

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física



Test de universalidad leptónica y el modelo de Pati-Salam

TRABAJO DE GRADO

Para optar al título profesional de:

Físico

Oscar David Rosero Cárdenas

San Juan de Pasto, Colombia

9 de noviembre 2022

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Test de universalidad leptónica y el modelo de Pati-Salam

Oscar David Rosero Cárdenas

TRABAJO DE GRADO

Director:

Eduardo Rojas Peña, PhD
Doctor en Física

San Juan de Pasto, Colombia

9 de noviembre 2022

©2022 - Oscar David Rosero Cárdenas

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

San Juan de Pasto, 9 de noviembre 2022

NOTA DE ACEPTACIÓN

Eduardo Rojas Peña, PhD

Director

Yithsbey Lucas Giraldo Úsuga, PhD

Jurado 1

Juan Carlos Salazar Montenegro, PhD

Jurado 2

San Juan de Pasto, 9 de noviembre 2022

Agradecimientos

Este trabajo de grado representa la culminación de un sueño, que jamás se hubiera hecho realidad sin el apoyo de mi familia. Agradezco infinitamente su apoyo incondicional en mis momentos felices, así como en mis tiempos más oscuros.

La física de partículas fue cautivante para mí desde la primera vez que supe de ella, y durante los últimos dos años ha sido el Dr. Eduardo Rojas quien guió mis pasos para iniciar a comprender y asimilar los métodos y técnicas que hoy me permiten explorar, ya con cierta propiedad, esta disciplina. Su amplia experiencia me ha nutrido de herramientas invaluable que serán puestas a buen uso en mi formación futura y mi carrera científica. A él debo mi eterna gratitud por sus enseñanzas y su palpable pasión por su actividad investigativa y docente.

Quisiera también hacer una mención especial al Dr. Yithsbey Giraldo, quien, además de aportar a mi formación en los múltiples cursos en que fue mi profesor, me brindó la oportunidad de trabajar de cerca con el Grupo de Altas Energías y apoyar sus proyectos durante mi último año en la universidad. También a la M.Sc. Karla Reyes, actual directora del Programa de Física, a quien agradezco su excepcional gestión, y por siempre estar dispuesta a brindar apoyo continuo, no sólo a mí, sino a todos los estudiantes del departamento en sus proyectos y aspiraciones.

Test de universalidad leptónica y el modelo de Pati-Salam

Resumen

Las mediciones experimentales de decaimientos semileptónicos del quark b se han desviado de las predicciones del modelo estándar (ME). Particularmente, las anomalías en los decaimientos del mesón B , que sugieren una violación de la universalidad leptónica, son quizás la evidencia directa más significativa de nueva física más allá del ME. El objeto de estudio del presente trabajo de grado es un modelo realista que busca dar cuenta de dichas anomalías en una versión modificada del modelo de unificación de Pati-Salam, el cual es bien conocido en la literatura. Parte de los bosones mediadores en este modelo son leptoquarks vectoriales $(3, 1)_{2/3}$ y está basado en el grupo gauge de simetría $SU(4)_L \times SU(4)_R \times SU(2)_L \times U(1)'$. El presente trabajo consiste en realizar un estudio detallado de dicho modelo, resaltando los métodos y técnicas empleados en la construcción de nuevos modelos de física de partículas, y hacer un análisis de χ^2 para determinar cotas a los acoplamientos del leptoquark en decaimientos semileptónicos a partir de los pseudo-observables C_9 y C_{10} .

Lepton Universality Test and the Pati-Salam Model

Abstract

Experimental measurements of the b quark semileptonic decays have deviated from the predictions of the Standard Model (SM). Particularly, the anomalies in B meson decays, which suggest a violation of lepton universality, are perhaps the most significant direct evidence of new physics beyond the SM. The subject of study of the present work is a realistic model that accounts for such anomalies within the framework of the Pati-Salam unification, which is well known in the literature. Part of the mediator bosons in this model are $(3, 1)_{2/3}$ vector leptoquarks and it is based on the gauge group $SU(4)_L \times SU(4)_R \times SU(2)_L \times U(1)'$. The present work consists of a detailed study of such model, highlighting the methods and techniques used in new physics model building, and performing a χ^2 analysis to determine bounds on the couplings to the leptoquark in semileptonic decays from C_9 and C_{10} pseudo-observables.

Índice general

Título	I
Título	II
Aceptación	IV
Agradecimientos	V
Resumen	VI
Abstract	VII
1. Introducción	1
1.1. Sobre la relevancia formativa de este trabajo	2
1.2. Sobre la relevancia investigativa de este trabajo	3
2. Teorías gauge	5
2.1. Lagrangianos en teoría de campos relativista	5
2.2. Simetrías	7
2.2.1. Clasificación de simetrías	7
2.2.2. Grupos y simetrías	8
2.2.3. Ejemplos de grupos de simetrías continuas	9
2.2.4. Generadores de grupos continuos	10
2.3. Derivada covariante de un grupo gauge	12
2.3.1. Conmutador de derivadas covariantes	14
2.4. Ruptura espontánea de la simetría	15
2.5. Mecanismo de Higgs	19
3. El modelo estándar	23
3.1. Lagrangiano del modelo estándar	26
3.2. Sector electrodébil	27
3.3. Corrientes fermiónicas	33
4. Decaimientos del mesón B y las anomalías de sabor	38
4.1. Métodos de las búsquedas de nueva física en los decaimientos del mesón B .	41
4.2. Leptoquarks como explicación para las anomalías de sabor	43
5. Estudio detallado del modelo $SU(4)$ izquierdo – derecho	46
5.1. Generadores de $SU(4)$	47
5.2. Operador de carga	50
5.3. Derivada covariante del modelo	54
5.4. Autoestados de sabor y de masa de los leptoquarks	57

5.5. Estructura de sabor y términos de interacción con el leptokuark	60
6. Análisis fenomenológico	64
6.1. Análisis independiente del modelo	64
6.2. Fenomenología del modelo de Fornal	67
7. Conclusiones	72
A. Cálculo de la matriz de masa de los leptokuarks	74
B. Sobre los operadores y su representación como matrices	81
C. Análisis de datos con la función χ^2	85
C.0.1. Niveles de confianza	86
Bibliografía	89

Capítulo 1

Introducción

El modelo estándar (ME) proporciona una descripción de la naturaleza notablemente exitosa a nivel de partículas elementales y, hasta ahora, solo hay un puñado de indicaciones experimentales de desviaciones de sus predicciones. Quizás la evidencia directa más significativa de física más allá del ME son las anomalías recientemente observadas en las desintegraciones del mesón B [1, 2], que sugieren que la universalidad leptónica podría violarse. Suponiendo que esas anomalías no son el resultado de errores sistemáticos, se explican mejor con un leptoquark vectorial $(3, 1)_{2/3}$ ó $(3, 3)_{2/3}$ ¹ [3–5]. Sin embargo, la construcción de modelos que sean viables en un marco general a energías arbitrariamente altas y que involucren tales partículas es un desafío, especialmente a la luz de las estrictas restricciones sobre la violación del sabor leptónico (VSL) de varias búsquedas experimentales.

Varios modelos diferentes para las anomalías de sabor basados en la unificación de Pati-Salam han sido propuestos [6–12]. Esos modelos evaden las restricciones experimentales mezclando todos o un subconjunto de quarks y leptones del Modelo Estándar con nuevos fermiones vectoriales. Otros enfoques para explicar las anomalías del decaimiento del mesón B que involucran leptoquarks escalares o Z' en lugar de leptoquarks vectoriales también han sido propuestos (ver, por ejemplo, [13–20]).

Un intento por construir un modelo de leptoquark vectorial para las anomalías observadas en la razón $R_{K^{(*)}}$ entre los branchings de los modos de decaimiento semieptónico del mesón B con un kaón en el estado final, se realizó en [21], donde Assad, Fornal y Grinstein proponen que el leptoquark vectorial $(3, 1)_{2/3}$, que explica las anomalías, podría ser el bosón gauge

¹Esto es, leptoquarks vectoriales con hipercarga $2/3$ y que son, triplete de $SU(3)$ del color, singlete de $SU(2)_L$, o triplete de $SU(3)$ del color, triplete de $SU(2)_L$ respectivamente.

de una teoría como la de unificación de Pati-Salam [22]. La conclusión fue que el modelo mínimo basado en $SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$ no es capaz de hacer esto debido a límites estrictos en decaimientos raros del kaón y el mesón B [23–28]. El problema subyacente en ese modelo surge de la interferencia entre corrientes leptónicas izquierdas y derechas que cambian de sabor. Fornal y sus colaboradores proponen una solución a esto: extendiendo el grupo gauge a $SU(4)_L \times SU(4)_R \times SU(2)_L \times U(1)'$ y rompiendo $SU(4)_R$ a una escala alta, de modo que las corrientes leptónicas derechas con cambio de sabor se supriman.

Un planteamiento viable de tal modelo, que extiende el grupo gauge, es el tema del trabajo de Fornal, et.al. [29]. En él se demuestra que un leptoquark gauge de Pati-Salam tan liviano como 10 TeV puede explicar las anomalías $R_{K^{(*)}}$ y seguir siendo coherente con todos los límites experimentales sin introducir ninguna mezcla de quarks y leptones con nuevos fermiones. Este modelo es el objeto principal del presente trabajo. Realizamos un tratamiento detallado de la construcción del modelo, desde la obtención de los generadores del grupo $SU(4)$, de donde surge el leptoquark, hasta los términos de interacción del Lagrangiano, que permiten el análisis fenomenológico realizado en el último capítulo.

1.1. Sobre la relevancia formativa de este trabajo

Este trabajo es, principalmente, un ejercicio cuidadoso en construcción de modelos de física de partículas, y se espera que pueda ser una referencia para futuros estudiantes que quieran desarrollar trabajos en áreas afines. Durante el desarrollo de la investigación encontramos que la literatura disponible sobre construcción de modelos consta, principalmente, de artículos avanzados que son difícilmente digeribles por el estudiante cuya formación en esta materia se limita a una o dos asignaturas de profundización durante los últimos semestres de su carrera. Por el nivel de la literatura disponible, los autores no abundan en detalles sobre las técnicas para la construcción de modelos de física de partículas, y los libros formativos que contienen secciones dedicadas a modelos de unificación como $SU(5)$ o $SO(10)$ presentan el

tema con formalismos que no resultan fáciles de generalizar o aplicar a modelos con grupos gauge más complejos (ver, por ejemplo, [30]), o hacen un tratamiento avanzado que no se presta con facilidad para el estudiante con una formación corta en temas de teorías de campos y partículas (ver, por ejemplo, [31, 32]).

Por otra parte, los libros acerca de teoría de grupos aplicados a la física suelen presentar un tratamiento matemático formal del tema, adecuado para un tratamiento avanzado y necesario para alcanzar experticia en el tema, pero que al nivel de pregrado, puede terminar oscureciendo el contenido físico del tema y los conceptos fundamentales para la construcción de modelos tras el abundante formalismo matemático (ver, por ejemplo, [33, 34]).

Atendiendo a esto, hemos hecho un esfuerzo por sintetizar en este trabajo los aspectos fundamentales de la construcción de modelos de física de partículas, desde un enfoque aplicativo, apuntando a establecer los métodos que el ”practitioner”² de la física de partículas emplea en su quehacer, con lo cual esperamos que el estudiante que emplee este trabajo como fuente de consulta, adquiera habilidades para la comprensión del lenguaje común empleado en los artículos actuales de física de partículas. Por supuesto, los aspectos más formales de la temática quedarán relegados para estudios posteriores, pero el valor formativo que pretende aportar este trabajo es constituir un primer acercamiento que abra las puertas hacia un acervo ilimitado de fuentes bibliográficas que avanzarán significativamente la formación del estudiante.

1.2. Sobre la relevancia investigativa de este trabajo

Los modelos de nueva física son un área de gran interés en la física de altas energías actualmente. Las anomalías de sabor sobre las que versa este trabajo, son fuente constante de estos modelos, los cuales demandan un análisis minucioso y cálculo riguroso de cotas y

²Término común con que, en inglés, se designa a la persona que ejerce un oficio

observables que confirmen o nieguen su viabilidad física. Los autores del modelo estudiado en el presente trabajo han desarrollado un análisis amplio del mismo [29], que este trabajo pretende ampliar desde la fenomenología. El análisis desarrollado en este trabajo impone cotas sobre los acoplamientos relevantes para los procesos $b \rightarrow s\mu\mu$ desde un análisis independiente del modelo y lo contrasta con las restricciones impuestas por la parametrización de la matriz de acoplamientos propuesta por los autores del modelo.

Por supuesto, el análisis que hemos llevado a cabo no es exhaustivo, pero a la fecha de la presentación del presente trabajo ya existe un proyecto de investigación – que lleva el mismo nombre que el presente trabajo de grado – aprobado en la Vicerrectoría de Investigaciones e Interacción Social de la Universidad de Nariño (cód. 2679 de la Convocatoria Docente 2022) cuyo objetivo es ampliar este análisis y obtener límites más precisos para nuevas búsquedas en colisionadores de partículas que puedan confirmar o negar las predicciones de este modelo. Es un gran orgullo y un privilegio que este trabajo de grado ya esté inspirando futuros desarrollos científicos que ya están en marcha.

Capítulo 2

Teorías gauge

Nuestra teoría actual de interacciones entre partículas elementales está basada en el principio de simetría gauge [35]. Las interacciones fuerte, débil y electromagnética son campos necesarios si se asume la invarianza gauge. Esto quiere decir que los Lagrangianos que describen los campos asociados a las partículas elementales y a sus interacciones son invariantes bajo transformaciones locales. Gran parte de nuestro entendimiento actual de la dinámica de partículas se deriva del estudio de las simetrías que surgen a raíz tal invarianza. Es por esto que las siguientes secciones de este trabajo estarán dedicadas a desarrollar algunos de los conceptos fundamentales de la teoría de campos, la idea de simetría y el concepto de invarianza local gauge en el contexto de la teoría cuántica de campos (TCC).

2.1. Lagrangianos en teoría de campos relativista

En mecánica clásica el estado y evolución de un sistema físico (no relativista) constituido por partículas y cuerpos rígidos, puede ser descrito adecuadamente por medio de un conjunto de coordenadas $q_r(t)$ y sus derivadas temporales $\dot{q}_r(t)$. El *lagrangiano* L del sistema es una funcional de este conjunto de variables, y la *acción* $\mathcal{A}$ del sistema se define como:

$$\mathcal{A} = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_r(t), \dot{q}_r(t), t), \quad (2.1)$$

donde t_1 y t_2 son los tiempos inicial y final entre los cuales se estudia la evolución del sistema. El *principio de mínima acción* es la base para todas las teorías de física clásica y establece que, entre todas las trayectorias que unen $q_r(t_1)$ a $q_r(t_2)$, el sistema sigue aquella para la cual $\mathcal{A}$ es estacionaria. Este principio implica que las ecuaciones de movimiento del sistema

serán dadas por las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_r} . \quad (2.2)$$

En una teoría de campos relativista el sistema se considera constituido por un campo o un conjunto de campos que son, esencialmente, funciones escalares, vectoriales, espinoriales o tensoriales definidas en cada punto del espacio-tiempo. En este caso es aún deseable describir el sistema físico por una acción, y también que la acción sea dada por una integral temporal de un Lagrangiano. A fin de incorporar la información de cada punto del espacio a la acción, escribiremos el Lagrangiano como una integral espacial de alguna función de los campos. El integrando tendrá entonces las dimensiones de una densidad Lagrangiana ¹ y se denota por $\mathcal{L}$.

Los campos serán denotados genéricamente por Φ^A . Por analogía con la formulación clásica, éstos tomarán el papel de las coordenadas q_r de la ecuación (2.1). Nótese sin embargo, que en una teoría de campos relativista el tiempo ya no es el único parámetro independiente, sino que las coordenadas espaciales también lo son. Por lo tanto, hemos de esperar que el lagrangiano dependa de las derivadas espacio-temporales $\partial_\mu \Phi^A$, que toman el papel de la derivada respecto al tiempo $\dot{q}_r$ de las coordenadas generalizadas.

Con estas consideraciones podemos escribir la acción de un sistema físico para una teoría de campos relativista de la siguiente forma:

$$\mathcal{A} = \int_{\Omega} d^4x \mathcal{L}(\Phi^A(x), \partial_\mu \Phi^A(x)) , \quad (2.3)$$

donde la región de integración Ω es la región del espacio-tiempo en que estamos interesados. Usualmente ésta se toma como siendo todo el espacio-tiempo, por conveniencia.

Para una teoría de campos relativista el principio de mínima acción estipula que un sistema evoluciona a través de la configuración de campos que mantenga la acción $\mathcal{A}$ estacionaria respecto a pequeñas variaciones en los campos Φ^A , los cuales se anulan en la frontera Ω . Las

¹En lo que sigue de este trabajo utilizaremos el término Lagrangiano para hacer referencia a una densidad lagrangiana, a menos que se especifique puntualmente.

ecuaciones de Euler-Lagrange se derivan de este principio y se generalizan, en sus forma más simple, a:

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \Phi^A)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi^A}. \quad (2.4)$$

2.2. Simetrías

Algunos Lagrangianos se conocen de la física básica, pero en general, un sistema no suele estar bien entendido y se debe construir un Lagrangiano que, se espera, describa el sistema. En tales condiciones resultan útiles las simetrías, i.e., transformaciones que dejan el sistema invariante. El teorema de Noether postula que existe una cantidad conservada asociada a cada simetría, de modo que si conocemos algunas cantidades conservadas de un sistema es posible trabajar en reversa para encontrar las simetrías del sistema y a partir de ellas inferir la forma de un Lagrangiano conveniente.

2.2.1. Clasificación de simetrías

Las simetrías de un sistema pueden ser espacio-temporales o simetrías internas. En el primer caso, las transformaciones de simetría conectan los campos en diferentes puntos del espacio-tiempo, como por ejemplo en el caso de las transformaciones de Lorentz. En el segundo caso, las transformaciones conectan diferentes campos, o diferentes componentes del mismo campo, en un mismo punto del espacio-tiempo. Ejemplo de esto son las transformaciones gauge.

A su vez, las simetrías pueden ser discretas, donde el parámetro para la transformación de simetría puede tomar únicamente valores discretos. Ejemplos de tales simetrías son la paridad, la inversión del tiempo o la conjugación de carga. Por otra parte, las simetrías también pueden ser continuas, donde los parámetros relevantes pueden tomar valores continuos. Ejemplo de éstas son las invariancias de varios Lagrangianos libres bajo rotaciones de fase de los campos involucrados.

Las simetrías continuas también pueden ser de dos clases. Son globales cuando los parámetros de transformación son independientes del espacio-tiempo, tales como las simetrías de fase mencionadas anteriormente. Por el contrario, cuando los parámetros dependen del espacio-tiempo las simetrías se denominan locales o simetrías gauge. Como veremos, éstas requieren la presencia de nuevas partículas en la teoría, denominadas bosones gauge en general.

2.2.2. Grupos y simetrías

Asociado a cada simetría existe un objeto matemático conocido como *grupo de simetría*. Un grupo es un conjunto de ‘elementos’ en el cual dos de ellos pueden ser combinados mediante alguna operación que satisfaga las cuatro propiedades listadas abajo. La operación, en general es denominada *multiplicación del grupo*. Denotaremos esta operación por un pequeño círculo ($\circ$) y los elementos del grupo por x , y , etc. La operación debe satisfacer las siguientes propiedades:

1. El ‘producto’ $x \circ y$ debe pertenecer al grupo, para todos los elementos x , y .
2. Debe existir un elemento e en el grupo tal que $e \circ x = x \circ e = x$ para todo elemento x . Este e se denomina *identidad*.
3. Todo elemento x debe tener un inverso en el grupo, i.e., debe existir otro elemento x^{-1} tal que $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = e$.
4. La multiplicación del grupo debe ser *asociativa*, i.e., $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ para todos los elementos x , y , z .

Como ya lo mencionamos, la simetrías de un sistema físico proveen restricciones útiles sobre la posible forma de su Lagrangiano. Una operación de simetría es aquella que deja la acción invariante. Todas las operaciones de simetría constituyen un grupo. Dicho grupo se denomina el *grupo de simetría* de la teoría. El grupo de simetría incluye al grupo de Poincaré en una teoría covariante relativista. Tal invariancia conduce a la conservación del cuadrimomento y del momento angular. Adicionalmente, el grupo de simetría puede incluir simetrías internas, en las que nos enfocaremos ahora.

2.2.3. Ejemplos de grupos de simetrías continuas

Consideremos las transformaciones de fase. Estas operaciones son dadas por

$$\psi(x) \rightarrow e^{-iq\theta} \psi(x), \quad (2.5)$$

donde, en este caso, $\psi(x)$ son campos de Dirac. Los elementos del grupo de simetría en este caso son números complejos de la forma $e^{iq\theta}$, y dos de estos elementos se combinan por medio de la ley de multiplicación de números complejos. Alternativamente, estos elementos pueden ser vistos como matrices unidimensionales unitarias, que se combinan mediante la ley de multiplicación de matrices. Por esta razón el grupo de simetría se denota por $U(1)$, la letra U indicando matrices unitarias, y el número entre paréntesis indicando la dimensión de las mismas. Para el Lagrangiano de Dirac libre,

$$\mathcal{L}_{\text{Dirac}} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (2.6)$$

esta es una simetría interna global. Podemos decir entonces, que el Lagrangiano de Dirac libre es invariante bajo una simetría $U(1)$ global.

En electrodinámica cuántica se tiene la misma simetría, excepto que los parámetros θ pueden depender el espacio-tiempo. Se dice entonces que el Lagrangiano de la electrodinámica cuántica tiene una simetría $U(1)$ local.

Consideremos ahora el Lagrangiano libre para dos campos de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}_1(i\cancel{\partial} - m_1)\psi_1 + \bar{\psi}_2(i\cancel{\partial} - m_2)\psi_2, \quad (2.7)$$

donde hemos empleado la notación slash de Dirac, $\cancel{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$.

Por supuesto este Lagrangiano es invariante bajo rotaciones de fase independientes de los dos campos, i.e., dos transformaciones $U(1)$ independientes. Esta simetría se denomina $U(1) \otimes U(1)$. No obstante, en el caso especial en que $m_1 = m_2$, la simetría es aún mayor. Esto se ilustra mejor construyendo el objeto

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Aquí, ψ_1 y ψ_2 son espinores independientes, lo que quiere decir que las componentes de ψ_1 no se mezclan con aquellas de ψ_2 bajo transformaciones de Lorentz. Sin embargo, en este caso consideraremos una simetría *interna* en la que las componentes de los dos espinores diferentes se mezclarán entre ellas. Para este propósito basta con suprimir la estructura de las componentes de cada espinor y tratar a cada uno de ellos como un objeto individual. El objeto Ψ puede ser entonces llamado un *doblete*. Usando este doblete, podemos expresar el Lagrangiano en (2.7) en la forma

$$\mathcal{L} = \bar{\Psi}(i\not{D} - m)\Psi, \quad (2.9)$$

donde el término entre paréntesis debe ser entendido como un múltiplo de una matriz 2×2 , y $m = m_1 = m_2$.

Ahora, consideremos la siguiente transformación sobre Ψ , que lleva Ψ a Ψ' , dada por

$$\Psi' = U\Psi, \quad (2.10)$$

donde U es una matriz unitaria 2×2 . Esto mantiene invariante al Lagrangiano de (2.9). Similarmente a como hicimos para el grupo de matrices unitarias 1×1 anteriormente, un grupo de matrices unitarias $n \times n$ se denomina $U(n)$. El Lagrangiano en (2.9) tiene, entonces, una simetría $U(2)$ global.

Es conveniente pensar en el grupo $U(2)$ como un producto de dos subgrupos. Toda matriz unitaria puede ser escrita como el producto de dos objetos, una matriz unitaria con determinante 1 y una fase global. Cada una de estas partes forma un grupo en sí mismo. La segunda parte es el grupo de transformaciones de fase discutido anteriormente y que hemos denominado $U(1)$. El primer grupo es llamado $SU(2)$, donde la ‘S’ se refiere a ‘special’, indicando que las matrices tienen determinante 1. Entonces el grupo $U(2)$ puede ser escrito como $SU(2) \otimes U(1)$, y en general, $U(n)$ como $SU(n) \otimes U(1)$.

2.2.4. Generadores de grupos continuos

El número de elementos en cualquier grupo continuo es infinito, sin embargo, pueden representarse mediante un número finito de parámetros continuos. Por ejemplo, en las transformaciones $U(1)$ mencionadas anteriormente, el parámetro es θ .

Para cualquier grupo G podemos escribir un elemento general como $U(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$, donde r es el número total de parámetros para especificar un elemento general del grupo. En general, siempre pueden escogerse estos parámetros de tal forma que todos sean cero para el elemento identidad del grupo. Los generadores del grupo son definidos por

$$T_a = i \left. \frac{\partial U}{\partial \beta_a} \right|_{\beta=0}. \quad (2.11)$$

Esto quiere decir que los elementos infinitesimales del grupo pueden ser escritos como

$$1 - i\beta_a T_a, \quad (2.12)$$

usando la convención de suma para el índice a . Para cierta clase de grupos, denominados *grupos de Lie* – que incluye los grupos unitarios que hemos venido discutiendo –, esto implica que un elemento general del grupo es dado por

$$U = \exp\{(-i\beta_a T_a)\}, \quad (2.13)$$

donde los β_a no necesariamente son pequeños. Obviamente, la elección de los T_a no es única. Siempre se puede definir alguna combinación linealmente independientes de los β_a como parámetros independientes, en cuyo caso los generadores también serán combinaciones lineales de los T_a dados previamente.

Un grupo se define por la multiplicación de todos los pares de elementos. Así, a fin de reproducir la multiplicación correcta, los generadores T_a deben satisfacer ciertas propiedades. Para $SU(2)$, por ejemplo, los T_a no conmutan, y la multiplicación de dos elementos del grupo es dada por la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^A e^B = \exp \left(A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \frac{1}{12}([A, [A, B]] - [B, [A, B]]) + \dots \right). \quad (2.14)$$

De aquí es claro que, una vez que el conmutador de los generadores es conocido, es posible evaluar la multiplicación de cualquier par de elementos del grupo. Para el grupo $SU(2)$ los generadores pueden ser escogidos de tal forma que los conmutadores son dados por

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc} T_c, \quad (2.15)$$

donde ϵ^{abc} denota el símbolo de Levi-Civita.

En general, para cualquier grupo $SU(n)$, el número de generadores es $n^2 - 1$ y el conmutador de éstos toma una forma más general dada por

$$[T_a, T_b] = if_{abc}T_c, \quad (2.16)$$

donde f_{abc} se denominan las *constantes de estructura* del grupo. Claramente $f_{abc} = -f_{bac}$. La colección de todas las relaciones de conmutación de los generadores se denomina el *álgebra* del grupo. Si todas las constantes de estructura son cero, esto implica que la multiplicación del grupo es conmutativa. En tal caso el grupo se denomina conmutativo o *abeliano*.

2.3. Derivada covariante de un grupo gauge

Consideremos un grupo gauge cuya álgebra es dada por

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c. \quad (2.17)$$

Para un campo ψ asociado a una representación de este grupo, sus propiedades de transformación bajo el mismo son dadas por

$$\psi'_i = U_{ij}\psi_j, \quad (2.18)$$

donde

$$U_{ij} = (e^{-i\theta^a(x)T^a})_{ij} \quad (2.19)$$

es un operador del grupo, y los índices i, j son de la simetría interna.

La *derivada covariante*

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu}, \quad (2.20)$$

se define como un tensor de rango uno bajo transformaciones de Lorentz, i.e.,

$$(D_\mu\psi)' = D'_\mu\psi' = UD_\mu\psi, \quad (2.21)$$

transformando igual que el campo ψ . El campo A_μ es el *campo de calibración o campo gauge*, cuya introducción es necesaria para asegurar la invariancia bajo transformaciones de Lorentz. Veamos:

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi' &= (\partial_\mu - igA'_\mu) \psi' = (\partial_\mu - igA'_\mu) U \psi \\ &= (\partial_\mu U) \psi + U \partial_\mu \psi - igA'_\mu U \psi, \end{aligned}$$

que por definición debe ser igual a $UD_\mu \psi$:

$$D'_\mu \psi' = U [U^\dagger (\partial_\mu U) + \partial_\mu - igU^\dagger A'_\mu U] \psi \stackrel{!}{=} U [\partial_\mu - igA_\mu] \psi. \quad (2.22)$$

Comparando las expresiones encontramos:

$$\boxed{A'_\mu = UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^\dagger}. \quad (2.23)$$

Si consideramos transformaciones infinitesimales, donde U difiere muy poco de la identidad, podemos expandir (2.19) en series de Taylor, así

$$U = e^{-i\theta^a T^a} \approx 1 - i\theta^a T^a, \quad (2.24)$$

donde hemos despreciado términos de orden superior en θ , pues éste debe ser un parámetro infinitesimal si U ha de representar una transformación infinitesimal. Con esta consideración es posible expresar la derivada en el segundo término del miembro derecho de (2.23) como:

$$\partial_\mu U \approx -i(\partial_\mu \theta^a) T^a. \quad (2.25)$$

Por su parte, el primer término del miembro derecho de (2.23) puede expresarse, bajo las mismas consideraciones, como:

$$UA_\mu U^\dagger \approx A_\mu - i\theta^a [T^a, A_\mu]. \quad (2.26)$$

Ahora, el campo A_μ puede ser expresado en términos de los generadores del grupo como

$$A_\mu = A_\mu^b T^b, \quad (2.27)$$

con lo cual tenemos:

$$U A_\mu U^\dagger \approx A_\mu - i\theta^a A_\mu^b [T^a, T^b] = A_\mu + \theta^a A_\mu^b f^{abc} T^c. \quad (2.28)$$

Así, determinamos que, considerando transformaciones infinitesimales, el campo gauge A_μ transforma como:

$$A'_\mu \approx A_\mu + f^{abc} \theta^a A_\mu^b T^c - \frac{1}{g} (\partial_\mu \theta^a) T^a. \quad (2.29)$$

Cabe anotar que si bien, la derivada covariante aplicada sobre el campo ψ transforma de forma multiplicativa, el operador D_μ no lo hace. Para determinar cómo transforma este operador cuando no está aplicado sobre un campo, consideremos la Ecuación (2.21):

$$\begin{aligned} D'_\mu \psi' &= U D_\mu \psi \\ &= U D_\mu U^\dagger \underbrace{U \psi}_{\psi'} \\ &= (U D_\mu U^\dagger) \psi', \\ \therefore \quad &\boxed{D'_\mu = U D_\mu U^\dagger}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.3.1. Conmutador de derivadas covariantes

El conmutador de derivadas covariantes es una cantidad importante empleada para la construcción de invariantes gauge, por lo tanto definamos un tensor $F_{\mu\nu}$ que involucre dicho conmutador y estudiemos sus propiedades de transformación:

$$F_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{g} [D_\mu, D_\nu]. \quad (2.31)$$

Si aplicamos este tensor sobre una función arbitraria ϕ y desarrollamos la expresión para las derivadas covariantes, encontramos:

$$F_{\mu\nu} \phi = \frac{i}{g} [(\partial_\mu - ig A_\mu), (\partial_\nu - ig A_\nu)] \phi = [\partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu + ig [A_\mu, A_\nu]] \phi. \quad (2.32)$$

Si se expresan los campos gauge A_μ , A_ν en términos de los generadores del grupo, como $A_\mu = A_\mu^a T^a$, $A_\nu = A_\nu^b T_b$ es posible determinar:

$$F_{\mu\nu} = \left[\partial_\mu A_\nu^c - \partial_\nu A_\mu^c + g A_\mu^a A_\nu^b f^{abc} \right] T^c. \quad (2.33)$$

nótese que, puesto que D_μ es genuinamente covariante, $F_{\mu\nu}$ también lo es, i.e.

$$F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^\dagger. \quad (2.34)$$

Esta característica es importante para construir invariantes gauge, puesto que vemos que $F_{\mu\nu}$ transforma de igual manera que el operador de derivada covariante.

2.4. Ruptura espontánea de la simetría

Como ya se ha mencionado, el Lagrangiano de un sistema físico debe tener todas las simetrías que se imponen sobre el sistema. El estado de menor energía de los campos en el Lagrangiano es lo que denominamos *vacío*. En general esperaríamos que los estados mínimos de estos campos tengan un valor mínimo igual a cero, pero esto no siempre es así. Cuando los campos tienen un valor mínimo diferente de cero se presentan rompimientos de las simetrías bajo las que inicialmente se construye el Lagrangiano. Este fenómeno se denomina *ruptura espontánea de la simetría*, pues la semilla de esta ruptura está implícita en el Lagrangiano. El caso más simple de ruptura espontánea de simetría se tiene para un campo escalar. Consideremos el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (2.35)$$

Consideremos la configuración para el campo escalar que tiene mínima energía. La mínima energía que puede tener un potencial es cuando el campo es constante (no cambia en el tiempo) y uniforme (el valor del campo en dos puntos cualesquiera es el mismo). Bajo esta premisa, el término que involucra las derivadas desaparece, puesto que $\partial_\mu \phi = 0$ para ϕ constante. Identificamos este término con la energía cinética del sistema, y recordando que el Lagrangiano es la diferencia de la energía cinética y la potencial, identificamos

$$V = \left(\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right) \quad (2.36)$$

con la energía potencial. En la mínima configuración, el sistema no posee energía cinética, únicamente potencial.

Un campo siempre tiene sus interacciones. Las interacciones de un campo dependen de los términos que son permitidos por la simetría. En este caso podríamos considerar la existencia de una simetría: si el campo es real, al cambiar $\phi \rightarrow -\phi$, el Lagrangiano es invariante. Esto es lo que se denomina simetría Z_2 . Vamos a ver que ésta se va a romper al considerar ciertos aspectos básicos de este Lagrangiano.

Como lo dijimos antes, la configuración de mínima energía del sistema involucra únicamente el término de energía potencial V en el Lagrangiano. Así pues, la energía potencial debe ser estacionaria respecto a cambios pequeños en el potencial cuando el sistema está en la configuración de mínima energía, i.e., en la configuración de mínima energía:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \phi} &\stackrel{!}{=} 0 \\ \Rightarrow \phi \left(m^2 + \frac{4\lambda\phi^2}{4!} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Existen dos posibilidades que satisfacen esta condición: la primera es la condición trivial de que el campo $\phi = 0$. La segunda posibilidad es que el término entre paréntesis se haga cero. Notemos en primer lugar, que el coeficiente λ debe ser necesariamente positivo, pues de esta forma, cuando ϕ tiende a infinito, el potencial también tiende a infinito, lo cual es consistente con las condiciones físicas. Si por el contrario λ fuese negativo, tendríamos que cuando ϕ tiende a infinito, el potencial tiende al infinito negativo y la configuración de mínima energía del sistema estaría en $-\infty$, lo cual no tiene sentido físico. Esta es una situación general para todos los sistemas físicos, por lo que en un Lagrangiano, el coeficiente acompañando a la potencia más grande del campo, debe ser positivo, y la potencia más grande del campo debe ser par.

Sabiendo esto, vemos que si $m^2 > 0$, el término entre paréntesis en (2.37) no puede hacerse cero, y por lo tanto la única forma de satisfacer la condición es la situación trivial $\phi = 0$. No obstante si admitimos $m^2 < 0$ tenemos que:

$$\phi = \pm \sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}}, \quad (2.38)$$

en la configuración de mínima energía de este Lagrangiano, el campo ϕ no es cero sino una constante, i.e. el valor esperado en el vacío (VEV) del campo está dado por:

$$\langle 0|\phi|0\rangle = \sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}} \equiv v \quad (2.39)$$

Una forma usual de ilustrar el comportamiento de estos potenciales es graficar en el isoespacio, que está dado por la magnitud del campo ϕ en las abscisas y la magnitud del potencial V en las ordenadas. En la fig. 2.1 se muestra el potencial en el isoespacio para las dos situaciones anteriormente discutidas.

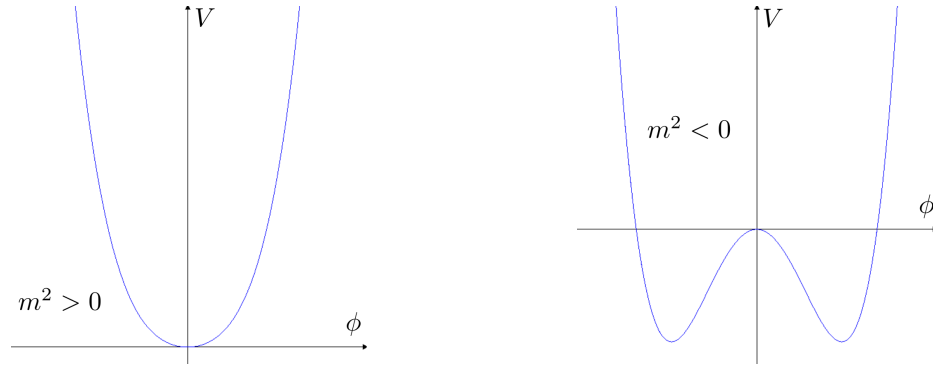


Figura 2.1: Potencial en el isoespacio para m^2 positivo (izquierda) y negativo (derecha).

Para el caso $m < 0$ existen dos nuevos mínimos del potencial en valores del campo diferente de cero, y el VEV que hemos encontrado yace en el máximo local que se presenta en $\phi = 0$ del "potencial sombrero mexicano"². Es decir, hemos escogido mal el vacío cuando consideramos que éste yacía en la configuración en que el campo tiene una magnitud cero. A fin de obtener un VEV igual a cero para el campo debemos correr el valor de ϕ definiendo:

$$\tilde{\phi} \equiv \phi - v, \quad (2.40)$$

con v dado por (2.39). Así, vemos que:

$$\langle 0|\tilde{\phi}|0\rangle = \langle 0|\phi|0\rangle - v = 0. \quad (2.41)$$

²Esta es una traducción literal del nombre común dado en ingles a esta forma de potencial, "mexican-hat potential". suele ser el término usado en América Latina. En España, sin embargo, el nombre común para este potencial suele ser "potencial culo de botella".

Por supuesto esto implica que el potencial ya no es simétrico respecto al valor mínimo del campo, puesto que al hacer esto hemos decidido realizar nuestra expansión en torno a uno solo de los mínimos del potencial sombrero mexicano, y por lo tanto la simetría del Lagrangiano se romperá. Veamos cómo:

Con la definición (2.40) tenemos que la derivada del campo ϕ presente en (2.35), en términos de $\tilde{\phi}$ es dada por:

$$\partial_\mu \phi = \partial_\mu (\tilde{\phi} + v) = \partial_\mu \tilde{\phi}.$$

Es decir, el término cinético en el Lagrangiano no se verá afectado, lo cual es de esperar, ya que el vacío en torno al cual interpretaremos el sistema únicamente depende del término de energía potencial. Ahora, las potencias de ϕ quedarán dadas por:

$$\phi^2 = (\tilde{\phi} + v)^2 = \tilde{\phi}^2 + 2\tilde{\phi}v + v^2, \quad (2.42)$$

$$\phi^4 = (\tilde{\phi} + v)^4 = \tilde{\phi}^4 + 4\tilde{\phi}^3v + 6\tilde{\phi}^2v^2 + 4\tilde{\phi}v^3 + v^4, \quad (2.43)$$

de modo que el Lagrangiano en términos del nuevo campo $\tilde{\phi}$ queda dado por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} - \frac{1}{2} m^2 [\tilde{\phi}^2 + 2\tilde{\phi}v + v^2] - \frac{\lambda}{4!} [\tilde{\phi}^4 + 4\tilde{\phi}^3v + 6\tilde{\phi}^2v^2 + 4\tilde{\phi}v^3 + v^4]$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \tilde{\phi} \partial^\mu \tilde{\phi} + m^2 \tilde{\phi}^2 - \frac{\lambda v}{6} \tilde{\phi}^3 - \frac{\lambda}{4!} \tilde{\phi}^4.$$

(2.44)

Este nuevo Lagrangiano en términos del campo $\tilde{\phi}$ involucra un término proporcional a $\tilde{\phi}^3$ que hace que ya no sea invariante respecto a un cambio $\tilde{\phi} \rightarrow -\tilde{\phi}$; *la simetría se ha roto*. Nótese que el término cuadrático ha cambiado de signo respecto al Lagrangiano original (cf. ecuación (2.35)). No obstante, como $m^2 < 0$, tenemos que la cantidad proporcional a $\tilde{\phi}^2$ sigue siendo negativa, y se conserva el signo negativo convencional que acompaña a la masa en los Lagrangianos.

2.5. Mecanismo de Higgs

Hacia la década de 1960, Yoichiro Nambu y Jeffrey Goldstone estudiaron la ruptura espontánea de la simetría. El teorema que lleva sus nombres [36–38] postula que para un sistema en el cual el vacío es degenerado como consecuencia de una ruptura espontánea de simetría, existe al menos un autoestado del Hamiltoniano con masa $m = 0$. Este autoestado con masa nula es el *bosón de Nambu-Goldstone*.

El teorema de Nambu-Goldstone supuso un problema significativo para la física de partículas de la época. Es difícil pensar que una partícula sin masa haya escapado a la detección. Con partículas pesadas esto es siempre una posibilidad, ya que es probable que no se haya alcanzado el umbral de energía necesario para producirla, pero una partícula con masa nula debería ser fácil de detectar, cuanto menos en forma de una pérdida de energía y momento, pero nunca, en ningún experimento de física de partículas se ha observado un bosón de Nambu-Goldstone.

Quien resolvió este dilema fue Peter Higgs, mediante la introducción del mecanismo que lleva su nombre, postulado en artículos de 1963 – 1964 [39,40], y que conduce a la aparición de una partícula pesada en el Lagrangiano. Por supuesto éste es el célebre bosón de Higgs, que eludió detección hasta que fue observada por primera vez en el LHC en 2012 [41].

Consideremos un Lagrangiano para un campo complejo

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^* D^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.45)$$

donde D es la derivada covariante del grupo (o grupos) de simetría. Como esta derivada covariante lleva un campo eléctrico, aparece un término $\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ involucrando al campo eléctrico en el Lagrangiano. Veremos después, que los campos complejos son susceptibles de tener carga eléctrica, mientras que los campos reales tienen siempre carga eléctrica cero. Este sistema es invariante bajo los siguientes cambios de variables:

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{-i\theta} \phi, \quad (2.46)$$

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{\epsilon} \partial_\mu \theta. \quad (2.47)$$

Vamos a asumir que en el mínimo, el valor esperado del campo es

$$\langle \phi \rangle_{\min} = \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (2.48)$$

donde $\sqrt{2}$ es un factor de normalización puramente convencional. Recordemos que hemos considerado a ϕ un campo escalar (complejo), por lo que su vev tiene una sola componente. Este es el caso más simple.

Vamos a reescribir ϕ en términos de dos campos así:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\xi/v} (v + \sigma), \quad (2.49)$$

donde lo hemos parametrizado en términos de dos nuevos campos reales, ξ , denominado el *campo axial*³, y σ , denominado el *campo radial* y que representa una excitación sobre el vev.

Ahora, vemos que es posible remover el campo axial multiplicación por una fase $e^{-i\theta}$, escogiendo un valor adecuado para θ . En particular, vamos a escoger $\theta = \xi/v$, de modo que realizando la rotación

$$\phi \longrightarrow \phi' = e^{-i\xi/v} \phi, \quad (2.50)$$

desaparece la fase compleja y el campo resultante es real:

$$\phi' = e^{-i\xi/v} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\xi/v} (v + \sigma) \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} (v + \sigma). \quad (2.51)$$

En primera instancia, parecería que la escogencia de la parametrización de ξ fuese arbitraria y que, en principio, podría ser cualquier función, no obstante, existen restricciones debido a la presencia de la derivada covariante en el Lagrangiano. Recordemos que la derivada covariante debe transformar de la misma forma como lo hace ϕ , y si el campo no transformase como lo hemos propuesto, la derivada covariante no funcionaría.

³Mediante análisis dimensional es posible mostrar que, en unidades naturales, los campos escalares tienen unidades de masa. El VEV de ϕ , que se caracteriza por el valor v también tiene unidades de masa. Nótese que en la exponencial, el campo axial aparece dividido entre v , obteniéndose así una cantidad adimensional para el exponente.

Como hemos elegido el gauge $\theta = \xi/v$, la transformación para el campo A será dada por

$$A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{\epsilon v} \partial_\mu \xi. \quad (2.52)$$

Ahora, la derivada covariante de ϕ^* es

$$\begin{aligned} D_\mu^* \phi'^* &= (\partial_\mu + ie A'_\mu) \phi' \\ &= \left(\partial_\mu + ie \left[A_\mu - \frac{1}{\epsilon v} \partial_\mu \xi \right] \right) \frac{(v + \sigma)}{\sqrt{2}}, \end{aligned}$$

donde e es la constante de acoplamiento de esta teoría. Así, el término cinético, con la nueva parametrización, será dado por:

$$(D_\mu \phi)^* (D^\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \sigma \partial^\mu \sigma + \frac{e^2}{2} (v + \sigma)^2 A'_\mu A'^\mu, \quad (2.53)$$

El segundo término en esta ecuación es cuadrático en A' , y por lo tanto es un término de masa. El campo A se ha vuelto masivo y su masa es proporcional a v . ¿Qué es lo que está en juego aquí? En primer lugar, se rompió la simetría debido al VEV de ϕ , el campo A' ha adquirido masa, pero además este campo contiene al campo axial dentro de sí. Identificaremos el campo axial con el bosón de Nambu-Goldstone, pero notemos que en nuestra expresión (2.53) este campo axial no aparece de forma explícita, únicamente dentro de la estructura de A' . Este es el *mecanismo de Higgs*.

Los términos restantes en el Lagrangiano pueden ser obtenidos fácilmente:

$$-m^2 \phi'^* \phi' = -\frac{m^2}{2} (v + \sigma)^2, \quad (2.54)$$

$$-\lambda^2 (\phi^* \phi)^2 = -\frac{\lambda^2}{4} (v + \sigma)^4, \quad (2.55)$$

$$-\frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \text{ ya que es invariante gauge.} \quad (2.56)$$

Como vemos, el mecanismo de Higgs ha resuelto por fin el dilema que supuso el teorema de Nambu-Goldstone (N-G): en primer lugar, desaparece el campo axial del Lagrangiano. Es

por esto que el bosón de N-G no se detecta en el experimento, pero además, el campo axial está implícito en el campo A' , que sí es detectable.

Una de las teorías que presentan ruptura espontánea de la simetría es la de interacciones débiles. En esta teoría aparecieron los bosones $W^\pm$ y Z , que son masivos, como mediadores de la interacción. El mecanismo de Higgs mostró que, de alguna forma, el descubrimiento de estos bosones implicaba la existencia de los bosones de N-G y que las interacciones débiles llevan información de estos últimos. Este elusivo bosón no masivo se encontraba oculto en la estructura de las interacciones débiles porque estaba mezclado con su campo gauge. Esta genialidad, que reveló el escondite de una partícula que, según toda predicción teórica debería existir, pero que nunca pudo ser detectada, le valió el Premio Nobel a Peter Higgs.

Capítulo 3

El modelo estándar

Nuestro panorama actual de partículas elementales propone que toda la materia está formada por leptones y quarks. Existen seis leptones, que son el electrón, el muón, el tauón y tres neutrinos. Por su parte, tenemos tres tipos de quarks con carga $2/3$ (up, charm, top) y tres tipos de quarks con carga $-1/3$ (down, strange, bottom). Estas partículas se clasifican en tres familias de leptones y tres familias de quarks, que constituyen los *fermiones* elementales y que son los componentes fundamentales de la materia común. Estas tres familias se clasifican en seis dobletes, dados por:

$$\begin{aligned} \text{Leptones} & \left\{ \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}, \right. \\ \text{Quarks} & \left\{ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Adicionalmente, en el ME existen tres interacciones que son mediadas por bosones (partículas con espín entero): la interacción *débil*, mediada por los bosones $W^\pm$ y Z^0 , la interacción *fuerte*, mediada por los gluones, y la interacción *electromagnética*, mediada por los fotones. Únicamente los bosones mediadores de la interacción débil son partículas masivas. En la tabla 3.1 se muestra un resumen de las interacciones del ME, sus mediadores y las partículas que son afectadas por cada una.

Nótese que sólo las partes izquierdas de las partículas son susceptibles de percibir la interacción débil. Por ello, definimos los dobletes izquierdos como

$$L = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}_L = P_L \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

donde f_i son las componentes de cualquier doblete fermiónico, y $P_L = 1/2(1 - \gamma^5)$ es el

Tabla 3.1: Resumen de las interacciones del ME.

Interacción	Mediadores	Partículas susceptibles
Electromagnética	Fotones	Partículas con carga eléctrica
Fuerte	Gluones	Quarks
Débil	Bosones W^+ , W^- , Z	Partes izquierdas de todos los fermiones

operador de proyección izquierdo. Por su parte, los campos derechos

$$f_R = P_R f, \quad (3.3)$$

con $P_R = 1/2(1 + \gamma^5)$ el proyector derecho, son ciegos a la interacción débil.

La agrupación de los fermiones en dobletes responde al hecho de que la simetría que gobierna la interacción débil es $SU(2)$, y cada familia de fermiones se presenta como un doblete de este grupo. Es por ello que las partes derechas de los campos se presentan como teniendo una sola componente, es decir, como un singlete de $SU(2)_L$. En consecuencia, las partes derechas e izquierdas de los fermiones transforman, bajo $SU(2)_L$ según

$$L \longrightarrow L' = e^{i\theta \cdot \sigma / 2} L, \quad (3.4)$$

$$R \longrightarrow R' = R, \quad (3.5)$$

donde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ son las matrices de Pauli,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Adicional a la simetría $SU(2)_L$ que gobierna las interacciones débiles, el ME presenta las simetrías $SU(3)_C$ para las interacciones fuertes, y $U(1)$ para la hipercarga Y . Así, el grupo

gauge del ME es

$$\boxed{\text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(2)_L \otimes \text{U}(1)_Y}. \quad (3.7)$$

Así por ejemplo, el doblete izquierdo de quarks up-down es un doblete de $\text{SU}(2)_L$, i.e.,

$$q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

pero a su vez, cada componente es un triplete de color, es decir,

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} u_{1L} & u_{2L} & u_{3L} \\ d_{1L} & d_{2L} & d_{3L} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \overleftarrow{\text{SU}(2)_L} \\ \overrightarrow{\text{SU}(2)_L} \end{array} & \text{Doblete de isospín} \\ \begin{array}{c} \overleftarrow{\text{SU}(3)_C} \\ \overrightarrow{\text{SU}(3)_C} \end{array} & & \downarrow \\ \text{Triplete de color} & \longrightarrow & \text{Sextete de } \text{SU}(2)_L \otimes \text{SU}(3)_C. \end{array}$$

Por el contrario, las partes derechas de los quarks son singletes de isospín, pero siguen siendo tripletes de color, i.e.,

$$\begin{pmatrix} u_{1R} \\ u_{2R} \\ u_{3R} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} d_{1R} \\ d_{2R} \\ d_{3R} \end{pmatrix},$$

cada multiplete de color debe ir por separado.

Ahora, el grupo $\text{SU}(2)_L$ sólo tiene un generador diagonal, que llamamos T_3 , mientras que el grupo $\text{U}(1)$ tiene un único generador Y , que es proporcional a la identidad. Definimos el operador de carga como:

$$\boxed{Q = T^3 + Y}. \quad (3.9)$$

Explícitamente, con $Y = -1/2$,

$$Q = T^3 + Y = \frac{\sigma^3}{2} + Y\mathbb{1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{(-1)}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

cuyos valores en la diagonal corresponden a las cargas de $\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$,

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} \nu_e \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{autovalor cero} , \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} \rightarrow \text{autovalor } -1 . \end{array} \right. \quad (3.10)$$

3.1. Lagrangiano del modelo estándar

En el Lagrangiano del ME tenemos tres contribuciones:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3 , \quad (3.11)$$

donde

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{1}{4} \underbrace{W_{\mu\nu}^a W^{a\mu\nu}}_{\text{Interacción débil}} - \frac{1}{4} \underbrace{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}_{\text{Interacción de hipercarga}} - \frac{1}{4} \underbrace{G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu}}_{\text{Interacción fuerte}} , \quad (3.12a)$$

$$\mathcal{L}_2 = \underbrace{i\bar{L}\gamma^\mu D_\mu L}_{\text{Componentes izquierdas}} + \underbrace{i\bar{R}\gamma^\mu D_\mu R}_{\text{Componentes derechas}} , \quad (3.12b)$$

$$\mathcal{L}_3 = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - m^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 + G_e \underbrace{(\bar{L}\phi R + \bar{R}\phi^\dagger L)}_{\text{Términos de Yukawa}} + \text{h.c.} , \quad (3.12c)$$

donde ϕ es el *doblete escalar* o *doblete de Higgs*, y h.c. significa hermítico conjugado de los términos escritos. La componente $\mathcal{L}_1$ incluye todo lo que son las interacciones entre partículas; la componente $\mathcal{L}_2$ es el Lagrangiano asociado a los términos cinéticos de los fermiones. Las derivadas covariantes en estos términos llevan información sobre qué interacciones pueden ver cada parte. Finalmente, el término $\mathcal{L}_3$ es la contribución relacionada con el campo escalar. En éste, los términos de Yukawa entre el escalar que contiene al Higgs y los fermiones del ME es lo que le da masa a estas partículas. Veremos esto con detalle más adelante.

Adicionalmente,

$$W_{\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + gf^{abc}W_\mu^b W_\nu^c, \quad (3.13a)$$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \quad (3.13b)$$

$$D_\mu R = \left(\partial_\mu - ig'Y B_\mu - \frac{i}{2}g''\lambda_i G_\mu^i \right) R, \quad (3.13c)$$

$$D_\mu L = \left(\partial_\mu - ig'Y B_\mu - \frac{i}{2}g\sigma_i W_\mu^i - \frac{i}{2}g''\lambda_i G_\mu^i \right) L, \quad (3.13d)$$

$$D_\mu \phi = \left(\partial_\mu - \frac{i}{2}g\sigma_i W_\mu^i - ig'Y B_\mu \right) \phi, \quad (3.13e)$$

donde λ_i son las matrices de Gell-Mann, g , g' , g'' son las constantes de acoplamiento débil, fuerte y de hipercarga, respectivamente, y

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

El operador de carga para este doblete es dado por:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.15)$$

con un valor de hipercarga $Y = \frac{1}{2}$, es decir, el doblete escalar contiene un campo con carga +1 y un campo neutro.

3.2. Sector electrodébil

Asumamos que el campo ϕ adquiere un valor esperado en el vacío (vev). Debido a la libertad de las rotaciones en SU(2) podemos expresar esta valor como

$$\phi_0 = \langle 0|\phi|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

Entonces, como se vio en el capítulo 2, el término cuadrático en la derivada covariante aplicada al campo bosónico originará la masa de los bosones gauge. Determinemos este cuadrado:

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \phi_0)^\dagger (D^\mu \phi_0) &= \left[\left(\partial_\mu - \frac{i}{2} \sigma^i W_\mu^i - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \right]^\dagger \\
 &\quad \times \left(\partial_\mu - \frac{i}{2} \sigma^i W_\mu^i - i \frac{g'}{2} B_\mu \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 D_\mu &= -\frac{i}{2} g \sigma^i W_\mu^i - \frac{ig'}{2} B_\mu \mathbb{1} \\
 &= -\frac{i}{2} g \left[W_\mu^1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + W_\mu^2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + W_\mu^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right] \\
 &\quad \times \frac{ig'}{2} B_\mu \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} gW_\mu^3 + g'B_\mu & (W_\mu^1 - iW_\mu^2)g \\ (W_\mu^1 + iW_\mu^2)g & -gW_\mu^3 + g'B_\mu \end{pmatrix} \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

Aplicando este resultado sobre el vev:

$$D_\mu \phi_0 = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} (W_\mu^1 - iW_\mu^2)g \frac{v}{\sqrt{2}} \\ (-gW_\mu^3 + g'B_\mu) \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 (D_\mu \phi_0)^\dagger (D^\mu \phi_0) &= -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} (W_\mu^1 + iW_\mu^2)g \frac{v}{\sqrt{2}} & (-gW_\mu^3 + g'B_\mu) \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &\quad \times \frac{i}{2} \begin{pmatrix} (W_\mu^1 - iW_\mu^2)g \frac{v}{\sqrt{2}} \\ (-gW_\mu^3 + g'B_\mu) \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{4} \left[(W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) \frac{(gv)^2}{2} \right. \\
 &\quad \left. + (-gW_\mu^3 + g'B_\mu)(-gW^{3\mu} + g'B^\mu) \frac{v^2}{2} \right]. \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

El último término se puede escribir como:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}((g')^2 + g^2) \left(\frac{-gW_\mu^3 + g'B_\mu}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} \right) \left(\frac{-gW^{3\mu} + g'B_\mu}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} \right) \frac{v^2}{2} \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{(g')^2 + g^2}}{2} v \right)^2 Z_\mu Z^\mu, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde hemos definido la función de onda del bosón Z como

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu). \quad (3.22)$$

Volviendo a la ecuación (3.20), para el primer término tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2} \right)^2 (W_\mu^1 W^{1\mu} + W_\mu^2 W^{2\mu}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{gv}{2} \right)^2 \left(2 \frac{(W_\mu^1 - iW_\mu^2)(W^{1\mu} + iW^{2\mu})}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \right) \\ &= \left(\frac{gv}{2} \right)^2 W_\mu^+ W^{-\mu}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

con las funciones de onda de los bosones $W^\pm$

$$W_\mu^+ = \frac{(W_\mu^1 - iW_\mu^2)}{\sqrt{2}}, \quad W_\mu^- = \frac{(W_\mu^1 + iW_\mu^2)}{\sqrt{2}}, \quad (3.24)$$

que corresponden a un campo cargado W^+ y su antipartícula W^- , y que tienen una masa

$$m_W = \frac{gv}{2}. \quad (3.25)$$

El campo neutro se puede escribir como:

$$Z_\mu = \frac{1}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} (gW_\mu^3 - g'B_\mu) = \cos \theta_W W_\mu^3 - \sin \theta_W B_\mu, \quad (3.26)$$

con

$$\cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{(g')^2 + g^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{(g')^2 + g^2}}, \quad (3.27)$$

donde θ_W se conoce como el *ángulo de Weinberg*.

Estas tres partículas masivas corresponden a los tres bosones que han adquirido masa debido al mecanismo de Higgs, puesto que hay tres generadores que no dejan invariante el vacío.

Para encontrar el bosón no-masivo de esta teoría consideremos lo siguiente:

En general, para fermiones con hipercarga Y tendremos que:

$$\begin{aligned}
 D_\mu &= \partial_\mu - i \frac{g W^i \sigma^i}{2} - i \frac{g'}{2} Y B_\mu \\
 &= \partial - \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - i W_\mu^2 \\ W_\mu^1 + i W_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} - \frac{ig'}{2} \begin{pmatrix} Y b_\mu & 0 \\ 0 & Y B_\mu \end{pmatrix} \\
 &= \partial_\mu - \underbrace{\frac{ig}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & \frac{W_\mu^1 - i W_\mu^2}{\sqrt{2}} \\ \frac{W_\mu^1 + i W_\mu^2}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}}_{\text{parte cargada}} - \underbrace{\frac{i}{2} [g \sigma^3 W_\mu^3 + g' Y B_\mu]}_{\text{parte neutra}}. \tag{3.28}
 \end{aligned}$$

Ahora, vamos a definir:

$$\boxed{A_\mu = \frac{g' W_\mu^3 + g B_\mu}{\sqrt{(g')^2 + g^2}}, \quad Z_\mu = \frac{g W_\mu^3 - g' B_\mu}{\sqrt{(g')^2 + g^2}}}, \tag{3.29}$$

donde A_μ corresponde a la función de onda del fotón, y vamos a mostrar que en términos de estas dos cantidades, el término etiquetado como la parte neutra en (3.28), puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 &\boxed{\frac{1}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} Z_\mu \left(g^2 T^3 - (g')^2 Y \right) + \frac{gg'}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} A_\mu \left(T^3 + Y \right)} \tag{3.30} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} \frac{(g W_\mu^3 - g' B_\mu)}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} \left[g^2 T^3 - (g')^2 Y \right] \\
 &\quad + \frac{gg'}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} \frac{g' W_\mu^3 + g B_\mu}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} \left[T^3 + Y \right] \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} \right)^2 \left\{ T^3 \left[g^2 (g W_\mu^3 - g' B_\mu) + gg' (g' W_\mu^3 + g B_\mu) \right] \right. \\
 &\quad \left. + Y \left[- (g')^2 (g W_\mu^3 - g' B_\mu) + gg' (g' W_\mu^3 + g B_\mu) \right] \right\} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{(g')^2 + g^2}} \right)^2 \left\{ T^3 \left[W_\mu^3 (g^3 + g(g')^2) + B_\mu (-g^2 g' + g' g^2) \right] \right. \\
 &\quad \left. + Y \left[W_\mu^3 (-g' g^2 + g(g')^2) + B_\mu ((g')^3 + g^2 g') \right] \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(g')^2 + g^2} \left\{ T^3 \left[W_\mu^3 g (g^2 + (g')^2) \right] + B_\mu g' ((g')^2 + g^2) \right\} \\
&= T^3 W_\mu^3 g + Y B_\mu g',
\end{aligned}$$

donde $T^3 \equiv \sigma^3/2$, con lo cual, en efecto, (3.30) es equivalente a la parte neutra de la derivada covariante.

Podemos identificar la carga fundamental con la constante de acoplamiento del fotón, es decir,

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + (g')^2}}. \quad (3.31)$$

Las funciones de onda de los bosones $W^\pm$, Z y del fotón que hemos definido, corresponden a *autoestados de masa*. En términos de éstos, la derivada covariante para un fermión con hipercarga Y es dada por:

$$\begin{aligned}
D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (W_\mu^+ T^+ + W_\mu^- T^-) - i \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} Z_\mu (g^2 T^3 - g'^2 - g'^2 Y) \\
- i \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} A_\mu (T^3 + Y),
\end{aligned} \quad (3.32)$$

donde hemos definido

$$T^\pm \equiv \frac{1}{2}(\sigma^1 \pm i\sigma^2) = \frac{1}{2} \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \pm i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \right], \quad (3.33)$$

es decir,

$$T^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora, para simplificar (3.32), notamos que los campos del Z y del fotón se pueden representar como una rotación ortogonal de los campos gauge W_μ^3 y B_μ de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} Z_\mu^0 \\ A_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix}, \quad (3.34)$$

donde θ_W es el ángulo de Weinberg, definido en (3.27). Además, podemos realizar una manipulación en el acoplamiento del Z , haciendo:

$$\begin{aligned}
 g^2 T^3 - g'^2 Y &= (g^2 + g'^2) T^3 - g'^2 \underbrace{[T^3 + Y]}_Q \\
 &= (g^2 + g'^2) \left[T^3 - \underbrace{\sin^2 \theta_W Q}_{\frac{g'^2}{g'^2 + g^2}} \right] \\
 &= \sqrt{(g^2 + g'^2)} \underbrace{\frac{\sqrt{(g^2 + g'^2)}}{g}}_{1/\cos \theta_W} g [T^3 - \sin^2 \theta_W Q] \\
 &= \sqrt{g^2 + g'^2} \frac{1}{\cos \theta_W} g [T^3 - \sin^2 \theta_W Q] ,
 \end{aligned}$$

y finalmente, con este resultado en (3.32) tenemos:

$$\boxed{D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g}{\sqrt{2}} (W^+ T^+ + W^- T^-) - i \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu \underbrace{(T^3 - \sin^2 \theta_W Q)}_{\text{Carga débil del } Z} - i e A_\mu Q} , \quad (3.35)$$

donde

$$e = \frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{e}{\sin \theta_W} .$$

con la expresión marcada en (3.35) como *carga débil del Z* , podemos determinar una carga débil para cada fermión del ME, pues cada fermión tiene un valor de T^3 y tiene una carga eléctrica. Así, la carga débil de algún fermión ψ será dada por

$$(T^3 - \sin^2 \theta_W Q) \psi . \quad (3.36)$$

Finalmente, recordemos que las masas del Z y de los $W^\pm$ eran dadas por

$$m_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} , \quad m_W = \frac{v}{2} g ,$$

de modo que, la razón de estas dos masas:

$$\boxed{\frac{m_W}{m_Z} = \frac{g(\frac{v}{2})}{\sqrt{g^2 + g'^2}(\frac{v}{2})} = \cos \theta_W} . \quad (3.37)$$

3.3. Corrientes fermiónicas

La derivada covariante (3.35) determina de forma única los acoplamientos de los campos W y Z^0 a los fermiones, una vez que los números cuánticos de los campos fermiónicos se especifican. Para determinar estos números cuánticos debemos tener en cuenta el hecho de que los bosones W sólo se acoplan a los estados de helicidad izquierdos de los quarks y los leptones. Definimos entonces, los dobletes izquierdos del ME como:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \dots \quad (3.38)$$

y de igual forma para las componentes izquierdas de las demás partículas. Las componentes derechas no forman dobletes, pues ellas no se mezclan bajo ningún grupo. Tenemos componentes derechas para todas las partículas, excepto para el neutrino, pues nunca se ha detectado un neutrino con helicidad derecha. No es claro si tal componente existe en la naturaleza, sin embargo para la fenomenología este hecho es irrelevante. Las oscilaciones de neutrinos son una evidencia que sugiere la existencia de tales componentes, pero aún no hay un consenso claro a este respecto y para efectos del ME actual, la componente derecha de los neutrinos es inerte.

Vamos a determinar las diferentes cantidades covariantes:

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu D_\mu \Psi_i &= \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_i - i \frac{g}{\sqrt{2}} (W^+ \bar{\Psi} \gamma^\mu T^+ \Psi + W^- \bar{\Psi} \gamma^\mu T^- \Psi) \\ &\quad - i \frac{g}{\cos \theta_W} Z_\mu \bar{\Psi}_i \gamma^\mu (T^3 - \sin^2 \theta_W Q) \Psi_i - ie A_\mu \bar{\Psi}_i \gamma^\mu Q \Psi_i. \end{aligned} \quad (3.39)$$

Definimos las corrientes:

$$J_W^{\mu \pm} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu T^\pm \Psi_i, \quad (3.40a)$$

$$J_Z^\mu \equiv \frac{1}{\cos \theta_W} \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu (T^3 - \sin^2 \theta_W Q) \Psi_i, \quad (3.40b)$$

$$J_{EM}^\mu \equiv \sum_i \bar{\Psi}_i \gamma^\mu Q \Psi_i, \quad (3.40c)$$

donde el subíndice EM significa ElectroMagnética.

Recordemos, en el capítulo 2 vimos que el "sandwich" de la derivada covariante entre los multipletes fermiónicos o escalares, es invariante gauge. La cantidad que definimos en (3.39) es precisamente esto. Así, éste es un término permitido en el Lagrangiano, y es de aquí que hemos derivado las corrientes que acabamos de definir.

Sea $\Psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$. Entonces,

$$J_W^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L \gamma^\mu d_L, \quad (3.41a)$$

$$J_W^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{d} \end{pmatrix}_L \gamma^\mu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{d}_L \gamma^\mu u_L. \quad (3.41b)$$

De igual forma, para el sector leptónico, con $\Psi = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$ podemos definir:

$$J_W^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L, \quad (3.42a)$$

$$J_W^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L. \quad (3.42b)$$

Notemos que el conjugado hermítico de la corriente positiva, es precisamente la corriente negativa y viceversa:

$$\begin{aligned} (J_W^+)^{\dagger} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L)^{\dagger} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e_L^{\dagger} \gamma^{\mu\dagger} \left[\underbrace{\nu_L^{\dagger} \gamma^0}_{\bar{\nu}_L} \right]^{\dagger} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} e_L^{\dagger} \overbrace{\gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0}^{\gamma^{\mu\dagger}} \underbrace{\gamma^0}_{1} \nu_L \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L = J_W^-. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Ahora, introducimos los índices de familia, que agrupan los quarks en dos vectores de tres

componentes como se muestra a continuación:

$$u_i = \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}, \quad d_i = \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix}, \quad (3.44)$$

agrupando los quarks con carga $+2/3$ en un vector y aquellos con carga $-1/3$ en otro. Así, siendo i el índice de familia, podemos generalizar:

$$J_W = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i, \quad (3.45)$$

donde se sobreentiende suma sobre $i = 1, 2, 3$.

Todo el acoplamiento a fermiones que hemos analizado se ha realizado en espacio de interacción, pero debemos rotarlo al espacio de masa, que nos dará los estados que son observables experimentalmente. Estos estados físicos son combinaciones lineales de los estados de interacción. Para rotar al espacio de masa (que se denotará con los estados primados), introducimos una matriz U de rotación, la cual tendrá índices de familia, mas no índices espinoriales. Así, la rotación de los estados de interacción a los estados de masa será dada por:

$$\begin{aligned} d_L^i &= (U_L^d)^{ij} d_L'^j = U_L^d d' \\ u_L^i &= (U_L^u)^{ij} u_L'^j = U_L^u u'. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Reemplazando esto en (3.45)

$$\begin{aligned} J_W &= \frac{1}{\sqrt{2}} (U_L^u)^{ij} u_L'^j \gamma^\mu U_L^d{}^{ik} d_L'^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (u_L'^j)^\dagger (U_L^{u*})_{ji}^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu U_L^d{}^{ik} d_L'^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L'^j \gamma^\mu U_{ji}^{u*} U_L^d{}^{ik} d_L'^k \\ &= \frac{q}{\sqrt{2}} \bar{u}_L'^j \gamma^\mu \underbrace{(U_L^u{}^\dagger U_L^d)}_{V_{jk}^{\text{CKM}}} d_L'^k \\ J_W^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L'^j \gamma^\mu V_{jk}^{\text{CKM}} d_L'^k, \end{aligned} \quad (3.47)$$

donde V_{jk}^{CKM} es una matriz unitaria denominada matriz de Cabibo-Kobayashi-Maskawa y que se mide experimentalmente. Esta matriz es sumamente importante para la fenomenología de las interacciones débiles y únicamente aparece en corrientes cargadas, no en corrientes neutras.

Para leptones puede definirse una matriz similar que mezcla las diferentes familias. Esta matriz, V_{ij}^{PMNS} se denomina de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata. Con esto tendríamos que la corriente para leptones, en el espacio de masas, es dada por

$$J_W^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{e}'_{Li} \gamma^\mu V_{ij}^{\text{PMNS}} \nu'_j. \quad (3.48)$$

Nótese que la matriz CKM aparece definida en la corriente J_W^+ , mientras que la PMNS aparece definida en la corriente J_W^- . Esto se debe puramente a razones históricas, e implica que la matriz CKM debe aparecer dagada en una corriente J_W^+ , mientras que la PMNS aparece dagada en J_W^- , todo esto en razón de (3.43).

Cabe resaltar que sólo en las corrientes cargadas existe cambio de sabor. Esto es, para corrientes neutras, las matrices CKM y PMNS son la matriz identidad. Para comprender mejor a qué nos referimos cuando hablamos de corrientes cargadas y corrientes neutras, consideremos lo siguiente:

Todo término de interacción debe ser invariante bajo la carga. Consideremos por ejemplo, el siguiente término en el espacio de interacción:

$$\bar{u}^i \gamma^\mu d^i, \quad (3.49)$$

y realicemos el reescalamiento por carga. Esto es, incorporamos la carga de cada componente como una fase. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \bar{u}^i \gamma^\mu d^i &= \left(e^{\frac{2}{3}ie\theta} u^i \right)^\dagger \gamma^\mu e^{-\frac{1}{3}ie\theta} d^i \\ &= u_i^\dagger \gamma^0 e^{-\frac{2}{3}ie\theta} \gamma^\mu e^{-\frac{1}{3}ie\theta} d^i \\ &= e^{-ie\theta} \bar{u}_i \gamma^\mu d^i, \end{aligned} \quad (3.50)$$

esto es, el término original ha adquirido una fase $e^{-ie\theta}$ al hacer el reescalamiento por carga. Para una corriente cargada, esta fase es diferente de cero, como en el caso que hemos ilustra-

do. Para corriente neutra, por el contrario, esta fase será igual a cero, como en el caso en que los dos quarks presentes en el término fuesen u .

Esto significa que si queremos formar un término que sea invariante bajo transformaciones gauge, debemos agregar al término un W^+ , de forma que cuando se haga el reescalamiento por carga, éste adquiera una fase $e^{+ie\theta}$, de tal forma que la fase en el término final se haga cero, esto es,

$$\bar{u}^i \gamma^\mu d^i W^+ . \quad (3.51)$$

Capítulo 4

Decaimientos del mesón B y las anomalías de sabor

El modelo estándar de la física de partículas provee predicciones para las propiedades e interacciones de las partículas elementales, que han sido confirmadas por numerosos experimentos desde que fue propuesto por primera vez en la década de 1960. No obstante, es claro que el modelo es incompleto. El ME no puede explicar las observaciones cosmológicas acerca de la abundancia de materia sobre antimateria en el universo, el aparente contenido de materia oscura en el universo, o explicar los patrones observados en la intensidad de las interacciones entre partículas. Así, se ha originado una búsqueda de ‘nueva física’, esto es, las nuevas partículas que puedan explicar las deficiencias del ME [42].

Uno de los métodos de la búsqueda de nueva física consiste en comparar las medidas de las propiedades observadas en decaimientos hadrónicos, donde los hadrones son estados ligados de quarks, con las respectivas predicciones del ME. Las cantidades medibles pueden predecirse de forma precisa en los decaimientos de un hadrón beauty cargado B^+ , hacia un kaón cargado, K^+ , y dos leptones, ℓ^+ , ℓ^- . El mesón B^+ contiene un antiquark bottom (o beauty), $\bar{b}$, y el kaón K^+ un antiquark strange, $\bar{s}$, tal que, a nivel de quarks, el decaimiento implica una transición $\bar{b} \rightarrow \bar{s}$. En el ME la descripción de tales procesos involucran los portadores electrodébiles y el quark top (Fig. 4.1, izquierda). Estos decaimientos están altamente suprimidos [43] y la fracción de mesones B^+ que decaen a este estado final (la fracción de ramificación o ‘branching fraction’, $\mathcal{B}$) es del orden de 10^{-6} [44].

Una característica distintiva del ME es que los diferentes leptones (e , μ , τ) tienen las mismas fuerzas de interacción. Esto se conoce como *universalidad leptónica*. La única excepción a esto se debe al campo de Higgs, ya que las interacciones leptón-Higgs dan origen a las masas diferentes de los leptones $m_\tau > m_\mu > m_e$. La supresión de las transiciones $\bar{b} \rightarrow \bar{s}$ se entiende

en términos de las simetrías fundamentales sobre las que se construye el ME. Por el contrario, la universalidad leptónica es una simetría accidental del ME, la cual no es consecuencia de ninguno de los axiomas de la teoría. Las extensiones al ME que pretenden solucionar muchas de sus deficiencias predicen nuevas partículas virtuales que podrían contribuir a las transiciones $\bar{b} \rightarrow \bar{s}$ (Fig. 4.1, derecha) y que podrían tener interacciones no-universales, originando así fracciones de ramificación de decaimientos $B^+ \rightarrow K^+ \ell^+ \ell^-$ con diferentes leptones que difieran de las predicciones del ME.

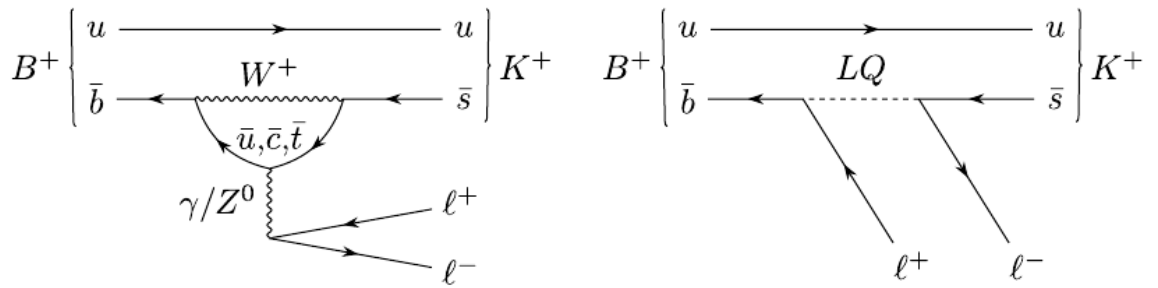


Figura 4.1: Procesos fundamentales que contribuyen a los decaimientos $B^+ \rightarrow K^+ \ell^+ \ell^-$ en el ME y posibles modelos de nueva física. (Izquierda) La contribución del ME involucra los bosones electrodébiles γ , W^+ y Z^0 . (Derecha) Una posible contribución de nueva física al decaimiento con un leptokuark (LQ) hipotético que, contrario a los bosones electrodébiles, podría tener diferentes acoplamientos con diferentes tipos de leptones (Fuente: [42]).

Los cálculos de las predicciones del ME para las fracciones de ramificación de los decaimientos $B^+ \rightarrow K^+ \mu^+ \mu^-$ y $B^+ \rightarrow K^+ e^+ e^-$ son dificultados por la interacción fuerte que mantiene a los quarks ligados en un estado hadrónico, como se describe por la cromodinámica cuántica (QCD por sus siglas en inglés). Los grandes valores de las fuerzas impide realizar predicciones de los efectos de la QCD mediante las técnicas perturbativas empleadas para el cómputo de amplitudes de la fuerza electrodébil, de modo que sólo cálculos aproximados son posibles actualmente. No obstante, la interacción fuerte no acopla directamente a los leptones, de modo que su efecto en los decaimientos $B^+ \rightarrow K^+ \mu^+ \mu^-$ y $B^+ \rightarrow K^+ e^+ e^-$ es idéntico. La razón de las fracciones de ramificación de estos decaimientos es, por lo tanto, predicha con una precisión de $\mathcal{O}(1\%)$ [42]. Debido a las masas pequeñas tanto de los elec-

trones, como de los muones, se predice que esta razón debe ser cercana a la unidad, excepto en la región donde el valor del cuadrado de la masa invariante del dileptón (q^2) restrinja significativamente el espacio de fase disponible para formar los dos leptones. Consideraciones similares aplican para decaimientos con otros mesones $B \rightarrow H\mu^+\mu^-$ y $B \rightarrow He^+e^-$, donde $B = B^+, B^0, B_s^0$ o Λ_b^0 ; y H puede ser, por ejemplo, un kaón excitado, K^{*0} , o una combinación de partículas tales como un protón y un kaón cargado, pK^- . La razón de fracciones de ramificación, R_H se define en el rango del cuadrado de la masa del dileptón $q_{\min}^2 < q^2 < q_{\max}^2$ como

$$R_H \equiv \frac{\int_{q_{\min}^2}^{q_{\max}^2} \frac{d\mathcal{B}(B \rightarrow H\mu^+\mu^-)}{dq^2} dq^2}{\int_{q_{\min}^2}^{q_{\max}^2} \frac{d\mathcal{B}(B \rightarrow He^+e^-)}{dq^2} dq^2}. \quad (4.1)$$

Para decaimientos con $H = K^+$ y $H = K^{*0}$ tales razones, denotadas por R_K y $R_{K^{*0}}$, respectivamente, han sido medidas previamente en regiones similares de q^2 [45, 46]. Para R_K las mediciones están en la región $1.1 < q^2 < 6.0 \text{ GeV}^2/c^4$, en tanto que para $R_{K^{*0}}$ las regiones son $0.045 < q^2 < 1.1 \text{ GeV}^2/c^4$ y $1.1 < q^2 < 6.0 \text{ GeV}^2/c^4$. Se ha determinado que estas razones están $2.1 - 2.5\sigma$ (desviaciones estándar) por debajo de las predicciones respectivas del ME. En 2021 el experimento LHCb [42] realizó mediciones precisas de la razón R_K , obteniéndose

$$R_K(1.1 < q^2 < 6.0 \text{ GeV}^2/c^4) = 0.846^{+0.042+0.013}_{-0.039-0.012}, \quad (4.2)$$

donde la primera incertidumbre es estadística y la segunda es sistemática. Combinando las incertidumbres se obtiene $R_K = 0.846^{+0.044}_{-0.041}$. Esta es la medida más precisa hasta la fecha y es consistente con los valores esperados del ME, 1.00 ± 0.01 , al nivel de 0.01 % (3.1 desviaciones estándar), aportando evidencia para la violación de la universalidad leptónica en estos decaimientos. Una comparación con medidas previas se muestra en la Figura 4.2.

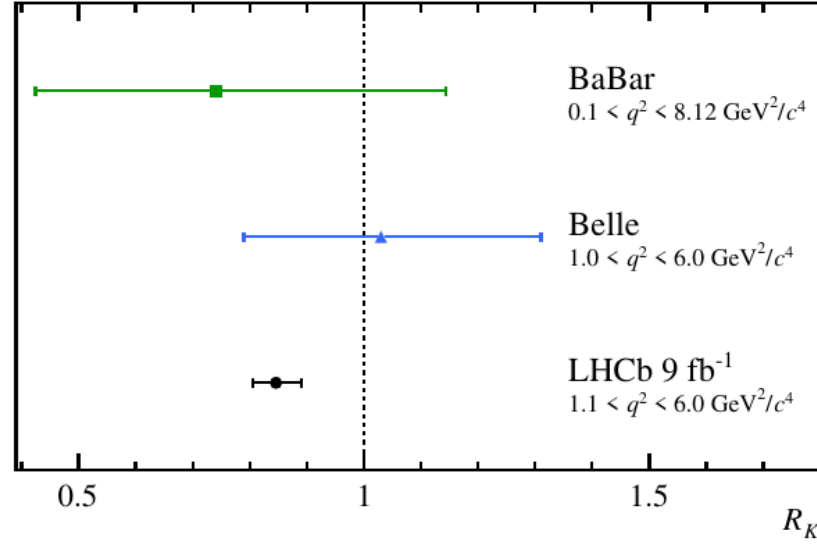


Figura 4.2: Comparación entre medidas de R_K . Además de los resultados de LHCb, se muestran también las mediciones de las colaboraciones BaBar [47] y Belle [48], que combinan $B^+ \rightarrow K^+ \ell^+ \ell^-$ y $B^0 \rightarrow K_S^0 \ell^+ \ell^-$ (Fuente: [42]).

La anomalía $R_{K^{(*)}}$ será el foco del análisis fenomenológico que haremos en el presente trabajo, no obstante cabe mencionar que los decaimientos $\bar{B} \rightarrow D^{(*)} \ell^- \bar{\nu}_\ell$ también han sido estudiados en detalle experimentalmente [49] y teóricamente [50], y han sido fuente de discrepancias con el ME [51] que sugieren la existencia de nueva física.

4.1. Métodos de las búsquedas de nueva física en los decaimientos del mesón B

Cuando se realizan mediciones sobre los decaimientos del mesón B es posible observar contribuciones del ME así como cualquier otro proceso que puede deberse a física más allá del ME. Varios enfoques pueden seguirse para esto [52].

Un enfoque consiste en predecir la tasa de decaimiento de un único proceso en el ME con acoplamientos conocidos y contrastarlo contra las mediciones. El ejemplo clásico en este

caso es $b \rightarrow s\gamma$. Otro enfoque consiste en realizar diferentes mediciones de los parámetros de la matriz de Cabibbo-Cobayashi-Maskawa (CKM) a través de diferentes métodos y verificar si éstas coinciden entre sí. La matriz CKM parametriza las mezclas entre autoestados de masa y de sabor como acoplamientos entre los quarks tipo up y los quarks tipo down. Esta matriz es dada por

$$V_{\text{CKM}} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Al aplicar restricciones de unitariedad sobre ésta es posible construir seis triángulos independientes mostrados en la Figura 4.3. Otra base para la matriz CKM son los cuatro ángulos marcados como χ , χ' y cualesquiera dos de entre α , β , γ , puesto que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Estos ángulos se usan en mediciones relacionadas a la violación CP.

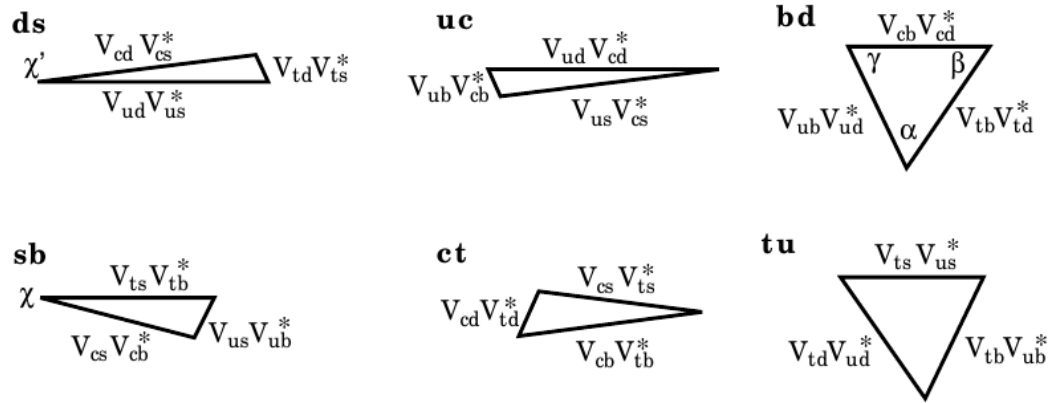


Figura 4.3: Los 6 triángulos resultantes de aplicar restricciones de unitariedad a la matriz CKM a la fila y columna indicadas. También se muestran los ángulos de violación CP (Fuente: [52]).

Las mediciones asociadas a la matriz CKM que se ejecutan normalmente, tienen que ver con medir los ángulos y lados de los triángulos de unitariedad, pero otras cantidades también pueden emplearse. Un tercer enfoque implica la medición de la misma cantidad por medio de diferentes métodos, incluso si tal cantidad no puede ser predicha por el ME. Un ejemplo

de ello es medir el ángulo β de violación CP empleando los decaimientos $B^0 \rightarrow J/\psi K_S$ que proceden a través de un diagrama de Feynman, y ejecutar otra medición en un proceso que ocurra a través de otro diagrama, por ejemplo $B^0 \rightarrow \phi K_S$.

La cuestión aquí es que si partículas nuevas más masivas existen en un rango de masas accesible a las mediciones del LHC, entonces éstas *deben* contribuir a decaimientos raros del mesón B y que involucran violación de CP. Incluso si las mediciones son lo suficientemente precisas como para limitar el tamaño de estos efectos, las propiedades de estas partículas nuevas serán mucho mejor entendidas. Esta es la razón para estudiar más a fondo los decaimientos del mesón B . Los métodos que hemos mencionado son ampliamente explicados en [52].

4.2. Leptoquarks como explicación para las anomalías de sabor

Un leptoquark es una partícula hipotética que porta tanto número bariónico como leptónico [53]. Varias teorías de física más allá del ME predicen la existencia de leptoquarks. Los leptoquarks vectoriales pueden estar relacionados con teorías de unificación, de las cuales el modelo de Pati–Salam [22] es un ejemplo, los leptoquarks escalares también aparecen en supersimetría, y también aparecen en modelos donde quarks y leptones son manifestaciones de una misma dinámica subyacente. La fenomenología de los leptoquarks a la escala de TeV ha sido discutida recientemente para buscar explicar las anomalías en los decaimientos semileptónicos del mesón B . No obstante, no existen argumentos teóricos fuertes para preferir un patrón particular de sabores de leptoquarks o de números cuánticos, y los hallazgos experimentales, pese a que son intrigantes, pueden aún cambiar o desaparecer por completo. Esto motiva una aproximación sistemática a la búsqueda de estados finales mínimos pero suficientes que puedan evidenciar leptoquarks con decaimientos arbitrarios a quarks y leptones [54]. Los posibles números cuánticos de los estados de leptoquark pueden restringirse asumiendo que su interacción directa con fermiones ordinarios del ME no tiene dimensiones y es invariante bajo el grupo gauge del ME. En la Tabla 4.1 se da una lista de todos los posibles

números cuánticos con esta suposición. Las columnas $SU(3)_c$, $SU(2)_L$ y $U(1)_Y$ indican las representaciones en los grupos de color, isoespín e hipercarga, respectivamente. El espín de un leptoquark puede ser 1 (leptoquark vectorial) o 0 (leptoquark escalar).

Tabla 4.1: Leptoquarks posibles y sus números cuánticos (Fuente: [55]).

Espín	$3B + L$	$SU(3)_c$	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	Acoplamientos permitidos
0	-2	$\bar{3}$	1	$1/3$	$\bar{q}_L^c \ell_L$ o $\bar{u}_R^c e_R$
0	-2	$\bar{3}$	1	$4/3$	$\bar{d}_R^c e_R$
0	-2	$\bar{3}$	3	$1/3$	$\bar{q}_L^c \ell_L$
1	-2	$\bar{3}$	2	$5/6$	$\bar{q}_L^c \gamma^\mu e_R$ o $\bar{d}_R^c \gamma^\mu \ell_L$
1	-2	$\bar{3}$	2	$-1/6$	$\bar{u}_R^c \gamma^\mu \ell_L$
0	0	3	2	$7/6$	$\bar{q}_L e_R$ o $\bar{u}_R \ell_L$
0	0	3	2	$1/6$	$\bar{d}_R \ell_L$
1	0	3	1	$2/3$	$\bar{q}_L \gamma^\mu \ell_L$ o $\bar{d}_R \gamma^\mu e_R$
1	0	3	3	$5/3$	$\bar{u}_R \gamma^\mu e_R$
1	0	3	3	$2/3$	$\bar{q}_L \gamma^\mu \ell_L$

Los límites sobre estados de leptoquark pueden ser obtenidas directa o indirectamente. Los límites directos provienen de su sección transversal cuando se producen en colisionadores, mientras que los límites indirectos son calculados a partir de las cotas sobre interacciones de cuatro fermiones inducidas por leptoquarks, que son, a su vez, obtenidas de experimentos a bajas energías o de experimentos en colisionadores por debajo del umbral. Estas interacciones de cuatro fermiones a menudo ocasionan violaciones de la universalidad leptónica en decaimientos de quarks pesados [55]. Las anomalías $b \rightarrow s\mu\mu$ y $b \rightarrow c\tau\nu$ pueden ser explicadas por modelos de leptoquarks a la escala de los TeV [56].

Si un leptoquark acopla a quarks (leptones) de más de una familia en la base de masa, puede inducir interacciones de cuatro fermiones, ocasionando corrientes neutrales con cambio de sabor (violaciones del número de familia leptónico). La asignación de números cuánticos en

la Tabla 4.1 permite a varios estados de leptokuark acoplar tanto quarks derechos como izquierdos simultáneamente. Estos estados de leptokuark se denominan estados *no quirales* y pueden ocasionar interacciones a cuatro fermiones que afectan diferentes razones de fracciones de ramificación en decaimientos del pión. Estos estados no quirales también contribuyen al momento anómalo del muón [55].

Capítulo 5

Estudio detallado del modelo $SU(4)$ izquierdo – derecho

Estudiaremos un modelo basado en la unificación de Pati-Salam con dos grupos $SU(4)$ que rompen a $SU(3)_C$ del color. Este modelo fue propuesto por Fornal y sus colaboradores en [29] y en lo que sigue nos referiremos a éste como modelo de Fornal. El grupo gauge del modelo es

$$\underbrace{SU(4)_L \otimes SU(4)_R}_{\text{color}} \otimes \underbrace{SU(2)_L}_{\text{isoespín}} \otimes \underbrace{U(1)'}_{\text{carga exótica}}. \quad (5.1)$$

La característica fundamental de este modelo es que el subgrupo $SU(4)_R$ rompe a una escala mucho mayor que $SU(4)_L$, de modo que las corrientes leptónicas derechas con cambio de sabor se suprimen. El subgrupo $SU(2)_L$ de isoespín es el grupo habitual del ME. El subgrupo $U(1)'$ representa una carga exótica dada para el grupo inicial y no debe confundirse con el grupo $U(1)_Y$ de la hipercarga del ME.

La descomposición del grupo gauge inicial a multipletes del ME resulta en:

$$\begin{aligned} \hat{\Psi}_L &= (4, 1, 2, 0) = (3, 2)_{\frac{1}{6}} \oplus (1, 2)_{-\frac{1}{2}}, \\ \hat{\Psi}_R^u &= (1, 4, 1, \frac{1}{2}) = (3, 1)_{\frac{2}{3}} \oplus (1, 1)_0, \\ \hat{\Psi}_R^d &= (1, 4, 1, -\frac{1}{2}) = (3, 1)_{-\frac{1}{3}} \oplus (1, 1)_{-1}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

para cada generación, donde $\hat{\Psi}_L$, $\hat{\Psi}_R^u$, $\hat{\Psi}_R^d$ contienen los campos Q_L, L_L, u_R, d_R, e_R y un neutrino derecho ν_R . Nótese la estructura de un triplete y un singlete de color en $\hat{\Psi}_L$ que es consecuencia de la regla de ramificación (5.10). La estructura de dobletes de isoespín para $\hat{\Psi}_L$ y singletes de isoespín para $\hat{\Psi}_R^u, \hat{\Psi}_R^d$ es consecuencia directa de la estructura del ME, donde las partes derechas de los fermiones no portan carga débil.

Adicionalmente, el modelo propuesto involucra los multipletes de partículas exóticas

$$\begin{aligned}\hat{\chi}_L &= (\bar{4}, 1, 2, 0) = (\bar{3}, 2)_{-\frac{1}{6}} \oplus (1, 2)_{\frac{1}{2}}, \\ \hat{\chi}_R &= (1, \bar{4}, 2, 0) = (\bar{3}, 2)_{-\frac{1}{6}} \oplus (1, 2)_{\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{5.3}$$

que aseguran la cancelación de anomalías gauge y resultan en dos pares de campos vectoriales Q'_L, Q'_R y L'_L, L'_R que son pesados y no se mezclan con los fermiones del ME.

Como el modelo de Fornal es derivado de la unificación de Pati-Salam, se consideran a los leptones como un cuarto color, lo cual implica que los leptones y los quarks del ME pertenecen a la representación fundamental de SU(4). Esto resulta en la existencia de vértices que convierten un quark a un leptón involucrando un nuevo bosón gauge denominado leptoquark que pertenecerá a la representación adjunta de SU(4). El trabajo que realizaremos sobre este modelo, requiere entonces que establezcamos correctamente la estructura del grupo SU(4), por lo que es conveniente determinar sus generadores.

5.1. Generadores de SU(4)

Los generadores de SU(4) son 15 matrices 4×4 que tienen traza cero. Para ajustarnos a los parámetros del modelo y el hecho de que la simetría debe romper a SU(3)_C, las primeras 3 filas y columnas de dichas matrices serán asignadas al grupo SU(3)_C y buscaremos que sus elementos coincidan con las matrices de Gell-Mann, que son los generadores convencionales de este grupo gauge. El elemento en la intersección de la fila 4 y la columna 4 representa a los leptones, que deben ser singletes de color luego de la ruptura de la simetría. Los elementos restantes en la fila 4 y la columna 4 representan mezclas entre quarks y leptones.

Para determinar los generadores procedemos según el método esbozado en [30, cap. 9], partiendo de una representación del grupo U(4). La representación más simple de las matrices que generan este grupo está constituido por matrices 4×4 que contienen un solo elemento no-nulo cuyo valor es 1. Denotamos estas matrices por $C_{\alpha\beta}$, donde el elemento de valor 1 se

encuentra en la intersección de la fila α y la columna β :

$$C_{\alpha\beta} = \alpha \begin{pmatrix} & \beta \\ & | \\ \text{---} & 1 & \text{---} & \text{---} \\ & | \\ & | \end{pmatrix}, \quad (C_{\alpha\beta})_{ik} = \delta_{\alpha i} \delta_{\beta k}. \quad (5.4)$$

Emplearemos combinaciones lineales de la forma

$$C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha}, \quad \frac{1}{i}(C_{\alpha\beta} - C_{\beta\alpha}) \quad (5.5)$$

para crear matrices hermíticas a partir de los generadores con $\alpha \neq \beta$. Por su parte, los generadores diagonales $C_{\alpha\alpha}$ ya son matrices hermíticas, pero requerimos que tengan traza cero. Para ello formamos las siguientes combinaciones:

$$\begin{aligned} C''_{11} &= C_{11} - \frac{1}{3}(C_{11} + C_{22} + C_{33}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\ C''_{22} &= C_{22} - \frac{1}{3}(C_{11} + C_{22} + C_{33}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 2 & & \\ & & -1 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\ C''_{33} &= C_{33} - \frac{1}{3}(C_{11} + C_{22} + C_{33}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\ C''_{44} &= C_{44} - \frac{1}{3}(C_{11} + C_{22} + C_{33}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Las combinaciones:

$$\tilde{\lambda}_3 = C''_{11} - C''_{22} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\lambda}_8 = (C''_{11} + C''_{22}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -2 & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

toman la forma de las matrices de Gell-Mann deseada, mientras que definiremos

$$\tilde{\lambda}_{15} = -3C''_{44} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

como el tercer generador diagonal de SU(4).

Los generadores no diagonales se obtienen siguiendo la prescripción (5.5). A continuación presentamos los quince generadores T_i de SU(4), normalizados de acuerdo con $\text{Tr}(T_i T_j) = (1/2)\delta_{ij}$ (se suprimen las filas y columnas que contienen ceros):

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{2}(C_{12} + C_{21}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_2 &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_1 = \frac{1}{2i}(C_{12} - C_{21}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_3 &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_3 = \frac{1}{2}(C''_{11} - C''_{22}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, & T_4 &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_4 = \frac{1}{2}(C_{13} + C_{31}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_5 &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_5 = \frac{1}{2i}(C_{13} - C_{31}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_6 &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_6 = \frac{1}{2}(C_{23} + C_{32}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_7 &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_7 = \frac{1}{2i}(C_{23} - C_{32}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & T_8 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\tilde{\lambda}_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Estos corresponden a los generadores del subgrupo SU(3), y como se mencionó anteriormente, toman la forma de las matrices de Gell-Mann (con la normalización especificada). Los generadores que describen transiciones entre quarks y leptones son dados por:

$$\begin{aligned} T_9 &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_9 = \frac{1}{2}(C_{14} + C_{41}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & & 1 \\ & & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & T_{10} &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{10} = \frac{1}{2i}(C_{14} - C_{41}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & & -i \\ & & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ T_{11} &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{11} = \frac{1}{2}(C_{14} + C_{41}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, & T_{12} &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{12} = \frac{1}{2i}(C_{24} + C_{42}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & & 0 \\ & & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ T_{13} &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{13} = \frac{1}{2}(C_{34} + C_{43}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & & 0 \\ & & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & T_{14} &= \frac{1}{2}\tilde{\lambda}_{14} = \frac{1}{2i}(C_{34} - C_{43}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} & & 0 \\ & & -i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Estas transiciones serán mediadas por los leptokuarks, que serán la clave para explicar las anomalías de sabor en el modelo estudiado. Finalmente tenemos el generador que describe al subgrupo $U(1)_{31}$ proveniente de la ruptura de SU(4) al grupo de color del ME. Este generador debe ser diagonal y proporcional a la unidad con respecto a $SU(3)_C$, además debe tener traza cero. La única forma de lograr esto (excepto por un factor constante) es la combinación:

$$T_{15} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\tilde{\lambda}_{15} = \frac{1}{2\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -3 \end{pmatrix}.$$

5.2. Operador de carga

Para obtener el grupo gauge del ME, los dos grupos $SU(4)$ de color del modelo inicial deben romper a:

$$\begin{aligned} SU(4)_L &\longrightarrow SU(3)_L \otimes U(1)_{L31}, \\ SU(4)_R &\longrightarrow SU(3)_R \otimes U(1)_{R31}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Las reglas de ramificación (branching rules) de este rompimiento de simetría conllevan a los siguientes multipletes (cf. [57, p. 93]):

$$4 \longrightarrow 3_1 \oplus 1_{-3}. \quad (5.10)$$

Nótese que de esta descomposición es fácil inferir (excepto por un factor constante) el generador T_{15} que encontramos en la sección 5.1, y que corresponde al generador del grupo $U(1)_{31}$ en la representación de $SU(4)$. Con la normalización escogida, definimos un generador T_{15} para cada subgrupo $SU(4)$:

$$T_L^{15} = T_R^{15} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Teniendo en cuenta el grupo gauge inicial y cómo los $SU(4)$ rompen, definimos el operador de carga del modelo como la suma del generador T^3 de isoespín y los generadores de los grupos $U(1)$ restantes, i.e.,

$$Q = t^3 + A(T_L^{15} + T_R^{15}) + BY', \quad (5.12)$$

donde t^3 es el generador de isoespín, normalizado de acuerdo con $\text{Tr}(T_i T_j) = (1/2)\delta_{ij}$ ¹,

$$t^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

A y B son constantes reales por determinar, y el coeficiente que acompaña a t^3 se elige como siendo 1, por convención. Este operador es, como debe esperarse, una combinación lineal de todos los generadores diagonales de los subgrupos iniciales.

Procedamos entonces, a determinar las matrices de carga de los multipletes que se dieron en (5.2).

■ **Multiplete $\hat{\Psi}_L = (4, 1, 2, 0)$**

Este multiplete tendrá un índice i de SU(4)_L que corre de 1 a 4, y un índice j de SU(2)_L que corre de 1 a 2, i.e. $\Psi_L^{i\alpha}$. Además sabemos, por la forma en que este multiplete rompe al ME, que contiene el sextete de quarks izquierdos y el doblete de leptones izquierdos para cada familia. Para un j fijo, $\hat{\Psi}_L$ puede considerarse como dos cuadrupletes de Haciendo SU(4), que para la primera familia del ME son dados por ²

$$\Psi_L^{i1} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \nu_e \end{pmatrix}_L, \quad \Psi_L^{i2} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e \end{pmatrix}_L, \quad (5.14)$$

Además, la carga Y' de este multiplete es cero. Como este multiplete no tiene índices de SU(4)_R, el generador T_R^{15} no contribuye a su carga. Así, si definimos los índices griegos como siendo de SU(2)_L y los índices latinos para SU(4)_L, tenemos

$$\left(Q \hat{\Psi}_L \right)^{i\alpha} = \left[(t^3)^\alpha_\beta \delta_{ij} + A (T_L^{15})^i_j \delta_{\alpha\beta} + 0B \right] \Psi_L^{j\beta}. \quad (5.15)$$

¹El hecho de que la matriz t^3 sea 2×2 , mientras que la matriz T^{15} sea 4×4 puede ser origen de confusión en este tratamiento. Hay que recordar que estas matrices no son más que representaciones de operadores que van a actuar sobre los multipletes del modelo, y deben ser entendidos como tal, no únicamente como matrices. Para una explicación más detallada de esta sutileza, véase el Apéndice B.

²Los subíndices 1, 2, 3 representan los sabores de los quarks y son equivalentes al índice i de SU(4). Bien podríamos denominar ν_e como u_4 y e como d_4 , puesto que en el modelo de Pati-Salam, los leptones son “el cuarto color”, pero esto va en detrimento de la claridad de los razonamientos.

Para $\alpha = 1$ tendremos:

$$\begin{aligned} (Q\hat{\Psi}_L)^{i1} &= \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \frac{A}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \nu_e \end{pmatrix}_L \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{6}} & & & \\ & \frac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{6}} & & \\ & & \frac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{6}} & \\ & & & \frac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \nu_e \end{pmatrix}_L. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Teniendo en cuenta el contenido de partículas del cuádruplete $\hat{\Psi}_L^{i1}$, sabemos que la matriz que acompaña al multiplete en la ecuación anterior debe contener las cargas del ME

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & & & \\ & \frac{2}{3} & & \\ & & \frac{2}{3} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.17)$$

de modo que para determinar el coeficiente A debemos solucionar el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{A}{2\sqrt{6}} = \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} - \frac{A}{2\sqrt{2}} = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

La solución para este sistema es

$$\boxed{A = \frac{\sqrt{6}}{3}}, \quad (5.19)$$

con lo cual el operador de carga

$$Q = t^3 + \frac{\sqrt{6}}{3} (T_L^{15} + T_R^{15}) + BY' \quad (5.20)$$

entrega los valores correctos de carga para el cuádruplete $\hat{\Psi}_L^{i1}$.

Con el operador de carga en esta forma, para $\alpha = 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} (Q\hat{\Psi}_L)^{i2} &= \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e \end{pmatrix}_L \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & & & \\ & -\frac{1}{3} & & \\ & & -\frac{1}{3} & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ e \end{pmatrix}_L \end{aligned} \quad (5.21)$$

da las cargas correctas para las partículas del cuadruplete.

■ **Multiplete $\hat{\Psi}_R^u = (1, 4, 1, \frac{1}{2})$**

Este multiplete tiene un sólo índice i de $SU(4)_R$, i.e. $\Psi_R^{u i}$, y por su descomposición en los multipletes del ME vemos que contiene, para la primera familia, el triplete de quarks up derechos y un neutrino derecho, i.e.

$$\Psi_R^u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \nu_e \end{pmatrix}_R. \quad (5.22)$$

Adicionalmente, al ser singlete de isoespín, el operador t^3 no contribuye a la carga de este multiplete. De modo que

$$\left(Q\hat{\Psi}_R^u\right)^i = \left[\frac{\sqrt{6}}{3}(T_R^{15})_\alpha^i + BY'\right]\Psi_R^{u\alpha}. \quad (5.23)$$

Así pues,

$$\begin{aligned} \left(Q\hat{\Psi}_R^u\right)^i &= \left[\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} + B\left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \nu_e \end{pmatrix}_R \\ &= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1+3B & & & \\ & 1+3B & & \\ & & 1+3B & \\ & & & 3(1-B) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \nu_e \end{pmatrix}_R. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Por el contenido de partículas de este multiplete, se requiere que la matriz acompañándolo en la anterior ecuación debe ser igual a

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & & & \\ & \frac{2}{3} & & \\ & & \frac{2}{3} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.25)$$

de lo cual es fácil ver que

$$\boxed{B = 1}. \quad (5.26)$$

Con esto queda completo el operador de carga para nuestro modelo, siendo

$$Q = t^3 + \frac{\sqrt{6}}{3}(T_L^{15} + T_R^{15}) + Y'. \quad (5.27)$$

■ **Multiplete $\hat{\Psi}_R^d = (1, 4, 1, -\frac{1}{2})$**

Ya hemos obtenido el operador de carga completo con los anteriores multipletes, pero cabe verificar nuestro resultado aplicando el operador a este multiplete y comprobando que entrega las cargas correctas para las partículas del ME. Este multiplete es casi idéntico al anterior, excepto que el valor de la carga Y' es $-1/2$. El análisis es análogo, de modo que tenemos

$$\begin{aligned} (Q\hat{\Psi}_R^u)^i &= \left[\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix} - \left(\frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e \end{pmatrix}_R \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & & & \\ & -\frac{1}{3} & & \\ & & -\frac{1}{3} & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e \end{pmatrix}_R, \end{aligned} \quad (5.28)$$

que, en efecto, son las cargas correctas para las partículas del multiplete.

Citamos, nuevamente aquí, el operador de carga para el modelo de Fornal:

$$Q = t^3 + \sqrt{\frac{2}{3}}(T_L^{15} + T_R^{15}) + Y'. \quad (5.29)$$

5.3. Derivada covariante del modelo

Los términos de interacción del Lagrangiano del modelo involucran su derivada covariante y son dados por

$$\mathcal{L}_k = \bar{\hat{\Psi}}_L i\gamma^\mu D_\mu \hat{\Psi}_L + \bar{\hat{\Psi}}_R^u i\gamma^\mu D_\mu \hat{\Psi}_R^u + \bar{\hat{\Psi}}_R^d i\gamma^\mu D_\mu \hat{\Psi}_R^d. \quad (5.30)$$

Con la información del grupo gauge del modelo es posible construir fácilmente su derivada covariante como

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_L G_{L\mu}^A T_L^A + ig_R G_{R\mu}^A T_R^A + ig_2 W_\mu^a t^a + ig_1' Y_\mu' Y', \quad (5.31)$$

con $A = 1, \dots, 15$, $a = 1, 2, 3$, y donde T_L^A , T_R^A , t^a , Y' son los generadores de $SU(4)_L$, $SU(4)_R$, $SU(2)_L$, $U(1)'$ respectivamente, $G_{L\mu}^A$, $G_{R\mu}^A$, W_μ^a , Y_μ' sus correspondientes campos gauge, y g_L , g_R , g_2 , g_1' las constantes de acoplamiento de cada grupo.

No obstante, la manipulación de estos términos puede tornarse oscura si no se hacen explícitos los índices de las simetrías. Para evitar confusiones, es conveniente escribir explícitamente cómo actúa la derivada covariante sobre cada uno de los multipletes del modelo y para ello hemos de estudiar la forma que tiene la derivada covariante para tensores de rango 1 y de rango 2.

Derivada covariante de un tensor de rango 1

Según lo expuesto en la sección 2.3, la derivada covariante para un tensor $\hat{\Psi}^i$ de rango 1 puede expresarse como:

$$D_\mu \Psi^i = \partial_\mu \Psi^i - ig(T^a A_\mu^a) \Psi^i, \quad (5.32)$$

donde hemos hecho explícitos algunos índices involucrados.

- El subíndice μ es, por supuesto, un índice espacial y corre de 0 a 3, haciendo referencia a las componentes espacio-temporales del campo sobre el que aplique.
- El superíndice i que aparece en Ψ hace referencia a las componentes que tiene este vector en el grupo de simetría. Tales componentes son campos que tendrán un índice espacial μ y sobre los que actuará el operador de derivada covariante. Cabe recalcar que el índice i no es un índice espacial, sino uno de la simetría interna.
- El superíndice a hace referencia a cada uno de los generadores del grupo de simetría, y corre, por ejemplo, entre 1 y 15 para el caso de $SU(4)$. También existe un campo gauge A_μ por cada generador, al que se asocia un índice a .

Derivada covariante de un tensor de rango 2

Para un tensor $\hat{\Psi}^{ij}$ de rango 2, i.e., con dos índices, cada uno perteneciendo a un grupo de simetría, es posible definir una derivada covariante como (cf. [58]):

$$D_\mu \hat{\Psi}^{ij} = \partial_\mu \hat{\Psi}^{ij} - ig(T^a A_\mu^a)^i \hat{\Psi}^{\alpha j} - ig'(t^b B_\mu^b)^j \hat{\Psi}^{i\alpha}, \quad (5.33)$$

donde i, j son índices de los grupos de simetría, a, b permiten referenciar los generadores de cada grupo, y μ es, como es usual, un índice de espacio-tiempo. Los grupos de simetría bajo los que transforma el tensor tiene generadores T^a y t^b respectivamente. Por supuesto, para cada simetría hay una constante (g, g') de acoplamiento y un campo gauge (A_μ, B_μ) asociados.

Con estas consideraciones, procedamos a estudiar la forma que toma la derivada covariantes del modelo al actuar sobre los multipletes en (5.30).

■ Multiplete $\hat{\Psi}_L = (4, 1, 2, 0)$

Este multiplete es singlete de $SU(4)_R$, por lo que transforma trivialmente bajo este grupo y no tiene índices asociados al mismo. Asociamos un índices i al grupo $SU(4)_L$ y un índice j al grupo $SU(2)_L$. Denotamos los generadores de este grupo por T_L^a y t_L^b respectivamente. A cada grupo también le corresponden constantes de acoplamiento g_L y g_2 , y campos gauge $G_{L\mu}^a$ y W_μ^b respectivamente. Con esto, la derivada covariante actuando sobre este multiplete resulta en

$$D_\mu \hat{\Psi}_L^{ij} = \partial_\mu \hat{\Psi}_L^{ij} - ig_L^a (T_L^a G_{L\mu}^a)^i \hat{\Psi}_L^{\alpha j} - ig_2^b (t_L^b W_\mu^b)^j \hat{\Psi}_L^{i\alpha}. \quad (5.34)$$

■ Multipletes $\hat{\Psi}_R^{u/d} = (1, 4, 1, \pm 1/2)$

Los otros dos multipletes del ME, $\hat{\Psi}_R^u = (1, 4, 1, \frac{1}{2})$ y $\hat{\Psi}_R^d = (1, 4, 1, -\frac{1}{2})$ son singletes de $SU(4)_L$ y de $SU(2)_L$, por lo que podemos considerarlos tensores $\hat{\Psi}_R^i$ (omitimos el superíndice u, d , pues la acción de la derivada covariante sobre los dos multipletes

tendrá la misma forma) de rango 1, donde el índice i es interno de la simetría SU(4)_R.

Tenemos entonces

$$\boxed{D_\mu \hat{\Psi}_R^i = \partial_\mu \hat{\Psi}_R^i - ig_R^a (T_R^a G_{R\mu})_\alpha^i \hat{\Psi}_R^\alpha}, \quad (5.35)$$

donde T_R^a son los generadores de SU(4)_R, G_R su campo gauge asociado, y g_R su constante de acoplamiento.

5.4. Autoestados de sabor y de masa de los leptokuarks

Del estudio de la teoría gauge (cf. [30, sec. 9.3]) es conocido que los bosones gauge pertenecen a la representación adjunta del grupo, que tiene igual dimensión que el número de generadores del mismo, y se obtiene del producto tensorial entre la representación fundamental y su conjugada. Para el caso de SU(4) que nos ocupa, tenemos (cf. [57, p. 93])

$$4 \times \bar{4} = 1 + 15, \quad (5.36)$$

de donde encontramos que los autovalores del operador de carga en esta representación pueden ser expresados como una suma de los autovalores de las representaciones $[\bar{4}]$ y $[4]$.

$$Q_{kl}^{[15]} = Q_k^{[4]} + Q_l^{[\bar{4}]} = +Q_k^{[4]} - Q_l^{[4]} \quad (5.37)$$

Ahora, los autovalores del operador de carga en la representación fundamental corresponden a las cargas de las partículas del ME, y en general, el operador de carga tiene índices de SU(4)_L, SU(4)_R y de isoespín SU(2)_L.

Ahora, vimos en la sección 5.2, que los autovalores del operador de carga para partículas derechas e izquierdas son los mismos, siempre y cuando los índices de isoespín coincidan. Teniendo en cuenta esto, si fijásemos el índice de isoespín, el operador de carga podría expresarse como dos matrices 4×4 , una para cada valor del índice de isoespín:

$$Q^{[4]1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & & & \\ & \frac{2}{3} & & \\ & & \frac{2}{3} & \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad Q^{[4]2} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & & & \\ & -\frac{1}{3} & & \\ & & -\frac{1}{3} & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

Los operadores de carga de la representación conjugada son los mismos, pero con signo contrario.

Así, según (5.37) encontramos que el operador de carga en la representación [15] puede ser expresado como

$$Q_{kl}^{[15]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.39)$$

Este resultado es el mismo tomando cualquiera de los operadores en (5.38) con su respectivo conjugado.

Vemos entonces, que los gluones, así como el bosón asociado a los grupos que habíamos denominado $U(1)_{L/R\,31}$ son neutros, mientras que los bosones que median transiciones entre quarks y leptones tienen carga $2/3$. Estos son los leptokuarks en que enfocaremos nuestro estudio.

Para estudiar la fenomenología del modelo, el punto de partida serán los términos del Lagrangiano que incorporan la derivada covariante. Para introducir los leptokuarks, así como hemos hecho con la matriz de carga, la parte para los grupos SU(4) de la derivada covariante se toma por separado, i.e.

$$ig_L G_{L\mu}^A T_L^A + ig_R G_{R\mu}^A T_R^A. \quad (5.40)$$

Como ya se ha mencionado antes, las partes derechas e izquierdas tienen la misma forma, de modo que estudiaremos el término genérico $ig G_\mu^A T^A$, en particular la suma implícita del producto de los generadores del grupo y sus campos gauge asociados. Denominaremos a esta cantidad el operador de campo bosónico para SU(4)_{L/R}, $\mathbb{G}$

$$\mathbb{G}_{L/R\,\mu} \equiv G_{L/R\,\mu}^A T_{L/R}^A. \quad (5.41)$$

Utilizando el término genérico y haciendo explícita la suma sobre A tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathbb{G} &= \sum_{A=1}^{15} G_\mu^A T^A \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} & & & \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^9 - iG_\mu^{10}) \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{A=1}^8 G_\mu^A T^A & & \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^{11} - iG_\mu^{12}) \\ & & & \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^{13} - iG_\mu^{14}) \\ \hline & & & \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^9 + iG_\mu^{10}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^{13} + iG_\mu^{14}) & \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^{13} + iG_\mu^{14}) & \frac{\sqrt{3}}{2}G_\mu^{15} \end{array} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} & & & X^1 \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{A=1}^8 G_\mu^A T^A & & X^2 \\ & & & X^3 \\ \hline & & & \\ X^{1*} & X^{2*} & X^{3*} & \frac{\sqrt{3}}{2}G_\mu^{15} \end{array} \right) + \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array}, \quad (5.42)
 \end{aligned}$$

donde los G_μ^A , $A = 1, \dots, 8$ son los 8 campos gluónicos, G_μ^{15} es el campo del bosón asociado a $U(1)_{31}$, y hemos representado por X^i , $i = 1, 2, 3$ a los autoestados de sabor del leptoquark, y que pueden expresarse como el triplete de color

$$X = \begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^9 - iG_\mu^{10}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^{11} - iG_\mu^{12}) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(G_\mu^{13} - iG_\mu^{14}) \end{pmatrix}. \quad (5.43)$$

Nuestro modelo tendrá dos leptoquarks como los expresados anteriormente, uno derecho X_R y uno izquierdo X_L para los grupos $SU(4)_R$ y $SU(4)_L$ respectivamente. El cuadrado de la matriz de masa de estos leptoquarks es calculada en el Apéndice A y es dada por

$$\mathcal{M}_X^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} g_L^2[v_L^2 + v_\Sigma^2(1 + z^2)] & -2g_L g_R v_\Sigma^2 z \\ -2g_L g_R v_\Sigma^2 z & g_R^2[v_R^2 + v_\Sigma^2(1 + z^2)] \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

donde v_Σ , v_L , v_R son los valores esperados en el vacío (vevs) de los campos escalares del modelo y z es un parámetro del cual depende el vev de Σ .

Para representar los autoestados de masa de los leptokuarks necesitamos rotar los estados de sabor a la base de masa. Esta labor no es tan directa como en el caso de la unificación electrodébil, puesto que ahora la matriz de masa no es diagonal. No obstante, es posible escribir una matriz de rotación parametrizada con un ángulo arbitrario θ_4 que depende de los parámetros en la ecuación (5.44), i.e., los autoestados de masa X_1, X_2 (no confundir con los superíndices de los X^i que representaban componentes del triplete de color) de los leptokuarks pueden expresarse como

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_4 & \sin \theta_4 \\ -\sin \theta_4 & \cos \theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_L \\ X_R \end{pmatrix}. \quad (5.45)$$

Por la forma como se define el modelo, haciendo que $SU(4)_R$ rompa a una escala de energía mucho mayor que $SU(4)_L$, podemos asumir para los vevs de los campos escalares, $v_R \gg v_L$ y $v_R \gg v_\Sigma$, con lo cual la mezcla desaparece [29], $\sin \theta_4 = 0$ y las masas de los leptokuarks se hacen

$$\begin{aligned} M_{X_1} &= \frac{1}{2} g_L \sqrt{v_L^2 + v_\Sigma^2 (1 + z^2)} \\ M_{X_2} &= \frac{1}{2} g_R v_R. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Así, los autoestados de sabor de los leptokuarks son autoestados de masa en el límite que hemos considerado. Continuamos nuestro análisis bajo este postulado.

5.5. Estructura de sabor y términos de interacción con el leptokuark

Como se mencionó antes, la característica clave en el modelo de Fornal es el hecho de que la existencia de un grupo $SU(4)_R$ que rompe a una escala mucho mayor que su contraparte izquierda, suprime las corrientes derechas con cambio de sabor y relaja las restricciones impuestas sobre el modelo. Esto es de suma utilidad para lo que nos ocupa, puesto que las interacciones que nos conciernen en el estudio de las anomalías en los decaimientos del mesón B son propiciadas por las partes izquierdas de las partículas. Teniendo en cuenta esto,

en lo que sigue restringiremos nuestro análisis a las partes izquierdas, y por ende al multiplete $\hat{\Psi}_L$ es decir, en particular, al término del Lagrangiano

$$\mathcal{L} \supset \bar{\hat{\Psi}}_L i\gamma^\mu D_\mu \hat{\Psi}_L. \quad (5.47)$$

Recordemos que el multiplete $\hat{\Psi}_L$ es cuádruplete de $SU(4)_L$ y doblete de $SU(2)_L$, por ende posee dos índices, uno de $SU(4)_L$ y uno de isoespín. Para un valor fijo de isoespín, el multiplete puede considerarse como dos cuádrupletes de $SU(4)_L$ para cada familia de fermiones, que denominaremos $\hat{\Psi}_L^u, \hat{\Psi}_L^d$

$$\hat{\Psi}_L^u \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \nu_\ell \end{pmatrix}_L, \quad \hat{\Psi}_L^d \equiv \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \ell \end{pmatrix}_L, \quad (5.48)$$

donde u_c ($c = 1, 2, 3$) son las componentes del triplete de color de los quarks tipo up de cada familia de fermiones, d_c son sus homólogos para quarks tipo down, y ν_ℓ es un neutrino izquierdo correspondiente a un leptón ℓ ($\ell = e, \mu, \tau$). Con esto, el término del Lagrangiano que es de nuestro interés se expresa como

$$\mathcal{L} \supset \bar{\hat{\Psi}}_L^u i\gamma^\mu D_\mu \hat{\Psi}_L^u + \bar{\hat{\Psi}}_L^d i\gamma^\mu D_\mu \hat{\Psi}_L^d \quad (5.49)$$

para cada familia de fermiones del ME.

Nótese que, así como lo hemos expresado, este término incluye ya al grupo $SU(2)_L$, con los índices u, d en los dos cuádrupletes que representan el multiplete $\hat{\Psi}_L$. El grupo $U(1)'$ también está implícitamente incluido, pues el valor de la carga de este grupo para el multiplete $\hat{\Psi}_L$ es cero.

Como las interacciones de nuestro interés son corrientes que involucran leptoquarks, podemos considerar únicamente la parte de la derivada covariante correspondiente al grupo $SU(4)_L$, i.e.

$$\mathcal{L} \supset \bar{\hat{\Psi}}_L^u i\gamma^\mu (ig_L \mathbb{G}_L) \hat{\Psi}_L^u + \bar{\hat{\Psi}}_L^d i\gamma^\mu (ig_L \mathbb{G}_L) \hat{\Psi}_L^d. \quad (5.50)$$

De aquí, los términos que involucran leptosquarks son de la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &\supset -\frac{g_L}{\sqrt{2}} \left[(\bar{u}_1 \gamma^\mu X_L^1 + \bar{u}_2 \gamma^\mu X_L^2 + \bar{u}_3 \gamma^\mu X_L^3) \nu_\ell \right. \\
&\quad \left. + (\bar{d}_1 \gamma^\mu X_L^1 + \bar{d}_2 \gamma^\mu X_L^2 + \bar{d}_3 \gamma^\mu X_L^3) \ell \right] + \text{h.c.} \\
&= -\frac{g_L}{\sqrt{2}} X_L^c [\bar{u}_c \gamma^\mu \nu_\ell + \bar{d}_c \gamma^\mu \ell] + \text{h.c.} \\
&= -\frac{g_L}{\sqrt{2}} X_L [\bar{u} \gamma^\mu \nu_\ell + \bar{d} \gamma^\mu \ell] + \text{h.c.} ,
\end{aligned} \tag{5.51}$$

donde c es un índice de color que hemos suprimido en el último paso, puesto que está contraído y no afectará nuestro análisis. Además hemos definido los tripletes de color de los quarks

$$u \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}_L, \quad d \equiv \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}_L \tag{5.52}$$

para cada familia del ME.

Para generalizar en todas las familias del ME necesitamos introducir las matrices de mezcla. Trabajaremos el formalismo como en las referencias [59, 60], asumiendo que las mezclas se presentan únicamente en los quarks tipo up y los neutrinos. Así, introduciendo $i, j = 1, 2, 3$ como índices de familia, los dobletes izquierdos del ME se expresarían como

$$Q_{Li} = \begin{pmatrix} V_{ki}^\dagger u_k \\ d_i \end{pmatrix}, \quad L_{Lj} = \begin{pmatrix} U_{kj} \nu_j \\ \ell_j \end{pmatrix}, \tag{5.53}$$

donde V es la matriz de Cabibo-Cobayashi-Maskawa (CKM) y U es la matriz de Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS), y u_k hace referencia al triplete de color de los quarks up de la familia k donde, recordemos, el índice de color se contraerá al tener este triplete en el Lagrangiano con el índice de color del leptosquark, por lo que, para propósitos prácticos, lo omitimos.

Los índices de familia se introducen en el análisis de los modelos de partículas debido a que los términos que generan son permitidos por la estructura del Lagrangiano, y conservan todas las simetrías. Las matrices PMNS y CKM introducidas aquí permiten rotar los autoestados

de sabor de los quarks y los neturinos a autoestados de masa. Ahora, los acoplamientos entre diferentes familias de quarks y leptones son admitidos por la estructura del Lagrangiano en el modelo que estamos trabajando, no obstante, en principio, no conocemos la magnitud de los acoplamientos en cada transición. Para ello, introducimos una matriz de acoplamientos x_L , que contendrá los valores de los acoplamientos para cada transición entre quarks y leptones. Con esta introducción tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\supset -\frac{g_L}{\sqrt{2}}X_L \left[V_{ki}^\dagger \bar{u}_i x_L^{ij} \gamma^\mu U_{kj} \nu_j + \bar{d}_i \gamma^\mu x_L^{ij} \ell_j \right] \\ &= -\frac{g_L}{\sqrt{2}}X_L \left[\left(V_{ki}^\dagger x_L^{ij} U_{kj} \right) \bar{u}_i \gamma^\mu \nu_j + \bar{d}_i \gamma^\mu x_L^{ij} \ell_j \right] \\ &= -\frac{g_L}{\sqrt{2}}X_L \left[x_{Lu}^{ij} (\bar{u}_i \gamma^\mu \nu_j) + x_{Ld}^{ij} (\bar{d}_i \gamma^\mu \ell_j) \right],\end{aligned}$$

donde hemos renombrado $x_{Ld} \equiv x_L$ y $x_{Lu} \equiv V^\dagger x_L U$. Esta es la forma final del término del Lagrangiano que nos permitirá hacer fenomenología sobre el modelo. El término relaciona las tres familias del ME y da los términos de interacción que involucran al leptokuark, y contienen todos los términos posibles admitidos por la estructura del Lagrangiano. Escribamos de nuevo el término para futuras referencias.

$$\boxed{\mathcal{L} \supset \frac{g_L}{\sqrt{2}}X_L \left[x_{Lu}^{ij} (\bar{u}_i \gamma^\mu \nu_j) + x_{Ld}^{ij} (\bar{d}_i \gamma^\mu \ell_j) \right]}, \quad (5.54)$$

con $i, j = 1, 2, 3$ índices de familia del ME.

Capítulo 6

Análisis fenomenológico

El análisis fenomenológico que haremos sobre el modelo de Fornal consiste en la determinación de límites para los valores de los acoplamientos entre quarks y leptones para las corrientes involucradas en los procesos $B^+ \rightarrow K^+ \ell^+ \ell^-$ y $B^0 \rightarrow K^{*0} \ell^+ \ell^-$, en los que se han registrado anomalías de sabor. Partiremos de un análisis independiente del modelo, siguiendo lo expuesto en [59]. Realizamos un análisis de χ^2 a partir de los pseudo-observables C_9 y C_{10} a fin de determinar los valores admitidos de los acoplamientos para un leptoquark con una masa de 10 TeV y contrastamos con los valores obtenidos para el análisis del modelo de Fornal, haciendo uso de los parámetros expuestos en [29] para la constante g_L y la masa del leptoquark:

$$\begin{aligned} M_{X_L} &\gtrsim 10 \text{ TeV} , \\ g_L &\approx 1.06 g_s , \end{aligned} \tag{6.1}$$

con $g_s \approx 0.96$ siendo la constante de acoplamiento fuerte a 10 TeV.

6.1. Análisis independiente del modelo

El análisis independiente del modelo esbozado por García-Duque y sus colaboradores [59] se desarrolla para un leptoquark singlete de $SU(2)_L$, $U_1 \equiv U_1 \sim (3, 1)_{2/3}$, que es análogo en estructura al leptoquark X (cf. Ecuación (5.43)) que determinamos para el modelo de Fornal. La interacción de este leptoquark con los fermiones del ME se escribe en esta referencia como

$$\Delta \mathcal{L}_{U_1} = (x_L^{ij} \bar{Q}_{iL} \gamma_\mu L_{jL} + x_R^{ij} \bar{d}_{iR} \gamma_\mu \ell_{jR}) U_1^\mu , \tag{6.2}$$

donde los acoplamientos de sabor izquierdos y derechos, x_L, x_R son, en general, matrices complejas de 3×3 , Q_L y L_L son los isodoublets izquierdos de quarks y leptones definidos

como ¹

$$Q_{iL} = \begin{pmatrix} V_{ki}^\dagger u_{kL} \\ d_{iL} \end{pmatrix}, \quad L_{jL} = \begin{pmatrix} \nu_{jL} \\ \ell_{jL} \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

respectivamente, V denota la matriz CKM, y ℓ_R , d_R son los singletes derechos de leptones cargados y quarks tipo down.

Notemos primero que García-Duque et.al. no consideran mezclas de leptones, por lo que la matriz PMNS está ausente en los dobletes que definen. Esto difícilmente afectará nuestro análisis fenomenológico, puesto que los coeficientes de Wilson C_9 y C_{10} relevantes para el estudio de los decaimientos semileptónicos del mesón B no dependen de esta matriz. En el estudio desarrollado por Ban, et.al [60] se presenta el acoplamiento como

$$\mathcal{L} \supset U_{1\mu} \sum_{i,j=1,2,3} \left[x_L^{ij} \left(\bar{d}_L^i \gamma^\mu e_L^j \right) + (V^\dagger x_L U)_{ij} \left(\bar{u}_L^i \gamma^\mu \nu_L^j \right) + x_R^{ij} \left(\bar{d}_R^i \gamma^\mu e_R^j \right) \right] + \text{h.c.}, \quad (6.4)$$

una expresión que incluye todos los términos considerados en (5.54) con mezclas de neutrinos. Sin embargo, los dos análisis independientes del modelo conducen a los mismos términos de interacción, donde los acoplamientos de sabor se denotan por las matrices x_L , x_R . En nuestro análisis en la Sección 5.5 no hemos tenido en cuenta las partes derechas de los fermiones, puesto que el modelo de Fornal permite suprimir las corrientes derechas con cambio de sabor en virtud de que $SU(4)_R$ rompe a una escala energética mucho mayor.

Procedemos entonces, con la forma explícita de la matriz x_L de acoplamientos de sabor. Los índices i, j corren de 1 a 3, sobre las familias del ME. Para mayor facilidad, expresaremos los valores de estos índices como letras que corresponden al quark y al leptón específico al que hacen referencia, i.e.

$$x_L = \begin{pmatrix} x_L^{11} & x_L^{12} & x_L^{13} \\ x_L^{21} & x_L^{22} & x_L^{23} \\ x_L^{31} & x_L^{32} & x_L^{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_L^{de} & x_L^{d\mu} & x_L^{d\tau} \\ x_L^{se} & x_L^{s\mu} & x_L^{s\tau} \\ x_L^{be} & x_L^{b\mu} & x_L^{b\tau} \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

¹Nótese que los índices i, j son de familia. Esta estructura hace que el índice de isoespín (que no aparece explícito en la ecuación) sea fijo en todos los casos. En este Lagrangiano efectivo, las partes derechas e izquierdas de las partículas también aparecen separadas, y como no existe mezcla de neutrinos, no aparecen neutrinos derechos.

Para evitar las restricciones provenientes de conversiones $\mu - e$ a nivel nuclear, y la violación de paridad atómica en $\mathcal{B}(K \rightarrow \pi \nu \bar{\nu})$, los acoplamientos a la primera generación de quarks y leptones deben hacerse iguales a cero [60], resultando en una estructura de sabor minimalista

$$x_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_L^{s\mu} & x_L^{s\tau} \\ 0 & x_L^{b\mu} & x_L^{b\tau} \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Esta estructura se denomina *modelo mínimo* U_1 y es desarrollada también en [62, 63].

Los decaimientos semileptónicos del mesón B involucran una transición $b \rightarrow s\mu^+\mu^-$ vía el Hamiltoniano efectivo [59, 64, 65]

$$\mathcal{H}_{\text{eff}}(b \rightarrow s\mu^+\mu^-) = -\frac{\alpha_{\text{em}} G_F}{\sqrt{2}\pi} V_{tb} V_{ts}^* \left[C_9^{bs\mu\mu} (\bar{s} P_L \gamma_\beta b) (\bar{\mu} \gamma^\beta \mu) + C_{10}^{bs\mu\mu} (\bar{s} P_L \gamma_\beta b) (\bar{\mu} \gamma^\beta \gamma_5 \mu) \right], \quad (6.7)$$

donde α_{em} es la constante de estructura fina y C_9, C_{10} corresponden a coeficientes de Wilson dados por

$$C_9^{bs\mu\mu} = -C_{10}^{bs\mu\mu} = -\frac{\pi}{\sqrt{2} G_F \alpha_{\text{em}} V_{tb} V_{ts}^*} \frac{x_L^{s\mu} (x_L^{b\mu})^*}{M_{U_1}^2}. \quad (6.8)$$

Emplearemos en nuestro análisis los valores para los pseudo-observables $C_9 = -C_{10}$ suministrados en [66] ajustados a partir de todos los decaimientos raros del mesón B

$$C_{9\text{ ex}}^{bs\mu\mu} = -C_{10\text{ ex}}^{bs\mu\mu} = -0.39 \pm 0.07. \quad (6.9)$$

Adicionalmente, emplearemos el valor $M_{U_1} = 10 \text{ TeV}$ para la masa del leptoquark, correspondiente al límite inferior obtenido en [29].

Construimos la correspondiente función χ^2 y obtenemos su mínimo $(\chi_{\text{min}}^2)^2$. Considerando los valores anteriormente mencionados, el ajuste resulta en los valores consignados en la Tabla 6.1, donde presentamos el intervalo de 1σ para los valores de los acoplamientos considerados.

²Para una explicación de los métodos de análisis de datos empleados en esta sección ver el Apéndice C.

Tabla 6.1: Resultados del ajuste a 1σ de los acoplamientos de sabor del leptoquark.

$x_L^{s\mu}$	$x_L^{b\mu}$
$[0.23, 0.30]$	$[-0.26, -0.20]$

En la Figura 6.1 presentamos la región permitida al 95 % de nivel de confianza (CL) de los planos $(x_L^{b\mu}, x_L^{s\mu})$ del análisis independiente del modelo para $M_{U_1} = 10$ TeV.

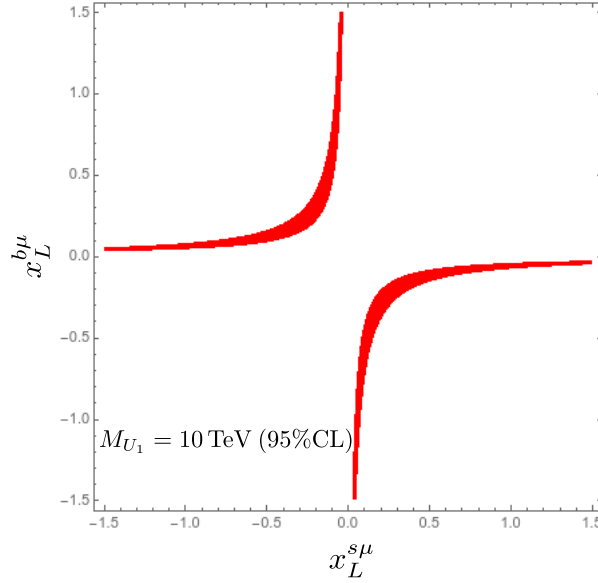


Figura 6.1: Región permitida de los planos $(x_L^{b\mu}, x_L^{s\mu})$ a 95 % CL para una masa del leptoquark $M_{U_1} = 10$ TeV.

6.2. Fenomenología del modelo de Fornal

Para el modelo de Fornal, los leptoquarks X_1, X_2 modifican los coeficientes de Wilson a la forma [29]

$$C_9^{ij} = -C_{10}^{ij} = -\frac{\sqrt{2}\pi^2 g_L^2 x_{Ld}^{2i} x_{Ld}^{3j*}}{G_F e^2 V_{tb} V_{ts}^*} \left[\frac{\cos^2 \theta_4}{M_{X_1}^2} + \frac{\sin^2 \theta_4}{M_{X_2}^2} \right], \quad (6.10)$$

donde i, j son índices de familia. En la notación que hemos usado para la sección anterior, y

teniendo en cuenta que las transiciones de nuestro interés conducen a muones, i.e., $i = j = 2 \equiv \mu$ tenemos

$$C_9^{\mu\mu} = -C_{10}^{\mu\mu} = -\frac{\sqrt{2}\pi^2 g_L^2 x_{Ld}^{s\mu} x_{Ld}^{b\mu*}}{G_F e^2 V_{tb} V_{ts}^*} \left[\frac{\cos^2 \theta_4}{M_{X_1}^2} + \frac{\sin^2 \theta_4}{M_{X_2}^2} \right]. \quad (6.11)$$

Ahora, como se mencionó antes, la condición de que $SU(4)_R$ rompa a una escala energética mucho mayor conduce a que para los vevs de los campos escalares se tenga

$$v_R \gg v_L \quad \text{y} \quad v_R \gg v_\Sigma, \quad (6.12)$$

lo cual conduce a $\sin \theta_4 = 0 \therefore \cos \theta_4 = 1$, con lo que, renombrando $X_1 = X$, reemplazando $e^2 = 4\pi\alpha_{\text{em}}$ y reorganizando algunos términos tenemos

$$C_9^{\mu\mu} = -C_{10}^{\mu\mu} = -\frac{\pi}{\sqrt{2}G_F\alpha_{\text{em}}V_{tb}V_{ts}^*} \frac{1}{M_X^2} \left(\frac{g_L}{\sqrt{2}} x_{Ld}^{s\mu} \right) \left(\frac{g_L}{\sqrt{2}} x_{Ld}^{b\mu} \right), \quad (6.13)$$

de donde es evidente la equivalencia entre los acoplamientos que hemos calculado para el análisis independiente del modelo y los acoplamientos que resultan del modelo de Fornal, a saber

$$x_L^{ij} = \frac{g_L}{\sqrt{2}} x_{Ld}^{ij}, \quad (6.14)$$

con x_L siendo los acoplamientos independientes del modelo y x_{Ld} los acoplamientos del modelo de Fornal.

Ahora, basándose en un análisis sobre los límites de las búsquedas para $K_L^0 \rightarrow e^\pm \mu^\pm$ y conversiones $e - \mu$, Fornal y sus colaboradores eligen parametrizar los acoplamientos de su modelo como

$$x_{Ld} \approx e^{i\phi} \begin{pmatrix} \delta_1 & \delta_2 & 1 \\ e^{i\phi_1} \cos \theta & e^{i\phi_2} \sin \theta & \delta_3 \\ -e^{i\phi_2} \sin \theta & e^{i\phi_1} \cos \theta & \delta_4 \end{pmatrix}, \quad (6.15)$$

donde $|\delta_i| \ll 1$. Las restricciones impuestas por los autores también ubican la constante

$$g_L \approx 1.06 g_s, \quad (6.16)$$

con $g_s \approx 0.96$ siendo la constante de acoplamiento fuerte a 10 TeV. adicionalmente, se propone que las condiciones para explicar las anomalías $R_{K^{(*)}}$ se satisfacen si

$$\cos(\phi_1 + \phi_2) \approx 0.18, \quad (6.17)$$

de donde obtenemos la condición

$$\phi_1 + \phi_2 \approx 1.38. \quad (6.18)$$

Con esta restricción, la parametrización en (6.15) y considerando la equivalencia (6.14) es posible hacer variar de θ , ϕ_1 , ϕ_2 entre todo el rango de valores posibles y obtener una región admitida para los valores de $x_L^{s\mu}$ y $x_L^{b\mu}$ que obtenemos de este modelo y que presentamos en la Figura 6.2.

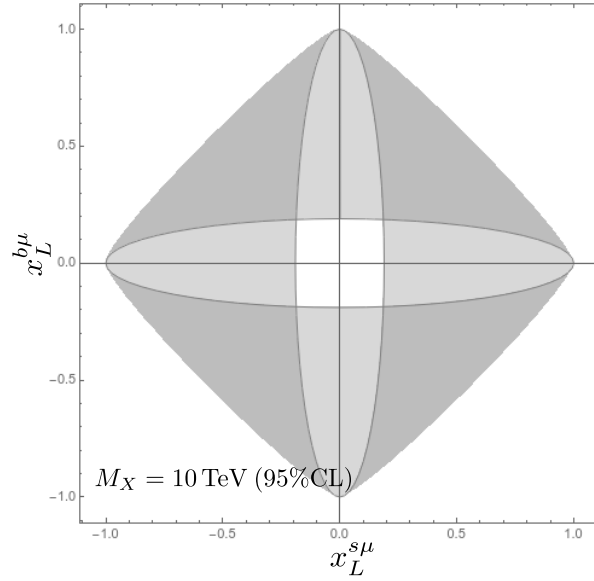


Figura 6.2: Región permitida de los planos $(x_L^{b\mu}, x_L^{s\mu})$ a 95 % CL para una masa del leptoquark $M_X = 10$ TeV según la parametrización 6.15.

Finalmente, presentamos la superposición de la región permitida determinada a partir del análisis independiente del modelo y la región que arroja la parametrización de Fornal y sus colaboradores.

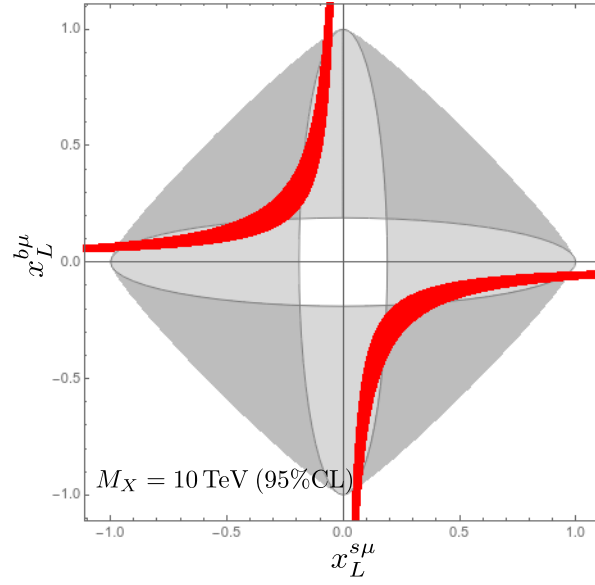


Figura 6.3: Superposición de las regiones permitidas según los dos análisis, de los planos $(x_L^{b\mu}, x_L^{s\mu})$ a 95 % CL para una masa del leptoquark $M_X = 10 \text{ TeV}$.

Capítulo 7

Conclusiones

Los leptoquarks provenientes de grupos gauge $SU(4)$ ofrecen una posible explicación a las anomalías que violan la universalidad leptónica. En el estudio del modelo propuesto vimos que esto se tiene debido a que la interacción del leptoquark genera un nuevo vértice que admite transiciones directas entre quarks y leptones e introduce una matriz de acoplamientos adicional a las matrices de mezcla del ME, permitiendo así que los acoplamientos de estas transiciones tengan valores diferentes para cada familia leptónica.

La forma en que se construye el modelo de Fornal permite desestimar los acoplamientos izquierdos a la escala energética de los TeV, ya que el grupo $SU(4)_R$ rompe a una escala mucho mayor. Esto elimina la posibilidad de existencia de corrientes derechas con cambio de sabor y permitió que nos enfocáramos en las interacciones de las partes izquierdas de las partículas estudiadas.

En lo que respecta a la anomalía $R_{K^{(*)}}$, que involucra la transición $b \rightarrow s\mu^+\mu^-$, hemos encontrado que las entradas de la matriz de acoplamientos relevantes para este proceso son $x_L^{s\mu}$ y $x_L^{b\mu}$, cuyos valores permitidos para un nivel de confianza del 95 % se encuentran entre $[0.23, 0.30]$ y $[-0.26, -0.20]$, respectivamente. Estos valores fueron obtenidos a partir de un análisis fenomenológico independiente del modelo y para un leptoquark con una masa mínima de 10 TeV.

En el análisis del modelo de Fornal, el autor original impone una parametrización compleja para las entradas de la matriz de acoplamientos. Aplicando las restricciones necesarias al modelo, hemos mostrado que tal parametrización admite un amplio rango de valores para los acoplamientos $x_L^{s\mu}$ y $x_L^{b\mu}$. Entre los valores que barre este rango se encuentra una gran porción

de las regiones admitidas determinadas a partir del análisis independiente del modelo, mostrando que, cuanto menos, el modelo es viable bajo las restricciones que hemos considerado.

Aún así, el rango de valores que abarca el análisis específico es todavía demasiado amplio. Se requiere un análisis fenomenológico más extenso y profundo, que incluya un número mayor de observables, para poder acotar más los valores admitidos por este modelo y poder emitir un juicio más certero sobre la viabilidad del mismo. Un estudio semejante se beneficiaría de incluir observables provenientes de los procesos de corrientes neutras para poder ampliar el análisis de la viabilidad del modelo para que abarque también la anomalía R_D .

Aun no es claro para los autores de este trabajo, que la parametrización empleada por Fornal para la matriz de acoplamientos sea necesaria para establecer las cotas de los valores de nuestro interés, y por lo tanto, para avanzar en futuros estudios sobre este modelo, es necesario analizar cuidadosamente los alcances y limitaciones de dicha parametrización.

El presente trabajo ha sido un ejercicio cuidadoso en la construcción de un modelo de nueva física con un grupo gauge semisimple y que involucra grupos $SU(4)$. Hemos visto, paso a paso, como, a partir del planteamiento de un grupo gauge podemos obtener lagrangianos efectivos y también hemos visto cómo el leptokuark surge en este tipo de modelos a partir de la estructura misma del grupo $SU(4)$.

El estudio detallado que realizamos en este trabajo ha sido un ejercicio formativo invaluable para incursionar en el planteamiento de modelos de física más allá del ME y ha creado, tanto en el estudiante como en el asesor, interrogantes que abren la puerta al desarrollo de nuevas investigaciones, que serán posibles gracias a las herramientas y conocimientos adquiridos durante la realización de este trabajo.

Apéndice A

Cálculo de la matriz de masa de los leptosquarks

El sector de Higgs del modelo contiene las representaciones escalares

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_L &= (4, 1, 1, 1/2), \quad \hat{\Sigma}_R = (1, 4, 1, 1/2), \quad \hat{\Sigma} = (\bar{4}, 4, 1, 0), \\ \hat{H}_d &= (4, \bar{4}, 2, 1/2), \quad \hat{H}_u = (4, \bar{4}, 2, -1/2).\end{aligned}\tag{A.1}$$

Para que el grupo gauge inicial rompa al grupo gauge del ME, los parámetros se pueden elegir de tal forma que los campos $\hat{\Sigma}_L$, $\hat{\Sigma}_R$ y $\hat{\Sigma}$ desarrollen los valores esperados en el vacío (vevs)

$$\begin{aligned}\langle \hat{\Sigma}_L \rangle &= \frac{v_L}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \langle \hat{\Sigma}_R \rangle = \frac{v_R}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \langle \hat{\Sigma} \rangle &= \frac{v_\Sigma}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{pmatrix},\end{aligned}\tag{A.2}$$

donde $z > 0$.

Las masas de los bosones gauge se originan a partir del término cuadrático de la derivada covariante aplicada sobre los vevs, es decir, de los siguientes términos en el Lagrangiano

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\supset \left| D_\mu \hat{\Sigma}_L \right|^2 + \left| D_\mu \hat{\Sigma}_R \right|^2 + \left| D_\mu \hat{\Sigma} \right|^2 \Big|_{\langle \hat{\Sigma}_L \rangle, \langle \hat{\Sigma}_R \rangle, \langle \hat{\Sigma} \rangle} \\ &= \left(D_\mu \hat{\Sigma}_L \right)^\dagger \left(D^\mu \hat{\Sigma}_L \right) + \left(D_\mu \hat{\Sigma}_R \right)^\dagger \left(D^\mu \hat{\Sigma}_R \right) + \left(D_\mu \hat{\Sigma} \right)^\dagger \left(D^\mu \hat{\Sigma} \right) \Big|_{\langle \hat{\Sigma}_L \rangle, \langle \hat{\Sigma}_R \rangle, \langle \hat{\Sigma} \rangle}\end{aligned}\tag{A.3}$$

La derivada covariante del grupo gauge del modelo es dad por

$$D_\mu = \partial_\mu + ig_L G_{L\mu}^A T_L^A + ig_R G_{R\mu}^A T_R^A + ig_2 W_\mu^a t^a + ig_1' Y_\mu' Y', \quad (\text{A.4})$$

donde T_L^A , T_R^A , t^a , Y' son los generadores de $SU(4)_L$, $SU(4)_R$, $SU(2)_L$, $U(1)'$, respectivamente. Así, los términos en (A.3) son dados por

$$D_\mu \hat{\Sigma}_L = \left(\partial_\mu + ig_L G_{L\mu}^A T_L^A + \frac{i}{2} g_1' Y_\mu' \mathbb{1} \right) \hat{\Sigma}_L, \quad (\text{A.5})$$

$$D_\mu \hat{\Sigma}_R = \left(\partial_\mu + ig_R G_{R\mu}^A T_R^A + \frac{i}{2} g_1' Y_\mu' \mathbb{1} \right) \hat{\Sigma}_R, \quad (\text{A.6})$$

$$D_\mu \hat{\Sigma} = \left(\partial_\mu + ig_L G_{L\mu}^A \tilde{T}_L^A + ig_R G_{R\mu}^A T_R^A \right) \hat{\Sigma}, \quad (\text{A.7})$$

donde $\tilde{T}_L^A = -T_L^{A*}$ son los generadores de la representación conjugada de $SU(4)_L$. Con los generadores de $SU(4)$ que determinamos anteriormente***** es posible determinar

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_L &\equiv G_{L\mu}^A T_L^A \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{G_{L\mu}^8}{\sqrt{3}} + G_{L\mu}^3 + \frac{G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{6}} & G_{L\mu}^1 - iG_{L\mu}^2 & G_{L\mu}^4 - iG_{L\mu}^5 & G_{L\mu}^9 - iG_{L\mu}^{10} \\ G_{L\mu}^1 + iG_{L\mu}^2 & \frac{G_{L\mu}^8}{\sqrt{3}} - G_{L\mu}^3 + \frac{G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{6}} & G_{L\mu}^6 - iG_{L\mu}^7 & G_{L\mu}^{11} - iG_{L\mu}^{12} \\ G_{L\mu}^4 + iG_{L\mu}^5 & G_{L\mu}^6 + iG_{L\mu}^7 & \frac{G_{L\mu}^{15}}{2\sqrt{6}} - \frac{G_{L\mu}^8}{\sqrt{3}} & G_{L\mu}^{13} - iG_{L\mu}^{14} \\ G_{L\mu}^9 + iG_{L\mu}^{10} & G_{L\mu}^{11} + iG_{L\mu}^{12} & G_{L\mu}^{13} + iG_{L\mu}^{14} & -\frac{3G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{G}_R &\equiv G_{R\mu}^A T_R^A \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{G_{R\mu}^8}{\sqrt{3}} + G_{R\mu}^3 + \frac{G_{R\mu}^{15}}{\sqrt{6}} & G_{R\mu}^1 + iG_{R\mu}^2 & G_{R\mu}^4 - iG_{R\mu}^5 & G_{R\mu}^9 - iG_{R\mu}^{10} \\ G_{R\mu}^1 - iG_{R\mu}^2 & \frac{G_{R\mu}^8}{\sqrt{3}} - G_{R\mu}^3 + \frac{G_{R\mu}^{15}}{\sqrt{6}} & G_{R\mu}^6 - iG_{R\mu}^7 & G_{R\mu}^{11} - iG_{R\mu}^{12} \\ G_{R\mu}^4 + iG_{R\mu}^5 & G_{R\mu}^6 + iG_{R\mu}^7 & \frac{G_{R\mu}^{15}}{\sqrt{6}} - \frac{2G_{R\mu}^8}{\sqrt{3}} & G_{R\mu}^{13} - iG_{R\mu}^{14} \\ G_{R\mu}^9 + iG_{R\mu}^{10} & G_{R\mu}^{11} + iG_{R\mu}^{12} & G_{R\mu}^{13} + iG_{R\mu}^{14} & -\frac{3G_{R\mu}^{15}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\mathbb{G}}_L &\equiv G_{L\mu}^A \tilde{T}_L^A \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\left(\frac{G_{L\mu}^8}{\sqrt{3}} + G_{L\mu}^3 + \frac{G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{6}}\right) & -G_{L\mu}^1 - iG_{L\mu}^2 & -G_{L\mu}^4 - iG_{L\mu}^5 & -(G_{L\mu}^9 + iG_{L\mu}^{10}) \\ -G_{L\mu}^1 + iG_{L\mu}^2 & -\left(\frac{G_{L\mu}^8}{\sqrt{3}} - G_{L\mu}^3 + \frac{G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{6}}\right) & -G_{L\mu}^6 - iG_{L\mu}^7 & -(G_{L\mu}^{11} + iG_{L\mu}^{12}) \\ -G_{L\mu}^4 + iG_{L\mu}^5 & -G_{L\mu}^6 + iG_{L\mu}^7 & -\left(\frac{G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{6}} - \frac{2G_{L\mu}^8}{\sqrt{3}}\right) & -(G_{L\mu}^{13} + iG_{L\mu}^{14}) \\ -(G_{L\mu}^9 - iG_{L\mu}^{10}) & -(G_{L\mu}^{11} - iG_{L\mu}^{12}) & -(G_{L\mu}^{13} - iG_{L\mu}^{14}) & \frac{3G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

Ahora, apliquemos estos operadores sobre los correspondientes vevs de los campos escalares.

Para $\langle \hat{\Sigma}_L \rangle$ tenemos:

$$\mathbb{G}_L \langle \hat{\Sigma}_L \rangle = \frac{v_L}{\sqrt{2}} \mathbb{G}_L \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{v_L}{2} \begin{pmatrix} \frac{G_{L\mu}^9 - iG_{L\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \\ \frac{G_{L\mu}^{11} - iG_{L\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{G_{L\mu}^{13} - iG_{L\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} G_{L\mu}^{15} \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

Por su parte,

$$Y'_\mu \mathbb{1} \langle \hat{\Sigma} \rangle = Y'_\mu \frac{v_L}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{v_L}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Y'_\mu \end{pmatrix}, \tag{A.10}$$

de modo que

$$D_\mu \langle \hat{\Sigma}_L \rangle = i \frac{g_L v_L}{2} \begin{pmatrix} \frac{G_{L\mu}^9 - iG_{L\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \\ \frac{G_{L\mu}^{11} - iG_{L\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{G_{L\mu}^{13} - iG_{L\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} G_{L\mu}^{15} \end{pmatrix} + i \frac{g'_1 v_L}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Y'_\mu \end{pmatrix} = i \frac{v_L}{2} \begin{pmatrix} g_L \frac{G_{L\mu}^9 - iG_{L\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \\ g_L \frac{G_{L\mu}^{11} - iG_{L\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \\ g_L \frac{G_{L\mu}^{13} - iG_{L\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \\ -g_L \sqrt{\frac{3}{2}} G_{L\mu}^{15} + \frac{g'_1}{\sqrt{2}} Y'_\mu \end{pmatrix}. \tag{A.11}$$

Con esto, tenemos que el término que genera la masa de los bosones gauge para $SU(4)_L$ al

romper al grupo del ME es

$$\begin{aligned}
 \left| D_\mu \hat{\Sigma}_L \right|^2 &= \left(D_\mu \hat{\Sigma}_L \right)^\dagger \left(D^\mu \hat{\Sigma}_L \right) \\
 &= \frac{v_L^2}{4} \begin{pmatrix} g_L \frac{G_{L\mu}^9 + iG_{L\mu}^{10}}{\sqrt{2}} & g_L \frac{G_{L\mu}^{11} + iG_{L\mu}^{12}}{\sqrt{2}} & g_L \frac{G_{L\mu}^{13} + iG_{L\mu}^{14}}{\sqrt{2}} & \frac{-g_L \sqrt{3} G_{L\mu}^{15} + g_1' Y_\mu'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &\quad \cdot \begin{pmatrix} g_L \frac{G_{L\mu}^9 - iG_{L\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \\ g_L \frac{G_{L\mu}^{11} - iG_{L\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \\ g_L \frac{G_{L\mu}^{13} - iG_{L\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-g_L \sqrt{3} G_{L\mu}^{15} + g_1' Y_\mu'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{g_L v_L^2}{4} \left[\left(\frac{G_{L\mu}^9 + iG_{L\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{L\mu}^9 - iG_{L\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{G_{L\mu}^{11} + iG_{L\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{L\mu}^{11} - iG_{L\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{G_{L\mu}^{13} + iG_{L\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{L\mu}^{13} - iG_{L\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \right) \right] + \frac{v_L}{4} \left(\frac{g_1' Y'^\mu - g_L \sqrt{3} G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{2}} \right)^2. \tag{A.12}
 \end{aligned}$$

Similarmemente,

$$D_\mu \langle \hat{\Sigma}_R \rangle = i \frac{v_R}{2} \begin{pmatrix} g_R \frac{G_{R\mu}^9 - iG_{R\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \\ g_R \frac{G_{R\mu}^{11} - iG_{R\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \\ g_R \frac{G_{R\mu}^{13} - iG_{R\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \\ \frac{-g_R \sqrt{3} G_{R\mu}^{15} + g_1' Y_\mu'}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{A.13}$$

$$\begin{aligned}
 \left| D_\mu \hat{\Sigma}_R \right|^2 &= \frac{g_R v_R^2}{4} \left[\left(\frac{G_{R\mu}^9 + iG_{R\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{R\mu}^9 - iG_{R\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{G_{R\mu}^{11} + iG_{R\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{R\mu}^{11} - iG_{R\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{G_{R\mu}^{13} + iG_{R\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{R\mu}^{13} - iG_{R\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \right) \right] + \frac{v_R}{4} \left(\frac{g_1' Y'^\mu - \sqrt{3} G_{R\mu}^{15}}{\sqrt{2}} \right)^2. \tag{A.14}
 \end{aligned}$$

Definiendo

$$X_L = \begin{pmatrix} X_L^1 \\ X_L^2 \\ X_L^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{G_{L\mu}^9 - iG_{L\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \\ \frac{G_{L\mu}^{11} - iG_{L\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{G_{L\mu}^{13} - iG_{L\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad X_R = \begin{pmatrix} X_R^1 \\ X_R^2 \\ X_R^3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{G_{R\mu}^9 - iG_{R\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \\ \frac{G_{R\mu}^{11} - iG_{R\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \\ \frac{G_{R\mu}^{13} - iG_{R\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.15})$$

$$Z_L \equiv \frac{g'_1 Y'^\mu - g_L \sqrt{3} G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{2}}, \quad Z_R \equiv \frac{g'_1 Y'^\mu - g_R \sqrt{3} G_{R\mu}^{15}}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.16})$$

con lo que es posible escribir

$$\left| D_\mu \hat{\Sigma}_L \right|^2 = \frac{g_L v_L^2}{4} X_L^\dagger X_L + \frac{v_L^2}{4} Z_L^2, \quad \left| D_\mu \hat{\Sigma}_R \right|^2 = \frac{g_R v_R^2}{4} X_R^\dagger X_R + \frac{v_R^2}{4} Z_R^2. \quad (\text{A.17})$$

Ahora, para determinar la acción de la derivada covariante sobre el vev $\langle \hat{\Sigma} \rangle$, primero debemos determinar cómo actúan $\mathbb{G}_R$ y $\tilde{\mathbb{G}}_L$ sobre el campo correspondiente. Para ello notemos que el campo $\hat{\Sigma}$ debe tener dos índices, $\hat{\Sigma}^{jk}$, donde j es índice de la representación conjugada de $\text{SU}(4)_L$ y k es índice de $\text{SU}(4)_R$. Así, haciendo explícitos los índices, la derivada covariante (A.7) se expresa como

$$\begin{aligned} D_\mu \hat{\Sigma}^{jk} &= \partial_\mu \hat{\Sigma}^{jk} + i g_L (\tilde{\mathbb{G}}_L)_\alpha^j \hat{\Sigma}^{\alpha k} + i g_R (\mathbb{G}_R)_\alpha^k \hat{\Sigma}^{j\alpha} \\ &= \partial_\mu \hat{\Sigma}^{jk} + \underbrace{i g_L (\tilde{\mathbb{G}}_L)_\alpha^j \hat{\Sigma}^{\alpha k}}_{\textcircled{1}} + \underbrace{i g_R (\hat{\Sigma}^{j\alpha}) (\mathbb{G}_R)_\alpha^k}_{\textcircled{2}}. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Estudiemos el término $\textcircled{2}$. Para un j fijo k corre de 1 a 4, de modo que $\hat{\Sigma}$ puede representarse como cuatro cuádrupletes de $\text{SU}(4)_R$, con lo cual el término, al tomar el vev $\langle \hat{\Sigma} \rangle$, es dado por

$$\begin{aligned} \textcircled{2} &= i \frac{g_R v_\Sigma}{2\sqrt{2}} \\ &\times \begin{pmatrix} \left(\frac{G_{R\mu}^8}{\sqrt{3}} + G_{R\mu}^3 + \frac{G_{R\mu}^{15}}{\sqrt{6}} \right) + (G_{R\mu}^1 + iG_{R\mu}^2) + (G_{R\mu}^4 + iG_{R\mu}^5) + (G_{R\mu}^9 + iG_{R\mu}^{10}) \\ (G_{R\mu}^1 - iG_{R\mu}^2) + \left(\frac{G_{R\mu}^8}{\sqrt{3}} - G_{R\mu}^3 + \frac{G_{R\mu}^{15}}{\sqrt{6}} \right) + (G_{R\mu}^6 + iG_{R\mu}^7) + (G_{R\mu}^{11} + iG_{R\mu}^{12}) \\ (G_{R\mu}^4 - iG_{R\mu}^5) + (G_{R\mu}^6 - iG_{R\mu}^7) + \left(\frac{G_{R\mu}^{15}}{\sqrt{6}} - \frac{2G_{R\mu}^8}{\sqrt{3}} \right) + (G_{R\mu}^{13} + iG_{R\mu}^{14}) \\ (G_{R\mu}^9 - iG_{R\mu}^{10})z + (G_{R\mu}^{11} - iG_{R\mu}^{12})z + (G_{R\mu}^{13} - iG_{R\mu}^{14})z - \frac{3G_{R\mu}^{15}z}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Similarmente, para ① tenemos

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &= i \frac{g_L v_\Sigma}{2\sqrt{2}} \\ &\times \begin{pmatrix} -\left(\frac{G_{L\mu}^8}{\sqrt{3}} + G_{L\mu}^3 + \frac{G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{6}}\right) - (G_{L\mu}^1 - iG_{L\mu}^2) - (G_{L\mu}^4 - iG_{L\mu}^5) - (G_{L\mu}^9 + iG_{L\mu}^{10})z \\ - (G_{L\mu}^1 + iG_{L\mu}^2) - \left(\frac{G_{L\mu}^8}{\sqrt{3}} - G_{L\mu}^3 + \frac{G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{6}}\right) - (G_{L\mu}^6 - iG_{L\mu}^7) - (G_{L\mu}^{11} + iG_{L\mu}^{12})z \\ - (G_{L\mu}^4 + iG_{L\mu}^5) - (G_{L\mu}^6 + iG_{L\mu}^7) - \left(\frac{G_{L\mu}^{15}}{\sqrt{6}} - \frac{2G_{L\mu}^8}{\sqrt{3}}\right) - (G_{L\mu}^{13} + iG_{L\mu}^{14})z \\ - (G_{L\mu}^9 - iG_{L\mu}^{10}) - (G_{L\mu}^{11} - iG_{L\mu}^{12}) - (G_{L\mu}^{13} - iG_{L\mu}^{14}) + \frac{G_{L\mu}^{15}z}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Ahora,

$$|D_\mu \langle \hat{\Sigma} \rangle|^2 = (D_\mu \langle \hat{\Sigma} \rangle)^\dagger (D_\mu \langle \hat{\Sigma} \rangle) = (\textcircled{1}^\dagger + \textcircled{2}^\dagger)(\textcircled{1} + \textcircled{2})$$

Estudiemos el producto término a término, teniendo en cuenta únicamente los términos que incorporan cuadrados de los autoestados de interacción de los leptoquarks:

$$\begin{aligned} \textcircled{1}^\dagger \cdot \textcircled{1} &= \frac{g_L^2 v_\Sigma^2}{4} \left[\left(\frac{G_{L\mu}^9 - iG_{L\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{L\mu}^9 + iG_{L\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{G_{L\mu}^{11} - iG_{L\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{L\mu}^{11} + iG_{L\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{G_{L\mu}^{13} - iG_{L\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{L\mu}^{13} + iG_{L\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \right) \right] (z^2 + 1) + \dots \\ &= \frac{g_L^2 v_\Sigma^2}{4} (z^2 + 1) X_L^\dagger X_L + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2}^\dagger \cdot \textcircled{2} &= \frac{g_R^2 v_\Sigma^2}{4} \left[\left(\frac{G_{R\mu}^9 - iG_{R\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{R\mu}^9 + iG_{R\mu}^{10}}{\sqrt{2}} \right) + \left(\frac{G_{R\mu}^{11} - iG_{R\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{R\mu}^{11} + iG_{R\mu}^{12}}{\sqrt{2}} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{G_{R\mu}^{13} - iG_{R\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{G_{R\mu}^{13} + iG_{R\mu}^{14}}{\sqrt{2}} \right) \right] (1 + z^2) + \dots \\ &= \frac{g_R^2 v_\Sigma^2}{4} (z^2 + 1) X_R^\dagger X_R + \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1}^\dagger \cdot \textcircled{2} &= \frac{g_L g_R v_\Sigma^2}{2\sqrt{2}} \left[- (G_{L\mu}^9 - iG_{L\mu}^{10})(G_{R\mu}^9 + iG_{R\mu}^{10}) - (G_{L\mu}^{11} - iG_{L\mu}^{12})(G_{R\mu}^{11} + iG_{R\mu}^{12}) \right. \\ &\quad - (G_{L\mu}^{13} - iG_{L\mu}^{14})(G_{R\mu}^{13} + iG_{R\mu}^{14}) - (G_{L\mu}^9 + iG_{L\mu}^{10})(G_{R\mu}^9 - iG_{R\mu}^{10}) \\ &\quad \left. - (G_{L\mu}^{11} + iG_{L\mu}^{12})(G_{R\mu}^{11} - iG_{R\mu}^{12}) - (G_{L\mu}^{13} + iG_{L\mu}^{14})(G_{R\mu}^{13} - iG_{R\mu}^{14}) \right] z + \dots \\ &= -\frac{g_L g_R v_\Sigma^2}{4} z \left[X_R^\dagger X_L + X_L^\dagger X_R \right] + \dots \end{aligned}$$

El producto $\textcircled{2}^\dagger \cdot \textcircled{1}$ es igual a este último, de modo que tenemos

$$\left| D_\mu \langle \hat{\Sigma} \rangle \right|^2 = \frac{g_L^2 v_\Sigma^2}{4} (z^2 + 1) X_L^\dagger X_L + \frac{g_R^2 v_\Sigma^2}{4} (z^2 + 1) X_R^\dagger X_R - \frac{1}{2} g_L g_R v_\Sigma^2 z \left[X_R^\dagger X_L + X_L^\dagger X_R \right] + \dots . \quad (\text{A.21})$$

Con este resultado y con (A.17), y definiendo

$$X \equiv \begin{pmatrix} X_L \\ X_R \end{pmatrix} , \quad (\text{A.22})$$

tenemos que la matriz de masa para los leptoquarks es dada por

$$\mathcal{M}_X^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} g_L^2 [v_L^2 + v_\Sigma^2 (1 + z^2)] & -2g_L g_R v_\Sigma^2 z \\ -2g_L g_R v_\Sigma^2 z & g_R^2 [v_R^2 + v_\Sigma^2 (1 + z^2)] \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

Apéndice B

Sobre los operadores y su representación como matrices

Cuando planteamos la Ecuación (5.12) y, subsecuentemente, en (5.29) dábamos el operador de carga para el modelo de Fornal como

$$Q = t^3 + \sqrt{\frac{2}{3}}(T_L^{15} + T_R^{15}) + Y'. \quad (5.29)$$

En el tratamiento que realizamos sobre los generadores del grupo $SU(4)$, de donde obtuvimos los generadores $T_{L/R}^{15}$ tratamos siempre con matrices 4×4 . No obstante, después de plantear (5.12) dimos el operador t^3 como el generador usual de isoespín,

$$t^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (B.1)$$

que es una matriz 2×2 . Esto puede prestarse para confusiones, por lo que explicaremos aquí más detenidamente lo que implica plantear el operador de carga en la forma como lo hemos hecho.

En primer lugar, cabe recordar que el operador de carga es precisamente esto, un *operador*, que aplicará sobre los multipletes del modelo para entregar las cargas adecuadas para cada partícula, es decir, un número entero específico para cada entrada de cada multiplete. La forma más conveniente y más adecuada de conceptualizar esto es como lo hemos hecho en el tratamiento de la Sección 5.2 y subsiguientes, donde cada multiplete es concebido como una cantidad tensorial con índices.

Veamos entonces. Cada uno de los multipletes del ME definidos en (5.2) deberían tener un índice por cada grupo del cual no son singletes, puesto que bajo estos grupos transforman

trivialmente. Veamos, por ejemplo, el multiplete $\hat{\Psi}_L = (4, 1, 2, 0)$. Al ser este un singlete de $SU(4)_R$, no tiene índice de este grupo. Adicionalmente, como el multiplete no pertenece a esta representación, $T_R^{15}\hat{\Psi}_L = 0$. Para el grupo $U(1)'$, todos los multipletes transforman como escalares, y por ello podemos representar el generador de este grupo como una matriz identidad 4×4 multiplicada por el valor de la carga, para coincidir con el operador T^{15} . En este caso, el valor de la carga es cero, por lo que omitimos este operador también.

Ahora, para el grupo $SU(2)_L$ tenemos un índice que puede variar entre 1 y 2, que representarán, para nuestros propósitos, isoespín up e isoespín down, respectivamente. En la Sección 5.2, cuando estudiamos el multiplete $\hat{\Psi}_L$, lo descompusimos en dos cuádrupletes de color, uno para cada isoespín. Esto nos permitió representar la acción del operador de isoespín sobre cada uno de ellos como extrayendo un autovalor $+1/2$ o $-1/2$ según el isoespín de las partículas que contiene el multiplete.

Por supuesto, la visión matricial debe ser, en algún punto, equivalente a la visión tensorial, pero en múltiples ocasiones, necesitaríamos matrices de más de dos dimensiones para poder representar adecuadamente las cantidades con las que estamos trabajando, lo cual es muy inconveniente. La virtud de considerar los operadores y multipletes del modelo como cantidades tensoriales con índices para cada subgrupo de la simetría inicial, tiene la virtud de que nos permite fijar diferentes índices y encontrar representaciones más convenientes de las cantidades, con lo cual podemos tener una visión más clara de los mecanismos que están ocurriendo en el fondo. Todas las operaciones que ocurran entre las diferentes cantidades pueden ser reducidas a operaciones con matrices de una o dos dimensiones mediante este método.

Ahora, hay una forma consistente de representar matricialmente este operador de carga y los multipletes del modelo, y es con matrices 8×8 . Esta forma de representar es inconveniente, pero es perfectamente consistente con las operaciones usuales con matrices. En esta representación tomamos las primeras cuatro entradas diagonales de las matrices para isoespín up y

las cuatro entradas inferiores para isoespín down. Así, los multipletes estarían dados por

$$\Psi_L = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \nu_e \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e \end{pmatrix}_L, \quad \Psi_R^u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \nu_e \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_R, \quad \Psi_R^d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ e \end{pmatrix}_R, \quad (\text{B.2})$$

y los generadores en el operador de carga como

$$T_{L/R}^{15} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & -3 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & -3 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

$$t^3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & & & & & \\ & \frac{1}{2} & & & & & & \\ & & \frac{1}{2} & & & & & \\ & & & \frac{1}{2} & & & & \\ & & & & -\frac{1}{2} & & & \\ & & & & & -\frac{1}{2} & & \\ & & & & & & -\frac{1}{2} & \\ & & & & & & & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

y por supuesto, el operador de la carga $U(1)'$ será una matriz identidad 8×8 multiplicada por el valor de la carga del multiplete.

Aún así, es necesario aclarar que la acción de los operadores $T_{L/R}^{15}$ sólo dan un autovalor diferente de cero para los multipletes que tengan su misma quiralidad.

Apéndice C

Análisis de datos con la función χ^2

El cálculo de acoplamientos que será el foco de nuestro análisis fenomenológico requiere la implementación de un análisis de χ^2 sobre los acoplamientos de sabor en transiciones mediadas por el leptokuark. A fin de fundamentar este análisis, esbozamos aquí la aproximación heurística al método de χ^2 presentado por Rojas en [61].

Decimos que una expresión teórica $O_i^{\text{th}}(a_j)$, que depende de ciertos parámetros a_j es consistente con el valor experimental del observable $O_i^{\text{ex}} \pm \sigma_i^{\text{ex}}$ si satisface

$$|O^{\text{ex}} - O_i^{\text{th}}(a_j)| \leq \sigma_i^{\text{ex}}. \quad (\text{C.1})$$

Siendo que σ_i^{ex} es un valor positivo, podemos escribir

$$\left| \frac{O^{\text{ex}} - O_i^{\text{th}}(a_j)}{\sigma_i^{\text{ex}}} \right|^2 \leq 1, \quad (\text{C.2})$$

donde hemos elevado al cuadrado la expresión.

Si tenemos N observables y hacemos la suma sobre i en la expresión anterior obtenemos la condición

$$\sum_i^N \left| \frac{O^{\text{ex}} - O_i^{\text{th}}(a_j)}{\sigma_i^{\text{ex}}} \right|^2 \leq \sum_i^N 1 = N. \quad (\text{C.3})$$

Definiendo

$$\text{pull}_i = \frac{O^{\text{ex}} - O_i^{\text{th}}(a_j)}{\sigma_i^{\text{ex}}} \quad (\text{C.4})$$

tenemos la condición

$$\chi^2 = \sum_i |\text{pull}_i|^2 \leq N. \quad (\text{C.5})$$

Si la predicción teórica para el observable $O_i^{\text{th}}(a_j)$ es idéntica a la predicción experimental O_i^{ex} entonces el pull correspondiente es cero, i.e., $\text{pull}_i = 0$. En un caso ideal, todos los pull son iguales a cero:

$$\text{pull}_i = 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{C.6})$$

Estas condiciones constituyen un sistema de N ecuaciones con p parámetros $a_1, a_2, \dots, a_p$. Si los observables dependen linealmente con los parámetros, este sistema de N ecuaciones tendrá una única solución si el número de parámetros es igual al número de ecuaciones N . Para este caso en particular (N parámetros y N ecuaciones) el valor de χ^2 es igual a cero. Definimos el número de grados de libertad (degrees of freedom) como

$$\text{d.o.f} = N - P, \quad (\text{C.7})$$

y la bondad del fit como

$$\text{bondad del fit} = \frac{\chi_{\min}^2}{\text{d.o.f}}. \quad (\text{C.8})$$

En nuestro caso trivial (N parámetros y N ecuaciones) $\text{d.o.f} = 0$ y la bondad del fit es indeterminada, i.e., $\frac{\chi_{\min}^2}{\text{d.o.f}} = \frac{0}{0}$. Claramente tener N ecuaciones y N parámetros no tiene mucho significado ya que, en principio, podemos hacer que χ^2 sea igual a cero y por lo tanto, no es na bondad del modelo sino simplemente una consecuencia de tener muchos parámetros. Para que el resultado tenga significado exigiremos dos condiciones (en un caso ideal)

$$\chi^2 \leq N - P, \quad P \ll N. \quad (\text{C.9})$$

El caso trivial que hemos considerado $N = P$, no satisface las condiciones ya que $N - P = 0$. Dividiendo la primera condición entre $N - P$ obtenemos

$$\frac{\chi^2}{N - P} = \frac{\chi^2}{N - P} \leq 1, \quad P \ll N. \quad (\text{C.10})$$

La segunda condición es importante porque significa que con pocos parámetros podemos explicar los datos.

C.0.1. Niveles de confianza

Consideremos el resultado experimental para un observable

$$\langle O_i \rangle = O_i^{\text{ex}} \pm \sigma_i. \quad (\text{C.11})$$

Consideraremos que $O_i^{\text{ex}} = \langle x \rangle$ representa el valor esperado de una variable aleatoria x_i , que para efectos prácticos identificaremos como el parámetro que va a ser ajustado, es decir O_i^{th} .

Esta interpretación siempre puede hacerse ya que es simplemente un cambio de variables. Como tenemos N observables experimentales y P parámetros, entonces lo que sucede es que ahora identificamos los parámetros con O_i^{th} , pero de estos últimos hay $N \gg P$, lo único que debe tenerse en cuenta es que muchos de estos N parámetros están relacionados entre sí. Uno puede preguntarse cuál es la probabilidad de hacer una medida adicional x y encontrar el observable en el intervalo real $(\langle x \rangle - \sigma_i, \langle x \rangle + \sigma_i)$. Si damos una densidad de probabilidad $f(x)$ entonces la probabilidad es

$$P(\langle x \rangle - \sigma_i, \langle x \rangle + \sigma_i) = \int_{\langle x \rangle - \sigma}^{\langle x \rangle + \sigma} f(x) dx, \quad (\text{C.12})$$

donde la densidad de probabilidad está normalizada. En el caso de la distribución gaussiana tendremos

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}. \quad (\text{C.13})$$

Para esta densidad de probabilidad tendremos

$$P(\langle x \rangle - \sigma_i, \langle x \rangle + \sigma_i) = \int_{\langle x \rangle - \sigma}^{\langle x \rangle + \sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} dx \sim 0.68. \quad (\text{C.14})$$

Esto significa que hay una probabilidad del 68 % de que al hacer un experimento y medir x el resultado se encuentre en el intervalo $(\langle x \rangle - \sigma, \langle x \rangle + \sigma)$. Diremos que el resultado del experimento estará en este intervalo con un nivel de confianza del 68 %. Si definimos la función χ^2 para este único observable

$$\chi^2 = \left(\frac{x - \langle x \rangle}{\sigma} \right)^2, \quad (\text{C.15})$$

entonces los valores para χ^2 en los límites de este intervalo son

$$\chi^2(x) \Big|_{\langle x \rangle \pm \sigma} = 1. \quad (\text{C.16})$$

En nuestro caso el valor mínimo $\chi_{\min}^2 = 0$ cuando $x = \langle x \rangle$, entonces tenemos

$$\chi^2 \Big|_{\langle x \rangle \pm \sigma} - \chi_{\min}^2 = 1. \quad (\text{C.17})$$

Podemos decir que el intervalo con un nivel de confianza de un 68 % tiene como límites la solución de esta ecuación. El intervalo con un nivel de confianza de un 95 % se obtiene de

$$P(\langle x \rangle - \sqrt{3.84}\sigma_i \leq x \leq \langle x \rangle + \sqrt{3.84}\sigma_i) = \int_{\langle x \rangle - \sqrt{3.84}\sigma}^{\langle x \rangle + \sqrt{3.84}\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} dx \sim 0.95. \quad (\text{C.18})$$

En los límites del intervalo de confianza

$$\chi^2(x) \Big|_{\langle x \rangle \pm \sigma} - \chi_{\min}^2 = 3.84, \quad (\text{C.19})$$

y podemos afirmar que el intervalo con un nivel de confianza de un 95 % tiene como límites la solución de esta ecuación. Si tenemos varios parámetros x_i , cada uno con una función de probabilidad

$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}}, \quad (\text{C.20})$$

por los axiomas de probabilidad, la densidad de probabilidad para todos los parámetros es el producto de las $f(x_i)$

$$L = \prod_i^P f(x_i) = \prod_i^P \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{P/2} \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_P} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \quad (\text{C.21})$$

donde

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(x_i - \langle x_i \rangle)^2}{\sigma_i^2}. \quad (\text{C.22})$$

La región más probable corresponde al máximo de $L(x_1, x_2, \cdots, x_P)$, que es equivalente a buscar el mínimo de χ^2 .

Bibliografía

- [1] Roel Aaij et al. Test of lepton universality using $B^+ \rightarrow K^+ \ell^+ \ell^-$ decays. *Phys. Rev. Lett.*, 113:151601, 2014.
- [2] R. Aaij et al. Test of lepton universality with $B^0 \rightarrow K^{*0} \ell^+ \ell^-$ decays. *JHEP*, 08:055, 2017.
- [3] Rodrigo Alonso, Benjamín Grinstein, and Jorge Martin Camalich. Lepton universality violation and lepton flavor conservation in B -meson decays. *JHEP*, 10:184, 2015.
- [4] Rodrigo Alonso, Benjamin Grinstein, and Jorge Martin Camalich. $SU(2) \times U(1)$ gauge invariance and the shape of new physics in rare B decays. *Phys. Rev. Lett.*, 113:241802, 2014.
- [5] Nejc Kosnik. Model independent constraints on leptoquarks from $b \rightarrow s \ell^+ \ell^-$ processes. *Phys. Rev. D*, 86:055004, 2012.
- [6] Luca Di Luzio, Admir Greljo, and Marco Nardecchia. Gauge leptoquark as the origin of B -physics anomalies. *Phys. Rev. D*, 96(11):115011, 2017.
- [7] Lorenzo Calibbi, Andreas Crivellin, and Tianjun Li. Model of vector leptoquarks in view of the B -physics anomalies. *Phys. Rev. D*, 98(11):115002, 2018.
- [8] Marzia Bordone, Claudia Cornella, Javier Fuentes-Martin, and Gino Isidori. A three-site gauge model for flavor hierarchies and flavor anomalies. *Phys. Lett. B*, 779:317–323, 2018.
- [9] Riccardo Barbieri and Andrea Tesi. B -decay anomalies in Pati-Salam $SU(4)$. *Eur. Phys. J. C*, 78(3):193, 2018.
- [10] Monika Blanke and Andreas Crivellin. B Meson Anomalies in a Pati-Salam Model within the Randall-Sundrum Background. *Phys. Rev. Lett.*, 121(1):011801, 2018.

-
- [11] Admir Greljo and Ben A. Stefanek. Third family quark–lepton unification at the TeV scale. *Phys. Lett. B*, 782:131–138, 2018.
- [12] Shyam Balaji, Robert Foot, and Michael A. Schmidt. Chiral SU(4) explanation of the $b \rightarrow s$ anomalies. *Phys. Rev. D*, 99(1):015029, 2019.
- [13] David Marzocca. Addressing the B-physics anomalies in a fundamental Composite Higgs Model. *JHEP*, 07:121, 2018.
- [14] Ufuk Aydemir, Djordje Minic, Chen Sun, and Tatsu Takeuchi. B -decay anomalies and scalar leptoquarks in unified Pati-Salam models from noncommutative geometry. *JHEP*, 09:117, 2018.
- [15] Damir Bečirević, Ilja Doršner, Svjetlana Fajfer, Nejc Košnik, Darius A. Faroughy, and Olcyr Sumensari. Scalar leptoquarks from grand unified theories to accommodate the B -physics anomalies. *Phys. Rev. D*, 98(5):055003, 2018.
- [16] Diego Guadagnoli, M  ril Reboud, and Olcyr Sumensari. A gauged horizontal $SU(2)$ symmetry and $R_{K^{(*)}}$. *JHEP*, 11:163, 2018.
- [17] Shao-Ping Li, Xin-Qiang Li, Ya-Dong Yang, and Xin Zhang. $R_{D^{(*)}}$, $R_{K^{(*)}}$ and neutrino mass in the 2HDM-III with right-handed neutrinos. *JHEP*, 09:149, 2018.
- [18] T. Faber, M. Hudec, Michal Malinsk  y, P. Meinzinger, Werner Porod, and Florian Staub. A unified leptoquark model confronted with lepton non-universality in B -meson decays. *Phys. Lett. B*, 787:159–166, 2018.
- [19] Julian Heeck and Daniele Teresi. Pati-Salam explanations of the B-meson anomalies. *JHEP*, 12:103, 2018.
- [20] B. C. Allanach and Joe Davighi. Third family hypercharge model for $R_{K^{(*)}}$ and aspects of the fermion mass problem. *JHEP*, 12:075, 2018.

- [21] Nima Assad, Bartosz Fornal, and Benjamin Grinstein. Baryon Number and Lepton Universality Violation in Leptoquark and Diquark Models. *Phys. Lett. B*, 777:324–331, 2018.
- [22] Jogesh C. Pati and Abdus Salam. Lepton Number as the Fourth Color. *Phys. Rev. D*, 10:275–289, 1974. [Erratum: *Phys.Rev.D* 11, 703–703 (1975)].
- [23] G. Valencia and S. Willenbrock. Quark - lepton unification and rare meson decays. *Phys. Rev. D*, 50:6843–6848, 1994.
- [24] A. D. Smirnov. Mass limits for scalar and gauge leptoquarks from $K(L)0 \rightarrow e^- + \mu^+$, $B0 \rightarrow e^- + \tau^+$ decays. *Mod. Phys. Lett. A*, 22:2353–2363, 2007.
- [25] A. D. Smirnov. Contributions of gauge and scalar leptoquarks to $K0(L) \rightarrow l(i)^+ l(j)^-$ and $B0 \rightarrow l(i)^+ l(j)^-$ decay and constraints on leptoquark masses from the decays $K0(L) \rightarrow e^- + \mu^+$ and $B0 \rightarrow e^- + \tau^+$. *Phys. Atom. Nucl.*, 71:1470–1480, 2008.
- [26] Michael Carpentier and Sacha Davidson. Constraints on two-lepton, two quark operators. *Eur. Phys. J. C*, 70:1071–1090, 2010.
- [27] A. V. Kuznetsov, N. V. Mikheev, and A. V. Serghienko. The third type of fermion mixing in the lepton and quark interactions with leptoquarks. *Int. J. Mod. Phys. A*, 27:1250062, 2012.
- [28] A. D. Smirnov. Vector leptoquark mass limits and branching ratios of $K_L^0, B^0, B_s \rightarrow l_i^+ l_j^-$ decays with account of fermion mixing in leptoquark currents. *Mod. Phys. Lett. A*, 33:1850019, 2018.
- [29] Bartosz Fornal, Sri Aditya Gadam, and Benjamin Grinstein. Left-Right SU(4) Vector Leptoquark Model for Flavor Anomalies. *Phys. Rev. D*, 99(5):055025, 2019.
- [30] Walter Greiner and Berndt Müller. *Gauge Theory of Weak Interactions*. Springer, 2000.
- [31] Michael E. Peskin. Beyond the standard model. In *The 1996 European School of High-Energy Physics (formerly CERN / JINR School of Physics)*, pages 49–142, 5 1997.

-
- [32] *Unification and Supersymmetry*.
- [33] Howard Georgi. *Lie Algebras in Particle Physics*. Westview, 1999.
- [34] Joel A. Shapiro. Group theory in physics. <http://www.physics.rutgers.edu/grad/618/lects/lects.pdf>, April 2017.
- [35] Chris Quigg. *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*. Princeton University Press, 2013.
- [36] Yoichiro Nambu. Quasiparticles and Gauge Invariance in the Theory of Superconductivity. *Phys. Rev.*, 117:648–663, 1960.
- [37] J. Goldstone. Field Theories with Superconductor Solutions. *Nuovo Cim.*, 19:154–164, 1961.
- [38] Jeffrey Goldstone, Abdus Salam, and Steven Weinberg. Broken Symmetries. *Phys. Rev.*, 127:965–970, 1962.
- [39] Peter W. Higgs. Broken symmetries, massless particles and gauge fields. *Phys. Lett.*, 12:132–133, 1964.
- [40] Peter W. Higgs. Broken Symmetries and the Masses of Gauge Bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, 1964.
- [41] Georges Aad et al. Observation of a new particle in the search for the Standard Model Higgs boson with the ATLAS detector at the LHC. *Phys. Lett. B*, 716:1–29, 2012.
- [42] Roel Aaij et al. Test of lepton universality in beauty-quark decays. *Nature Phys.*, 18(3):277–282, 2022.
- [43] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, and L. Maiani. Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry. *Phys. Rev. D*, 2:1285–1292, 1970.
- [44] P. A. Zyla et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.

-
- [45] Yili Wang and David Atwood. Rate difference between $b \rightarrow s \mu^+ \mu^-$ and $b \rightarrow s e^+ e^-$ in SUSY with large $\tan \beta$. *Phys. Rev. D*, 68:094016, 2003.
- [46] Roel Aaij et al. Search for lepton-universality violation in $B^+ \rightarrow K^+ \ell^+ \ell^-$ decays. *Phys. Rev. Lett.*, 122(19):191801, 2019.
- [47] J. P. Lees et al. Measurement of Branching Fractions and Rate Asymmetries in the Rare Decays $B \rightarrow K^{(*)} l^+ l^-$. *Phys. Rev. D*, 86:032012, 2012.
- [48] S. Choudhury et al. Test of lepton flavor universality and search for lepton flavor violation in $B \rightarrow K \ell \ell$ decays. *JHEP*, 03:105, 2021.
- [49] K. A. Olive et al. Review of Particle Physics. *Chin. Phys. C*, 38:090001, 2014.
- [50] Christian W. Bauer, Zoltan Ligeti, Michael Luke, Aneesh V. Manohar, and Michael Trott. Global analysis of inclusive B decays. *Phys. Rev. D*, 70:094017, 2004.
- [51] M. Huschle et al. Measurement of the branching ratio of $\bar{B} \rightarrow D^{(*)} \tau^- \bar{\nu}_\tau$ relative to $\bar{B} \rightarrow D^{(*)} \ell^- \bar{\nu}_\ell$ decays with hadronic tagging at Belle. *Phys. Rev. D*, 92(7):072014, 2015.
- [52] Marina Artuso, Elisabetta Barberio, and Sheldon Stone. B Meson Decays. *PMC Phys. A*, 3:3, 2009.
- [53] Syuhei Iguro, Junichiro Kawamura, Shohei Okawa, and Yuji Omura. TeV-scale vector leptoquark from Pati-Salam unification with vectorlike families. *Phys. Rev. D*, 104(7):075008, 2021.
- [54] Bastian Diaz, Martin Schmaltz, and Yi-Ming Zhong. The leptoquark Hunter’s guide: Pair production. *JHEP*, 10:097, 2017.
- [55] M. Tanabashi et al. Review of Particle Physics. *Phys. Rev. D*, 98(3):030001, 2018.
- [56] Dario Buttazzo, Admir Greljo, Gino Isidori, and David Marzocca. B-physics anomalies: a guide to combined explanations. *JHEP*, 11:044, 2017.

-
- [57] R. Slansky. Group Theory for Unified Model Building. *Phys. Rept.*, 79:1–128, 1981.
- [58] Oscar Rodríguez, Richard H. Benavides, William A. Ponce, and Eduardo Rojas. Flipped versions of the universal 3-3-1 and the left-right symmetric models in $[SU(3)]^3$: a comprehensive approach. *Phys. Rev. D*, 95(1):014009, 2017.
- [59] Cristian H. García-Duque, J. M. Cabarcas, J. H. Muñoz, Néstor Quintero, and Eduardo Rojas. Vector singlet leptoquark model facing recent LHCb and BABAR measurements. 9 2022.
- [60] Kayoung Ban, Yongsoo Jho, Youngjoon Kwon, Seong Chan Park, Seokhee Park, and Po-Yan Tseng. A comprehensive study of vector leptoquark with $U(1)_{B_3-L_2}$ on the B -meson and Muon $g-2$ anomalies. 4 2021.
- [61] Eduardo Rojas. Análisis de datos con la función χ^2 .
- [62] A. Angelescu, Damir Bečirević, D. A. Faroughy, and O. Sumensari. Closing the window on single leptoquark solutions to the B -physics anomalies. *JHEP*, 10:183, 2018.
- [63] Andrei Angelescu, Damir Bečirević, Darius A. Faroughy, Florentin Jaffredo, and Olcyr Sumensari. Single leptoquark solutions to the B-physics anomalies. *Phys. Rev. D*, 104(5):055017, 2021.
- [64] Bhuvanajyoti Bhattacharya, Alakabha Datta, Jean-Pascal Guévin, David London, and Ryoutaro Watanabe. Simultaneous Explanation of the R_K and $R_{D^{(*)}}$ Puzzles: a Model Analysis. *JHEP*, 01:015, 2017.
- [65] Jacky Kumar, David London, and Ryoutaro Watanabe. Combined Explanations of the $b \rightarrow s\mu^+\mu^-$ and $b \rightarrow c\tau^-\bar{\nu}$ Anomalies: a General Model Analysis. *Phys. Rev. D*, 99(1):015007, 2019.
- [66] Wolfgang Altmannshofer and Peter Stangl. New physics in rare B decays after Moriond 2021. *Eur. Phys. J. C*, 81(10):952, 2021.

-
- [67] Ta-Pei Cheng and Ling-Fong Li. *Gauge Theory of Elementary Particles*. Oxford University Press, 2000.
- [68] David Griffiths. *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VHC, 2008.
- [69] Amitabha Lahiri and Palash B. Pal. *A First Book of Quantum Field Theory*. Narosa, 2004.
- [70] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, and R. P. Hudson. Experimental Test of Parity Conservation in β Decay. *Phys. Rev.*, 105:1413–1414, 1957.
- [71] Eduardo Rojas. Nota interna sobre la invarianza de un operador, grupo de física del sabor.