann

0	1	4	9	...	$(n-1)^2$
	2	5	10	...	$(n-1)^2 + 1$
	3	6	11	...	$(n-1)^2 + 2$
		7	12	...	$(n-1)^2 + 3$
		8	13	...	$(n-1)^2 + 4$
			14	...	$(n-1)^2 + 5$
			15	...	$(n-1)^2 + 6$
				...	$(n-1)^2 + 7$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
				...	$n^2 - 1$

Fuente: Tomado de [4]