Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Campos escalares más allá del modelo estándar para resolver la anomalía g-2

Cristian Camilo Cerón Cerón

Director
Eduardo Rojas Peña
Doctor en Ciencias Físicas

San Juan de Pasto, octubre de 2023

©2023 - Cristian Camilo Cerón Cerón

”Las ideas y conclusiones aportadas en el trabajo de grado son responsabilidad exclusiva del autor”

Artículo 1. Del Acuerdo No. 324 del 11 de octubre de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

Eduardo Rojas Peña

Director

Yithsbey Giraldo Usuga

Jurado

Germán Enrique Ramos Zambrano

Jurado

San Juan de Pasto, 26 de octubre de 2023

Dedicatoria

A mi madre, Blanca y a mi hermana, Nohemi.

Agradecimientos

El agradecimiento es el acto de hacer memoria desde nuestro corazón, y en el mío se encuentran mi familia, maestros y amigos. A los maestros que con su conocimiento y labor eficaz me enseñaron más que ser un estudiante, a hacerme preguntas cuya profundidad puede abrir nuevos caminos en la ciencia y el conocimiento personal. A veces, en su enseñanza se presentaba lo que parecía una fría teoría, y así mismo la exponían, pero ese acto ahora lo entiendo como la invitación misma de parte del maestro a luchar para pulir el sentido común y el alma y hacerlos sensibles ante lo que la naturaleza representa.

Así mismo, es menester, y no por salvarme a mí mismo, dar las gracias y quedar en deuda con el profesor Eduardo Rojas. Su disponibilidad y paciencia para que yo pudiera concluir mi trabajo de grado fueron generosas, y también he de disculparme por mi, a veces, pérdida de ritmo. No queda duda de su colaboración indiscutible e inevitable buen sentido del humor.

Y como no pensar en agradecer a mis amigos, que si bien Aristóteles decía que no los hay del todo amigos, yo diría del todo que uno no estaría completo sin ellos, es que, ¿de qué sirve ser si se va a estar solo en la infinidad del universo?. De las largas horas en la biblioteca que ahora son por medio del recuerdo, parteras de mi nostalgia, pienso que mis amigos son una extensión de mis memorias, y yo de las suyas.

Resumen

Incluimos correcciones radiativas de un campo escalar exótico al momento magnético anómalo para los leptones en general, y dirigido en particular al muón $g-2$. Este observable, i.e., $g-2$, se desvía en más de tres σ de la predicción del modelo estándar de partículas y por tanto es posible que esta anomalía sea una consecuencia de física más allá del modelo estándar. Con nuestro proyecto de investigación esperamos explicar los datos experimentales por medio de una partícula escalar exótica. Parte del proyecto es recrear el cálculo del momento magnético anómalo del muón y aprender los fundamentos básicos de la electrodinámica cuántica y la teoría cuántica de campos para hacer investigación en física de partículas.

***Palabras clave*:** momento magnético anómalo del muón, $g-2$, bosones escalares, campo escalar exótico.

Abstract

We include radiative corrections from an exotic scalar field to the anomalous magnetic moment for leptons in general, and directed in particular at the $g-2$ muon. This observable, i.e., $g-2$, deviates by more than three σ from the prediction of the standard model of particles and therefore it is possible that this anomaly is a consequence of physics beyond the standard model. With our research project we hope to explain the experimental data by means of an exotic scalar particle. Part of the project is to recreate the calculation of the anomalous magnetic moment of the muon and learn the basics of quantum electrodynamics and quantum field theory to do research in particle physics.

***Keywords*:** anomalous muon magnetic moment, $g-2$, scalar bosons, exotic scalar field.

Contenido

1. Introducción **12**

2. Planteamiento del Problema **13**

3. Objetivos **14**
3.1. Objetivo general 14
3.2. Objetivos específicos 14

4. Electrodinámica Cuántica **15**
4.1. Antecedentes de la electrodinámica cuántica 16
4.2. Ecuación de Dirac 18
4.2.1. La estrategia de Dirac 18
4.2.2. Soluciones para la ecuación de Dirac 21
4.2.3. Covariantes bilineales 27
4.3. El fotón 33
4.4. Reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica 38

5. Calculos de g-2 a un loop **41**
5.1. g-2 en el modelo estándar 42
5.2. Cálculo del g-2 del muón a un loop en el ME. 44
5.2.1. Parámetros de Feynman 48
5.2.2. Rotación de Wick y eliminación de divergencias 56
5.2.3. Cálculo de la corrección radiativa a_μ 59
5.3. Corrección a g-2 por un campo escalar 61
5.3.1. Cálculo del denominador 63
5.3.2. Cálculo del numerador 65

6. Resultados **74**

7. Apéndices **79**

A. Constante de normalización de los espinores de Dirac **80**

B. Cálculo de numerador. **82**

C. Identidad de Ward. **89**

D. Numerador del aporte del campo escalar neutro. **90**

E. Análisis de datos con la función χ^2 **93**

E.1. Niveles de confianza 94

Índice de figuras

4.1. Diagrama de autoenergía del electrón. 15

5.1. Esbozo del experimento g-2 propuesto por Lederman para el CERN donde se disparan piones cargados y polarizados que se desintegran en muones también polarizados. Imagen tomada de la pagina web de la colaboración BNL. . 42
5.2. Correcciones en SM a orden más bajo para a_μ. 44
5.3. EC (correcciones radiativas): contribuciones a nivel árbol y a nivel de loops. . 44
5.4. Representación diagramática de la amplitud en el proceso $\mu \to \mu\gamma$ en presencia de un fotón. 45
5.5. Rotación de Wick: el polo en el segundo cuadrante corresponde a $-\sqrt{(|\vec{l}|^2+\Delta)}(1-i\epsilon)$ y el polo en el cuarto cuadrante corresponde a $l_0 = -\sqrt{(|\vec{l}|^2+\Delta)}(1-i\epsilon)$. 57
5.6. Diagrama de Feynman que representa la amplitud del proceso $l_i \to l_j\gamma$ en presencia del campo escalar neutro. 62

6.1. Región permitida a nivel de un σ, i.e., la región del espacio de parámetros que satisface pull$^2 = \left(\frac{\mathcal{O}^{exp}-\mathcal{O}^{te}}{\sigma^{\text{total}}}\right)^2 < 1$, donde σ^{total} es la suma en cuadratura del error experimental y el error teórico. Para el cálculo hicimos $m_f = 1{,}77699$ GeV, que corresponde a la masa del τ y $m_\phi = 105$ GeV. De la gráfica podemos ver que el punto (0,0), que corresponde al modelo estándar, no está en la región permitida de la gráfica. 76

Glosario

Electrodinámica cuántica: se dice de la teoría de la interacción de la luz con la materia en un marco cuántico relativista.

Teoría cuántica de campos: es la cuantificación de un campo clásico, cuyo ejemplo más familiar es el campo electromagnético. La teoría es perturbativa y proporciona métodos computacionales para el cálculo de interacciones fundamentales. Aunque sus fundamentos matématicos no están bien definidos, sus predicciones teóricas coinciden con las predicciones experimentales.

Modelo estándar: es el resultado de la teoría cuántica de campos que reune a las partículas fundamentales encontradas hasta el día de hoy y que describe sus simetrías y estructura fundamental.

Leptónes: corpúsculos relativamente ligeros de espín $1/2$, cuyas interacciones con otras partículas o entre leptones, son débiles, se los conoce como electrón (e^-), muón (μ^-), tau (τ), neutrino electrónico (ν_e), muónico (ν_μ) y tauónico (ν_τ).

Muón es un leptón de segunda generación, y se caracteriza por ser 206 veces más pesado que el electrón. Su gran masa y vida media de $2{,}2\mu s$ lo hacen un excelente candidado por los experimentos.

g-2: es la anomalía magnética de los leptones con carga, la constante g giromagnética relaciona el momento magnético con el espín e indica qué tan fuerte es el acoplamiento entre el campo magnético externo y el espín de la partícula.

Partícula escalar: es una partícula sin estructura interna y sin espín que permanece invariante bajo las transformaciones.

Momento magnético de espín: es el momento magnético causado por el espín de las partículas fundamentales

Capítulo 1

Introducción

La medida experimental del momento magnético anómalo del muón se ha apartado de la predicción del modelo estándar por muchos años hasta los $3{,}6\,\sigma$ [14]. Se han propuesto muchas soluciones teóricas para este problema [9, 10, 8, 35, 39, 48]. Nuestro proyecto de grado consiste en hacer el estudio de un modelo que contiene campos escalares, en específico, una partícula escalar exótica neutra y reproducir sus resultados generales para aplicarlos al caso del momento magnético anómalo del muón [38], que pueda disminuir la tensión entre este observable y las predicciones del modelo estándar.

El problema se solucionará a partir de un modelo fundamental en la electrodinámica cuántica (EC) y la teoría cuántica de campos (TCC) que combinan de forma exitosa la relatividad especial y la mecánica cuántica. En este formalismo se interpretará la anomalía en el momento magnético del muón, g-2, como una corrección radiativa generada por una partícula escalar exótica. La TCC permite calcular secciones eficaces y anchos de decaimiento para partículas fundamentales o compuestas. Para calcular la amplitud invariante usamos diagramas de Feynman, que se pueden obtener de la densidad Lagrangiana del modelo. Además, con el propósito de tener una formación sólida en el campo, estudiaremos la formulación de la ecuación de ondas relativista para los fermiones desarrollada por Paul Adrien Maurice Dirac, mejor conocida como ecuación de Dirac. El trabajo consiste en calcular la contribución a un bucle de la función de vértice del muón para generar una corrección al momento magnético anómalo del muón y de la partícula escalar neutra como partícula mediadora.

Capítulo 2

Planteamiento del Problema

El momento magnético anómalo del muón, se ha medido con una precisión sorprendente, y es actualmente una de las inconsistencias que más se han estudiado entre los datos y las predicciones del Modelo Estándar (ME) en toda la física de partículas. Con los datos actuales, la discrepancia está a un nivel de 3,6σ [14], y se están realizando esfuerzos en los frentes experimental [5] y teórico [9, 10, 8, 31, 35, 39, 48] para mejorar la precisión tanto del valor medido como de la predicción del ME y sus extensiones. Esta desviación respecto del valor esperado por el ME se ha utilizado como motivación para el desarrollo de muchos modelos de nueva física [4, 19, 36, 20, 3, 23, 34, 24, 7]

Desde el punto de vista teórico la pregunta es: ¿cuál es la extensión mínima electrodébil del ME con un contenido mínimo de fermiones? Es por sí misma interesante, y como propuesta la extensión mínima en este trabajo será aumentar un campo escalar neutro ϕ, teniendo en cuenta el modelo propuesto en el artículo [38] que sugiere el Lagrangiano de interacción,

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_s^{ij}\phi\bar{l}_i l_j + i g_p^{ij}\phi\bar{l}_i\gamma^5 l_j$$

donde l puede ser un doblete de $SU(2)_L$ o un singlete de leptones del ME y $g_{s,p}^{ij}$ son los acoplamientos. La literatura actual sobre los modelos mínimos abunda en ejemplos [28, 17, 30, 12, 33, 18, 42] pero hasta donde sabemos, no existe una parametrización de estos modelos. Desde un punto de vista fenomenológico los modelos mínimos son útiles para explicar las anomalías aisladas en los experimentos de baja energía debido a la ausencia de fermiones exóticos a bajas energías (ejemplos de estas clases de anomalías se pueden ver en [41, 1, 37, 32]).

Para los modelos no universales, es decir, modelos que tienen acoplamientos que dependen de la familia (sin tener en cuenta los acoplamientos de Yukawa o de masa), tal como está presente en la literatura, el número total de parámetros aumenta puesto que intervienen nuevos acoplamientos, dando lugar a una gran variedad de soluciones. En este caso, en particular, se restringirá al estudio del muón μ que es el de interés para abordar el problema del momento magnético anómalo.

Capítulo 3

Objetivos

3.1. Objetivo general

Estudiar un modelo de física más allá del modelo estándar con contenido mínimo de partículas para resolver la anomalía $g - 2$.

3.2. Objetivos específicos

- Reproducir el cálculo del momento magnético anómalo del muón a un loop en el modelo estándar.
- Calcular la corrección al $g - 2$ usando un campo escalar singlete neutro y exótico; para esto se usa el Lagrangiano de interacción propuesto en el artículo [38].
- Haciendo uso de la tecnología computacional desarrollada por Feynman y Schwinger se espera llegar a las expresiones integrales del artículo de referencia [38].
- Calcular la región del espacio de parámetros que resuelve la anomalía g-2.

Capítulo 4

Electrodinámica Cuántica

La Electrodinámica Cuántica estudia la interacción entre la luz y la materia. Su origen se remonta al artículo [22] de P.A.M. Dirac publicado en 1928 y titulado *The Quantum Theory of the Electron* donde se preguntaba, en principio, porqué el electrón en lugar de ser nada más que una carga puntual debía de tener propiedades como, por ejemplo, el momento magnético de un magnetón de Bohr y el momento angular de espín igual a medio cuanto de energía. La falta de argumentos teóricos, llevó a Dirac a pensar que se debía a su desacuerdo con la teoría de la relatividad y las transformaciones de Lorentz, y este fue el punto clave para desarrollar una ecuación de onda relativista y lineal. En el mismo artículo Dirac estudió un caso clásico de lo que llegaría a hacer parte fundamental de la electrodinámica cuántica, el valor del factor g del momento magnético como igual a 2.

Haciendo uso de la Ecuación de Dirac, se continuó con la cuantización de la teoría electromagnética, que también se denominó: Teoría Cuántica de Campos, en este teoría la relatividad y la mecánica cuántica parecían armonizarse, pero cuando se profundizó aparecieron divergencias en los cálculos. Un ejemplo de ello se da cuando se calcula la autoenergía del electrón, que es el fenómeno donde el electrón puede emitir y absorber el mismo fotón. El cálculo del diagrama para esta interacción con términos perturbativos resulta en una integral divergente. Este problema se solucionó con el método de renormalización propuesto de forma paralela e independiente por Richard Feynman [25], Julian Schwinger [45] y Shin'ichiro Tomonaga [49].

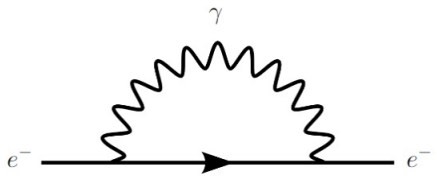


Figura 4.1: Diagrama de autoenergía del electrón.

4.1. Antecedentes de la electrodinámica cuántica

Desde los orígenes de la mecánica cuántica la ecuación de onda de Schrödinger cuenta con un problema, y es que no es útil para casos donde las partículas que describe alcanzan velocidades relativistas; por eso mismo se dice que ésta solo funciona en la mecánica cuántica no relativista. Una forma de obtener la ecuación de Schrödinger no relativista es sustituyendo a la energía **E** y el momento **p** por sus respectivos operadores diferenciales:

$$\mathbf{p} \to -i\hbar\nabla, \quad \mathbf{E} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.1}$$

en la ecuación de energía para una partícula de masa m, que por facilidad, se mueve en un espacio unidimensional y está sometida a un potencial **V(x)**:

$$\frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \mathbf{V(x)} = \mathbf{E}, \tag{4.2}$$

y dejando que el operador resultante opere sobre la función de onda Ψ, queda:

$$-\frac{\hbar}{2m}\nabla^2\Psi + V(x)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}, \tag{4.3}$$

que es la ecuación de Schrödinger no relativista. Históricamente Schrödinger fue el primero en buscar una ecuación de onda relativista, pero debido a las dificultades que presentaba prefirió dejar ese camino y concentrarse en la ecuación de onda (4.3), que además cuenta con la ventaja de que es una ecuación diferencial con derivada temporal de primer orden. Poco después en 1926, Klein, Fock y Gordon presentaron sus artículos por separado con una misma conclusión: la ecuación de onda relativista para partículas de espín cero. Yendo por la misma dirección y usando la relación de dispersión o relación relativista de energía-momento:

$$E^2 = m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2, \tag{4.4}$$

la cual usando el vector de cuadrimomento:

$$p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right), \quad p_\mu = \left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right), \tag{4.5}$$

y tomando su producto:

$$p^\mu p_\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)\left(\frac{E}{c}, -\mathbf{p}\right) = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}\cdot\mathbf{p}, \tag{4.6}$$

se ve que la ecuación (4.4) se puede redefinir usando (4.6), así:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0, \tag{4.7}$$

sin potenciales y trabajando con partículas libres. Ahora p^μ y p_μ se reescriben como:

$$p^\mu \to -i\hbar\partial^\mu, \quad p_\mu \to i\hbar\partial_\mu, \tag{4.8}$$

los cuales pueden ser sustituidos en (4.8) y haciendo actuar a estos operadores sobre la función de onda resulta:

$$(-i\hbar\partial^\mu)(i\hbar\partial_\mu)\Psi - m^2c^2\Psi = 0, \tag{4.9}$$
$$-\hbar^2\partial^\mu\partial_\mu\Psi - m^2c^2\Psi = 0, \tag{4.10}$$

donde:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right), \tag{4.11}$$

y ∂^μ se escribe como: $\partial^\mu = g^{\mu\nu}\partial_\nu$, siendo además:

$$\partial^0 = g^{0\nu}\partial_\nu = \partial_0 = (+1)\frac{\partial}{\partial(ct)} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad \nu = \mu = 0, \tag{4.12}$$
$$\partial^i = g^{ii}\partial_i = \partial_i = (-1)\frac{\partial}{\partial x^i} = -\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \nu = \mu = i, \tag{4.13}$$

de lo que se obtiene:

$$\partial^\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right), \tag{4.14}$$

de modo que al sustituir (4.11) y (4.14) en (4.10) resulta:

$$-\hbar^2\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right)\Psi - m^2c^2\Psi = 0,$$
$$-\hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \partial^i\partial_i\right)\Psi - m^2c^2\Psi = 0,$$
$$-\hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2\right)\Psi - m^2c^2\Psi = 0,$$
$$-\hbar^2\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Psi - m^2c^2\Psi = 0,$$

$$\left(-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\Psi = \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\Psi, \tag{4.15}$$

donde en unidades naturales $\hbar = c = 1$, concluyendo:

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2\right)\Psi = m^2\Psi, \tag{4.16}$$

y definiendo el D'Alembertiano como:

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \tag{4.17}$$

la ecuación (4.16) queda:

$$(\Box + m^2)\Psi = 0, \tag{4.18}$$

que es la ecuación de Klein-Gordon. Como se había dicho, esta ecuación (4.18) solo puede trabajar con partículas cuyo espín es cero, y hasta ese entonces no se tenía conocimiento de partículas con tales características y nada más estaban aquellas con espín de $1/2$. Además, los cálculos se complicaban ya que esta ecuación diferencial no es de orden lineal en el tiempo sino de orden cuadrático. Por ejemplo, el electrón está fuera del alcance de esta ecuación, y tal problema no se hizo esperar en solución pues se requería una formulación que pusiera a la mano a esta partícula dentro del marco de la relatividad. Otro de los problemas es que la solución de la ecuación de Klein-Gordon tiene energías positivas y negativas, lo que a primera vista no representa ningún problema si se escoge la solución positiva, pero existe la posibilidad de que la partícula intercambie energía con el medio y no habría un límite que impida la pérdida infinita de energía; esto no es fenomenológicamente correcto en el caso de una partícula y se suma a los problemas antes mencionados.

4.2. Ecuación de Dirac

El primero de febrero de 1928 se publicó el artículo de Paul Dirac en el cuál proponía la ecuación de onda que más tarde sería conocida como la *Ecuación de Dirac*. Hasta la actualidad, esta ecuación puede ser aplicada a partículas con espín de $1/2$, tal como el electrón, que fue la partícula en la que se centró el estudio. Y, no siendo suficiente con ser una ecuación de onda relativista lineal, tiene dos características fundamentales: es invariante bajo las transformaciones de Lorentz y predice la antimateria.

4.2.1. La estrategia de Dirac

A partir de la relación de energía-momento 4.7, Dirac comenzó a trabajar dividiendo a esta misma en una parte temporal y otra espacial, la primera componente:

$$\begin{aligned} (p^0)^2 - m^2c^2 &= 0, \\ (p^0 - mc)(p^0 + mc) &= 0, \end{aligned} \tag{4.19}$$

es decir, la temporal es equivalente a las ecuaciones de primer orden como sigue:

$$p^0 - mc = 0, \quad \text{ó} \quad p^0 + mc = 0, \tag{4.20}$$

donde cualquiera de las dos ecuaciones satisface a:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = 0. \tag{4.21}$$

Pero no pasa igual cuando las componentes espaciales son incluidas, en este caso:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\beta^\kappa p_\kappa - mc)(\gamma^\lambda p_\lambda + mc) = \beta^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc\beta^\kappa p_\kappa + mc\lambda^\lambda p_\kappa - m^2c^2, \tag{4.22}$$

donde al hacer el cambio en el segundo término $\beta \to \kappa$ da:

$$\begin{aligned} p^\mu p_\mu - m^2c^2 &= \beta^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc\beta^\kappa p_\kappa + mc\gamma^\kappa p_\kappa - m^2c^2 \\ &= \beta^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - mc(\beta^\kappa - \gamma^\kappa)p_\kappa - m^2c^2, \end{aligned} \tag{4.23}$$

y dado que no se quieren términos lineales en p_κ se hace $\beta^\kappa = \gamma^\kappa$, de manera que la ecuación (4.23) queda de la forma:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = \gamma^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda - m^2c^2, \tag{4.24}$$

en la cual se identifica del lado izquierdo de la igualdad que:

$$p^\mu p_\mu = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = g^{\kappa\lambda} p_\kappa p_\lambda, \tag{4.25}$$

donde se han renombrado los índices así: $\mu \to \kappa$ y $\nu \to \lambda$. Por lo tanto la ecuación (4.24) se escribe así:

$$g^{\kappa\lambda} p_\kappa p_\lambda = \gamma^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda, \tag{4.26}$$

la cual se organiza así:

$$(\gamma^\kappa\gamma^\lambda - g^{\kappa\lambda})p_\kappa p_\lambda = \frac{\gamma^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda}{2} + \frac{\gamma^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda}{2} - g^{\kappa\lambda} p_\kappa p_\lambda = 0, \tag{4.27}$$

ahora, si se redefinen en el segundo término de la derecha los índices $\kappa \rightleftharpoons \lambda$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda}{2} + \frac{\gamma^\lambda\gamma^\kappa p_\lambda p_\kappa}{2} - g^{\kappa\lambda} p_\kappa p_\lambda &= 0, \\ \frac{1}{2}\left(\gamma^\kappa\gamma^\lambda p_\kappa p_\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\kappa p_\lambda p_\kappa\right) - g^{\kappa\lambda} p_\kappa p_\lambda &= 0, \\ (\gamma^\kappa\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\kappa - 2g^{\kappa\lambda})p_\kappa p_\lambda &= 0, \end{aligned} \tag{4.28}$$

y dado que los momentos se han escogido de tal manera que sean diferentes de cero, entonces la única posibilidad es que:

$$\gamma^\kappa\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\kappa - 2g^{\kappa\lambda} = 0,$$

$$\gamma^\kappa\gamma^\lambda + \gamma^\lambda\gamma^\kappa = 2g^{\kappa\lambda}, \tag{4.29}$$

donde al aplicar el álgebra de anticonmutadores queda:

$$\{\gamma^\kappa, \gamma^\lambda\} = 2g^{\kappa\lambda}. \tag{4.30}$$

Si las γ^κ son matrices, entonces hay soluciones no triviales a esta ecuación. Aquí es imporetante dar a conocer que los cálculos posteriores se van a hacer en la base de masas y no en la base quiral, entonces se tiene un conjunto de matrices que satisfacen esta relación de conmutación son:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2\times 2} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.31}$$

donde las σ^i con $i = 1, 2, 3$, son las matrices de Pauli, que se reprentan como:

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{4.32}$$

Con estás matrices es posible resolver la ecuación:

$$p^\mu p_\mu - m^2c^2 = (\gamma^\kappa p_\kappa - mc)(\gamma^\lambda p_\lambda + mc) = 0, \tag{4.33}$$

y para que se satisfaga la ecuación es costumbre escoger:

$$\gamma^\kappa p_\kappa - mc = 0, \tag{4.34}$$

donde al hacer la sustitución $p_\mu \to i\hbar\partial_\mu$ y aplicando la misma a la función de onda se obtiene:

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - mc\Psi = 0, \tag{4.35}$$

la cual, si se usan las unidades naturales de Plank da:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\Psi = 0, \tag{4.36}$$

siendo esta la Ecuación de Dirac, la cual es matricial y que escrita de una forma más compacta es:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi = 0, \tag{4.37}$$

o con sus índices explícitos:

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m\mathbb{I})_{\alpha\beta}\Psi_\beta = 0, \quad \text{con} \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, 4. \tag{4.38}$$

4.2.2. Soluciones para la ecuación de Dirac

Dado que la función de onda Ψ depende de coordenadas espaciales y temporales, así $\Psi = \Psi(t, x, y, z)$, se va a comenzar por estudiar el caso donde ésta es independiente de la posición, de modo que $\Psi = \Psi(t)$, por lo tanto:

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t}, \tag{4.39}$$

lo que es equivalente a decir que:

$$i\frac{\partial}{\partial_i}\Psi = p_i\Psi = 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.40}$$

Entonces, $p_i = 0$ ó $\vec{p} = 0$, es decir, la partícula está en reposo. Por consiguiente la ecuación de Dirac se reduce a:

$$i\gamma^0\frac{\partial}{\partial t}\Psi - m\Psi = 0, \tag{4.41}$$

siendo su representación matricial explícita de la siguiente manera:

$$i\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial t}\Psi - m\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\Psi = 0, \tag{4.42}$$

donde además:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}, \tag{4.43}$$

y se define el concepto de *espinor* como una función de onda de dos componentes, llamándose a ψ_A la componente superior o up y a ψ_B la componente inferior o down, así:

$$\psi_A = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi_B = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

De modo que la ecuación (4.42) toma la forma:

$$i\begin{pmatrix} 1_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -1_{2\times 2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \partial_t\psi_A \\ \partial_t\psi_B \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = 0, \tag{4.45}$$

en la cual se ha denotado:

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}. \tag{4.46}$$

De la ecuación (4.45) resultan dos componentes:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_A - m\psi_A = 0, \tag{4.47}$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_B + m\psi_B = 0, \tag{4.48}$$

que tienen como soluciones particulares:

$$\psi_A = e^{-imt}\psi_A(0), \tag{4.49}$$

$$\psi_B = e^{+imt}\psi_B(0). \tag{4.50}$$

Claramente las soluciones e^{+imt} representan estados con energía negativa $E \sim -m$ y, dado que, $A = 1, 2.$ y $B = 3, 4.$, entonces hay cuatro soluciones para la ecuación de Dirac con $\vec{p} = 0$ cuya valor de la normalización N se encuentra en el apéndice A:

$$\begin{aligned} \psi^{(1)} &= Ne^{-imt}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \psi^{(2)} = Ne^{-imt}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \\ \psi^{(3)} &= Ne^{+imt}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \psi^{(4)} = Ne^{+imt}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.51}$$

A las soluciones $\psi^{(3)}$ y $\psi^{(4)}$, con energía negativa, se las interpreta como antipartículas con energía positiva y las otras,$\psi^{(1)}$ y $\psi^{(2)}$, son para las partículas, pero ambas, partículas y antipartículas, con espín de $1/2$. Es de resaltar que la ecuación de Dirac no describe nada más una sola partícula sino que describe a dos. De acuerdo con [44] la interpretación fenomenológica que mejor se adecúa es la de entender al espinor como un campo y al cuadrado de su norma como la medida del número de partículas a encontrar en un determinado punto.

En siguiente paso es obtener soluciones de onda planas que son el caso más simple. Sí:

$$\psi(x) = Ne^{-ik\cdot x}u(k), \tag{4.52}$$

donde k_μ es un cuadrimomento y N la constante de normalización; y si se deriva a $\psi(x)$ respecto de x^μ se tiene:

$$\begin{aligned} \partial_\mu\psi(x) &= -ik_\mu Ne^{-ik\cdot x}u(k), \\ \partial_\mu\psi(x) &= -ik_\mu\psi(x), \\ \partial_\mu\psi &= -ik_\mu\psi. \end{aligned} \tag{4.53}$$

De otro lado, usando la Ecuación de Dirac:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0, \tag{4.54}$$

se puede hacer por comparación de la ecuación anterior y (4.53):

$$
\begin{gathered}
i\gamma^\mu(-ik_\mu\psi) - m\psi = 0, \\
\gamma^\mu k_\mu\psi - m\psi = 0, \\
\gamma^\mu k_\mu a e^{-ik\cdot x}u(k) - mae^{-ik\cdot x}u(k) = 0, \\
\gamma^\mu k_\mu u(k) - mu(k) = 0, \\
(\gamma^\mu k_\mu - m)u(k) = 0, \\
(\gamma^\mu k_\mu - m)u = 0,
\end{gathered} \tag{4.55}
$$

llegando esta ecuación a ser conocida la ecuación de Dirac en el espacio de momentos. Ahora bien, si $u(k)$ satisface la ecuación anterior, entonces ψ satisface la ecuación de Dirac. Además, es de tener en cuenta que la forma matricial de u tiene dos componentes: u_A y u_B, que a su vez representan cada una dos componentes, up y down, respectivamente. De modo que analizando a (4.55) en su forma matricial explícita se tiene:

$$
\begin{aligned}
(\gamma^\mu k_\mu - m\mathbb{I})u &= \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} k^0 - \vec{k}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \\
&= \left[\begin{pmatrix} k^0 & 0 \\ 0 & -k^0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -m \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} k^0 - m & -\vec{k}\cdot\vec{\sigma} \\ \vec{k}\cdot\vec{\sigma} & -k^0 - m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.56}
$$

Del resultado anterior se obtienen las ecuaciones:

$$(k^0 - m)u_A = \vec{k}\cdot\vec{\sigma}u_B, \tag{4.57}$$

$$\vec{k}\cdot\vec{\sigma}u_A = (k^0 + m)u_B, \tag{4.58}$$

y se sigue de (4.57) y (4.58), respectivamente:

$$u_A = \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{k^0 - m}u_B, \tag{4.59}$$

$$u_B = \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{k^0 + m}u_A. \tag{4.60}$$

Reemplazando u_B en u_A, se obtiene:

$$
\begin{aligned}
u_A &= \frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{(k^0 - m)}\frac{\vec{k}\cdot\vec{\sigma}}{(k^0 + m)}u_A, \\
&= \frac{(\vec{k}\cdot\vec{\sigma})^2}{(k^0)^2 - m^2}u_A.
\end{aligned} \tag{4.61}
$$

Ahora, tomando el numerador de la anterior ecuación y expresándolo de forma matricial resulta:

$$
\begin{aligned}
(\vec{k}\cdot\vec{\sigma})^2 &= \left[k_x\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} + k_y\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix} + k_z\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\right]^2\\
&= \begin{pmatrix}k_z & k_x - ik_y\\ k_x + ik_y & -k_z\end{pmatrix}^2\\
&= \begin{pmatrix}k_z & k_x - ik_y\\ k_x + ik_y & -k_z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_z & k_x - ik_y\\ k_x + ik_y & -k_z\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}k_z + k_x^2 - (ik_z)^2 & 0\\ 0 & k_x^2 - (ik_y)^2 + k_z^2\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}k_z + k_x^2 + k_z^2 & 0\\ 0 & k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\end{pmatrix},
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

concluyendo desde el numerador que:

$$
(\vec{k}\cdot\vec{\sigma})^2 = \begin{pmatrix}|\vec{k}|^2 & 0\\ 0 & |\vec{k}|^2\end{pmatrix} = |\vec{k}|^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \tag{4.63}
$$

De este modo u_A puede escribirse como:

$$
u_A = \frac{|\vec{k}|^2}{(k^0)^2 - m^2}u_A, \tag{4.64}
$$

y al multiplicar amos lados de la anterior ecuación por u_A^{-1} se tiene que:

$$
\begin{aligned}
\frac{|\vec{k}|^2}{(k^0)^2 - m^2} &= 1,\\
|\vec{k}|^2 &= (k^0)^2 - m^2,\\
(k^0)^2 - |\vec{k}|^2 &= m^2,
\end{aligned}
\tag{4.65}
$$

concluyendo del anterior resultado la siguiente ecuación:

$$
k^\mu k_\mu = m^2, \tag{4.66}
$$

de manera que para que $\psi(x) = e^{ikx}u(x)$ satisfaga la ecuación de Dirac, k^μ tiene que ser el cuadrimomento con momento al cuadrado igual a m^2, escrito de otra manera:

$$
k^\mu = \pm p^\mu, \tag{4.67}
$$

donde la solución positiva va ligada a los estados de partículas y la solución negativa va ligada a los estados de antipartículas.

A continuación se pueden construir cuatro soluciones independientes de la ecuación de Dirac, la primera usando a u_A con los valores:

$$u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4.68}$$

y sustituyéndola en:

$$u_B = \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p^0 + m} u_A, \tag{4.69}$$

donde además se tiene en cuenta que:

$$\vec{p} \cdot \vec{\sigma} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}, \tag{4.70}$$

llega a resultar la primera solución independiente así:

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{1}{p^0 + m} \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{p^0 + m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{4.71}$$

siendo que $p^0 = E$:

$$u_B = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}. \tag{4.72}$$

De igual forma se puede demostrar que:

- Si u_A es:
$$u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_B = \frac{1}{E + m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \tag{4.73}$$
- Si u_B es:
$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_A = \frac{1}{E - m} \begin{pmatrix} p_z \\ p_x + ip_y \end{pmatrix}. \tag{4.74}$$
- Si u_B es:
$$u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_A = \frac{1}{E - m} \begin{pmatrix} p_x - ip_y \\ -p_z \end{pmatrix}. \tag{4.75}$$

Se ha de tener en cuenta que cuando se definió a u_A, se tomó la solución para partículas $k^\mu = p^\mu$ con $p^0 > 0$ y cuando se definió u_B se tomó la solución para antipartículas $k^\mu = -p^\mu$ con $-p^0 < 0$ obligando a tomar el signo menos. Para que esto sea consistente es necesario normalizar los espinores de manera que:

$$u^\dagger u = 2E, \tag{4.76}$$

donde:

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}, \quad y \quad u^\dagger = \begin{pmatrix} \alpha^* & \beta^* & \gamma^* & \delta^* \end{pmatrix}, \tag{4.77}$$

por lo que:

$$u^\dagger u = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2, \tag{4.78}$$

obteniendo como consecuencia las cuatro soluciones que siguen:

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}, \quad u^{(2)} = N \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}, \tag{4.79}$$

$$u^{(3)} = N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u^{(4)} = N \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.80}$$

donde N es una constante de normalización. Es importante ver que las soluciones $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ son consistentes y que las otras, $u^{(3)}$ y $u^{(4)}$ no, porque tienen energías negativas, lo cual requiere una nueva interpretación, lo que llevará a redefinirlas como $v^{(1)}$ y $v^{(2)}$ haciendo las consideraciones físicas que viene ahora. Anteriormente se había dicho que las cantidades E y $\vec{p}$ corresponden fisicamente a la energía y el momento de una partícula, particularmente los estados del electrón, lo cual es cierto para $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$, pero en el caso de $u^{(3)}$ y $u^{(4)}$ no se puede interprentar de la misma forma, pues no hay energías negativas, por lo que la manera adecuada de tratar este resultado es interpretando el signo menos como una antipartícula, en particular como estados de los positrones. La cuestión de expresar la solución de los positrones se resuelve haciendo un cambio de signos, tal que la función de onda puede escribirse así:

$$\psi(\vec{r}, t) = ae^{i(Et-\vec{p}\cdot\vec{r})}u(-E, -\vec{p}).$$

De acuerdo con la interpretación de Feynman-Stückelberg, la cual sugiere que una solución de energía negativa se puede entender como una partícula de energía negativa que se propaga hacia atrás en el tiempo o, de igual manera, como una antipartícula con energía positiva que se propaga hacia adelante en el tiempo, se definen los espinores $v^{(1)} = Nu^{(4)}(-E, -\vec{p})$ y $v^{(2)} = -Nu^{(3)}(-E, -\vec{p})$, por lo tanto:

$$v^{(1)} = Nu^{(4)}(-E, -\vec{p}) = N \begin{pmatrix} \frac{-p_x+ip_y}{-E-m} \\ \frac{p_z}{-E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{4.81}$$

$$v^{(2)} = -Nu^{(3)}(-E, -\vec{p}) = -N \begin{pmatrix} \frac{-p_z}{-E-m} \\ \frac{-p_x - ip_y}{-E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -N \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x + ip_y}{E+m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.82}$$

Es decir, los espinores $u^{(1)}$ y $u^{(2)}$ representan los dos estados de espín de los electrones con energía E y momento $\vec{p}$ y los espinores $v^{(1)}$ y $v^{(2)}$ representan los dos estados de espín de los positrones con energía E y momento $\vec{p}$. Ya con esto definido se puede encontrar la constante de normalización, cuyo cálculo se encuentra en el apéndice A, y la cual es igual a:

$$N = \sqrt{E+m}. \tag{4.83}$$

En consecuencia, las funciones de onda para los estados de partícula y antipartícula serán respectivamente:

$$\psi = ae^{-ip\cdot x}u, \tag{4.84}$$

$$\psi = ae^{ip\cdot x}v, \tag{4.85}$$

y de las ecuaciones (4.55) y (4.67) se obtienen dos ecuaciones de Dirac, una para partículas y otra para antipartículas, respectivamente:

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)u = 0 \quad \rightarrow \quad (\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0, \tag{4.86}$$

$$(\gamma^\mu k_\mu - m)u = 0 \quad \rightarrow \quad (\gamma^\mu(-p_\mu) - m)v = 0 \quad \rightarrow \quad (\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0, \tag{4.87}$$

es decir, las ecuaciones de Dirac se satisfacen en el espacio de momentos, y en resumen:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)u = 0, \tag{4.88}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu + m)v = 0. \tag{4.89}$$

4.2.3. Covariantes bilineales

A pesar de que los espinores de Dirac tienen la forma de un cuadrivector sus componentes no transforman como tal cuando se va de un sistema inecial a otro. Sea un sistema que se mueve con velocidad v en la dirección x, la regla de transformación es:

$$\psi \rightarrow \psi' = S\psi, \tag{4.90}$$

donde S es una matrix de transformación con tamaño 4×4, cuyas componentes son:

$$S = \begin{pmatrix} a_+ \mathbb{I}_{2\times 2} & a_- \sigma_1 \\ a_- \sigma_{1\times 1} & a_+ \mathbb{I}_{2\times 2} \end{pmatrix}, \tag{4.91}$$

siendo:

$$a_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{\gamma \pm 1}{2}}, \quad \text{donde} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{4.92}$$

Esta matriz no es ortogonal ni unitaria, es decir:

$$S^{\dagger}S = \gamma \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{2\times 2} & -\frac{v}{c}\sigma_1 \\ -\frac{v}{c}\sigma_1 & \mathbb{I}_{2\times 2} \end{pmatrix} \neq 1, \tag{4.93}$$

lo que implica que el producto de los siguientes espinores no es invariante:

$$\psi^{\dagger} \cdot \psi = \psi^{\dagger}\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \tag{4.94}$$

A partir de la la regla de transformación (4.90) se puede hacer el producto de un espinor de Dirac en un marco de referencia de coordenadas x' por otro en el mismo marco pero traspuesto conjugado, así:

$$(\psi')^{\dagger}\psi' = (S\psi)^{\dagger}(S\psi) = \psi^{\dagger}S^{\dagger}S\psi, \tag{4.95}$$

por lo tanto el producto de un espinor de Dirac en un marco de referencia de coordenadas x' con otro espinor de Dirac en el mismo marco de referencia, pero traspuesto conjugado, no es invariante, eso por (4.93). Una de las propiedades que satisface S es:

$$S^{\dagger}\gamma^0 S = \gamma^0. \tag{4.96}$$

Para poder continuar es necesario definir el espinor de Dirac adjunto como:

$$\bar{\psi} = \psi^{\dagger}\gamma^0 = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & \psi_3^* & \psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & -\psi_3^* & -\psi_4^* \end{pmatrix}, \tag{4.97}$$

cuyas consecuencias son inmediatas, como se ve a continuación, cuando se hace el producto de un espinor de Dirac y otro espinor, pero adjunto y usando el resultado de la misma definición:

$$\bar{\psi}\psi = \begin{pmatrix} \psi_1^* & \psi_2^* & -\psi_3^* & -\psi_4^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 - |\psi_3|^2 - |\psi_4|^2, \tag{4.98}$$

siendo el resultado invariante, a esta expresión, donde se suman dos cantidades y se resta la suma de otras dos se le conoce como escalar de Lorentz. Otra de las consecuencias es que si

se toma un marco referencia de coordenadas x' y si a esto le sigue la regla de transformación (4.90) en conjunto con la definición (4.96) resulta:

$$(\bar{\psi}\psi)' = \bar{\psi}'\psi' = \psi'^{\dagger}\gamma^0\psi' = (S\psi)^{\dagger}\gamma^0 S\psi = \psi^{\dagger}S^{\dagger}\gamma^0 S\psi = \psi^{\dagger}\gamma^0\psi = \bar{\psi}\psi, \tag{4.99}$$

la cual es una cantidad escalar y además invariante relativista.

De otro lado es importante definir lo que son las *cantidades escalares* y las *cantidades pseudoescalares*. Siendo clasificadas de acuerdo a cómo transforman bajo paridad. Si ocurre que:

$$P : (x, y, z) \to (-x, -y, -z), \tag{4.100}$$

entonces se dice que son *cantidades pseudoescalares* y si no cambian de signo bajo la transformación de paridad, entonces son escalares. Es necesario estudiar si los espinores de Dirac o cantidades que los involucran transforman o no bajo paridad y cómo lo hacen , tal sea el caso de $\bar{\psi}\psi$. Aparte de eso se hace necesario exigir la covarianza de Lorentz de la ecuación de Dirac, es decir:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0 \quad \to \quad (i\gamma'^{\mu}\partial'_{\mu} - m)\psi' = 0, \tag{4.101}$$

aquí se va a aplicar la regla de transformación (4.90) y además, se debe tener en cuenta que la derivada parcial covariante que implícitamente involucra una transformación de coordenadas:

$$\partial'_{\mu} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\Lambda^{-1})_{\mu'}{}^{\nu}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} = (\Lambda^{-1})_{\mu'}{}^{\nu}\partial_{\nu}. \tag{4.102}$$

Al sustituir estos resultados en la parte derecha de la ecuación (4.101) se tiene:

$$(i\gamma'^{\mu}(\Lambda^{-1})_{\mu'}{}^{\nu}\partial_{\nu} - m)S\psi = 0, \tag{4.103}$$

si se multiplica a la ecuación anterior por SS^{-1} en su lado izquierdo resulta:

$$SS^{-1}(i\gamma'^{\mu}(\Lambda^{-1})_{\mu'}{}^{\nu}\partial_{\nu} - m)S\psi = 0, \tag{4.104}$$

$$S(iS^{-1}\gamma'^{\mu}S(\Lambda^{-1})_{\mu'}{}^{\nu}\partial_{\nu} - m)\psi = 0, \tag{4.105}$$

$$(iS^{-1}\gamma'^{\mu}S(\Lambda^{-1})_{\mu'}{}^{\nu}\partial_{\nu} - m)\psi = 0, \tag{4.106}$$

donde para que la Ecuación de Dirac sea invariante ha de exigirse que:

$$S^{-1}\gamma'^{\mu}S(\Lambda^{-1})_{\mu'}{}^{\nu} = \gamma^{\mu}, \tag{4.107}$$

y haciendo el renombramiento de índices $'\mu = \mu' = \mu$ y teniendo en cuenta la siguiente definición:

$$(\Lambda^{-1})_{\mu}{}^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu}, \tag{4.108}$$

resulta la ecuación cuyas cuatro soluciones, debido a que $\mu = \nu = 0, 1, 2, 3.$, garantizan la covarianza de Lorentz de la Ecuación de Dirac:

$$S^{-1}\gamma^{\mu}S\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = \gamma^{\nu}. \tag{4.109}$$

Una vez garantizada la covarianza de la Ecuación de Dirac ya se puede estudiar como transforman bajo paridad los espinores de Dirac. Para ello se parte de las transformaciones impropias de Lorentz, en particular la reflexión espacial:

$$\vec{x}' = -\vec{x} \qquad t' = t.$$

Esta transformación, por covarianza, requiere una solución de la ecuación (4.109), donde es posible llevar a cabo la transformación de paridad si solo se toman los elementos de la diagonal, por tanto la matriz será:

$$\Lambda^{\nu}{}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g^{\nu}{}_{\mu}. \tag{4.110}$$

Ahora, para la reflexión de coordenadas se hace $S = P$, por lo tanto la ecuación (4.109) se reescribe así:

$$P^{-1}\gamma^{\mu}Pg^{\nu}{}_{\mu} = \gamma^{\nu}, \tag{4.111}$$

donde la única posibilidad es que $\mu = \nu$, así que resultan las ecuaciones:

$$P^{-1}\gamma^{0}P = \gamma^{0}, \quad \mu = \nu = 0, \tag{4.112}$$

$$P^{-1}\gamma^{i}P = -\gamma^{i}, \quad \mu = \nu = i = 1, 2, 3., \tag{4.113}$$

o mejor escritas quedan:

$$\gamma^{0}P = P\gamma^{0}, \tag{4.114}$$

$$\gamma^{i}P = -P\gamma^{i}. \tag{4.115}$$

Se evidencia que de las anteriores dos ecuaciones la primera conmuta y la segunda anticonmuta, por tanto se hace que $P = \gamma^0$. Esto no es una elección arbitraria, puesto que en la Ecuación de Dirac, cuando se lleva a cabo la reflexión espacial o aplicación del operador de paridad la coordenada temporal mantiene su signo mientras que la espacial, al tener que conmutar γ^0 con γ^i, lo cambia, de modo que el espinor de Dirac para ser invariante necesariamente debe cumplir la transformación:

$$\psi' = \gamma^{0}\psi. \tag{4.116}$$

En base a esto se puede hacer que el siguiente producto de espinores transforme de la siguiente manera:

$$(\bar{\psi}\psi)' = \bar{\psi}'\psi' = (\psi')^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^{0^\dagger}\gamma^0\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^0\psi = \bar{\psi}\psi, \quad (4.117)$$

mostrando lo que se había afirmado antes, que este producto de espinores es invariante bajo transformación de paridad y por tanto es una cantidad escalar. Pero no solo hay de este tipo de cantidades, también las hay cantidades pseudoescalares, axiales, vectoriales y tensoriales, resultado del sándwich de matrices gamma entre el producto de espinores bilineales que son formas bilineales linealmente independientes, tal como $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ la cual bajo paridad transforma así:

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\gamma^5\psi)' = \bar{\psi}'\gamma^5\psi' = (\psi')^\dagger\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^{0^\dagger}\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi \\ = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\gamma^5\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^5\gamma^0\psi, \quad (4.118)\end{aligned}$$

como γ^5 es:

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (4.119)$$

entonces el producto de $\gamma^0\gamma^5$ será:

$$\begin{aligned}\gamma^5\gamma^0 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^0 = (-1)i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^0\gamma^3 = (-1)^2 i\gamma^0\gamma^1\gamma^0\gamma^2\gamma^3 \\ = (-1)^3\gamma^0(i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3) = -\gamma^0\gamma^5, \quad (4.120)\end{aligned}$$

y por tanto al usar este resultado en la ecuación (4.118) se obtiene:

$$(\bar{\psi}\gamma^5\psi)' = -\psi^\dagger\gamma^0\gamma^5\psi = -\bar{\psi}\gamma^5\psi, \quad (4.121)$$

donde el signo menos indica que esta cantidad es pseudoescalar. Otra forma bilineal es $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ la cual se divide en dos casos, uno para $\mu = 0$ y otro para $\mu \neq 0$, como se ve a continuación cuando transforma:

$$\begin{aligned}(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi)' = \bar{\psi}'\gamma^\mu\psi' = (\psi')^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\psi' = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi \\ = \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\gamma^\mu\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^\mu\gamma^0\psi, \quad (4.122)\end{aligned}$$

lo cual resulta en:

$$\psi^\dagger\gamma^\mu\gamma^0\psi = \begin{cases} \psi^\dagger\gamma^0\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma^0\psi & \mu = 0 \\ \psi^\dagger\gamma^i\gamma^0\psi = -\bar{\psi}\gamma^i\psi & \mu \neq 0 \end{cases}, \quad (4.123)$$

que es como transforma un vector, llamándose por tanto cantidad vectorial y tiene cuatro componentes. También está la forma bilineal $\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi$, la cual hace uso de la definición:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu), \quad \text{donde} \quad \sigma^{\mu\nu} = (\sigma^{\mu\nu})^\dagger, \quad (4.124)$$

y para demostrar como transforma procedemos así:

$$(\bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi)' = (\psi')^\dagger\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\psi' = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0\psi = \bar{\psi}\gamma^0\sigma^{\mu\nu}\gamma^0\psi$$
$$= \bar{\psi}[(-1)(\sigma^{\mu\nu})^\dagger]\psi = \bar{\psi}\sigma^{\mu\nu}\psi, \quad (4.125)$$

de esta manera se puede ver que la cantidad transformó como un tensor, por tanto se la conoce como cantidad tensorial. La última de las formas bilineales que se pueden construir es $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi$, esta cantidad bajo las transformaciones de Lorentz transforma como vector, y bajo paridad transforma como:

$$(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi)' = (\psi')^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma_5\psi' = (\gamma^0\psi)^\dagger\gamma^0\gamma^\mu\gamma_5\gamma^0\psi = \psi^\dagger\gamma^\mu\gamma_5\gamma^0\psi, \quad (4.126)$$

donde al usar el resultado antes visto: $\gamma^0\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^0$, se tiene que:

$$\psi^\dagger\gamma^\mu\gamma_5\gamma^0\psi = (-1)\psi^\dagger\gamma^\mu\gamma^0\gamma_5\psi = \begin{cases} -\bar{\psi}\gamma^0\gamma_5\psi & \mu = 0 \\ \bar{\psi}\gamma^i\gamma_5\psi & \mu \neq 0 \end{cases}, \quad (4.127)$$

de manera que a esta cantidad se le conoce como un vector axial.

4.3. El fotón

Las ecuaciones de Maxwell determinan los campos eléctricos y magnéticos que son consecuencia directa de la densidad de la densidad de carga ρ y la densidad de corriente J. En 1873 J.C. Maxwell propuso las cuatro ecuaciones que condensaron la teoría electromagnética, estas son:

$$\nabla \cdot E = 4\pi\rho, \tag{4.128}$$

$$\nabla \cdot B = 0, \tag{4.129}$$

$$\nabla \times E + \frac{\partial B}{\partial t} = 0, \tag{4.130}$$

$$\nabla \times B - \frac{\partial E}{\partial t} = 4\pi J. \tag{4.131}$$

Las componentes de los campos eléctricos y magnéticos, en notación relativista, pueden formar un tensor de segundo rango llamado *tensor electromagnético* que es antisimétrico y está definido como sigue:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.132}$$

y cumple como se había dicho antes con:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}, \tag{4.133}$$

además la densidad de corriente y de carga forman parte de un único cuadrivector que se escribe así:

$$J^{\mu} = (\rho, J). \tag{4.134}$$

Las ecuaciones de Maxwell que son ecuaciones diferenciales pueden formar dos grupos, (4.128 y 4.131) y (4.129 y 4.130), para clasificarse en homogéneas e inhomogéneas respectivamente. Estos dos grupos, cada uno con dos ecuaciones, se reducen a una ecuación por cada grupo en la formulación covariante, tal como se presenta a continuación:

$$\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 4\pi J^{\nu}, \tag{4.135}$$

$$\partial_{\alpha} \left(\frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\lambda\mu\nu} F_{\mu\nu} \right) = 0. \tag{4.136}$$

Ahora, si a la ecuación (4.135) se le aplica el operador de divergencia se tiene que:

$$\partial_{\nu}\partial_{\mu} F^{\mu\nu} = 4\pi \partial_{\nu} J^{\nu},$$

$$\frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} = 4\pi\partial_\nu J^\nu, \tag{4.137}$$

y en el segundo término de lado izquierdo de la ecuación se hace el cambio en los índices $\mu \to \nu$, por lo tanto lo anterior queda como:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\partial_\nu\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\partial_\mu\partial_\nu F^{\nu\mu} &= 4\pi\partial_\nu J^\nu, \\
\frac{1}{8\pi}\partial_\nu\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} + F^{\nu\mu}\right) &= \partial_\nu J^\nu, \\
\frac{1}{8\pi}\partial_\nu\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} - F^{\mu\nu}\right) &= \partial_\nu J^\nu, \\
\partial_\nu J^\nu &= 0.
\end{aligned} \tag{4.138}$$

Este resultado dice que la divergencia del cuadrivector de corriente es cero, y también lleva directamente a la ecuación de continuidad la cual implica la conservación local de la carga. De modo que explícitamente:

$$\partial_\nu J^\nu = \frac{\partial J^0}{\partial x^0} + \frac{\partial J^i}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0. \tag{4.139}$$

De otro lado, para las ecuaciones homogéneas de Maxwell se puede definir un potencial escalar o vectorial cuyo rotor sea igual al campo magnético, así:

$$B = \nabla \times A, \tag{4.140}$$

lo cual es válido pues se sigue cumpliendo la ecuación (4.129) porque la divergencia del rotor de un potencial vectorial es cero, o mejor:

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0. \tag{4.141}$$

De este modo la ecuación de Faraday-Maxwell o (4.130) puede reescribirse en términos del potencial A:

$$\nabla \times E + \frac{\partial(\nabla \times A)}{\partial t} = \nabla \times E + \nabla \times \frac{\partial A}{\partial t} = \nabla \times \left(E + \frac{\partial A}{\partial t}\right) = 0, \tag{4.142}$$

y como consecuencia se tiene que el argumento al cual se aplica el rotacional debe ser el gradiente de algún potencial escalar que se define como V, de forma que:

$$-\nabla V = E + \frac{\partial A}{\partial t}, \tag{4.143}$$

$$E = -\nabla V - \frac{\partial A}{\partial t}. \tag{4.144}$$

La formulación covariante de las ecuaciones (4.140) y (4.144) deviene en una reescritura de $F^{\mu\nu}$, por lo tanto:

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \tag{4.145}$$

donde el A^μ es un cuadripotencial que contiene tanto un potencial escalar como uno vectorial, así:

$$A^\mu = (V, \mathbf{A}). \tag{4.146}$$

Y esta formulación permite una modificación de la ecuación (4.135), la cual queda en términos del cuadripotencial A^μ, de modo que:

$$\begin{aligned} \partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= 4\pi J^\nu, \\ \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu &= 4\pi J^\nu, \end{aligned} \tag{4.147}$$

quedando mejor organizada de la siguiente forma:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu(\partial_\mu A^\mu) = 4\pi J^\nu. \tag{4.148}$$

En la teoría electromagnética todo lo que hay son campos eléctricos y magnéticos, es decir, estos hacen parte de la realidad física, pero los potenciales no hacen parte de ella, por lo tanto son herramientas matemáticas. Es posible abstraer a los potenciales escalares y vectoriales en un único cuadrivector A^μ como anteriormente se lo hizo. A estos potenciales puede sumarse el gradiente de una función cualquiera $\lambda = \lambda(x, t)$ sin que esta transformación afecte la invarianza de $F^{\mu\nu}$ que a continuación se va a demostrar. El problema de los potenciales es su valor indeterminado, y un primer paso para intentar darles un valor es hacer lo que sigue:

$$A'^\mu = A^\mu + \nabla\lambda. \tag{4.149}$$

Esta definición al aplicarse a $F^{\mu\nu}$ resulta en:

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} &= \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu \\ &= \partial^\mu(A^\nu + \nabla\lambda) - \partial^\nu(A^\mu + \nabla\lambda) \\ &= \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \nabla\lambda - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \nabla\lambda \\ &= \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \\ &= F^{\mu\nu}, \end{aligned} \tag{4.150}$$

lo que indica, tal como se había argumentado, que el tensor electromagnético es invariante bajo esta escogencia de potencial. Tal cambio de potenciales que no tiene efecto sobre los campos se llama *transformación de gauge*. Como se quiere dar un peso extra a esta transformación gauge se va a imponer lo que se conoce como *gauge de Lorentz* que es:

$$\partial_\mu A^\mu = 0, \tag{4.151}$$

lo que permite un cambio en las ecuaciones de Maxwell covariantes e inhomogéneas (4.148) y simplificarlas todavías más, así:

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = 4\pi J^\nu,$$

siendo mejor expresar esta ecuación con el operador de d'Alembert de la siguiente forma:

$$\Box A^\nu = 4\pi J^\nu. \tag{4.152}$$

Aunque la expresión ya se encuentra bastante reducida todavía no se ha dado un valor fijo de A^μ por lo que puede tomar cual se quiera. Y por tanto son posibles más transformaciones siempre y cuando la función del gauge λ satisfaga la función de onda:

$$\Box \lambda = 0. \tag{4.153}$$

Sin embargo, todavía el cuadripotencial es indefinido y como consecuencia de esto se dan muchísimos grados de libertad, por lo que es necesario, para este caso, añadir otra condición con la que se corre el peligro de perder la covarianza de Lorentz de la teoría. Sea el caso del espacio vacío, donde la densidad de carga y de corriente es nula, se tiene que:

$$J^\mu = 0, \tag{4.154}$$

logrando con esto que la ecuación (4.152) sea igual a:

$$\Box A^\nu = 0, \tag{4.155}$$

la cual explícitamente será:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) A^\mu = 0. \tag{4.156}$$

En este punto se añade la condición adicional que sujeta el problema a un sistema inercial. Se toma $\mu = 0$ en A^μ y se establece que:

$$A^0 = 0, \tag{4.157}$$

y además se define el *gauge de Coulomb* el cual hace que para $\mu = 1, 2, 3.$, se cumpla lo siguiente:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \tag{4.158}$$

De otro lado, en el vacío el gauge de Lorentz logra reducir las ecuaciones inhomogéneas llegando al punto de conseguir una ecuación de onda (4.155) sugiriendo que A^μ es una función de onda. Esta función es la función de onda para un fotón libre que también se puede relacionar directamente con la ecuación de Klein-Gordon para una partícula sin masa. Para la ecuación de Dirac se toman soluciones de onda plana:

$$A_\mu(x) = a e^{-ip\cdot x} \epsilon_\mu^{(s)}(p), \quad \text{con} \quad p^\mu = (E, \mathbf{p}), \tag{4.159}$$

donde a es la constante de normalización y $\epsilon_\mu^{(s)}$ el vector de polarización que lleva la información de la estructura del espacio de momentos y de los ejes en que va a oscilar el campo

del fotón con los estados de polarización $s = 1, 2.$; estos estados son ortogonales entre sí, es decir, $\epsilon_\mu^{(1)} \cdot \epsilon^{(2)\mu} = 0$, y además están normalizados $\epsilon_\mu \cdot \epsilon^\mu = -1$. Dado que $\Box = \partial_\mu \partial^\mu$ entonces al aplicar este operador en $A_\mu(x)$ da:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu \partial^\mu (a e^{-ip\cdot x} \epsilon_\nu^{(s)}(p)) &= 0, \\
\partial_\mu \left[a(-ip^\mu) e^{-ip\cdot x} \epsilon_\nu^{(s)}(p) \right] &= 0, \\
a(-ip_\mu)(-ip^\mu) e^{-ip\cdot x} \epsilon_\nu^{(s)}(p) &= 0, \\
-a p_\mu p^\mu e^{-ip\cdot x} \epsilon_\nu^{(s)}(p) &= 0,
\end{aligned}$$

de donde se tiene que para los fotones reales su masa en reposo es cero, y como consecuencia de este hecho:

$$p_\mu p^\mu = 0, \tag{4.160}$$

o también que:

$$p_\mu p^\mu = E^2 - |\mathbf{p}|^2 = 0, \tag{4.161}$$

siendo evidente la relación de disperción del fotón:

$$E = |\mathbf{p}|. \tag{4.162}$$

Si además se hace uso del gauge de Lorentz (4.151) resulta que:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu (a e^{-ip\cdot x} \epsilon^\mu(p)) &= 0, \\
a(-ip^\mu) e^{-ip\cdot x} \epsilon^\mu(p) &= 0,
\end{aligned}$$

lo que se cumple sí y solo sí:

$$p_\mu \epsilon^{(s)\mu}(p) = 0. \tag{4.163}$$

Y por último, aplicando el gauge de Coulomb se llega a que:

$$\epsilon^{(0)\mu} = 0, \tag{4.164}$$

$$\epsilon^i p_i = 0, \tag{4.165}$$

lo que implica que el vector de polarización ϵ del fotón es perpendicular a la dirección de propagación del mismo, entonces se dice que el fotón libre está transversalmente polarizado. Estos vectores de polarización satisfacen la relación de completitud:

$$\sum_{s=1,2} \epsilon_i^{(s)} \epsilon_j^{(s)*} = \delta_{ij}, \tag{4.166}$$

por ejemplo, si se toma la componente $i = j = 1$ y también la componente $i = j = 2$, entonces:

$$\sum_{s=1,2} \epsilon_1^{(s)} \epsilon_1^{(s)*} = \delta_{11} = 1, \tag{4.167}$$

$$\sum_{s=1,2} \epsilon_2^{(s)} \epsilon_2^{(s)*} = \delta_{22} = 1, \tag{4.168}$$

Y si el momento es $\mathbf{p} = (0, 0, p_z)$ el espacio de posibles ϵ es:

$$\epsilon^{(1)} = (1, 0, 0), \tag{4.169}$$

$$\epsilon^{(2)} = (0, 1, 0), \tag{4.170}$$

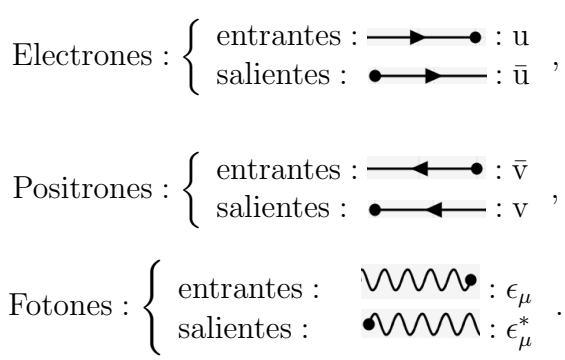
pues ambos satisfacen la ecuación (4.165). En este ejercicio se ve como de cuatro soluciones independientes quedan nada más dos. Una partícula de sin masa admite solo dos soluciones independientes.

4.4. Reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica

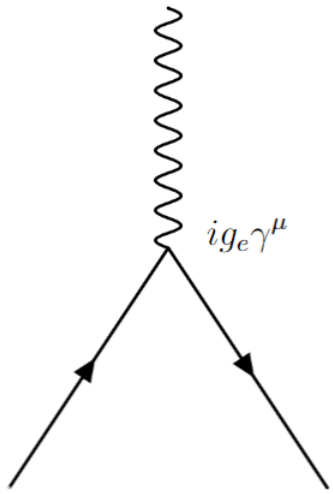
Las reglas de Feynman para la electrodinámica cuántica se toman de acuerdo con la referencia []. Para calcular la amplitud $\mathcal{M}$ asociada a algún diagrama de Feynman en particular se procede de acuerdo con las siguientes reglas:

1. Notación: para cada línea externa se asocia un momento $p_1, p_2, ..., p_n$ y se dibuja una flecha en la dirección positiva del tiempo. A cada línea interna se asocia un momento $q_1, q_2, ..., q_n$ y se dibuja una flecha al lado de la línea que indique la dirección posivita asignada arbitrariamente.

2. Líneas externas: las líneas externas aportan factores de la siguiente manera:



3. Factores de vértice: cada vértice contribuye con un factor:

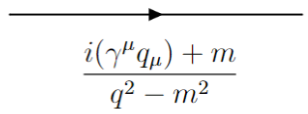


donde la constante de acoplamiento adimensional g_e está relacionada con la carga del electrón así:

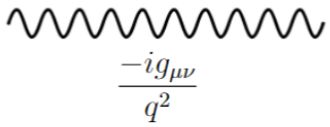
$$g_e = e\sqrt{\frac{4\pi}{\hbar c}} = \sqrt{4\pi\alpha}.$$

4. Propagadores: cada línea interna contribuye con un factor de la forma:

   - Electrones y positrones:



   - Fotones:



5. Conservación de energía y momento: para cada vértice se escribe una función delta de la forma:

$$(2\pi)^4\delta^4(k_1 + k_2 + k_3),$$

donde las k son tres cuadrimomentos que llegan al vértice (si una flecha apunta hacia afuera, entonces el cuadrimomento k lleva un signo menos).

6. Integrar sobre los momentos internos: por cada momento interno se escribe el factor:

$$\frac{d^4q}{(2\pi)^4},$$

   y se integra.

7. Cancelar la función delta: el resultado incluirá el factor δ global:

$$(2\pi)^4\delta^4(p_1 + p_2 + ... + p_n),$$

   correspondiente a la conservación total de energía-momento. Al cancelar este factor y multiplicar por i lo que queda es $\mathcal{M}$.

8. Antisimetrización: incluir un signo menos en los diagramas que difieren solo por un intercambio de dos electrones o positrones entrando o saliento o de un electrón entrante con un positrón saliente o al contrario, un positrón entrante y un electrón saliente.

Capítulo 5

Calculos de g-2 a un loop

La ecuación de Dirac no solo predice la existencia de las antipartículas, también predice una propiedad única de la física cuántica y que no tiene una cantidad con la cual compararla en la física clásica, esta es el momento magnético angular de espín. Tal característica de las partículas se pudo ver por vez primera en el experimento de Stern y Gerlach [29], donde al disparar un haz colimado de átomos neutros de plata hacia un campo magnético perpendicular ($\hat{z}$), el cual atravezaban, estos se desviaban y se agrupaban en dos puntos sobre la pantalla. Desde la mecánica cuántica no relativista y menos aún de la mecánica clásica, no se tenía ningún fundamento teórico para explicar el fenómeno, por lo que hasta el momento se tenía que:

$$\vec{\mu} = \left(\frac{e}{2m}\right)\vec{L}, \tag{5.1}$$

Hasta 1928, solo Uhlenbeck y Goudsmith habían sugerido un momento magnético de un magnetón de Bohr y el momento angular de espín igual a medio cuanto de energía. Sin embargo, solo se llegó a demostrar en la segunda parte del artículo *The Quantum Theory of the Electron II* de Dirac [21]. El momento magnético angular intrínseco de una partícula con medio espín era el doble del esperado en la física clásica:

$$\vec{\mu} = 2\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S}, \tag{5.2}$$

donde $\vec{S}$ es una cantidad asociada al momento angular intrínseco de giro de las partículas. Esto a comúnmente se expresa en términos de que la relación giromagnética $g = 2$:

$$\vec{\mu} = g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S}. \tag{5.3}$$

Pero no todo terminó allí, durante la cuantización de la electrodinámica se predijeron experimentalmente fluctuaciones cuánticas que desviaban el valor del momento magnético angular intrínseco de espín debido a que habían discrepancias en la medida de la constante de estructura fina lo cual indirectamente afectaba a la constante g, de modo que en artículos como [15, 16] demostraron que $g = 2$ era ahora $g - 2 \neq 0$. Citando textualmente a Bethe: *Schwinger, Weisskopf y Oppenheimer han sugerido que una posible explicación podría ser el*

cambio de niveles de energía por la interacción del electrón con el campo de radiación; es decir, ya se habían comenzado labores para dar una explicación teórica a la anomalía.

5.1. g-2 en el modelo estándar

Después de la determinación del momento magnético anómalo del electrón en 1948 por parte de Schwinger, Feynman y Tomonaga, y su confirmación experimental por parte de Foley y Kusch, León Lederman impulsó la idea de un nuevo experimento, pero esta vez haciendo uso de muones, sabiendo que al tratarse de partículas más pesadas el campo de las mismas tendría mayor efecto en sus propiedades. En 1958, Lederman se reunió con Gilberto Bernardini, director de investigación del CERN y le propuso el diseño para medir el $g-2$ con alta precisión, haciendo uso de la desintegración de piones polarizados que tienen la ventaja de que sus espines apuntan en la misma dirección permitiendo, cuando ya se los tienen muones en el acelerador, calcular alguna desviación de los mismos gracias a la violación de paridad que se observa en la dirección en que salen los electrones que son consecuencia de la desintegración de los muones.

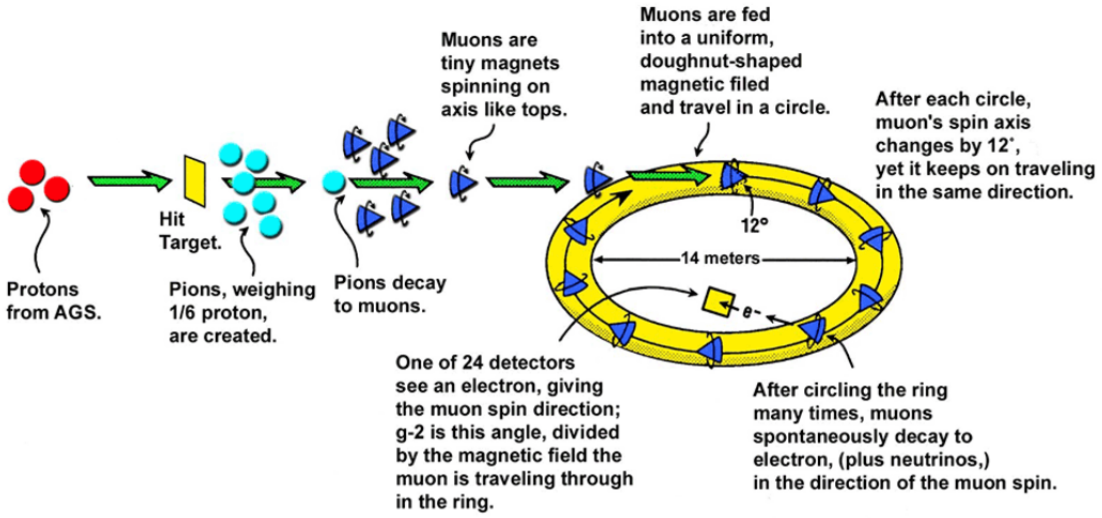


Figura 5.1: Esbozo del experimento g-2 propuesto por Lederman para el CERN donde se disparan piones cargados y polarizados que se desintegran en muones también polarizados. Imagen tomada de la pagina web de la colaboración BNL.

A pesar de que el experimento fue propuesto en 1958 solo se evidenciaron sus resultados en 1978 [11]. Los resultados teóricos ya habían mejorado mucho, de modo que el $(g-2)/2$ calculado era:

$$a_\mu^{teo} = 1165921(8.3) \times 10^{-9}, \tag{5.4}$$

con una confirmación experimental igual a:

$$a_\mu^{exp} = 1165924(8.5) \times 10^{-9}(7\text{ppm}). \tag{5.5}$$

Aunque aquí aparece una pequeña discrepancia, se creó en principio que se requería mayor precisión en el experimento, pero no dejó de pensarse que se debía a efectos de interacciones débiles o el acoplamiento anómalo del muón, bosones pesados neutros, contribuciones exóticas o modificaciones que debían hacerse en la EC. Para cerrar la discusión se llevó a cabo un nuevo experimento llamado (BNL) Muon E821 en el Brookhaven National Laboratory (BNL) con una precisión veinte veces que la medida de 1978, y comenzó a tomar datos en 1997 concluyénsose con su análisis y resultados en 2006 [13], se obtuvo:

$$a_\mu^{SM} = 11659185.7(8.0) \times 10^{-10}(0.69\text{ppm}), \tag{5.6}$$

con un resultado experimental igual a:

$$a_\mu^{exp} = 11659208.0(6.3) \times 10^{-10}(0.54\text{ppm}). \tag{5.7}$$

Existen dos resultados teóricos con los que se debe comparar, que representan dos evaluaciones ligeramente diferentes basadas en e^- y e^+ de la contribución de la polarización del vacío hadrónico de orden principal. La expectativa teórica debe compararse con nuestro resultado experimental. Pero esta vez ya se hace más evidente la anomalía, con una significancia en la desviación estándar de 2.2σ a 2.7σ. Y si la contribución débil no se tiene en cuenta, entonces la significancia de la desviación estándar aumenta a 3.7σ y 4.3σ. Esto indica que no se han tenido en cuenta todas las correcciones radiativas posibles y que existe una estructura de fondo que causa perturbaciones el muón.

El actual estado del arte [6] se definió en el último experimento que tuvo lugar en el FermiLab con la ventaja de que en el se puede producir un haz de muones más puro, aquí los resultados finales salieron a la luz en el 2021 [2], y fueron:

$$a_\mu^{SM} = 116591810(43) \times 10^{-11}(0.37\text{ppm}), \tag{5.8}$$

con un resultado experimental igual a:

$$a_\mu^{exp} = 116592061(41) \times 10^{-11}(0.35\text{ppm}). \tag{5.9}$$

cuyas consecuencias son enormes, pues la desviación esta vez es de $4{,}2\sigma$, lo que indica física más allá del modelo estándar y la necesidad de profundizar en el estudio de los leptones cargados. El a_μ^{SM} resultado de las contribuciones de la EC y las interacciones débiles y fuertes, se define así:

$$a_\mu^{SM} = a_\mu^{EC} + a_\mu^{\text{debil}} + a_\mu^{\text{hadronica}}. \tag{5.10}$$

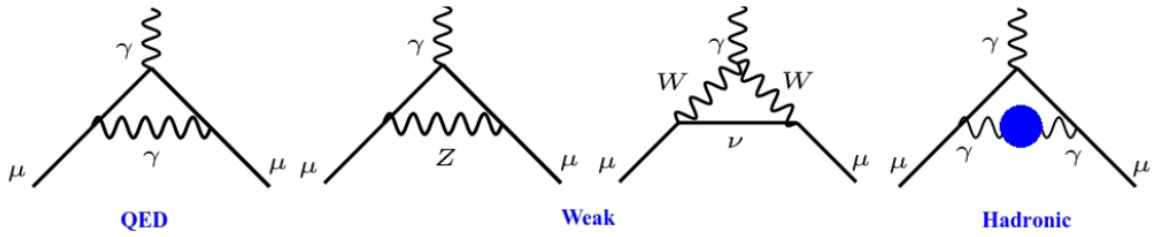


Figura 5.2: Correcciones en SM a orden más bajo para a_μ.

5.2. Cálculo del g-2 del muón a un loop en el ME.

El cálculo del momento magnético tiene un aporte a nivel arbol e infinitos aportes a nivel de loops, tal como se ve en la siguiente figura que ha sido tomada de [40]:

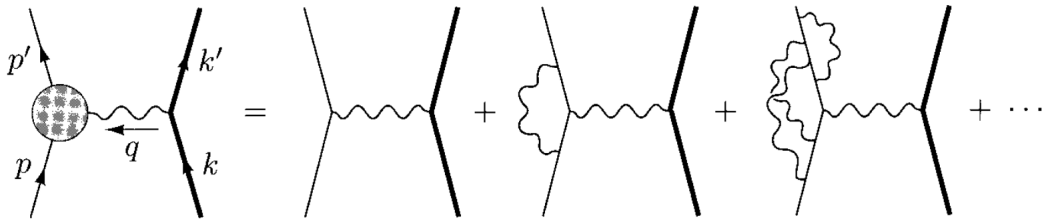


Figura 5.3: EC (correcciones radiativas): contribuciones a nivel árbol y a nivel de loops.

El estudio que corresponde al trabajo se centra al cálculo del momento magnético a un loop. Por lo tanto se va a considerar el diagrama:

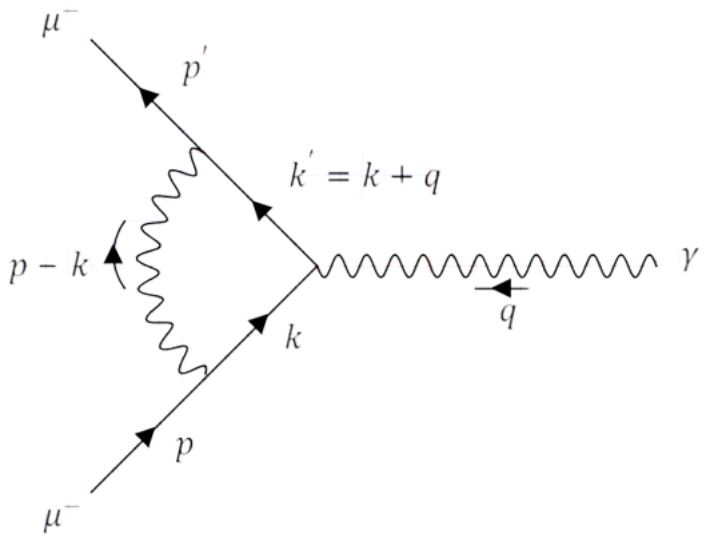


Figura 5.4: Representación diagramática de la amplitud en el proceso $\mu \to \mu\gamma$ en presencia de un fotón.

De las reglas de Feynman para la EC tenemos que:

- Hay tres momentos internos, por lo tanto los propagadores son:

$$\frac{i(\not{k}' + m)}{k'^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{5.11}$$

$$\frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\epsilon}, \tag{5.12}$$

$$\frac{-ig_{\nu\rho}}{q'^2 + i\epsilon}. \tag{5.13}$$

- Y cada vértice implica que:

$$(2\pi)^4\delta^4(p - k - q')(-ie\gamma^\nu), \tag{5.14}$$

$$(2\pi)^4\delta^4(k + q - k')(-ie\gamma^\mu), \tag{5.15}$$

$$(2\pi)^4\delta^4(q' + k' - p')(-ie\gamma^\rho). \tag{5.16}$$

- E integrando sobre cada momento indeterminado del loop:

$$\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}, \tag{5.17}$$

$$\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}, \tag{5.18}$$

$$\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \tag{5.19}$$

- Y para poder cancelar la función delta en el numerador en el cálculo de la amplitud se tiene que incluir el factor que corresponde a la conservación total de los momentos en el denominador.

$$(2\pi)^4\delta^4(q+p-p'). \tag{5.20}$$

La amplitud para la dispersión de muones es:

$$i\boldsymbol{M} = ie^2\left[\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p',p)u(p)\right]\frac{1}{q^2}\left[\bar{u}(k')\gamma_\mu u(k)\right], \tag{5.21}$$

donde a nivel árbol:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu, \tag{5.22}$$

pero a un loop δ:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu + \delta\Gamma^\mu, \tag{5.23}$$

como la suma de los diagramas de vértice es:

$$-ie\Gamma^\mu, \tag{5.24}$$

entonces:

$$-ie\Gamma^\mu = -ie\gamma^\mu - ie\delta\Gamma^\mu, \tag{5.25}$$

así que:

$$\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p',p)u(p), \tag{5.26}$$

queda:

$$-ie\bar{u}(p')\Gamma^\mu(p',p)u(p) = -ie\bar{u}(p')\gamma^\mu(p',p)u(p) - ie\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p), \tag{5.27}$$

siendo de principal interés calcular la cantidad no trivial δ que representa la anomalía del momento magnético del muón. Por lo tanto:

$$-ie\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p), \tag{5.28}$$

se puede calcular usando las reglas de Feynman y es el que corresponde a la contribución de un loop a la función de vértice del muón; de otro lado a $\bar{u}(p')\delta\Gamma^\mu(p',p)u(p)$, al cual llamaremos de ahora en adelante como $\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^\mu_{p',p}u_p$:

$$\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^{\mu}_{p',p}u_p = \int\int\int \bar{u}_{p'}(-ie\gamma^{\nu})\frac{i(\not{k}'+m)}{k'^2-m^2+i\epsilon}(-ie\gamma^{\mu})\frac{i(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\epsilon}(-ie\gamma^{\rho})\frac{-ig_{\nu\rho}}{q'^2+i\epsilon}u_p$$
$$\underline{(2\pi)^4\delta^4(p-k-q')(2\pi)^4\delta^4(k+q-k')(2\pi)^4\delta^4(q'+k'-p')}\,\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \quad (5.29)$$

Dado que en el diagrama $q' = p - k$ entonces podemos integral sobre la variable q', de modo que:

$$\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^{\mu}_{p',p}u_p = -e^3\int\int \bar{u}_{p'}\gamma^{\nu}\frac{(\not{k}'+m)}{k'^2-m^2+i\epsilon}\gamma^{\mu}\frac{(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\epsilon}\gamma^{\rho}\frac{g_{\nu\rho}}{(p-k)^2+i\epsilon}u_p$$
$$\underline{(2\pi)^4\delta^4(k+q-k')(2\pi)^4\delta^4(p-k+k'-p')}\,\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \quad (5.30)$$

El siguiente paso es integrar sobre $k' = k + q$, así:

$$\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^{\mu}_{p',p}u_p = -e^3\int \bar{u}_{p'}\gamma^{\nu}\frac{(\not{k}'+m)}{(k+q)^2-m^2+i\epsilon}\gamma^{\mu}\frac{(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\epsilon}\gamma^{\rho}\frac{g_{\nu\rho}}{(p-k)^2+i\epsilon}u_p$$
$$\underline{(2\pi)^4\delta^4(p-k+k+q-p')}\,\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \quad (5.31)$$

Se nota que las deltas se pueden simplificar al igual que los $(2\pi)^4$ y pasando los términos constantes de lado derecho al lado izquierdo queda:

$$\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^{\mu}_{p',p}u_p = -ie^2\int \bar{u}_{p'}\gamma^{\nu}\frac{(\not{k}'+m)}{(k+q)^2-m^2+i\epsilon}\gamma^{\mu}\frac{(\not{k}+m)}{k^2-m^2+i\epsilon}\gamma^{\rho}\frac{g_{\nu\rho}}{(p-k)^2+i\epsilon}u_p$$
$$\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \quad (5.32)$$

En la ecuación (5.32) se puede reescribir el numerador aplicando las propiedades de las matrices gamma, así:

$$\begin{aligned}\gamma^{\nu}(\not{k}'+m)\gamma^{\mu}(\not{k}+m)\gamma_{\nu} &= (\gamma^{\nu}\not{k}'+\gamma^{\nu}m)\gamma^{\mu}(\not{k}\gamma_{\nu}+\gamma_{\nu}m)\\ &= \gamma^{\nu}\not{k}'\gamma^{\mu}\not{k}\gamma_{\nu}+\gamma^{\nu}\not{k}'\gamma^{\mu}\gamma_{\nu}m+m\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\not{k}\gamma_{\nu}+m^2\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma_{\nu},\end{aligned} \quad (5.33)$$

y teniendo en cuenta que:

$$\gamma^{\nu}\gamma^{\mu}\gamma_{\nu} = -2\gamma^{\mu}, \quad (5.34)$$

$$\gamma^{\nu}\not{k}'\gamma^{\mu}\not{k}\gamma_{\nu} = -2\not{k}\gamma^{\mu}\not{k}', \quad (5.35)$$

$$\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\mu = 4g^{\nu\lambda}, \tag{5.36}$$

entonces (5.33) queda:

$$\gamma^\nu(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu = -2\not{k}\gamma^\mu\not{k}' + m\gamma^\nu(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k})\gamma_\nu - 2m^2\gamma^\mu. \tag{5.37}$$

Para el segundo término del lado derecho de la ecuacion (5.37) se hace:

$$m\gamma^\nu(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k})\gamma_\nu = m(\gamma^\nu\gamma^\epsilon k'_\epsilon\gamma^\mu\gamma_\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\epsilon k_\epsilon\gamma_\nu), \tag{5.38}$$

donde al aplicar la ecuación (5.36) resulta:

$$\begin{aligned} m\gamma^\nu(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k})\gamma_\nu &= m(4g^{\mu\epsilon}k'_\epsilon + 4g^{\epsilon\mu}k_\epsilon) \\ &= 4m(k'^\mu + k^\mu) \\ &= 4m(k' + k)^\mu, \end{aligned} \tag{5.39}$$

de manera que la ecuación (5.37) se escribe como:

$$\begin{aligned} \gamma^\nu(\not{k}' + m)\gamma^\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu &= -2\not{k}\gamma^\mu\not{k}' + 4m(k' + k)^\mu - 2m^2\gamma^\mu \\ &= -2[\not{k}\gamma^\mu\not{k}' - 2m(k' + k)^\mu + m^2\gamma^\mu], \end{aligned} \tag{5.40}$$

al sustituir este resultado (5.40 en (5.32) obtenemos:

$$\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^\mu_{p',p}u_p = -ie^2\int \bar{u}_{p'}\frac{-2[\not{k}\gamma^\mu\not{k}' - 2m(k' + k)^\mu + m^2\gamma^\mu]}{[(k+q)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon][(p-k)^2 + i\epsilon]}u_p\frac{d^4k}{(2\pi)^4}, \tag{5.41}$$

organizando finalmente (5.41) queda:

$$\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^\mu_{p',p}u_p = 2ie^2\int \frac{\bar{u}_{p'}[\not{k}\gamma^\mu\not{k}' - 2m(k' + k)^\mu + m^2\gamma^\mu]u_p}{[(k-p)^2 + i\epsilon][(k+q)^2 - m^2 + i\epsilon][k^2 - m^2 + i\epsilon]}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \tag{5.42}$$

La evaluación de esta integral requiere el uso de tecnología computacional conocida como los *Parámetros de Feynman*.

5.2.1. Parámetros de Feynman

Feynman desarrolló este truco con el objetivo de facilitar la solución de las integrales que aparecen seguidamente en la electrodinámica cuántica, y eso es justo lo que dice de este método [26]. Se debe reacomodar el denominador en una expresión más simple usando los parámetros de Feynman que como se verá más adelante reducirá los tres factores a uno solo

de potencia igual a tres para que luego se pueda tratar con la rotación de Wick y que la integral resultante sea una con simetría esférica. Sea la identidad:

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2} = \int_0^1 dxdy\delta(x+y-1)\frac{1}{(xA+yB)^2}, \tag{5.43}$$

que de forma generalizada es:

$$\frac{1}{A_1A_2...A_n} = \int_0^1 dx_1...dx_n\delta(x_1+...+x_n-1)\frac{(n-1)!}{(x_1A_1+x_2A_2+...+x_nA_n)^n}. \tag{5.44}$$

Dado que en el caso de la ecuación (5.42) se tiene un polinomio de grado 3 en el denominador, entonces $n = 3$, así que la identidad generalizada (5.44) se reduce a:

$$\frac{1}{ABC} = \int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{(3-1)!}{(xA+yB+zC)^3}, \tag{5.45}$$

por lo tanto el denominador de (5.42) al cual se le aplica esta transformación queda de la forma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{[(k-p)^2+i\epsilon][(k+q)^2-m^2+i\epsilon][k^2-m^2+i\epsilon]} \\ = 2\int_0^1 \frac{\delta(x+y+z-1)dxdydz}{[x(k^2-m^2+i\epsilon)+y(k'^2-m^2+i\epsilon)+z((k-p)^2+i\epsilon)]^3},\end{aligned} \tag{5.46}$$

y se define:

$$\frac{1}{[(k-p)^2+i\epsilon][(k+q)^2-m^2+i\epsilon][k^2-m^2+i\epsilon]} = 2\int_0^1 \frac{\delta(x+y+z-1)dxdydz}{D^3}, \tag{5.47}$$

donde se hizo:

$$D = x(k^2-m^2+i\epsilon)+y(k'^2-m^2+i\epsilon)+z((k-p)^2+i\epsilon), \tag{5.48}$$

el cual se puede organizar factorizando los $i\epsilon$ aparte:

$$D = x(k^2-m^2)+y(k'^2-m^2)+z(k-p)^2+(x+y+z)i\epsilon, \tag{5.49}$$

recordando que $k' = k + q$ y estableciendo la condición $x + y + z = 1$, se tiene:

$$D = x(k^2-m^2)+y((k+q)^2-m^2)+z(k-p)^2+i\epsilon, \tag{5.50}$$

y expandiendo para reorganizar términos:

$$\begin{aligned} D &= x(k^2 - m^2) + y((k+q)^2 - m^2) + z(k-p)^2 + i\epsilon \\ &= x(k^2 - m^2) + y(k^2 + 2k \cdot q + q^2 - m^2) + z(k-p)^2 + i\epsilon \\ &= (x+y+z)k^2 - (x+y)m^2 + 2k(yq - zp) + yq^2 + zp^2 + i\epsilon \\ &= k^2 - (x+y)m^2 + 2k(qy - pz) + yq^2 + zp^2 + i\epsilon, \end{aligned} \tag{5.51}$$

ahora se va completan cuadrados:

$$D = k^2 - (x+y)m^2 + 2k(yq - zp) + (yq - zp)^2 - (yq - zp)^2 + yq^2 + zp^2 + i\epsilon, \tag{5.52}$$

quedando:

$$D = [k + (yq - zp)]^2 - (x+y)m^2 - (yq - zp)^2 + yq^2 + zp^2 + i\epsilon, \tag{5.53}$$

y se procede definiendo la siguiente variable:

$$l = k + yq - zp, \tag{5.54}$$

así que al sustituir la ecuación (5.54) en la ecuación (5.53) nos da:

$$D = l^2 - (x+y)m^2 - (yq - zp)^2 + yq^2 + zp^2 + i\epsilon. \tag{5.55}$$

Ahora se elige el siguiente término para simplificarlo:

$$yq^2 + zp^2 - (x+y)m^2 - (yq - zp)^2. \tag{5.56}$$

Para simplificar esta expresión se debe tener en cuenta que por conservación de momento se satisface que $q + p - p' = 0$, así que:

$$p' = p + q,$$
$$p'^2 = (p+q)^2,$$

$$m^2 = p^2 + 2p \cdot q + q^2, \tag{5.57}$$

también, haciendo uso de los momentos externos dentro de la capa de masa se tiene que $p^2 = m^2$ y $p'^2 = m^2$, resultando:

$$m^2 = m^2 + 2p \cdot q + q^2$$

$$2p \cdot q = -q^2. \tag{5.58}$$

Finalmente, trabajando la ecuación (5.56) junto con la ecuación (5.58) se obtiene:

$$\begin{aligned} yq^2 + zp^2 - (x+y)m^2 - (yq - zp)^2 &= yq^2 + zp^2 - (x+y)m^2 - (y^2q^2 + yzq^2 + z^2p^2) \\ &= yq^2 + zp^2 - (x+y)m^2 - y^2q^2 - yzq^2 - z^2p^2 \\ &= yq^2(1-y-z) + z(1-z)m^2 - (1-z)m^2 \\ &= yxq^2 + (1-z)(z-1)m^2 \\ &= yxq^2 - (1-z)^2m^2, \end{aligned} \tag{5.59}$$

donde por conveniencia y para dejar el resultado tal como aparece en la referencia [40] se hace:

$$\Delta = -yxq^2 + (1-z)^2m^2, \tag{5.60}$$

con este resultado se escribe de manera más conveniente la expresión (5.55):

$$D = l^2 - \Delta + i\epsilon. \tag{5.61}$$

Teniendo en cuenta que q^2 es el cuadrado del cuadrimomento de un fotón, que en general se puede hacer diferente de cero $q = p' - p$, ya que no hay ninguna restricción cinematica esta diferencia de momentos puede tener cualquier valor, es usual que la energía inicial y final sean iguales y por lo tanto que q sea un cuadrivector de espacio, es decir, $q^2 < 0$. Esto es típico en procesos dispersivos donde se intercambia un fotón y es lo que se conoce como canal t. A $\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^{\mu}_{p',p}u_p$ se le aplicaron los *parámetros de Feynman* en su denominador, lo que permite reescribirlo de la forma:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{p'}\delta\Gamma^{\mu}_{p',p}u_p = 2ie^2 \int\int_0^1 2dxdydz\delta(x+y+z-1) \\ \frac{\bar{u}_{p'}[\not{k}\gamma^{\mu}\not{k}' - 2m(k'+k)^{\mu} + m^2\gamma^{\mu}]u_p}{D^3}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \tag{5.62}$$

Es importante notar que ahora D depende de l, y que l solo depende de potencias pares de l, de modo que el integrando es una función impar. Como estamos integrando sobre un intervalo simetrico respecto al origen, entonces la integral es cero:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{l^{\mu}}{D^3} = 0, \tag{5.63}$$

pero los términos cuadráticos da:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{l^{\mu}l^{\nu}}{D^3} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{\frac{1}{4}g^{\mu\nu}l^2}{D^3}, \tag{5.64}$$

estas expresiones son realmente identidades, y se definen en [40]. Como el denominador ya está en términos de l es pie de fuerza que el numerador también lo esté, por lo que teniendo

en cuenta las ecuaciones (5.63) y (5.64) procedemos a simplificarlo a partir de la ecuación (5.62), se define:

$$N^\mu = \not{k}\gamma^\mu\not{k}' - 2m(k'+k)^\mu + m^2\gamma^\mu. \tag{5.65}$$

Recordando que $k' = k + q$ y $l = k + yq - zp$, y analizando cada término de la ecuación (5.65) se procede con:

- $$\begin{aligned}\not{k}\gamma^\mu\not{k}' &= \gamma^\epsilon k_\epsilon\gamma^\mu\gamma^\delta k'_\delta \\ &= \gamma^\epsilon(l - yq + zp)_\epsilon\gamma^\mu\gamma^\delta(k+q)_\delta \\ &= \gamma^\epsilon(l - yq + zp)_\epsilon\gamma^\mu\gamma^\delta(l - yq + zp + q)_\delta \\ &= \gamma^\epsilon l_\epsilon\gamma^\mu\gamma^\rho l_\delta + \gamma^\epsilon(-yq + zp)_\epsilon\gamma^\mu\gamma^\rho[(1-y)q + zp]_\rho \\ &= \gamma^\epsilon l_\epsilon\gamma^\mu\gamma^\delta l_\delta + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu[(1-y)\not{q} + z\not{p}],\end{aligned}$$

  resulta:

$$\not{k}\gamma^\mu\not{k}' = \gamma^\epsilon l_\epsilon\gamma^\mu\gamma^\delta l_\delta + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu[(1-y)\not{q} + z\not{p}]. \tag{5.66}$$

- $$\begin{aligned}2m(k'+k)^\mu &= 2m(l - yq + zp + q + l - yq + zp)^\mu \\ &= 2m(2l - 2yq + 2zp + q)^\mu \\ &= 2m[2l + 2zp + (1-2y)q]^\mu \\ &= 2m(2l^\mu) + 2m[(1-2y)q^\mu + 2zp^\mu],\end{aligned}$$

  y aplicando las identidades (5.63) y

$$2m(k'+k)^\mu = 2m[(1-2y)q^\mu + 2zp^\mu]. \tag{5.67}$$

Así el numerador N^μ queda de la forma:

$$N^\mu = \gamma^\epsilon l_\epsilon\gamma^\mu\gamma^\delta l_\delta + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu[(1-y)\not{q} + z\not{p}] - 2m[(1-2y)q^\mu + 2zp^\mu] + m^2\gamma^\mu, \tag{5.68}$$

con el primer término del lado derecho de la ecuación (5.68) se puede aplicar la propiedad de anticonmutación de los γ:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\delta\} = 2g^{\mu\delta}, \tag{5.69}$$

se hace:

$$\gamma^\mu\gamma^\delta + \gamma^\delta\gamma^\mu = 2g^{\mu\delta},$$

$$\gamma^\mu\gamma^\delta = -\gamma^\delta\gamma^\mu + 2g^{\mu\delta}. \tag{5.70}$$

De modo que el primer término de lado derecho de la ecuación (5.68) queda:

$$\begin{aligned}
\gamma^\epsilon l_\epsilon \gamma^\mu\gamma^\delta l_\delta &= \gamma^\epsilon l_\epsilon(-\gamma^\delta\gamma^\mu + 2g^{\mu\delta})l_\delta \\
&= \not{l}(-\gamma^\mu\not{l} + 2g^{\mu\delta}l_\delta) \\
&= \not{l}(-\gamma^\mu\not{l} + 2l^\mu) \\
&= -\gamma\not{l}\not{l} + 2l^\mu\not{l} \\
&= -\gamma^\mu(\not{l})^2 + 2l^\mu\not{l} \\
&= -\gamma^\mu(\not{l})^2 + 2l^\mu l^\epsilon\gamma_\epsilon \\
&= -\gamma^\mu(\not{l})^2 + 2\left(\frac{g^{\mu\epsilon}l^2\gamma_\epsilon}{4}\right) \\
&= -\gamma^\mu l^2 + \frac{1}{2}l^2\gamma^\mu \\
&= -\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2,
\end{aligned} \tag{5.71}$$

concluyendo de aquí que:

$$\gamma^\epsilon l_\epsilon \gamma^\mu\gamma^\delta l_\delta = -\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2. \tag{5.72}$$

Así que el numerador finalmente no tiene dependencia explícita de k, y se reescribe a partir de los resultados (5.68) y 5.72 como:

$$N^\mu = -\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu[(1-y)\not{q} + z\not{p}] - 2m[(1-2y)q^\mu + 2zp^\mu] + m^2\gamma^\mu, \tag{5.73}$$

y $\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^\mu_{p',p}u_p$ puede expresarse así:

$$\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^\mu_{p',p}u_p = 2ie^2\int\int_0^1 2dxdydz\delta(x+y+z-1)\frac{\bar{u}_{p'}N^\mu u_p}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}. \tag{5.74}$$

De la integral (5.74) se procede a calcular el numerador $\bar{u}_{p'}N^\mu u_p$. Éste se puede reducir considerablemente haciendo uso de la invarianza de Lorentz. Dado que Γ^μ transforma como un vector, entonces debe ser una combinación lineal de los vectores γ^μ, p'^μ, p^μ, q^μ y que a su vez son una combinación de γ^μ y $i\sigma^{\mu\nu}q_\nu$, así que por conveniencia se va a encontrar la manera de escribir el numerador de la siguiente manera:

$$\Gamma^\mu = \gamma^\mu\cdot A + (p'^\mu + p^\mu)\cdot B + q^\mu\cdot C. \tag{5.75}$$

La forma (5.75) solo es posible si se usa la siguiente relacion de anticonmutación:

$$\not{p}\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu \not{p}, \tag{5.76}$$

y las ecuaciones de Dirac en el espacio de momentos:

$$\not{p} u_p = m u_p, \tag{5.77}$$

$$\bar{u}_{p'} \not{p}' = \bar{u}_{p'} m, \tag{5.78}$$

$$\bar{u}_{p'} \not{q} u_p = 0. \tag{5.79}$$

Partiendo de la siguiente ecuación:

$$\bar{u}_{p'} N^\mu u_p = \bar{u}_{p'} \{ -\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^\mu [(1-y)\not{q} + z\not{p}] - 2m[(1-2y)q^\mu + 2zp^\mu] + m^2\gamma^\mu \} u_p, \tag{5.80}$$

se obtiene siguiendo los pasos del apéndice B:

$$\bar{u}_{p'} N^\mu u_p = \bar{u}_{p'} \{ \gamma^\mu [-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2] + (p'^\mu + p^\mu) mz(z-1) + q^\mu \cdot m(z-2)(x-y) \} u_p, \tag{5.81}$$

en la anterior ecuación se aplica $q^\mu \Gamma^\mu = 0$, logrando que el término que lleva q^μ se elimine. Esta operación se argumenta en el apéndice C. Así (5.81) queda:

$$\bar{u}_{p'} N^\mu u_p = \bar{u}_{p'} \{ \gamma^\mu [-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2] + (p'^\mu + p^\mu) mz(z-1) \} u_p, \tag{5.82}$$

la cual se organiza convenientemente como:

$$\bar{u}_{p'} N^\mu u_p = \bar{u}_{p'} \{ \gamma^\mu [-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2] + \left(\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} \right) 2m^2 z(z-1) \} u_p, \tag{5.83}$$

ahora se requiere la identidad de Gordon:

$$\bar{u}_{p'} \gamma^\mu u_p = \bar{u}_{p'} \left(\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2m} \right) u_p, \tag{5.84}$$

siendo esta la que permite cambiar el término $p'^\mu + p^\mu$ por uno que involucre $\sigma^{\mu\nu} q_\nu$. , por eso se hace:

$$\bar{u}_{p'}\left(\gamma^{\mu}-\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}\right)u_p=\bar{u}_{p'}\left(\frac{p'^{\mu}+p^{\mu}}{2m}\right)u_p, \tag{5.85}$$

y sustituyendo la anterior ecuación (5.85) en (5.83), da:

$$\bar{u}_{p'}\{\gamma^{\mu}[-\frac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+(1-2z-z^2)m^2]+\left(\gamma^{\mu}-\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}\right)2m^2z(z-1)\}u_p,$$

$$\bar{u}_{p'}\{\gamma^{\mu}[-\frac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+(1-2z-z^2)m^2]+\gamma^{\mu}2m^2z(z-1)-\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}2m^2z(z-1)\}u_p,$$

$$\bar{u}_{p'}\{\gamma^{\mu}[-\frac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+(1-2z-z^2)m^2+2m^2z(z-1)]-\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}2m^2z(z-1)\}u_p,$$

$$\bar{u}_{p'}\{\gamma^{\mu}[-\frac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2+(1-4z+z^2)m^2]+\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}2m^2z(1-z)\}u_p,$$

y reemplazamos en (5.74) la ecuación (B.44) obtenida anteriormente:

$$\bar{u}_{p'}\delta\Gamma^{\mu}_{p',p}u_p=2ie^2\int\int_0^1 2dxdydz\delta(x+y+z-1)\bar{u}_{p'}\{\gamma^{\mu}[-\frac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2]+\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}2m^2z(1-z)\}u_p\frac{1}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}, \tag{5.86}$$

pudiendo escribir el resultado final como:

$$\Gamma^{\mu}(p',p)=\gamma^{\mu}F_1(q^2)+\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}F_2(q^2), \tag{5.87}$$

donde aparecen los factores de forma $F_1(q^2)$ y $F_2(q^2)$, los cuales corresponden a la carga del electrón y el momento magnético, respectivamente. Entonces, esta expresión es equivalente a:

$$\bar{u}_{p'}\Gamma^{\mu}(p',p)u_p=\bar{u}_{p'}\gamma^{\mu}F_1(q^2)u_p+\bar{u}_{p'}\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_{\nu}}{2m}F_2(q^2)u_p, \tag{5.88}$$

y comparando las ecuaciones (5.86) y (5.88), se deduce que:

$$F_1(q^2)=2ie^2\int\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)[-\frac{1}{2}l^2+(1-x)(1-y)q^2 + (1-4z+z^2)m^2]\frac{2}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}, \tag{5.89}$$

$$F_2(q^2)=2ie^2\int\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)m^2z(1-z)\frac{4}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}. \tag{5.90}$$

Como es de interés la anomalía se trabaja a $F_2(q^2)$

$$F_2(q^2)=2ie^2\int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)4m^2z(1-z)\int\frac{1}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}. \tag{5.91}$$

5.2.2. Rotación de Wick y eliminación de divergencias

Tomando la anterior ecuación (5.91), se hace notar que el momento l todavía está en el espacio de Minkowski:

$$\int \frac{1}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4} = \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{1}{(l^2-\Delta+i\epsilon)^3}. \tag{5.92}$$

Se había definido durante el cálculo del denominador que:

$$D = l^2 - \Delta + i\epsilon, \tag{5.93}$$

donde l es un cuadrivector cuyo cuadrado se puede expresar como el cuadrado de la componente temporal menos el cuadrado de la componente espacial, así que:

$$l^2 = l_0^2 - |\vec{l}|^2. \tag{5.94}$$

Es aquí donde se estudian los polos; especialmente los que serán útiles para definir la rotación de Wick. Entonces, son de importancia los l_0 donde $D = 0$, así:

$$\begin{aligned} D &= l_0^2 - |\vec{l}|^2 - \Delta + i\epsilon, \\ 0 &= l_0^2 - |\vec{l}|^2 + yxq^2 - (1-z)^2m^2 + i\epsilon, \\ l_0 &= \pm\sqrt{|\vec{l}|^2 - yxq^2 + (1-z)^2m^2 - i\epsilon}, \end{aligned} \tag{5.95}$$

en el anterior resultado se tiene:

$$\Delta = -yxq^2 + (1-z)^2m^2 > 0, \tag{5.96}$$

sabiendo esto se puede continuar. Por lo tanto:

$$l_0 = \pm\sqrt{|\vec{l}|^2 + \Delta - i\epsilon}, \tag{5.97}$$

reescribiéndo esta ecuación (5.97) como:

$$\begin{aligned} l_0 &= \pm\sqrt{(|\vec{l}|^2+\Delta)\left(1 - \frac{i\epsilon}{|\vec{l}|^2+\Delta}\right)} \\ &\approx \pm\sqrt{(|\vec{l}|^2+\Delta)}\left(1 - \frac{i}{2}\frac{\epsilon}{|\vec{l}|^2+\Delta}\right), \quad \text{se hace:} \quad \epsilon' = \frac{\epsilon}{2(|\vec{l}|^2+\Delta)} \\ &\approx \pm\sqrt{(|\vec{l}|^2+\Delta)}(1-i\epsilon'), \end{aligned} \tag{5.98}$$

y redefiniendo $\epsilon' = \epsilon$ la cual tiene como soluciones:

$$l_0 = +\sqrt{(|\vec{l}|^2 + \Delta)}(1 - i\epsilon), \tag{5.99}$$

$$l_0 = -\sqrt{(|\vec{l}|^2 + \Delta)}(1 - i\epsilon). \tag{5.100}$$

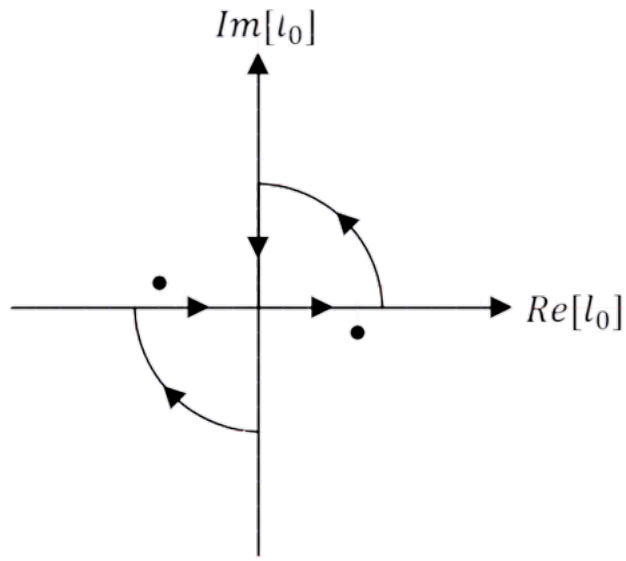


Figura 5.5: Rotación de Wick: el polo en el segundo cuadrante corresponde a $-\sqrt{(|\vec{l}|^2 + \Delta)}(1 - i\epsilon)$ y el polo en el cuarto cuadrante corresponde a $l_0 = -\sqrt{(|\vec{l}|^2 + \Delta)}(1 - i\epsilon)$.

Analíticamente se definen las integrales sobre los contornos que se van a llamar C_1 y C_2:

$$0 = \int_0^{\infty} dl_0 f(l_0) + \int_{C_1} dl_0 f(l_0) + \int_{+i\infty}^{0} dl_0 f(l_0), \tag{5.101}$$

$$0 = \int_{-\infty}^{0} dl_0 f(l_0) + \int_{C_2} dl_0 f(l_0) + \int_{0}^{-i\infty} dl_0 f(l_0), \tag{5.102}$$

Teniendo en cuenta que no hay ningun polo dentro del contorno y que los polos se encuentran en los cuadrantes inferior izquierdo y superior derecho del plano complejo l_0, la integral sobre el contorno de la figura 5.5 da cero, de ahí que las integrales sobre los ejes reales e imaginario son iguales y opuestas. Así al sumar (5.101) y (5.102), resulta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dl_0 f(l_0) + \int_{+i\infty}^{-i\infty} dl_0 f(l_0) = 0, \tag{5.103}$$

también, $l_0 = l_0^{\mathbb{R}} + i l_0^{\mathbb{I}}$, donde en el eje vertical $l_0^{\mathbb{R}} = 0$, así $l_0 = i l_0^{\mathbb{I}}$. De ahí que:

$$l_{0min} = +i\infty = il^{\mathbb{I}}_{0min}, \quad \text{entonces} \quad l^{\mathbb{I}}_{0min} = +\infty, \tag{5.104}$$
$$l_{0max} = -i\infty = il^{\mathbb{I}}_{0max}, \quad \text{entonces} \quad l^{\mathbb{I}}_{0max} = -\infty, \tag{5.105}$$

si se realiza el cambio de variable l_0 a $l^{\mathbb{I}}_0$:

$$d(l_0) = d(il^{\mathbb{I}}_0) = idl^{\mathbb{I}}_0, \tag{5.106}$$

la integral (5.103) queda:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dl_0 f(l_0) = -\int_{+\infty}^{-\infty} idl^{\mathbb{I}}_0 f(il^{\mathbb{I}}_0),$$

resultando:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dl_0 f(l_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} idl^{\mathbb{I}}_0 f(il^{\mathbb{I}}_0), \tag{5.107}$$

lo que se conoce como la *rotación de Wick* [50], la cual permite transformar cantidades del Espacio de Minkowski al Espacio Euclídeo. Si se hace $l^{\mathbb{I}}_0 = l^{\mathbb{E}}_0$ quedan bien definidos:

$$l_0 \equiv il^{\mathbb{E}}_0,$$
$$\vec{l} = \vec{l}_E,$$

donde $\mathbb{E}$ representa que se está trabajando en el Espacio Euclideo. Si usamos el resultado (5.107) en la ecuación (5.92) , tenemos que:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\epsilon)^3} = \int \frac{d^3l}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{idl^{\mathbb{E}}_0}{(l^2_{\mathbb{E}} - \Delta)^3}, \tag{5.108}$$

notando que la prescripción de Feynman $i\epsilon$ ya no es necesaria, puesto que la divergencia se eliminó cuando se tuvo en cuenta que $\Delta > 0$, y además se hizo $l^2_{\mathbb{E}} = (l^{\mathbb{E}}_0)^2 + |\vec{l}|^2$. De esta manera:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2_{\mathbb{E}} - \Delta)^3}, \tag{5.109}$$

la cual, siguiendo al libro de Peskin y Schroeder [40], tiene por solución:

$$\int \frac{d^dl_{\mathbb{E}}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l^2_{\mathbb{E}} - \Delta)^m} = \frac{i(-1)^m}{(4\pi)^2} \frac{1}{(m-1)(m-2)} \frac{1}{\Delta^{m-2}}, \tag{5.110}$$

por lo que (5.109) da:

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2_{\mathbb{E}} - \Delta)^3} = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta} = -\frac{i}{32\pi^2\Delta}, \tag{5.111}$$

y al sustituir este resultado en (5.91) se obtiene de momento:

$$F_2(q^2) = 2ie^2 \int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)4m^2z(1-z)\left(-\frac{i}{32\pi^2\Delta}\right). \tag{5.112}$$

5.2.3. Cálculo de la corrección radiativa a_μ

Si se observa la ecuación (5.112) en ella se encuentra el cuadrado de la carga del electrón, esta constante se puede relacionar con la constante de estructura fina que dice qué tan fuerte es la interacción electromagnética entre las partículas elementales cargadas, como lo son el muón (μ), electrón (e) y tau (τ), así:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \tag{5.113}$$

por lo que si se reemplaza este valor (5.113) en (5.112), da:

$$F_2(q^2) = 2i(4\pi\alpha) \int_0^1 dxdydz\delta(x+y+z-1)4m^2z(1-z)\left(-\frac{i}{32\pi^2\Delta}\right), \tag{5.114}$$

la cual se organiza para que tome la siguiente forma:

$$F_2(q^2) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{2m^2z(1-z)}{\Delta}\delta(x+y+z-1), \tag{5.115}$$

y al ser evaluada en $q^2 = 0$ resulta:

$$F_2(q^2=0) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{2m^2z(1-z)}{(1-z)^2m^2}\delta(x+y+z-1), \tag{5.116}$$

es decir:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz \frac{2z}{(1-z)}\delta(x+y+z-1), \tag{5.117}$$

ahora se reescribe la ecuación (5.117) así:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{2z}{(1-z)}\delta(x+y+z-1), \tag{5.118}$$

dado que las variables están evaluadas entre intervalos finitos, entonces debe aplicarse la siguiente definición:

$$\int_a^b \delta(x-t)dx = \theta(t-a)\theta(b-t), \tag{5.119}$$

en el caso de la ecuación (5.118) se tiene que $t = 1-y-z$, $b = 1$ y $a = 0$, así que:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz \int_0^1 dy\theta(1-y-z)\theta(y+z)\frac{2z}{(1-z)}$$
$$= \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz \int_0^1 dy\theta(1-y-z)\frac{2z}{(1-z)}, \quad (5.120)$$

como $1-y-z>0$ entonces, $1-z>y$. Por lo que y está entre $0<y<1-z$, concluyendo:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy\frac{2z}{(1-z)},$$

cuya solución es trivial:

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dz\frac{z(1-z)}{1-z} \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\int_0^1 dzz \\ &= \frac{\alpha}{\pi}\frac{z^2}{2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{\alpha}{2\pi}. \end{aligned}$$

Finalmente:

$$F_2(0) = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (5.121)$$

La expresión para el momento magnético del muón escrita en la forma estándar es:

$$\vec{\mu}_\mu = g\left(\frac{e}{2m}\right)\vec{S}, \quad (5.122)$$

donde $\vec{S}$ es el espín del muón y g es el factor de Landé dado por:

$$g = 2[F_1(0)+F_2(0)] = 2+2F_2(0), \quad (5.123)$$

el cual, con la ecuación (5.121), queda como:

$$g = 2+2\frac{\alpha}{2\pi} = 2+\frac{\alpha}{\pi}, \quad (5.124)$$

concluyendo:

$$\boxed{g = 2+\frac{\alpha}{\pi}}, \quad (5.125)$$

que es la correción del factor g del muón. Este resultado fue obtenido por Schwinger para el electrón, en 1948 [45, 46, 47]. Pero en general, para leptones cargados se tiene que:

$$g_l = 2(1 + a_\mu), \tag{5.126}$$

donde se define una nueva cantidad, y que es en base a la cual se hacen la mayoría de predicciones experimentales:

$$a_\mu = \frac{\alpha}{2\pi}. \tag{5.127}$$

Aquí se puede dar una primera visión de la primera medida teórica de Schwinger [45] y la primera medida experimental obtenida por Foley y Kusch [27] usando el leptón cargado de primera generación, el electrón. Sin tener en cuenta las contribuciones a más loops, ni tampoco las que se deben a las interacciones débiles y al aporte hadrónico el resultado fue:

$$a_{teo} = 0.001162 \tag{5.128}$$

$$a_{exp} = 0.001145 \pm 0.00004. \tag{5.129}$$

5.3. Corrección a g-2 por un campo escalar

En el modelo estándar el campo de Higgs no es suficiente para explicar la anomalía experimental en g-2. Sin embargo, si introducimos un nuevo campo escalar neutro, escogiendo apropiadamente los acoplamientos y la masa es posible ajustar los datos observados. En esta sección calcularemos la contribución al momento magnético anómalo por un campo escalar neutro, sin carga débil y sin carga de color.

El cálculo de la corrección va a comenzar por hacerse de manera general, de modo que en lugar de lograr que se reproduzca solo para el muón, se hará para cualquier leptón cargado que se va a definir como l. Ahora, con esto claro se procede a observar que si antes de la interacción del leptón l_i con el campo magnético, este emite una partícula escalar neutra y la reabsorbe más adelante, como se indica en la figura, entonces la contribución del campo escalar en lugar de la del fotón como se vio en el anterior capítulo afectará el valor de la amplitud total.

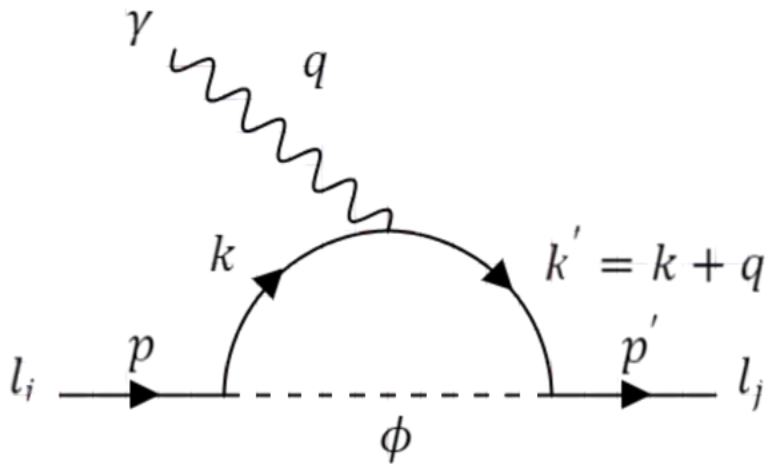


Figura 5.6: Diagrama de Feynman que representa la amplitud del proceso $l_i \to l_j\gamma$ en presencia del campo escalar neutro.

Para este caso el campo escalar va a contribuir con el siguiente propagador allí donde el fotón lo hacía con (5.13):

$$\frac{i}{(p-k)^2 - m_\phi^2} = \frac{i}{q'^2 - m_\phi^2}, \tag{5.130}$$

donde m_ϕ es la masa de la partícula escalar neutra con la que se trabaja. Ahora, el Lagrangiano de interacción para este modelo tiene la forma:

$$\mathcal{L}_{int} = g_{s1}^{ij}\phi\bar{l}_i l_j + i g_{p1}^{ij}\phi\bar{l}_i\gamma^5 l_j, \tag{5.131}$$

Por la presencia del γ^5 el acomplamiento izquierdo no es igual al acomplamiento derecho y por lo tanto no es quiral. Entonces el vértice de interacción en el diagrama de Feynman que representa la amplitud se puede inferir de allí:

$$g_{s1}^{ij}\phi\bar{l}_i l_j + i g_{p1}^{ij}\phi\bar{l}_i\gamma^5 l_j = \phi\bar{l}_i(g_{s1}^{ij} + i g_{p1}^{ij}\gamma^5) l_j, \tag{5.132}$$

y en consecuencia con esto se procede a contruir la integral de la función de vértice $\Gamma^\mu_{p'_j,p_i}$ que se ve a continuación:

$$\begin{aligned} -ie\bar{u}_{p'_j}\Gamma^\mu_{p'_j,p_i}u_{p_i} = \int \bar{u}_{p'_j} i(g_{s1}^{jf} + i g_{p1}^{jf}\gamma^5)\frac{i(\not{k}' + m_f)}{k'^2 - m_f^2 + i\epsilon}(-ie\gamma^\mu)\frac{i(\not{k} + m_f)}{k^2 - m_f^2 + i\epsilon} i(g_{s1}^{fi} + i g_{p1}^{fi}\gamma^5) \\ u_{p_i}\frac{i}{q'^2 - m_\phi^2}(2\pi)^4\delta^4(p-k-q')(2\pi)^4\delta^4(k+q-k')(2\pi)^4 \\ \delta^4(q'+k'-p')\frac{1}{}\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4}. \end{aligned} \tag{5.133}$$

De la integral anterior al organizar los términos constantes del numerador se obtiene:

$$
\begin{aligned}
-ie\bar{u}_{p'_j}\Gamma^{\mu}_{p'_j,p_i}u_{p_i} = e\int \bar{u}_{p'_j}(g^{jf}_{s1}+ig^{jf}_{p1}\gamma^5)\frac{(\not{k}'+m_f)}{k'^2-m_f^2+i\epsilon}\gamma^{\mu}\frac{(\not{k}+m_f)}{k^2-m_f^2+i\epsilon}(g^{fi}_{s1}+ig^{fi}_{p1}\gamma^5)\\
u_{p_i}\frac{1}{q'^2-m_\phi^2}(2\pi)^4\delta^4(p-k-q')(2\pi)^4\delta^4(k+q-k')\\
(2\pi)^4\delta^4(q'+k'-p')\frac{1}{}\frac{d^4q'}{(2\pi)^4}\frac{d^4k'}{(2\pi)^4}\frac{d^4k}{(2\pi)^4},
\end{aligned}
\tag{5.134}
$$

donde se puede reducir esta expresión de manera análoga a como se hizo en el cálculo de la función de vértice del muón para el cálculo de α:

$$
\begin{aligned}
\bar{u}_{p'_j}\Gamma^{\mu}_{p'_j,p_i}u_{p_i} = i\int \bar{u}_{p'_j}(g^{jf}_{s1}+ig^{jf}_{p1}\gamma^5)\frac{(\not{k}'+m_f)}{(k+q)^2-m_f^2+i\epsilon}\gamma^{\mu}\frac{(\not{k}+m_f)}{k^2-m_f^2+i\epsilon}(g^{fi}_{s1}+ig^{fi}_{p1}\gamma^5)u_{p_i}\\
\frac{1}{(p-k)^2-m_\phi^2}\frac{d^4k}{(2\pi)^4},
\end{aligned}
\tag{5.135}
$$

siendo en este punto necesario reacomodar el denominador y numerador, el primero haciendo uso de los parámetros de Feynman y el segundo usando el álgebra de Dirac.

5.3.1. Cálculo del denominador

Para calcular el denominador de (5.135) la herramienta de la que se hará uso a continuación serán los parámetros de Feynman vistos en el cálculo del momento magnético anómalo del muón. Sea:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{[(k+q)^2-m_f^2+i\epsilon](k^2-m_f^2+i\epsilon)[(k-p)^2-m_\phi^2+i\epsilon]}\\
&= 2\int_0^1 \frac{dxdydz \quad \delta(x+y+z-1)}{\{x[(k-p)^2-m_\phi^2+i\epsilon]+y(k^2-m_f^2+i\epsilon)+z[(k+q)^2-m_f^2+i\epsilon]\}^3},
\end{aligned}
\tag{5.136}
$$

donde se hace:

$$
D = x[(k-p)^2-m_\phi^2+i\epsilon]+y(k^2-m_f^2+i\epsilon)+z[(k+q)^2-m_f^2+i\epsilon], \tag{5.137}
$$

y que se organiza del siguiente modo:

$$
\begin{aligned}
D &= x[(k-p)^2 - m_\phi^2 + i\epsilon] + y(k^2 - m_f^2 + i\epsilon) + z[(k+q)^2 - m_f^2 + i\epsilon] \\
&= x[(k-p)^2 - m_\phi^2] + y(k^2 - m_f^2 + z[(k+q)^2 - m_f^2] + i\epsilon \\
&= x(k^2 - 2k\cdot p + p^2 - m_\phi^2) + y(k^2 - m_f^2 + z(k^2 + 2k\cdot q + q^2 - m_f^2) + i\epsilon \\
&= k^2 + 2k(zq - xp) - (y+z)m_f^2 - xm_\phi^2 + xp^2 + zq^2 + i\epsilon \\
&= k^2 + 2k(zq - xp) + (zq - xp)^2 - (zq - xp)^2 - (y+z)m_f^2 - xm_\phi^2 + xp^2 \\
&+ zq^2 + i\epsilon \\
&= [k + (zq - xp)]^2 - (zq - xp)^2 - (y+z)m_f^2 - xm_\phi^2 + xp^2 + zq^2 + i\epsilon,
\end{aligned}
$$

siendo necesario definir el momento que se va a llamar l y que se va a convertir en el nuevo momento de integración:

$$l = k + zq - xp, \tag{5.138}$$

es decir, D deja en este punto de depender del momento k, así como se observa inmediatamente:

$$D = l^2 - (zq - xp)^2 - (y+z)m_f^2 - xm_\phi^2 + xp^2 + zq^2 + i\epsilon, \tag{5.139}$$

de aquí se sigue que las otras cantidades en D se pueden simplificar haciendo uso de la conservación del momento resultado de la diagramática, para ello se toman estos términos:

$$-(zq - xp)^2 - (y+z)m_f^2 - xm_\phi^2 + xp^2 + zq^2. \tag{5.140}$$

Satisfaciéndose que el momento final p' es la suma del momento inicial p del leptón y el momento q debido al fotón incidente sobre el leptón que ha emitido con anterioridad un campo escalar:

$$
\begin{aligned}
p' &= p + q \\
p'^2 &= (p+q)^2 \\
m_j^2 &= p^2 + 2p\cdot q + q^2 \\
m_j^2 &= m_i^2 + 2p\cdot q + q^2
\end{aligned}
$$

$$m_j^2 - m_i^2 - q^2 = 2p\cdot q, \tag{5.141}$$

por lo tanto los términos que se tomaron (5.140) se transforman de manera que se deja de depender de los momentos inicial y final para únicamente quedar el momento q, tal como sigue:

$$
\begin{aligned}
&-(zq-xp)^2-(y+z)m_f^2-xm_\phi^2+xp^2+zq^2\\
&=-(z^2q^2-2p\cdot qxz+x^2p^2)-(y+z)m_f^2\\
&\quad-xm_\phi^2+xm_i^2+zq^2\\
&=-z^2q^2+xz(m_j^2-m_i^2-q^2)-x^2p^2\\
&\quad-(y+z)m_f^2-xm_\phi^2+xm_i^2+zq^2\\
&=-z^2q^2+xzm_j^2-xzm_i^2-xzq^2-x^2m_i^2\\
&\quad-(1-x)m_f^2-xm_\phi^2+xm_i^2+zq^2\\
&=(-z-x+1)zq^2+(-z-x+1)xm_i^2\\
&\quad+xzm_j^2-xm_\phi^2-(1-x)m_f^2\\
&=yzq^2+xym_i^2+xzm_j^2-xm_\phi^2\\
&\quad-(1-x)m_f^2.
\end{aligned}
\tag{5.142}
$$

A este resultado multiplicado por un signo negativo se lo define como Δ:

$$\Delta=-yzq^2-xym_i^2-xzm_j^2+xm_\phi^2+(1-x)m_f^2, \tag{5.143}$$

a partir de la cual se da la forma final a D, que es:

$$D=l^2-\Delta+i\epsilon, \tag{5.144}$$

teniendo en cuenta que para un proceso de dispersión $q^2<0$, y por lo tanto Δ es positivo y es el término efectivo de masa.

5.3.2. Cálculo del numerador

El numerador por ahora depende de los momentos k y k' que contienen implícitamente a los momentos que los interesan y que son p, p' y q; para esto es necesario comenzar por organizar los términos que lo componen teniendo en cuenta las constantes de acoplamiento y sus simetrías bajo el cambio de índices:

$$N=(g_{s1}^{jf}+ig_{p1}^{jf}\gamma^5)(\not{k}'+m_f)\gamma^\mu(\not{k}+m_f)(g_{s1}^{fi}+ig_{p1}^{fi}\gamma^5). \tag{5.145}$$

El primer paso es expandir todos los factores:

$$
\begin{aligned}
N=\;&g_{s1}^{jf}(\not{k}'+m_f)\gamma^\mu(\not{k}+m_f)g_{s1}^{fi}+g_{s1}^{jf}(\not{k}'+m_f)\gamma^\mu(\not{k}+m_f)ig_{p1}^{fi}\gamma^5\\
&+ig_{p1}^{jf}\gamma^5(\not{k}'+m_f)\gamma^\mu(\not{k}+m_f)g_{s1}^{fi}+ig_{p1}^{jf}\gamma^5(\not{k}'+m_f)\gamma^\mu(\not{k}+m_f)ig_{p1}^{fi}\gamma^5,
\end{aligned}
$$

y se debe notar que las constantes de acoplamiento con las matrices gamma no tienen relación, lo que permite el salto de todo el factor sanduchado entre ellas para ponerlas juntas,

excepto por las matrices γ^5 que si tienen relaciones de conmutación con las matrices γ^μ. La propiedad que define esta relación es la de anticonmutación entre las matrices γ^5 y γ^μ de manera que:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^5\} = \gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0, \tag{5.146}$$

teniendo en cuenta que de la conmutación de las matrices γ^5 se obtiene un signo positivo sí el número de conmutaciones es par, y un signo negativo si el número de conmutaciones es impar, así que el numerador N se puede escribir como:

$$\begin{aligned} N = {} & g_{s1}^{jf} g_{s1}^{fi}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}+m_f(\not{k}'\gamma^\mu+\gamma^\mu\not{k})+m_f^2\gamma^\mu]+g_{s1}^{jf} i g_{p1}^{fi}\gamma^5[-\not{k}'\gamma^\mu\not{k}+m_f(\not{k}'\gamma^\mu+\gamma^\mu\not{k})-m_f^2\gamma^\mu] \\ & +i g_{p1}^{jf}\gamma^5 g_{s1}^{fi}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}+m_f((\not{k}'\gamma^\mu+\gamma^\mu\not{k})+m_f^2\gamma^\mu]+i g_{p1}^{jf}\gamma^5 i g_{p1}^{fi}\gamma^5[-\not{k}'\gamma^\mu\not{k}+m_f(\not{k}'\gamma^\mu+\gamma^\mu\not{k})-m_f^2\gamma^\mu]. \end{aligned}$$

Por la propiedad de las matrices gamma se sabe que γ^5 cumple con:

$$(\gamma^5)^2 = 1, \tag{5.147}$$

resultando el numerador en:

$$\begin{aligned} N = {} & g_{s1}^{jf} g_{s1}^{fi}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}+m_f(\not{k}'\gamma^\mu+\gamma^\mu\not{k})+m_f^2\gamma^\mu]+i\gamma^5 g_{s1}^{jf} g_{p1}^{fi}[-\not{k}'\gamma^\mu\not{k}+m_f(\not{k}'\gamma^\mu+\gamma^\mu\not{k})-m_f^2\gamma^\mu] \\ & +i\gamma^5 g_{p1}^{jf} g_{s1}^{fi}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}+m_f(\not{k}'\gamma^\mu+\gamma^\mu\not{k})+m_f^2\gamma^\mu]-g_{p1}^{jf} g_{p1}^{fi}[-\not{k}'\gamma^\mu\not{k}+m_f(\not{k}'\gamma^\mu+\gamma^\mu\not{k})-m_f^2\gamma^\mu]. \end{aligned}$$

Lo que sigue es hacer un estudio de la simetría de los índices de las constantes de acoplamiento en el Lagrangiano para saber si estas son simétricas o antisimétricas, para ello lo que se hace es aplicar † a cada uno de los dos términos del $\mathcal{L}_{int}$ y verificar como se comportan bajo el cambio de índices:

$$\mathcal{L}_{int} = \underbrace{g_{s1}^{ij}\phi\bar{l}_i l_j}_{\text{A}} + \underbrace{i g_{p1}^{ij}\phi\bar{l}_i\gamma^5 l_j}_{\text{B}}, \tag{5.148}$$

comenzando por A:

$$\begin{aligned} (g_{s1}^{ij}\phi\bar{l}_i l_j)^\dagger = l_j^\dagger \bar{l}_i^\dagger g_{s1}^{ij}\phi = l_j^\dagger(l_i^\dagger\gamma^0)^\dagger g_{s1}^{ij}\phi = l_j^\dagger\gamma^0(l_i^\dagger)^\dagger g_{s1}^{ij}\phi \\ = \bar{l}_j l_i g_{s1}^{ij}\phi = \bar{l}_j(g_{s1}^{ji})^T\phi l_i = \bar{l}_i(g_{s1}^{ij})^T\phi l_j, \end{aligned} \tag{5.149}$$

se ha demostrado que es simétrico bajo el cambio de índices:

$$(g_{s1}^{ij})^T = g_{s1}^{ji}, \tag{5.150}$$

y haciendo lo mismo para B:

$$(ig_{p1}^{ij}\phi\bar{l}_i\gamma^5 l_j)^\dagger = l_j^\dagger(\gamma^5)^\dagger(-ig_{p1}^{ij})\phi\gamma^0 l_i = -il_j^\dagger\gamma^5\gamma^0(g_{p1}^{ji})^\dagger\phi l_i$$
$$= i\bar{l}_j\gamma^5(g_{p1}^{ji})^\dagger\phi l_i = i\bar{l}_i\gamma^5(g_{p1}^{ij})^\dagger\phi l_j, \quad (5.151)$$

demostrando que igualmente es simétrico bajo el cambio de índices, pues:

$$(g_{p1}^{ij})^T = g_{p1}^{ji}. \quad (5.152)$$

Entonces el numerador, después de mostrar la simetría en las constantes de acoplamiento, se puede ver como:

$$N = g_{s1}^{fj}g_{s1}^{fi}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k} + m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}) + m_f^2\gamma^\mu] + i\gamma^5 g_{s1}^{fj}g_{p1}^{fi}[-\not{k}'\gamma^\mu\not{k}$$
$$+ m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}) - m_f^2\gamma^\mu] + i\gamma^5 g_{p1}^{fj}g_{s1}^{fi}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k} + m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}) + m_f^2\gamma^\mu]$$
$$- g_{p1}^{fj}g_{p1}^{fi}[-\not{k}'\gamma^\mu\not{k} + m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}) - m_f^2\gamma^\mu], \quad (5.153)$$

donde ha de ser necesario arreglar los términos que llevan $i\gamma^5$ y los que no lo llevan en dos grupos:

$$N = g_{s1}^{fj}g_{s1}^{fi}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k} + m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}) + m_f^2\gamma^\mu] + g_{p1}^{fj}g_{p1}^{fi}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k}$$
$$- m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}) + m_f^2\gamma^\mu] + i\gamma^5\{g_{p1}^{fj}g_{s1}^{fi}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k} + m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}) + m_f^2\gamma^\mu]$$
$$- g_{s1}^{fj}g_{p1}^{fi}[\not{k}'\gamma^\mu\not{k} - m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}) + m_f^2\gamma^\mu]\}, \quad (5.154)$$

y se define a cada uno de los términos que acompañan a las constantes de acoplamiento para simplificar:

$$N_1 = \not{k}'\gamma^\mu\not{k} + m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}) + m_f^2\gamma^\mu, \quad (5.155)$$
$$N_2 = \not{k}'\gamma^\mu\not{k} - m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}) + m_f^2\gamma^\mu, \quad (5.156)$$

siendo posible con las anteriores expresiones definir una sola, pues todos sus términos son iguales excepto por un signo, así:

$$N_f = \not{k}'\gamma^\mu\not{k} \pm m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k}) + m_f^2\gamma^\mu, \quad (5.157)$$

Este es el numerador, y se debe organizar de tal manera que solo quede en términos de los momentos p, p', y l, y también que deje de depender del momento k. Para simplificar los cálculos es necesario tener en cuenta que todos los términos que solo tengan x, y, z y cantidades de masa y que llevan como factor a la matriz γ^μ se van a ignorar, pues de la combinación lineal en la que se puede expresar a Γ^μ se escoge, como condición de renormalización, el factor de forma $F_1(q^2) = 1$, que es el correspondiente a la carga eléctrica. La parte que nos interesa es $F_2(0)$, que es la correspondiente al momento magnético anómalo y es la de interés para este cálculo. Por lo tanto se va a volver a definir el numerador una vez más:

$$N_f = \not{k}'\gamma^\mu \not{k} \pm m_f(\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k}). \tag{5.158}$$

La reducción de N_f se llevó a cabo en el apéndice D y queda como:

$$N_f = -x(ym_i + zm_j)(p'^\mu + p^\mu) - (\pm)(1-x)m_f(p'^\mu + p^\mu). \tag{5.159}$$

Es necesario organizarlo para compararlo con la identidad de Gordon (5.85):

$$\begin{aligned} N_f &= -[x(ym_i + zm_j) + (\pm)(1-x)m_f](p'^\mu + p^\mu) \\ &= -\frac{2m_i}{2m_i}(p'^\mu + p^\mu)[x(ym_i + zm_j) + (\pm)(1-x)m_f] \\ &= -2m_i\left(\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m_i}\right)[x(ym_i + zm_j) + (\pm)(1-x)m_f]. \end{aligned} \tag{5.160}$$

En este caso la identidad de Gordon es:

$$\bar{u}_{p'}\left(\gamma^\mu - \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}\right)u_p = \bar{u}_{p'}\left(\frac{p'^\mu + p^\mu}{2m_i}\right)u_p. \tag{5.161}$$

Si se comparan el numerador N_f con la identidad de Gordon, (5.160) y (5.161), respectivamente, entonces se tiene que:

$$\begin{aligned} N_f &= -2m_i\left(\gamma^\mu - \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}\right)[x(ym_i + zm_j) + (\pm)(1-x)m_f] \\ &= \frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}2m_i[x(ym_i + zm_j) + (\pm)(1-x)m_f] + \text{términos proporcionales a}\gamma^\mu, \end{aligned} \tag{5.162}$$

donde es necesario recordar que el aporte de γ^μ no es de interés en este cálculo. Y para simplificar se va a definir:

$$A_\pm = 2m_i[x(ym_i + zm_j) + (\pm)(1-x)m_f], \tag{5.163}$$

$$A_+ = 2m_i[x(ym_i + zm_j) + (+)(1-x)m_f], \tag{5.164}$$

$$A_- = 2m_i[x(ym_i + zm_j) + (-)(1-x)m_f]. \tag{5.165}$$

De manera que N, en toda su extensión, es:

$$\begin{aligned} N = g_{s1}^{fj}g_{s1}^{fi}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_+\right) + g_{p1}^{fj}g_{p1}^{fi}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_-\right) + i\gamma^5\Bigg\{g_{p1}^{fj}g_{s1}^{fi}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_+\right) \\ - g_{s1}^{fj}g_{p1}^{fi}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_-\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{5.166}$$

Con este resuldado en las manos, se vuelve a la ecuación (5.135) y se la escribe en los nuevos términos:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{p'_j}\Gamma^{\mu}_{p'_j,p_i}u_{p_i} &= 2i\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz\int \bar{u}_{p'_j}g^{fj}_{s1}g^{fi}_{s1}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_+\right)\frac{u_{p_i}}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\\
&+ 2i\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz\int \bar{u}_{p'_j}g^{fj}_{p1}g^{fi}_{p1}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_-\right)\frac{u_{p_i}}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\\
&+ i\gamma^5\Bigg\{2i\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz\int \bar{u}_{p'_j}g^{fj}_{p1}g^{fi}_{s1}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_+\right)\frac{u_{p_i}}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\\
&- 2i\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz\int \bar{u}_{p'_j}g^{fj}_{s1}g^{fi}_{p1}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_-\right)\frac{u_{p_i}}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\Bigg\}. \qquad (5.167)
\end{aligned}$$

La forma más adecuada de presentar la anterior expresión es:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{p'_j}\Gamma^{\mu}_{p'_j,p_i}u_{p_i} &= g^{fj}_{s1}g^{fi}_{s1}\left[2i\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz\int \bar{u}_{p'_j}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_+\right)\frac{u_{p_i}}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\right]\\
&+ g^{fj}_{p1}g^{fi}_{p1}\left[2i\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz\int \bar{u}_{p'_j}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_-\right)\frac{u_{p_i}}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\right]\\
&+ i\gamma^5\Bigg\{g^{fj}_{p1}g^{fi}_{s1}\left[2i\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz\int \bar{u}_{p'_j}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_+\right)\frac{u_{p_i}}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\right]\\
&- g^{fj}_{s1}g^{fi}_{p1}\left[2i\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz\int \bar{u}_{p'_j}\left(\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m_i}A_-\right)\frac{u_{p_i}}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\right]\Bigg\}. \qquad (5.168)
\end{aligned}$$

Ahora solo queda comparar con:

$$\bar{u}_{p'}\Gamma^{\mu}(p',p)u_p = \bar{u}_{p'}\gamma^{\mu}F_1(q^2)u_p + \bar{u}_{p'}\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2m}F_2(q^2)u_p. \qquad (5.169)$$

De aquí es importante resaltar que los términos lineales en γ^μ pertenecen al factor de forma $F_1(q^2)$ y que por renormalización se establece que su valor es igual 1. Esto no quita el hecho de que puedan existir divergencias en el cálculo del mismo, pero se asume que han sido corregidas y el factor renormalizado porque el estudio de la carga del electrón no está contemplado en este trabajo. Por lo tanto si se tiene en cuenta al factor de forma $F_2(q^2)$ que condensa las cuatro expresiones integrales anteriores resulta:

$$\begin{aligned}
F_2(q^2) &= 2i\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz\int \frac{A_\pm}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\\
&= 2i\int_0^1 A_\pm\delta(x+y+z-1)dxdydz\int \frac{1}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4}.
\end{aligned} \qquad (5.170)$$

Haciendo uso del resultado (5.111) se llega a:

$$\begin{aligned} F_2(q^2) &= 2i\int_0^1 A_\pm \delta(x+y+z-1)dxdydz \int \frac{1}{D^3}\frac{d^4l}{(2\pi)^4} \\ &= 2i\int_0^1 A_\pm \delta(x+y+z-1)dxdydz \left(-\frac{i}{32\pi^2\Delta}\right) \\ &= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 \frac{A_\pm}{\Delta}\delta(x+y+z-1)dxdydz. \end{aligned} \tag{5.171}$$

El siguiente paso es hacer $F_2(q^2) = F_2(0)$, de modo que el numerador y denominador explícitos se ven como:

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{1}{16\pi^2}\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz \frac{2m_i[x(ym_i+zm_j)+(\pm)(1-x)m_f]}{-xym_i^2-xzm_j^2+xm_\phi^2+(1-x)m_f^2} \\ &= \frac{m_i}{8\pi^2}\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz \frac{x(ym_i+zm_j)+(\pm)(1-x)m_f}{-xym_i^2-xzm_j^2+xm_\phi^2+(1-x)m_f^2} \\ &= \frac{m_i^2}{8\pi^2 m_i}\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz \frac{x(ym_i+zm_j)+(\pm)(1-x)m_f}{-xym_i^2-xzm_j^2+xm_\phi^2+(1-x)m_f^2} \\ &= \frac{m_i^2}{8\pi^2}\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz \frac{x(y\frac{m_i}{m_i}+z\frac{m_j}{m_i})+(\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xym_i^2-xzm_j^2+xm_\phi^2+(1-x)m_f^2} \\ &= \frac{m_i^2}{8\pi^2}\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz \frac{x(y+z\frac{m_j}{m_i})+(\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xym_i^2-xzm_j^2+xm_\phi^2+(1-x)m_f^2}. \end{aligned} \tag{5.172}$$

Con la anterior expresión se ha llegado a la forma que se quiere, esto también con el fin de poderla comparar con la expresión que aparece en el artículo [38] y que corresponde al caso de un campo escalar neutro. De tal manera que se ha encontrado el factor de forma tal y como es para el caso que se busca:

$$F_2(0) = \frac{m_i^2}{8\pi^2}\int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz \frac{x(y+z\frac{m_j}{m_i})+(\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xym_i^2-xzm_j^2+xm_\phi^2+(1-x)m_f^2} \tag{5.173}$$

Se sigue ahora con la organización de la integral para reducirla:

$$I_\pm = \int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz \frac{x(y+z\frac{m_j}{m_i})+(\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xym_i^2-xzm_j^2+xm_\phi^2+(1-x)m_f^2} \tag{5.174}$$

El anterior resultado se lo puede comparar con el obtenido por el artículo de referencia [38] de Lindner *et al* en el apéndice A, expresión A.1 y se debe observar que se ha llegado de

forma limpia y concisa al mismo. A continuación deben separarse y hacerse explícitas las integrales anteriormente implícitas para proceder con el cálculo:

$$I_{\pm} = \int_0^1 dx \int_0^1 dz \int_0^1 \delta(x+y+z-1)dy \frac{x(y+z\frac{m_j}{m_i}) + (\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xym_i^2 - xzm_j^2 + xm_\phi^2 + (1-x)m_f^2} \quad (5.175)$$

Es necesario, para poder seguir, obtener la relación entre la función delta y la función de paso, así:

$$\int_a^b \delta(x-t)dx = \theta(t-a)\theta(b-t). \quad (5.176)$$

Donde se tiene que:

$$t = 1-x-z, \quad a = 0, \quad b = 1. \quad (5.177)$$

Entonces $I_{\pm}$ quedará como:

$$\begin{aligned} I_{\pm} &= \int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz \frac{x(y+z\frac{m_j}{m_i}) + (\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xym_i^2 - xzm_j^2 + xm_\phi^2 + (1-x)m_f^2} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dz\theta(1-x-z)\theta(x+z) \frac{x(z+z\frac{m_j}{m_i}) + (\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xzm_i^2 - xzm_j^2 + xm_\phi^2 + (1-x)m_f^2} \\ &= \int_0^1 dx \int_0^1 dz\theta(1-x-z)\theta(x+z) \frac{x(z+z\frac{m_j}{m_i}) + (\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xzm_i^2 - xzm_j^2 + xm_\phi^2 + (1-x)m_f^2}. \end{aligned} \quad (5.178)$$

En este caso se deben evaluar los argumentos de la función θ para conocer los límites de la nueva integral:

$$1-x-z > 0, \quad 1-x > z, \quad \text{y} \quad 0 < z < 1-x. \quad (5.179)$$

Por lo tanto $I_{\pm}$ toma la forma:

$$I_{\pm} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{x(z+z\frac{m_j}{m_i}) + (\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xzm_i^2 - xzm_j^2 + xm_\phi^2 + (1-x)m_f^2}. \quad (5.180)$$

Aquí se deben aplicar condiciones para poder facilitar la solución. Se prefiere comenzar con el caso donde $m_j/m_i \ll 1$, de ahí que $m_j \ll m_i$. La escogencia permite llegar a:

$$I_{\pm} = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{xz + (\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xzm_i^2 + xm_\phi^2 + (1-x)m_f^2}. \quad (5.181)$$

que es la expresión que aparecer en el artículo de referencia [38] de Lindner *et al* en la sección de mediadores escalares, precisamente en escalar neutro, y que se encuentra como la primera

ecuación en el conjunto de ecuaciones enumeradas como (19). De acuerdo con lo sugerido por el artículo se definen como nuevas cantidades:

$$\epsilon_f = \frac{m_f}{m_i}, \quad \lambda = \frac{m_i}{m_\phi}, \quad \text{y} \quad \epsilon_f \lambda = \frac{m_f}{m_\phi}. \tag{5.182}$$

Estas cantidades hacen que $I_\pm$ se pueda escribir también de la forma:

$$\begin{aligned} I_\pm &= \frac{1}{m_\phi^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{xz + (\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xzm_i^2 + xm_\phi^2 + (1-x)m_f^2} \\ &= \frac{1}{m_\phi^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{xz + (\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xz\left(\frac{m_i}{m_\phi}\right)^2 + x\left(\frac{m_\phi}{m_\phi}\right)^2 + (1-x)\left(\frac{m_f}{m_\phi}\right)^2} \\ &= \frac{1}{m_\phi^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{xz + (\pm)(1-x)\epsilon_f}{-xz\lambda^2 + x + (1-x){\epsilon_f}^2\lambda^2} I_\pm \\ &= \frac{1}{m_\phi^2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{xz + (\pm)(1-x)\epsilon_f}{-xz\lambda^2 + x + (1-x){\epsilon_f}^2\lambda^2}. \end{aligned} \tag{5.183}$$

Realizando un cambio de variable, $z = (1-x)y$, se resulta:

$$I_\pm = \frac{1}{m_\phi^2}\int_0^1 dx \int_0^1 dy(1-x) \frac{x(1-x)y + (\pm)(1-x)\epsilon_f}{-x(1-x)y\lambda^2 + x + (1-x){\epsilon_f}^2\lambda^2}, \tag{5.184}$$

y dado que la integral es invariante bajo el cambio $x \to 1-x$ se hace:

$$\begin{aligned} I_\pm &= \frac{1}{m_\phi^2}\int_0^1 dx \int_0^1 dy(1-x) \frac{x(1-x)y + (\pm)(1-x)\epsilon_f}{-x(1-x)y\lambda^2 + x + (1-x){\epsilon_f}^2\lambda^2} \\ &= \frac{1}{m_\phi^2}\int_0^1 dx \int_0^1 dyx \frac{x(1-x)y + (\pm)x\epsilon_f}{-x(1-x)y\lambda^2 + (1-x) + x{\epsilon_f}^2\lambda^2} \\ &= \frac{1}{m_\phi^2}\int_0^1 dx \int_0^1 dyx^2 \frac{(1-x)y + (\pm)\epsilon_f}{(1-x)(1-xy\lambda^2) + x{\epsilon_f}^2\lambda^2}. \end{aligned} \tag{5.185}$$

De aquí se llega a la expresión integral final que se buscaba. El aporte a la anomalía se deja en estos términos ya que el objetivo que se planteó se reducía a este cálculo, lo siguiente sería llevar a cabo un análisis de cada uno de los casos que puedan darse, ya sea $i = j$ o $i \neq j$.

$$I_\pm = \frac{1}{m_\phi^2}\int_0^1 dxx^2 \int_0^1 dy \frac{(1-x)y + (\pm)\epsilon_f}{(1-x)(1-xy\lambda^2) + x{\epsilon_f}^2\lambda^2} \tag{5.186}$$

Desde este punto de puede retomar la expresión (5.173) y escribirla de forma compacta usando el anterior resultado:

$$F_2(0) = \frac{m_i^2}{8\pi^2 m_\phi^2} \int_0^1 dx x^2 \int_0^1 dy \frac{(1-x)y + (\pm)\epsilon_f}{(1-x)(1-xy\lambda^2) + x{\epsilon_f}^2\lambda^2}. \tag{5.187}$$

El paso final será relacionar esta cantidad con el momento magnético anómalo del leptón de preferencia, pues hay que observar que el cálculo se ha llevado a cabo con toda la generalidad dentro del caso en que la partícula emitida por el leptón sea escalar neutra. Para ello es necesario recordar que:

$$g = 2 + 2F_2(0), \tag{5.188}$$

y, por lo tanto:

$$\frac{1}{2}(g-2) \equiv \Delta a_i(\phi) = \frac{m_i^2}{8\pi^2 m_\phi^2} \int_0^1 dx x^2 \int_0^1 dy \frac{(1-x)y + (\pm)\epsilon_f}{(1-x)(1-xy\lambda^2) + x{\epsilon_f}^2\lambda^2}. \tag{5.189}$$

Capítulo 6

Resultados

El cálculo del momento magnético anómalo del muón que se puede comparar con el del electrón realizado por Richard Feynman [25], Julian Schwinger [45] y Shin'ichiro Tomonaga [49], pues ambos son leptones cargados con espín de $1/2$, se pudo replicar con éxito haciendo uso de los métodos matemáticos y computacionales propuestos por ellos para la solución del mismo. El resultado final, en el caso donde no hay violación de sabor leptónico, es independiente de la masa de los leptones cargados, por lo tanto, se obtuvo la cantidad debida a las correcciones radiactivas en la perturbación a un loop que se debe tener en cuenta en el cálculo del momento magnético del muón, el resultado de este trabajo contando solo con el aporte de la EC a un loop fue:

$$a_{teo} = 0.001162. \tag{6.1}$$

Esta cantidad, que fue la primera calculada teoricamente, se puede comparar con la obtenida experimentalmente por el CERN para el muón en el año 1978 [11] verificándose la efectividad de la electrodinámica cuántica y el poder de sus predicciones,

$$a_{\mu}^{exp} = 1165924(8.5) \times 10^{-9}(7\text{ppm}). \tag{6.2}$$

Este resultado nos dice que el cálculo replicado en este trabajo es correcto y corresponde a lo esperado.

De otro lado también se calculó, en general, la interacción de un leptón cargado mediada por un campo escalar neutro y exótico. El éxito de los resultados para el cálculo del momento magnético anómalo del muón permitió hacer una analogía a la hora de llevar los cálculos permitiendo evidenciar el poder de la tecnología computacional de la teoría cuántica de campos. Teniendo como punto de partida el Lagrangiano de interacción propuesto por [38] para el mediador escalar neutro:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= g_{s1}^{ij}\phi\bar{l}_i l_j + i g_{p1}^{ij}\phi\bar{l}_i\gamma^5 l_j \\ &= \phi\bar{l}_i(g_{s1}^{ij} + i g_{p1}^{ij}\gamma^5) l_j, \end{aligned} \tag{6.3}$$

se determinó el vértice de interacción que se debe tener en cuenta a la hora de plantear Γ^μ para el cálculo de la anomalía del momento magnético. Dado que no había en el artículo de referencia más información que el Lagrangiano, además de lo mencionado anteriormente, se hizo el análisis de las constantes de acoplamiento que resultaron ser simétricas bajo el cambio de índices. Esto es de vital importancia, pues si no lo fueran el planteamiento de Γ^μ no sería el correspondiente. Después se procedió a calcular y aplicar los resultados de la electrodinámica cuántica, tales como (4.88) y (4.89) y las propiedades de las matrices gamma. El primer resultado obtenido se comparó con expresión del artículo de referencia y se concluyó por comparación que eran iguales. Eso se puede ver en [38] de Lindner *et al* en el apéndice A, expresión A.1 y se debe observar que se ha llegado de forma limpia y concisa:

$$I_\pm = \int_0^1 \delta(x+y+z-1)dxdydz \frac{x(y+z\frac{m_j}{m_i}) + (\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xym_i^2 - xzm_j^2 + xm_\phi^2 + (1-x)m_f^2}. \tag{6.4}$$

Los resultados posteriores coincidieron con la referencia [38]. El primero, que aparece en el apartado y que se dedica al estudio del campo escalar neutro y exótico es la expresión inicial de (19), se puede comparar con la expresión (5.181) de este trabajo:

$$I_\pm = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \frac{xz + (\pm)(1-x)\frac{m_f}{m_i}}{-xzm_i^2 + xm_\phi^2 + (1-x)m_f^2}. \tag{6.5}$$

esto resulta de las condiciones sugeridas por [38]. La siguiente expresión de (19), del artículo en cuestión, también se pudo replicar al definir las cantidades adimensionales ϵ_f y λ que se proponían como la razón entre las masas:

$$I_\pm = \frac{1}{m_\phi^2} \int_0^1 dx x^2 \int_0^1 dy \frac{(1-x)y + (\pm)\epsilon_f}{(1-x)(1-xy\lambda^2) + x{\epsilon_f}^2\lambda^2}. \tag{6.6}$$

Esta fue la última expresión a comparar con el artículo de referencia, y hasta donde se mantuvo la generalidad, es decir, este cálculo es, en general, para cualquier leptón cargado que se escoja incluso dándose el caso de violación de sabor leptónico. Ahora, en particular y para el caso del muón, se puede hacer $i = \mu$, siendo dejando indicado que la interacción es de un muón, de modo que:

$$\epsilon_f = \frac{m_f}{m_\mu}, \quad \lambda = \frac{m_\mu}{m_\phi}, \quad \text{y} \quad \epsilon_f\lambda = \frac{m_f}{m_\phi}, \tag{6.7}$$

llegando a contribuir el campo excalar neutro y exótico al momento magnético anómalo del muón de la forma:

$$\frac{1}{2}(g-2) \equiv a_\mu(\phi) = \frac{m_\mu^2}{8\pi^2 m_\phi^2} \int_0^1 dx x^2 \int_0^1 dy \frac{(1-x)y + (\pm)\epsilon_f}{(1-x)(1-xy\lambda^2) + x{\epsilon_f}^2\lambda^2}, \tag{6.8}$$

donde la contribución se deja expresada en términos de dos variables y la razón de las masas, dado que la solución requiere de un análisis computacional y otros métodos numéricos que

no son el objetivo de este escrito, pero que podrían desarrollarse en otro trabajo.

Pero este hecho no permite que no se pueda realizar el análisis de una interacción donde se cumpla con la condicion impuesta $m_j/m_i \ll 1$, de ahí que si $m_j \ll m_i$:

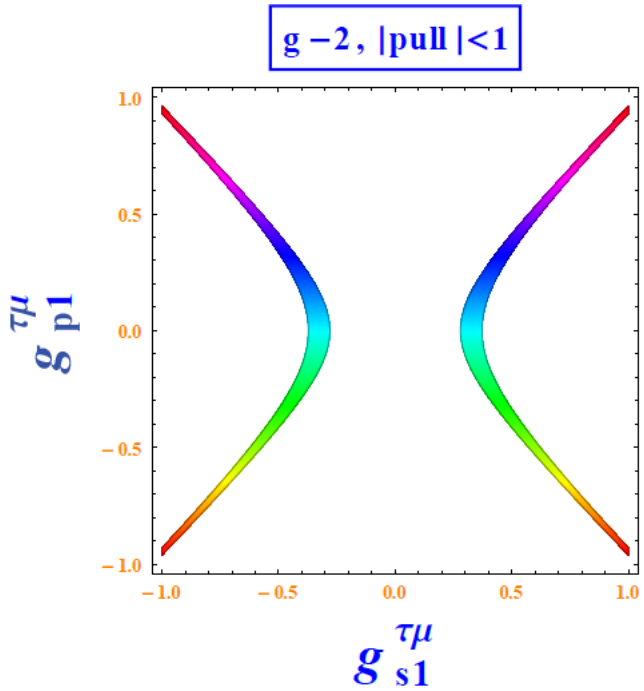


Figura 6.1: Región permitida a nivel de un σ, i.e., la región del espacio de parámetros que satisface pull$^2 = \left(\frac{\mathcal{O}^{exp}-\mathcal{O}^{te}}{\sigma^{\text{total}}}\right)^2 < 1$, donde σ^{total} es la suma en cuadratura del error experimental y el error teórico. Para el cálculo hicimos $m_f = 1{,}77699$ GeV, que corresponde a la masa del τ y $m_\phi = 105$ GeV. De la gráfica podemos ver que el punto (0,0), que corresponde al modelo estándar, no está en la región permitida de la gráfica.

Conclusiones

El desarrollo de este trabajo permitió aprender varias áreas de la física de partículas. Al comienzo del trabajo fue necesario trabajar con electrodinámica cuántica para poder calcular las contribuciones al momento magnético anómalo a un loop. Esto implicó conocer el formalismo de los diagramas de Feynman, tecnología de trazas y técnicas de regularización. En general, a nivel de fundamento teórico, se estudió ruptura espontánea de la simetría, el modelo estándar, anomalías y una gran variedad de tópicos necesarios para tener el background teórico.

Se obtuvieron los resultados esperados y se pudieron comparar satisfactoriamente con los que se habían encontrado anteriormente. En el caso del momento magnético anómalo del muón $g-2$ determinado por la expresión (5.128) se pudo confirmar con el resultado teórico de Schwinger [45]. En la actualidad el resultado teórico que necesario para comparar con el experimento requiere el cálculo a varios loops, pero eso está más allá del propósito de nuestro trabajo. Este resultado fue inicialmente confirmado por un experimento en el CERN en 1978 [11]. Si bien en los experimentos puede elegirse al electrón como partícula de estudio en los aceleradores, el muón tiene características que le permiten ser el favorito, estas son su gran masa, 206 veces la del electrón, y su gran tiempo de vida $2.2\mu s$, aunque de primera mano podría pensarse que τ debería ser el favorito si se habla de masas, pero no tiene un tiempo de vida lo suficientemente largo como para facilitar los estudios en el $g-2$.

Asumiento nueva física en la forma de bosones escalares, se calculó la contribución a un loop reproduciendo así los resultados generales del artículo que se tomo como referencia para el estudio del $g-2$, pero esta vez, a diferencia del caso clásico, teniendo como campo mediador no al campo electromagnético sino a un campo escalar neutro y exótico. Por comparación se pudo establecer que se llegó a las mismas expresiones lo que indica que los cálculos de [38] son correctos y realmente confirman lo propuesto en los artículos que el artículo de referencia confirma [28, 42, 18]. Así que la expresión resultante puede predecir el $g-2$ en el caso de que no haya violación de sabor leptónico y también cuando lo hay.

De igual forma para este modelo de extensión hicimos un análisis de χ^2 para determinar la región del espacio de parámetros que logra explicar la diferencia entre el experimento y lo que predice el modelo estándar.

De otro lado este trabajo se logró haciendo uso de lo aprendido en las asignaturas de física matemática, mecánica clásica, electrodinámica, mecánica cuántica, física estadística y las asignaturas electivas de física de partículas, teoría cuántica de campos y tópicos especiales de la física de partículas.

Capítulo 7

Apéndices

Apéndice A

Constante de normalización de los espinores de Dirac

Como punto de partida para el cálculo de la constante se va a elegir a $u^{(1)}$, que se escribe de la forma:

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

Lo que sigue ahora es tener en cuenta que $u^\dagger u = 2E$, de modo que:

$$\begin{aligned} u^{(1)\dagger}u^{(1)} &= N^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{p_z}{E+m} & \frac{p_x-ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \\ &= N^2 \left[1 + 0 + \frac{p_z^2}{(E+m)^2} + \frac{(p_x - ip_y)(p_x + ip_y)}{(E+m)^2} \right] \\ &= N^2 \left[1 + \frac{p_z^2}{(E+m)^2} + \frac{p_x^2 + p_y^2}{(E+m)^2} \right] \\ &= N^2 \left[1 + \frac{p_z^2 + p_x^2 + p_y^2}{(E+m)^2} \right] \\ &= N^2 \left[1 + \frac{|\vec{p}|^2}{(E+m)^2} \right] \end{aligned} \tag{A.2}$$

El siguiente paso es multiplicar a ambos lados por $(E+m)^2$, quedando:

$$\begin{aligned} 2E(E+m)^2 &= N^2[(E+m)^2 + |\vec{p}|^2] \\ &= N^2(E^2 + 2Em + m^2 + |\vec{p}|^2) \end{aligned} \tag{A.3}$$

Y por la relación de dispersión se tiene que $E^2 = |\vec{p}|^2 + m^2$, de ahí que:

$$\begin{aligned} 2E(E+m)^2 &= N^2(E^2 + 2Em + m^2 + E^2 - m^2) \\ &= N^2(2E^2 + 2Em) \\ &= 2EN^2(E+m) \end{aligned} \tag{A.4}$$

llegando a probar que:

$$N = \sqrt{E+m} \tag{A.5}$$

Apéndice B

Cálculo de numerador.

Sea

$$\bar{u}_{p'} N^{\mu} u_p = \bar{u}_{p'}\{-\frac{1}{2}\gamma^{\mu} l^2 + (-y\not{q} + z\not{p})\gamma^{\mu}[(1-y)\not{q} + z\not{p}] - 2m[(1-2y)q^{\mu} + 2zp^{\mu}] + m^2\gamma^{\mu}\}u_p, \quad \text{(B.1)}$$

y usando las relaciones de anticonmutación tenemos las propiedades:

$$\not{p}\gamma^{\mu} = 2p^{\mu} - \gamma^{\mu}\not{p}, \quad \text{(B.2)}$$

$$\not{p}u_p = mu_p, \quad \text{(B.3)}$$

$$\bar{u}_{p'}\not{p}' = \bar{u}_{p'}m, \quad \text{(B.4)}$$

$$\bar{u}_{p'}\not{q}u_p = 0, \quad \text{(B.5)}$$

se trata el término:

$$(-y\not{q} + z\not{p})\gamma^{\mu}[(1-y)\not{q} + z\not{p}], \quad \text{(B.6)}$$

así:

$$(-y\not{q} + z\not{p})\gamma^{\mu}[(1-y)\not{q} + z\not{p}] = -y\not{q}\gamma^{\mu}[(1-y)\not{q} + z\not{p}] + z\not{p}\gamma^{\mu}[(1-y)\not{q} + z\not{p}], \quad \text{(B.7)}$$

donde se aplica la ecuación (B.2) para q y p:

$$\not{q}\gamma^{\mu} = 2q^{\mu} - \gamma^{\mu}\not{q}, \quad \text{(B.8)}$$

$$\not{p}\gamma^{\mu} = 2p^{\mu} - \gamma^{\mu}\not{p}, \quad \text{(B.9)}$$

$$\gamma^{\mu}\not{p}' = 2p'^{\mu} - \not{p}'\gamma^{\mu}. \quad \text{(B.10)}$$

Ahora, partiendo la ecuación (B.7) y haciendo uso de las ecuaciones (B.8) y (B.9), de manera que cada término en (B.7) se trata por aparte, tenemos:

- Sea:

$$\begin{aligned}-y\not{q}\gamma^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}] &= -y(2q^\mu-\gamma^\mu\not{q})[(1-y)\not{q}+z\not{p}]\\ &= -y(2q^\mu)[(1-y)\not{q}+z\not{p}]+y\gamma^\mu\not{q}[(1-y)\not{q}+z\not{p}]\\ &= -2yq^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}]+y\gamma^\mu(1-y)\not{q}^2+y\gamma^\mu\not{q}z\not{p},\end{aligned} \tag{B.11}$$

resulta:

$$-y\not{q}\gamma^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}] = -2yq^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}]+y(1-y)\gamma^\mu q^2+yz\gamma^\mu\not{q}\not{p}. \tag{B.12}$$

- Sea:

$$\begin{aligned}z\not{p}\gamma^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}] &= z(2p^\mu-\gamma^\mu\not{p})[(1-y)\not{q}+z\not{p}]\\ &= z(2p^\mu)[(1-y)\not{q}+z\not{p}]-z\gamma^\mu\not{p}[(1-y)\not{q}+z\not{p}]\\ &= 2zp^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}]-z(1-y)\gamma^\mu\not{p}\not{q}-z^2\gamma^\mu\not{p}\not{p},\end{aligned} \tag{B.13}$$

y aplicando la ecuación (B.3) da:

$$z\not{p}\gamma^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}] = 2zp^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}]-z(1-y)\gamma^\mu\not{p}\not{q}-z^2\gamma^\mu m^2. \tag{B.14}$$

Por lo tanto, teniendo en cuenta los resultados (B.12) y (B.14) la ecuación (B.7) queda:

$$\begin{aligned}(-y\not{q}+z\not{p})\gamma^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}] &= -2yq^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}]+y(1-y)\gamma^\mu q^2\\ &\quad + yz\gamma^\mu\not{q}\not{p}+2zp^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}]-z(1-y)\gamma^\mu\not{p}\not{q}-m^2z^2\gamma^\mu.\end{aligned} \tag{B.15}$$

Ahora tomamos todos los términos con γ^μ que están dentro de:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{p'}N^\mu u_p = \bar{u}_{p'}\{&-\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2-2yq^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}]+y(1-y)\gamma^\mu q^2+yz\gamma^\mu\not{q}\not{p}\\ &+2zp^\mu[(1-y)\not{q}+z\not{p}]-z(1-y)\gamma^\mu\not{p}\not{q}-m^2z^2\gamma^\mu-2m[(1-2y)q^\mu\\ &+2zp^\mu]+m^2\gamma^\mu\}u_p,\end{aligned} \tag{B.16}$$

así:

$$\gamma^\mu\{-\frac{1}{2}l^2+y(1-y)q^2+yz\not{q}\not{p}-z(1-y)\not{p}\not{q}-m^2z^2+m^2\}, \tag{B.17}$$

de los factores de γ^μ escritos en (B.17) tomamos y definimos como S para simplificar:

$$S = y(1-y)q^2 + yz\not{q}\not{p} - z(1-y)\not{p}\not{q}. \tag{B.18}$$

Ahora, trabajando con este término:

$$\begin{aligned}
S &= y(1-y)q^2 + yz\not{q}\not{p} - z\not{p}\not{q} + yz\not{p}\not{q} \\
&= (1-x-z)(1-y)q^2 + yz(\not{q}\not{p} + \not{p}\not{q}) - z\not{p}\not{q} \\
&= (1-x)(1-y)q^2 - z(1-y)q^2 + yz(\not{q}\not{p} + 2p\cdot q - \not{q}\not{p}) - z\not{p}\not{q} \\
&= (1-x)(1-y)q^2 - z(1-y)q^2 + 2yzp\cdot q - z(2p\cdot q - \not{q}\not{p}) \\
&= (1-x)(1-y)q^2 - z(1-y)q^2 + 2yzp\cdot q - 2zp\cdot q + z\not{q}\not{p} + z\not{p}\not{p} - z\not{p}\not{p} \\
&= (1-x)(1-y)q^2 - z(1-y)q^2 + 2zp\cdot q(y-1) + z(\not{q}+\not{p})\not{p} - 2m^2 \\
&= (1-x)(1-y)q^2 - z(1-y)q^2 + 2zp\cdot q(y-1) + z\not{p}'\not{p} - zm^2,
\end{aligned} \tag{B.19}$$

de manera que:

$$\begin{aligned}
y(1-y)q^2 + yz\not{q}\not{p} - z(1-y)\not{p}\not{q} = (1-x)(1-y)q^2 - z(1-y)q^2 \\
+ 2zp\cdot q(y-1) + z\not{p}'\not{p} - zm^2,
\end{aligned} \tag{B.20}$$

en donde se tuvo en cuenta que $\not{p}' = \not{q} + \not{p}$. Sustituyendo la ecuación (B.20) en (B.17) resulta:

$$\begin{aligned}
\gamma^\mu\{-\frac{1}{2}l^2 + y(1-y)q^2 + yz\not{q}\not{p} - z(1-y)\not{p}\not{q} - m^2z^2 + m^2\} = \gamma^\mu\{-\frac{1}{2}l^2 \\
+ (1-x)(1-y)q^2 - z(1-y)q^2 + 2zp\cdot q(y-1) + z\not{p}'\not{p} - zm^2 \\
- m^2z^2 + m^2\} = \gamma^\mu\{-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-z-z^2)m^2\} \\
- \gamma^\mu z(1-y)q^2 + \gamma^\mu 2zp\cdot q(y-1) + \gamma^\mu z\not{p}'\not{p}.
\end{aligned} \tag{B.21}$$

Ahora se lleva el resultado anterior (B.21) a (B.1), por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{p'}N^\mu u_p = \bar{u}_{p'}\{\gamma^\mu\{-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-z-z^2)m^2\} - \gamma^\mu z(1-y)q^2 \\
+ \gamma^\mu 2zp\cdot q(y-1) + \gamma^\mu z\not{p}'\not{p} - 2yq^\mu[(1-y)\not{q} + z\not{p}] + 2zp^\mu[(1-y)\not{q} + z\not{p}] \\
- 2m[(1-2y)q^\mu + 2zp^\mu]\}u_p,
\end{aligned} \tag{B.22}$$

por (B.5) los términos lineales a $\not{q}$ en (B.22) se hacen cero:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{p'}N^\mu u_p = \bar{u}_{p'}\{\gamma^\mu\{-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-z-z^2)m^2\} - \gamma^\mu z(1-y)q^2 \\
+ \gamma^\mu 2zp\cdot q(y-1) + \gamma^\mu z\not{p}'\not{p} - 2yzq^\mu\not{p} + 2z^2p^\mu\not{p} - 2m[(1-2y)q^\mu + 2zp^\mu]\}u_p,
\end{aligned} \tag{B.23}$$

y aplicando (B.3) sobre (B.23), queda:

$$\bar{u}_{p'}N^{\mu}u_p = \bar{u}_{p'}\{\gamma^{\mu}\{-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-z-z^2)m^2\} - \gamma^{\mu}z(1-y)q^2 \\ + \gamma^{\mu}2zp\cdot q(y-1) + z\gamma^{\mu}\not{p}'m - 2yzq^{\mu}m + 2z^2p^{\mu}m - 2m[(1-2y)q^{\mu} \\ + 2zp^{\mu}]\}u_p, \quad \text{(B.24)}$$

en la anterior ecuación (B.24) aplicamos (B.10) y también (B.4):

$$\bar{u}_{p'}N^{\mu}u_p = \bar{u}_{p'}\{\gamma^{\mu}[-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-z-z^2)m^2] - \gamma^{\mu}z(1-y)q^2 \\ + \gamma^{\mu}2zp\cdot q(y-1) + z(2p'^{\mu} - m\gamma^{\mu})m - 2yzq^{\mu}m + 2z^2p^{\mu}m - 2m[(1-2y)q^{\mu} \\ + 2zp^{\mu}]\}u_p, \quad \text{(B.25)}$$

reorganizando los términos con el factor γ^{μ}:

$$\bar{u}_{p'}N^{\mu}u_p = \bar{u}_{p'}\{\gamma^{\mu}[-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-z-z^2)m^2 - zm^2] \\ - \gamma^{\mu}z(1-y)q^2 + 2z\gamma^{\mu}p\cdot q(y-1) + 2zmp'^{\mu} - 2yzq^{\mu}m + 2z^2p^{\mu}m \\ - 2m[(1-2y)q^{\mu} + 2zp^{\mu}]\}u_p, \quad \text{(B.26)}$$

de modo que la ecuación (B.26) queda:

$$\bar{u}_{p'}N^{\mu}u_p = \bar{u}_{p'}\{\gamma^{\mu}[-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2] - \gamma^{\mu}z(1-y)q^2 \\ + 2z\gamma^{\mu}p\cdot q(y-1) + 2zmp'^{\mu} - 2yzq^{\mu}m + 2mz^2p^{\mu} - 2m[(1-2y)q^{\mu} + 2zp^{\mu}]\}u_p, \quad \text{(B.27)}$$

de (B.27) se toman los siguientes términos para reescribirlos de una manera más cómoda:

$$- \gamma^{\mu}z(1-y)q^2 + 2z\gamma^{\mu}p\cdot q(y-1) = z\gamma^{\mu}(y-1)q^{\mu} + 2z\gamma^{\mu}(y-1)p\cdot q \\ = z(y-1)\gamma^{\mu}(q^2 + 2p\cdot q), \quad \text{(B.28)}$$

dado que $p + q = p'$, si elevamos a la segunda potencia a ambos lados:

$$(p+q)^2 = p'^2$$
$$p^2 + 2p\cdot q + q^2 = p'^2$$
$$2p\cdot q + q^2 = p'^2 - p^2, \quad \text{(B.29)}$$

como $\not{p}^2 = p^2 = m^2$ y $\not{p}'^2 = p'^2$, entonces, del resultado anterior y (B.28) :

$$z(y-1)\gamma^\mu(q^2+2p\cdot q) = z(y-1)\gamma^\mu(p'^2-p^2) = z(y-1)\gamma^\mu \not{p}'^2 - z(y-1)\gamma^\mu m^2, \quad \text{(B.30)}$$

así que (B.30) puede ahora tratarse así:

$$\begin{aligned} z(y-1)\not{p}'^2 - z(y-1)\gamma^\mu m^2 &= z(y-1)\gamma^\mu \not{p}'\not{p}' - z(y-1)\gamma^\mu m^2 && \text{(B.31)}\\ &= z(y-1)(2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu)\not{p}' - z(y-1)\gamma^\mu m^2 && \text{(B.32)}\\ &= 2z(y-1)p'^\mu \not{p}' - z(y-1)\not{p}'\gamma^\mu \not{p}' && \text{(B.33)}\\ &- z(y-1)\gamma^\mu m^2, && \text{(B.34)} \end{aligned}$$

entonces el anterior término primero lo definimos como ζ para simplificar:

$$\zeta = 2z(y-1)p'^\mu \not{p}' - z(y-1)\not{p}'\gamma^\mu \not{p}' - z(y-1)\gamma^\mu m^2, \quad \text{(B.35)}$$

como $\bar{u}_{p'}\not{p}' = \bar{u}_{p'}m$, entonces la ecuación precedente se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \zeta &= 2z(y-1)p'^\mu m - z(y-1)m\gamma^\mu \not{p}' - z(y-1)\gamma^\mu m^2\\ &= 2z(y-1)p'^\mu m - z(y-1)m(2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu) - z(y-1)\gamma^\mu m^2\\ &= 2z(y-1)p'^\mu m - 2z(y-1)mp'^\mu + z(y-1)m\not{p}'\gamma^\mu - z(y-1)\gamma^\mu m^2 && \text{(B.36)}\\ &= 2z(y-1)p'^\mu m - 2z(y-1)mp'^\mu + z(y-1)m^2\gamma^\mu - z(y-1)\gamma^\mu m^2\\ &= 0, \end{aligned}$$

de forma que los términos (B.30) se reducen a:

$$-\gamma^\mu z(1-y)q^2 + 2z\gamma^\mu p\cdot q(y-1) = 0, \quad \text{(B.37)}$$

por lo tanto (B.27) será:

$$\bar{u}_{p'}\{\gamma^\mu[-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2] + 2zmp'^\mu - 2yzq^\mu m + 2mz^2p^\mu - 2m[(1-2y)q^\mu + 2zp^\mu]\}u_p, \quad \text{(B.38)}$$

y analizando lo términos de fuera del paréntesis a los cuales se les denominará Θ sin más necesidad que ahorrar espacio:

$$
\begin{aligned}
\Theta &= 2zmp'^{\mu} - 2yzq^{\mu}m + 2mz^2p^{\mu} - 2m[(1-2y)q^{\mu} + 2zp^{\mu}] \\
&= 2zmp'^{\mu} + 2mz^2p^{\mu} - 2myzq^{\mu} - 2mq^{\mu} + 4myq^{\mu} - 4mzp^{\mu} \\
&= 2zm(p^{\mu} + q^{\mu}) + 2mz^2p^{\mu} - 4mzp^{\mu} + m(4y - 2 - 2yz)q^{\mu} \\
&= 2mz^2p^{\mu} - 2zmp^{\mu} + 2zmq^{\mu} + m(4y - 2 - 2yz)q^{\mu} \\
&= 2mz^2p^{\mu} - 2zmp^{\mu} + m(2z + 4y - 2 - 2yz)q^{\mu} \\
&= 2mz^2(p'^{\mu} - q^{\mu}) - 2zm(p'^{\mu} - q^{\mu}) + m(2z + 4y - 2 - 2yz)q^{\mu} \\
&= 2mz^2p'^{\mu} - 2mz^2q^{\mu} - 2zmp'^{\mu} + 2zmq^{\mu} + m(2z + 4y - 2 - 2yz)q^{\mu} \\
&= mz^2p'^{\mu} + mz^2p'^{\mu} - mz^2q^{\mu} - mz^2q^{\mu} - zmp'^{\mu} - zmp'^{\mu} + zmq^{\mu} + zmq^{\mu} \\
&\quad + m(2z + 4y - 2 - 2yz)q^{\mu} \\
&= mz^2p'^{\mu} + mz^2(p^{\mu} + q^{\mu}) - mz^2q^{\mu} - mzp'^{\mu} - mz(p^{\mu} + q^{\mu}) + zmq^{\mu} \\
&\quad + m(2z - z^2 + z + 4y - 2 - 2yz)q^{\mu} \\
&= mz^2p'^{\mu} + mz^2p^{\mu} - mzp'^{\mu} - mzp^{\mu} + m(2z - z^2 + z + 4y - 2 - 2yz)q^{\mu} \\
&= mz^2(p'^2 + p^{\mu}) - mz(p'^{\mu} + p^{\mu}) + m(2z - z^2 + z + 4y - 2 - 2yz)q^{\mu} \\
&= (mz^2 - mz)(p'^{\mu} + p^{\mu}) + m(2z - z^2 + z + 4y - 2 - 2yz)q^{\mu} \\
&= mz(z-1)(p'^{\mu} + p^{\mu}) + m(2z - z^2 + z + 4y - 2 - 2yz)q^{\mu},
\end{aligned}
\tag{B.39}
$$

resultando al final que:

$$
\Theta = (p'^{\mu} + p^{\mu})mz(z-1) + m(2z - z^2 + z + 4y - 2 - 2yz)q^{\mu}, \tag{B.40}
$$

donde se va a factorizar el último término:

$$
\begin{aligned}
2z - z^2 + z + 4y - 2 - 2yz &= 3z - z^2 + 4y - 2 - 2yz \\
&= -z^2 + z(-2y + 3) + 2(2y - 1) \\
&= -z^2 + z(-2y + 1) + 2z + 2(2y - 1) \\
&= -z(z + 2) - z(2y - 1) + 2(2y - 1) \\
&= z(-z + 2) + (-z + 2)(2y - 1) \\
&= -(z - 2)(2y + z - 1),
\end{aligned}
\tag{B.41}
$$

como $z = 1 - x - y$ se llega a:

$$
\begin{aligned}
\Theta &= -(z - 2)(2y + z - 1) \\
&= -(z - 2)(2y + 1 - x - y - 1) \\
&= -(z - 2)(y - x) \\
&= (z - 2)(x - y),
\end{aligned}
\tag{B.42}
$$

al final, $\Theta = (z - 2)(x - y)$, y al sustituirla en la ecuación (B.40), queda:

$$\Theta = (p'^{\mu} + p^{\mu})mz(z-1) + q^{\mu}m(z-2)(x-y), \tag{B.43}$$

siendo el valor anterior de Θ sustituido en (B.38), se concluye que:

$$\begin{aligned}\bar{u}_{p'}N^{\mu}u_p = \bar{u}_{p'}\{\gamma^{\mu}[-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)q^2 + (1-2z-z^2)m^2] \\ + (p'^{\mu} + p^{\mu})mz(z-1) + q^{\mu}m(z-2)(x-y)\}u_p.\end{aligned} \tag{B.44}$$

Apéndice C

Identidad de Ward.

Comenzando por:

$$\Gamma^{\mu} = \gamma^{\mu} \cdot A + (p'^{\mu} + p^{\mu}) \cdot B + (p'^{\mu} - p^{\mu}) \cdot C, \tag{C.1}$$

en la cual se aplica q_{μ} por el lado derecho de (C.1):

$$q_{\mu}\Gamma^{\mu} = q_{\mu}\gamma^{\mu} \cdot A + q_{\mu}(p'^{\mu} + p^{\mu}) \cdot B + q_{\mu}(p'^{\mu} - p^{\mu}) \cdot C, \tag{C.2}$$

y sanduchando (C.2) entre $\bar{u}_{p'}$ y u_p queda:

$$q_{\mu}\Gamma^{\mu} = q_{\mu}\gamma^{\mu} \cdot A + q_{\mu}(p'^{\mu} + p^{\mu}) \cdot B + q_{\mu}(p'^{\mu} - p^{\mu}) \cdot C, \tag{C.3}$$

ahora, recordando que $q^{\mu} = p'^{\mu} - p^{\mu}$ y que $\bar{u}_{p'}\not{q}u_p = 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
\bar{u}_{p'}q_{\mu}\Gamma^{\mu}u_p &= \bar{u}_{p'}q_{\mu}\gamma^{\mu} \cdot Au_p + \bar{u}_{p'}q_{\mu}(p'^{\mu} + p^{\mu}) \cdot Bu_p + \bar{u}_{p'}q_{\mu}(p'^{\mu} - p^{\mu}) \cdot Cu_p \\
&= \bar{u}_{p'}\not{q}u_p \cdot A + \bar{u}_{p'}(p'_{\mu} - p_{\mu})(p'^{\mu} + p^{\mu})u_p \cdot B + \bar{u}_{p'}q_{\mu}q^{\mu}u_p \cdot C \\
&= \bar{u}_{p'}(p'_{\mu}p'^{\mu} - p_{\mu}p'^{\mu})u_p \cdot B + \bar{u}_{p'}q^2u_p \cdot C \\
&= \bar{u}_{p'}(m^2 - m^2)u_p \cdot B + \bar{u}_{p'}q^2u_p \cdot C \\
&= \bar{u}_{p'}q^2u_p \cdot C,
\end{aligned}$$

como q no es necesariamente igual a cero, y la identidad de Ward debe satisfacerse en la QED, entonces la única posibilidad es que $C = 0$ quedando así demostrado.

Apéndice D

Numerador del aporte del campo escalar neutro.

Retomando las relaciones que se obtuvieron por medio del cálculo del diagrama representado en la figura 5.6 y el cálculo del denominador donde se aplicaron los parámetros de Feynman, se tiene que:

$$p' = p + q, \quad k' = k + q, \quad x + y + z = 1, \quad \text{y} \quad k = l + xp - zq. \tag{D.1}$$

El siguiente paso es reescribir a los momentos k y k' en términos de p y p'. Primero se va a calcular k:

$$\begin{aligned} k &= l + xp - zq \\ &= l + xp - z(p' - p) \\ &= l + xp - zp' + zp \\ &= l - zp' + (x + z)p \\ &= l - zp' + (1 - y)p, \end{aligned} \tag{D.2}$$

y ahora se va a calcular k':

$$\begin{aligned} k' &= k + q \\ &= l + xp - zq + q \\ &= l + xp - z(p' - p) + p' - p \\ &= l + xp - zp' + zp + p' - p \\ &= l + (1 - z)p' + (x + z - 1)p \\ &= l - yp + (1 - z)p'. \end{aligned} \tag{D.3}$$

Entonces el primer término del numerador (5.158) se va a escribir como:

$$
\begin{aligned}
\not{k}'\gamma^\mu\not{k} &= [\not{l} - y\not{p} + (1-z)\not{p}']\gamma^\mu[\not{l} - z\not{p}' + (1-y)\not{p}] \\
&= [-y\not{p} + (1-z)m_j]\gamma^\mu[-z\not{p}' + (1-y)m_i] \\
&= [(1-z)m_j - y\not{p}]\gamma^\mu[(1-y)m_i - z\not{p}'] \\
&= -z(1-z)m_j\gamma^\mu\not{p}' - y(1-y)m_i\not{p}\gamma^\mu + yz\not{p}\gamma^\mu\not{p}' \\
&= -z(1-z)m_j(2p'^\mu - \gamma^\mu\not{p}') - y(1-y)m_i(2p^\mu - \gamma^\mu\not{p}) + yz\not{p}\gamma^\mu\not{p}' \\
&= -2z(1-z)m_jp'^\mu - 2y(1-y)m_ip^\mu + yz\not{p}\gamma^\mu\not{p}' \\
&= -2z(1-z)m_jp'^\mu - 2y(1-y)m_ip^\mu + yz(m_i+m_j)(p'^\mu + p^\mu) \\
&= -z(1-z)m_j(p'^\mu + p^\mu) - y(1-y)m_i(p'^\mu + p^\mu) + yz(m_i+m_j)(p'^\mu + p^\mu) \\
&= [-z(1-z)m_j - y(1-y)m_i + yz(m_i+m_j)](p'^\mu + p^\mu) \\
&= [-z(1-z)m_j - y(1-y)m_i + yzm_i + yzm_j](p'^\mu + p^\mu) \\
&= \{[-z(1-z) + yz]m_j + [-y(1-y) + yz]m_i\}(p'^\mu + p^\mu) \\
&= [z(y+z-1)m_j + y(y+z-1)m_i](p'^\mu + p^\mu) \\
&= [z(-x)m_j + y(-x)m_i](p'^\mu + p^\mu) \\
&= -x(ym_i + zm_j)(p'^\mu + p^\mu),
\end{aligned}
\tag{D.4}
$$

donde se tuvo en cuenta que:

$$
\begin{aligned}
\not{p}\gamma^\mu\not{p}' &= \not{p}(2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu) \\
&= 2m_ip'^\mu - \not{p}\not{p}'\gamma^\mu \\
&= 2m_ip'^\mu - (2p\cdot p' - \not{p}'\not{p})\gamma^\mu \\
&= 2m_ip'^\mu - 2p\cdot p'\gamma^\mu + m_j\not{p}\gamma^\mu \\
&= 2m_ip'^\mu - (m_i^2 + m_j^2 - q^2)\gamma^\mu + m_j(2p^\mu - \gamma^\mu\not{p}) \\
&= 2m_ip'^\mu - (m_i^2 + m_j^2 - q^2)\gamma^\mu + m_j(2p^\mu - m_i\gamma^\mu) \\
&= 2m_ip'^\mu + 2m_jp^\mu - m_im_j\gamma^\mu \\
&= 2m_ip'^\mu + 2m_jp^\mu \\
&= m_ip'^\mu + m_ip'^\mu + m_jp^\mu + m_jp^\mu \\
&= m_ip'^\mu + m_i(p^\mu + q^\mu) + m_jp^\mu + m_j(p'^\mu - q^\mu) \\
&= m_i(p'^\mu + p^\mu) + m_j(p'^\mu + p^\mu) \\
&= (m_i + m_j)(p'^\mu + p^\mu).
\end{aligned}
\tag{D.5}
$$

Ahora el segundo término del numerador (5.158) debe también reescribirse, así:

$$
\begin{aligned}
\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu \not{k} &= [\not{l} - y\not{p} + (1-z)\not{p}']\gamma^\mu + \gamma^\mu[\not{l} - z\not{p}' + (1-y)\not{p}]\not{k}'\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{k} \\
&= [-y\not{p} + (1-z)m_j]\gamma^\mu + \gamma^\mu[-z\not{p}' + (1-y)m_i] \\
&= -y\not{p}\gamma^\mu - z\gamma^\mu\not{p}' \\
&= -y(2p^\mu - \gamma^\mu\not{p}) - z(2p'^\mu - \gamma^\mu\not{p}') \\
&= -y(2p^\mu - m_i\gamma^\mu) - z(2p'^\mu - m_j\gamma^\mu) \\
&= -2yp^\mu - 2zp'^\mu \\
&= -yp^\mu - yp^\mu - zp'^\mu - zp'^\mu \\
&= -yp^\mu - y(p'^\mu - q^\mu) - zp'^\mu - z(p^\mu + q^\mu) \\
&= -yp^\mu - yp'^\mu - zp'^\mu - zp^\mu \\
&= -y(p^\mu + p'^\mu) - z(p'^\mu + p^\mu) \\
&= -(y+z)(p'^\mu + p^\mu) \\
&= -(1-x)(p'^\mu + p^\mu),
\end{aligned}
\tag{D.6}
$$

con estos resultados finalmente el numerador se puede expresar como se debe, para poderlo comparar con la identidad de Gordon.

Apéndice E

Análisis de datos con la función χ^2

El cálculo del momento magnético anómalo del muón que será el foco del análisis fenomenológico requiere la implementación de un análisis de χ^2 sobre la partícula escalar neutra que media la interacción. A fin de fundamentar este análisis, se esboza aquí la aproximación heurística al método de χ^2 presentado por Rojas en [43].

Se dice que una expresión teórica $O_i^{th}(a_j)$, que depende de ciertos parámetros a_j es consistente con el valor experimental del observable $O_i^{exp} = O_i^{exp} \pm \sigma_i$ si se satisface:

$$\left|O^{exp} - O_i^{th}(a_j)\right| \leq \sigma_i^{\text{total}}. \tag{E.1}$$

donde σ_i^{total} es la suma en cuadratura del error teórico más el experimental. Teniendo en cuenta que σ_i^{total} es positivo, dividiendo en ambos lados se puede reescribir esta expresión como:

$$\left|\frac{O^{exp} - O_i^{th}(a_j)}{\sigma_i^{\text{total}}}\right| \leq 1, \tag{E.2}$$

donde se ha elevado al cuadrado la expresión.

Si se dan N observables y se hace la suma sobre i en la expresión anterior se obtiene la condición:

$$\sum_i^N \left|\frac{O^{exp} - O_i^{th}(a_j)}{\sigma_i^{\text{total}}}\right|^2 \leq \sum_i^N 1 = N. \tag{E.3}$$

Definiendo:

$$\text{pull}_i = \frac{O^{exp} - O_i^{th}(a_j)}{\sigma_i^{\text{total}}} \tag{E.4}$$

se tiene la condición:

$$\chi^2 = \sum_i |\text{pull}_i|^2 \leq N \tag{E.5}$$

Si la predicción teórica para el observable $O_i^{th}(a_j)$ es idéntica a la predicción experimental O_i^{ex} entonces el pull correspondiente es cero, i.e., $\mathrm{pull}_i = 0$. En un caso ideal, todos los pull son iguales a cero:

$$\mathrm{pull}_i = 0, \quad \mathrm{para} \quad \mathrm{i} = 1, 2, ..., N. \tag{E.6}$$

Estas condiciones constituyen un sistema de N ecuaciones con p parámetros $a_1, a_2, ..., a_p$. Si los observables dependen linealmente con los parámetros, este sistema de N ecuaciones tendrá una única solución si el número de parámetros es igual al número de ecuaciones N. Para este caso en particular (N parámetros y N ecuaciones) el valor de χ^2 es igual a cero. Se define ahora el número de grados de libertad (d.o.f) como:

$$d.o.f = N - P, \tag{E.7}$$

y la bondad del fit como:

$$\mathrm{bondad} \quad \mathrm{del} \quad \mathrm{fit} = \frac{\chi^2_{min}}{\mathrm{d.o.f}}. \tag{E.8}$$

En el trabajo de grado, el caso es trivial (N parámetros y N ecuaciones) $\mathrm{d.o.f} = 0$ y la bondad del fit es indeterminada, i.e., $\frac{\chi^2_{min}}{\mathrm{d.o.f}} = \frac{0}{0}$. Claramente tener N ecuaciones y N parámetros no tiene mucho significado ya qye, en principio, se puede hacer que χ^2 sea igual a cero y por lo tanto, no es la bondad del modelo sino simplemente una consecuencia de tener muchos parámetros. Para que el resultado tenga significado se va a exigir dos condiciones (en un caso ideal):

$$\chi^2 \leq N - P, \quad P \gg N. \tag{E.9}$$

En el caso trivial que se ha considerado $N = P$, no satisface las condiciones ya que $N - P = 0$. Dividiendo la primera condición entre $N - P$ se obtiene:

$$\frac{\chi^2}{N - P} \leq 1, \quad P \gg N. \tag{E.10}$$

La segunda condición es importante porque significa que con pocos parámetros se puede explicar datos.

E.1. Niveles de confianza

Considerando el resultado experimental para un observable:

$$\langle O_i \rangle = O_i^{exp} \pm \sigma_i. \tag{E.11}$$

Se va a comenzar por establecer que $O_i^{exp} = \langle x_i \rangle$ representa el valor esperado de una variable aleatoria x_i, que para efectos prácticos se va a identificar como el parámetro que va a ser ajustado, es decir O_i^{th}.

Esta interpretación siempre puede hacerse ya que es simplemente un cambio de variables. Como se tiene N observables experimentales y P parámetros, entonces lo que sucede es que ahora se va a identificar los parámetros con O_i^{th}, pero de estos últimos hay $N \ll P$, lo único que debe tenerse en cuenta es que muchos de estos N parámetros están relacionados entre sí. Se puede preguntar cuál es la probabilidad de hacer una medida adicional x y encontrar el observable en el intervalo real $(\langle x\rangle - \sigma_i, \langle x\rangle + \sigma_i)$. Si se da una densidad de probabilidad $f(x)$ entonces la probabilidad es:

$$P(\langle x\rangle - \sigma_i, \langle x\rangle + \sigma_i) = \int_{\langle x\rangle - \sigma_i}^{\langle x\rangle + \sigma_i} f(x)dx, \tag{E.12}$$

donde la densidad de probabilidad está normalizada. En el caso de la distribución gaussiana se tiene:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}}. \tag{E.13}$$

Para ésta densidad de probabilidad se tiene que:

$$P(\langle x\rangle - \sigma_i, \langle x\rangle + \sigma_i) = \int_{\langle x\rangle - \sigma_i}^{\langle x\rangle + \sigma_i} \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}} dx \sim 0.68, \tag{E.14}$$

esto significa que hay una probabilidad del $68\,\%$ de que al hacer un experimento y medir x el resultado se encuentre en el intervalo $(\langle x\rangle - \sigma_i, \langle x\rangle + \sigma_i)$. Se dirá que el resultado del experimento estará en este intervalo con un nivel de confianza del $68\,\%$. Si se define la función χ^2 para este único observable:

$$\chi^2 = \left(\frac{(x - \langle x\rangle)^2}{\sigma}\right)^2, \tag{E.15}$$

entonces los valores para χ^2 en los límites de este intervalo son:

$$\chi^2(x) = \Big|_{\langle x\rangle \pm \sigma} = 1. \tag{E.16}$$

En el caso que corresponde el valor mínimo es $\xi^2 = 0$ cuando $x = \langle x\rangle$, entonces resulta:

$$\chi^2(x) = \Big|_{\langle x\rangle \pm \sigma} - \chi^2_{min} = 1. \tag{E.17}$$

Se puede decir que el intervalo con el nivel de confianza de un $68\,\%$ tiene como límites la solución de la ecuación. El intervalo con un nivel de confianza de un $95\,\%$ se obtiene de:

$$P(\langle x\rangle - \sqrt{3.84}\sigma_i, \langle x\rangle + \sqrt{3.84}\sigma_i) = \int_{\langle x\rangle - \sqrt{3.84}\sigma_i}^{\langle x\rangle + \sqrt{3.84}\sigma_i} \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}} dx \sim 0.95. \tag{E.18}$$

En los límites del intervalo de confianza:

$$\chi^2(x) = \Big|_{\langle x\rangle \pm \sigma} - \chi^2_{min} = 3{,}84, \tag{E.19}$$

y se puede afirmar que el intervalo con un nivel de confianza de un $95\,\%$ tiene como límites la solución de ésta ecuación. Si se tienen varios parámetros x_i, cada uno con una función de probabilidad:

$$f(x_i) = \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}}. \tag{E.20}$$

por los axiomas de probabilidad, la densidad de probabilidad para los parámetros en el producto de las $f(x_i)$:

$$L = \prod_i^P f(x_i) = \prod_i^P \frac{1}{\sigma_i\sqrt{2}} e^{-\frac{(x-\langle x\rangle)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{(2\pi)^{P/2}\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_P} e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \tag{E.21}$$

donde:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(x-\langle x\rangle)^2}{\sigma_i^2}. \tag{E.22}$$

Bibliografía

[1] R Aaij et al. Measurement of Form-Factor-Independent Observables in the Decay $B^0 \to K^{*0}\mu^+\mu^-$. *Phys. Rev. Lett.*, 111:191801, 2013.

[2] B. Abi et al. Measurement of the Positive Muon Anomalous Magnetic Moment to 0.46 ppm. *Phys. Rev. Lett.*, 126(14):141801, 2021.

[3] Prateek Agrawal, Zackaria Chacko, and Christopher B. Verhaaren. Leptophilic Dark Matter and the Anomalous Magnetic Moment of the Muon. *JHEP*, 08:147, 2014.

[4] M. Adeel Ajaib, Ilia Gogoladze, Qaisar Shafi, and Cem Salih Ün. Split sfermion families, Yukawa unification and muon $g-2$. *JHEP*, 05:079, 2014.

[5] Usama Al-Binni et al. Project X: Physics Opportunities. 6 2013.

[6] T. Aoyama et al. The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model. *Phys. Rept.*, 887:1–166, 2020.

[7] Richard L. Arnowitt, Bhaskar Dutta, and B. Hu. Dark matter, muon g-2 and other SUSY constraints. In *4th International Conference on Physics Beyond the Standard Model: Beyond the Desert (BEYOND 03)*, pages 25–41, 10 2003.

[8] Christopher Aubin, Thomas Blum, Maarten Golterman, Kim Maltman, and Santiago Peris. The muon anomalous magnetic moment, a view from the lattice. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, 35:1460418, 2014.

[9] Christopher Aubin, Thomas Blum, Maarten Golterman, and Santiago Peris. Model-independent parametrization of the hadronic vacuum polarization and g-2 for the muon on the lattice. *Phys. Rev. D*, 86:054509, 2012.

[10] Christopher Aubin, Thomas Blum, Maarten Golterman, and Santiago Peris. Hadronic vacuum polarization with twisted boundary conditions. *Phys. Rev. D*, 88(7):074505, 2013.

[11] J. Bailey et al. Final Report on the CERN Muon Storage Ring Including the Anomalous Magnetic Moment and the Electric Dipole Moment of the Muon, and a Direct Test of Relativistic Time Dilation. *Nucl. Phys. B*, 150:1–75, 1979.

[12] Brian Batell, Ayres Freitas, Ahmed Ismail, and David Mckeen. Flavor-specific scalar mediators. *Phys. Rev. D*, 98(5):055026, 2018.

[13] G. W. Bennett et al. Final Report of the Muon E821 Anomalous Magnetic Moment Measurement at BNL. *Phys. Rev. D*, 73:072003, 2006.

[14] J. Beringer et al. Review of Particle Physics (RPP). *Phys. Rev. D*, 86:010001, 2012.

[15] H. A. Bethe. The Electromagnetic shift of energy levels. *Phys. Rev.*, 72:339–341, 1947.

[16] G. Breit. Does the Electron Have an Intrinsic Magnetic Moment? *Phys. Rev.*, 72:984–984, 1947.

[17] Sebastian Andreas Burri et al. Pseudoscalar-pole contributions to the muon $g-2$ at the physical point. *PoS*, LATTICE2022:306, 2023.

[18] Wei-Chi Chiu, Chao-Qiang Geng, and Da Huang. Correlation Between Muon $g-2$ and $\mu \to e\gamma$. *Phys. Rev. D*, 91(1):013006, 2015.

[19] Hooman Davoudiasl, Hye-Sung Lee, and William J. Marciano. Muon g-2, rare kaon decays, and parity violation from dark bosons. *Phys. Rev. D*, 89(9):095006, 2014.

[20] C. A. de S. Pires and P. S. Rodrigues da Silva. Scalar scenarios contributing to (g-2)(muon) with enhanced Yukawa couplings. *Phys. Rev. D*, 64:117701, 2001.

[21] P. A. M. Dirac. The Quantum theory of electron. 2. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 118:351, 1928.

[22] Paul A. M. Dirac. The quantum theory of the electron. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 117:610–624, 1928.

[23] Motoi Endo, Koichi Hamaguchi, Teppei Kitahara, and Takahiro Yoshinaga. Probing Bino contribution to muon $g-2$. *JHEP*, 11:013, 2013.

[24] Lisa L. Everett, Gordon L. Kane, Stefano Rigolin, and Lian-Tao Wang. Implications of muon g-2 for supersymmetry and for discovering superpartners directly. *Phys. Rev. Lett.*, 86:3484–3487, 2001.

[25] R. P. Feynman. Relativistic cutoff for quantum electrodynamics. *Phys. Rev.*, 74:1430–1438, 1948.

[26] Richard Phillips Feynman. *Quantum Electrodynamics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1998.

[27] H. M. Foley and P. Kusch. On the Intrinsic Moment of the Electron. *Phys. Rev.*, 73:412–412, 1948.

[28] Ayres Freitas, Joseph Lykken, Stefan Kell, and Susanne Westhoff. Testing the Muon g-2 Anomaly at the LHC. *JHEP*, 05:145, 2014. [Erratum: JHEP 09, 155 (2014)].

[29] Walther Gerlach and Otto Stern. The Magnetic Moment of Silver Atoms. *Z. Phys.*, 9:353–355, 1922.

[30] Valerio Gherardi, David Marzocca, and Elena Venturini. Low-energy phenomenology of scalar leptoquarks at one-loop accuracy. *JHEP*, 01:138, 2021.

[31] Maarten Golterman, Kim Maltman, and Santiago Peris. Tests of hadronic vacuum polarization fits for the muon anomalous magnetic moment. *PoS*, LATTICE2013:300, 2014.

[32] Arno Heister. Observation of an excess at 30 GeV in the opposite sign di-muon spectra of $\mathrm{Z} \to b\bar{b} + \mathrm{X}$ events recorded by the ALEPH experiment at LEP. 10 2016.

[33] Deog Ki Hong and Du Hwan Kim. Composite (pseudo) scalar contributions to muon g $-$ 2. *Phys. Lett. B*, 758:370–372, 2016.

[34] Masahiro Ibe, Shigeki Matsumoto, Tsutomu T. Yanagida, and Norimi Yokozaki. Heavy Squarks and Light Sleptons in Gauge Mediation ˜From the viewpoint of 125 GeV Higgs Boson and Muon g-2˜. *JHEP*, 03:078, 2013.

[35] Fred Jegerlehner. Application of Chiral Resonance Lagrangian Theories to the Muon $g - 2$. *Acta Phys. Polon. B*, 44(11):2257–2266, 2013.

[36] Chris Kelso, P. R. D. Pinheiro, Farinaldo S. Queiroz, and William Shepherd. The Muon Anomalous Magnetic Moment in the Reduced Minimal 3-3-1 Model. *Eur. Phys. J. C*, 74:2808, 2014.

[37] A. J. Krasznahorkay et al. Observation of Anomalous Internal Pair Creation in Be8 : A Possible Indication of a Light, Neutral Boson. *Phys. Rev. Lett.*, 116(4):042501, 2016.

[38] Manfred Lindner, Moritz Platscher, and Farinaldo S. Queiroz. A Call for New Physics : The Muon Anomalous Magnetic Moment and Lepton Flavor Violation. *Phys. Rept.*, 731:1–82, 2018.

[39] Andreas Nyffeler. Status of hadronic light-by-light scattering in the muon $g - 2$. *Nuovo Cim. C*, 037(02):173–178, 2014.

[40] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995.

[41] Randolf Pohl et al. The size of the proton. *Nature*, 466:213–216, 2010.

[42] Farinaldo S. Queiroz and William Shepherd. New Physics Contributions to the Muon Anomalous Magnetic Moment: A Numerical Code. *Phys. Rev. D*, 89(9):095024, 2014.

[43] Eduardo Rojas. Análisis de datos con la función χ^2.

[44] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 6 1996.

[45] Julian S. Schwinger. On Quantum electrodynamics and the magnetic moment of the electron. *Phys. Rev.*, 73:416–417, 1948.

[46] Julian S. Schwinger. Quantum electrodynamics. 2. Vacuum polarization and selfenergy. *Phys. Rev.*, 75:651, 1948.

[47] Julian S. Schwinger. Quantum electrodynamics. I A covariant formulation. *Phys. Rev.*, 74:1439, 1948.

[48] Matthias Steinhauser. Towards analytic $(g-2)_\mu$ at four loops. *Int. J. Mod. Phys. Conf. Ser.*, 35:1460417, 2014.

[49] Sin-Itiro Tomonaga and J. R. Oppenheimer. On Infinite Field Reactions in Quantum Field Theory. *Phys. Rev.*, 74:224–225, 1948.

[50] G. C. Wick. Properties of bethe-salpeter wave functions. *Phys. Rev.*, 96:1124–1134, Nov 1954.