

Electrodinámica Escalar de Primer Orden

German Enrique Ramos Zambrano
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas
Universidad de Nariño
gramos@udenar.edu.co

Abstract

En este trabajo se estudiara la electrodinámica escalar ($SQED_4$) y la electrodinámica escalar de primer orden en el formalismo de plano nulo. Se utilizara el formalismo de Dirac para sistemas con vínculos con el fin de realizar un análisis detallado de la estructura de vínculos en ambas teorías. Se impondrán apropiadas condiciones de de frontera en los campos para poder fijar el subconjunto oculto de vínculos de primera clase que generan transformaciones de gauge impropias y así obtener una única inversa de la matriz de vínculos de segunda clase. Finalmente, escogiendo las condiciones de gauge de plano nulo, se determinan los corchetes de Dirac asociadas a las variables dinámicas independientes.

Índice general

1. Introducción	5
2. El Plano Nulo	11
2.1. Álgebra de Poincaré	18
2.2. Problema de Valores Inicias Sobre el Plano Nulo	21
3. Electrodinámica Escalar SQED₄ en las Coordenadas de Plano Nulo	29
3.1. Estructura de vínculos de la SQED ₄ en las Coordenadas de Plano Nulo	31
3.2. Clasificación de los Vínculos	38
3.3. Ecuaciones de Movimiento y Condiciones de Gauge	42
3.4. Eliminación de los Vínculos	44
3.5. Inversion de Vínculos Escalares	49
3.6. Corchetes de Dirac	52
4. Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)	57
4.1. Introducción	57
4.2. Ecuación de Onda Relativista	61
4.3. Ecuación de DKP y las propiedades de las matrices beta	70
4.4. Ecuación de DKP conjugada	73
4.5. Covarianza de Lorentz de la Ecuación de DKP	77
4.6. Representaciones irreducibles de la teoría DKP	85
4.6.1. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de KGF	86

4.6.2.	Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de Proca	91
4.7.	Representación de las Matrices Beta	98
4.8.	Formulación Lagrangiana de la teoría de DKP	101
4.9.	Interacción con Campo Electromagnético	116
5.	Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) Libre en las Coordenadas de Plano Nulo	123
5.1.	Introducción	123
5.2.	Ecuación de DKP en $1 + 1$ Dimensiones	124
5.2.1.	Estructura de Vínculos	126
5.2.2.	Proyección de los Vínculos y Corchetes de Dirac	139
5.3.	Ecuación de DKP en $3 + 1$ Dimensiones	151
5.3.1.	Estructura de Vínculos	153
5.3.2.	Ecuaciones de movimiento	164
5.3.3.	Corchetes de Dirac	167
6.	Electrodinámica Escalar de primer Orden en las Coordenadas de Plano Nulo	183
6.1.	Introducción	183
6.2.	Electrodinámica Escalar de Primer Orden en $1 + 1$ Dimensiones	184
6.2.1.	Clasificación de los Vínculos	199
6.2.2.	Ecuaciones de Movimiento	206
6.2.3.	Proyección de los Vínculos	212
6.2.4.	Inversion Vínculos del Sector Electromagnético	214
6.2.5.	Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac	219
6.3.	Electrodinámica Escalar de Primer Orden en $3 + 1$ Dimensiones	239
6.3.1.	Clasificación de los Vínculos	256
6.3.2.	Ecuaciones de Movimiento	261
6.3.3.	Eliminación de los Vínculos de Primera Clase	267
6.3.4.	Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP	271
6.3.5.	Conjunto Final de Corchetes de Dirac	289
7.	Conclusiones	295
	Bibliografía	298

Capítulo 1

Introducción

El éxito de la ecuación de Dirac para describir partículas relativistas de espín $\frac{1}{2}$ inspiró a algunos investigadores en buscar ecuaciones de onda de primer orden que describan partículas de espín 0 y espín 1. De esta manera, G. Petiau [1], R. Duffin [2], y N. Kemmer [3] propusieron una ecuación de primer orden para describir partículas de espín 0 y espín 1 en una formulación única que sigue las ideas propuestas por los trabajos de Broglie [4]. Ésta ecuación de primer orden es conocida como ecuación de Duffin-Kemmer-Petiau o también como teoría DKP y su forma matricial es muy similar a la ecuación de Dirac con la diferencia que las matrices equivalentes obedecen un álgebra diferente.

Una característica fundamental de la teoría de DKP es que su representación en un espacio tiempo $(3 + 1)$ dimensional puede ser descompuesta en tres representaciones irreducibles: La representación 5×5 esta asociada a partículas de espín 0, la representación 10×10 correspondiente a partículas de espín 1 y una representación 1×1 la cual no tiene significado físico. Durante el periodo de 1939 hasta aproximadamente 1970 la mayoría de los trabajos acerca de la ecuación DKP fue dirigida al desarrollo del formalismo e investigación de partículas cargadas DKP en interacción con un campo electromagnético. Cálculos correspondientes a diferentes procesos basados sobre las ecuaciones de DKP y de Klein-Gordon condujeron a resultados idénticos en aproximaciones de on loop [5]. Una importante contribución para entender esas ecuaciones fue hecha por A. Wightman [6], quien mostró que cuando el campo de DKP

es acoplado al campo electromagnético las ecuaciones de DKP para partículas de espín 1 es estable bajo suaves perturbaciones locales del campo externo.

A la mitad del siglo pasado, Dirac impuso dos requerimientos sobre sistemas dinámicos relativistas: relatividad espacial y que las ecuaciones de movimiento deban ser expresadas en forma Hamiltoniana. Estas condiciones no definen el sistema dinámico pero limitan las posibles formas que éste pueda tener. Una completa descripción de la dinámica implica que se especifique todas las posibles interacciones que el sistema pueda tener. La evolución de un sistema en mecánica no relativista es determinada por el Hamiltoniano: el estado del sistema en un instante $t = \text{cte}$ permite calcular su comportamiento en un instante posterior. Dirac propuso tres diferentes formas de dinámica relativista dependiendo del tipo de superficies donde las condiciones iniciales fueran consideradas [7]. La primera forma, identificada como *frente forma*, es aquella cuando se selecciona una superficie tipo espacio y es la que frecuentemente se utiliza. La segunda forma, *punto forma*, es aquella consistente en considerar una rama de la superficie hiperbólica $x^\mu x_\mu = \kappa^2$, $x_0 > 0$ y finalmente, *el frente forma*, es una superficie de una simple onda de luz comúnmente identificada como *formalismo de plano nulo*.

En el frente forma dos puntos a tiempos iguales poseen separación tipo espacio y por tanto los campos definidos en esos puntos son cantidades independientes. Sin embargo, en el plano nulo la situación difiere porque el principio de micro-causalidad conduce a un requerimiento de localidad en las componentes transversales y de no localidad en la coordenada longitudinal [8]. Las coordenadas de plano nulo no son relacionadas por una transformación de Lorentz a las coordenadas tradicionales utilizadas en el frente forma y como tal la descripción del mismo contenido físico en una teoría dinámica sobre el plano nulo podría resultar diferente del aquella descrita en el tratamiento convencional [9].

Una importante ventaja señalada por Dirac de la formulación de plano nulo es que siete de los generadores del grupo de Poincare son cinemáticos mientras que en el tratamiento convencional solo seis tiene esta propiedad. Otra interesante característica de una teoría relativista descrito en el plano nulo

es que da origen a Lagrangianos singulares, es decir, a sistemas dinámicos con vínculos [10]. Esto en general conduce a una reducción en el número de operadores de campo independientes en el correspondiente espacio de fase.

La ecuación de DKP ha sido utilizada con éxito en el análisis de interacciones relativistas entre hadrones y núcleos. Esta ecuación relativista de primer orden permite describir de una manera unificada bosones de espín 0 y 1, resultando así en un mecanismo alternativo a las formulaciones convencionales de segundo orden de Klein-Gordon y Proca. Las ecuaciones de DKP se asemejan mucho a la ecuación de Dirac, no obstante las álgebras asociadas a las matrices β_μ difieren substancialmente de las matrices γ_μ . La equivalencia entre las ecuaciones de DKP y las ecuaciones de Klein-Gordon y Proca fue demostrada para el caso de las interacciones vectoriales minimamente acopladas [11] aunque la equivalencia entre la ecuación de DKP y la ecuación de Proca ya tuvo un precedente si no se consideran corrientes parcialmente conservadas en las interacciones [12].

La gran variedad de acoplamientos incapaces de ser expresados en la formulación de Klein-Gordon y Proca garantiza mayor contenido físico para sistemas descritos a partir de la teoría de DKP. Los acoplamientos se clasifican de acuerdo al comportamiento de los mismos bajo transformaciones de Lorentz. Los acoplamientos escalares y vectoriales han sido utilizados para describir la dispersión elástica mesón-nucleón con mejores resultados experimentales comparados a aquellos obtenidos a partir del formalismo de Klein-Gordon y Proca [13].

Al investigar la equivalencia entre las teorías de DKP y su contraparte de segundo orden, algunos resultados recientes fueron adicionados como la prueba de equivalencia entre los elementos físicos de la matriz S para el campo de partículas escalares interactuando con los campos externos electromagnéticos, Yang-Mills y gravitacional [14]. La teoría de DKP mostró su equivalencia a las teorías de segundo orden cuando presentan un acoplamiento mínimo al campo electromagnético donde fueron analizados también los términos anómalos que surgen en el Hamiltoniano de la ecuación de onda acoplada [15]. La teoría de DKP relativista ha sido aplicada con éxito en la mecánica cuántica en el

estudio de osciladores de bosones escalares y vectoriales [16], de osciladores en espacios no conmutativos [17], en la QCD [18], en el estudio de Hamiltoniano covariante [19], en la condensación de Bose-Einstein [20], en el campo electromagnético a temperatura finita [21], etc.

La electrodinámica escalar de primer orden describe un campo de DKP en la representación 5×5 con acoplamiento mínimo a un campo electromagnético. Dada la estructura singular de la densidad Lagrangiana que describe el campo DKP y la naturaleza gauge del campo de Maxwell, un análisis consistente de la teoría requiere un procedimiento canónico apropiado que garantice compatibilidad entre los vínculos que surgirán de la teoría y un apropiado conjunto de corchetes de Poisson. Ahora, siendo que el estudio se realizara en las coordenadas de plano nulo, se deberá construir una representación adecuada de las matrices β_μ y del campo fundamental de DKP. Además, se deberá esperar que la estructura de vínculos que surgen en la teoría sea, de alguna manera, equivalente a los resultados que ya se han derivado en las coordenadas usuales [15]. Siendo que se deben obtener un conjunto de corchetes consistente que los vínculos de primera clase, apropiadas condiciones de gauge tendrán que ser derivadas.

Neville and Rohrlich [22] observaron que la cuantización sobre el plano nulo significa cuantizar sobre las superficies características de las ecuaciones de campo clásicas, es decir se debe especificar condiciones sobre ambas características, $x^+ = \text{cte}$, $x^- = \text{cte}$, y no solo sobre un plano nulo. Mc Cartor's [23] demostró que al cuantizar fermiones sin masa en $(1 + 1)$ en ambas características implica que existan conmutadores a iguales x^+ y x^- en la descripción Hamiltoniana y así dos parámetros de evolución temporal dificultara determinar una única formulación Hamiltoniana. Sin embargo, Steinhardt [24] destaco un importante problema asociado al procedimiento de cuantización sobre el plano nulo. Después que la condición de gauge ha sido introducida a la teoría y los vínculos han sido eliminados de la misma de tal manera que no existan mas transformaciones de gauge propias, existen transformaciones de gauge impropias que son consecuencia de no definir apropiadamente las condiciones de frontera y que por ende no se pueden eliminar introduciendo condiciones de gauge adicionales ya que pueden eliminar posibles estados físicos [25].

Además, la presencia de las transformaciones de gauge impropias no permite definir coherentemente los conmutadores de la teoría.

Una característica fundamental de una teoría relativista sobre el plano nulo es que ésta describe un sistema dinámico con vínculos, por ende, el procedimiento estándar de Dirac [26] sera utilizado para analizar consistentemente la teoría.

Neville and Rohrlich [27] estudiaron la electrodinámica escalar SQED₄ en la cual un campo de espin 0 cuantizado interactua con un campo electromagnético cuantizado de fondo. La electrodinámica cuántica es obtenida considerando que los campos escalar y electromagnético son operadores en un espacio de Hilbert y requiriendo que las ecuaciones de campo asociadas deberán ser implementadas con convenientes relaciones de conmutación. La dinámica consistirá en la evolución del sistema fuera de un dado plano nulo con relaciones de conmutación entre los operadores especificadas sobre el plano nulo siempre y cuando ellas no involucren derivadas con respecto al parámetro de evolución temporal χ^+ .

Los autores del presente proyecto realizaron un estudio canónico detallado de SQED₄ sobre las coordenadas de plano nulo [28]. Se mostró que la SQED₄ sobre el plano nulo posee una ley de Gauss que resulta de una combinación lineal de los vínculos asociados al sector electromagnético y escalar consecuencia de los vínculos de segunda clase que resultan del sector escalar. Cuando la condición de gauge de plano nulo se utiliza los vínculos de primera clase se transforman en de segunda y apropiadas condiciones de frontera sobre los campos permite eliminar el subconjunto oculto de vínculos de primera clase. Los conmutadores derivados, via principio de correspondencia de los corchetes de Dirac, resultan consistente con los resultados presentados en la literatura [29] siendo que en [28] los conmutadores fueron calculados cuantizando los corchetes de Dirac derivados a nivel clásico y y siguiendo un cuidadoso análisis de la estructura de vínculos de SQED₄.

Capítulo 2

El Plano Nulo

Dirac estableció que un sistema relativista debería cumplir con dos requisitos [31]:

- La relatividad exige que las leyes de la física se expresen en términos de un sistema de coordenadas curvilínea en el espacio-tiempo y que además ellas deban ser invariantes por transformaciones de un sistema de coordenadas a otro.
- Según la mecánica cuántica, las ecuaciones de movimiento tienen que ser expresadas en forma Hamiltoniana.

Estos requerimientos no definen un sistema dinámico pero si limitan las posibles formas que este puede tener. Una completa descripción de la dinámica del sistema implica que se deba especificar todas las posibles interacciones. Por tanto, es de vital importancia considerar nuevos sistemas dinámicos y verificar si ellos describen el mundo atómico de una manera mas adecuada [31]. Después de todo, estos nuevos sistemas dinámicos deberán cumplir con los requisitos de relatividad general y las ecuaciones de Hamilton de movimiento.

Por otra parte, la dinámica no relativista tiene una única forma posible ya que las interacciones deben estar contenidas en el Hamiltoniano y todos los otros generadores del grupo de Galileo son independientes de la interacción.

De acuerdo a Dirac, el problema central para una general formulación Hamiltoniana es proporcionar una representación particular de los diez generadores del grupo de Poincare los cuales son definidos por las siguientes relaciones de corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned} \{P^\mu, P^\nu\} &= 0 \\ \{M^{\mu\nu}, P^\rho\} &= g^{\nu\rho}P^\mu - g^{\mu\rho}P^\nu \\ \{M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma}\} &= g^{\mu\sigma}M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho}M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}M^{\mu\rho} + g^{\nu\rho}M^{\mu\sigma}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

en términos de un conjunto de variables dinámicas independientes, tales como las coordenadas, los momentos, el espín, etc. Por lo tanto, alguna teoría dinámica invariante de Poincare que describe por ejemplo la interacción de partículas deberá proporcionar una realización particular del álgebra de Poincare (2.1).

Una realización elemental de (2.1) consiste en escoger un punto del espacio-tiempo x^μ y su respectivo momento conjugado p^ν como variables canónicas de tal manera que satisfagan la siguiente álgebra:

$$\{x^\mu, p^\nu\} = -g^{\mu\nu}, \quad \{x^\mu, x^\nu\} = 0, \quad \{p^\mu, p^\nu\} = 0, \quad (2.2)$$

de tal manera que los correspondientes generadores de Poincare tienen la siguiente estructura:

$$P^\mu = p^\mu, \quad M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu, \quad (2.3)$$

con lo cual se puede mostrar que (2.1) es satisfecha. Sin embargo, a pesar de que (2.3) es una representación covariante sufre de varias deficiencias. Por ejemplo, ésta no describe ninguna interacción; para un sistema de partículas los generadores son simplemente la suma de los generadores de una simple partícula. Además, la representación (2.3) no lleva en consideración las condición on-shell $p^2 = m^2$ que garantiza la causalidad relativista.

Con el fin de solucionar ésta situación se procede a elegir una variable de tiempo, es decir, una foliación del espacio-tiempo en el espacio tiempo Σ con

normal tipo luz o tipo tiempo. La superficie Σ deberá ser escogida de tal manera que ésta cruce todas las posibles líneas de mundo una y solo una vez. A parte de esta necesaria consistencia con causalidad, la foliación parece arbitraria. Sin embargo, dada una particular foliación uno puede preguntar por los generadores de Poincare que dejan la hiper-superficie Σ invariante. El conjunto de tales generadores definen un subgrupo de grupo de Poincare llamado grupo de estabilidad G_Σ de Σ . Los generadores asociados son llamados cinemáticos en tanto que los otros son denominados dinámicos. Los generadores dinámicos mapean Σ en otra hiper-superficie Σ' y por tanto involucran la evolución temporal. Por tanto, se espera que éste tipo de generadores dependen del Hamiltoniano, y en consecuencia de la interacción, ya que es una cantidad dinámica.

Se espera que el grupo de estabilidad que corresponde a una hiper-superficie irregular y que no tenga un alto grado de simetría sea vacío. Por ende, se exigirá que el grupo G_Σ actúe transitivamente sobre Σ , es decir, que dos puntos sobre Σ se puedan conectar por una transformación que pertenece a G_Σ .

La construcción de una teoría dinámica se realiza en dos pasos:

- Primero se especifica los generadores del grupo de estabilidad, es decir, se determina la cinemática dentro de la superficie Σ . La característica principal de estos generadores es su independencia de la interacción con lo cual las variables dinámicas y los estados físicos se transforman, bajo el grupo de estabilidad, de un manera simple.
- Se tienen en cuenta los generadores de Poincare que no pertenecen al grupo de estabilidad y que transforman la superficie Σ en alguna otra superficie Σ' . En particular, estos generadores describirán la evolución del sistema como una función del tiempo. Estos generadores contienen toda la información de la dinámica del sistema, y por ende se conocen como *formas Hamiltonianas* según Dirac.

El mismo procedimiento puede ser aplicado a la dinámica no relativista, para la cual el grupo a considerar es el de Galileo. para este caso existe una única

superficie inicial con la propiedad de interceptar cada línea de mundo una sola vez; ésta es la superficie $x^0 = \text{cte}$. Por lo tanto, hay una manera posible de dividir el grupo de Galileo en una parte cinemática y otra dinámica. El subgrupo de Galileo que mantiene invariante el instante $x^0 = \text{cte}$ posee nueve generadores, y además, se presenta un simple Hamiltoniano que genera desplazamientos en el tiempo. Dirac estableció que la unicidad del Hamiltoniano no relativista es perdida en el caso n relativista. La razón es que la causalidad restringe la familia de líneas de mundo y permite un gran número de superficies Σ [31, 33]. En principio, alguna superficie que no presenta direcciones tipo tiempo podría ser considerada.

Si la hiper-superficie Σ no posee simetrías, el grupo de estabilidad es nulo, en este caso la descripción no contiene la parte cinemática y cada uno de los diez generadores del grupo de Poincare es un Hamiltoniano. Por tanto, se considera superficies Σ para las cuales el grupo de estabilidad G_Σ puede por lo menos ser transitivo con lo cual todos los puntos sobre Σ son equivalentes. Con éste requerimiento adicional existen cinco clases in equivalentes de superficies [33]

Tres de ellas fueron identificadas por Dirac [31]:

- El instante de tiempo $\tau \equiv x^0 = 0$ conocido como *instante forma* (i).
- Una superficie del hiperboloide $\tau \equiv x^2 = a^2 > 0, x^0 > 0$ al que se denomina *punto forma* (ii).
- La superficie definida por $\tau \equiv x^0 + x^3 = 0$, conocida como *plano nulo* (iii).

Una reciente clasificación de todos los subgrupos del grupo de Poincare tiene en cuenta dos clases posibles y adicionales de superficies iniciales con sus respectivos grupos de estabilidad [34]. Una de ellas consiste en considerar una de las superficies del hiperboloide $\tau \equiv x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = a^2 > 0, x^0 > 0$ (iv) en tanto que la otra es definido por: $\tau \equiv x_0^2 - x_3^2 = a^2 > 0, x^0 > 0$ (v). Así, la unicidad de la descripción Hamiltoniana no relativista resulta ser cinco veces ambigua en el caso relativista. Es importante tener en cuenta que para si en todas las formas se toma $\lim_{c \rightarrow \infty} \tau = t$, esto implica que en el caso no

relativista existe solo una posible foliación conduciendo al tiempo absoluto Galileano. Esto es consistente con el hecho que no existe una velocidad limite en el caso no relativista y por tanto la hiper-superficie $\Sigma_{nr} : t = \text{cte}$ es la única que corta todas las posibles líneas de mundo.

Con el fin de determinar cual de los generadores del grupo de Poincare son cinemáticos, se utiliza el hecho que la acción del grupo de Poincare sobre alguna función $F(x)$ es dada por:

$$\delta F(x) = \left\{ F(x), \delta G \right\} = \delta a_\mu \partial^\mu F - \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) F, \quad (2.4)$$

donde $\delta G = \delta a_\mu P^\mu - \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$ es el generador de las trasformaciones infinitesimales de Poincare. Considerando que Σ es de la forma $\Sigma : \tau = F(x)$ y que P^μ y $M^{\mu\nu}$ como generadores cinemáticos para algún valor de μ o ν , entonces, para estos índices particulares se deberá cumplir que:

$$\partial^\mu F = 0, \quad (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) F = 0, \quad (2.5)$$

es decir, el gradiente y la "derivada angular" de $F(x)$ deben ser nulos.

Según Dirac [31] las diez cantidades fundamentales para un sistema dinámico son tales que algunas de ellas son simples y otras tienen una estructura mas compleja. Las cantidades complejas son identificadas con los Hamiltonianos y tienen el mismo papel de un Hamiltoniano en la dinámica no relativista. En tanto que las cantidades simples serán identificadas como los generadores cinemáticos. La elección del tiempo Galileano $\tau = t$ es generalmente la mas común, aun en el caso relativista, por tanto, se construirá la representación asociada de los generadores del grupo de Poincare sobre la hiper-superficie $\Sigma : t = 0$. La idea es usar el vínculo $p^2 = m^2$ para eliminar la variable conjugada a t y que en este caso es: $p^0 = N \cdot p = (p^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$, siendo N un vector normal al hiper-plano y posteriormente elegir $x^0 = 0$ en (2.3). Utilizando la idea de Dirac [31], se adiciona el vínculo on-shell a los generadores de Poincare (2.3) mediante multiplicadores de Lagrange,

$$P^\mu = p^\mu + \lambda^\mu (p^2 - m^2) \quad (2.6)$$

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + \lambda^{\mu\nu} (p^2 - m^2). \quad (2.7)$$

Ahora, se impone la condición de que el lado derecho sea independiente de p^0 . Derivando la parte derecha de (2.6) y (2.7) con relación a p^0 y resolviendo se determina los siguientes valores para los multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda^0 = -\frac{1}{2p^0} \quad , \quad \lambda^i = 0 \quad , \quad \lambda^{0i} = -\frac{x^i}{2p^0} \quad , \quad \lambda^{ij} = 0 \quad , \quad (2.8)$$

De esta manera, los generadores de Poincare, por su estructura simple, de carácter cinemático son:

$$P^i = p^i \quad , \quad M^{ij} = x^i p^j - x^j p^i \quad , \quad (2.9)$$

en tanto que los de carácter dinámico tienen la siguiente forma:

$$P^0 = \omega_p \quad , \quad M^{i0} = x^i \omega_p \quad , \quad (2.10)$$

con $\omega_p \equiv (p^i p^i + m^2)^{\frac{1}{2}}$. Comparando con (2.3), p^0 fue substituido por ω_p y x^0 se torna nulo. Como regla se puede observar que los generadores que contienen p^0 en la representación (2.6) y (2.7) tienen en cuenta los multiplicadores de Lagrange que no desaparecen. Ellos se identifican como los generadores dinámicos, que en el caso del instante forma son dados por el Hamiltoniano P^0 y los generadores boosts M^{i0} . De acuerdo con la relación (2.5), para $\Sigma : \tau = F(x) = t = \text{cte}$, se deduce que:

$$\partial^i F(x) = 0 \quad , \quad (x^i \partial^j - x^j \partial^i) F(x) = 0 \quad . \quad (2.11)$$

de tal manera que $\Sigma : t = \text{cte}$ es invariante por rotaciones y traslaciones, con lo cual se establece que el grupo de estabilidad tiene dimensión seis. De otra manera,

$$\partial^0 F(x) = 1 \neq 0 \quad , \quad (x^0 \partial^j - x^j \partial^0) F(x) = -x^j \neq 0 \quad . \quad (2.12)$$

A parte del Hamiltoniano, los boost son generadores dinámicos por tanto $\Sigma : t = \text{cte}$ no es invariante por transformaciones generadas por este tipo de elementos ya que éstos generadores mezclan las coordenadas de espacio y tiempo. Las representaciones (2.9) y (2.10) garantizan que el álgebra de Poincare sea compatible con el vínculo $x^0 = 0$. Utilizando la relación $\{x^i, p^j\} = \delta^{ij}$ es posible mostrar que los generadores (2.9) y (2.10) obedecen los corchetes de Poisson (2.1).

Tal como ocurre en el instante forma, se puede construir la representación asociada a los generadores de Poincare sobre el plano nulo $\Sigma : \tau = x^+ \equiv x^0 + x^3 = 0$ el cual se identifica como un plano tangente al cono de luz. Esta hiper-superficie puede equivalentemente ser vista como el frente de onda de una onda de luz plana viajando hacia la dirección z positiva. Por ello, la hiper-superficie $\Sigma := x^+ = 0$ es también denominada *frente de luz*.

Ahora, con el fin de eliminar la variable canónica conjugada a x^+ , es decir, p^- y posteriormente seleccionar $x^+ = 0$ en (2.3), se considera que el lado derecho de las ecuaciones (2.6) y (2.7) sean independientes de p^- . De esta manera, se puede mostrar los siguientes valores para los multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \lambda^+ = \lambda^i = 0 \quad , \quad \lambda^- = -\frac{1}{2p^+} \\ \lambda^{+-} = -\frac{x^+}{2p^+} = 0 \quad , \quad \lambda^{i-} = -\frac{x^i}{2p^+} \quad , \quad \lambda^{+i} = 0 . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Por tanto, se obtiene la siguiente representación (3 + 1) de los generadores de Poincare de carácter cinemático:

$$\begin{aligned} P^i = p^i \quad , \quad P^+ = p^+ \quad , \quad M^{+i} = -x^i p^+ , \\ M^{+-} = -x^- p^+ \quad , \quad M^{12} = x^1 p^2 - x^2 p^1 . \end{aligned} \quad (2.14)$$

De igual manera, los generadores de carácter dinámico se puede expresar de la siguiente manera:

$$P^- = \frac{p^i p^i + m^2}{p^+} \quad , \quad M^{-i} = x^- p^i - x^i p^- , \quad i = 1, 2 . \quad (2.15)$$

Sietes de los generadores de Poincare son cinemáticos así que el plano nulo conduce al grupo de estabilidad de mayor dimensión. La dimensión de los grupos de estabilidad para hiper-superficies (i), (ii), (iv) e (v) son 6, 6, 4, 4, respectivamente. Además, los grupos de estabilidad de las superficies (i) hasta (v) no son isomórficos, con lo cual ellos no pueden ser deformados uno en otro por difeomorfismos [32]. De esta manera, de las teorías Hamiltonianas invariantes de Poincare basadas sobre superficies in-equivalentes iniciales en

un instante de referencia difieran de la manera por la cual los dies generadores de Poincare son divididos en cinemáticos y en dinámicos [33]. El cuestionamiento que surge es si la diferencia es solo formal o existen consecuencias físicas inherentes, hasta el momento no surgen respuestas desde el trabajo de Dirac [31].

Es importante destacar que el Hamiltoniano P^- no contiene una raíz cuadrada como ya lo había señalado Dirac. Sin embargo, existe una singularidad en $p^+ = 0$ que resulta peculiar y que en el lenguaje de teorías gauge corresponde a que la matriz de Faddeev-Popov desaparezca. También, se puede destacar que para un valor positivo de p^+ el signo del Hamiltoniano P^- es también positivo, con lo cual no existe ambigüedad en el signo de la energía en la formulación del plano nulo. No obstante, para una partícula de masa cero y $p^i = 0$, el valor de $p^+ = 0$ conduce a un valor indeterminado de P^- . Aun, para partículas masivas, se debe dar una prescripción para desplazarse alrededor de la singularidad $p^+ = 0$.

2.1. Álgebra de Poincaré

Se considera un boost en la dirección z con rapidez ω , que expresado en el sistema de coordenadas del instante forma, el boost se escribe de la siguiente forma:

$$t' = t \cosh \omega + z \sinh \omega \quad , \quad z' = z \cosh \omega + t \sinh \omega \quad . \quad (2.16)$$

Se sabe que las transformaciones de boost mezclan coordenadas espaciales y temporales, de la relación (2.16) se puede determinar que la acción del boost en el plano nulo tienen la forma:

$$x'^+ = e^{\omega} x^+ \quad , \quad x'^- = e^{-\omega} x^- \quad , \quad (2.17)$$

entonces, las transformaciones de Lorentz tienen una forma muy simple en este sistema de coordenadas, donde la característica más notable es que las variables x^+ y x^- no llegan a ser mezcladas bajo esta transformación [34]. Éstas simplemente sufren una transformación de escala manteniendo el producto $x^+ x^-$

2.1. Álgebra de Poincaré

invariante. Las coordenadas de plano nulo diagonalizan el boost en la dirección z . Se debe notar que los puntos sobre la hiper-superficie $\Sigma : x^+ = 0$ son mapeados sobre ella misma, con lo cual, el generador $M^{+-} = 2M^{30} = -2K^3$, es cinemático. No obstante, los otros generadores cinemáticos M^{+i} actúan sobre las coordenadas transversales manteniéndolas inalterables [32, 33].

Las relaciones de corchetes de Poisson no nulos de los siete generadores de Poincare son:

$$\begin{aligned} \{M^{12}, M^{+-}\} &= \varepsilon^{ij}M^{+j} \\ \{M^{12}, P^i\} &= \varepsilon^{ij}P^j \\ \{M^{+i}, P^-\} &= -2P^i \\ \{M^{+i}, P^j\} &= -\delta^{ij}P^+ , \end{aligned} \tag{2.18}$$

com $i = 1, 2$, en tanto que el restante conjunto de corchetes de Poisson son nulos. Es interesante considerar el grupo de Galileo bidimensional donde los generadores, para una partícula libre de masa m , son: dos momentos k^i , un momento angular $L = \varepsilon^{ij}x^i p^j$, dos transformaciones de boost de Galileo $G^i = mx^i$, un Hamiltoniano $H = \frac{k^i k^i}{2m}$ y la masa m que es el operador de Casimir. Utilizando $\{x^i, k^j\} = \delta^{ij}$ e identificando $P^i \leftrightarrow k^i$, $M^{12} \leftrightarrow L$, $M^{+i} \leftrightarrow -2G^i$, $P^+ \leftrightarrow 2m$ y $P^- \leftrightarrow H$, de puede mostrar que (2.18) es una subálgebra del álgebra de Poincare isomorfa al álgebra de Lie del grupo de Galileo bidimensional [36]. Las primeras dos relaciones en (2.18) establecen que M^{+i} y P^i se transforman en vectores bidimensionales. Por tanto, se espera que la cinemática del plano nulo muestre un comportamiento no relativista que es asociado a la dimensión transversa y gobernada por el grupo de Galileo bidimensional [37].

Es importante destacar algunas características fundamentales de las coordenadas de plano nulo:

- Las coordenadas de plano nulo $x^\mu : (x^+, x^\perp, x^-)$, donde $x^\pm = \frac{x^0 \pm x^3}{\sqrt{2}}$ y $x^\perp = (x^1, x^2)$ no están relacionadas por una transformación de Lorentz con las coordenadas tradicionales $x^\mu : (x^0 = t, x^1, x^2, x^3)$ [38], por lo tanto, la descripción del mismo contenido físico de una teoría dinámica sobre el plano nulo, que estudia la evolución temporal del sistema en x^+

en lugar de x^0 , podría ser diferente de aquel determinado por el tratamiento convencional. este es el caso de la descripción del rompimiento de simetría y del estudio de los modelos de teorías gauge en dos dimensiones, en donde fue demostrado que la cuantización sobre el plano nulo es apropiada para la exhibición de los grados de libertad relevantes, lo cual conduce a un espacio de Hilbert físico [39, 40].

- En general, se conoce que dos puntos que pertenecen al hiperplano $x^0 = \text{cte}$ son separados por distancias tipo espacio $(x - y)^2 = (x^0 - y^0)^2 - (x - y)^2 = -(x - y)^2 < 0$ y la separación se torna tipo luz cuando los dos puntos coinciden. Sin embargo, los puntos en el hiperplano $x^+ = \text{cte}$, también tienen una separación tipo espacio cuando $x^i \neq y^i$, $(x - y)^2 = (x^+ - y^+)(x^- - y^-) - (x^i - y^i)^2 = -(x^i - y^i)^2 < 0$ y se torna tipo luz en el caso $x^i = y^i$, no obstante, con la diferencia de que los puntos no necesitan coincidir ya que $(x^- - y^-)$ no requiere ser nulo. Ésta observación cuando combinada con el principio de micro-causalidad, establece que la dinámica en el plano nulo puede llegar a ser no local con respecto a las coordenadas longitudinales x^- [41].
- Una teoría dinámica en las coordenadas de plano nulo poseen una característica general por el hecho de que ésta es siempre una teoría dinámica por Lagrangianos singulares [42] y la construcción de una formulación Hamiltoniana consistente no es simple. El procedimiento de Dirac [43] o métodos análogos para el estudio de sistemas dinámicos con vínculos deberán ser utilizados. Una formulación Hamiltoniana clásica autoconsistente es la más conveniente para cuantizar las teorías via principio de correspondencia de los corchetes de Dirac con los conmutadores/anti-conmutadores de los correspondientes operadores.

2.2. Problema de Valores Inicias Sobre el Plano Nulo

Con el fin de iniciar la discusión se considerará el campo escalar libre masivo clásico $\phi(x)$ que satisface la siguiente ecuación de campo:

$$(\square_x + m^2) \phi(x) = 0. \quad (2.19)$$

Es conocido que sobre una superficie tipo espacio Σ , un conjunto completo de condiciones iniciales es dado si se especifica el campo y sus derivadas sobre dicha superficie. Ahora, la cuestión sería saber cual sería el valor del campo en un punto arbitrario y fuera de la superficie. La solución a este problema se obtiene a este problema resulta de la solución covariante de campo libre. El siguiente teorema deberá ser considerado [44]:

Teorema 1 En un punto y fuera de la superficie tipo espacio Σ el campo es dado por:

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \int_{\Sigma} d^4x [\Delta(y-x) \partial_{\mu}^x \phi(x) - \phi(x) \partial_{\mu}^x \Delta(y-x)] \\ &= \int_{\Sigma} d^4x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu}^x \phi(x), \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde $\Delta(y-x)$ es la función de Schwinger que tiene las propiedades: es solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon-Fock (KGF), es real, nula fuera del cono de luz y es antisimétrica. Por tanto, el campo así determinado corresponde a la propagación causal o sea, $\phi(y)$ es solo influenciada por puntos $x \in \Sigma$ que están atrás o delante del cono de luz asociado a y , dependiendo de si y está después o antes de Σ (ver Figura 2.1)

Si es selecciona a Σ como siendo una superficie plana con tiempo constante $x^0 = \text{cte}$, la solución apropiada del problema de valores iniciales se escribe como:

$$\phi(y) = \int_{\Sigma} d^3x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_t^x \phi(x). \quad (2.21)$$

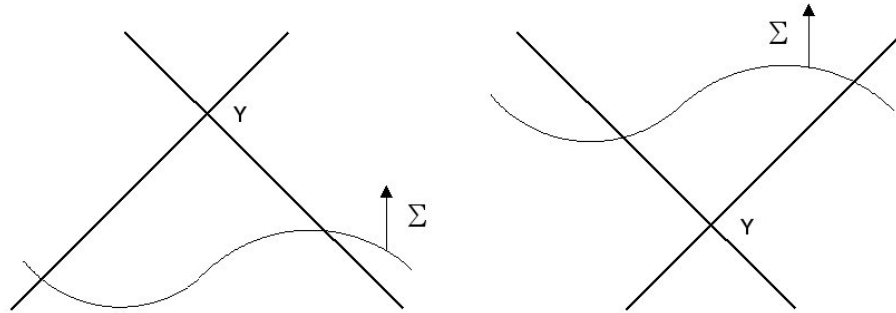


Figura 2.1: En la primera figura el punto γ es influenciado causalmente por puntos que están en Σ . En la segunda figura γ influencia causalmente aquellos puntos que están dentro de su cono de luz en Σ .

LA solución tradicional de teoría de campos es basada en la bien entendida teoría de Cauchy-Kowalewski de las ecuaciones hiperbólicas [45], que proporciona teoremas para la existencia y unicidad de las soluciones cuando el campo y sus derivadas temporales son conocidas sobre una hiper-superficie tipo espacio. Ahora, surge la controversia sobre las condiciones para la existencia y unicidad de las soluciones para datos impuestos sobre el plano nulo. Con el fin de responder a ello, la ecuación diferencial (2.19) se expresará en términos de las coordenadas de plano nulo ¹

$$(\partial^+ \partial^- + m^2) \phi = 0 . \quad (2.22)$$

En término de las coordenadas de plano nulo, la ecuación de KGF se expresa en la forma canónica de la ecuación diferencial hiperbólica [45] y x^\pm son denominadas como superficies características de la ecuación diferencial. En la teoría de ecuaciones diferenciales parciales se demuestra que la especificación del campo y un número finito de derivadas sobre una característica no determina una solución única de la ecuación diferencial [46]. Así que se esta tratando con un problema de valores iniciales característicos cuando se desea resolver ésta ecuación, lo que implicará que se deben especificar condiciones sobre ambas características $x^\pm = \text{cte}$. El problema de valores iniciales

¹Se considerará el caso en dos dimensiones por simplicidad.

2.2. Problema de Valores Inicias Sobre el Plano Nulo

característicos se formula de la siguiente manera: Determinar una solución $\phi(x^+, x^-)$ que satisfaga las siguientes condiciones iniciales,

$$\phi(x^+, x_0^-) = f(x^+) \quad , \quad \phi(x_0^+, x^-) = g(x^-), \quad (2.23)$$

y la condición de continuidad

$$\phi(x_0^+, x_0^-) = f(x_0^+) = g(x_0^-). \quad (2.24)$$

Las funciones f y g que especifican ϕ sobre ambas características son llamados de datos característicos. De acuerdo con Neville e Rohrlich [47], la solución del problema de valores iniciales característicos se obtiene de la relación (2.21) del problema de Cauchy y utilizando el teorema de Gauss. Entonces, es posible mostrar que:

$$\partial_x^\mu \left[\Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu^\chi \phi(x) \right] = 0, \quad (2.25)$$

recordando que ϕ como Δ satisfacen la ecuación de KGF. Integrando la relación (2.25) por el volumen limitado por ABC (ver Figura 2.2), donde el plano

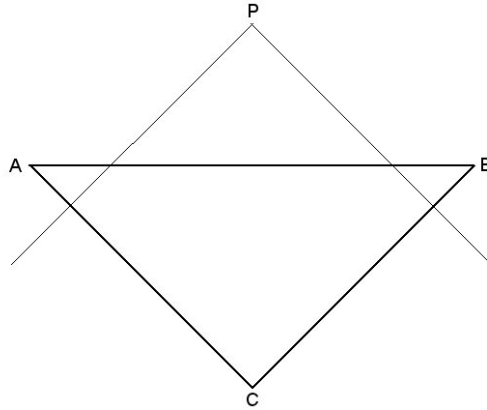


Figura 2.2: Contorno de integración usado en la derivación de (2.26).

$x^0 = 0$ intercepta la parte de atrás del cono de luz del punto P, $AB : x^0 = 0$, $BC : x^+ = x_0^+$ y $AC : x^- = x_0^-$. Por el teorema de Gauss se obtiene que:

$$\int d^4x \partial_x^\mu \left[\Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu^\chi \phi(x) \right] = 0$$

o, explícitamente

$$\left(\int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right) d\Sigma(x) n^\mu \left[\Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu^\alpha \phi(x) \right] = 0, \quad (2.26)$$

donde $d\Sigma$ es el elemento de superficie apropiado y n^μ es un vector normal a la superficie. De (2.21) se deriva que,

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \int d^3x \Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_0^\alpha \phi(x) \\ &= \int_{CB} dy^+ \Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_+^\alpha \phi(x) + \int_{CA} dy^- \Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_-^\alpha \phi(x), \end{aligned} \quad (2.27)$$

Debido a que la normal a un plano nulo se encuentra en el mismo plano, el conocimiento de ϕ sobre el plano nulo implica su derivada normal. Se establece el siguiente teorema [47]:

Teorema 2 La solución de la ecuación de KGF (2.22) para $m \geq 0$ es únicamente determinada por (2.26) en la región conexa limitada por la cuña formada por los planos $x^\pm = \text{cte}$ si ϕ se especifica sobre esos planos.

Utilizando el hecho que Δ desaparece sobre argumentos de tipo espacio, $(x-y)^2 < 0$, las integrales en (2.26) se extienden desde la cuña (punto C na Fig. (2.2)) hasta $+\infty$, por lo tanto, esas partes que están fuera del cono característico de P no contribuyen a la integral. Si se compara (2.26) con (2.21) se determina que el lado derecho de la solución del problema de Cauchy, que en término de las condiciones iniciales (2.23), se expresa:

$$\begin{aligned} \phi(x^+, x^-) &= \int_{x_0^+}^{\infty} dy^+ \left[\Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-) \frac{\partial f}{\partial y^+} - f(y^+) \frac{\partial}{\partial y^+} \Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-) \right] \\ &\quad + \int_{x_0^+}^{\infty} dy^- \left[\Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-) \frac{\partial g}{\partial y^-} - g(y^-) \frac{\partial}{\partial y^-} \Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-) \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Esta es la solución del problema de valores característicos para la ecuación de KGF en el plano nulo en términos de las condiciones iniciales f y g y la

2.2. Problema de Valores Inicias Sobre el Plano Nulo

función de Schwinger Δ . Entonces, con el fin de obtener una solución única es necesario especificar condiciones iniciales sobre las dos características y no solamente sobre una.

Para una teoría cuántica de campos en $d = 1 + 1$ dimensiones, la relación (2.28) implica que se debe cuantizar sobre el plano nulo [48]. para entender mejor esta afirmación, se sabe que el conmutador de dos campos escalares libre se puede expresar en términos de la función de Schwinger de la siguiente forma [49]:

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x - y) , \quad (2.29)$$

del cual se puede determinar los siguientes conmutadores a tiempos iguales entre los campos en las coordenadas tradicionales:

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = 0 \quad , \quad [\dot{\phi}(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = -i\delta(x - y). \quad (2.30)$$

De la relación (2.21) se puede determinar que:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int dz \left\{ [\dot{\phi}(z), \phi(y)] \Delta(x - z) - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^0} \Delta(x - z) \right\}_{x^0=z^0}. \quad (2.31)$$

Insertando en esta relación la expresión (2.30) se obtiene la identidad (2.29). Así, la ecuación (2.31) es una condición de consistencia que expresa el conmutador para tiempos arbitrarios diferentes $x^0 > y^0$ a través de las condiciones de Cauchy a tiempo $x^0 = y^0$ [50].

Con el fin de derivar una condición de consistencia análoga a (2.31), se escogerá $x_0^\pm = 0$; por lo tanto, usando (2.28) se obtiene que el conmutador de campos a tiempos diferentes es dado por:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int_0^\infty dz^+ \left[\Delta(x - z) \frac{\partial}{\partial z^+} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^+} \Delta(x - z) \right]_{x^- = z^-} \quad (2.32)$$

$$+ \int_0^\infty dz^- \left[\Delta(x - z) \frac{\partial}{\partial z^-} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^-} \Delta(x - z) \right]_{x^+ = z^+}$$

lo que implica que para todo x^\pm dos conmutadores independientes deben ser especificados,

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^\pm=y^\pm} = -\frac{i}{4}\epsilon(x^\mp - y^\mp), \quad (2.33)$$

es decir, el problema de valores iniciales característicos corresponde a cuantizar en el plano nulo. En la literatura los conmutadores son especificados sobre una sola característica, usualmente $x^+ = 0$, lo cual es indispensable si se desea una formulación Hamiltoniana con un solo parámetro de evolución temporal x^+ , lo que estaría en contradicción con los resultados obtenidos. Por tanto, la cuantización sobre una sola característica es posible si condiciones sobre la segunda son impuestas [47, 50]. Un caso interesante se obtiene si se mueve el plano nulo $x^- = \text{cte}$ hacia el pasado distante y sobre este imponer $\phi = 0$; explícitamente,

$$\lim_{x^- \rightarrow -\infty} \phi = 0, \quad \forall x, \quad x^+ \geq x_0^+, \quad (2.34)$$

obteniéndose de (2.28) la solución:

$$\phi(x) = \int_{x^+=x_0^+} dy^- \Delta(x-y) \overset{\leftrightarrow x}{\partial}_- \phi(y). \quad (2.35)$$

Consecuentemente, se obtiene el siguiente teorema:

Teorema 3 Especificado ϕ sobre el plano $x^+ = x_0^+$ y la condición asintótica (2.34), la ecuación de KGF, para $m \geq 0$, tendrá una única solución dada por (2.35) en el plano $x^+ \geq x_0^+$ [47].

Corolario: Cualquier solución de la ecuación de KGF que satisfaga (2.34) y que se anule sobre el plano nulo definido por $x^+ = x_0^+$, también se anula para $x^+ \geq x_0^+$.

En (2.35) la integración sobre y^- se extiende de $-\infty$ hasta $+\infty$, aun cuando el conjunto abierto $y^- \in (x^-, \infty)$ no contribuya, ya que Δ desaparece para argumento tipo espacio. Los puntos del cono característico deberán ser todos internos al dominio de integración, ϕ será correctamente dada por ésta ecuación para algún $x^+ > x_0^+$, pero en el limite cuando x^+ se aproxima de x_0^+

2.2. Problema de Valores Inicias Sobre el Plano Nulo

una condición de convergencia para $x^- \rightarrow +\infty$ sobre la integral (2.35) se hace necesaria. Así, se impone la siguiente restricción adicional:

$$\lim_{x^- \rightarrow \infty} \phi = 0 \quad , \quad \text{sobre } x^+ = x_0^+, \quad (2.36)$$

y, con esto, se verifica la consistencia de (2.35) tomando P sobre el plano nulo x_0^+ [47].

Capítulo 3

Electrodinámica Escalar SQED₄ en las Coordenadas de Plano Nulo

En la mitad del siglo pasado Dirac propuso tres diferentes formas de dinámica relativista las cuales dependían sobre los tipos de superficies donde los grados de libertad son establecidos [31]. La primera denominada *frente forma o instante forma*, es definida por una superficie tipo-espacio donde los corchetes fundamentales de Poisson o los conmutadores son establecidos y el la que mas frecuentemente se utiliza. La segunda forma, conocida como *punto forma*, y es definida por la rama de la superficie hiperbólica $x^\mu x_\mu = \kappa^2$ with $x^0 > 0$. Finalmente, la tercera forma, *frente forma, frente de luz*, se da cuando se elige la superficie de una onda de luz para estudiar los campos dinámicos. Este superficie es generalmente referida como el *formalismo de plano nulo* y tardo alrededor de 30 años para que la idea de Dirac fuera aplicada a fenómenos físicos. Una característica importante de una teoría relativista sobre el plano nulo es que se da origen a Lagrangianos singulares, es decir, sistemas dinámicos con vínculos, por lo tanto, el procedimiento de Dirac [43] puede ser utilizado para analizar la estructura de vínculos de una teoría dada. Lo anterior conduce a una reducción en el número de operadores de campo en el respectivo espacio de fase.

Es posible verificar que la transformación de las coordenadas usuales a las coordenadas de plano nulo no es mediada por una transformación de Lorentz y por ende el espacio de fase es diferente cuando se compara con el convencional. Como tal, la descripción del mismo contenido físico de una teoría dinámica sobre el plano nulo, la cual estudia la evolución del sistema en x^+ en lugar de x^0 , puede resultar diferente de su equivalente en el tratamiento convencional [53].

P. P. Srivastava [53] concluyó que la cuantización sobre el plano nulo significa realizar la cuantización sobre las superficies características de las ecuaciones de campo clásicas. Así, esto implica que se tiene que especificar los datos de Cauchy sobre ambas características, $x^+ = \text{cte}$ y $x^- = \text{cte}$, y no solo sobre un simple plano nulo. Ahora, McCartor [54] se pudo percatar que al cuantizar sobre plano nulo fermiones libres sin masa en $(1 + 1)$ sobre ambas características es necesario especificar conmutadores a tiempos iguales en x^+ y x^- , con lo cual la descripción Hamiltoniana tendría dos diferentes tiempos lo que podría impedir una formulación Hamiltoniana apropiada.

Además, el trabajo de Steinhardt [55] mostró un importante problema asociado con la cuantización sobre el plano nulo: después de establecer la condición de gauge para los vínculos de primera clase y los vínculos de segunda clase fueran eliminados a través del procedimiento de Dirac no se podrían esperar más transformaciones de gauge; sin embargo, aun persisten en el análisis una especie de transformaciones de gauge impropias las cuales estarían relacionadas con los modos ceros de las derivadas longitudinales ∂_- y que aparecen a la falta de apropiadas condiciones de frontera sobre los campos [56]. Este hecho no permitiría definir una única inversa para la matriz de vínculos de segunda clase con la cual se construyen los corchetes de Dirac. Por lo tanto, transformaciones de gauge impropias podrían ser fijadas si apropiadas condiciones de frontera son impuestas.

En este capítulo se estudiará la estructura de vínculos de la electrodinámica escalar SQED₄ en forma detallada y las ecuaciones de movimiento de las variables dinámicas serán determinadas utilizando el Hamiltoniano extendido. Se procederá a clasificar el conjunto de vínculos y a eliminar estos imponiendo

3.1. Estructura de vínculos de la SQED₄ en las Coordenadas de Plano Nulo

condiciones de gauge y apropiadas condiciones de frontera sobre los campos. Finalmente, se calcularán los correspondientes corchetes de Dirac entre las variables dinámicas fundamentales.

3.1. Estructura de vínculos de la SQED₄ en las Coordenadas de Plano Nulo

La teoría gauge que se está considerando es definida por la siguiente densidad Lagrangiana en el espacio-tiempo de 4 dimensiones:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}D_\mu\phi(D_\nu\phi)^* - m^2\phi\phi^*, \quad (3.1)$$

donde ϕ es un campo escalar complejo de una componente, $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ denota el tensor de campo electromagnético, $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu$ se identifica como la derivada covariante. La densidad Lagrangiana (3.1) es invariante bajo la siguiente simetría de gauge $U(1)$:

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi, \quad \phi^* \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi^*, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha. \quad (3.2)$$

Las ecuaciones de campo correspondientes son:

$$\begin{aligned} \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta A_\alpha(x)} &= \partial_\mu^x F^{\mu\alpha} + j^\alpha = 0, \\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi(x)} &= (D_\mu^* D^{*\mu} + m^2)\phi^* = 0, \\ \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi^*(x)} &= (D_\mu D^\mu + m^2)\phi = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

donde j^α es la corriente definida como:

$$j^\mu \equiv ig[\phi(D^\mu\phi)^* - \phi^*D^\mu\phi]. \quad (3.4)$$

Con el fin de calcular los momentos canónicos se re escribirá la densidad Lagrangiana (3.1) de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D_+\phi (D_-\phi)^* + D_-\phi (D_+\phi)^* + D_k\phi (D^k\phi)^* - m^2\phi\phi^*. \quad (3.5)$$

En la relación anterior se han introducido el tiempo de plano nulo x^+ y la coordenada longitudinal x^- las cuales son relacionadas a las coordenadas x^0 y x^3 a partir de las siguientes ecuaciones de transformación:

$$x^+ \equiv \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}}, \quad x^- \equiv \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}}, \quad (3.6)$$

con las coordenadas transversales $x^\perp \equiv (x^1, x^2)$ siendo las mismas. En el espacio de cuadri-vectores $x = (x^+, x^\perp, x^-) \equiv (x^+, x^1, x^2, x^-)$, la métrica tiene la siguiente representación matricial:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

En forma explícita, es posible deducir las siguientes identidades: Explicitly,

$$x^+ = x_- \quad , \quad x^- = x_+ \quad , \quad x \cdot y = x^+y^- + x^-y^+ - x^\perp \cdot y^\perp, \quad (3.8)$$

donde las derivadas en relación a las coordenadas x^+ y x^- son definidas por:

$$\partial_+ \equiv \frac{\partial}{\partial x^+} \quad , \quad \partial_- \equiv \frac{\partial}{\partial x^-} \quad (3.9)$$

con $\partial^+ = \partial_-$. Ahora, utilizando la relación:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta A_\alpha)} = -F^{\beta\alpha},$$

se puede mostrar que los momentos canónicos asociados a los campos A_μ , ϕ y ϕ^* son:

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ A_\mu)} = F^{\mu+}, \quad (3.10)$$

3.1. Estructura de vínculos de la SQED₄ en las Coordenadas de Plano Nulo

$$\pi^* \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ \phi)} = (D_- \phi)^* \quad , \quad \pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ \phi^*)} = D_- \phi, \quad (3.11)$$

respectivamente. A partir de las relaciones (3.10) y (3.11) es posible deducir la siguiente relación dinámica:

$$\pi^- = \partial_+ A_- - \partial_- A_+, \quad (3.12)$$

junto con cinco vínculos primarios distribuidos de la siguiente manera:

- Tres vínculos asociados al sector electromagnético:

$$C \equiv \pi^+ \approx 0 \quad , \quad \chi^k \equiv \pi^k - \partial_- A_k + \partial_k A_- \approx 0. \quad (3.13)$$

- Dos vínculos correspondientes al sector escalar:

$$\Gamma \equiv \pi - D_- \phi \approx 0 \quad , \quad \Gamma^* \equiv \pi^* - (D_- \phi)^* \approx 0. \quad (3.14)$$

Ahora, es necesario proceder a calcular la consistencia de los vínculos primarios, para ello, siguiendo el procedimiento de Dirac [43], se procede a definir la densidad Hamiltoniana canónica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= \pi^\mu \partial_+ A_\mu + \partial_+ \phi^* \pi + \pi^* \partial_+ \phi - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} (\pi^-)^2 + (\pi^- \partial_-^y + \pi^k \partial_k^y - j^+) A_+ - (D_k \phi) (D_k \phi)^* \\ &\quad + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

por consiguiente, el Hamiltoniano canónico se especifica como siendo:

$$H_C = \int d^3 \mathbf{y} \mathcal{H}_C \quad \therefore \quad \int d^3 \mathbf{y} \equiv \int dy^1 dy^2 dy^- = \int d^2 \mathbf{y}^\perp dy^-. \quad (3.16)$$

Se define el Hamiltoniano primario H_P adicionando al Hamiltoniano canónico los vínculos primarios con sus respectivos multiplicadores de Lagrange,

$$H_P = H_C + \int d^3 \mathbf{y} (u C + u_k \chi^k + v^* \Gamma + \Gamma^* v), \quad (3.17)$$

donde u , u_k son los correspondientes multiplicadores asociados a los vínculos electromagnéticos en tanto que v y v^* son los respectivos multiplicadores de los vínculos escalares.

Se procede a definir los corchetes de Poisson (PB) entre los campos fundamentales de la teoría de la siguiente manera:

$$\left\{ A_\mu(x), \pi^\nu(y) \right\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \quad (3.18)$$

$$\left\{ \phi(x), \pi^*(y) \right\} = \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \phi^*(x), \pi(y) \right\} = \delta^3(x-y) \quad , \quad (3.19)$$

donde $\delta^3(x-y) \equiv \delta(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp)$. El procedimiento de Dirac establece que los vínculos primarios se deben preservar en el tiempo bajo la evolución generada por el Hamiltoniano primario, ésta afirmación se conoce como condición de consistencia de los vínculos. Con el fin de garantizar la consistencia de los vínculos primarios se debe requerir que ellos tengan un PB que desaparezca débilmente con el H_p . Utilizando los siguientes PB entre los vínculos primarios, los cuales son consecuencia de las PB fundamentales (3.18) y (3.19):

$$\begin{aligned} \left\{ \Gamma(x), \Gamma^*(y) \right\} &= -2D_-^x \delta^3(x-y), \\ \left\{ \Gamma^*(x), \Gamma(y) \right\} &= -2D_-^{x*} \delta^3(x-y), \\ \left\{ \chi^k(x), \chi^l(y) \right\} &= -2\delta_l^k \partial_-^x \delta^3(x-y), \end{aligned} \quad (3.20)$$

junto con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \left\{ j^+(x), \pi^-(y) \right\} &= 2g^2 \phi(x) \phi^*(x) \delta^3(x-y), \\ \left\{ \Gamma(x), j^+(y) \right\} &= ig \left[\phi(y) D_-^x \delta^3(x-y) + \delta^3(x-y) D_-^y \phi(y) \right], \\ \left\{ \Gamma^*(x), j^+(y) \right\} &= -ig \left[\delta^3(x-y) \left(D_-^y \phi(y) \right)^* + \left(\phi(y) D_-^x \right)^* \delta^3(x-y) \right], \\ \left\{ \Gamma(x), \pi^-(y) \right\} &= -ig \phi(x) \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \Gamma^*(x), \pi^-(y) \right\} = ig \phi^*(x) \delta^3(x-y), \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.1. Estructura de vínculos de la SQED₄ en las Coordenadas de Plano Nulo

se puede verificar que la consistencia de los vínculos primarios correspondientes al sector escalar producen para Γ :

$$\begin{aligned}
\dot{\Gamma}(x) &= \left\{ \Gamma(x), H_p \right\} = \int d^3y \left[\pi^-(y) \left\{ \Gamma(x), \pi^-(y) \right\} + \left\{ \Gamma(x), \pi^-(y) \right\} \partial_-^y \mathcal{A}_+(y) \right. \\
&\quad - \left\{ \Gamma(x), j^+(y) \right\} \mathcal{A}_+(y) - [\partial_y^y \phi + ig \mathcal{A}_k \phi] [\partial_y^k - ig \mathcal{A}^k] \left\{ \Gamma(x), \phi^*(y) \right\} + \\
&\quad \left. m^2 \phi(y) \left\{ \Gamma(x), \phi^*(y) \right\} + \left\{ \Gamma(x), \Gamma^*(y) \right\} v(y) \right] \\
&= -ig \phi \pi^- - ig \phi \partial_-^x \mathcal{A}_+ - ig \left[(\partial_-^x + ig \mathcal{A}_-) [\phi \mathcal{A}_+] + \mathcal{A}_+ (\partial_-^x + ig \mathcal{A}_-) \phi \right] \\
&\quad - [\partial_x^k + ig \mathcal{A}^k] [\partial_k^x \phi + ig \mathcal{A}_k \phi] - m^2 \phi - 2 [\partial_-^x + ig \mathcal{A}_-] v \\
&= -ig \left[\phi \pi^- + \partial_-^x (\phi \mathcal{A}_+) + ig \mathcal{A}_+ \mathcal{A}_- \phi + (\partial_-^x + ig \mathcal{A}_-) [\phi \mathcal{A}_+] \right] \\
&\quad - (\partial_y^k + ig \mathcal{A}^k) (\partial_k^x + ig \mathcal{A}_k) \phi - m^2 \phi - 2 [\partial_-^x + ig \mathcal{A}_-] v \\
&= -ig \left[\phi \pi^- + 2 (\partial_-^x + ig \mathcal{A}_-) [\phi \mathcal{A}_+] \right] - (\partial_y^k + ig \mathcal{A}^k) (\partial_k^x + ig \mathcal{A}_k) \phi - m^2 \phi \\
&\quad - 2 [\partial_-^x + ig \mathcal{A}_-] v,
\end{aligned}$$

es decir, en forma compacta el resultado anterior se expresa:

$$\dot{\Gamma} = -ig \left[\phi \pi^- + 2D_- (\mathcal{A}_+ \phi) \right] - D^k D_k \phi - m^2 \phi - 2D_- v \approx 0. \quad (3.22)$$

Un procedimiento similar al anterior permite determinar que la consistencia

del vínculo Γ^* establece que:

$$\begin{aligned}
\dot{\Gamma}^*(x) &= \left\{ \Gamma^*(x), H_p \right\} = \int d^3y \left[\pi^-(y) \left\{ \Gamma^*(x), \pi^-(y) \right\} + \left\{ \Gamma^*(x), \pi^-(y) \right\} \partial_-^y \mathcal{A}_+(y) \right. \\
&\quad - \left\{ \Gamma^*(x), j^+(y) \right\} \mathcal{A}_+(y) - (\partial_y^k \phi^* - ig \mathcal{A}^k \phi^*) (\partial_k^y + ig \mathcal{A}_k) \left\{ \Gamma^*(x), \phi(y) \right\} \\
&\quad \left. + m^2 \phi^*(y) \left\{ \Gamma^*(x), \phi(y) \right\} + v^*(y) \left\{ \Gamma^*(x), \Gamma(y) \right\} \right] \\
&= ig \phi^* \pi^- + ig \phi^* \partial_-^x \mathcal{A}_+ + ig \left[\mathcal{A}_+ (\partial_-^x - ig \mathcal{A}_-) \phi^* + (\partial_-^x - ig \mathcal{A}_-) [\mathcal{A}_+ \phi^*] \right] \\
&\quad - (\partial_k^x - ig \mathcal{A}_k) (\partial_x^k - ig \mathcal{A}^k) \phi^* - m^2 \phi^* - 2 (\partial_-^x - ig \mathcal{A}_-) v^* \\
&= ig \left[\phi^* \pi^- + \partial_-^x (\phi^* \mathcal{A}_+) - ig \mathcal{A}_+ \mathcal{A}_- \phi^* + (\partial_-^x - ig \mathcal{A}_-) [\mathcal{A}_+ \phi^*] \right] \\
&\quad - (\partial_k^x - ig \mathcal{A}_k) (\partial_x^k - ig \mathcal{A}^k) \phi^* - m^2 \phi^* - 2 (\partial_-^x - ig \mathcal{A}_-) v^* \\
&= ig \left[\phi^* \pi^- + 2 (\partial_-^x - ig \mathcal{A}_-) [\mathcal{A}_+ \phi^*] \right] - (\partial_k^x - ig \mathcal{A}_k) (\partial_x^k - ig \mathcal{A}^k) \phi^* - m^2 \phi^* \\
&\quad - 2 (\partial_-^x - ig \mathcal{A}_-) v^*,
\end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{\Gamma}^* = ig \left[\phi^* \pi^- + 2 D_-^* (\mathcal{A}_+ \phi^*) \right] - (D_k D^k \phi)^* - m^2 \phi^* - 2 (D_- v)^* \approx 0. \quad (3.23)$$

Las expresiones (3.22) y (3.23) permiten determinar el valor de los multiplicadores de Lagrange v y v^* respectivamente, como consecuencia, no existirán mas vínculos asociados al sector escalar.

Ahora, se procede a calcular la condición de consistencia asociado al vínculo primario del sector electromagnético. En primer lugar se procede a estudiar el vínculo χ^k :

$$\begin{aligned}
\dot{\chi}^l(x) &= \left\{ \chi^l(x), H_p \right\} = \int d^3y \left[\pi^-(y) \partial_l^x + \partial_-^y \mathcal{A}_+(y) \partial_l^x - \partial_l^y \mathcal{A}_+(y) \partial_-^x \right. \\
&\quad \left. + ig \phi(y) [\partial_y^l \phi^* - ig \mathcal{A}^l \phi^*] + ig \phi^*(y) [\partial_l^y \phi + ig \mathcal{A}_l \phi] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} F_{ks} [\delta_s^l \partial_k^x - \delta_k^l \partial_s^x] - 2 u_l(y) \partial_-^x \right] \delta^3(x-y) \\
&= \partial_l^x \pi^- + ig \phi [\partial_x^l \phi^* - ig \mathcal{A}^l \phi^*] + ig \phi^* [\partial_l^x \phi + ig \mathcal{A}_l \phi] + \partial_k^x F_{ks} - 2 \partial_-^x u_l \approx 0,
\end{aligned}$$

relación que se puede escribir de la siguiente forma:

$$\dot{\chi}^k = \partial_k \pi^- + j^k + \partial_j F_{jk} - 2 \partial_- u_k \approx 0, \quad (3.24)$$

3.1. Estructura de vínculos de la SQED₄ en las Coordenadas de Plano Nulo

que se entiende como una ecuación que permite deducir el valor del multiplicador u_k . Finalmente, se procede a calcular la condición de consistencia del vínculo π^+ lo cual resulta en:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^+(x) &= \left\{ \pi^+(x), H_P \right\} = \int d^3y \left[\pi^- \partial_-^y + \pi^k \partial_k^y - j^+ \right] \left\{ \pi^+(x), A_+(y) \right\} \\ &= \partial_-^x \pi^- + \partial_k^x \pi^k + j^+ \\ &\approx 0,\end{aligned}$$

es decir, que resulta un vínculo secundario que se definirá por:

$$G \equiv \partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k + j^+ \approx 0, \quad (3.25)$$

que se identifica como la ley de Gauss para la electrodinámica escalar en las coordenadas de plano nulo. Procediendo con el método de Dirac se tiene que garantizar la consistencia de éste vínculo secundario. Para ello si se utiliza las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\left\{ G(x), \Gamma(y) \right\} &= 2ig\phi(x) (\partial_-^x - igA_-) \delta^3(x-y), \\ \left\{ G(x), \Gamma^*(y) \right\} &= -2ig\phi^*(x) (\partial_-^x + igA_-) \delta^3(x-y), \\ \left\{ G(x), \chi^k(y) \right\} &= 0,\end{aligned}$$

se puede mostrar que de la consistencia de la ley de Gauss resulta:

$$\begin{aligned}\dot{G}(x) &= \left\{ G(x), H_P \right\} = \int d^3y \left[2g^2\phi(x)\phi^*(x)\pi^-(y) + 2g^2\phi(x)\phi^*(x)\partial_-^y A_+(y) \right. \\ &\quad + 2g^2\phi(y)\phi^*(y)A_+(y)\partial_-^x + ig\phi(y) \left[\partial_y^k \phi^*(y) - igA^k \phi^*(y) \right] \partial_k^x \\ &\quad + ig\phi^*(y) \left[\partial_k^y \phi(y) + igA_k \phi(y) \right] \partial_k^x + \frac{1}{2} F_{kl} \left[\partial_k^x \partial_l^x - \partial_l^x \partial_k^x \right] \\ &\quad \left. + 2ig\phi(x)v^*(y) (\partial_-^x - igA_-) - 2ig\phi^*(x)v(y) (\partial_-^x + igA_-) \right] \delta^3(x-y) \\ &= g \left\{ 2 \left[g(\phi\phi^*\pi^- + \phi\phi^*\partial_-^x A_+ + \partial_-^x [\phi\phi^*A_+]) + i\phi(\partial_-^x - igA_-)v^* \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - i\phi^*(\partial_-^x + igA_-)v \right] + i\partial_k^x [\phi\partial_x^k \phi^* - \phi^*\partial_x^k \phi - 2igA^k \phi\phi^*] \right\}.\end{aligned}$$

Sin embargo, es posible observar que:

$$\begin{aligned}
\phi^* \dot{\Gamma} - \phi \dot{\Gamma}^* &= -ig \left[2\phi\phi^* \pi^- + 2\phi^* (\partial_-^x + igA_-) [\phi A_+] + 2\phi (\partial_-^x - igA_-) [A_+ \phi^*] \right] \\
&\quad + \partial_k^x \left[\phi \partial_x^k \phi^* - \phi^* \partial_x^k \phi - 2igA^k \phi \phi^* \right] - 2\phi^* [\partial_-^x + igA_-] v \\
&\quad + 2\phi (\partial_-^x - igA_-) v^* \\
&= -ig2 \left[\phi\phi^* \pi^- + \partial_-^x (\phi^* A_+ \phi) + \phi\phi^* (\partial_-^x A_+) \right] - 2\phi^* [\partial_-^x + igA_-] v \\
&\quad + 2\phi (\partial_-^x - igA_-) v^* + \partial_k^x \left[\phi \partial_x^k \phi^* - \phi^* \partial_x^k \phi - 2igA^k \phi \phi^* \right] \\
&= -i \left\{ 2 \left[g \left[\phi\phi^* \pi^- + \partial_-^x (\phi^* A_+ \phi) + \phi\phi^* (\partial_-^x A_+) \right] - i\phi^* [\partial_-^x + igA_-] v \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + i\phi (\partial_-^x - igA_-) v^* \right] + i\partial_k^x \left[\phi \partial_x^k \phi^* - \phi^* \partial_x^k \phi - 2igA^k \phi \phi^* \right] \right\},
\end{aligned}$$

de tal manera que se cumple:

$$\dot{G}(x) = ig \left[\phi^*(x) \dot{\Gamma}(x) - \phi(x) \dot{\Gamma}^*(x) \right] \approx 0, \quad (3.26)$$

es decir, que ningún vínculo adicional es generado de la consistencia de la ley de Gauss ya que la expresión (3.26) indica que ésta es automáticamente conservada. Entonces, las relaciones (3.13), (3.14) y (3.25) constituyen el conjunto completo de vínculos que la teoría posee.

3.2. Clasificación de los Vínculos

Según el procedimiento de Dirac se procede a clasificar el conjunto de vínculos en vínculos de primera y segunda clase [42, 43]. Fácilmente, se puede determinar que π^+ tiene PB débilmente cero con el restante conjunto de vínculos de la teoría, por lo tanto, se concluye que π^+ se identifica como un vínculo de primera clase. Ahora, con el fin de clasificar el restante conjunto de vínculos $\Phi^a(x) = \{ \Gamma(x), \Gamma^*(x), G(x), \chi^k(x) \}$, se requiere calcular los correspon-

3.2. Clasificación de los Vínculos

dientes PB lo que resulta en:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \chi^k(x), \chi^l(y) \right\} &= -2\delta_1^k \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \Gamma(x), \Gamma^*(y) \right\} &= -2D_-^x \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \Gamma(x), G(y) \right\} &= 2ig\delta^3(x-y) D_-^x \phi(x) + 2ig\phi(x) \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \Gamma^*(x), G(y) \right\} &= -2ig\delta^3(x-y) (D_-^x \phi(x))^* - 2ig\phi^*(x) \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 \left\{ G(x), G(y) \right\} &= -2g^2 \left[\delta^3(x-y) \partial_-^x (\phi(x) \phi^*(x)) + 2\phi(x) \phi^*(x) \partial_-^x \delta^3(x-y) \right].
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

Las relaciones anteriores parecen indicar que el conjunto de vínculos $\Phi^a(x) = \{ \Gamma(x), \Gamma^*(x), G(x), \chi^k(x) \}$, aparentemente es de segunda clase. Sin embargo, al construir la matriz de vínculos asociado a $\Phi^a = \{ \Gamma, \Gamma^*, G, \chi^k \}$ con elementos de matriz definidos por: $C_{ab}(x, y) = \{ \Phi^a(x), \Phi^a(y) \} = \Delta(x) \delta^3(x-y)$, donde $\Delta(x)$ es la matriz representada en la forma:

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2(D_-^x)^* & 2ig[(D_-^x)^* \phi(x)] + 2ig\phi(x) \partial_-^x & 0 \\ -2D_-^x & 0 & -2ig[D_-^x \phi^*(x)] - 2ig\phi^*(x) \partial_-^x & 0 \\ 2ig\phi(x) D_-^x & -2ig\phi^*(x) (D_-^x)^* & F(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\delta_1^k \partial_-^x \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

y siendo F un operador que se expresa como:

$$F \equiv -2g^2 \partial_- (\phi \phi^*) - 4g^2 \phi \phi^* \partial_- \tag{3.29}$$

No obstante, es posible mostrar que la matriz $C(x, y)$ tiene determinante igual a cero. La anterior afirmación implica que la ésta matriz posee un autovalor cero cuyo autovector asociado dará una combinación de los vínculos $\Phi^a(x) = \{ \Gamma(x), \Gamma^*(x), G(x), \chi^k(x) \}$ y que tendrá la característica de ser un vínculo de primera clase. El autovector correspondiente, $U(x)$, se calcula a partir de la siguiente ecuación de autovalores:

$$\int d^3x C(x, y) U(y) = 0. \tag{3.30}$$

De la expresión anterior se determina que el autovector correspondiente al autovalor cero es:

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \Gamma(\mathbf{x}) \\ \Gamma^*(\mathbf{x}) \\ \mathbf{G}(\mathbf{x}) \\ \chi^k(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

donde el segundo vínculo de primera clase se calcula de la siguiente manera:

$$\Sigma(\mathbf{x}) = \Phi^a(\mathbf{x}) U_a(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x}) - ig \left[\phi^*(\mathbf{x}) \Gamma(\mathbf{x}) - \phi(\mathbf{x}) \Gamma^*(\mathbf{x}) \right]. \quad (3.32)$$

Una manera alternativa de visualizar el resultado anterior es observar la ley de Gauss representada por el vínculo \mathbf{G} que según el conjunto de PB (3.27) es de segunda clase. En el límite $g \rightarrow 0$, se recupera la teoría de campo de Maxwell libre en la cual la ley de Gauss es estrictamente un vínculo de primera clase. Por otra parte, si \mathbf{G} pertenece a un conjunto mínimo de vínculos de segunda clase, el límite en el que la constante de acoplamiento tiende a cero no se podría considerar naturalmente con el fin de recuperar las teorías libres debido a que los corchetes de Dirac (DB) que son necesarios construir para una teoría gauge no estarían bien definidos. Se debe tener en cuenta que los DB asociados a la teoría están definidos en términos de una matriz no singular construida a partir del conjunto mínimo de vínculos de segunda clase y como tal, ésta resultaría singular cuando se restaura las teorías libres, es decir, cuando $g \rightarrow 0$. En conclusión, se deberá considerar una combinación lineal de vínculos $\Phi^a(\mathbf{x}) = \{ \Gamma(\mathbf{x}), \Gamma^*(\mathbf{x}), \mathbf{G}(\mathbf{x}), \chi^k(\mathbf{x}) \}$ que resulta ser de primera clase y que es dada por (3.32).

Con el fin de mostrar que $\Sigma(\mathbf{x})$ es un vínculo de primera clase se procede a calcular los PB de él con el restante conjunto de vínculos que la teoría tiene.

3.2. Clasificación de los Vínculos

Se puede mostrar que:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Sigma(x), \Gamma(y) \right\} &= -ig\Gamma(x) \delta^3(x-y) \approx 0, \\
 \left\{ \Sigma(x), \Gamma^*(y) \right\} &= ig\Gamma^*(x) \delta^3(x-y) \approx 0, \\
 \left\{ \Sigma(x), G(y) \right\} &= 0, \\
 \left\{ \Sigma(x), \chi^k(y) \right\} &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

lo que garantiza que (3.32) es el segundo vínculo de primer clase que la teoría preenta. Es posible mostrar que $\Sigma(x)$ presenta una estructura funcional diferente la cual es:

$$\begin{aligned}
 \Sigma &= G - ig(\phi^*\Gamma - \phi\Gamma^*) \\
 &= \partial_-\pi^- + \partial_k\pi^k + j_- - ig \left[\phi^*(\pi - D_-\phi) - \phi(\pi^* - (D_-\phi)^*) \right] \\
 &= \partial_-\pi^- + \partial_k\pi^k + ig[\phi(D_-\phi)^* - \phi^*D_-\phi] - ig \left[\phi^*\pi - \phi\pi^* \right. \\
 &\quad \left. + \phi(D_-\phi)^* - \phi^*(D_-\phi) \right] \\
 &= \partial_-\pi^- + \partial_k\pi^k - ig \left[\phi^*\pi - \phi\pi^* \right].
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Así, se puede concluir que el conjunto de vínculos de la SQED₄ se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Vínculos de primera clase:

$$C = \pi^+ \approx 0 \quad , \quad \Sigma = G - ig(\phi^*\Gamma - \phi\Gamma^*) \approx 0. \tag{3.35}$$

- Vínculos de segunda clase:

$$\Gamma \equiv \pi - D_-\phi \approx 0 \quad , \quad \Gamma^* \equiv \pi^* - (D_-\phi)^* \approx 0 \quad , \quad \chi^k \equiv \pi^k - \partial_-A_k + \partial_kA_- \approx 0. \tag{3.36}$$

Los resultados anteriores permiten asegurar que (3.35) constituye el número máximo de vínculos de primera clase y que la búsqueda de la independencia en

el tiempo de $(\Gamma, \Gamma^*, \chi^k)$ conduce a ecuaciones para determinar sus respectivos multiplicadores de Lagrange. El vínculo de primera clase Σ , (3.32), puede ser comparado con su equivalente en el *instante forma* [42] donde el segundo vínculo de primera clase, en este sistema de coordenadas, no resulta de una combinación lineal de los vínculos del sector escalar y electromagnético ya que en el análisis canónico en el *instante forma* el sector escalar es regular.

3.3. Ecuaciones de Movimiento y Condiciones de Gauge

Ahora, se procederá a comprobar que se poseen las correctas ecuaciones de movimiento las cuales deberán ser compatibles con la completa libertad de gauge que existe en la teoría. Por tanto, la evolución temporal de los campos es calculada evaluando el PB de estos con el así llamada Hamiltoniano extendido, H_E . Es decir, si $\Psi_a(x) \equiv (A_\mu(x), \pi^\mu(x), \phi(x), \phi^*(x), \pi(x), \pi^*(x))$ denota cualquier variable del espacio de fase de la teoría, la evolución temporal de $\Psi_a(x)$ es determinada a partir de:

$$\dot{\Psi}_a(x) = \left\{ \Psi_a(x), H_E \right\}, \quad (3.37)$$

donde el Hamiltoniano extendido es obtenido adicionando al Hamiltoniano primario H_P todos los vínculos de primera clase que surgieron en el problema, con lo cual se obtiene que:

$$H_E = \int d^3y \left[\frac{1}{2} (\pi^-)^2 + (\pi^- \partial_- + \pi^k \partial_k - j^+) A_+ - D_k \phi (D^k \phi)^* + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \right] \\ + \int d^3y \left[w_1 C + u_k \chi^k + v^* \Gamma + \Gamma^* v + w_2 \Sigma \right]. \quad (3.38)$$

Las cantidades (v, v^*, u_k) se interpretan como siendo los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de segunda clase y que pueden ser fijados de las consistencia de $(\Gamma, \Gamma^*, \chi^k)$ en tanto que (w_1, w_2) son los multiplicadores

3.3. Ecuaciones de Movimiento y Condiciones de Gauge

de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase y que son, en principio, indeterminados y arbitrarios. Así, la evolución temporal de los campos asociados al sector electromagnéticos es dada como:

$$\begin{aligned}\dot{A}_+(\mathbf{x}) &= w_1(\mathbf{x}), \\ \dot{A}_-(\mathbf{x}) &= \pi^-(\mathbf{x}) + \partial_-^x A_+(\mathbf{x}) - \partial_-^x w_2(\mathbf{x}), \\ \dot{A}_k(\mathbf{x}) &= \partial_k^x A_+(\mathbf{x}) + u_k(\mathbf{x}) - \partial_k^x w_2(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{3.39}$$

Por consistencia de la segunda ecuación en (3.38) con la ecuación de movimiento (3.12) se podría elegir $w_2 = 0$. En forma similar, la evolución temporal de los momentos canónicos del sector electromagnético determina que:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^+(\mathbf{x}) &= G(\mathbf{x}) \approx 0, \\ \dot{\pi}^-(\mathbf{x}) &= 2g^2\phi(\mathbf{x})\phi^*(\mathbf{x})A_+(\mathbf{x}) + \partial_k^x u_k(\mathbf{x}) + igv^*(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) - ig\phi^*(\mathbf{x})v(\mathbf{x}), \\ \dot{\pi}^k(\mathbf{x}) &= ig\phi(\mathbf{x})\left[\partial_x^k\phi^*(\mathbf{x}) - igA^k(\mathbf{x})\phi^*(\mathbf{x})\right] + ig\phi^*(\mathbf{x})\left[\partial_k^x\phi(\mathbf{x}) + igA_k(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})\right] \\ &\quad + \partial_l^x F_{lk}(\mathbf{x}) - \partial_-^x u_k(\mathbf{x}).\end{aligned}\tag{3.40}$$

Al combinar las ecuaciones (3.39) y (3.40) se obtiene:

$$\partial_\mu^x F^{\mu\nu} + j^\nu \approx 0\tag{3.41}$$

Un análisis semejante se puede realizar con las variables del sector escalar, para las cuales resulta que la evolución temporal de sus campos y momentos canónicos es:

$$\begin{aligned}\dot{\phi}(\mathbf{x}) &= v(\mathbf{x}) + igw_2(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}), \\ \dot{\phi}^*(\mathbf{x}) &= v^*(\mathbf{x}) - igw_2(\mathbf{x})\phi^*(\mathbf{x}), \\ \dot{\pi}(\mathbf{x}) &= -D_-^x D_-^x \phi(\mathbf{x}) - igA_+(\mathbf{x})D_-^x \phi(\mathbf{x}) - D_x^k D_k^x \phi(\mathbf{x}) - m^2\phi(\mathbf{x}) \\ &\quad + igD_-^x [w_2(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x})] + igw_2(\mathbf{x})D_-^x \phi(\mathbf{x}), \\ \dot{\pi}^*(\mathbf{x}) &= -\left(D_-^x D_-^x \phi(\mathbf{x})\right)^* + igA_+(\mathbf{x})\left(D_-^x \phi(\mathbf{x})\right)^* - \left(D_k^x D_k^x \phi(\mathbf{x})\right)^* \\ &\quad - m^2\phi^*(\mathbf{x}) - ig\left(\phi(\mathbf{x})D_-^x\right)^* w_2(\mathbf{x}) - 2igw_2(\mathbf{x})\left(D_-^x \phi(\mathbf{x})\right)^*\end{aligned}\tag{3.42}$$

Combinando las relaciones anteriores se puede deducir que:

$$\begin{aligned} \left(D_{\mu}^x D_x^{\mu} + m^2 \right) \phi &\approx ig \partial_-^x w_2 + 2ig w_2 D_-^x \phi, \\ \left(D_{\mu}^{x*} D_x^{\mu*} + m^2 \right) \phi^* &\approx -ig \phi^* \partial_-^x w_2 - 2ig w_2 (D_-^x \phi)^*, \end{aligned} \quad (3.43)$$

Por lo tanto, las ecuaciones de campo (4.42) y (4.44) son consistentes con su contraparte Lagrangiana si se elige $w_2 = 0$.

3.4. Eliminación de los Vínculos

El algoritmo de Dirac requiere de tantas condiciones de gauge como vínculos de primera clase surjan en la teoría. Sin embargo, tales condiciones de gauge deberán ser compatibles con las ecuaciones de Euler-Lagrange y por tanto deben fijar el multiplicador de Lagrange w_2 a cero y transformar los vínculos de primera en vínculos de segunda clase. Una condición de gauge que satisface tales requerimientos es:

$$A_- \approx 0 \quad , \quad \pi^- + \partial_- A_+ \approx 0 \quad (3.44)$$

la cual es estándar en las teorías gauge puras y se conoce en la literatura como gauge de plano nulo [55, 56].

Con el fin de eliminar el conjunto de vínculos de segunda clase que ahora la teoría posee se aplicará el método iterativo y así definir los corchetes de Dirac (DB) [42]. Para cumplir con tal propósito primero se seleccionara el conjunto de vínculos de primera clase (3.35) junto con las condiciones de gauge (3.44) y se los re definirá de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &\equiv \pi^+ & , & & \Phi_3 &\equiv A_- \\ \Phi_2 &\equiv \Sigma = G - ig(\phi^* \Gamma - \phi \Gamma^*) & , & & \Phi_4 &\equiv \pi^- + \partial_- A_+. \end{aligned} \quad (3.45)$$

3.4. Eliminación de los Vínculos

Utilizando los siguientes PB no nulos entre ellos:

$$\begin{aligned} \left\{ \Phi_1(x), \Phi_4(y) \right\} &= \partial_-^x \delta^3(x-y), \\ \left\{ \Phi_2(x), \Phi_3(y) \right\} &= -\partial_-^x \delta^3(x-y), \\ \left\{ \Phi_3(x), \Phi_4(y) \right\} &= \delta^3(x-y), \end{aligned}$$

se definirá una primera matriz de vínculos con los siguientes elementos: $C_{ij}(x, y) \equiv \{\Phi_i(x), \Phi_j(y)\}$ y que posee la siguiente representación:

$$C_{ij}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (3.46)$$

Con el fin de calcular la inversa $C_{ij}^{-1}(x, y)$ de la matriz de vínculos (3.46) es necesario resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\int d^3z C_{ik}^{-1}(x, z) C_{kj}(z, y) = \int d^3z C_{ik}(x, z) C_{kj}^{-1}(z, y) = \delta_{ij} \delta^3(x-y). \quad (3.47)$$

No obstante, con el fin de cumplir la relación se requiere definir convenientemente la inversa del operador longitudinal ∂_- . En general, se sabe que:

$$(\partial_-)^{-1} f(x^-) = \frac{1}{2} \int dy^- \epsilon(x^- - y^-) f(y^-, x^+, x^\perp) + F(x^+, x^\perp), \quad (3.48)$$

donde la función $\epsilon(x)$ es,

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (3.49)$$

y $F(x^+, x^\perp)$ es una función independiente de x^- . La presencia de la función F en la expresión (3.48) es asociada con el hecho de no haber especificado las

condiciones iniciales lo que podría implicar que a la matriz de vínculos (3.46) se le pueda asociar una única inversa. Dirac mostró que la matriz formada por un conjunto completo de vínculos de segunda clase debe tener una única inversa [43], por lo que el grupo de vínculos (3.45) no es un conjunto puro de vínculos de segunda clase. La matriz inversa de (3.46) no es por tanto única porque entre los vínculos de segunda clase se encuentra un subconjunto de vínculos de primera clase ocultos [56]. La presencia de éste conjunto oculto de vínculos puede ser visualizada observando las condiciones de consistencia (3.22), (3.23) y (3.24) a las cuales se les puede asociar las siguientes soluciones a los correspondientes multiplicadores de Lagrange (v, v^*, u_k) :

$$\begin{aligned} v(x) &= \hat{v}(x) + s(x^+, x^\perp), \\ v^*(x) &= \hat{v}^*(x) + s^*(x^+, x^\perp), \\ u_k(x) &= \hat{u}_k(x) + s_k(x^+, x^\perp), \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde $s(x^+, x^\perp)$, $s^*(x^+, x^\perp)$ y $s_k(x^+, x^\perp)$ son funciones arbitrarias de (x^+, x^\perp) , en tanto que $\hat{v}(x)$, $\hat{v}^*(x)$ y $\hat{u}_k(x)$ representan soluciones sin ambigüedades, con lo cual el Hamiltoniano total se puede expresar como:

$$\begin{aligned} H'_E &= \int d^3y \left[\frac{1}{2} (\pi^-)^2 + (\pi^- \partial_- + \pi^k \partial_k - j^+) A_+ - D_k \phi (D^k \phi)^* + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \right] \\ &+ \int d^3y \left[w_1 C + \hat{u}_k \chi^k + \hat{v}^* \Gamma + \Gamma^* \hat{v} + w_2 \Sigma \right] + \int d^3y \left[s_k \chi^k + s^* \Gamma + \Gamma^* s \right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Dirac mostró que la contribución de la solución homogénea para v , v^* y u_k , (3.50), estará siempre asociada con vínculos de primera clase, que en nuestro caso, son los vínculos ocultos de primera clase. Sin embargo, Steinhardt [55] demostró que este subconjunto de vínculos oculto de vínculos de primera clase está asociado con transformaciones de gauge impropias [56], las cuales cambian el estado físico de un sistema y proyectan una solución de las ecuaciones de movimiento en otra solución completamente diferente. Por tanto, no es posible eliminar las transformaciones de gauge impropias por medio de condiciones de gauge ya que tal procedimiento podría excluir consideraciones físicas permitidas al sistema.

3.4. Eliminación de los Vínculos

La manera natural de eliminar los vínculos ocultos es fijando adecuadas condiciones de frontera con el fin de que el Hamiltoniano total sea un apropiado generador de traslaciones temporales. De hecho, la invariancia de la acción por transformaciones impropias da origen a leyes de conservación no triviales que se expresan en la forma de integrales de superficie. Distinto a las transformaciones de gauge usuales las cuales generan transformaciones propias, que son característica de una teoría gauge, y las cuales no cambian el estado físico del sistema. La posibilidad de realizar transformaciones de gauge propias puede siempre ser eliminada imponiendo condiciones de gauge.

Por tanto, la evaluación explícita de la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase (3.46) involucra la determinación de una función arbitraria de (x^+, x^\perp) . Ésta función puede ser evaluada considerando apropiadas condiciones de frontera sobre la variación en la coordenada canónica generada por el vínculo. Entonces, imponiendo las condiciones de frontera sobre los campos (ϕ, ϕ^*, A_k) citadas en [47] y [58], la inversa del operador ∂_- es definida sobre toda función integrable $f(x^-)$ en la forma:

$$(\partial_-)^{-1} f(x^-) = \frac{1}{2} \int dy^- \epsilon(x^- - y^-) f(y^-), \quad (3.52)$$

la cual es menos singular que $\frac{1}{x^-}$ y desaparece mas rápido que $\frac{1}{x^-}$ para valores grandes de x^- . A partir de (3.52) se puede garantizar que la inversa única de la matriz de vínculos (3.46) es dada por:

$$C_{ij}^{-1}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -|x^- - y^-| & 0 & \epsilon(x^- - y^-) \\ |x^- - y^-| & 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 \\ 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 \\ \epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x^\perp - y^\perp). \quad (3.53)$$

Una manera alternativa de calcular la inversa (3.53) es usar el hecho que los DB deben satisfacer las identidades de Jacobi [59].

Utilizando la inversa de la matriz de vínculos definida por la ecuación (3.53), el primer conjunto de corchetes de Dirac (DB) $\{\cdot, \cdot\}_{D1}$, para dos variables

dinámicas $\mathbf{A}(x)$ y $\mathbf{B}(y)$ son calculados a partir de:

$$\left\{ \mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y) \right\}_{D_1} = \left\{ \mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}(x), \Phi_i(u) \right\} C_{ij}^{-1}(u, v) \left\{ \Phi_j(v), \mathbf{B}(y) \right\}. \quad (3.54)$$

Utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ \phi(x), \Theta_2(u) \right\} &= ig\phi(x) \delta^3(x-y), \quad \left\{ \phi^*(x), \Theta_2(u) \right\} = -ig\phi^*(x) \delta^3(x-y), \\ \left\{ \pi(x), \Theta_2(u) \right\} &= ig\delta^3(x-y) \partial_-^u \phi(u), \quad \left\{ \pi^*(x), \Theta_2(u) \right\} = -ig\delta^3(x-y) \partial_-^u \phi^*(u) \\ \left\{ \Theta_1(v), A_+(y) \right\} &= -\delta^3(x-y), \quad \left\{ A_k(x), \Theta_2(u) \right\} = -\partial_k^x \delta^3(x-u) \\ \left\{ \pi^k(x), \Theta_i(u) \right\} &= 0, \end{aligned}$$

es posible determinar que si $\mathbf{A}_a(x)$ es un campo escalar se cumple que:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_2(u) \right\} C_{2j}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_j(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}. \quad (3.55)$$

Ahora, si $\mathbf{B}_b(x)$ es también una variable escalar se deberá cumplir que:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} \quad (3.56)$$

de tal manera que los DB no nulos que tienen en cuenta los campos escalares son:

$$\left\{ \phi(x), \pi^*(y) \right\}_{D_1} = \delta^3(x-y), \quad \left\{ \phi^*(x), \pi(y) \right\}_{D_1} = \delta^3(x-y). \quad (3.57)$$

Si se considera que $\mathbf{B}_b(x) = A_+(x)$, se determina que:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), A_+(y) \right\}_{D_1} = \frac{1}{2} \int d^3u \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_2(u) \right\} |u^- - y^-| \delta^2(u^\top - y^\top),$$

3.5. Inversion de Vínculos Escalares

a partir del cual se puede deducir:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \phi(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{ig}{2} \phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top), \\
 \left\{ \phi^*(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{ig}{2} \phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top), \\
 \left\{ \pi(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{ig}{2} |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top) \partial_-^x \phi(x), \\
 \left\{ \pi^*(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{ig}{2} |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top) \partial_-^x \phi^*(x).
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

No obstante para $A_a(x) = A_k(x)$ se debe cumplir que:

$$\left\{ A_k(x), B_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ A_k(x), B_b(y) \right\} + \partial_k^x \int d^3v C_{2j}^{-1}(x, v) \left\{ \Theta_d(v), B_b(y) \right\},$$

de la cual se puede concluir que los últimos $\{\cdot, \cdot\}_{D1}$ no nulos son:

$$\begin{aligned}
 \left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_{D1} &= \delta_k^l \delta^3(x - y), \\
 \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top).
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

3.5. Inversion de Vínculos Escalares

En este instante se procede a invertir los vínculos de segunda clase asociados al sector escalar. Para ello, sera necesario definir un segundo conjunto de DB, $\{\cdot, \cdot\}_{D2}$, a partir de:

$$\Psi_1(x) \equiv \pi(x) - \partial_-^x \phi(x) \approx 0, \quad \Psi_2 \equiv \pi^*(x) - \partial_-^x \phi^*(x) \approx 0. \tag{3.60}$$

El BD $\{\cdot, \cdot\}_{D2}$ para dos variables $A_a(x)$ y $B_b(y)$ es definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D2} &\equiv \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_a(x), \Psi_c(u) \right\}_{D1} \\
 &\quad D_{cd}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_d(v), B_b(y) \right\}_{D1},
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

donde $D_{ab}^{-1}(x, y)$ (con $a, b = 1, 2$) es la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase $D_{ab}(x, y)$ construida a partir de (3.60) y que es determinada por los siguientes elementos de matriz:

$$D_{ab}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_a(x), \Psi_b(y) \right\}. \quad (3.62)$$

Utilizando las siguientes relaciones:

$$\left\{ \Psi_1(x), \Psi_2(y) \right\} = -2\partial_-^x \delta^3(x - y) \quad , \quad \left\{ \Psi_2(x), \Psi_1(y) \right\} = -2\partial_-^x \delta^3(x - y),$$

se demuestra que $D_{ab}(x, y)$ tiene la siguiente representación matricial funcional:

$$D(x, y) = -2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_-^x \delta^3 \delta^3(x - y), \quad (3.63)$$

cuya inversa, fácilmente, se muestra que tiene la forma:

$$D^{-1}(x, y) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top). \quad (3.64)$$

Bajo la definición de los DB $\{\cdot, \cdot\}_{D_2}$ se cumple la siguiente condición:

$$\begin{aligned} \left\{ \Psi_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \Psi_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ \Psi_a(x), \Psi_c(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{cd}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} \\ &= \left\{ \Psi_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3v \underbrace{\int d^3u D_{ac}(x, u) D_{cd}^{-1}(u, v)}_{\delta_{ad} \delta^3(x-v)} \\ &\quad \left\{ \Psi_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} \\ &= \left\{ \Psi_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \left\{ \Psi_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} \\ &= 0, \end{aligned}$$

es decir, debido a (3.61) los vínculos escalares se pueden considerar identidades fuertes:

$$\pi(x) - \partial_-^x \phi(x) = 0 \quad , \quad \pi^*(x) - \partial_-^x \phi^*(x) = 0, \quad (3.65)$$

3.5. Inversion de Vínculos Escalares

de tal manera que de las cuatro coordenadas asociadas a ellos, $(\phi, \phi^*, \pi, \pi^*)$ solo dos son independientes. Aun cuando los vínculos no especifican cuales con las coordenadas independientes, existe completa libertad en la selección de los grados de libertad. La forma funcional de las relaciones (3.64) permite considerar a (ϕ, ϕ^*) como las coordenadas independientes que se derivan de (3.61) y por ende, los DB $\{\cdot, \cdot\}_{D2}$ se calcularán inicialmente en relación a éstas variables. Si existe interés de calcular los DB asociado a las variables (π, π^*) se utilizara, simplemente, las expresiones (3.64). Ahora, con el fin de calcular los DB sera conveniente utilizar las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \phi(x), \Psi_2(u) \right\}_{D1} &= \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \Psi_1(v), \phi^*(y) \right\}_{D1} = -\delta^3(x-y) \\
 \left\{ \Psi_1(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{ig}{2} \phi(v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top), \\
 \left\{ \Psi_2(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{ig}{2} \phi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top), \quad (3.66) \\
 \left\{ \Psi_i(v), \mathcal{A}_k(y) \right\}_{D1} &= 0 \quad , \quad \left\{ \Psi_i(v), \pi^k(y) \right\}_{D1} = 0.
 \end{aligned}$$

A partir de (3.61) y (3.66) se puede mostrar el siguiente conjunto de DB $\{\cdot, \cdot\}_{D2}$ no nulos:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \phi(x), \phi^*(y) \right\}_{D2} &= -\frac{1}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top), \\
 \left\{ \phi(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[\phi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \phi(v) \right. \\
 &\quad \left. \epsilon(x^- - v^-) \epsilon(v^- - y^-) \right], \quad (3.67) \\
 \left\{ \phi^*(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[\phi^*(x) |x - y| - \frac{1}{4} \int dv^- \phi^*(v) \right. \\
 &\quad \left. \epsilon(x^- - y^-) \epsilon(v^- - y^-) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_{D_2} &= \delta_k^l \delta^3(x-y), \\
\left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top), \\
\left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= \frac{g^2}{16} \int d^3u d^3v \left[\phi(u) \phi^*(v) + \phi^*(u) \phi(v) \right] \epsilon(x^- - u^-) \\
&\quad \delta^2(x^\top - u^\top) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \epsilon(v^- - y^-) \\
&\quad \delta^2(v^\top - y^\top).
\end{aligned} \tag{3.68}$$

3.6. Corchetes de Dirac

Finalmente, se procede a calcular los DB entre los grados de libertad de la teoría. Para ello, se procederá a determinar hasta el momento las coordenadas independientes que el sistema presenta. Inicialmente, la SQED₄ es definida por el siguiente espacio de fase: $(A_\mu, \phi, \phi^*, \pi^\mu, \pi, \pi^*)$, es decir, un espacio de dimensión 12. Bajo la definición de los DB, el conjunto de vínculos que se han invertido se convierten en las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
A_- &= 0, \\
\pi^- + \partial_- A_+ &= 0, \\
\pi - D_- \phi &= \pi - \partial_- \phi = 0, \\
\pi^* - (D_- \phi)^* &= \pi^* - \partial_- \phi^* = 0, \\
\pi^+ &= 0, \\
\partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k - ig \left[\phi^* \pi - \phi \pi^* \right] &= \partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k - ig \left[\phi^* \partial_- \phi - \phi \partial_- \phi^* \right] = 0,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

con lo cual la teoría posee hasta el momento 6 coordenadas independientes. Ahora, el conjunto de vínculos $\chi^k(x)$ del sector electromagnético, bajo la definición de los DB parciales, se expresa de la siguiente forma:

$$\chi^k \equiv \pi^k - \partial_- A_k \approx 0, \tag{3.70}$$

lo que permite identificar al momento $\pi^k(x)$ como dependiente del campo $A_k(x)$. Por tanto, a partir de (3.70) se construye la matriz de vínculos de

3.6. Corchetes de Dirac

segunda clase:

$$F^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \left\{ \chi^k(\mathbf{x}), \chi^l(\mathbf{y}) \right\}_{D_2} = -2\delta_l^k \partial_x^- \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.71)$$

la cual posee la siguiente inversa:

$$(F^{-1})^{kl}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{4}\delta_l^k \epsilon(\mathbf{x}^- - \mathbf{y}^-) \delta^2(\mathbf{x}^\top - \mathbf{y}^\top). \quad (3.72)$$

Entonces, el conjunto final de DB para las variables dinámicas $\mathbf{A}_a(\mathbf{x})$ y $\mathbf{B}_a(\mathbf{x})$ se define de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{A}_a(\mathbf{x}), \mathbf{B}_b(\mathbf{y}) \right\}_D &\equiv \left\{ \mathbf{A}_a(\mathbf{x}), \mathbf{B}_b(\mathbf{y}) \right\}_{D_2} - \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{v} \left\{ \mathbf{A}_a(\mathbf{x}), \chi^s(\mathbf{u}) \right\}_{D_2} \\ &\quad (F^{-1})^{sn}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \left\{ \chi^n(\mathbf{v}), \mathbf{B}_b(\mathbf{y}) \right\}_{D_2} \end{aligned} \quad (3.73)$$

Utilizando la representación explícita de la matriz $(F^{-1})^{sn}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ dada por (3.72), los DB (3.73) se expresan como:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{A}_a(\mathbf{x}), \mathbf{B}_b(\mathbf{y}) \right\}_D &= \left\{ \mathbf{A}_a(\mathbf{x}), \mathbf{B}_b(\mathbf{y}) \right\}_{D_2} + \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{v} \epsilon(\mathbf{u}^- - \mathbf{v}^-) \delta^2(\mathbf{u}^\top - \mathbf{v}^\top) \\ &\quad \left\{ \mathbf{A}_a(\mathbf{x}), \chi^s(\mathbf{u}) \right\}_{D_2} \left\{ \chi^s(\mathbf{v}), \mathbf{B}_b(\mathbf{y}) \right\}_{D_2}. \end{aligned} \quad (3.74)$$

Utilizando los siguientes corchetes de Dirac,

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{A}_k(\mathbf{x}), \chi^l(\mathbf{u}) \right\}_{D_2} &= \delta_l^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}), \\ \left\{ \chi^s(\mathbf{v}), \mathbf{A}_+(\mathbf{y}) \right\}_{D_2} &= -\frac{1}{2} \epsilon(\mathbf{v}^- - \mathbf{y}^-) \partial_s^y \delta^2(\mathbf{v}^\top - \mathbf{y}^\top), \\ \left\{ \mathbf{A}_+(\mathbf{x}), \chi^s(\mathbf{u}) \right\}_{D_2} &= -\frac{1}{2} \epsilon(\mathbf{x}^- - \mathbf{u}^-) \partial_s^x \delta^2(\mathbf{v}^\top - \mathbf{y}^\top), \\ \left\{ \Phi(\mathbf{x}), \chi^s(\mathbf{u}) \right\}_{D_2} &= 0, \\ \left\{ \Phi^*(\mathbf{x}), \chi^s(\mathbf{u}) \right\}_{D_2} &= 0, \end{aligned}$$

se deriva el conjunto final de DB entre las variables dinámicas fundamentales de la teoría:

$$\left\{ A_k(x), A_l(y) \right\}_D = -\frac{1}{4} \delta_l^k \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp), \quad (3.75)$$

$$\left\{ \Phi(x), \Phi^*(y) \right\}_D = -\frac{1}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp),$$

$$\begin{aligned} \left\{ \Phi(x), A_+(y) \right\}_D &= \frac{i}{2} g \Phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad - \frac{i}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \Phi(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-), \end{aligned} \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \Phi^*(x), A_+(y) \right\}_D &= -\frac{i}{2} g \Phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad + \frac{i}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \Phi^*(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Del principio de correspondencia se deduce los siguientes conmutadores entre los campos:

$$\left[A_k(x), A_l(y) \right] = -\frac{i}{4} \delta_l^k \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp), \quad (3.78)$$

$$\left[\Phi(x), \Phi^*(y) \right] = -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp),$$

$$\begin{aligned} \left[\Phi(x), A_+(y) \right] &= -\frac{1}{2} g \Phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad + \frac{1}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \Phi(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-), \end{aligned} \quad (3.79)$$

3.6. Corchetes de Dirac

$$\begin{aligned} \left[\phi^*(x), A_+(y) \right] &= \frac{1}{2} g \phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad - \frac{1}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi^*(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Las primeras dos relaciones fueron deducidas por Neville y Rohrlich [60]. Ellos derivaron estas expresiones comenzando con las relaciones de conmutación entre los operadores de campo libres a tiempos iguales x^+ , y^+ y posteriormente, calcularon los conmutadores sobre el plano nulo $x^+ = y^+$. Las relaciones de conmutación que involucra los operadores de campo $\hat{A}_+(x)$ no fueron obtenidas por Neville y Rohrlich, sin embargo, ellos afirmaron que éstas expresiones deberían ser deducidas al resolver una serie de vínculos cuánticos. En esta parte del trabajo, se obtuvieron las relaciones de conmutación entre los campos independientes de la teoría los cuales fueron derivados a nivel clásico siguiendo un cuidadoso análisis de la estructura de vínculos del modelo.

Se ha mostrado que la SQED₄ posee un vínculo de primera clase que resulta de una combinación lineal de vínculos y que resulta ser el autovector de la matriz de vínculos correspondiente al modo cero. De hecho, éste vínculo es consecuencia de la existencia de vínculos asociados al sector escalar. El resultado se debe contrastar con aquellos derivados en las coordenadas de instante forma en los cuales el segundo vínculo de primera clase es simplemente la ley de Gauss la cual depende únicamente de las variables correspondientes al campo electromagnético y donde los vínculos correspondientes al sector escalar no existen.

Se ha utilizado el gauge de plano nulo con el fin de transformar los vínculos de primera en segunda clase. Cuando apropiadas condiciones de frontera se han impuesto sobre los campos, se ha fijado el subconjunto oculto de vínculos de primera clase y se determinó una única inversa correspondiente a la matriz de vínculos de segunda clase. Se dedujeron los DB de la teoría y se cuantizaron vía principio de correspondencia. Las relaciones de conmutación entre los operadores de campo libre son consistentes con los resultados reportados en la literatura [60]. Los conmutadores que involucran los operadores de campo \hat{A}_+ fueron calculados cuantizando los DB derivados a nivel clásico siguiendo

un cuidadoso análisis de la estructura de vínculos.

Capítulo 4

Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

4.1. Introducción

En 1928 Dirac propuso una teoría destinada a describir partículas de espín $\frac{1}{2}$ [61] la cual se caracterizaba por que la estructura fina del átomo de hidrógeno surgía naturalmente a consecuencia del estudio de la interacción de un electron con un proton bajo el dominio de un potencial coulombiano. Al analizar el limite no relativista d la ecuación de Dirac en la presencia de éste tipo de potencial se reduce a la ecuación de Schrödinger mas el término de spin-orbita. La razón de Dirac de proponer su ecuación fue resolver el problema de la densidad de probabilidad que surgía de la ecuación relativista de Klein-Gordon-Fock (KGF). Se sabe que la ecuación de KGF se obtiene de la relación energía-momento relativista: $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, cuando se identifica la energía E y el momento p con los operadores $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ y $-i\hbar\nabla$, respectivamente, los cuales deberán actuar sobre una función de onda compleja $\psi(\mathbf{x}, t)$ de manera que

se obtiene:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (4.1)$$

o en forma equivalente:

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.2)$$

La ecuación de KGF fue considerada inicialmente por Schrödinger para estudiar el espectro del átomo de hidrógeno mucho antes de formular su ecuación no relativista.

A partir de la función de onda $\psi(\mathbf{x}, t)$ se puede construir la densidad de probabilidad $\rho(\mathbf{x}, t)$, donde su importancia radica en el hecho que $\rho(\mathbf{x}, t) d^3x$ se interpreta como la probabilidad de encontrar la partícula en un elemento de volumen d^3x y por lo tanto la cantidad $\rho(\mathbf{x}, t)$ debe ser positiva definida. En el caso de la ecuación de KGF se puede mostrar que la densidad de probabilidad es dada por:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[\psi^*(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \psi^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right], \quad (4.3)$$

la cual no es definida positiva y por lo tanto no puede ser considerada como una densidad de probabilidad. Fue hasta 1934 cuando Pauli y Weisskopf interpretaron la densidad de probabilidad (4.3) como una densidad de carga [62].

La propuesta de Dirac de una teoría cuántica para el electron que condujera a una densidad de probabilidad definida positiva se enfoco en buscar una ecuación relativista de primer orden en la deriva temporal y mostró que ésta debería ser una ecuación matricial de la siguiente forma:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.4)$$

4.1. Introducción

donde las matrices γ^μ deberán obedecer la siguiente algebra:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad (4.5)$$

en que el tensor métrico del espacio-tiempo de Minkowski $\eta^{\mu\nu}$ tiene la forma $(+, -, -, -)$. A partir de (4.4) se puede mostrar que la correspondiente densidad de probabilidad es de la forma:

$$\rho(x) = \psi^\dagger \psi, \quad (4.6)$$

la cual es definida positiva.

El esfuerzo realizado por Yukawa en 1935 para explicar algunas características de las fuerzas nucleares [63] permitió que los físicos trataran con nuevas partículas, diferentes de aquellas conocidas de espín $\frac{1}{2}$ tales como el proton, neutron, electrón y positron. Sus estudios mostraron que la interacción de corto alcance entre dos nucleones es mediada por un boson con una masa intermedia entre la del proton y la del electron que denominaron mesón. Fue mostrado que una partícula de éste tipo estaba presente en rayos cósmicos [64], no obstante, se espero dies años para confirmar que dicho mesón era diferente de aquel propuesto por Yukawa [65]. Sin embargo, el éxito de la teoría de Yukawa y la observación en rayos cósmicos de los mesones incentivo la búsqueda de una ecuación que posiblemente describiera éstas partículas. En la época no se había encontrado evidencia experimental contundente acerca del espín de los mesones cargados y neutros, que según la teoría de Yukawa podría ser 0 ó 1.

Después del éxito de la teoría de Dirac, de Broglie propuso que un fotón podría estar conformado por la combinación de dos leptones, un hecho podría explicar la masa del mismo [66]. Fue así que de Broglie busco una ecuación de primer orden que pudiera describir su fotón masivo. En forma simultanea, Kemmer estudiaba las ecuaciones segundo orden de Proca y pudo observar que ellas podrían ser escritas como un conjunto de ecuaciones de primer orden [67], las cuales escribió junto con las correspondientes ecuaciones para el caso de espín 0. Kemmer se dio cuenta que tales ecuaciones se podrían escribir en

las formas matriciales de 10×10 y 5×5 de manera que ellas logren describir las representaciones irreducibles de espín 1 y espín 0 respectivamente, sin embargo, Kemmer no consiguió determinar el álgebra que tales matrices deben satisfacer. Fue entonces cuando Petiau, un matemático y estudiante de de Broglie, mostró en 1936 el álgebra de las correspondientes matrices y que su estructura debería ser 16×16 [68].

No obstante, el trabajo de Petiau permaneció prácticamente desconocido por muchos años, sucediendo lo mismo con un estudio de J. Géhéniau [69], quien dos años después, descompuso tal álgebra en las representaciones: diez, cinco y unidimensional o trivial. Después de conocer el trabajo de Duffin, Kemmer unificó toda la información que se disponía y formuló un abordaje de primer orden [70]. El propósito principal de Kemmer fue la de reformular la ecuación de Proca a fin de obtener ecuaciones de onda de primer orden sin usar una forma tensorial. La teoría desarrollada estaba en estrecha correspondencia con la teoría del electrón de Dirac. La ecuación derivada por Kemmer tiene la forma:

$$\left(i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (4.7)$$

donde las matrices β^μ deben satisfacer la siguiente álgebra:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu. \quad (4.8)$$

Las matrices β^μ tienen dimensión 16 y constituyen una representación reducible del álgebra (4.8). Ésta álgebra solo admite tres representaciones irreducibles: una representación irreducible en 10 dimensiones asociada a partículas de espín 1, representación de 5 dimensiones correspondiente a partículas de espín 0 y una representación trivial sin significado físico en 1 dimensión. El objeto $\psi(x)$ es una función de onda multicomponente: para partículas de espín 1 se expresa como una función de onda de 10 componentes y conduce a la teoría usual basada en la ecuación de Proca, en la cual la función de onda consiste de cuatro componentes formando un cuadrivector y seis formando un tensor antisimétrico. La función de onda de 5 componentes está asociada a partículas de espín 0 y conduce a la teoría de KGF o llamada también escalar,

la función de onda consiste, en una de sus componentes, de un escalar en tanto que las otras cuatro corresponden a su cuadri-gradiente.

4.2. Ecuación de Onda Relativista

La ecuación de onda de la mecánica cuántica no relativista no resulta ser invariante de Lorentz por que las derivadas espaciales y temporal no aparecen en ella de forma simétrica. De hecho, la energía que describe una partícula no relativista es $E = \frac{p^2}{2m}$ que a nivel cuántico es interpretada por los operadores:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad (4.9)$$

Se esperaría que la relación (4.9) se podría utilizar para derivar una ecuación de onda relativista de la relación: $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$ lo que resulta en la ecuación de KGF (4.2). Por ésta razón se asume que los campos de una teoría cuántica deben satisfacer la condición de KGF la cual se interpreta de la siguiente manera: Los campos $Q_\alpha(x)$ correspondientes a partículas elementales libres deben satisfacer la ecuación:

$$\left(\square + m^2 \right) Q_\alpha(x) = 0. \quad (4.10)$$

Ahora, si las componentes de los campos $Q_\alpha(x)$ corresponden a un conjunto de partículas de con valores de masa (m_1, m_2, \dots, m_n) la ecuación (4.10):

$$\prod_{\alpha=1}^n \left(\square + m_\alpha^2 \right) Q_\alpha(x) = 0. \quad (4.11)$$

Es bien conocido que ecuaciones de de algún orden pueden ser transformadas en un sistema de ecuaciones de primer orden al incrementar el número de variables, donde éste nuevo conjunto de variable tiene un importante significado físico. El hecho de que una ecuación de onda sea de primer orden en

la operación de derivada temporal es esencial para el formalismo canónico de la mecánica cuántica. La invariancia canónica de la teoría asegura la conservación de la probabilidad, con lo cual es necesario adoptar el formalismo canónico en teoría cuántica de campos con el fin de mantener esta ley de conservación. Por lo tanto, las ecuaciones de onda deben tener una forma de ecuaciones canónicas las cuales son ecuaciones diferenciales de primer orden. Es decir, una teoría canónica de campos cuánticos estará basada sobre campos que satisfacen ecuaciones diferenciales de primer orden.

Un ejemplo es el caso de un campo escalar $\varphi(x)$ el cual satisface una ecuación de campo tipo (4.10), es decir:

$$\left(\square + m^2\right) \varphi(x) = 0. \quad (4.12)$$

Es posible convertir (4.12) un ecuación de primer orden al re escribirla de la siguiente forma:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \left[\frac{1}{m} \partial_\nu \varphi(x) \right] + m\varphi(x) = 0. \quad (4.13)$$

Si se define:

$$\varphi_\nu(x) \equiv \frac{1}{m} \partial_\nu \varphi(x), \quad (4.14)$$

la ecuación (4.13) se expresa como:

$$\partial^\nu \varphi_\nu(x) + m\varphi(x) = 0. \quad (4.15)$$

De esta manera, al adicionar al campo original $\varphi(x)$ el cuadri vector $\varphi_\nu(x)$, se define un campo que posee cinco componentes $(\varphi(x), \varphi_\nu(x))$, los cuales satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\varphi_\nu(x) \equiv \frac{1}{m} \partial_\nu \varphi(x) \quad , \quad \partial^\nu \varphi_\nu(x) + m\varphi(x) = 0. \quad (4.16)$$

Es decir, la ecuación de segundo orden diferencial (4.12) se ha reducido a un sistema de ecuaciones de primer orden (4.16) con el precio a pagar de haber incrementado el número de variables: $(\varphi(x), \varphi_\nu(x))$.

4.2. Ecuación de Onda Relativista

En general, una ecuación de onda relativista para la función de onda $Q_\alpha(x)$ con $\alpha = 1, 2, \dots, n$ es de la forma:

$$\Delta_\mu^\nu(\partial) Q_\nu(x) = 0. \quad (4.17)$$

La condición de KGF limita esta ecuación de onda ya que ésta requiera que exista un operador diferencial $D_\nu^\sigma(\partial)$ que garantice que se cumple la mencionada condición, es decir:

$$D_\nu^\sigma(\partial) \Delta_\mu^\nu(\partial) = (\square + m^2) \delta_\mu^\sigma. \quad (4.18)$$

En general el operador $D_\nu^\sigma(\partial)$ tiene la siguiente forma:

$$D(\partial) \equiv [D_\nu^\sigma(\partial)] = \alpha + \alpha^{\mu_1} \partial_{\mu_1} + \alpha^{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} + \alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} + \dots + \alpha^{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l} + \dots, \quad (4.19)$$

donde los coeficientes $\alpha^{\mu_1 \dots \mu_l}$ son matrices de dimension n . Si se denota el orden mas alto de diferenciación del operador (4.19) por b , se debe cumplir que

$$\alpha^{\mu_1 \dots \mu_l} = 0 \quad \text{para} \quad l > b. \quad (4.20)$$

La matriz $\Delta_\mu^\nu(\partial)$ es de primer orden en el operador ∂ y es, en general, de la forma:

$$\Delta(\partial) \equiv [\Delta_\mu^\nu(\partial)] = i\rho^\mu \partial_\mu - m\beta, \quad (4.21)$$

donde ρ^μ y β son matrices de dimensión n , el parámetro m es una constante y la función de onda $Q_\alpha(x)$ se representa como una matriz columna. A partir de las relaciones (4.18), (4.19) y (4.21), es posible observar que:

$$\square + m^2 = \left(\alpha + \alpha^{\mu_1} \partial_{\mu_1} + \alpha^{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} + \alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} + \dots \right) \left(i\rho^\mu \partial_\mu - m\beta \right)$$

Al igualar potencias del mismo orden diferencial en la relación anterior, es posible determinar que:

$$m = -\alpha\beta. \quad (4.22)$$

De (4.22) se puede proponer que se cumpla

$$\alpha = -m\beta^{-1}, \quad (4.23)$$

es decir, que la matriz β tenga inversa, con lo cual, la ecuación (4.17) se puede expresar en la siguiente manera:

$$\beta^{-1}\Delta_{\mu}^{\nu}(\partial)Q_{\nu}(x) = \left(i\beta^{-1}\rho^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)Q_{\nu}(x) = 0. \quad (4.24)$$

Definiendo la matriz

$$\beta^{\mu} \equiv \beta^{-1}\rho^{\mu}, \quad (4.25)$$

se puede expresar (4.24) de la siguiente manera:

$$\left(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)Q_{\nu}(x) = 0, \quad (4.26)$$

la cual es equivalente a la expresión (4.17).

Consideremos como un caso especial la siguiente forma para el operador $D(\partial)$:

$$D(\partial) = \alpha + \alpha^{\mu}\partial_{\mu}. \quad (4.27)$$

Se puede mostrar que

$$\begin{aligned} \square + m^2 &= \eta^{\mu\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} + m^2 = \left(\alpha + \alpha^{\mu}\partial_{\mu}\right)\left(i\beta^{\nu}\partial_{\nu} - m\right) \\ &= -m\alpha + \left(i\alpha\beta^{\mu} - m\alpha^{\mu}\right)\partial_{\mu} + \alpha^{\mu}\beta^{\nu}\partial_{\mu}\partial_{\nu} \\ &= -m\alpha + \left(i\alpha\beta^{\mu} - m\alpha^{\mu}\right)\partial_{\mu} + \frac{i}{2}\left(\alpha^{\mu}\beta^{\nu} + \alpha^{\nu}\beta^{\mu}\right)\partial_{\mu}\partial_{\nu}, \end{aligned}$$

siendo que el último término se ha simetrizado debido a la presencia del tensor $\partial_{\mu}\partial_{\nu}$. Ahora, al igualar potencias del mismo orden diferencial se determina que:

$$\begin{aligned} m^2 &= -m\alpha, \\ 0 &= i\alpha\beta^{\mu} - m\alpha^{\mu}, \\ \eta^{\mu\nu} &= \frac{i}{2}\left(\alpha^{\mu}\beta^{\nu} + \alpha^{\nu}\beta^{\mu}\right), \end{aligned}$$

4.2. Ecuación de Onda Relativista

que resulta en:

$$\begin{aligned}\alpha &= -m, \\ \alpha^\mu &= -i\beta^\mu, \\ \eta^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left(\beta^\mu\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\mu \right),\end{aligned}$$

donde la última relación se puede escribir como:

$$\beta^\mu\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (4.28)$$

El número b que aparece en la expresión (4.20) se puede expresar como siendo:

$$b = 2f, \quad (4.29)$$

donde f es el máximo valor del espín del campo descrito por $Q_\nu(x)$ [71]. Para el caso de (4.27), $b = 1$ y por lo tanto el espín del campo $Q_\nu(x)$ es $\frac{1}{2}$. Así, la expresión (4.26) es la ecuación de campo con espín $\frac{1}{2}$, donde las matrices β^μ satisfacen el álgebra indicada (4.28). Ahora, se procede a determinar la estructura de las matrices β^μ que por lo general son de orden $n \times n$. Para el caso $n = 2$, las matrices en mención son de 2×2 y se podría considerar a las matrices de Pauli σ_k , ($k = 1, 2, 3$) junto con la matriz identidad I , las cuales constituyen una base que satisfacen la siguiente relaciones de anticonmutación:

$$\left\{ \sigma_k, \sigma_j \right\} = 2\delta_{kj} \quad , \quad \left\{ \sigma_k, I \right\} = 0. \quad (4.30)$$

La relación anterior indica que las matrices (σ_k, I) no satisfacen el álgebra (4.28), por lo tanto dichas matrices no pueden ser consideradas como una base para éste caso y no pueden ser identificadas con las matrices β^μ . Por lo tanto, se procede a considerar la siguiente dimensión la cual es $n = 4$ [72]. Para éste caso, las matrices asociadas son las de Dirac, denotadas como γ^μ , y las cuales satisfacen la relación (4.28), por tanto, pueden ser identificadas con las matrices β^μ , es decir, $\beta^\mu \rightarrow \gamma^\mu$. De esta manera, la ecuación (4.26) correspondiente se expresa como:

$$\left(i\gamma^\mu\partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (4.31)$$

donde las matrices γ^μ satisfacen el álgebra

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (4.32)$$

La ecuación (4.31) se conoce como la ecuación de Dirac, la cual describe por medio del campo $\psi(x)$ partículas masivas de masa m . La interpretación anterior es resultado apenas de una identificación ya que la caracterización de $\psi(x)$ como un espinor es consecuencia del estudio de las matrices γ^μ y de su comportamiento bajo transformaciones de Lorentz.

A partir de (4.32), es posible mostrar que:

$$\left(i\gamma^\mu \partial_\mu + m \right) \left(i\gamma^\nu \partial_\nu - m \right) \psi(x) = \left(\square + m^2 \right) \psi(x) = 0, \quad (4.33)$$

es decir, cada componente del campo $\psi(x)$ satisface la condición de KGF. Cualquier función de las matrices de Dirac puede ser escrita como una combinación lineal de 16 matrices γ^A , donde $A = 1, 2, \dots, 16$ definidas de la siguiente manera:

$$\gamma^A = \begin{cases} I & \rightarrow 1 \\ \gamma^\mu & \rightarrow 4 \\ \gamma^\mu \gamma^5 & \rightarrow 4 \\ \gamma^5 & \rightarrow 1 \\ \Sigma^{\mu\nu} & \rightarrow 6 \end{cases},$$

donde

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu).$$

Además se puede mostrar que las matrices γ^A satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} (\gamma^A)^2 &= I, \\ \text{Tr}\gamma^A &= 0, & \gamma^A \neq I, \\ \text{Tr}(\gamma^A\gamma^B) &= 0, & A \neq B. \end{aligned}$$

Las matrices γ^A son linealmente independientes y por tanto constituyen una base de manera que cualquier matriz 4×4 se puede descomponer en función de γ^A .

4.2. Ecuación de Onda Relativista

Ahora, analicemos el caso cuando el operador $D(\partial)$ es de segundo orden, es decir:

$$D(\partial) = \alpha + \alpha^\mu \partial_\mu + \alpha^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu. \quad (4.34)$$

De esta manera, la ecuación (4.18) implica que:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 &= \left(\alpha + \alpha^\mu \partial_\mu + \alpha^{\mu\sigma} \partial_\mu \partial_\sigma \right) \left(i\beta^\nu \partial_\nu - m \right) \\ &= i\alpha\beta^\nu \partial_\nu + i\alpha^\mu \beta^\nu \partial_\mu \partial_\nu + i\alpha^{\mu\sigma} \beta^\nu \partial_\mu \partial_\sigma \partial_\nu - m\alpha \\ &\quad - m\alpha^\mu \partial_\mu - m\alpha^{\mu\sigma} \partial_\mu \partial_\sigma \\ &= i\alpha\beta^\nu \partial_\nu + \frac{i}{2} \left(\alpha^\mu \beta^\nu + \alpha^\nu \beta^\mu \right) \partial_\mu \partial_\nu + i\alpha^{\mu\sigma} \beta^\nu \partial_\mu \partial_\sigma \partial_\nu - m\alpha \\ &\quad - m\alpha^\mu \partial_\mu - m\alpha^{\mu\sigma} \partial_\mu \partial_\sigma \\ &= -m\alpha + \left(i\alpha\beta^\mu - m\alpha^\mu \right) \partial_\mu + \left[\frac{i}{2} \left(\alpha^\mu \beta^\nu + \alpha^\nu \beta^\mu \right) - m\alpha^{\mu\nu} \right] \partial_\mu \partial_\nu \\ &\quad + i \sum_P \left(\alpha^{\mu\sigma} \beta^\nu \right) \partial_\mu \partial_\sigma \partial_\nu, \end{aligned}$$

siendo que \sum_P indica una suma sobre todas las permutaciones posibles de los índices $(\mu\sigma\nu)$ debido a la simetría del operador diferencial $\partial_\mu \partial_\sigma \partial_\nu$. Para que la igualdad sea satisfecha las siguientes condiciones deberán ser obedecidas:

$$\begin{aligned} m^2 &= -m\alpha, \\ 0 &= i\alpha\beta^\mu - m\alpha^\mu, \\ \eta^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} \left(\alpha^\mu \beta^\nu + \alpha^\nu \beta^\mu \right) - m\alpha^{\mu\nu} \\ 0 &= i \sum_P \left(\alpha^{\mu\sigma} \beta^\nu \right) \end{aligned}$$

Estas condiciones conducen a:

$$\begin{aligned} m &= -\alpha, \\ \alpha^\mu &= -i\beta^\mu, \\ \alpha^{\mu\sigma} &= \frac{1}{m} \left[\frac{1}{2} \left(\beta^\mu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\mu \right) - \eta^{\mu\sigma} \right], \\ 0 &= \sum_P \left[\frac{1}{2} \left(\beta^\mu \beta^\sigma \beta^\nu + \beta^\sigma \beta^\mu \beta^\nu \right) - \eta^{\mu\sigma} \beta^\nu \right]. \end{aligned}$$

La última relación, al considerar todas las posibles permutaciones conduce a la siguiente álgebra:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu. \quad (4.35)$$

Una manera alternativa de deducir la relación (4.35) es a partir de la idea de de Broglie según la cual la matriz β^μ se puede expresar como

$$\beta^\mu = \frac{1}{2} (\Gamma^\mu + \Gamma'^\mu), \quad (4.36)$$

donde

$$\Gamma^\mu \equiv \gamma^\mu \otimes 1 \quad , \quad \Gamma'^\mu \equiv 1 \otimes \gamma^\mu. \quad (4.37)$$

Además, se debe cumplir que

$$\begin{aligned} \{ \Gamma^\mu, \Gamma^\nu \} &= 2\eta^{\mu\nu} = \{ \Gamma'^\mu, \Gamma'^\nu \} \\ [\Gamma^\mu, \Gamma'^\nu] &= 0. \end{aligned} \quad (4.38)$$

A partir de la relación (4.36) se puede mostrar que

$$\begin{aligned} \beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma &= \frac{1}{8} \left(\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma^\mu \Gamma'^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma^\mu \Gamma'^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma \right. \\ &\quad \left. + \Gamma'^\mu \Gamma^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\mu \Gamma'^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma'^\mu \Gamma'^\nu \Gamma'^\sigma \right). \end{aligned} \quad (4.39)$$

En forma similar, se determina que:

$$\begin{aligned} \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu &= \frac{1}{8} \left(\Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu + \Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma'^\mu + \Gamma^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma^\mu + \Gamma^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma'^\mu + \Gamma'^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu \right. \\ &\quad \left. + \Gamma'^\sigma \Gamma^\nu \Gamma'^\mu + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma^\mu + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma'^\mu \right). \end{aligned} \quad (4.40)$$

4.2. Ecuación de Onda Relativista

Sumando las relaciones (4.39) y (4.40) se obtiene que

$$\begin{aligned}
 \beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu &= \frac{1}{8} \left[\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu + \Gamma'^\mu \Gamma'^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma'^\mu \right. \\
 &\quad + \Gamma'^\sigma (\Gamma^\mu \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\mu) + \Gamma'^\nu (\Gamma^\mu \Gamma^\sigma + \Gamma^\sigma \Gamma^\mu) + \Gamma^\mu (\Gamma'^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\nu) \\
 &\quad + \Gamma'^\mu (\Gamma^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma^\sigma \Gamma^\nu) + \Gamma^\nu (\Gamma'^\mu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\mu) \\
 &\quad \left. + \Gamma^\sigma (\Gamma'^\mu \Gamma'^\nu + \Gamma'^\nu \Gamma'^\mu) \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu + \Gamma'^\mu \Gamma'^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma'^\mu \right. \\
 &\quad + \Gamma^\sigma \{ \Gamma'^\mu, \Gamma'^\nu \} + \Gamma^\nu \{ \Gamma'^\mu, \Gamma'^\sigma \} + \Gamma^\mu \{ \Gamma'^\nu, \Gamma'^\sigma \} \\
 &\quad \left. + \Gamma'^\sigma \{ \Gamma^\mu, \Gamma^\nu \} + \Gamma'^\mu \{ \Gamma^\nu, \Gamma^\sigma \} + \Gamma'^\nu \{ \Gamma^\mu, \Gamma^\sigma \} \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu + \Gamma'^\mu \Gamma'^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma'^\mu \right. \\
 &\quad + 2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma + 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma^\nu + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma^\mu \\
 &\quad \left. + 2\eta^{\mu\nu} \Gamma'^\sigma + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma'^\mu + 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma'^\nu \right]. \tag{4.41}
 \end{aligned}$$

De la relación (4.38) se puede determinar que

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu = 2\eta^{\mu\nu} - \Gamma^\nu \Gamma^\mu,$$

de manera que:

$$\begin{aligned}
 \Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma &= 2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma - \Gamma^\nu \Gamma^\mu \Gamma^\sigma = 2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma - \Gamma^\nu (2\eta^{\mu\sigma} - \Gamma^\sigma \Gamma^\mu) \\
 &= 2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma^\nu + \Gamma^\nu \Gamma^\sigma \Gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma^\nu + (2\eta^{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma \Gamma^\nu) \Gamma^\mu \\
 &= 2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma^\nu + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma^\mu - \Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu
 \end{aligned}$$

Así que la relación anterior permite establecer que:

$$\Gamma^\mu \Gamma^\nu \Gamma^\sigma + \Gamma^\sigma \Gamma^\nu \Gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma^\nu + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma^\mu. \tag{4.42}$$

De forma similar se determina que:

$$\Gamma'^\mu \Gamma'^\nu \Gamma'^\sigma + \Gamma'^\sigma \Gamma'^\nu \Gamma'^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \Gamma'^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma'^\nu + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma'^\mu. \tag{4.43}$$

Combinando las relaciones (4.42) y (4.43) en la expresión (4.41) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu &= \frac{1}{8} \left[2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma^\nu + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma^\mu + 2\eta^{\mu\nu} \Gamma'^\sigma - 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma'^\nu \right. \\
&\quad \left. + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma'^\mu + 2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma + 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma^\nu + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + 2\eta^{\mu\nu} \Gamma'^\sigma + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma'^\mu + 2\eta^{\mu\sigma} \Gamma'^\nu \right] \\
&= \frac{1}{4} \left[2\eta^{\mu\nu} \Gamma^\sigma + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma^\mu + 2\eta^{\mu\nu} \Gamma'^\sigma + 2\eta^{\sigma\nu} \Gamma'^\mu \right] \\
&= \eta^{\mu\nu} \frac{1}{2} (\Gamma^\sigma + \Gamma'^\sigma) + \eta^{\sigma\nu} \frac{1}{2} (\Gamma^\mu + \Gamma'^\mu) \\
&= \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu,
\end{aligned}$$

de manera que:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu,$$

que es el álgebra (4.35).

4.3. Ecuación de DKP y las propiedades de las matrices beta

Un análisis de las propiedades de los campos escalares masivos (espin 0) y de los campos vectoriales masivos (espin 1) se puede dar a partir de una ecuación de primer orden. Lo anterior es posible si se aumenta el número de variables como ocurrió con el ejemplo que dio origen a la ecuación (4.15). La ecuación que se desea considerar es proporcionada por el formalismos de primer orden de DKP que describe este tipo de partículas y que se expresa como:

$$\left(i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (4.44)$$

donde las matrices β^μ satisfacen la siguiente álgebra:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu. \quad (4.45)$$

4.3. Ecuación de DKP y las propiedades de las matrices beta

La ecuación (4.44) describirá las propiedades de las partículas libres de espín 0 y espín 1, con las matrices β^μ satisfaciendo las propiedades algebraicas (4.45) en ambos casos. Esta álgebra admite tres representaciones irreducibles: 10 dimensiones representando partículas de espín 1; 5 dimensiones representando partículas de espín 0 y 1 dimensión la cual es una representación trivial sin significado físico. Ahora, la evidencia de los valores de espín se da por el hecho de que la función de onda multicomponente $\psi(x)$ en el caso de espín 0 tiene 5 componentes, en tanto que en el caso de espín 1 la función de onda tiene 10 componentes.

A partir de la relación (4.45) se puede deducir una serie de propiedades útiles de las matrices β^μ . Haciendo $\mu = \nu = \sigma$ en (4.45) se obtiene:

$$(\beta^\mu)^3 = \eta^{\mu\mu}\beta^\mu, \quad (4.46)$$

donde se entiende que no se suma sobre el índice μ . Un conjunto de matrices que complementan las matrices β^μ es definido como siendo:

$$\bar{\eta}^\mu = 2(\beta^\mu)^2 - \eta^{\mu\mu}, \quad (4.47)$$

las cuales, a partir de (4.46), satisfacen la siguiente propiedad:

$$(\bar{\eta}^\mu)^2 = \underbrace{4(\beta^\mu)^4}_{4\eta^{\mu\mu}(\beta^\mu)^2} - 4\eta^{\mu\mu}(\beta^\mu)^2 + (\eta^{\mu\mu})^2 = (\eta^{\mu\mu})^2 = 1. \quad (4.48)$$

La relación de anticonmutación entre las matrices β^μ y $\bar{\eta}^\mu$ se puede derivar de la siguiente manera: Multipliquemos la expresión (4.47) por la matriz β^σ por la derecha de manera que se obtiene:

$$\bar{\eta}^\mu\beta^\sigma = 2(\beta^\mu)^2\beta^\sigma - \eta^{\mu\mu}\beta^\sigma, \quad (4.49)$$

Ahora procedamos a realizar $\mu = \nu$ en la relación (4.45):

$$(\beta^\mu)^2\beta^\sigma + \beta^\sigma(\beta^\mu)^2 = \eta^{\mu\mu}\beta^\sigma + \eta^{\sigma\mu}\beta^\mu, \quad (4.50)$$

así que:

$$(\beta^\mu)^2\beta^\sigma = \eta^{\mu\mu}\beta^\sigma + \eta^{\sigma\mu}\beta^\mu - \beta^\sigma(\beta^\mu)^2.$$

Substituyendo la anterior relación en (4.49) se obtiene

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}^\mu \beta^\sigma &= 2 \left[\eta^{\mu\mu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\mu} \beta^\mu - \beta^\sigma (\beta^\mu)^2 \right] - \eta^{\mu\mu} \beta^\sigma \\
 &= 2\eta^{\sigma\mu} \beta^\mu - \beta^\sigma \left(2(\beta^\mu)^2 - \eta^{\mu\mu} \right) \\
 &= 2\eta^{\sigma\mu} \beta^\mu - \beta^\sigma \bar{\eta}^\mu,
 \end{aligned} \tag{4.51}$$

Entonces:

$$\bar{\eta}^\mu \beta^\sigma + \beta^\sigma \bar{\eta}^\mu = \left\{ \bar{\eta}^\mu, \beta^\sigma \right\} = 2\eta^{\sigma\mu} \beta^\mu, \tag{4.52}$$

a partir de la cual se deduce:

$$\begin{aligned}
 \text{si } \sigma &\neq \mu & \left\{ \bar{\eta}^\mu, \beta^\sigma \right\} &= 0, \\
 \text{si } \sigma &= \mu & \bar{\eta}^\mu \beta^\mu &= \eta^{\mu\mu} \beta^\mu.
 \end{aligned} \tag{4.53}$$

Una relación de conmutación entre las matrices β^μ y $\bar{\eta}^\mu$ se deriva multiplicando la expresión (4.47) por β^μ tanto por la izquierda como por la derecha de manera que resulta en el siguiente par de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \beta^\mu \bar{\eta}^\mu &= \underbrace{2(\beta^\mu)^3}_{\eta^{\mu\mu} \beta^\mu} - \eta^{\mu\mu} \beta^\mu = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \\
 \bar{\eta}^\mu \beta^\mu &= 2(\beta^\mu)^3 - \eta^{\mu\mu} \beta^\mu = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu,
 \end{aligned}$$

siendo que se ha utilizado la identidad (4.46). Restando las ecuaciones obtenemos que:

$$\beta^\mu \bar{\eta}^\mu - \bar{\eta}^\mu \beta^\mu = \left[\beta^\mu, \bar{\eta}^\mu \right] = 0. \tag{4.54}$$

La relación de conmutación entre las matrices $\bar{\eta}^\mu$ se puede determinar por

4.4. Ecuación de DKP conjugada

multiplicación directa y utilizando la expresión (4.51), es decir:

$$\begin{aligned}
 \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu &= \bar{\eta}^\mu \left(2(\beta^\nu)^2 - \eta^{\nu\nu} \right) = 2(\bar{\eta}^\mu \beta^\nu) \beta^\nu - \eta^{\nu\nu} \bar{\eta}^\mu = 2(2\eta^{\nu\mu} \beta^\mu - \beta^\nu \bar{\eta}^\mu) \beta^\nu - \eta^{\nu\nu} \bar{\eta}^\mu \\
 &= 4\eta^{\nu\mu} \beta^\mu \beta^\nu - 2\beta^\nu \bar{\eta}^\mu \beta^\nu - \eta^{\nu\nu} \bar{\eta}^\mu = 4\eta^{\nu\mu} \beta^\mu \beta^\nu - 2\beta^\nu (2\eta^{\nu\mu} \beta^\mu - \beta^\nu \bar{\eta}^\mu) - \eta^{\nu\nu} \bar{\eta}^\mu \\
 &= 4\eta^{\nu\mu} \beta^\mu \beta^\nu - 4\eta^{\nu\mu} \beta^\nu \beta^\mu + 2\beta^\nu \beta^\nu \bar{\eta}^\mu - \eta^{\nu\nu} \bar{\eta}^\mu \\
 &= 4\eta^{\nu\mu} (\beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu) + \left(2(\beta^\nu)^2 - \eta^{\nu\nu} \right) \bar{\eta}^\mu \\
 &= 4\eta^{\mu\nu} \left[\beta^\mu, \beta^\nu \right] + \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\mu,
 \end{aligned}$$

de manera que

$$\left[\bar{\eta}^\mu, \bar{\eta}^\nu \right] = 4\eta^{\mu\nu} \left[\beta^\mu, \beta^\nu \right]. \quad (4.55)$$

De la relación anterior se puede deducir fácilmente que en el caso $\mu \neq \nu$,

$$\left[\bar{\eta}^\mu, \bar{\eta}^\nu \right] = 0. \quad (4.56)$$

Otra relación útil que se puede derivar resulta de (4.45) cuando $\sigma = \mu$,

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu + \beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\mu + \eta^{\mu\nu} \beta^\mu,$$

por tanto:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\mu. \quad (4.57)$$

4.4. Ecuación de DKP conjugada

Si se escoge una representación para las matrices β tal que:

$$(\beta^\mu)^\dagger = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \quad (4.58)$$

garantiza que

$$\begin{aligned}
 (\bar{\eta}^\mu)^\dagger &= \left(2(\beta^\mu)^2 - \eta^{\mu\mu} \right)^\dagger = 2 \left((\beta^\mu)^\dagger \right)^2 - \eta^{\mu\mu} \\
 &= 2(\eta^{\mu\mu} \beta^\mu)^2 - \eta^{\mu\mu} = 2(\beta^\mu)^2 - \eta^{\mu\mu} \\
 &= \bar{\eta}^\mu,
 \end{aligned} \quad (4.59)$$

es decir, garantizan que las matrices $\bar{\eta}^\mu$ resulten ser hermíticas. Ahora, se pretende buscar una matriz C que actúe sobre las matrices β y que suministre su conjugada hermítico, tal que cumpla las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} C\beta^\mu C &= (\beta^\mu)^\dagger, \\ C^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4.60)$$

Junto con la ecuación (4.58) se obtiene que:

$$C\beta^\mu C = \eta^{\mu\mu}\beta^\mu. \quad (4.61)$$

Multiplicando la expresión (4.61) por la matriz C tanto por la derecha como la izquierda se obtiene:

$$C\beta^\mu = \eta^{\mu\mu}\beta^\mu C \quad , \quad \beta^\mu C = \eta^{\mu\mu}C\beta^\mu,$$

de manera que al substraerlas resulta en:

$$[C, \beta^\mu] = \eta^{\mu\mu} [\beta^\mu, C] = -\eta^{\mu\mu} [C, \beta^\mu]$$

resultado que es equivalente a:

$$(1 + \eta^{\mu\mu}) [C, \beta^\mu] = 0. \quad (4.62)$$

De la relación anterior anterior podemos establecer dos caso: Si $\mu = 0$, la igualdad se cumple si $[C, \beta^0] = 0$, sin embargo en el caso en que $\mu = i$, la cantidad $[C, \beta^i]$ mantiene indeterminada. Por tanto, con el fin de garantizar que la relación (4.62) se cumpla para todo μ es que:

$$[C, \beta^\mu] = 0. \quad (4.63)$$

Sin embargo, siendo que $C^2 = 1$, se deduce que:

$$C\beta^\mu C = \eta^{\mu\mu}\beta^\mu = \beta^\mu\bar{\eta}^\mu,$$

por lo tanto

$$C\beta^\mu = \beta^\mu\bar{\eta}^\mu C,$$

4.4. Ecuación de DKP conjugada

igualmente

$$\beta^\mu C = C \beta^\mu \bar{\eta}^\mu,$$

lo que al restar los dos últimos resultados da:

$$[C, \beta^\mu] = [\beta^\mu \bar{\eta}^\mu, C] = \beta^\mu [\bar{\eta}^\mu, C] + [\beta^\mu, C] \bar{\eta}^\mu.$$

dado que: $[C, \beta^\mu] = 0$, la anterior relación implica que:

$$0 = \beta^\mu [\bar{\eta}^\mu, C]. \quad (4.64)$$

Exigiendo que la identidad se cumpla para todo β^μ debe cumplir que:

$$[C, \bar{\eta}^\mu] = 0. \quad (4.65)$$

Ahora, siendo que $[\bar{\eta}^\mu, \bar{\eta}^\nu] = 0$, se puede escoger C tal que:

$$C \equiv A_\mu \bar{\eta}^\mu,$$

sin embargo, dado que el cuadrado de éste matriz deberá ser la identidad, podremos restringir la forma de ésta matriz:

$$C^2 = A_\mu \bar{\eta}^\mu A_\nu \bar{\eta}^\nu = \sum_a A_a A_a \bar{\eta}^a \bar{\eta}^a + \sum_{a \neq b} A_a \bar{\eta}^a A_b \bar{\eta}^b = \sum_a A_a A_a + \sum_{a \neq b} A_a \bar{\eta}^a A_b \bar{\eta}^b.$$

La forma mas simple de satisfacer esta restricción es si todos los coeficientes A_a son nulos con excepción de uno en particular, que podríamos denotar por d . No obstante, la condición $C^2 = 1$, nos hace seleccionar el valor $d = 1$. Con lo cual se establece que: $C \equiv \bar{\eta}^\mu$, que puede garantizar que $C^2 = (\bar{\eta}^\mu)^2 = 1$. Utilizando éste resultado en la expresión (4.61) junto con (4.54) se determina que:

$$\eta^{\mu\mu} \beta^\mu = \bar{\eta}^\mu \beta^\mu \bar{\eta}^\mu = \beta^\mu (\bar{\eta}^\mu)^2 = \beta^\mu,$$

es decir:

$$(1 - \eta^{\mu\mu}) \beta^\mu = 0. \quad (4.66)$$

Si la expresión anterior se cumple para todo β^μ se debe garantizar que $\eta^{\mu\mu} = 1$, lo que implica que la única solución posible de ésta ecuación es cuando $\mu = 0$, así, se concluye que $C = \bar{\eta}^0$ y de (4.60) se establece que

$$(\beta^\mu)^\dagger = \bar{\eta}^0 \beta^\mu \bar{\eta}^0 = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu. \quad (4.67)$$

Por tanto, la matriz responsable de la conjugación hermítica de las matrices β^μ es la matriz $\bar{\eta}^0$, con lo cual se puede concluir que β^0 es hermítica en tanto que β^i son antihermíticas.

Si la operación de adjunto hermitiano es aplicada a la ecuación de DKP (4.44) se obtiene:

$$\psi^\dagger(x) \left(-i (\beta^\mu)^\dagger \partial_\mu - m \right) = -\psi^\dagger(x) \left(i \bar{\eta}^0 \beta^\mu \bar{\eta}^0 \partial_\mu + m \right) = 0.$$

Multiplicando la expresión anterior por $\bar{\eta}^0$ por la derecha se obtiene

$$\psi^\dagger(x) \left(i \bar{\eta}^0 \beta^\mu \bar{\eta}^0 \bar{\eta}^0 \partial_\mu + m \bar{\eta}^0 \right) = \psi^\dagger(x) \bar{\eta}^0 \left(i \beta^\mu \partial_\mu + m \right) = 0.$$

Si se define el campo conjugado a $\psi(x)$ como siendo

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \bar{\eta}^0, \quad (4.68)$$

se deduce la ecuación de DKP conjugada:

$$\bar{\psi}(x) \left(i \beta^\mu \partial_\mu + m \right) = 0. \quad (4.69)$$

Ahora, se procederá a derivar la correspondiente ecuación de continuidad asociada a la teoría. Multiplicando la ecuación de DKP por $\bar{\psi}(x)$ por la izquierda en tanto que a la ecuación conjugada se la multiplica por $\psi(x)$ por la derecha, se deduce:

$$i \bar{\psi} \beta^\mu (\partial_\mu \psi) - m \bar{\psi} \psi = 0 \quad , \quad i (\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi + m \bar{\psi} \psi = 0,$$

4.5. Covarianza de Lorentz de la Ecuación de DKP

que al sumar resulta en:

$$i\bar{\psi}\beta^\mu(\partial_\mu\psi) + i(\partial_\mu\bar{\psi})\beta^\mu\psi = i\partial_\mu(\bar{\psi}\beta^\mu\psi) = 0. \quad (4.70)$$

Por tanto, se define la densidad de corriente como siendo:

$$J^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^\mu\psi, \quad (4.71)$$

con lo cual la ecuación de continuidad se expresa:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (4.72)$$

El factor $\frac{1}{2}$ que resulta en la definición de la corriente (4.71) se introduce con el fin de obtener una densidad de corriente similar a aquella que se utiliza en la ecuación de Klein-Gordon-Fock y su límite no relativista [73]. No obstante, la componente temporal de la corriente, es decir J^0 , no es definida positiva lo que implica que ésta cantidad no puede ser interpretada como una densidad de probabilidad. Sin embargo, aún es posible interpretar a J^0 como una densidad de carga. Ésta carga no necesariamente debe ser considerada como una carga eléctrica, mas como una carga generalizada que resulta de la simetría asociada al sistema.

4.5. Covarianza de Lorentz de la Ecuación de DKP

Una teoría relativista adecuada deberá ser covariante de Lorentz, es decir, su forma debe ser una transformación que conecta dos sistemas de referencia inercial [74]. Dados dos sistemas de referencias inercial asociados a los observadores X y X' , describirán el mismo evento físico en términos de sus respectivas coordenadas. Las coordenadas que conecta dichas observaciones es mediada por la transformación de Lorentz la cual es definida como:

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (4.73)$$

y la cual garantiza que el operador ∂_μ transforme como un vector covariante:

$$\partial'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu, \quad (4.74)$$

siendo que se debe cumplir la condición:

$$\Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda_\nu{}^\alpha = \delta_\nu{}^\mu. \quad (4.75)$$

Ahora, si se exige que la ecuación de DKP permanece invariante por transformación (4.73) se debe cumplir que en el sistema de referencia asociado al observador X' se cumpla:

$$\left(i\beta'^\mu \partial'_\mu - m \right) \psi'(x') = 0, \quad (4.76)$$

donde $\psi'(x')$ es la función de onda transformada de Lorentz. Ahora, se asumirá que bajo una transformación de Lorentz el campo $\psi(x)$ transformar en la forma:

$$\psi'(x') = \psi'(\Lambda x) = U(\Lambda) \psi(x), \quad (4.77)$$

donde $U(\Lambda)$ es una matriz. Lo anterior implica que se esta buscando una representación de la transformación de Lorentz en el espacio de Hilbert. Ahora, se debe exigir que las matrices β'^μ también satisfagan el álgebra de DKP, es decir:

$$\beta'^\mu \beta'^\nu \beta'^\sigma + \beta'^\sigma \beta'^\nu \beta'^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta'^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta'^\mu. \quad (4.78)$$

Con el fin de conectar los dos sistemas de referencia inercial se deberá encontrar una representación explícita de β'^μ y $U(\Lambda)$, con la condición que la transformación $U^{-1}(\Lambda)$ exista ya que permite hacer la conexión con el sistema de referencia inicial. Utilizando los resultados (4.74) y (4.77) en la expresión (4.76) se obtiene que:

$$\left(i\beta'^\mu \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - m \right) U(\Lambda) \psi(x) = 0.$$

Si se multiplica la expresión anterior por $U^{-1}(\Lambda)$ por el lado izquierdo se obtiene que:

$$\left(iU^{-1}(\Lambda) \beta'^\mu U(\Lambda) \Lambda_\mu{}^\nu \partial_\nu - m \right) \psi(x) = 0. \quad (4.79)$$

4.5. Covarianza de Lorentz de la Ecuación de DKP

Ahora, si la ecuación de DKP es covariante, es decir, que se cumpla que la anterior expresión tenga la forma

$$\left(i\beta^\nu \partial_\nu - m \right) \psi(x) = 0,$$

se deberá cumplir:

$$U^{-1}(\Lambda) \beta'^\mu U(\Lambda) \Lambda_\mu^\nu = \beta^\nu.$$

Utilizando la identidad (4.75) se puede transformar la ecuación anterior en la siguiente forma:

$$U^{-1}(\Lambda) \beta'^\mu U(\Lambda) = \Lambda_\nu^\mu \beta^\nu, \quad (4.80)$$

lo que indica como deben transformar las matrices β^μ . Una manera de encontrar una representación de $U(\Lambda)$ es considerar las transformaciones de Lorentz infinitesimales propias, para las cuales Λ_ν^μ deberán ser de la forma:

$$\Lambda_\nu^\mu \simeq \delta_\nu^\mu + \Delta\omega_\nu^\mu + O(\Delta\omega^2). \quad (4.81)$$

Siendo que la distancia entre dos puntos espacio temporales infinitesimalmente próximos es invariante bajo transformaciones de Lorentz:

$$d^2s = \eta_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (4.82)$$

se puede mostrar que la cantidad $\Delta\omega_{\mu\nu}$

$$\Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}, \quad (4.83)$$

es antisimétrica. Expandiendo la matriz $U(\Lambda)$ en potencias de $\Delta\omega_{\mu\nu}$ y manteniendo potencias hasta de primer orden se determina que:

$$U(\Lambda) \simeq 1 + i\alpha\Delta\omega_{\mu\nu} S^{\mu\nu}, \quad (4.84)$$

donde α y $S^{\mu\nu}$ son cantidades a ser determinadas. Substituyendo (4.84) en (4.80) hasta primer orden en $\Delta\omega_{\mu\nu}$ se determina que:

$$\begin{aligned} \Lambda_\nu^\mu \beta^\nu &= (\delta_\nu^\mu + \Delta\omega_\nu^\mu) \beta^\nu = \beta^\mu + \Delta\omega_\nu^\mu \beta^\nu \\ &= U^{-1}(\Lambda) \beta'^\mu U(\Lambda) = \left(1 - i\alpha\Delta\omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \right) \beta'^\mu \left(1 + i\alpha\Delta\omega_{\sigma\rho} S^{\sigma\rho} \right) \\ &= \beta'^\mu + i\alpha\Delta\omega_{\sigma\rho} \beta'^\mu S^{\sigma\rho} - i\alpha\Delta\omega_{\alpha\beta} S^{\alpha\beta} \beta'^\mu + \alpha^2 \Delta\omega_{\alpha\beta} \Delta\omega_{\sigma\rho} S^{\alpha\beta} \beta'^\mu S^{\sigma\rho} \\ &\simeq \beta'^\mu + i\alpha\Delta\omega_{\alpha\beta} \left(\beta'^\mu S^{\alpha\beta} - S^{\alpha\beta} \beta'^\mu \right) \\ &= \beta'^\mu + i\alpha\Delta\omega_{\alpha\beta} \left[\beta'^\mu, S^{\alpha\beta} \right]. \end{aligned}$$

Igualando los coeficientes relacionados a los polinomios en $\Delta\omega_{\mu\nu}$ se obtiene que:

$$\beta^\mu = \beta'^\mu, \quad (4.85)$$

en tanto que

$$\Delta\omega_{\nu}^{\mu}\beta^{\nu} = i\alpha\Delta\omega_{\sigma\rho} \left[\beta^{\mu}, S^{\sigma\rho} \right], \quad (4.86)$$

esta ultima que sera utilizada para encontrar la forma explícita del generador infinitesimal $S^{\alpha\beta}$. Ahora:

$$\Delta\omega_{\nu}^{\mu}\beta^{\nu} = \Delta\omega_{\alpha\nu}\eta^{\mu\alpha}\beta^{\nu}.$$

Siendo que $\Delta\omega_{\mu\nu}$ es antisimétrico, es necesario antisimetrizar el producto $\eta^{\mu\alpha}\beta^{\nu}$ en el par de índices (α, ν) de manera que la relación anterior se exprese de la siguiente manera:

$$\Delta\omega_{\nu}^{\mu}\beta^{\nu} = \Delta\omega_{\sigma\rho}\eta^{\mu\sigma}\beta^{\rho} = \frac{1}{2}\Delta\omega_{\sigma\rho} \left(\eta^{\mu\sigma}\beta^{\rho} - \eta^{\mu\rho}\beta^{\sigma} \right), \quad (4.87)$$

de manera que la expresión (4.86) se pueda expresar en la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}\Delta\omega_{\sigma\rho} \left(\eta^{\mu\sigma}\beta^{\rho} - \eta^{\mu\rho}\beta^{\sigma} \right) = i\alpha\Delta\omega_{\sigma\rho} \left[\beta^{\mu}, S^{\sigma\rho} \right], \quad (4.88)$$

Ahora, a partir del álgebra de las matrices DKP, es posible mostrar que:

$$\begin{aligned} \left[\beta^{\mu}, \left[\beta^{\sigma}, \beta^{\rho} \right] \right] &= \left[\beta^{\mu}, \beta^{\sigma}\beta^{\rho} - \beta^{\rho}\beta^{\sigma} \right] = \left[\beta^{\mu}, \beta^{\sigma}\beta^{\rho} \right] - \left[\beta^{\mu}, \beta^{\rho}\beta^{\sigma} \right] \\ &= \beta^{\mu}\beta^{\sigma}\beta^{\rho} - \beta^{\sigma}\beta^{\rho}\beta^{\mu} - \beta^{\mu}\beta^{\rho}\beta^{\sigma} + \beta^{\rho}\beta^{\sigma}\beta^{\mu} \\ &= \beta^{\mu}\beta^{\sigma}\beta^{\rho} + \beta^{\rho}\beta^{\sigma}\beta^{\mu} - \left(\beta^{\sigma}\beta^{\rho}\beta^{\mu} + \beta^{\mu}\beta^{\rho}\beta^{\sigma} \right) \\ &= \eta^{\mu\sigma}\beta^{\rho} + \eta^{\rho\sigma}\beta^{\mu} - \left(\eta^{\sigma\rho}\beta^{\mu} + \eta^{\mu\rho}\beta^{\sigma} \right) \\ &= \eta^{\mu\sigma}\beta^{\rho} - \eta^{\mu\rho}\beta^{\sigma}, \end{aligned}$$

es decir

$$\eta^{\mu\sigma}\beta^{\rho} - \eta^{\mu\rho}\beta^{\sigma} = \left[\beta^{\mu}, \left[\beta^{\sigma}, \beta^{\rho} \right] \right], \quad (4.89)$$

de manera que

$$\frac{1}{2}\Delta\omega_{\sigma\rho} \left[\beta^{\mu}, \left[\beta^{\sigma}, \beta^{\rho} \right] \right] = i\alpha\Delta\omega_{\sigma\rho} \left[\beta^{\mu}, S^{\sigma\rho} \right]. \quad (4.90)$$

4.5. Covarianza de Lorentz de la Ecuación de DKP

Así, la relación anterior permitirá inferir los valores de las cantidades α y $S^{\mu\nu}$ como siendo

$$\alpha = -\frac{i}{2} \quad , \quad S^{\sigma\rho} = [\beta^\sigma, \beta^\rho] . \quad (4.91)$$

La transformación de Lorentz finita es completamente determinada para ser:

$$U(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}S^{\sigma\rho}\right) , \quad (4.92)$$

lo que determinará finalmente la manera como transforman los campos $\psi(x)$ bajo Lorentz.

Ahora, la transformación de Lorentz correspondiente a el campo conjugado es determinada como:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}'(x') &= \psi'^{\dagger}(x')\bar{\eta}^0 = [U\psi(x)]^{\dagger}\bar{\eta}^0 = \psi^{\dagger}(x)U^{\dagger}\bar{\eta}^0 \\ &= (\psi^{\dagger}(x)\bar{\eta}^0)(\bar{\eta}^0U^{\dagger}\bar{\eta}^0) = \bar{\psi}(x)(\bar{\eta}^0U^{\dagger}\bar{\eta}^0) , \end{aligned} \quad (4.93)$$

donde

$$U^{\dagger}(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}S^{\dagger\sigma\rho}\right) . \quad (4.94)$$

Sin embargo,

$$S^{\dagger\rho\sigma} = [\beta^\rho, \beta^\sigma]^{\dagger} = (\beta^\rho\beta^\sigma - \beta^\sigma\beta^\rho)^{\dagger} = \beta^{\dagger\sigma}\beta^{\dagger\rho} - \beta^{\dagger\rho}\beta^{\dagger\sigma} .$$

De la expresión (4.67) se puede determinar que:

$$\begin{aligned} S^{\dagger\rho\sigma} &= \bar{\eta}^0\beta^\sigma\bar{\eta}^0\bar{\eta}^0\beta^\rho\bar{\eta}^0 - \bar{\eta}^0\beta^\rho\bar{\eta}^0\bar{\eta}^0\beta^\sigma\bar{\eta}^0 = \bar{\eta}^0(\beta^\sigma\beta^\rho - \beta^\rho\beta^\sigma)\bar{\eta}^0 \\ &= \bar{\eta}^0[\beta^\rho, \beta^\sigma]\bar{\eta}^0 = \bar{\eta}^0S^{\sigma\rho}\bar{\eta}^0 = -\bar{\eta}^0S^{\rho\sigma}\bar{\eta}^0 . \end{aligned} \quad (4.95)$$

Analizando la aproximación infinitesimal de la transformación asociada a $U(\Lambda)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} \bar{\eta}^0U^{\dagger}\bar{\eta}^0 &\simeq \bar{\eta}^0\left(1 + \frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}S^{\dagger\sigma\rho}\right)\bar{\eta}^0 = \bar{\eta}^0\left(1 - \frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}\bar{\eta}^0S^{\rho\sigma}\bar{\eta}^0\right)\bar{\eta}^0 \\ &= 1 - \frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}S^{\rho\sigma} , \end{aligned}$$

que en el limite finito se deduce

$$\bar{\eta}^0 \mathbf{U}^\dagger(\Lambda) \bar{\eta}^0 = \exp\left(-\frac{1}{2} \omega_{\sigma\rho} S^{\sigma\rho}\right) = \mathbf{U}^{-1}(\Lambda), \quad (4.96)$$

por lo tanto

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) \mathbf{U}^{-1}(\Lambda). \quad (4.97)$$

Se puede afirmar entonces que la covarianza de la ecuación de DKP ha sido probada y que es independiente de la representación de las matrices β^μ .

A partir de la relación (4.80) es posible mostrar que:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^{-1} S^{\sigma\rho} \mathbf{U} &= \mathbf{U}^{-1} [\beta^\sigma, \beta^\rho] \mathbf{U} = \mathbf{U}^{-1} (\beta^\sigma \beta^\rho - \beta^\rho \beta^\sigma) \mathbf{U} \\ &= \mathbf{U}^{-1} \beta^\sigma \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1} \beta^\rho \mathbf{U} - \mathbf{U}^{-1} \beta^\rho \mathbf{U} \mathbf{U}^{-1} \beta^\sigma \mathbf{U} \\ &= \Lambda^\sigma_\mu \beta^\mu \Lambda^\rho_\nu \beta^\nu - \Lambda^\rho_\nu \beta^\nu \Lambda^\sigma_\mu \beta^\mu = \Lambda^\sigma_\mu \Lambda^\rho_\nu (\beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu) \\ &= \Lambda^\sigma_\mu \Lambda^\rho_\nu [\beta^\mu, \beta^\nu] = \Lambda^\sigma_\mu \Lambda^\rho_\nu S^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (4.98)$$

Lo que indica que $S^{\sigma\rho}$ es un tensor de segundo orden en el álgebra de las matrices β^μ . En general todo tensor en ésta álgebra puede ser escrito como una combinación lineal del producto de β y δ [75]. De la relación (4.89) se establece que

$$\eta^{\mu\sigma} \beta^\rho - \eta^{\mu\rho} \beta^\sigma = [\beta^\mu, S^{\sigma\rho}], \quad (4.99)$$

4.5. Covarianza de Lorentz de la Ecuación de DKP

se manera que

$$\begin{aligned}
 [S^{\mu\nu}, S^{\sigma\rho}] &= \left[[\beta^\mu, \beta^\nu], S^{\sigma\rho} \right] = [\beta^\mu \beta^\nu, S^{\sigma\rho}] - [\beta^\nu \beta^\mu, S^{\sigma\rho}] \\
 &= \beta^\mu [\beta^\nu, S^{\sigma\rho}] + [\beta^\mu, S^{\sigma\rho}] \beta^\nu - \beta^\nu [\beta^\mu, S^{\sigma\rho}] - [\beta^\nu, S^{\sigma\rho}] \beta^\mu \\
 &= \beta^\mu (\eta^{\nu\sigma} \beta^\rho - \eta^{\nu\rho} \beta^\sigma) + (\eta^{\mu\sigma} \beta^\rho - \eta^{\mu\rho} \beta^\sigma) \beta^\nu \\
 &\quad - \beta^\nu (\eta^{\mu\sigma} \beta^\rho - \eta^{\mu\rho} \beta^\sigma) - (\eta^{\nu\sigma} \beta^\rho - \eta^{\nu\rho} \beta^\sigma) \beta^\mu \\
 &= \eta^{\nu\sigma} (\beta^\mu \beta^\rho - \beta^\rho \beta^\mu) + \eta^{\nu\rho} (\beta^\sigma \beta^\mu - \beta^\mu \beta^\sigma) \\
 &\quad + \eta^{\mu\sigma} (\beta^\rho \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\rho) + \eta^{\mu\rho} (\beta^\nu \beta^\sigma - \beta^\sigma \beta^\nu) \\
 &= \eta^{\nu\sigma} [\beta^\mu, \beta^\rho] + \eta^{\nu\rho} [\beta^\sigma, \beta^\mu] + \eta^{\mu\sigma} [\beta^\rho, \beta^\nu] + \eta^{\mu\rho} [\beta^\nu, \beta^\sigma] \\
 &= \eta^{\mu\sigma} S^{\rho\nu} + \eta^{\nu\sigma} S^{\mu\rho} + \eta^{\nu\rho} S^{\sigma\mu} + \eta^{\mu\rho} S^{\nu\sigma},
 \end{aligned}$$

es decir

$$[S^{\mu\nu}, S^{\sigma\rho}] = \eta^{\mu\sigma} S^{\rho\nu} + \eta^{\nu\sigma} S^{\mu\rho} - \eta^{\mu\rho} S^{\sigma\nu} - \eta^{\nu\rho} S^{\sigma\mu}. \quad (4.100)$$

Introduciendo las matrices σ_k de la siguiente manera:

$$\sigma_k = i\varepsilon_{klm} S_{lm}, \quad (4.101)$$

y teniendo en cuenta la expresión (4.100) se determina que

$$\begin{aligned}
 [\sigma_k, \sigma_l] &= \left[-i\varepsilon_{kmn} S_{mn}, -i\varepsilon_{lpq} S_{pq} \right] = -\varepsilon_{kmn} \varepsilon_{lpq} [S_{mn}, S_{pq}] \\
 &= -\varepsilon_{kmn} \varepsilon_{lpq} (\eta_{mp} S_{qn} + \eta_{np} S_{mq} + \eta_{nq} S_{pm} + \eta_{mq} S_{np}) \\
 &= -\varepsilon_{kmn} \varepsilon_{lpq} (-\delta_{mp} S_{qn} - \delta_{np} S_{mq} - \delta_{nq} S_{pm} - \delta_{mq} S_{np}) \\
 &= \varepsilon_{pnk} \varepsilon_{pql} S_{qn} + \varepsilon_{pnk} \varepsilon_{pql} S_{qn} + \varepsilon_{pnk} \varepsilon_{pql} S_{qn} + \varepsilon_{pnk} \varepsilon_{pql} S_{qn} \\
 &= 4\varepsilon_{pnk} \varepsilon_{pql} S_{qn} = 4(\delta_{nq} \delta_{kl} - \delta_{nl} \delta_{kq}) S_{qn} \\
 &= 4(\delta_{kl} S_{nn} - S_{kl}) \\
 &= -4S_{kl}.
 \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} i\varepsilon_{kln}\sigma_n &= i\varepsilon_{kln}(i\varepsilon_{npq}S_{pq}) = -\varepsilon_{nkl}\varepsilon_{npq}S_{pq} = -(\delta_{kp}\delta_{lq} - \delta_{kq}\delta_{lp})S_{pq} \\ &= -(S_{kl} - S_{lk}) = -2S_{kl}, \end{aligned}$$

de manera que:

$$-S_{kl} = \frac{i}{2}\varepsilon_{kln}\sigma_n,$$

de manera que se puede concluir

$$[\sigma_k, \sigma_l] = 2i\varepsilon_{kln}\sigma_n,$$

que en forma equivalente se expresa como:

$$\left[\frac{\sigma_k}{2}, \frac{\sigma_l}{2}\right] = i\varepsilon_{kln}\frac{\sigma_n}{2}. \quad (4.102)$$

La expresión anterior se interpreta como las relaciones de conmutación para las matrices de momento angular, entonces σ_k tendrá las propiedades de momento angular y podrá tomar los autovalores: $(f, f-1, f-2, \dots, -f+1, -f)$, donde f es un número entero o semientero. La ecuación característica para las matrices σ_k es:

$$(\sigma_k - f)(\sigma_k - f + 1) \cdots (\sigma_k + f - 1)(\sigma_k + f) = 0. \quad (4.103)$$

En general la representación de las matrices de momento angular que satisfacen (4.103) pueden ser descompuestas en representaciones irreducibles $D_{|f|}, D_{|f-1|}, \dots$ del grupo de rotaciones infinitesimales. Estas representaciones irreducibles corresponden a los valores $|f|, |f-1|, \dots$ de momento angular. Ya que en una representación irreducible D_l la función de onda tiene $(2l+1)$ componentes independientes correspondientes a diferentes direcciones de momento angular, se muestra que el campo de DKP $\psi(x)$ describe el estado de una partícula con espín $f=1$. Así, se deduce que la función de onda en (4.31) describe los estados de partículas espín $|f|, |f-1|, \dots$. Este momento angular es una propiedad intrínseca de las partículas ya que no desaparece inclusive cuando éstas se encuentran en un estado de reposo.

4.6. Representaciones irreducibles de la teoría DKP

El conjunto de matrices β^μ junto con el operador unidad generan un anillo con el álgebra de espin entero [76]. El álgebra expresada por (4.45) genera un conjunto de 126 matrices independientes. Esta álgebra, por el teorema de Frobenius-Schur, debe poseer tres representaciones independientes irreducibles [67].

$$126 = 1^2 + 5^2 + 10^2. \quad (4.104)$$

Se tendrá una representación de primera orden, que es la trivial y la cual no tiene significado físico. Una representación de quinto orden que describirá partículas de espin $=$, el cual se identifica como el sector escalar de la teoría DKP. Finalmente, una representación de décimo orden asociado con partículas de espin 1 que se conoce como el sector vectorial. El campo de DKP, por tanto, poseerá un exceso de componentes y la teoría deberá ser condicionada por una ecuación que permita eliminar algunas componentes redundantes. Dicha condición se deriva de la ecuación de DKP multiplicando (4.44) por $(1 - (\beta^0)^2)$, resultando en:

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - (\beta^0)^2) (i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi = (1 - (\beta^0)^2) (i\beta^0 \partial_0 + i\beta^k \partial_k - m) \psi \\ &= \left[i(1 - (\beta^0)^2) \beta^0 \partial_0 + i(1 - (\beta^0)^2) \beta^k \partial_k - m(1 - (\beta^0)^2) \right] \psi. \end{aligned} \quad (4.105)$$

A partir de la relación (4.46) se determina que:

$$(\beta^0)^3 = \eta^{00} \beta^0 = \beta^0,$$

por lo tanto,

$$0 = (1 - (\beta^0)^2) \beta^0.$$

Ahora, de (4.50) se obtiene que

$$(\beta^0)^2 \beta^k + \beta^k (\beta^0)^2 = \eta^{00} \beta^k + \eta^{k0} \beta^0 = \beta^k,$$

entonces

$$\beta^k (\beta^0)^2 = \left(1 - (\beta^0)^2\right) \beta^k.$$

De manera que la ecuación (4.105) se reduce a:

$$i\beta^k (\beta^0)^2 \partial_k \psi = m \left(1 - (\beta^0)^2\right) \psi. \quad (4.106)$$

Como se podrá observar posteriormente, la relación (4.106) permitirá determinar que tres (cuatro) componentes del campo $\psi(x)$ se expresan en términos de las otras dos (seis) componentes y sus derivadas en el sector escalar (vectorial) de modo que las componentes superfluas desaparecen y se mantienen solamente las componentes físicas de la teoría de DKP. Se mostrara que las ecuaciones de KGF y de Proca son obtenidas seleccionando los sectores de espín 0 y 1, respectivamente de la teoría DKP para el bosón libre.

4.6.1. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de KGF

En 1953, Fujiwara [77] desarrollo dos conjuntos distintos de operadores que tienen la interesante propiedad de seleccionar el sector de espín 0 o 1 de la teoría de DKP. La propuesta de Fujiwara se baso en la propuesta de Peaslee [78]. Sin embargo, el abordaje realizado por Umezawa [71] resulto siendo mucho mas didáctico y presenta de manera explícita estos operadores. Para seleccionar la función de onda de espín 0, es necesario introducir los operadores P y P^μ definidos de la siguiente forma:

$$P \equiv - (\beta^0)^2 (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2, \quad (4.107)$$

el cual cumple con la condition:

$$P^2 = 1, \quad (4.108)$$

Además, se introduce el operador:

$$P^\mu \equiv P\beta^\mu, \quad (4.109)$$

4.6. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de KGF

al cual se le puede deducir la siguiente propiedad:

$$P^\mu \beta^\nu = P \beta^\mu \beta^\nu.$$

Ahora, siendo que: $\beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\mu$, se determina:

$$\left(\beta^\mu \beta^\nu - \eta^{\mu\nu} \right) \beta^\mu = 0. \quad (4.110)$$

Siendo que la identidad anterior se deberá cumplir para todo β^μ se deduce que:

$$\beta^\mu \beta^\nu = \eta^{\mu\nu}, \quad (4.111)$$

de manera que

$$P^\mu \beta^\nu = P \beta^\mu \beta^\nu = P \eta^{\mu\nu}. \quad (4.112)$$

Los resultados anteriores nos llevan a la siguiente identidad:

$$P S^{\sigma\rho} = P \left[\beta^\sigma, \beta^\rho \right] = P \left(\beta^\sigma \beta^\rho - \beta^\rho \beta^\sigma \right) = 0 = S^{\sigma\rho} P. \quad (4.113)$$

En forma similar se demuestra que:

$$\begin{aligned} P^\mu S^{\sigma\rho} &= P^\mu \left(\beta^\sigma \beta^\rho - \beta^\rho \beta^\sigma \right) = P^\mu \beta^\sigma \beta^\rho - P^\mu \beta^\rho \beta^\sigma = P \beta^\mu \beta^\sigma \beta^\rho - P \beta^\mu \beta^\rho \beta^\sigma \\ &= \eta^{\mu\sigma} (P \beta^\rho) - \eta^{\mu\rho} (P \beta^\sigma) = \eta^{\mu\sigma} P^\rho - \eta^{\mu\rho} P^\sigma. \end{aligned} \quad (4.114)$$

bajo una transformación infinitesimal de Lorentz arbitraria, se deduce que:

$$P \psi' (x') = P U (\Lambda) \psi (x) \simeq P \left(1 + \frac{1}{2} \delta \omega_{\sigma\rho} S^{\sigma\rho} \right) \psi (x) = P \psi (x), \quad (4.115)$$

lo que permite determinar que $P \psi (x)$ transforma como un escalar, de manera que el operador P selecciona el sector escalar de la teoría de DKP. En forma

análoga se puede observar que si se utiliza la relación (4.114) se obtiene:

$$\begin{aligned}
P^\mu \psi'(x') &= P^\mu U(\Lambda) \psi(x) \simeq P^\mu \psi(x) + \frac{1}{2} \delta \omega_{\sigma\rho} P^\mu S^{\sigma\rho} \psi(x) \\
&= P^\mu \psi(x) + \frac{1}{2} \delta \omega_{\sigma\rho} (\eta^{\mu\sigma} P^\rho - \eta^{\mu\rho} P^\sigma) \psi(x) \\
&= P^\mu \psi(x) + \frac{1}{2} (\delta \omega^\mu{}_\rho P^\rho - \delta \omega^\mu{}_\sigma P^\sigma) \psi(x) \\
&= P^\mu \psi(x) + \frac{1}{2} (\delta \omega^{\mu\rho} P_\rho - \delta \omega^{\sigma\mu} P_\sigma) \psi(x) \\
&= P^\mu \psi(x) + \frac{1}{2} (\delta \omega^{\mu\rho} P_\rho + \delta \omega^{\mu\sigma} P_\sigma) \psi(x) \\
&= \left(P^\mu \psi(x) \right) + \delta \omega^\mu{}_\rho \left(P^\rho \psi(x) \right) \\
&= \left(\eta^\mu{}_\rho + \delta \omega^\mu{}_\rho \right) \left(P^\rho \psi(x) \right) \\
&= \Lambda^\mu{}_\rho \left(P^\rho \psi(x) \right),
\end{aligned} \tag{4.116}$$

lo que indica que $P^\mu \psi(x)$ transforma como un vector. Si se aplica el operador P a la ecuación de DKP se obtiene que:

$$\begin{aligned}
0 &= P \left(i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = iP\beta^\mu \partial_\mu \psi(x) - mP\psi(x) \\
&= i\partial_\mu \left(P^\mu \psi(x) \right) - m \left(P\psi(x) \right).
\end{aligned} \tag{4.117}$$

Ahora, si aplicamos el operador P^ν y se utiliza la expresión (4.112) se determina que

$$\begin{aligned}
0 &= P^\nu \left(i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = iP^\nu \beta^\mu \partial_\mu \psi(x) - mP^\nu \psi(x) \\
&= iP\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \psi(x) - mP^\nu \psi(x) = i\partial^\nu \left(P\psi(x) \right) - m \left(P^\nu \psi(x) \right),
\end{aligned}$$

de manera que:

$$P^\mu \psi(x) = \frac{i}{m} \partial^\mu \left(P\psi(x) \right), \tag{4.118}$$

que al substituir en la relación (4.117) resulta en:

$$i\partial_\mu \left(\frac{i}{m} \partial^\mu \left(P\psi(x) \right) \right) - m \left(P\psi(x) \right) = -\frac{1}{m} \partial_\mu \partial^\mu \left(P\psi(x) \right) - m \left(P\psi(x) \right) = 0,$$

4.6. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de KGF

es decir,

$$\left(\square + m^2 \right) \left(P\psi(x) \right) = 0, \quad (4.119)$$

por lo tanto, los campos $P\psi(x)$ son identificados con campos escalares de masa m que obedecen la ecuación de KGF para un boson libre, es decir, es una ecuación de onda para espin 0. Por lo tanto, cuando el operador de proyección P es aplicado a la ecuación de DKP, inmediatamente el sector de espin 0 de la teoría es seleccionado suministrado solamente la componente física del campo $\psi(x)$ que satisface la ecuación de KGF libre.

Si se denota la función de onda multicomponente $\psi(x)$ como:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi^0(x) \\ \varphi^1(x) \\ \varphi^2(x) \\ \varphi^3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi^\nu(x) \end{pmatrix}, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (4.120)$$

se puede encontrar una representación de las matrices β^μ de manera que los operadores P y P^μ seleccionen las componentes del campo DKP que podamos asociar con el campo de KGF. La naturaleza de los operadores P y P^μ debe ser tal que:

$$P\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^\mu\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.121)$$

Lo anterior implica que dichos operadores deberán ser de la forma:

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 P^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.122}
 \end{aligned}$$

De la expresión (4.118), se puede determinar que:

$$P^\mu \psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \frac{i}{m} \partial^\mu (P\psi(x)) = \begin{pmatrix} \frac{i}{m} \partial^\mu \varphi(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix},$$

es decir:

$$\varphi^\mu(x) = \frac{i}{m} \partial^\mu \varphi(x). \tag{4.123}$$

Definiendo el siguiente campo:

$$\varphi(x) \equiv \sqrt{m} \bar{\varphi}(x), \tag{4.124}$$

se determina que

$$\varphi^\mu(x) = \frac{i}{\sqrt{m}} \partial^\mu \bar{\varphi}(x), \tag{4.125}$$

de manera que el campo multicomponente de DKP se puede expresar de la siguiente manera:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{m} \bar{\varphi}(x) \\ \frac{i}{\sqrt{m}} \partial^\mu \bar{\varphi}(x) \end{pmatrix}, \tag{4.126}$$

que se interpretara como la forma física de la función de onda de DKP del sector de espín 0, siendo que:

$$P\psi(x) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix}, \quad P^\mu \psi(x) = \frac{i}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \partial^\mu \bar{\varphi}(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix}, \tag{4.127}$$

4.6. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de Proca

el cual satisface la condición:

$$\left(\square + m^2 \right) \left(P\psi(x) \right) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} (\square + m^2) \bar{\varphi}(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = 0,$$

es decir:

$$\left(\square + m^2 \right) \bar{\varphi}(x) = 0. \quad (4.128)$$

4.6.2. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de Proca

De forma similar se puede seleccionar la función de onda para campos de espín 1, para ello, se introduce el siguiente conjunto de operadores [71]:

$$\begin{aligned} R^\mu &= (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 \left(\beta^\mu \beta^0 - \eta^{\mu 0} \right), \\ R^{\mu\nu} &= R^\mu \beta^\nu, \end{aligned} \quad (4.129)$$

los cuales satisfacen las siguientes propiedades:

$$R^{\mu\nu} = (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 \left(\beta^\mu \beta^0 - \eta^{\mu 0} \right) \beta^\nu = (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 \left(\beta^\mu \beta^0 \beta^\nu - \eta^{\mu 0} \beta^\nu \right).$$

Del álgebra de las matrices β se determina que:

$$\beta^\mu \beta^0 \beta^\nu + \beta^\nu \beta^0 \beta^\mu = \eta^{\mu 0} \beta^\nu + \eta^{\nu 0} \beta^\mu,$$

es decir:

$$\beta^\mu \beta^0 \beta^\nu - \eta^{\mu 0} \beta^\nu = \eta^{\nu 0} \beta^\mu - \beta^\nu \beta^0 \beta^\mu = - \left(\beta^\nu \beta^0 - \eta^{\nu 0} \right) \beta^\mu,$$

de manera que

$$R^{\mu\nu} = - (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 \left(\beta^\nu \beta^0 - \eta^{\nu 0} \right) \beta^\mu = -R^\nu \beta^\mu = -R^{\nu\mu}. \quad (4.130)$$

De igual manera,

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu}\beta^\theta &= R^\mu\beta^\nu\beta^\theta = (\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2(\beta^\mu\beta^0 - \eta^{\mu 0})\beta^\nu\beta^\theta \\ &= (\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2(\beta^\mu\beta^0\beta^\nu\beta^\theta - \eta^{\mu 0}\beta^\nu\beta^\theta). \end{aligned}$$

Ahora, de la misma álgebra de las matrices β se obtiene que:

$$\beta^0\beta^\nu\beta^\theta + \beta^\theta\beta^\nu\beta^0 = \eta^{0\nu}\beta^\theta + \eta^{\theta\nu}\beta^0,$$

de manera al usar el hecho que $\beta^\nu\beta^\theta = \eta^{\nu\theta}$ se deduce:

$$\begin{aligned} \beta^\mu\beta^0\beta^\nu\beta^\theta - \eta^{\mu 0}\beta^\nu\beta^\theta &= \eta^{0\nu}\underbrace{\beta^\mu\beta^\theta}_{\eta^{\mu\theta}} + \eta^{\theta\nu}\beta^\mu\beta^0 - \underbrace{\beta^\mu\beta^\theta}_{\eta^{\mu\theta}}\beta^\nu\beta^0 - \eta^{\mu 0}\eta^{\nu\theta} \\ &= \eta^{\theta\nu}(\beta^\mu\beta^0 - \eta^{\mu 0}) - \eta^{\mu\theta}(\beta^\nu\beta^0 - \eta^{0\nu}), \end{aligned}$$

resultando finalmente que

$$\begin{aligned} R^{\mu\nu}\beta^\theta &= (\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2[\eta^{\theta\nu}(\beta^\mu\beta^0 - \eta^{\mu 0}) - \eta^{\mu\theta}(\beta^\nu\beta^0 - \eta^{0\nu})] \\ &= \eta^{\theta\nu}(\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2(\beta^\mu\beta^0 - \eta^{\mu 0}) - \eta^{\mu\theta}(\beta^1)^2(\beta^2)^2(\beta^3)^2(\beta^\nu\beta^0 - \eta^{0\nu}) \\ &= \eta^{\theta\nu}R^\mu - \eta^{\mu\theta}R^\nu, \end{aligned}$$

es decir:

$$R^{\mu\nu}\beta^\theta = R^\mu\eta^{\theta\nu} - R^\nu\eta^{\mu\theta}. \quad (4.131)$$

Ahora, asociado al operador R^μ se determina que:

$$\begin{aligned} R^\mu S^{\sigma\rho} &= R^\mu[\beta^\sigma, \beta^\rho] = (R^\mu\beta^\sigma)\beta^\rho - (R^\mu\beta^\rho)\beta^\sigma \\ &= R^{\mu\sigma}\beta^\rho - R^{\mu\rho}\beta^\sigma = R^\mu\eta^{\rho\sigma} - R^\sigma\eta^{\mu\rho} - R^\mu\eta^{\sigma\rho} + R^\rho\eta^{\mu\sigma} \\ &= \eta^{\mu\sigma}R^\rho - \eta^{\mu\rho}R^\sigma. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Igualmente:

$$\begin{aligned} S^{\sigma\rho}R^\mu &= [\beta^\sigma, \beta^\rho]R^\mu = \beta^\sigma\beta^\rho R^\mu - \beta^\rho\beta^\sigma R^\mu \\ &= \eta^{\sigma\rho}R^\mu - \eta^{\rho\sigma}R^\mu = 0. \end{aligned} \quad (4.133)$$

4.6. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de Proca

De manera análoga se observa que:

$$\begin{aligned}
 R^{\mu\nu} S^{\sigma\rho} &= R^{\mu\nu} [\beta^\sigma, \beta^\rho] = (R^{\mu\nu} \beta^\sigma) \beta^\rho - (R^{\mu\nu} \beta^\rho) \beta^\sigma \\
 &= (R^\mu \eta^{\sigma\nu} - R^\nu \eta^{\mu\sigma}) \beta^\rho - (R^\mu \eta^{\rho\nu} - R^\nu \eta^{\mu\rho}) \beta^\sigma \\
 &= R^\mu \beta^\rho \eta^{\sigma\nu} - R^\nu \beta^\rho \eta^{\mu\sigma} - R^\mu \beta^\sigma \eta^{\rho\nu} + R^\nu \beta^\sigma \eta^{\mu\rho} \\
 &= \eta^{\sigma\nu} R^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma} R^{\nu\rho} - \eta^{\rho\nu} R^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\rho} R^{\nu\sigma}. \tag{4.134}
 \end{aligned}$$

Las identidades anteriores garantizan que bajo una transformación infinitesimal se cumple que:

$$\begin{aligned}
 R^\mu \psi'(x') &= R^\mu U(\Lambda) \psi(x) \simeq R^\mu \left(1 + \frac{1}{2} \delta\omega_{\sigma\rho} S^{\sigma\rho} \right) \psi(x) \\
 &= R^\mu \psi(x) + \frac{1}{2} \delta\omega_{\sigma\rho} R^\mu S^{\sigma\rho} \psi(x) \\
 &= R^\mu \psi(x) + \frac{1}{2} \delta\omega_{\sigma\rho} (\eta^{\mu\sigma} R^\rho - \eta^{\mu\rho} R^\sigma) \psi(x) \\
 &= R^\mu \psi(x) + \frac{1}{2} (\delta\omega^\mu{}_\rho R^\rho - \delta\omega^\mu{}_\sigma R^\sigma) \psi(x) \\
 &= R^\mu \psi(x) + \frac{1}{2} (\delta\omega^{\mu\rho} R_\rho - \delta\omega^{\sigma\mu} R_\sigma) \psi(x) \\
 &= R^\mu \psi(x) + \frac{1}{2} (\delta\omega^{\mu\rho} R_\rho + \delta\omega^{\mu\sigma} R_\sigma) \psi(x),
 \end{aligned}$$

es decir:

$$R^\mu \psi'(x') = \left(R^\mu \psi(x) \right) + \delta\omega^\mu{}_\rho \left(R^\rho \psi(x) \right), \tag{4.135}$$

lo que indica que el operador R^μ selecciona las componentes del campo de DKP $\psi(x)$ que transforman como las componentes de un cuadrivector. Ahora, al

considerar el operador $R^{\mu\nu}$ se determina que:

$$\begin{aligned}
R^{\mu\nu}\psi'(x') &= R^{\mu\nu}U(\Lambda)\psi(x) \simeq R^{\mu\nu}\left(1 + \frac{1}{2}\delta\omega_{\sigma\rho}S^{\sigma\rho}\right)\psi(x) \\
&= R^{\mu\nu}\psi(x) + \frac{1}{2}\delta\omega_{\sigma\rho}R^{\mu\nu}S^{\sigma\rho}\psi(x) \\
&= R^{\mu\nu}\psi(x) + \frac{1}{2}\delta\omega_{\sigma\rho}\left(\eta^{\sigma\nu}R^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma}R^{\nu\rho} - \eta^{\rho\nu}R^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\rho}R^{\nu\sigma}\right)\psi(x) \\
&= R^{\mu\nu}\psi(x) + \frac{1}{2}\left(\delta\omega^{\nu\rho}R^{\mu\rho} - \delta\omega^{\mu\rho}R^{\nu\rho} - \delta\omega^{\nu\sigma}R^{\mu\sigma} + \delta\omega^{\mu\sigma}R^{\nu\sigma}\right)\psi(x) \\
&= R^{\mu\nu}\psi(x) + \frac{1}{2}\left(\delta\omega^{\nu\rho}R^{\mu}_{\rho} - \delta\omega^{\mu\rho}R^{\nu}_{\rho} - \delta\omega^{\sigma\nu}R^{\mu}_{\sigma} + \delta\omega^{\sigma\mu}R^{\nu}_{\sigma}\right)\psi(x) \\
&= R^{\mu\nu}\psi(x) + \frac{1}{2}\left(\delta\omega^{\sigma\mu}R^{\nu}_{\sigma} + \delta\omega^{\rho\mu}R^{\nu}_{\rho} + \delta\omega^{\nu\rho}R^{\mu}_{\rho} + \delta\omega^{\nu\sigma}R^{\mu}_{\sigma}\right)\psi(x) \\
&= R^{\mu\nu}\psi(x) + \delta\omega^{\mu}_{\sigma}\left(R^{\sigma\nu}\psi(x)\right) + \delta\omega^{\nu}_{\rho}\left(R^{\mu\rho}\psi(x)\right). \quad (4.136)
\end{aligned}$$

Ahora, si consideramos una transformación de Lorentz infinitesimal de un tensor de segundo orden, su comportamiento sería:

$$\begin{aligned}
R'^{\mu\nu} &= \Lambda^{\mu}_{\alpha}\Lambda^{\nu}_{\beta}R^{\alpha\beta} \simeq (\delta^{\mu}_{\alpha} + \delta\omega^{\mu}_{\alpha})(\delta^{\nu}_{\beta} + \delta\omega^{\nu}_{\beta})R^{\alpha\beta} \\
&\simeq (\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} + \delta^{\mu}_{\alpha}\delta\omega^{\nu}_{\beta} + \delta^{\nu}_{\beta}\delta\omega^{\mu}_{\alpha})R^{\alpha\beta} \\
&= R^{\mu\nu} + \delta\omega^{\mu}_{\alpha}R^{\alpha\nu} + \delta\omega^{\nu}_{\alpha}R^{\mu\alpha},
\end{aligned}$$

resultado que permite establecer de la relación (4.136) que el operador $R^{\mu\nu}$ selecciona aquellas componentes del campo de DKP $\psi(x)$ que transforman como un tensor de segundo orden.

Si se aplica el operador R^{μ} a la ecuación de DPK se obtiene:

$$0 = R^{\nu}\left(i\beta^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi(x) = iR^{\nu}\beta^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - mR^{\nu}\psi(x) = iR^{\nu\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - mR^{\nu}\psi(x),$$

es decir:

$$R^{\mu\nu}\partial_{\nu}\psi(x) = -imR^{\mu}\psi(x). \quad (4.137)$$

4.6. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de Proca

Sin embargo, si el operador $R^{\mu\nu}$ es aplicado, resulta e aplicar (4.131) que:

$$\begin{aligned} 0 &= R^{\mu\nu} \left(i\beta^\alpha \partial_\alpha - m \right) \psi(x) = iR^{\mu\nu} \beta^\alpha \partial_\alpha \psi(x) - mR^{\mu\nu} \psi(x) \\ &= i(R^\mu \eta^{\alpha\nu} - R^\nu \eta^{\mu\alpha}) \partial_\alpha \psi(x) - mR^{\mu\nu} \psi(x) \\ &= i\partial^\nu \left(R^\mu \psi(x) \right) - i\partial^\mu \left(R^\nu \psi(x) \right) - mR^{\mu\nu} \psi(x), \end{aligned}$$

así que,

$$\partial^\nu \left(R^\mu \psi(x) \right) - \partial^\mu \left(R^\nu \psi(x) \right) = -imR^{\mu\nu} \psi(x). \quad (4.138)$$

Teniendo en cuenta que $R^\mu \psi(x)$ transforma como un vector, podemos definir el siguiente campo tensorial de segundo orden:

$$V^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu \left(R^\mu \psi(x) \right) - \partial^\mu \left(R^\nu \psi(x) \right), \quad (4.139)$$

el cual satisface la propiedad de ser antisimétrico,

$$V^{\mu\nu} = -V^{\nu\mu}. \quad (4.140)$$

De esta manera, la ecuación (4.138) se expresa como:

$$R^{\mu\nu} \psi(x) = -\frac{i}{m} V^{\mu\nu}, \quad (4.141)$$

con lo cual, la relación (4.137) se escribe:

$$\partial_\nu \left(R^{\mu\nu} \psi(x) \right) + imR^\mu \psi(x) = -\frac{i}{m} \partial_\nu V^{\mu\nu} + im \left(R^\mu \psi \right) = 0,$$

es decir,

$$\partial_\nu V^{\nu\mu} + m^2 \left(R^\mu \psi \right) = 0, \quad (4.142)$$

que se interpreta como siendo la ecuación de Proca para el campo vectorial $R^\mu \psi(x)$ que describe una partícula de espín 1. Si se aplica el operador ∂_μ a la ecuación (4.142) se deriva una condición subcidiaria para el campo $R^\mu \psi(x)$. De la antisimetría del tensor $V^{\nu\mu}$ resulta que:

$$\partial_\mu \partial_\nu V^{\nu\mu} + m^2 \partial_\mu \left(R^\mu \psi \right) = m^2 \partial_\mu \left(R^\mu \psi \right) = 0,$$

por tanto

$$\partial_\mu \left(R^\mu \psi \right) = 0. \quad (4.143)$$

Ahora, si la condición anterior es utilizado en (4.142) se obtiene,

$$\begin{aligned} \partial_\nu V^{\nu\mu} + m^2 \left(R^\mu \psi \right) &= \partial_\nu \left[\partial^\nu \left(R^\mu \psi (x) \right) - \partial^\mu \left(R^\nu \psi (x) \right) \right] + m^2 \left(R^\mu \psi \right) \\ &= \partial_\nu \partial^\nu \left(R^\mu \psi (x) \right) - \partial^\mu \partial_\nu \left(R^\nu \psi (x) \right) + m^2 \left(R^\mu \psi \right) \\ &= \partial_\nu \partial^\nu \left(R^\mu \psi (x) \right) + m^2 \left(R^\mu \psi \right) = 0, \end{aligned}$$

lo que en forma compacta se expresa:

$$\left(\square + m^2 \right) \left(R^\mu \psi (x) \right) = 0. \quad (4.144)$$

Las ecuaciones (4.143) y (4.144) son equivalentes a las ecuaciones de proca. La ecuación (4.144) indica que son necesarias 4 coordenadas para describir la partícula de espín 1, sin embargo, la condición (4.143) elimina una de esas componentes estableciendo que son necesarios únicamente 3 grados de libertad.

Al denotar la función de onda multicomponente $\psi (x)$ para el caso en consideración como siendo:

$$\psi (x) = \begin{pmatrix} \phi^0 (x) \\ \phi^1 (x) \\ \phi^2 (x) \\ \phi^3 (x) \\ \phi^4 (x) \\ \phi^5 (x) \\ \phi^6 (x) \\ \phi^7 (x) \\ \phi^8 (x) \\ \phi^9 (x) \end{pmatrix}, \quad (4.145)$$

se puede encontrar una representación de las matrices β^μ de manera que el operador R^μ seleccione las componentes físicas del campo DKP para el sector

4.7. Representación de las Matrices Beta

de espín 1 las cuales son identificadas como siendo $(\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$. Bajo esta condición se puede esperar que el operador R^μ realice la siguiente acción:

$$R^\mu \psi(x) = \begin{pmatrix} \phi^k(x) \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (4.146)$$

Sin embargo, hay que tener en cuenta que de las componentes físicas indicadas anteriormente, la relación (4.143) los vincula manteniendo solo tres de ellas como independientes. A partir de la expresión (4.144) se puede deducir que son éstas cuatro componentes del campo $\psi(x)$ las que satisfacen la ecuación de KGF libre. Con el fin de garantizar (4.146), los operadores R^μ deberán ser de la forma:

$$R^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.147)$$

4.7. Representación de las Matrices Beta

Según la propuesta de de Broglie una manera de construir las matrices β que garanticen que el álgebra (4.35) sea satisfecha es si dichas matrices se las puede expresar en la forma:

$$\beta^\mu = \frac{1}{2} \left(\gamma^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \gamma'^\mu \right), \quad (4.148)$$

donde

$$\left\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \right\} = 2\eta^{\mu\nu} = \left\{ \gamma'^\mu, \gamma'^\nu \right\} \quad , \quad \left[\gamma^\mu, \gamma'^\nu \right] = 0. \quad (4.149)$$

Hay que tener en cuenta que la representación dada por (4.148) es reducible de manera que una teoría basada en la ecuación:

$$\partial_\mu \left(\gamma^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \gamma'^\mu \right) \psi(x) + \kappa \psi(x) = 0, \quad (4.150)$$

es equivalente a la teoría DKP. A partir de la ecuación (4.150) se puede concluir que el campo $\psi(x)$ se transforma como el producto directo de dos campos de Dirac. Como ya se ha mostrado el campo de DKP describe los campos de espín 0 y espín 1 además de contener una representación trivial las cuales están contenidas en la representación particular para las matrices β^μ dada por (4.148). Como se mostró en la sección anterior, el campo de espín 0 posee cinco componentes $(P\psi, P^\mu\psi)$, en tanto que el campo de espín 1 tiene diez componentes $(R^\mu\psi, V^{\mu\nu})$. De esta forma, las representaciones irreducibles para los campos de espín 0 y espín 1 contienen 15 componentes. Debido a (4.148), las representaciones reducibles para β^μ tienen 16 componentes, por tanto, es necesario encontrar una última componente, a fin de descomponer en tres representaciones irreducibles: $16 = 10 \oplus 5 \oplus 1$.

Ésta última componentes sera entonces una representación irreducible, de modo ella deba ser una cantidad escalar satisfaciendo una ecuación diferencial de primer orden. Sin embargo, es imposible encontrar tal ecuación para una

4.7. Representación de las Matrices Beta

componente escalar que satisfaga también la ecuación de segundo orden de GKF, a menos que éste escalar sea cero. Por lo tanto, se concluye que la última componente es trivial, es decir, no tiene interés físico. Debido a la irreducibilidad de las tres representaciones, el número de matrices linealmente independientes es dado por la expresión (4.104). Se puede mostrar usando el álgebra de las matrices β^μ que toda matriz en dicha álgebra y su producto, se puede expresar como una combinación lineal de las siguientes 126 matrices [79]:

$$\begin{array}{ccc}
 I & \bar{\eta}^\mu & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \beta^\alpha \\
 \beta^\mu & \bar{\eta}^\mu \beta^\nu & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \beta^\alpha \beta^\beta \\
 \beta^\mu \beta^\nu & \bar{\eta}^\mu \beta^\nu \beta^\alpha & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \\
 \beta^\mu \beta^\nu \beta^\alpha & \bar{\eta}^\mu \beta^\nu \beta^\alpha \beta^\beta & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \beta^\beta \\
 \beta^\mu \beta^\nu \beta^\alpha \beta^\beta & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \bar{\eta}^\beta
 \end{array} \quad (4.151)$$

En cualquier representación que se de para las 126 matrices, solo 16 poseen traza no nula, es decir, las $\bar{\eta}^\mu$ y todos los productos entre ellas. Las trazas de las matrices β^μ y para matrices que contienen $\bar{\eta}^\mu$ son las siguientes [80]:

$$\begin{aligned}
 \text{Tr} \left(\beta^{\mu_1} \beta^{\mu_2} \dots \beta^{\mu_{2n+1}} \right) &= 0, \\
 \text{Tr} \left(\beta^{\mu_1} \beta^{\mu_2} \beta^{\mu_3} \beta^{\mu_4} \dots \beta^{\mu_{2n-2}} \beta^{\mu_{2n-1}} \beta^{\mu_{2n}} \right) &= \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} \dots \delta^{\mu_{2n-1}, \mu_{2n}} \\
 &\quad + \delta^{\mu_2 \mu_3} \delta^{\mu_4 \mu_5} \dots \delta^{\mu_{2n-2}, \mu_{2n-1}} \delta^{\mu_1, \mu_{2n}}
 \end{aligned} \quad (4.152)$$

Ahora, en relación a cada representación del campo de DKP se cumple:

	$s = 1$	$s = 0$	trivial
$\text{Tr} (I)$	10	5	1
$\text{Tr} (\bar{\eta}^\mu)$	2	-1	-1
$\text{Tr} (\bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu)$	-2	1	1
$\text{Tr} (\bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha)$	-2	3	-1
$\text{Tr} (\bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \bar{\eta}^\beta)$	2	-3	-1

(4.153)

la traza de un número impar de matrices β^μ es siempre nula. Para el calculo de diferentes observables solo es necesario conocer las propiedades de las matrices β^μ , de manera que las mediciones asociadas a ellas no dependan del la

representación específica de dichas matrices. Se mencionara algunas representaciones específicas para las matrices beta en los tres casos mencionados aun cuando no es la única posible. En el caso de la representación trivial, todas las matrices deben ser iguales a cero:

$$\beta^0 = \beta^1 = \beta^2 = \beta^3 = 0. \quad (4.154)$$

En el caso de la representación correspondiente a los campos de espín 0, las matrices β^μ son 5×5 y tienen la forma:

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.155)$$

Ahora, para el caso de campos de espín 1, las las matrices β^μ son 10×10 y

una posible representación es:

$$\begin{aligned}
 \beta^0 = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\beta^2 = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.156}$$

4.8. Formulación Lagrangiana de la teoría de DKP

Debido a la estrecha similitud entre la forma funcional de la ecuación de Dirac y la ecuación de DKP, se propone que la densidad Lagrangiana para el campo de DKP libre es:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta^\mu (\partial_\mu \psi(x)) - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}(x)) \beta^\mu \psi(x) - m \bar{\psi}(x) \psi(x), \tag{4.157}$$

a partir de la cual se calculan las correspondientes ecuaciones de campo asociadas a $(\psi, \bar{\psi})$ de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0. \quad (4.158)$$

Calculando las derivadas correspondientes se determina que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} &= -\frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu - m \bar{\psi} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} &= \frac{i}{2} \beta^\mu (\partial_\mu \psi) - m \psi \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} = -\frac{i}{2} \beta^\mu \psi, \end{aligned}$$

relaciones que al ser substituidas en (4.158) resultan en:

$$\bar{\psi}(x) \left(\partial_\mu \beta^\mu + m \right) = 0 \quad , \quad \left(i \beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (4.159)$$

resultando en las ecuaciones de campo (4.44) y (4.69). Es posible observar que la densidad lagrangiana indicada en (4.157) posee una simetría global $U(1)$:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x). \quad (4.160)$$

lo cual es el reflejo de la presencia de la corriente conservada indicada por la ecuación (4.71)

$$J^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi.$$

Ahora, debido a que el Lagrangiano que describe la teoría de DKP es de primer, así como en el caso del campo de Dirac, es posible mostrar que las dos teorías comparten una propiedad en común. Con el fin de evidenciar lo anterior, se procede a calcular los momentos canónicos asociados a los campos $(\psi, \bar{\psi})$ de la siguiente manera:

$$\bar{\pi}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi(x))} = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta_0 \quad , \quad \pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi}(x))} = -\frac{i}{2} \beta_0 \psi(x). \quad (4.161)$$

4.8. Formulación Lagrangiana de la teoría de DKP

El hecho que en la expresión anterior se muestre que los momentos canónicos $(\bar{\pi}, \pi)$ asociados a los campos $(\psi, \bar{\psi})$, respectivamente, se relacionen a los mismos campos y no a las derivadas temporales de ellos, da a entender que el Lagrangiano que describe los campos de DKP es singular, es decir, que las coordenadas que definen el espacio de fase $(\psi, \bar{\psi}, \bar{\pi}, \pi)$ no son completamente independientes y por las expresiones (4.161) constituyen un conjunto de vínculos [81]. Por lo tanto, un método apropiado deberá ser considerado con el fin de analizar consistentemente la teoría y que en nuestro caso sera considerado el método de Dirac para estudiar sistemas con vínculos [82]. Es así, que al sistema de ecuaciones (4.161) se le asociara el siguiente conjunto de vínculos primarios:

$$\bar{\Gamma}(x) \equiv \bar{\pi}(x) - \frac{i}{2}\bar{\psi}(x)\beta_0 \approx 0 \quad , \quad \Gamma(x) \equiv \pi(x) + \frac{i}{2}\beta_0\psi(x) \approx 0. \quad (4.162)$$

El número de vínculos que resulta de (4.162) dependerá del tipo de campo que se desea describir a partir de $(\psi, \bar{\psi})$. Siguiendo el procedimiento de Dirac se definirá la densidad Hamiltoniana canónica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &\equiv \bar{\pi}\partial_0\psi + \partial_0\bar{\psi}\pi - \mathcal{L} \\ &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta_0\partial_0\psi - \frac{i}{2}\partial_0\bar{\psi}\beta_0\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^0\partial_0\psi - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^k\partial_k\psi \\ &\quad + \frac{i}{2}\partial_0\bar{\psi}\beta^0\psi + \frac{i}{2}\partial_k\bar{\psi}\beta^k\psi + m\bar{\psi}\psi \\ &= -\frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^k\partial_k\psi + \frac{i}{2}\partial_k\bar{\psi}\beta^k\psi + m\bar{\psi}\psi, \end{aligned}$$

de manera que el Hamiltoniano canónico asociado a la teoría es:

$$H_C = \int d^3x \mathcal{H}_C = \int d^3x \left[-\frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^k\partial_k\psi + \frac{i}{2}\partial_k\bar{\psi}\beta^k\psi + m\bar{\psi}\psi \right]. \quad (4.163)$$

De igual manera, se define al Hamiltoniano primario adicionando al Hamiltoniano canónico los vínculos primarios con sus respectivos multiplicadores de Lagrange,

$$\begin{aligned} H_P &= H_C + \int d^3y \left[\bar{\alpha}(y) \Gamma(y) + \bar{\Gamma}(y) \alpha(y) \right] \\ &= \int d^3y \left[-\frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^k (\partial_k^y \psi) + \frac{i}{2} (\partial_k^y \bar{\psi}) \beta^k \psi + m\bar{\psi}\psi + \bar{\alpha}(y) \Gamma(y) + \bar{\Gamma}(y) \alpha(y) \right], \end{aligned} \quad (4.164)$$

siendo $(\bar{\alpha}, \alpha)$ los multiplicadores de lagrange asociados a los vínculos primarios $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ respectivamente. Ahora, dado que el espacio de fase de la teoría es expandido por $(\psi, \bar{\psi}, \bar{\pi}, \pi)$, para dos variables dinámicas definidas en dicho espacio:

$$F(x) \equiv F[\psi(x), \bar{\psi}(x), \bar{\pi}(x), \pi(x)] \quad , \quad G(x) \equiv G[\psi(x), \bar{\psi}(x), \bar{\pi}(x), \pi(x)] \quad , \quad (4.165)$$

la definición funcional de los corchetes de Poisson a tiempos iguales es:

$$\left\{ F(x), G(y) \right\}_{x^0=y^0} = \int d^3z \left[\frac{\delta F(x)}{\delta \psi_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \bar{\pi}_a(z)} + \frac{\delta F(x)}{\delta \bar{\psi}_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \pi_a(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \bar{\pi}_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \psi_a(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta \pi_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \bar{\psi}_a(z)} \right]. \quad (4.166)$$

A partir de la relación anterior se puede mostrar que los únicos PB diferentes de cero son:

$$\left\{ \psi_a(x), \bar{\pi}_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\psi}_a(x), \pi_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta^3(x-y). \quad (4.167)$$

Utilizando las relaciones (4.167) es posible mostrar que el conjunto de vínculos primarios (4.162) satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \Gamma_a(x), \bar{\Gamma}_b(y) \right\} = i(\beta_0)_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\Gamma}_a(x), \Gamma_b(y) \right\} = -i(\beta_0)_{ab}^T \delta^3(x-y). \quad (4.168)$$

El procedimiento de Dirac establece que los vínculos primarios se deberán preservar en el tiempo, es decir, ellos deben ser consistentes bajo la evolución temporal generada por el Hamiltoniano primario. Por lo tanto, se exige que $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ posean un PB débilmente igual a cero con el Hamiltoniano primario,

4.8. Formulaci3n Lagrangiana de la teor3a de DKP

con lo cual (utilizando (4.167)) se deduce que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\Gamma}}_a(x) &= \left\{ \bar{\Gamma}_a(x), H_P \right\} = -\frac{i}{2} \int d^3y \left\{ \bar{\Gamma}_a(x), \bar{\Psi}_b(y) \beta_{bc}^k (\partial_k^y \psi_c(y)) \right\} \\
 &\quad + \frac{i}{2} \int d^3y \left\{ \bar{\Gamma}_a(x), (\partial_k^y \bar{\Psi}_b(y)) \beta_{bc}^k \psi_c(y) \right\} \\
 &\quad + m \int d^3y \left\{ \bar{\Gamma}_a(x), \bar{\Psi}_b(y) \psi_b(y) \right\} + \int d^3y \left\{ \bar{\Gamma}_a(x), \bar{\alpha}_b(y) \Gamma_b(y) \right\} \\
 &= -\frac{i}{2} \int d^3y \bar{\Psi}_b(y) \beta_{bc}^k \underbrace{\partial_k^y \left\{ \bar{\pi}_a(x), \psi_c(y) \right\}}_{-\delta_{ac} \delta^3(x-y)} \\
 &\quad + \frac{i}{2} \int d^3y (\partial_k^y \bar{\Psi}_b(y)) \beta_{bc}^k \left\{ \bar{\pi}_a(x), \psi_c(y) \right\} \\
 &\quad + m \int d^3y \bar{\Psi}_b(y) \left\{ \bar{\pi}_a(x), \psi_b(y) \right\} + \int d^3y \bar{\alpha}_b(y) \underbrace{\left\{ \bar{\Gamma}_a(x), \Gamma_b(y) \right\}}_{-i(\beta_0)_{ab}^T \delta^3(x-y)} \\
 &= \frac{i}{2} \int d^3y \bar{\Psi}_b(y) \beta_{ba}^k \underbrace{\partial_k^y}_{-\partial_k^x} \delta^3(x-y) - \frac{i}{2} (\partial_k^x \bar{\Psi}_b(x)) \beta_{ba}^k - m \bar{\Psi}_a(x) \\
 &\quad - i \bar{\alpha}_b(x) (\beta_0)_{ab}^T \\
 &= -\frac{i}{2} \partial_k^x \bar{\Psi}_b(x) \beta_{ba}^k - \frac{i}{2} (\partial_k^x \bar{\Psi}_b(x)) \beta_{ba}^k - m \bar{\Psi}_a(x) - i \bar{\alpha}_b(x) (\beta_0)_{ba} \\
 &= -\bar{\Psi}_b(x) \left(i \overleftarrow{\partial}_k^x \beta_{ba}^k + m \delta_{ab} \right) - i \bar{\alpha}_b(x) (\beta_0)_{ba}.
 \end{aligned}$$

De manera que la consistencia del v3nculo $\bar{\Gamma}(x)$ establece que:

$$\dot{\bar{\Gamma}}(x) = \bar{\Psi}(x) \left(i \overleftarrow{\partial}_k^x \beta^k + m \right) + i \bar{\alpha}(x) \beta_0 \approx 0. \quad (4.169)$$

En forma similar, la consistencia del vínculo $\Gamma(x)$ determina que

$$\begin{aligned}
\dot{\Gamma}_a(x) &= \left\{ \Gamma_a(x), H_P \right\} = -\frac{i}{2} \int d^3y \left\{ \Gamma_a(x), \bar{\Psi}_b(y) \beta_{bc}^k (\partial_k^y \psi_c(y)) \right\} \\
&\quad + \frac{i}{2} \int d^3y \left\{ \Gamma_a(x), (\partial_k^y \bar{\Psi}_b(y)) \beta_{bc}^k \psi_c(y) \right\} \\
&\quad + m \int d^3y \left\{ \Gamma_a(x), \bar{\Psi}_b(y) \psi_b(y) \right\} + \int d^3y \left\{ \Gamma_a(x), \bar{\Gamma}_b(y) \alpha_b(y) \right\} \\
&= -\frac{i}{2} \int d^3y \underbrace{\left\{ \pi_a(x), \bar{\Psi}_b(y) \right\}}_{-\delta_{ac} \delta^3(x-y)} \beta_{bc}^k (\partial_k^y \psi_c(y)) \\
&\quad + \frac{i}{2} \int d^3y \partial_k^y \left\{ \pi_a(x), \bar{\Psi}_b(y) \right\} \beta_{bc}^k \psi_c(y) \\
&\quad + m \int d^3y \left\{ \pi_a(x), \bar{\Psi}_b(y) \right\} \psi_b(y) + \int d^3y \underbrace{\left\{ \Gamma_a(x), \bar{\Gamma}_b(y) \right\}}_{i(\beta_0)_{ab} \delta^3(x-y)} \alpha_b(y) \\
&= \frac{i}{2} \beta_{ac}^k (\partial_k^x \psi_c(x)) - \frac{i}{2} \int d^3y \beta_{ac}^k \psi_c(y) \underbrace{\partial_k^y}_{-\partial_k^x} \delta^3(x-y) \\
&\quad - m \psi_a(x) + i(\beta_0)_{ab} \alpha_b(x) \\
&= \frac{i}{2} \beta_{ac}^k (\partial_k^x \psi_c(x)) + \frac{i}{2} \beta_{ac}^k (\partial_k^x \psi_c(x)) - m \psi_a(x) + i(\beta_0)_{ab} \alpha_b(x) \\
&= \left(i\beta_{ab}^k \partial_k^x - m\delta_{ab} \right) \psi_b(x) + i(\beta_0)_{ab} \alpha_b(x),
\end{aligned}$$

que en forma compacta se expresa como:

$$\dot{\Gamma}(x) = \left(i\beta^k \partial_k^x - m \right) \psi(x) + i\beta_0 \alpha(x) \approx 0. \quad (4.170)$$

No obstante, a pesar que las relaciones (4.169) y (4.170) establecen condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos primarios $(\Gamma, \bar{\Gamma})$, la singularidad de la matriz β_0 establece que nos todas las componentes de $(\alpha, \bar{\alpha})$ consiguen ser determinados. Una manera de determinar que multiplicadores de Lagrange son determinados y que condiciones pueden surgir

4.8. Formulaci3n Lagrangiana de la teor3a de DKP

para aquellos que no se pueden fijar resulta de la definici3n de los siguientes operadores:

$$P_1 \equiv \beta_0^2 \quad , \quad P_2 \equiv 1 - \beta_0^2. \quad (4.171)$$

A partir de la relaci3n anterior es posible deducir la siguientes propiedades para los operadores considerados:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= 1, \\ P_1^2 &= \beta_0 \underbrace{\beta_0^3}_{\beta_0} = \beta_0^2 = P_1, \\ P_2^2 &= (1 - \beta_0^2) (1 - \beta_0^2) = 1 - \beta_0^2 - \beta_0^2 + \beta_0 \underbrace{\beta_0^3}_{\beta_0} = 1 - \beta_0^2 = P_2, \\ P_1 P_2 &= \beta_0^2 (1 - \beta_0^2) = \beta_0^2 - \beta_0 \underbrace{\beta_0^3}_{\beta_0} = 0, \end{aligned} \quad (4.172)$$

donde la relaci3n (4.46) ha sido utilizada. Por lo tanto, el conjunto de ecuaciones (4.172) indican que el sistema de operadores (P_1, P_2) definen un par de proyectores. Re escribiendo las ecuaciones (4.46) en la siguiente forma

$$i\beta_0 \alpha(x) = - \left(i\beta^k \partial_k^x - m \right) \psi(x) \approx 0, \quad (4.173)$$

$$i\bar{\alpha}(x) \beta_0 = -\bar{\psi}(x) \left(i\overleftarrow{\partial}_k^x \beta^k + m \right) \approx 0, \quad (4.174)$$

es posible determinar a partir de (4.173) que:

$$\beta_0^2 \alpha(x) = P_1 \alpha(x) = i\beta_0 \left(i\beta^k \partial_k^x - m \right) \psi(x) \approx 0, \quad (4.175)$$

lo cual permitir3a determinar algunas de las componentes del multiplicador de lagrange $\alpha(x)$. Ahora si aplicamos el operador $(1 - \beta_0^2)$ se deduce que:

$$i(1 - \beta_0^2) \beta_0 \alpha(x) = 0 = - \left(1 - \beta_0^2 \right) \left(i\beta^k \partial_k^x - m \right) \psi(x) \approx 0,$$

lo cual constituye una conjunto de relaciones entre las coordenadas del espacio de fase, es decir, de la consistencia del v3nculos primarios $\Gamma(x)$ resulta una agrupaci3n de v3nculos secundarios que se denoratan de la siguiente manera:

$$\Theta(x) \equiv \left(1 - \beta_0^2 \right) \left(i\beta_k \overrightarrow{\partial}_x^k - m \right) \psi(x) \approx 0. \quad (4.176)$$

Un análisis similar con la ecuación (4.174) permite concluir que:

$$\bar{\alpha}(x) \beta_0^2 = \bar{\alpha}(x) P_1 = i\bar{\psi}(x) \left(i \overleftarrow{\partial}_k \beta^k + m \right) \beta_0 \approx 0, \quad (4.177)$$

garantizando que se pueden fijar algunos de las componentes del multiplicando de Lagrange $\bar{\alpha}(x)$. Ahora, si aplicamos a la relación (4.174) el operador $(1 - \beta_0^2)$ por la derecha resulta que:

$$i\bar{\alpha}(x) \beta_0 (1 - \beta_0^2) = 0 = -\bar{\psi}(x) \left(i \overleftarrow{\partial}_k \beta^k + m \right) (1 - \beta_0^2) \approx 0,$$

de manera que un nuevo conjunto de vínculos secundarios resulta de la consistencia de $\bar{\Gamma}(x)$. A este nuevo conjunto se lo denotara como:

$$\bar{\Theta}(x) \equiv \bar{\psi}(x) \left(i \overleftarrow{\partial}_k \beta^k + m \right) (1 - \beta_0^2) \approx 0. \quad (4.178)$$

El numero de multiplicadores de lagrange que se consiguen determinar de las relaciones (4.175) y (4.177), al igual que el numero de vínculos secundarios que resultan de la consistencia de $(\Gamma, \bar{\Gamma})$, dependerá de la dimensión de los operadores (P_1, P_2) , es decir, de la representación de los campos de DKP.

Debido a la existencia de vínculos secundarios, la consistencia de los mismos deberá ser considerada, es decir, se exigirá que:

$$\dot{\Theta}(x) \approx 0 \quad , \quad \dot{\bar{\Theta}}(x) \approx 0. \quad (4.179)$$

Con el fin de calcular las relaciones anteriores, se utilizará las siguientes identidades que resultan de calcular los PB entre los vínculos secundarios y los vínculos primarios:

$$\begin{aligned} \left\{ \Theta_a(x), \bar{\Gamma}_b(y) \right\} &= \left[(1 - \beta_0^2) (i\beta_k \partial_x^k - m) \right]_{ac} \left\{ \psi_c(x), \bar{\pi}_b(y) \right\} \\ &= \left[(1 - \beta_0^2) (i\beta_k \partial_x^k - m) \right]_{ab} \delta^3(x - y), \\ \left\{ \bar{\Theta}_a(x), \Gamma_b(y) \right\} &= \left[\left(i \overleftarrow{\partial}_y^k \beta_k + m \right) (1 - \beta_0^2) \right]_{ca} \left\{ \bar{\psi}_c(x), \pi_b(y) \right\} \\ &= \left[\left(i \overleftarrow{\partial}_y^k \beta_k + m \right) (1 - \beta_0^2) \right]_{ab}^T \delta^3(x - y), \end{aligned} \quad (4.180)$$

4.8. Formulación Lagrangiana de la teoría de DKP

donde todas las otras posibles combinaciones de PB entre dichos vínculos es cero. Así, es posible mostrar que de la consistencia del vínculo secundario $\Theta(x)$ resulta que:

$$\begin{aligned}\dot{\Theta}_a(x) &= \left\{ \Theta_a(x), H_p \right\} = \int d^3y \left\{ \Theta_a(x), \bar{\Gamma}_b(y) \right\} \alpha_b(y) \\ &= \int d^3y \left(\left[(1 - \beta_0^2) (i\beta_k \partial_x^k - m) \right]_{ab} \delta^3(x - y) \right) \alpha_b(y) \\ &= \left(\left[(1 - \beta_0^2) (i\beta_k \partial_x^k - m) \right] \alpha(x) \right)_a,\end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{\Theta}(x) = (1 - \beta_0^2) (i\beta_k \partial_x^k - m) \alpha(x) \approx 0. \quad (4.181)$$

Igualmente, la consistencia sobre el vínculo $\bar{\Theta}(x)$ resulta en:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\Theta}}_a(x) &= \left\{ \bar{\Theta}_a(x), H_p \right\} = \int d^3y \bar{\alpha}_b(y) \left\{ \bar{\Theta}_a(x), \Gamma_b(y) \right\} \\ &= \int d^3y \bar{\alpha}_b(y) \left(\left[(i\partial_x^k \beta_k + m) (1 - \beta_0^2) \right]_{ba} \delta^3(x - y) \right) \\ &= \left(\bar{\alpha}(x) \left[(i\overleftarrow{\partial}_x^k \beta_k + m) (1 - \beta_0^2) \right] \right)_a,\end{aligned}$$

de manera que:

$$\dot{\bar{\Theta}}(x) = \bar{\alpha}(x) (i\overleftarrow{\partial}_x^k \beta_k + m) (1 - \beta_0^2) \approx 0. \quad (4.182)$$

Cuando se analiza (4.175) y (4.177) se puede observar que el proyector β_0^2 selecciona una componentes de los multiplicadores de Lagrange $\alpha(x)$, $\bar{\alpha}(x)$, en tanto que de las relaciones (4.181) y (4.182) es el otro proyector $(1 - \beta_0^2)$ que es utilizada y por que por tanto selecciona las componentes que aun hacían falta por determinar. Una manera de verificar la anteriores afirmaciones es considerar las representación de las matrices β^μ . Si consideramos en primer el caso cuando el campo de DKP esta asociado a los campos de espin 0, es posible

obtener la siguiente representación de los proyectores al utilizar (4.155):

$$\beta_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} - \beta_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (4.183)$$

de manera que a partir de las expresiones (4.175) y (4.177) se determinan las componentes (1,2) asociados a los multiplicadores de Lagrange $\alpha(x), \bar{\alpha}(x)$, mientras que a partir de las ecuaciones (4.181) y (4.182) se establecen relaciones para las componentes (3,4,5). Ahora, si el campo DKP describe partículas de espín 1, las matrices β^μ podrán tener la representación (4.156), de maneras que los proyectores en consideración tendrán la siguiente forma:

$$\beta_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} - \beta_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.184)$$

con lo cual, a partir de (4.175) y (4.177) se calculan las componentes (2,3,4,8,9,10), en tanto que de (4.181) y (4.182) se deducen las componentes (1,5,6,7) de los multiplicadores de Lagrange $\alpha(x), \bar{\alpha}(x)$.

Los resultados anteriores permiten asegurar que todas las componentes de los multiplicadores de Lagrange son determinados lo que al mismo tiempo garantiza que el conjunto de vínculos $(\Gamma(x), \bar{\Gamma}(x), \Theta(x), \bar{\Theta}(x))$ son de segunda clase. Estos vínculos primarios y secundarios serán agrupados y renombrados

4.8. Formulaci3n Lagrangiana de la teor3a de DKP

de la siguiente manera:

$$\theta_A(x) = (\theta_1(x), \theta_2(x), \theta_3(x), \theta_4(x)) \equiv (\Gamma(x), \Theta(x), \bar{\Gamma}(x), \bar{\Theta}(x)), \quad (4.185)$$

de manera que podamos construir una matriz de v3nculos de segunda clase con sus elementos definidos como:

$$G_{AB}(x, y) \equiv \{ \theta_A(x), \theta_B(y) \}. \quad (4.186)$$

A partir de los PB definidos por las relaciones (4.168) y (4.180) se puede mostrar que 3sta matriz tendr3 la siguiente estructura:

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}(x, y) \\ \mathbf{D}(x, y) & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.187)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(x, y) &\equiv \begin{pmatrix} i\beta_0 & (i\partial_x^k \beta_k - m)(1 - \beta_0^2) \\ (1 - \beta_0^2)(i\beta_k \partial_x^k - m) & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \\ \mathbf{D}(x, y) &\equiv \begin{pmatrix} -i\beta_0^T & [(1 - \beta_0^2)(i\beta_k \partial_x^k + m)]^T \\ [(i\partial_x^k \beta_k + m)(1 - \beta_0^2)]^T & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \end{aligned} \quad (4.188)$$

Con el fin de eliminar los v3nculos de segunda clase de la teor3a se deber3 introducir los Corchetes de Dirac DB, los cuales son definidos para dos variables din3micas $A(x) \equiv A[\psi(x), \bar{\psi}(x), \pi(x), \bar{\pi}(x)]$ y $B(x) \equiv B[\psi(x), \bar{\psi}(x), \pi(x), \bar{\pi}(x)]$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{ A_i(x), B_j(y) \}_D &= \{ A_i(x), B_j(y) \} - \int d^3u d^3v \{ A_i(x), \theta_A(u) \} \\ &\quad G_{AB}^{-1}(u, v) \{ \theta_B(v), B_j(y) \}, \end{aligned} \quad (4.189)$$

donde $G_{AB}^{-1}(x, y)$ denota la inversa de la matriz de v3nculos (4.187). bajo la definici3n de los DB (4.189) el conjunto de v3nculos $(\Gamma(x), \bar{\Gamma}(x), \Theta(x), \bar{\Theta}(x))$ se

tornan en identidades fuertes, de manera que podemos determinar la siguiente igualdad a partir de los vínculos primarios:

$$\bar{\pi}(x) = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta_0 \quad , \quad \pi(x) = -\frac{i}{2} \beta_0 \psi(x), \quad (4.190)$$

es decir, los momentos canónicos $(\pi(x), \bar{\pi}(x))$ se tornan en variables dependientes en la teoría. Ahora, a partir de las identidades fuertes que resultan de los vínculos secundarios se podrán extraer los verdaderos grados de libertad. Con el fin de calcular los correspondientes PD se debe especificar la representación del campo de DKP que se desea estudiar, en nuestro caso se desea analizar la representación asociada a campos de espín 0, de manera que los campos $(\psi(x), \bar{\psi}(x))$ están definidos por estar constituidos de cinco componentes. Por tanto, utilizando la representación matricial de las matrices β^μ dadas por (4.155), los vínculos $(\Theta_\alpha(x), \bar{\Theta}_\alpha(x))$ tendrán para $\alpha = 3, 4, 5$ las únicas componentes no triviales ya que como se menciono anteriormente, la consistencia de los vínculos $(\Theta(x), \bar{\Theta}(x))$ determina esas componentes de los multiplicadores de Lagrange $\alpha(x), \bar{\alpha}(x)$. Así, es posible mostrar que las matrices $\mathbf{C}(x, y)$ y $\mathbf{D}(x, y)$ tendrán la siguiente representación:

$$\mathbf{C}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & -i\partial_1^x & -i\partial_2^x & -i\partial_3^x \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m \\ i\partial_1^x & 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_2^x & 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

4.8. Formulación Lagrangiana de la teoría de DKP

$$\mathbf{D}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & i\partial_1^x & i\partial_2^x & i\partial_3^x \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \\ -i\partial_1^x & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\partial_2^x & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (4.191)$$

La matriz inversa asociada a $G(x, y)$ se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\int d^3z G(x, z) G^{-1}(z, y) = \int d^3z G^{-1}(x, z) G(z, y) = \mathbf{I} \delta^3(x - y), \quad (4.192)$$

donde \mathbf{I} representa la matriz identidad de dimensión 16×16 . A partir de la relación (4.192) y de la forma funcional de la matriz $G(x, y)$ dada por (4.187), la matriz $G^{-1}(x, y)$, tendrá la siguiente estructura:

$$G^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1}(x, y) \\ \mathbf{C}^{-1}(x, y) & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.193)$$

donde $\mathbf{C}^{-1}(x, y)$ y $\mathbf{D}^{-1}(x, y)$ son las matrices inversas correspondientes a $\mathbf{C}(x, y)$ y $\mathbf{D}(x, y)$ respectivamente y que tienen la siguiente elementos:

$$\mathbf{D}^{-1}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & \frac{1}{m}\partial_1^x & \frac{1}{m}\partial_2^x & \frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m}\partial_1^x & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m}\partial_2^x & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

$$C^{-1}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -\frac{1}{m}\partial_1^x & -\frac{1}{m}\partial_2^x & -\frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_1^x & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_2^x & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (4.194)$$

Ahora, con el fin de calcular los DB correspondientes a los campos se utilizara los siguientes PB:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_i(x), \theta_{3_l}(u) \right\} &= \left\{ \psi_i(x), \bar{\Gamma}_l(u) \right\} = \delta_{il} \delta^3(x - u), \\ \left\{ \theta_{1_l}(v), \bar{\Psi}_j(y) \right\} &= \left\{ \Gamma_l(v), \bar{\Psi}_j(y) \right\} = -\delta_{lj} \delta^3(v - y), \end{aligned} \quad (4.195)$$

con lo cual es posible determinar que el DB correspondientes a los campos de DKP $(\psi(x), \bar{\Psi}(x))$ es:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_i(x), \bar{\Psi}_j(y) \right\}_D &= \underbrace{\left\{ \psi_i(x), \bar{\Psi}_j(y) \right\}}_0 - \int d^3u d^3v \left\{ \psi_i(x), \theta_{A_l}(u) \right\} \\ &\quad G_{A_l B_m}^{-1}(u, v) \left\{ \theta_{B_m}(v), \bar{\Psi}_j(y) \right\} \\ &= - \int d^3u d^3v \underbrace{\left\{ \psi_i(x), \theta_{3_l}(u) \right\}}_{\delta_{il} \delta^3(x-u)} G_{3_l 1_m}^{-1}(u, v) \underbrace{\left\{ \theta_{1_m}(v), \bar{\Psi}_j(y) \right\}}_{-\delta_{lj} \delta^3(v-y)} \\ &= G_{3_l 1_j}^{-1}(x, y). \end{aligned} \quad (4.196)$$

De las relaciones (4.193) y (4.194) se determina que ésta submatriz tiene las

siguientes componentes:

$$\left\{ \psi_i(x), \bar{\psi}_j(y) \right\}_D = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -\frac{1}{m}\partial_1^x & -\frac{1}{m}\partial_2^x & -\frac{1}{m}\partial_3^x \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_1^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_2^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (4.197)$$

Todas las otras posibles combinaciones de DB entre los campos $(\psi(x), \bar{\psi}(x))$ son nulos. A partir de (4.197) es posible deducir el siguiente DB:

$$\left\{ \psi_0(x), \bar{\psi}_1(y) \right\}_D = -i\delta^3(x-y). \quad (4.198)$$

Con el fin de comparar con el resultado que se conoce para el campo escalar complejo se considerara la representaci3n del campo $\psi(x)$ dada por la expresi3n (4.126), con el cual es posible determinar $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\bar{\eta}^0$, donde la matriz $\bar{\eta}^0$ en la representaci3n considerada para las matrices β^μ tiene la forma:

$$\bar{\eta}^0 = 2\beta_0^2 - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.199)$$

De esta manera, los campos $(\psi(x), \bar{\psi}(x))$ se expresan, en componentes, de la siguiente manera:

$$\psi = \begin{pmatrix} \sqrt{m}\bar{\varphi} \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial_0\bar{\varphi} \\ -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_1\bar{\varphi} \\ -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_2\bar{\varphi} \\ -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_3\bar{\varphi} \end{pmatrix}, \quad (4.200)$$

$$\bar{\psi} = \left(\sqrt{m}\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_0\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_1\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_2\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_3\bar{\varphi}^* \right),$$

de manera que se puede determinar que: $\psi_0(x) = \sqrt{m}\bar{\varphi}(x)$ y $\bar{\psi}_1 = -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_0\bar{\varphi}^*(x)$,

de manera que el DB (4.198) se re escribe como:

$$\left\{ \bar{\varphi}(x), \partial_0 \bar{\varphi}^*(x) \right\}_D = \delta^3(x - y), \quad (4.201)$$

resultado que es coherente con la teoría que describe el campo escalar complejo. Los DB asociados a los momentos canónicos $(\pi(x), \bar{\pi}(x))$ podrán ser derivados a partir de las identidades (4.190). Un análisis equivalente deberá ser realizado si se espera que los campos de DKP describan partículas de espín 1, en éste caso se deberá considerar la representación de las matrices β^μ dadas por (4.156) con la relevancia que en éste caso la matriz de vínculos de segunda clase $G(x, y)$ es de 32×32 .

4.9. Interacción con Campo Electromagnético

La interacción de un campo de DKP con el campo electromagnético se estudia mediante la prescripción de acople mínimo, según el cual:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu, \quad (4.202)$$

en la correspondiente densidad Lagrangiana (4.157),

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu (D_\mu \psi) - \frac{i}{2} (\overline{D_\mu \psi}) \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu (D_\mu \psi) - \frac{i}{2} (D_\mu^* \bar{\psi}) \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi - \frac{i}{2} (\partial_\mu + ieA_\mu) \bar{\psi} \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \beta^\mu A_\mu \psi, \end{aligned} \quad (4.203)$$

de donde resulta el siguiente Lagrangiano de interacción:

$$\mathcal{L}_I = e \bar{\psi} \beta^\mu A_\mu \psi. \quad (4.204)$$

Por tanto, con el fin de recuperar el término de interacción en la teoría de KGF, se podría intentar usar la función de onda física para el campo de DKP

4.9. Interacción con Campo Electromagnético

$\psi(x)$ y $\bar{\psi}(x)$ expresadas por (4.200). Si se utiliza la representación (4.155) de las matrices β^μ , se deduce que:

$$\beta^\mu \mathcal{A}_\mu = \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 \\ \mathcal{A}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{A}_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{A}_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathcal{A}_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.205)$$

de manera que:

$$\mathcal{L}_I = e\bar{\psi}\beta^\mu\mathcal{A}_\mu\psi = ie\mathcal{A}_\mu \left[\bar{\varphi}^*(x) \partial^\mu\bar{\varphi}(x) - \partial^\mu\bar{\varphi}^*(x) \bar{\varphi}(x) \right]. \quad (4.206)$$

La relación anterior se diferencia del Lagrangiano de interacción de la teoría de KGF,

$$\mathcal{L}_{\text{KGF}} = ie\mathcal{A}^\mu \left[\bar{\varphi}^* \partial_\mu\bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial_\mu\bar{\varphi}^* \right] + g^2\mathcal{A}_\mu\mathcal{A}^\mu\bar{\varphi}\varphi^*, \quad (4.207)$$

en el término cuadrático. Entonces, éste resultado da a entender que la equivalencia entre la teoría de DKP y la teoría de KGF solo es valido en el caso libre. No obstante, se mostrará que ésta diferencia resulta del la incorrecta manera de usar la forma física del campo DKP (4.126) ya que ésta ya no es valido mas, por e hecho de que su derivación fue valida para campos libres.

Notemos en primer lugar que la expresión (4.126) para la forma física del campo es inconsistente con la invariancia de gauge que deberá poseer la teoría. Bajo una transformación de gauge local el campos de DKP debe comportarse como:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x), \quad (4.208)$$

siendo que las componentes físicas deberán transformar de la siguiente manera:

$$\bar{\varphi}(x) \rightarrow \bar{\varphi}'(x) = e^{ie\alpha(x)}\bar{\varphi}(x). \quad (4.209)$$

Ahora, usando propiedad de transformación del campo $\bar{\varphi}(x)$ en la expresión

(4.126) para la forma física del campo de DKP se obtiene:

$$\begin{aligned}\psi'(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{m}\bar{\varphi}'(\mathbf{x}) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial^\mu\bar{\varphi}'(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m}e^{ie\alpha(\mathbf{x})}\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}e^{ie\alpha(\mathbf{x})}\partial^\mu\bar{\varphi}(\mathbf{x}) - \frac{e}{\sqrt{m}}\partial^\mu\alpha(\mathbf{x})e^{ie\alpha(\mathbf{x})}\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \\ &\neq e^{ie\alpha(\mathbf{x})} \begin{pmatrix} \sqrt{m}\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial^\mu\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

lo que da a entender que la expresión que fue derivada en el caso libre ya no es válida en la presencia de interacción. Una manera de dar solución a éste problema consiste en cambiar la forma física del campo $\psi(\mathbf{x})$ y reemplazando por:

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sqrt{m}\bar{\varphi}'(\mathbf{x}) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}D^\mu\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad (4.210)$$

donde D^μ es la derivada covariante definida por (4.202), de manera que garantiza que:

$$\begin{aligned}\psi'(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} \sqrt{m}\bar{\varphi}' \\ \frac{i}{\sqrt{m}}D'^\mu\bar{\varphi}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{m}e^{ie\alpha}\bar{\varphi} \\ \frac{i}{\sqrt{m}}(\partial^\mu - ieA'^\mu)e^{ie\alpha}\bar{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{m}e^{ie\alpha(\mathbf{x})}\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}(e^{ie\alpha}\partial^\mu\bar{\varphi} + ie\partial^\mu\alpha e^{ie\alpha}\bar{\varphi} - ieA^\mu e^{ie\alpha}\bar{\varphi} + ie\partial^\mu\alpha e^{ie\alpha}\bar{\varphi}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{m}e^{ie\alpha(\mathbf{x})}\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}e^{ie\alpha}(\partial^\mu - ieA^\mu)\bar{\varphi} \end{pmatrix} = e^{ie\alpha} \begin{pmatrix} \sqrt{m}\bar{\varphi}(\mathbf{x}) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}D^\mu\bar{\varphi} \end{pmatrix} \\ &= e^{ie\alpha}\psi,\end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta que la transformación del campo gauge es: $A_\mu(\mathbf{x}) \rightarrow A'_\mu(\mathbf{x}) = A_\mu(\mathbf{x}) - \partial_\mu\alpha(\mathbf{x})$. Por lo tanto, se puede garantizar la compatibilidad entre las dos transformaciones en (4.208) y (4.209).

Ahora, si se deriva la ecuación de campo a partir de la densidad Lagrangiana (4.203) se obtiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi} &= -\frac{i}{2}(\partial_\mu\bar{\psi})\beta^\mu - m\bar{\psi} + e\bar{\psi}\beta^\mu A_\mu, & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} &= \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^\mu, \\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\bar{\psi}} &= \frac{i}{2}\beta^\mu(\partial_\mu\psi) - m\psi + e\beta^\mu A_\mu\psi, & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})} &= -\frac{i}{2}\beta^\mu\psi,\end{aligned}$$

4.9. Interacción con Campo Electromagnético

de manera que:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = \frac{i}{2} \beta^\mu (\partial_\mu \psi) - m\psi + e\beta^\mu A_\mu \psi - \partial_\mu \left(-\frac{i}{2} \beta^\mu \psi \right) \\
 &= \left[i\beta^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) - m \right] \psi \\
 &= \left(i\beta^\mu D_\mu - m \right) \psi,
 \end{aligned}$$

es decir:

$$\left(i\beta^\mu D_\mu - m \right) \psi = 0. \quad (4.211)$$

Y en forma similar se deduce que:

$$\bar{\psi} \left(iD_\mu^* \beta^\mu + m \right) = 0. \quad (4.212)$$

Utilizando las relaciones (4.109) y (4.112), se deduce al aplicar los operadores P y P^μ a la ecuación de campos (4.211):

$$\begin{aligned}
 P\beta^\mu D_\mu \psi &= D_\mu (P^\mu \psi) = \frac{m}{i} (P\psi), \\
 (P^\mu \psi) &= \frac{i}{m} \underbrace{P^\mu \beta^\nu}_{P\eta^{\mu\nu}} D_\nu \psi = \frac{i}{m} D^\mu (P\psi),
 \end{aligned}$$

resultando en:

$$D_\mu (P^\mu \psi) = \frac{i}{m} D_\mu D^\mu (P\psi) = \frac{m}{i} (P\psi),$$

o

$$\left(D_\mu D^\mu + m^2 \right) (P\psi) = 0. \quad (4.213)$$

La relación anterior muestra que todos los elementos de la matriz columna $P\psi$ son campos escalares de masa m obedeciendo la ecuación de KGF con acoplamiento mínimo, en tanto que los elementos $P^\mu \psi$ son $\frac{i}{m}$ veces la derivada covariante del correspondiente elemento $P\psi$. Utilizando los mismos pasos y la misma representación de las matrices β^μ utilizadas para derivar (4.126) en el caso libre se puede determinar que la correcta forma física para el campo de

DKP ψ cuando esta presente la interacción con el campo electromagnético es dado por (4.210), siendo que

$$P\psi(x) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix}, \quad P^\mu\psi(x) = \frac{i}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} D^\mu\bar{\varphi}(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix}, \quad (4.214)$$

de manera que a partir de (4.213) se deduce:

$$\left(D_\mu D^\mu + m^2 \right) \bar{\varphi}(x) = 0. \quad (4.215)$$

Por lo tanto, para garantizar la iteración con un campo electromagnético en la teoría de DKP de forma coherente no es suficiente tener en cuenta la derivada covariante en la densidad Lagrangiana (4.203), lo cual lleva al Lagrangiano de interacción (4.204), sino que la forma física del campo de DKP ψ deberá poseer una derivada covariante entre sus componentes, como se indica en (4.210). Utilizando la versión correcta del campo DKP dada por (4.210) en la densidad Lagrangiana (4.203) permite determinar que:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \beta^\mu A_\mu \psi \\ &= \frac{i}{2} \left[i \bar{\varphi}^* \partial^\mu D_\mu \bar{\varphi} - i D_\mu^* \bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} \right] - \frac{i}{2} \left[-i (\partial^\mu D_\mu^* \bar{\varphi}^*) \bar{\varphi} + i \partial^\mu \bar{\varphi}^* D_\mu \bar{\varphi} \right] \\ &\quad - m \left[m \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} + \frac{1}{m} D_\mu^* \bar{\varphi}^* D^\mu \bar{\varphi} \right] + e \left[i A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \partial^\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\varphi}^* \partial^\mu D_\mu \bar{\varphi} + \bar{\varphi} (\partial^\mu D_\mu^* \bar{\varphi}^*) \right] + \frac{1}{2} \left[\partial^\mu \bar{\varphi} D_\mu^* \bar{\varphi}^* + \partial^\mu \bar{\varphi}^* D_\mu \bar{\varphi} \right] \\ &\quad - m^2 \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} - D_\mu^* \bar{\varphi}^* D^\mu \bar{\varphi} + ie A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \partial^\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\varphi}^* \partial^\mu D_\mu \bar{\varphi} + \bar{\varphi} (\partial^\mu D_\mu^* \bar{\varphi}^*) \right] - m^2 \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} + \partial^\mu \bar{\varphi} \partial_\mu \bar{\varphi}^* \\ &\quad + \frac{1}{2} ie A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial^\mu \bar{\varphi}^* \right) - \partial_\mu \bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} \\ &\quad - ie A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial_\mu \bar{\varphi}^* \right) + e^2 A^\mu A_\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} + ie A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \partial^\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left[\bar{\varphi}^* \partial^\mu D_\mu \bar{\varphi} + \bar{\varphi} (\partial^\mu D_\mu^* \bar{\varphi}^*) \right] - m^2 \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} + \frac{1}{2} ie A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial^\mu \bar{\varphi}^* \right) \\ &\quad + e^2 A^\mu A_\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} \end{aligned}$$

4.9. Interacción con Campo Electromagnético

Integrando por partes el primer término de la relación anterior se deduce:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[\partial^\mu \bar{\varphi}^* D_\mu \bar{\varphi} + \partial^\mu \bar{\varphi} D_\mu^* \bar{\varphi}^* \right] - \frac{1}{2} \partial^\mu \left[\bar{\varphi}^* D_\mu \bar{\varphi} + \bar{\varphi} D_\mu^* \bar{\varphi}^* \right] \\ & - m^2 \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} + \frac{1}{2} ie A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial^\mu \bar{\varphi}^* \right) - e^2 A^\mu A_\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, a excepción de un término de frontera la densidad lagrangiana se expresa como,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[2\partial^\mu \bar{\varphi}^* \partial_\mu \bar{\varphi} + ie A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial^\mu \bar{\varphi}^* \right) \right] \\ & - m^2 \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} + \frac{1}{2} ie A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial^\mu \bar{\varphi}^* \right) + e^2 A^\mu A_\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} \\ = & \partial^\mu \bar{\varphi}^* \partial_\mu \bar{\varphi} - m^2 \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} + ie A_\mu \left(\bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial^\mu \bar{\varphi}^* \right) + e^2 A^\mu A_\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi}, \end{aligned}$$

a partir del cual se puede identificar el correcto Lagrangiano de Interacción de la teoría de DKP expresada anteriormente por (4.207). Entonces, utilizando la correcta forma física del campo de DKP $\psi(x)$ en el caso de acoplamiento mínimo, es posible recuperar el Lagrangiano de la teoría de KGF con el apropiado término de interacción, así, la equivalencia de esas teorías se mantiene tanto en el caso libre como también cuando esta presente una interacción con campo electromagnético. El hecho de utilizar la forma física del campo de DKP del caso libre resulta en inconsistencias cuando el campo electromagnético esta presente y que además de incompatibilidad con la invariancia de gauge de la teoría.

Capítulo 5

Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) Libre en las Coordenadas de Plano Nulo

5.1. Introducción

El éxito alcanzado por la ecuación de Dirac con el fin de describir partículas relativistas de espín $\frac{1}{2}$ consiguió inspirar a algunos investigadores a buscar una ecuación de onda de primer orden que pudiera describir partículas de espín 0 y espín 1. Fue así que G. Petiau [83], R. Duffin [84], and N. Kemmer [85] propusieron una ecuación de primer orden que describiría ésta clase de partículas de una manera unificada y siguiendo las ideas propuestas en el trabajo de de Broglie [86]. La ecuación de primer orden es conocida como teoría DKP y su estructura es muy similar a la ecuación de Dirac pero con una álgebra matricial diferente. La característica de la teoría es que su representación, en un

espacio-tiempo $(3 + 1)$ dimensional, puede ser descompuesta en tres representaciones irreducibles: La representación 5×5 que se asocia a las partículas de espín 0, la representación 10×10 correspondiente a partículas de espín 1 y finalmente la representación 1×1 que es trivial y la cual no tiene ningún significado físico.

Durante el periodo de 1939 hasta aproximadamente 1970 la mayoría de los trabajos relacionados a la ecuación de DKP fueron direccionados al desarrollo del formalismo y la investigación de partículas cargadas DKP en interacción con un campo electromagnético. Cálculos basados en las ecuaciones de KGF y DKP para diferentes procesos dieron idénticos resultados, algunos de ellos consideraban correcciones a un loop [87]. Una importante contribución para entender estas cuestiones fue hecha por A. Wightman [88], quien mostró que cuando el campo DKP tiene un acoplamiento mínimo con el campo electromagnético, la ecuación DKP para partículas de espín 0 es estable bajo una suave perturbación local de campos externos.

En este capítulo se estudiara la estructura del campo DKP libre en el formalismo de plano nulo [89]. En primer lugar se realizará el análisis de la teoría de $1 + 1$ dimensiones y posteriormente se extenderá a $3 + 1$ dimensiones.

5.2. Ecuación de DKP en $1 + 1$ Dimensiones

En $1 + 1$ dimensiones la métrica $g^{\mu\nu}$ posee las siguientes componentes en las coordenadas de plano nulo: $\mu, \nu = +, -$, de manera que su representación matricial es de la forma:

$$g^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

De la relación anterior se puede determinar que del álgebra de las matrices β^μ :

$$\beta^\mu \beta^\alpha \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\alpha \beta^\mu = \beta^\mu g^{\alpha\nu} + \beta^\nu g^{\alpha\mu}, \quad (5.2)$$

5.2. Ecuación de DKP en 1 + 1 Dimensiones

se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \beta^+ \beta^- \beta^+ &= \beta^+ \quad , \quad \beta^- \beta^+ \beta^- = \beta^- \\ \beta^+ (\beta^-)^2 + (\beta^-)^2 \beta^+ &= \beta^- \quad , \quad \beta^- (\beta^+)^2 + (\beta^+)^2 \beta^- = \beta^+ \\ (\beta^+)^3 &= 0 \quad , \quad (\beta^-)^3 = 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

En un espacio-tiempo dos dimensional el campo DKP $\psi(x)$ se expresa como una vector de tres componentes con la siguiente representación matricial:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi^+(x) \\ \psi^-(x) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

A fin de seleccionar la función de onda de espín 0, se introduce los operadores de proyección P y P^μ definidos por las relaciones (4.107) y (4.109) de manera que su naturaleza sea:

$$P\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0_{2 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P^\mu\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ 0_{2 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Teniendo en cuenta la expresión (5.4), el conjunto de operadores (P, P^+, P^-) deberán seleccionar las componentes del campo DKP de la siguiente forma:

$$P\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P^+\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P^-\psi = \begin{pmatrix} \psi^- \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

con lo cual, una apropiada representación matricial de (P, P^+, P^-) es de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad P^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

La expresión anterior permite introducir la forma matricial de las matrices (β^+, β^-) como siendo:

$$\beta^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

5.2.1. Estructura de Vínculos

La densidad Lagrangiana asociada al campo DKP en $1 + 1$ dimensiones en las coordenadas de plano nulo se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ (\partial_+ \psi) - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\psi}) \beta^+ \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^- (\partial_- \psi) - \frac{i}{2} (\partial_- \bar{\psi}) \beta^- \psi - m \bar{\psi} \psi. \end{aligned} \quad (5.9)$$

A partir de (5.9) se puede determinar los momentos canónicos (\bar{p}, p) conjugados a los campos $(\psi, \bar{\psi})$, los cuales son definidos de la siguiente forma:

$$\bar{p} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \quad , \quad p \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{i}{2} \beta^+ \psi. \quad (5.10)$$

La expresión (5.10) indica que el conjunto de variables $(\psi, \bar{\psi}, \bar{p}, p)$ que definen el espacio de fase de la teoría DKP libre no es linealmente independiente. Estas ecuaciones establecen que existen un conjunto de vínculos primarios que se definirán de la siguiente forma:

$$\theta \equiv p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0 \quad , \quad \bar{\theta} \equiv \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0. \quad (5.11)$$

Teniendo en cuenta la representación (5.4), la dimensión del espacio de fase de la teoría DKP es 12, con lo cual se puede concluir que el número de vínculos primarios deducidos en la expresión (5.11) es 6. Ahora, se procede a calcular la consistencia de conjunto de vínculos primarios aplicando el método de Dirac

5.2. Estructura de Vínculos

[90], para ello, se calcula la densidad Hamiltoniana canónica de la teoría en las coordenadas de plano nulo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{H}_C &\equiv \bar{p}\dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}}p - \mathcal{L} \\
 &= \frac{i}{2} \bar{\psi}\beta^+\dot{\psi} - \frac{i}{2}\dot{\bar{\psi}}\beta^+\psi - \left[\frac{i}{2} \bar{\psi}\beta^+\dot{\psi} - \frac{i}{2}\dot{\bar{\psi}}\beta^+\psi \right. \\
 &\quad \left. \frac{i}{2} \bar{\psi}\beta^-(\partial_-\psi) - \frac{i}{2}(\partial_-\bar{\psi})\beta^-\psi + m\bar{\psi}\psi \right] \\
 &= \bar{\psi} \left[\frac{i}{2}\beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_- - \overrightarrow{\partial}_- \right) + m \right] \psi.
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

A partir de \mathcal{H}_C se puede introducir el Hamiltoniano canónico, el cual se expresa como:

$$H_C = \int dx^- \mathcal{H}_C = \int dx^- \bar{\psi} \left[\frac{i}{2}\beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_- - \overrightarrow{\partial}_- \right) + m \right] \psi. \tag{5.13}$$

El procedimiento de Dirac establece que debido a la presencia de los vínculos primarios (5.11), la dinámica de la teoría es gobernada por el Hamiltoniano primario el cual resulta de adicionar a H_C una combinación de los vínculos primarios, es decir:

$$H_P = H_C + \int dy^- \left[\bar{\lambda}(x) \theta(x) + \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right], \tag{5.14}$$

donde $(\bar{\lambda}, \lambda)$ son los multiplicadores de Lagrange asociados vínculos $(\bar{\lambda}, \lambda)$ respectivamente. Ahora, se procede a introducir los corchetes de Poisson fundamentales a tiempos iguales ($x^+ = y^+$) correspondientes al espacio de fase $(\psi, \bar{\psi}, \bar{p}, p)$ los cuales son definidos de la siguiente manera:

$$\left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta(x^- - y^-) \quad , \quad \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta(x^- - y^-). \tag{5.15}$$

A partir de (5.15) se puede mostrar fácilmente que el conjunto de vínculos primarios (5.11) satisface el siguiente conjunto de corchetes de Poisson:

$$\left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} = i\beta_{ab}^+ \delta(x^- - y^-) \quad , \quad \left\{ \bar{\theta}_a(x), \theta_b(y) \right\} = -i\beta_{ba}^+ \delta(x^- - y^-) \tag{5.16}$$

Teniendo los elementos necesarios, se procede a calcular la evolución temporal de los vínculos primarios (5.11) . En primer lugar, se considerará la consistencia de $\theta(x)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_a(x) &= \left\{ \theta_a(x), H_P \right\} \\
&= \int dy^- \left\{ \theta_a(x), \bar{\psi}(y) \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) + m \right] \psi(y) + \bar{\theta}_b(y) \lambda^b(y) \right\} \\
&= \int dy^- \left[\left\{ \theta_a(x), \bar{\psi}_b(y) \right\} \left(\left[\frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) \beta^- + m \right] \psi(y) \right)_b \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} \lambda^b(y) \right] \\
&= \int dy^- \delta(x^- - y^-) \left\{ - \left[\frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) \beta^- + m \right] \psi(y) + i\beta^+\lambda(y) \right\}_a \\
&= \int dy^- \delta(x^- - y^-) \left\{ - \left[\frac{i}{2} \left(-\overleftarrow{\partial}_-^x - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) \beta^- + m \right] \psi(y) + i\beta^+\lambda(y) \right\}_a \\
&= \left[(\beta^- i\partial_-^x - m) \psi(x) + i\beta^+\lambda(x) \right]_a \\
&= \left[(\beta^- i\partial_-^x - m) \psi(x) + i\beta^+\lambda(x) \right]_a,
\end{aligned}$$

es decir,

$$\dot{\theta} = \left(\beta^- i\partial_-^x - m \right) \psi + i\beta^+\lambda \approx 0 \quad (5.17)$$

La expresión (5.17) establece una condición sobre el multiplicador de Lagrange θ , sin embargo, teniendo en cuenta que éste posee tres componentes, se espera que la ecuación anterior permita determinar de manera única cada una de ellas. No obstante, debido a la naturaleza singular de la matriz β^+ hace pensar que no todas las componentes de θ son determinadas a partir de la expresión (5.17). El análisis correspondiente se realizará dentro de poco.

5.2. Estructura de Vínculos

En forma similar, se calcula la consistencia de $\bar{\theta}(x)$,

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\theta}}_a(x) &= \left\{ \bar{\theta}_a(x), H_p \right\} \\
&= \int dy^- \left\{ \bar{\theta}_a(x), \bar{\psi}(y) \left[\frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) \beta^- + m \right] \psi(y) + \bar{\lambda}^a(y) \theta_a(y) \right\} \\
&= \int dy^- \left[\left(\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) \beta^- + m \right] \right)_b \left\{ \bar{\theta}_a(x), \psi_b \right\} \right. \\
&\quad \left. + \bar{\lambda}^a(y) \left\{ \bar{\theta}_a(x), \theta_a(y) \right\} \right] \\
&= \int dy^- \left\{ -\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) \beta^- + m \right] - i\bar{\lambda}(y) \beta^+ \right\}_a \delta(x^- - y^-) \\
&= \int dy^- \left\{ -\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_-^y + \overrightarrow{\partial}_-^x \right) \beta^- + m \right] - i\bar{\lambda}(y) \beta^+ \right\}_a \delta(x^- - y^-) \\
&= \left[-\bar{\psi}(x) (\beta^- i\partial_-^x + m) - i\bar{\lambda}(x) \beta^+ \right]_a \\
&= - \left[\bar{\psi}(x) (\beta^- i\partial_-^x + m) + i\bar{\lambda}(x) \beta^+ \right]_a,
\end{aligned}$$

de manera que,

$$\dot{\bar{\theta}} = \bar{\psi} \left(\beta^- i\partial_-^x + m \right) + i\bar{\lambda}\beta^+ \approx 0. \quad (5.18)$$

Equivalente al resultado de la consistencia del vínculo θ , la ecuación (5.18) indica una condición sobre el multiplicador de Lagrange $\bar{\theta}$, pero el carácter singular de la matriz β^+ implicara que sea necesario mostrar que todas las componentes de $\bar{\theta}$ están siendo o no determinadas por (5.18). Ahora, se procede a mostrar que a partir de las relaciones (5.17) y (5.18) se determinan únicamente algunas componentes de los multiplicadores de Lagrange $(\lambda, \bar{\lambda})$, para ello se utilizara la representación matricial de (β^+, β^-) y algunas propiedades que resultan de su álgebra como se indican en la ecuación (5.3). Definiendo los siguientes productos de matrices:

$$\begin{aligned}
A_1 &\equiv \beta^- \beta^+ \quad , \quad A_2 \equiv 1 - \beta^- \beta^+, \\
B_1 &\equiv \beta^+ \beta^- \quad , \quad B_2 \equiv 1 - \beta^+ \beta^-,
\end{aligned} \quad (5.19)$$

se puede determinar que

$$\begin{aligned}
 A_1^2 &= \beta^- \underbrace{\beta^+ \beta^- \beta^+}_{\beta^+} = \beta^- \beta^+ = A_1, \\
 A_2^2 &= (1 - \beta^- \beta^+)^2 = 1 - \beta^- \beta^+ - \beta^- \beta^+ + \beta^- \underbrace{\beta^+ \beta^- \beta^+}_{\beta^+} \\
 &= 1 - \beta^- \beta^+ = A_2, \\
 A_1 + A_2 &= 1.
 \end{aligned}$$

De forma similar se deduce:

$$\begin{aligned}
 B_1^2 &= \beta^+ \underbrace{\beta^- \beta^+ \beta^-}_{\beta^-} = \beta^+ \beta^- = B_1, \\
 B_2^2 &= (1 - \beta^+ \beta^-)^2 = 1 - \beta^+ \beta^- - \beta^+ \beta^- + \beta^+ \underbrace{\beta^- \beta^+ \beta^-}_{\beta^-} \\
 &= 1 - \beta^+ \beta^- = B_2, \\
 B_1 + B_2 &= 1.
 \end{aligned}$$

es decir, el conjunto de operadores (A_1, A_2, B_1, B_2) , constituye un grupo de proyectores diferentes a aquellos definidos por (5.5) y que poseen la siguiente representación matricial:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \beta^- \beta^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & A_2 &= 1 - \beta^- \beta^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 B_1 &= \beta^+ \beta^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & B_2 &= 1 - \beta^+ \beta^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

5.2. Estructura de Vínculos

Utilizando las expresiones (5.5) es posible deducir a partir de (5.17) que:

$$\begin{aligned}
 i\beta^- \beta^+ \lambda &= iA_1 \lambda \approx -\beta^- (\beta^- i\partial_-^x - m) \psi \Rightarrow \\
 i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & 0 & i\partial_-^x \\ i\partial_-^x & -m & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} i\lambda_1 \\ i\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m\psi_3 \\ m\psi_1 - i\partial_-^x \psi_3 \\ 0 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

estableciendo relaciones para las componentes (λ_1, λ_2) del multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$, en tanto que la componente λ_3 mantiene indeterminada y por tanto arbitraria. De igual manera, de la relación (5.18) se puede deducir:

$$\begin{aligned}
 i\bar{\lambda} \beta^+ \beta^- &= i\bar{\lambda} B_1 \approx -\bar{\psi} (-\beta^- i\partial_-^x + m) \beta^- \Rightarrow \\
 i \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & \bar{\lambda}_2 & \bar{\lambda}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} \bar{\psi}_1 & \bar{\psi}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m & 0 & -i\partial_-^x \\ -i\partial_-^x & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} i\bar{\lambda}_1 & 0 & i\bar{\lambda}_3 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} m\bar{\psi}_2 & 0 & m\bar{\psi}_1 - i\partial_-^x \bar{\psi}_2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

con lo cual las componentes $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_3)$ correspondientes al multiplicador $\bar{\lambda}(x)$ pueden ser fijadas en tanto que $\bar{\lambda}_2$ esta un por ser determinada. Los resultados anteriores dan a entender que deben existir un nuevo conjunto de vínculos secundarios que garanticen que se puedan fijarlas componentes λ_3 y $\bar{\lambda}_2$.

Las componentes restantes se pueden deducir utilizando los proyectores complementarios, con lo cual se pueden introducir un nuevo conjunto de vínculos que definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \omega_a &= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- i\partial_-^x - m) \psi \right]_a \approx 0, \quad a = 2, \quad (5.21) \\
 \bar{\omega}_a &= \left[\bar{\psi} (i\partial_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_a \approx 0, \quad a = 3,
 \end{aligned}$$

siendo que los valores $a = 2$ y $a = 3$ son consecuencia de la representación matricial (5.20). Ahora, se procede a calcular la consistencia de los vínculos

secundarios, para ello sera útil las siguientes corchetes de Poisson diferentes de cero entre los vínculos primarios y secundarios que la teoría posee:

$$\begin{aligned}
\left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- i \partial_-^x - m) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \bar{\theta}_a(x), \omega_b(y) \right\} &= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- i \partial_-^x + m) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[(i \partial_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \theta_a(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= \left[(i \partial_-^x \beta^- - m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-).
\end{aligned} \tag{5.22}$$

A partir de (5.22), se puede determinar de la consistencia del vínculo $\omega(x)$ que:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_a(x) &= \{ \omega_a(x), H_P \} = \int dy^- \{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \} \lambda^b(y) \\
&= \int dy^- \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- i \partial_-^x - m) \lambda(y) \right]_a \delta(x^- - y^-) \\
&= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- i \partial_-^x - m) \lambda(x) \right]_a, \quad \Rightarrow
\end{aligned}$$

siendo que $a = 2$, de manera que

$$\dot{\omega} = (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- i \partial_-^x - m) \lambda \approx 0 \tag{5.23}$$

Utilizando la representación matricial de los proyectores, se deduce que

$$(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- i \partial_-^x - m) \lambda = \begin{pmatrix} 0 & \\ i \partial_-^x \lambda_1 - m \lambda_2 & \\ & 0 \end{pmatrix} \approx 0,$$

de manera que una nueva relación entre las componentes (λ_1, λ_2) se ha generado. Sin embargo, al usar la relación (5.3) se puede determinar la siguiente identidad entre las matrices (β^+, β^-) :

$$(\beta^+)^2 (\beta^-)^2 + \beta^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = \beta^+ \beta^- \quad , \quad \beta^- (\beta^+)^2 \beta^- + (\beta^+)^2 (\beta^-)^2 = \beta^+ \beta^-,$$

de manera que:

$$\beta^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = \beta^- (\beta^+)^2 \beta^-. \tag{5.24}$$

5.2. Estructura de Vínculos

Así que de la consistencia del vínculo $\omega(x)$ se deduce:

$$\begin{aligned}
 \beta^+ \dot{\omega} &= \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) \left(\beta^- i \partial_-^x \lambda - m \lambda \right) \\
 &= \beta^- \beta^{+2} \left(\beta^- i \partial_-^x - m \lambda \right) \\
 &= \beta^- \beta^{+2} \beta^- i \partial_-^x \lambda - m \beta^- \beta^{+2} \lambda \\
 &= -i \beta^+ \beta^{-2} i \partial_-^x (i \beta^+ \lambda) + i m \beta^- \beta^+ (i \beta^+ \lambda).
 \end{aligned}$$

A partir de la expresión (5.17) se puede verificar que:

$$\begin{aligned}
 \beta^+ \dot{\omega} &= i \beta^+ \beta^{-2} i \partial_-^x \left[(\beta^- i \partial_-^x - m) \psi \right] - i m \beta^- \beta^+ \left[(\beta^- i \partial_-^x - m) \psi \right] \\
 &= i \beta^+ \underbrace{\beta^{-3}}_{=0} i \partial_-^x i \partial_-^x \psi - m i \beta^+ \beta^{-2} i \partial_-^x \psi - i m \beta^- \beta^+ (\beta^- i \partial_-^x - m) \psi \\
 &= -m i \beta^+ \beta^{-2} i \partial_-^x \psi - i m \beta^- i \partial_-^x \psi + i m^2 \beta^- \beta^+ \psi \\
 &= -i m (1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- i \partial_-^x \psi + i m^2 \beta^- \beta^+ \psi \\
 &= -i m (1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- i \partial_-^x \psi + i m^2 \beta^- \beta^+ \psi \\
 &\approx 0,
 \end{aligned}$$

de manera que un vínculo terciario a resultado en la teoría al cual se identificara como:

$$\Omega \equiv \left[-m (1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- i \partial_-^x + m^2 \beta^- \beta^+ \right] \psi \approx 0 \quad (5.25)$$

En forma similar, al analizar la consistencia del vínculo $\bar{\omega}(x)$ se establece que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\omega}}_a(x) &= \left\{ \bar{\omega}_a(x), H_p \right\} = \int dy \bar{\lambda}^b(y) \left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} \\
 &= \int dy^- \left[\bar{\lambda}^b(y) (i \partial_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_a \delta(x^- - y^-) \\
 &= \left[\bar{\lambda} (i \partial_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_a \approx 0,
 \end{aligned}$$

donde $a = 3$. Por tanto,

$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\lambda} (i \partial_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) \approx 0. \quad (5.26)$$

Utilizando la representación matricial considerada con anterioridad es posible observar que:

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}(i\partial_-^x \beta^- + m)(1 - \beta^- \beta^+) &= \left[i\partial_-^x (\bar{\lambda}_1 \ \bar{\lambda}_2 \ \bar{\lambda}_3) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + m (\bar{\lambda}_1 \ \bar{\lambda}_2 \ \bar{\lambda}_3) \right] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= (0 \ 0 \ i\partial_-^x \bar{\lambda}_1 + m\bar{\lambda}_3) \\
&\approx 0,
\end{aligned}$$

garantizando así una nueva relación entre los multiplicadores de lagrange $(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_3)$. Ahora, al analizar la ecuación de consistencia del vínculo $\bar{\omega}(x)$ se determina que

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\omega}}\beta^+ &= [\bar{\lambda}(i\partial_-^x \beta^- + m)] (1 - \beta^- \beta^+) \beta^+ \\
&= [\bar{\lambda}(i\partial_-^x \beta^- + m)] \beta^{+2}\beta^- \\
&= i\partial_-^x \bar{\lambda}\beta^- \beta^{+2}\beta^- + m\bar{\lambda}\beta^{+2}\beta^- \\
&= \partial_-^x (i\bar{\lambda}\beta^+) \beta^{-2}\beta^+ - im(i\bar{\lambda}\beta^+) \beta^+\beta^-.
\end{aligned}$$

Si la ecuación (5.18) se utiliza es posible determinar que:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\omega}}\beta^+ &= \partial_-^x [\bar{\psi}(-i\partial_-^x \beta^- + m)] \beta^{-2}\beta^+ + im[\bar{\psi}(-\beta^- i\partial_-^x + m)] \beta^+\beta^- \\
&= -i\partial_-^x \partial_-^x \bar{\psi} \underbrace{\beta^{-3}}_{=0} \beta^+ + m\partial_-^x \bar{\psi} \beta^{-2}\beta^+ - imi\partial_-^x \bar{\psi} \beta^- \beta^+ \beta^- + im^2 \bar{\psi} \beta^+ \beta^- \\
&= imi\partial_-^x \bar{\psi} \beta^- (1 + \beta^- \beta^+) + im^2 \bar{\psi} \beta^+ \beta^- \\
&= imi\partial_-^x \bar{\psi} \beta^- (1 + \beta^- \beta^+) + im^2 \bar{\psi} \beta^+ \beta^- \\
&= imi\partial_-^x \bar{\psi} \beta^- (1 + \beta^- \beta^+) + im^2 \bar{\psi} \beta^+ \beta^- \\
&\approx 0,
\end{aligned}$$

resultando en un nuevo vínculo terciario que se definirá en la forma

$$\bar{\Omega} \equiv \bar{\psi} \left[m\beta^- (1 + \beta^- \beta^+) i\partial_-^x + m^2 \beta^+ \beta^- \right] \approx 0 \quad (5.27)$$

5.2. Estructura de Vínculos

Si el procedimiento de Dirac es nuevamente tenido en cuenta, se debe estudiar la consistencia del nuevo conjunto de vínculos $(\Omega, \bar{\Omega})$, para ello se deberá considerar los corchetes de Poisson entre estos vínculos y los vínculos primarios, es decir:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[-m(1 + \beta^+\beta^-) \beta^- i\partial_-^x + m^2\beta^-\beta^+ \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \bar{\theta}_a(x), \Omega_b(y) \right\} &= -\left\{ \Omega_b(y), \bar{\theta}_a(x) \right\} \\
 &= \left[-m(1 + \beta^+\beta^-) \beta^- i\partial_-^x - m^2\beta^-\beta^+ \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[m\beta^- (1 + \beta^-\beta^+) i\partial_-^x + m^2\beta^+\beta^- \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \theta_a(x), \bar{\Omega}_b(y) \right\} &= -\left\{ \bar{\Omega}_b(y), \theta_a(x) \right\} \\
 &= \left[m\beta^- (1 + \beta^-\beta^+) i\partial_-^x - m^2\beta^+\beta^- \right]_{ab} \delta(x^- - y^-).
 \end{aligned} \tag{5.28}$$

Los resultados anteriores permiten determinar que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega}_a(x) &= \left\{ \Omega_a(x), H_p \right\} = \int dy^- \left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}^b(y) \right\} \lambda_b(y) \\
 &= \int dy^- \left[-im(1 + \beta^+\beta^-) \beta^- \lambda(y) i\partial_-^x + im^2\beta^-\beta^+ \lambda(y) \right]_a \delta(x^- - y^-) \\
 &= \left[\left(-im(1 + \beta^+\beta^-) \beta^- i\partial_-^x + im^2\beta^-\beta^+ \right) \lambda(x) \right]_a,
 \end{aligned}$$

de manera que

$$\dot{\Omega} = \left[-m(1 + \beta^+\beta^-) \beta^- i\partial_-^x + m^2\beta^-\beta^+ \right] \lambda \approx 0. \tag{5.29}$$

Ahora, utilizando la representación matricial considerada se determina que:

$$\begin{aligned}
 \left[-m(1 + \beta^+\beta^-) \beta^- i\partial_-^x + m^2\beta^-\beta^+ \right] \lambda &= \begin{pmatrix} m^2\lambda_1 - i2m\partial_-^x\lambda_3 \\ -im\partial_-^x\lambda_1 + m^2\lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\approx 0,
 \end{aligned}$$

lo que establece una condición sobre la componente $\lambda_3(x)$ correspondiente al multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ que faltaba por determinar. De manera similar se puede deducir que:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\Omega}}_a(x) &= \left\{ \bar{\Omega}_a(x), H_P \right\} = \int dy^- \bar{\lambda}^b(y) \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} \\ &= \int dy^- \left[\bar{\lambda}(y) \left[m\beta^- (1 + \beta^- \beta^+) i\partial_-^x + m^2 \beta^+ \beta^- \right] \right]_a \delta(x^- - y^-) \\ &= \left[\bar{\lambda}(x) \left[m\beta^- (1 + \beta^- \beta^+) i\partial_-^x + m^2 \beta^+ \beta^- \right] \right]_a,\end{aligned}$$

entonces,

$$\dot{\bar{\Omega}} = \bar{\lambda} \left[m\beta^- (1 + \beta^- \beta^+) i\partial_-^x + m^2 \beta^+ \beta^- \right] \approx 0. \quad (5.30)$$

que en forma explícita se expresa:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda} \left[m\beta^- (1 + \beta^- \beta^+) i\partial_-^x + m^2 \beta^+ \beta^- \right] &= (m^2 \bar{\lambda}_1 + i2m\partial_-^x \bar{\lambda}_2 \quad 0 \quad im\partial_-^x \bar{\lambda}_1 + m^2 \bar{\lambda}_3) \\ &\approx 0,\end{aligned}$$

Así, una condición sobre $\bar{\lambda}_2(x)$, componente del multiplicador de Lagrange $\bar{\lambda}(x)$, es determinada, de tal manera que la arbitrariedad sobre éste multiplicador es eliminada. Por tanto, no más vínculos son generados en la teoría por el hecho que las condiciones de consistencia establecen relaciones para todas las componentes de los multiplicadores de Lagrange $(\lambda, \bar{\lambda})$. Este hecho permite garantizar que el conjunto completo de vínculos de la teoría DKP libre en las coordenadas de plano nulo:

$$\begin{aligned}\theta &= p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0, \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0 \\ \omega &= (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- i\partial_-^x - m) \psi \approx 0, \\ \bar{\omega} &= \bar{\psi} (i\partial_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) \approx 0, \\ \Omega &= \left[-m(1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- i\partial_-^x + m^2 \beta^- \beta^+ \right] \psi \approx 0, \\ \bar{\Omega} &= \bar{\psi} \left[m\beta^- (1 + \beta^- \beta^+) i\partial_-^x + m^2 \beta^+ \beta^- \right] \approx 0.\end{aligned} \quad (5.31)$$

5.2. Estructura de Vínculos

son de segunda clase, ya que los PB entre ellos,

$$\begin{aligned}
 \left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= i\beta_{ab}^+ \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- i\partial_-^x - m) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[(\beta^- i\partial_-^x + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[-m (1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- i\partial_-^x + m^2 \beta^- \beta^+ \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[m\beta^- (1 + \beta^- \beta^+) i\partial_-^x + m^2 \beta^+ \beta^- \right]_{ba} \delta(x^- - y^-).
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

Ahora, bajo la definición del conjunto (5.31) se puede demostrar la equivalencia de la dinámica formulada a partir del Hamiltoniano primario y las ecuaciones de campo que resultan de la formulación Lagrangiana. Por tanto, se determina que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_a(x) &= \left\{ \psi_a(x), H_P \right\} = \int dy \left\{ \psi_a(x), \bar{\theta}(y) \lambda(y) \right\} \\
 &= \int dy \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} \lambda_b(y) = \int dy \lambda_a(y) \delta(x^- - y^-) \\
 &= \lambda_a(x),
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\dot{\psi}(x) = \lambda(x). \tag{5.33}$$

La dinámica del campo $\bar{\psi}(x)$ implica que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\psi}}_a(x) &= \left\{ \bar{\psi}_a(x), H_E \right\} = \int dy^- \left\{ \bar{\psi}_a(x), \bar{\lambda}(y) \theta(y) \right\} \\
 &= \int dy^- \bar{\lambda}_b(y) \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} = \int dy^- \bar{\lambda}_a(y) \delta(x^- - y^-) \\
 &= \bar{\lambda}_a(x),
 \end{aligned}$$

con lo cual,

$$\dot{\bar{\psi}}(x) = \bar{\lambda}(x). \tag{5.34}$$

Un análisis similar realizado a los momentos canónicos conjugados a los campos $(\psi, \bar{\psi})$ garantiza que:

$$\begin{aligned}
\dot{p}_a(x) &= \{p_a(x), H_E\} = \int dy^- \left\{ p_a(x), \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- (\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y) + m \right] \psi + \bar{\theta}(y) \lambda(y) \right\} \\
&= \int dy^- \left[\left\{ p_a(x), \bar{\psi}_b(y) \right\} \left(\left[\frac{i}{2} \beta^- (\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y) + m \right] \psi \right)_b \right. \\
&\quad \left. - \frac{i}{2} \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_c(y) \right\} \beta_{cb}^+ \lambda_b(y) \right] \\
&= \int dy^- \delta(x^- - y^-) \left[- \left[\frac{i}{2} \beta^- (\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y) + m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda(y) \right]_a \\
&= \int dy^- \delta(x^- - y^-) \left[- \left[\frac{i}{2} \beta^- (-\overleftarrow{\partial}_-^x - \overrightarrow{\partial}_-^y) + m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda(y) \right]_a \\
&= \left[(\beta^- i \partial_-^x - m) \psi(x) + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda(x) \right]_a,
\end{aligned}$$

de manera que

$$\dot{p}(x) = \partial_+ p(x) = (\beta^- i \partial_- - m) \psi(x) + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda(x). \quad (5.35)$$

Utilizando la expresión (5.33) y la ecuación asociada al vínculos primario, es posible mostrar a partir de (5.35):

$$(\beta^- i \partial_- - m) \psi(x) + \frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi(x) \approx -\frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi(x),$$

de manera que

$$\beta^+ i \partial_+ \psi(x) + (\beta^- i \partial_- - m) \psi(x) = (\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) \approx 0. \quad (5.36)$$

5.2. Proyección de los Vínculos y Corchetes de Dirac

Si la dinámica del momento $\bar{p}(x)$ se encuentra:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{p}}_a(x) &= \left\{ \bar{p}_a(x), H_E \right\} = \int dy^- \left\{ \bar{p}_a(x), \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) + m \right] \psi + \bar{\lambda}(y) \theta(y) \right\} \\
 &= \int dy^- \left[\left(\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) + m \right] \right)_b \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_b(y) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i}{2} \bar{\lambda}_b(y) \beta_{bc}^+ \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_c(y) \right\} \right] \\
 &= \int dy^- \left[-\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) + m \right] - \frac{i}{2} \bar{\lambda}(y) \beta^+ \right]_a \delta(x^- - y^-) \\
 &= \int dy^- \left[-\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_-^y + \overrightarrow{\partial}_-^y \right) + m \right] - \frac{i}{2} \bar{\lambda}(y) \beta^+ \right]_a \delta(x^- - y^-) \\
 &= \left[-\bar{\psi}(x) (\beta^- i \partial_-^x + m) - \frac{i}{2} \bar{\lambda}(x) \beta^+ \right]_a,
 \end{aligned}$$

con lo cual, después de utilizar la ecuación (5.34) y la ecuación de vínculos se deduce:

$$\dot{\bar{p}}(x) = \partial_+ \bar{p}(x) = -\bar{\psi}(x) (\beta^- i \partial_- + m) - \frac{i}{2} \bar{\lambda} \beta^+(x) \approx \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+,$$

de donde se determina que:

$$\bar{\psi}(x) \beta^+ i \partial_+ + \bar{\psi}(x) (\beta^- i \partial_- + m) = \bar{\psi}(x) (\beta^\mu \partial_\mu + m) \approx 0. \quad (5.37)$$

Por lo tanto, las ecuaciones (5.36) y (5.37) garantizan que la dinámica derivada a partir de la formulación Hamiltoniana es débilmente equivalente a su contraparte Lagrangiana.

5.2.2. Proyección de los Vínculos y Corchetes de Dirac

Con el fin de garantizar que el conjunto de vínculos (5.31) es de segunda clase, se apelara a los proyectores (5.5), que para la representación considerada son

definidos por:

$$\begin{aligned}
 P &= \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- = \beta^- (\beta^+)^2 \beta^- = \beta^+ (\beta^-)^2 \beta^+, \\
 P^+ &= P \beta^+ = \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) = \beta^- (\beta^+)^2, \\
 P^- &= P \beta^- = \beta^+ (\beta^-)^2,
 \end{aligned} \tag{5.38}$$

y que satisfacen la siguiente propiedad:

$$P^+ \beta^- = P = P^- \beta^+ \quad , \quad P^+ \beta^+ = 0 = P^- \beta^- . \tag{5.39}$$

Utilizando la siguiente representación matricial para las variables del espacio de fase de la teoría:

$$\begin{aligned}
 \psi(x) &\equiv \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \psi^+(x) \\ \psi^-(x) \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\psi}(x) \equiv \left(\varphi^*(x) \quad \bar{\psi}^+(x) \quad \bar{\psi}^-(x) \right) , \\
 p(x) &\equiv \begin{pmatrix} p_\varphi(x) \\ p_+(x) \\ p_-(x) \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{p}(x) \equiv \left(\bar{p}_\varphi(x) \quad \bar{p}_+(x) \quad \bar{p}_-(x) \right) ,
 \end{aligned}$$

se determinan las siguientes expresiones para las proyecciones de los campos considerados anteriormente: Para el vínculo

$$\theta = p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0,$$

se determina que

$$\begin{aligned}
 P\theta &= Pp + \frac{i}{2} P\beta^+ \psi = p_\varphi + \frac{i}{2} P^+ \psi = p_\varphi + \frac{i}{2} \psi^+ \approx 0, \\
 P^+\theta &= P^+p + \frac{i}{2} P^+\beta^+ \psi = p_+ \approx 0, \\
 P^-\theta &= P^-p + \frac{i}{2} P^-\beta^+ \psi = p_- + \frac{i}{2} P\psi = p_- + \frac{i}{2} \varphi \approx 0.
 \end{aligned} \tag{5.40}$$

Ahora, las componentes del vínculos

$$\omega = (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- D_-^x - m) \psi \approx 0,$$

5.2. Proyección de los Vínculos y Corchetes de Dirac

son

$$\begin{aligned}
 P\omega &= (P - P^+\beta^-) (\beta^-i\partial_-^x - m) \psi = (P - P) (\beta^-i\partial_-^x - m) \psi = 0, \\
 P^+\omega &= i\partial_-^x P\psi - mP^+\psi = i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ \approx 0, \\
 P^-\omega &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

De igual manera, al vínculo

$$\Omega = -m(1 + \beta^+\beta^-) \beta^-i\partial_-^x \psi + m^2\beta^-\beta^+\psi \approx 0,$$

le corresponde

$$\begin{aligned}
 P\Omega &= -2mP^-i\partial_-^x \psi + m^2P\psi = -2mi\partial_-^x \psi^- + m^2\varphi \approx 0, \\
 P^+\Omega &= -mD_-^x \varphi + m^2\psi^+ = -m(D_-^x \varphi - m\psi^+) = -mP^+\omega \approx 0, \\
 P^-\Omega &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.42}$$

Si el vínculo

$$\bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+ \approx 0,$$

se tiene en cuenta, sus componentes tienen la forma:

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta}P &= \bar{p}P - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+P = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}(P^-)^\dagger = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \approx 0, \\
 \bar{\theta}(P^+)^\dagger &= \bar{p}(P^+)^\dagger - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+(P^+)^\dagger = \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\bar{\psi}P = \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \approx 0, \\
 \bar{\theta}(P^-)^\dagger &= \bar{p}(P^-)^\dagger - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+(P^-)^\dagger = \bar{p}_- \approx 0.
 \end{aligned} \tag{5.43}$$

Entre tanto cuando

$$\bar{\omega} = \bar{\psi}(-i\partial_-^x \beta^- + m)(1 - \beta^-\beta^+) \approx 0,$$

se analiza se determina que:

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega}P &= \bar{\psi}(i\partial_-^x \beta^- + m)(P - P) = 0, \\
 \bar{\omega}(P^+)^\dagger &= \bar{\psi}(i\partial_-^x \beta^- + m)(\beta^-P - \beta^-P) = 0, \\
 \bar{\omega}(P^-)^\dagger &= i\partial_-^x \bar{\psi}P + m\bar{\psi}(P^-)^\dagger = i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \approx 0.
 \end{aligned} \tag{5.44}$$

Finalmente, para el conjunto de vínculos

$$\bar{\Omega} = m i \partial_x^- \bar{\psi} \beta^- (1 + \beta^- \beta^+) + m^2 \bar{\psi} \beta^+ \beta^- \approx 0,$$

se deduce

$$\begin{aligned} \bar{\Omega} P &= 2m i \partial_x^- \bar{\psi} (P^+)^\dagger + m^2 \bar{\psi} P = 2m i \partial_x^- \bar{\psi}^+ + m^2 \varphi^* \approx 0, \\ \bar{\Omega} (P^+)^\dagger &= 0, \\ \bar{\Omega} (P^-)^\dagger &= m i \partial_x^- \bar{\psi} P + m^2 \bar{\psi} (P^-)^\dagger = m i \partial_x^- \varphi^* + m^2 \bar{\psi}^- \\ &= m \left(i \partial_x^- \varphi^* + m \bar{\psi}^- \right) = m \bar{\omega} (P^-)^\dagger \approx 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Así, las proyecciones del conjunto completo de vínculos en su estructura matricial ha permitido determinar los siguientes vínculos no redundantes:

$$\begin{aligned} p_\varphi + \frac{i}{2} \psi^+ &\approx 0, & p_+ &\approx 0, & p_- + \frac{i}{2} \varphi &\approx 0, \\ i \partial_x^- \varphi - m \psi^+ &\approx 0, & 2m i \partial_x^- \psi^- + m^2 \varphi &\approx 0, \\ \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2} \bar{\psi}^- &\approx 0, & \bar{p}_+ - \frac{i}{2} \varphi^* &\approx 0, & \bar{p}_- &\approx 0, \\ -i \partial_x^- \varphi^* + m \bar{\psi}^- &\approx 0, & 2m i \partial_x^- \bar{\psi}^+ + m^2 \varphi^* &\approx 0. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Con el fin de invertir el conjunto de vínculos anteriores, se los va a redefinir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &\equiv p_\varphi + \frac{i}{2} \psi^+ & , & & \Psi_6 &\equiv \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2} \bar{\psi}^- \\ \Psi_2 &\equiv p_+ & , & & \Psi_7 &\equiv \bar{p}_+ - \frac{i}{2} \varphi^* \\ \Psi_3 &\equiv p_- + \frac{i}{2} \varphi & , & & \Psi_8 &\equiv \bar{p}_- \\ \Psi_4 &\equiv i \partial_x^- \varphi - m \psi^+ & , & & \Psi_9 &\equiv i \partial_x^- \varphi^* + m \bar{\psi}^- \\ \Psi_5 &\equiv 2m i \partial_x^- \psi^- + m^2 \varphi & , & & \Psi_{10} &\equiv 2m i \partial_x^- \bar{\psi}^+ - m^2 \varphi^* \end{aligned} \quad (5.47)$$

5.2. Proyección de los Vínculos y Corchetes de Dirac

los cuales satisfacen el siguientes conjunto de PP diferentes de cero:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Psi_1(x), \Psi_7(y) \right\} &= i\delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_1(x), \Psi_9(y) \right\} &= i\partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_1(x), \Psi_{10}(y) \right\} &= im^2 \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_2(x), \Psi_{10}(y) \right\} &= 2m\partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_3(x), \Psi_6(y) \right\} &= i\delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_3(x), \Psi_9(y) \right\} &= -m\delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_4(x), \Psi_6(y) \right\} &= i\partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_4(x), \Psi_7(y) \right\} &= -m\delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_5(x), \Psi_6(y) \right\} &= im^2 \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_5(x), \Psi_8(y) \right\} &= 2m\partial_-^x \delta(x^- - y^-),
 \end{aligned} \tag{5.48}$$

de manera que se puede definir una matriz de vínculos de segunda clase cuyos elementos de matriz se calculan de la siguiente forma:

$$D_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_i(x), \Psi_j(y) \right\}, \tag{5.49}$$

y la cual posee la siguiente representación:

$$D(x, y) = \begin{pmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & i\partial_-^x & im^2 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & -m & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & i\partial_-^x & -m & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & im^2 & 0 & 2m\partial_-^x & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -i & i\partial_-^x & -im^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -i & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 i\partial_-^x & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -im^2 & 2m\partial_-^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-).$$

Con el fin de definir los corchetes de Dirac es necesario calcular la inversa $D^{-1}(x, y)$ de la matriz de vínculos anterior y la cual debe satisfacer la siguiente identidad:

$$\int dz^- D(x, z) D^{-1}(z, y) = \int dz^- D^{-1}(x, z) D(z, y) = \delta(x^- - y^-). \quad (5.50)$$

A partir de la relación anterior es posible que la inversa de la matriz de vínculos es de la forma:

$$D_{ij}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_6 & A_7 & A_8 & A_9 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & 0 & 0 & B_6 & B_7 & B_8 & B_9 & B_{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_6 & C_7 & C_8 & C_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_6 & D_7 & D_8 & D_9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_8 & 0 & 0 \\ F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ G_1 & G_2 & G_3 & G_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_1 & H_2 & H_3 & H_4 & H_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K_2 & K_3 & K_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

donde los elementos de matriz son funciones de (x^-, y^-) y tienen la siguiente forma:

Funciones $A_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} A_6(x, y) &= -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\ A_7(x, y) &= \frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \\ A_8(x, y) &= -\frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \\ A_9(x, y) &= -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-). \end{aligned}$$

5.2. Proyección de los Vínculos y Corchetes de Dirac

Funciones $B_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}B_3(x, y) &= -\frac{1}{8m^2} \epsilon(x^- - y^-), \\B_6(x, y) &= -\frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \\B_7(x, y) &= -\frac{m}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \\B_8(x, y) &= -\frac{im^3}{16} \frac{1}{\partial_-^x \partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \\B_9(x, y) &= \frac{m}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \\B_{10}(x, y) &= \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).\end{aligned}$$

Funciones $C_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}C_6(x, y) &= \frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \\C_7(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\C_8(x, y) &= -\frac{m}{8} \epsilon(x^- - y^-), \\C_9(x, y) &= \frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-).\end{aligned}$$

Funciones $D_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}D_6(x, y) &= -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\D_7(x, y) &= \frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-), \\D_8(x, y) &= \frac{m}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \\D_9(x, y) &= \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).\end{aligned}$$

Funciones $E_i(x, y)$:

$$E_8(x, y) = \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).$$

Funciones $F_i(x, y)$:

$$F_1(x, y) = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-),$$

$$F_2(x, y) = \frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-),$$

$$F_3(x, y) = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-),$$

$$F_4(x, y) = -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-).$$

Funciones $G_i(x, y)$:

$$G_1(x, y) = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-),$$

$$G_2(x, y) = -\frac{m}{8} \epsilon(x^- - y^-),$$

$$G_3(x, y) = \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-),$$

$$G_4(x, y) = -\frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-).$$

Funciones $H_i(x, y)$:

$$H_1(x, y) = \frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-),$$

$$H_2(x, y) = \frac{m^3}{16} \frac{1}{\partial_-^x} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-),$$

$$H_3(x, y) = -\frac{m}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \delta(x^- - y^-),$$

$$H_4(x, y) = -\frac{m}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-),$$

$$H_5(x, y) = \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).$$

5.2. Proyección de los Vínculos y Corchetes de Dirac

Funciones $K_i(x, y)$:

$$\begin{aligned} K_1(x, y) &= -\frac{i}{4}\epsilon(x^- - y^-), \\ K_2(x, y) &= -\frac{m}{8}\frac{1}{\partial_-^x}\epsilon(x^- - y^-), \\ K_3(x, y) &= -\frac{1}{2m}\delta(x^- - y^-), \\ K_4(x, y) &= \frac{1}{4m}\epsilon(x^- - y^-), \end{aligned}$$

y finalmente, funciones $M_i(x, y)$:

$$M_2(x, y) = \frac{1}{4m}\epsilon(x^- - y^-),$$

Ahora, siendo que la inversa de la matriz de vínculos ha sido calculada, se procede a definir los corchetes de Dirac entre dos variables dinámicas $\mathbf{A}_a(x)$ y $\mathbf{B}_b(y)$ de la siguientes forma:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D &= \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Psi_\alpha(u) \right\} \\ &\quad D_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

De la estructura de vínculos que se han determinado para la teoría, es posible mostrar que el espacio de fase posee el siguiente conjunto de variables dinámicas independientes: $(\varphi, \psi^+, \psi^-, \varphi^*, \bar{\psi}^+, \bar{\psi}^-)$. Por tanto, si se utilizan los siguientes corchetes de Poisson,

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\} &= \delta(x^- - u^-) & \left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\} &= \delta(x^- - u^-) \\ \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\} &= \delta(x^- - u^-) & \left\{ \bar{\psi}^+(x), \Psi_2(u) \right\} &= \delta(x^- - u^-), \\ \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\} &= \delta(x^- - u^-) & \left\{ \bar{\psi}^-(x), \Psi_3(u) \right\} &= \delta(x^- - u^-) \end{aligned} \quad (5.53)$$

se puede determinar que el corchete de Dirac asociado al campo $\varphi(x)$ se deducen a partir de:

$$\left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D = \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\} D_{6\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}. \quad (5.54)$$

Por lo tanto, usando los PP introducidos en (5.53) y la inversa de la matriz de vínculos (5.51) que los únicos corchetes de Dirac asociados con el campos $\varphi(x)$ son:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D &= - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\} D_{61}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_1(v), \varphi^*(y) \right\} \\ &= \int du^- dv^- \delta(x^- - u^-) D_{61}^{-1}(u, v) \delta(v^- - y^-) \\ &= D_{61}^{-1}(x, y) = F_1(x, y) \\ &= -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-), \end{aligned}$$

es decir:

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-). \quad (5.55)$$

De forma similar, a partir de (5.54) se determina:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \bar{\Psi}^+(y) \right\}_D &= - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\} D_{62}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_2(v), \bar{\Psi}^+(y) \right\} \\ &= D_{62}^{-1}(x, y) = F_2(x, y) \\ &= \frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-), \end{aligned}$$

entonces,

$$\left\{ \varphi(x), \bar{\Psi}^+(y) \right\}_D = \frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \epsilon(x^- - y^-). \quad (5.56)$$

5.2. Proyección de los Vínculos y Corchetes de Dirac

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \left\{ \varphi(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_D &= - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\} D_{63}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_3(v), \bar{\psi}^-(y) \right\} \\
 &= D_{63}^{-1}(x, y) = F_3(x, y) \\
 &= -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-),
 \end{aligned}$$

así que,

$$\left\{ \varphi(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_D = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-) \quad (5.57)$$

Ahora, si se desea encontrar los corchetes de Dirac correspondientes al campos $\psi^+(x)$, se deberá utilizar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \psi^+(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D &= \left\{ \psi^+(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\} D_{7\beta}^{-1}(u, v) \\
 &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}.
 \end{aligned} \quad (5.58)$$

Estableciendo los siguientes corchetes,

$$\begin{aligned}
 \left\{ \psi^+(x), \varphi^*(y) \right\}_D &= - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\} D_{71}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_1(v), \varphi^*(y) \right\} \\
 &= D_{71}^{-1}(x, y) = G_1(x, y) = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-),
 \end{aligned}$$

entonces,

$$\left\{ \psi^+(x), \varphi^*(y) \right\}_D = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-). \quad (5.59)$$

Igualmente,

$$\begin{aligned}
 \left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_D &= - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\} D_{72}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_2(v), \bar{\psi}^+(y) \right\} \\
 &= D_{72}^{-1}(x, y) = G_2(x, y) \\
 &= -\frac{m}{8} \epsilon(x^- - y^-),
 \end{aligned}$$

entonces,

$$\left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_D = -\frac{m}{8} \epsilon(x - y) \quad (5.60)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_D &= - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\} D_{73}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_3(v), \bar{\psi}^-(y) \right\} \\
&= D_{73}^{-1}(x, y) = G_3(x, y) \\
&= \frac{1}{2m} \partial_{\underline{x}} \delta(x^- - y^-),
\end{aligned}$$

de manera que,

$$\left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_D = \frac{1}{2m} \partial_{\underline{x}} \delta(x^- - y^-). \quad (5.61)$$

Los corchetes de Dirac asociados al campos $\psi^-(x)$ se deducen de:

$$\begin{aligned}
\left\{ \psi^-(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D &= \left\{ \psi^-(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\} D_{8\beta}^{-1}(u, v) \\
&\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}, \quad (5.62)
\end{aligned}$$

lo cual conduce a los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
\left\{ \psi^-(x), \varphi^*(y) \right\}_D &= - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\} D_{81}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_1(v), \varphi^*(y) \right\} \\
&= D_{81}^{-1}(x, y) = H_1(x, y) \\
&= \frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \epsilon(x^- - y^-),
\end{aligned}$$

entonces,

$$\left\{ \psi^-(x), \varphi^*(y) \right\}_D = \frac{im^2}{8} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \epsilon(x^- - y^-). \quad (5.63)$$

Además se puede deducir que:

$$\begin{aligned}
\left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_D &= - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\} D_{82}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_2(v), \bar{\psi}^+(y) \right\} \\
&= D_{82}^{-1}(x, y) = H_2(x, y) \\
&= \frac{m^3}{16} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \epsilon(x^- - y^-),
\end{aligned}$$

5.3. Ecuación de DKP en 3 + 1 Dimensiones

entonces,

$$\left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_D = \frac{m^3}{16} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \epsilon(x^- - y^-) \quad (5.64)$$

Por último, se determina que

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_D &= - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\} D_{83}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_3(v), \bar{\psi}^-(y) \right\} \\ &= D_{83}^{-1}(x, y) = H_3(x, y) \\ &= -\frac{m}{4} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta(x^- - y^-), \end{aligned}$$

con lo cual

$$\left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_D = -\frac{m}{4} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta(x^- - y^-) \quad (5.65)$$

5.3. Ecuación de DKP en 3 + 1 Dimensiones

En 3 + 1 dimensiones la métrica $g^{\mu\nu}$ posee las siguientes componentes:

$$g^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.66)$$

donde aun se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \beta^+ \beta^- \beta^+ &= \beta^+ & , & & \beta^- \beta^+ \beta^- &= \beta^- \\ \beta^+ (\beta^-)^2 + (\beta^-)^2 \beta^+ &= \beta^- & , & & \beta^- (\beta^+)^2 + (\beta^+)^2 \beta^- &= \beta^+ \\ (\beta^+)^3 &= 0 & , & & (\beta^-)^3 &= 0 \end{aligned}$$

Sin embargo, en $3 + 1$ dimensiones el campo de DKP tendrá la siguiente representación matricial:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi^+ \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^- \end{pmatrix}, \quad (5.67)$$

donde los operadores de proyección serán definidos de manera que:

$$\begin{aligned} P\psi &= \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^+\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^1\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ P^2\psi &= \begin{pmatrix} \psi^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^-\psi = \begin{pmatrix} \psi^- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.68)$$

Así, una conveniente representación de dichos proyectores es de la forma:

$$\begin{aligned} P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ P^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Ahora, usando el hecho que

$$P^\mu = P\beta^\mu, \quad P^\mu\beta^\nu = P\eta^{\mu\nu}, \quad (5.70)$$

5.3. Estructura de Vínculos

una conveniente representación de las matrices β es:

$$\begin{aligned} \beta^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \beta^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \beta^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \beta^- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.71)$$

5.3.1. Estructura de Vínculos

La densidad Lagrangiana correspondiente al campo de DKP en $3 + 1$ dimensiones se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\ &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ (\partial_+ \psi) - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\psi}) \beta^+ \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^A (\partial_A \psi) - \frac{i}{2} (\partial_A \bar{\psi}) \beta^A \psi \\ &\quad - m \bar{\psi} \psi, \end{aligned} \quad (5.72)$$

donde $A = -, 1, 2$. Los correspondientes momentos canónicos (p, \bar{p}) conjugados a los campos $(\bar{\psi}, \psi)$, respectivamente, definidos como siendo

$$\bar{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \quad , \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{i}{2} \beta^+ \psi, \quad (5.73)$$

permite introducir el siguiente conjunto de vínculos primarios:

$$\theta \equiv p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0 \quad , \quad \bar{\theta} \equiv \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0. \quad (5.74)$$

Debido a la dimension de los campos $(\bar{\psi}, \psi)$, existe un conjunto total de diez vínculos primarios. Con el fin de analizar su correspondiente consistencia se debe introducir la densidad Hamiltoniana canónica de la teoría el cual se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_C \equiv \bar{p}\dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}}p - \mathcal{L} = \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + m \right] \psi,$$

con lo cual el correspondiente Hamiltoniano canónico se expresa:

$$H_C = \int d^3y \mathcal{H}_C. \quad (5.75)$$

La consistencia del conjunto de vínculos primarios es analizados a partir del Hamiltoniano primario el cual se construye adicionando al Hamiltoniano canónico una combinación de los vínculos primarios, es decir:

$$H_P = H_C + \int d^3x \left[\bar{\lambda}(x) \theta(x) + \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right], \quad (5.76)$$

donde $d^3x \equiv dx^- dx^1 dx^2$ y $(\lambda, \bar{\lambda})$ son multiplicadores de Lagrange a ser determinados. El espacio de fase de la teoría es definido por las coordenadas $(\psi, \bar{\psi}, \bar{p}, p)$, de manera que los corchetes de Poisson a tiempos iguales ($x^+ = y^+$) correspondientes a estas coordenadas son definidos por

Ahora, se procede a introducir los corchetes de Poisson fundamentales a tiempos iguales ($x^+ = y^+$) correspondientes al espacio de fase los cuales son definidos de la siguiente manera:

$$\left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta^3(x-y), \quad (5.77)$$

con la delta de Dirac en tres dimensiones definida como:

$$\delta^3(x-y) \equiv \delta(x^- - y^-) \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2).$$

A partir de (5.77) es posible comprobar que los vínculos primarios satisfacen las siguientes corchetes de Poisson:

$$\left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} = i\beta_{ab}^+ \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\theta}_a(x), \theta_b(y) \right\} = -i\beta_{ba}^+ \delta^3(x-y). \quad (5.78)$$

5.3. Estructura de Vínculos

Utilizando los resultados previamente establecidos se procede a calcular las condiciones de consistencia, determinado en primer lugar para el vínculo $\theta(x)$ que

$$\begin{aligned}
 \dot{\theta}_a(x) &= \left\{ \theta_a(x), H_p \right\} \\
 &= \int d^3y \left\{ \theta_a(x), \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + m \right] \psi + \bar{\theta}_b(y) \lambda^b(y) \right\} \\
 &= \int d^3y \left[\left\{ \theta_a(x), \bar{\psi}_b(y) \right\} \left(\left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + m \right] \psi \right)_b \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} \lambda^b(y) \right] \\
 &= \int d^3y \delta^3(x-y) \left\{ - \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + m \right] \psi + i\beta^+ \lambda(y) \right\}_a \\
 &= \int d^3y \delta^3(x-y) \left\{ - \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(-\overleftarrow{\partial}_A^x - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + m \right] \psi + i\beta^+ \lambda(y) \right\}_a \\
 &= \left[(i\partial_A^x \beta^A - m) \psi + i\beta^+ \lambda \right]_a,
 \end{aligned}$$

de manera que:

$$\dot{\theta} = (i\partial_A^x \beta^A - m) \psi + i\beta^+ \lambda \approx 0. \tag{5.79}$$

En forma similar, la consistencia sobre el vínculo $\bar{\theta}(x)$ determina que:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\theta}}_a(x) &= \left\{ \bar{\theta}_a(x), H_P \right\} \\
&= \int d^3y \left\{ \bar{\theta}_a(x), \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A (\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y) + m \right] \psi + \bar{\lambda}^a(y) \theta_a(y) \right\} \\
&= \int d^3y \left[\left\{ \bar{\theta}_a(x), \left(\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A (\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y) + m \right] \right)_b \psi_b \right\} \right. \\
&\quad \left. + \bar{\lambda}^a(y) \left\{ \bar{\theta}_a(x), \theta_a(y) \right\} \right] \\
&= \int d^3y \left\{ -\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A (\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y) + m \right] - i\bar{\lambda}\beta^+ \right\}_a \delta^3(x-y) \\
&= \int d^3y \left\{ -\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A (\overleftarrow{\partial}_A^y + \overrightarrow{\partial}_A^x) + m \right] - i\bar{\lambda}\beta^+ \right\}_a \delta^3(x-y) \\
&= - \left[\bar{\psi} (\beta^A i \partial_A^x + m) + i\bar{\lambda}\beta^+ \right]_a,
\end{aligned}$$

concluyendo que:

$$\dot{\bar{\theta}} = \bar{\psi} (\beta^A i \partial_A^x + m) + i\bar{\lambda}\beta^+ \approx 0. \quad (5.80)$$

En principio, las expresiones (5.79) y (5.80) permiten establecer condiciones sobre los diez multiplicadores de Lagrange $(\lambda, \bar{\lambda})$, sin embargo, debido a la naturaleza singular de las matrices β , será posible intuir que algunas componentes de dichos multiplicadores mantienen indeterminadas, similar a lo que ocurrió en 1 + 1 dimensiones. Con el fin de poner en evidencia la afirmación anterior, se utilizará algunas propiedades de las matrices β y de los proyectores definidos con anterioridad que resultan del álgebra que satisfacen las mismas matrices y como se muestran en el cuadro 5.1. De donde se puede deducir que

$$P = P^\dagger \quad , \quad P^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = P \quad , \quad \beta^+ (\beta^-)^2 (P^-)^\dagger = P, \quad (5.81)$$

5.3. Estructura de Vínculos

$P\beta^+ = P^+$	$P\beta^- = P^-$	$P\beta^k = P^k$	$P^+\beta^+ = 0$
$P^-\beta^+ = P$	$P^-\beta^- = 0$	$P^-\beta^k = 0$	$P^k\beta^+ = 0$
$\beta^-P = (P^+)^\dagger$	$\beta^+P = (P^-)^\dagger$	$\beta^kP = -(P^k)^\dagger$	$\beta^- (P^+)^\dagger = 0$
$\beta^- (P^-)^\dagger = P$	$\beta^+ (P^-)^\dagger = 0$	$\beta^k (P^-)^\dagger = 0$	$\beta^- (P^k)^\dagger = 0$
$P^+\beta^k = 0$	$P^k\beta^l = \delta_l^k P$	$\beta^k (P^+)^\dagger = 0$	$\beta^l (P^k)^\dagger = \delta_l^k P$
$P^+\beta^- = P$	$P^k\beta^- = 0$	$\beta^+ (P^+)^\dagger = P$	$\beta^+ (P^k)^\dagger = 0$

Cuadro 5.1: Algunas propiedades de las matrices β .

se puede determinar de la consistencia del vínculo $\theta(x)$:

$$\begin{aligned}
 P\dot{\theta} &= i\partial_-^x (P^-\psi) + i\partial_k^x (P^k\psi) - m(P\psi) + i(P^+\lambda) \approx 0 \\
 P^+\dot{\theta} &= i\partial_-^x (P\psi) - m(P^+\psi) \approx 0, \\
 P^l\dot{\theta} &= i\partial_l^x (P\psi) - m(P^l\psi) \approx 0, \\
 P^-\dot{\theta} &= -m(P^-\psi) + i(P\lambda) \approx 0,
 \end{aligned} \tag{5.82}$$

así que dos componentes del multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ pueden ser determinadas, es decir: $(P\lambda, P^+\lambda)$, de manera que nuevos vínculos deberán surgir de la condición de ésta consistencia los cuales se podrán extraer aplicando el proyector $(1 - \beta^+\beta^-)$, de manera que se deduce:

$$\omega_\delta = \left[(1 - \beta^+\beta^-) (\beta^A i\partial_A^x - m) \psi \right]_\delta \approx 0, \tag{5.83}$$

con $\delta = 2, 3, 4$. Al utilizar los operadores de proyección para el campo de DKP, es posible observar de la relación anterior que:

$$\begin{aligned}
 P^+\omega &= P^+ (\beta^- i\partial_-^x \psi + \beta^k i\partial_k^x \psi - m\psi) = i\partial_-^x (P\psi) - m(P^+\psi) \\
 &= P^+\dot{\theta} \approx 0, \\
 P^l\omega &= P^l (\beta^- i\partial_-^x \psi + \beta^k i\partial_k^x \psi - m\psi) = i\partial_l^x (P\psi) - m(P^l\psi) \\
 &= P^l\dot{\theta} \approx 0, \\
 P\omega &= 0, \\
 P^-\omega &= 0,
 \end{aligned}$$

resultados que son consistentes con la ecuación (5.82). De igual forma, al analizar la consistencia del vínculo $\bar{\theta}(x)$, via proyectores, es posible deducir:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\theta}}P &= i\partial_-^x [\bar{\psi}(P^+)^\dagger] - i\partial_k^x [\bar{\psi}(P^k)^\dagger] + m(\bar{\psi}P) + i[\bar{\lambda}(P^-)^\dagger] \approx 0 \\
\dot{\bar{\theta}}(P^+)^\dagger &= m[\bar{\psi}(P^+)^\dagger] + i(\bar{\lambda}P) \approx 0, \\
\dot{\bar{\theta}}(P^l)^\dagger &= i\partial_l^x (\bar{\psi}P) + m[\bar{\psi}(P^l)^\dagger] \approx 0, \\
\dot{\bar{\theta}}(P^-)^\dagger &= i\partial_-^x (\bar{\psi}P) + m[\bar{\psi}(P^-)^\dagger] \approx 0,
\end{aligned} \tag{5.84}$$

de manera que correspondiente al multiplicador de Lagrange $\bar{\lambda}(x)$, únicamente las componentes $(\bar{\lambda}P, \bar{\lambda}(P^-)^\dagger)$ pueden ser fijadas y dos nuevos vínculos secundarios deberán surgir. Los vínculos secundarios son extraídos mediante la aplicación del proyector $(1 - \beta^-\beta^+)$, con lo cual se establece que:

$$\bar{\omega}_\delta = \left[\bar{\psi} (i\partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^-\beta^+) \right]_\delta \approx 0, \tag{5.85}$$

con $\delta = 3, 4, 5$. Con el fin de garantizar que los resultados indicados en la ecuación (5.85) son coherentes, apliquemos los operadores de proyección del campo de DKP, es decir:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}(P^l)^\dagger &= (i\partial_-^x \bar{\psi}\beta^- + i\partial_k^x \bar{\psi}\beta^k + m\bar{\psi})(P^l)^\dagger = i\partial_l^x (\bar{\psi}P) + m[\bar{\psi}(P^l)^\dagger] \\
&= \dot{\bar{\theta}}(P^l)^\dagger \approx 0 \\
\bar{\omega}(P^-)^\dagger &= (i\partial_-^x \bar{\psi}\beta^- + i\partial_k^x \bar{\psi}\beta^k + m\bar{\psi})(P^-)^\dagger = i\partial_-^x (\bar{\psi}P) + m[\bar{\psi}(P^-)^\dagger] \\
&= \dot{\bar{\theta}}(P^-)^\dagger \approx 0 \\
\bar{\omega}P &= 0, \\
\bar{\omega}(P^+)^\dagger &= 0,
\end{aligned}$$

resultados equivalentes a aquellos derivados en (5.84). Entonces, La teoría posee el siguiente conjunto de seis vínculos secundarios

$$\begin{aligned}
\omega_\delta &= \left[(1 - \beta^+\beta^-) (\beta^A i\partial_A^x - m) \psi \right]_\delta \approx 0, & \delta = 2, 3, 4, \\
\bar{\omega}_\delta &= \left[\bar{\psi} (i\partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^-\beta^+) \right]_\delta \approx 0, & \delta = 3, 4, 5,
\end{aligned} \tag{5.86}$$

5.3. Estructura de Vínculos

los cuales satisfacen los siguientes corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A i \partial_A^x - m) \right]_{ab} \delta^3(x - y), \\
 \left\{ \bar{\theta}_a(x), \omega_b(y) \right\} &= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A i \partial_A^x + m) \right]_{ab}^T \delta^3(x - y), \\
 \left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[(i \partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{ab}^T \delta^3(x - y), \\
 \left\{ \theta_a(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= \left[(i \partial_A^x \beta^A - m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{ab} \delta^3(x - y).
 \end{aligned} \tag{5.87}$$

A partir de las relaciones anteriores es posible estudiar la consistencia de los vínculos secundarios determinando para $\omega(x)$:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_\delta(x) &= \left\{ \omega_\delta(x), H_P \right\} = \int d^3y \lambda_b(y) \left\{ \omega_\delta(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} \\
 &= \int d^3y \lambda_b(y) \left[(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A i \partial_A^x - m) \right]_{\delta b} \delta^3(x - y) \\
 &= \left\{ (1 - \beta^+ \beta^-) \left[(\beta^A i \partial_A^x - m) \lambda(x) \right] \right\}_\delta,
 \end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{\omega} = (1 - \beta^+ \beta^-) \left[(\beta^A i \partial_A^x - m) \lambda(x) \right] \approx 0. \tag{5.88}$$

De la expresión anterior es posible extraer los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 P \dot{\omega} &= 0, \\
 P^- \dot{\omega} &= 0, \\
 P^l \dot{\omega} &= i \partial_l^x (P \lambda) - m (P^l \lambda) \approx 0, \\
 P^+ \dot{\omega} &= i \partial_-^x (P \lambda) - m (P^+ \lambda) \approx 0.
 \end{aligned} \tag{5.89}$$

La ecuación (5.79) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\beta^+ \lambda \approx -\partial_-^x \beta^- \psi - \partial_k^x \beta^k \psi - i m \psi.$$

Utilizando la expresión de los proyectores del campo de DKP y las propiedades expresadas por la tabla 5.1 es posible deducir de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
 (P^+ \lambda) &= -\partial_-^x (P^- \psi) - \partial_k^x (P^k \psi) - i m (P \psi), \\
 (P \lambda) &= -i m (P^- \psi).
 \end{aligned} \tag{5.90}$$

Por lo tanto, la cuarta ecuación que aparece en (5.89) se puede re escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
P^+ \dot{\omega} &= m \partial_-^x (P^- \psi) + m \partial_-^x (P^- \psi) + m \partial_k^x (P^k \psi) + im^2 (P \psi) \\
&= 2m \partial_-^x (P^- \psi) + m \partial_k^x (P^k \psi) + im^2 (P \psi) \\
&= -P \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \psi
\end{aligned}$$

Utilizando la relación (5.81) permite expresar el resultado anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
P^+ \dot{\omega} &= -P^+ \left\{ (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \psi \right\} \\
&\approx -P^+ \left\{ (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \psi \right\},
\end{aligned}$$

de manera que hemos podido extraer un vinculo terciario definido de la siguiente manera:

$$\Omega \equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \psi \approx 0 \quad (5.91)$$

Ahora, utilizando los resultados (5.90) en la tercera ecuación de (5.89) se establece que:

$$P^l \dot{\omega} = m \partial_l^x (P^- \psi) - m (P^l \lambda), \quad (5.92)$$

lo cual determina las componentes $l = 1, 2$ del multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$.

Si la consistencia del vínculo $\bar{\omega}(x)$ es analizada se determina que:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\omega}}_\delta(x) &= \left\{ \bar{\omega}_\delta(x), H_P \right\} = \int d^3 y \bar{\lambda}_b(y) \{ \bar{\omega}_\delta(x), \theta_b(y) \} \\
&= \int d^3 y \bar{\lambda}_b(y) \left[(i \partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{b\delta} \delta^3(x - y) \\
&= \left\{ \bar{\lambda}(x) (i \partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right\}_\delta,
\end{aligned}$$

así que

$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\lambda} (i \partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \approx 0. \quad (5.93)$$

5.3. Estructura de Vínculos

Utilicemos los proyectores del campo de DKP con el fin de determinar las componentes del multiplicador de Lagrange que se pueden determinar, es así que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\omega}} P &= 0, \\
 \dot{\bar{\omega}} (P^+)^{\dagger} &= 0. \\
 \dot{\bar{\omega}} (P^l)^{\dagger} &= i\partial_l^x (\bar{\lambda} P) + m \left[\bar{\lambda} (P^l)^{\dagger} \right] \approx 0, \\
 \dot{\bar{\omega}} (P^-)^{\dagger} &= i\partial_-^x (\bar{\lambda} P) + m \left[\bar{\lambda} (P^-)^{\dagger} \right] \approx 0.
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

A partir de la ecuación (5.80), que se puede expresar en la forma:

$$\bar{\lambda} \beta^+ \approx -\partial_-^x \bar{\psi} \beta^- - \partial_k^x \bar{\psi} \beta^k + im \bar{\psi}, \tag{5.95}$$

se puede deducir después de utilizar proyectores del campo de DKP y las propiedades indicadas en la tabla 5.1:

$$\begin{aligned}
 (\bar{\lambda} P) &= im \left[\bar{\psi} (P^+)^{\dagger} \right], \\
 \left[\bar{\lambda} (P^-)^{\dagger} \right] &= -\partial_-^x \left[\bar{\psi} (P^+)^{\dagger} \right] + \partial_k^x \left[\bar{\psi} (P^k)^{\dagger} \right] + im (\bar{\psi} P).
 \end{aligned}$$

De esta manera es posible determinar que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\omega}} (P^-)^{\dagger} &= -m\partial_-^x \left[\bar{\psi} (P^+)^{\dagger} \right] - m\partial_-^x \left[\bar{\psi} (P^+)^{\dagger} \right] + m\partial_k^x \left[\bar{\psi} (P^k)^{\dagger} \right] + im^2 (\bar{\psi} P) \\
 &= -2m\partial_-^x \left[\bar{\psi} (P^+)^{\dagger} \right] + m\partial_k^x \left[\bar{\psi} (P^k)^{\dagger} \right] + im^2 (\bar{\psi} P) \\
 &= \bar{\psi} \left[-2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_k^x \beta^k + im^2 \right] P \\
 &= \left\{ \bar{\psi} \left[-2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_k^x \beta^k + im^2 \right] \beta^+ (\beta^-)^2 \right\} (P^-)^{\dagger} \\
 &\approx \left\{ \bar{\psi} \left[-2m\beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x + im^2 \right] \beta^+ (\beta^-)^2 \right\} (P^-)^{\dagger},
 \end{aligned}$$

donde la relación (5.81) ha sido utilizada. Así, se ha podido deducir un vínculo terciarios definido de la siguiente manera:

$$\bar{\Omega} \equiv \bar{\psi} \left[-2m\beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x + im^2 \right] \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0. \tag{5.96}$$

Ahora, de la tercera ecuación en (5.94) se puede verificar que:

$$\dot{\bar{\omega}} (P^l)^\dagger = -m\partial_t^x [\bar{\psi} (P^+)^\dagger] + m [\bar{\lambda} (P^l)^\dagger], \quad (5.97)$$

lo que resulta en condiciones para las componentes $l = 1, 2$ para el multiplicador de Lagrange $\bar{\lambda}(x)$. En conclusión, se han determinado el siguiente conjunto de vínculos terciarios en la teoría:

$$\begin{aligned} \Omega &\equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \psi \approx 0, \\ \bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} \left(-2m\beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x + im^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0.. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Al continuar aplicando el procedimiento de Dirac la consistencia de los vínculos terciarios (5.98) deberá ser analizada, para tal fin, será necesario estudiar los corchetes de Poisson de estos vínculos con los vínculos que han surgido en la teoría, es decir:

$$\begin{aligned} \{\Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y)\} &= \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\ \{\bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y)\} &= \left[\left(-2m\beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x + im^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_{ab}^T \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (5.99)$$

Por tanto, la consistencia sobre el vínculo $\Omega(x)$ determina que:

$$\begin{aligned} \dot{\Omega}_a(x) &= \{\Omega_a(x), H_P\} = \int d^3y \lambda_b(y) \{\Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y)\} \\ &= \int d^3y \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \lambda(y) \partial_-^x - m\beta^k \lambda(y) \partial_k^x - im^2 \lambda(y) \right) \right]_a \delta^3(x-y) \\ &= \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \lambda(x) \right]_a, \end{aligned}$$

es decir

$$\dot{\Omega} = (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \lambda. \quad (5.100)$$

5.3. Estructura de Vínculos

Si los proyectores de los campos de DKP son utilizados se establece que:

$$\begin{aligned}
 P^- \dot{\Omega} &= 0, \\
 P^k \dot{\Omega} &= 0, \\
 P \dot{\Omega} &= 0, \\
 P^+ \dot{\Omega} &= P^+ (\beta^-)^2 \beta^+ (-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2) \lambda \\
 &= P (-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2) \lambda \\
 &= -2m \partial_-^x (P^- \lambda) - m \partial_k^x (P^k \lambda) - im^2 (P \lambda),
 \end{aligned}$$

relación que garantiza que todas las componentes del multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ consiguen ser determinadas. De manera similar, la consistencia sobre el vínculo $\bar{\Omega}(x)$ garantiza que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\Omega}}_a(x) &= \{\bar{\Omega}_a(x), H_P\} = \int d^3y \bar{\lambda}_b(y) \{\bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y)\} \\
 &= \int d^3y \left[(-2m \bar{\lambda}(y) \beta^- \partial_-^x - m \bar{\lambda}(y) \beta^k \partial_k^x + im^2 \bar{\lambda}(y)) \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_a \delta^3(x-y) \\
 &= \left[(-2m \partial_-^x \bar{\lambda}(x) \beta^- - m \partial_k^x \bar{\lambda}(x) \beta^k + im^2 \bar{\lambda}(x)) \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_a,
 \end{aligned}$$

de manera que

$$\dot{\bar{\Omega}} = (-2m \partial_-^x \bar{\lambda} \beta^- - m \partial_k^x \bar{\lambda} \beta^k + im^2 \bar{\lambda}) \beta^+ (\beta^-)^2. \quad (5.101)$$

De la relación anterior se puede deducir:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\Omega}} (P^k)^\dagger &= 0, \\
 \dot{\bar{\Omega}} (P^+)^\dagger &= 0, \\
 \dot{\bar{\Omega}} P &= 0 \\
 \dot{\bar{\Omega}} (P^-)^\dagger &= (-2m \partial_-^x \bar{\lambda} \beta^- - m \partial_k^x \bar{\lambda} \beta^k + im^2 \bar{\lambda}) \beta^+ (\beta^-)^2 (P^-)^\dagger \\
 &= (-2m \partial_-^x \bar{\lambda} \beta^- - m \partial_k^x \bar{\lambda} \beta^k + im^2 \bar{\lambda}) P \\
 &= -2m \partial_-^x [\bar{\lambda} (P^+)^\dagger] - m \partial_k^x [\bar{\lambda} (P^k)^\dagger] + im^2 (\bar{\lambda} P),
 \end{aligned}$$

así, se concluye que no más vínculos se generan en la teoría de DKP libre en $3 + 1$ dimensiones.

Se ha podido mostrar que la teoría esta caracterizada por el siguiente conjunto de vínculos:

$$\begin{aligned}
\theta &= p + \frac{i}{2}\beta^+\psi \quad , \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+ & (5.102) \\
\omega &= (1 - \beta^+\beta^-) \left(\beta^A i\partial_A^x - m \right) \psi \quad , \quad \bar{\omega} = \bar{\psi} \left(i\partial_A^x \beta^A + m \right) (1 - \beta^-\beta^+) , \\
\Omega &\equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m\beta^-\partial_-^x - m\beta^k\partial_k^x - im^2 \right) \psi , \\
\bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} \left(-2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_k^x \beta^k + im^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2 .
\end{aligned}$$

Sin embargo, los corchetes de Poisson (5.78), (5.87) y (5.99) permiten establecer que este conjunto de vínculos es de segunda clase siendo ésta una característica que se comparte también cuando se analiza la teoría de DKP en el sistema de coordenadas tradicionales aun cuando el conjunto de vínculos terciarios no son propios de ellas y son consecuencia directa de utilizar el sistema de coordenadas de plano nulo.

5.3.2. Ecuaciones de movimiento

Ahora, se procede a estudiar la equivalencia entre las ecuaciones deducidas en el espacio de fase, es decir, las ecuaciones de Hamilton y su contraparte en el espacio de configuración que son las ecuaciones de Euler-Lagrange. Se sabe que la dinámica de la teoría en el espacio de fase es gobernada por el Hamiltoniano primario:

$$H_E = \int d^3\mathbf{y} \left[\bar{\psi} \left[\frac{i}{2}\beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + m \right] \psi + \bar{\lambda}\theta + \bar{\theta}\lambda \right] ,$$

de manera que la evolución temporal de los campos DKP $(\psi, \bar{\psi})$ implica:

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_a(x) &= \left\{ \psi_a(x), H_E \right\} = \int d^3\mathbf{y} \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} \lambda_b(y) \\
&= \int d^3\mathbf{y} \lambda_a(y) \delta^3(x - y) \\
&= \lambda_a(x) ,
\end{aligned}$$

5.3. Ecuaciones de movimiento

igualmente

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\psi}}_a(\mathbf{x}) &= \left\{ \bar{\psi}_a(\mathbf{x}), H_E \right\} = \int d^3\mathbf{y} \bar{\lambda}_b(\mathbf{y}) \left\{ \bar{\psi}_a(\mathbf{x}), p_b(\mathbf{y}) \right\} \\
 &= \int d^3\mathbf{y} \bar{\lambda}_a(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
 &= \bar{\lambda}_a(\mathbf{x}),
 \end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{\psi} = \lambda \quad , \quad \dot{\bar{\psi}} = \bar{\lambda} \quad (5.103)$$

de manera que la evolución temporal de dichos campos, en principio, estaría indeterminada por la arbitrariedad de los multiplicadores de Lagrange $(\lambda, \bar{\lambda})$, no obstante, el hecho que los vínculos que surgen en la teoría libre son de segunda clase permitiría fijar dichos multiplicadores gracias a la consistencia de ellos. De manera similar, al estudiar la evolución temporal de los momentos (p, \bar{p}) se determina que:

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_a(\mathbf{x}) &= \left\{ p_a(\mathbf{x}), H_E \right\} \\
 &= \int d^3\mathbf{y} \left[\left\{ p_a(\mathbf{x}), \bar{\psi}_b(\mathbf{y}) \right\} \left(\left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} \right) + m \right] \psi \right)_b \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i}{2} \left\{ p_a(\mathbf{x}), \bar{\psi}_c(\mathbf{y}) \right\} \beta_{cb}^+ \lambda_b(\mathbf{y}) \right] \\
 &= \int d^3\mathbf{y} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left\{ - \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} \right) + m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^{+\lambda}(\mathbf{y}) \right\}_a \\
 &= \int d^3\mathbf{y} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left\{ - \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(-\overleftarrow{\partial}_A^{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} \right) + m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^{+\lambda}(\mathbf{y}) \right\}_a \\
 &= \left\{ \left(\beta^A i \partial_A^{\mathbf{x}} - m \right) \psi + \frac{i}{2} \beta^{+\lambda} \right\}_a ,
 \end{aligned}$$

en forma similar:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{p}}_a(x) &= \left\{ \bar{p}_a(x), H_E \right\} \\
&= \int d^3y \left[\left(\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + m \right] \right)_b \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_b(y) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \bar{\lambda}_b(y) \beta_{bc}^+ \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_c(y) \right\} \right] \\
&= \int d^3y \left[-\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + m \right] - \frac{i}{2} \bar{\lambda}(y) \beta^+ \right]_a \delta^3(x-y) \\
&= \int d^3y \left[-\bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y + \overrightarrow{\partial}_A^x \right) + m \right] - \frac{i}{2} \bar{\lambda}(y) \beta^+ \right]_a \delta^3(x-y) \\
&= \left\{ -\bar{\psi} \left(\beta^A i \partial_A^x + m \right) - \frac{i}{2} \bar{\lambda}(y) \beta^+ \right\}_a,
\end{aligned}$$

Ahora, de la definición de los vínculos primarios es posible determinar que:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \partial_+ p = \left(\beta^A i \partial_A - m \right) \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda = \left(\beta^A i \partial_A - m \right) \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi \\
&\approx -\frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi,
\end{aligned}$$

entonces

$$\beta^+ i \partial_+ \psi + \left(\beta^A i \partial_A - m \right) \psi = \left(\beta^\mu i \partial_\mu - m \right) \psi \approx 0 \quad (5.104)$$

Igualmente

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{p}} &= \partial_+ \bar{p} = -\bar{\psi} \left(\beta^A i \partial_A + m \right) - \frac{i}{2} \bar{\lambda} \beta^+ = -\bar{\psi} \left(\beta^A i \partial_A + m \right) - \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+ \\
&\approx \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+,
\end{aligned}$$

con lo cual

$$\bar{\psi} \left(\beta^+ i \partial_+ \right) + \bar{\psi} \left(\beta^A i \partial_A + m \right) = \bar{\psi} \left(\beta^\mu i \partial_\mu + m \right) \approx 0. \quad (5.105)$$

Las relaciones (5.104) y (5.105) garantizan que las ecuaciones de campo que resultan de las dos formulaciones son débilmente equivalentes.

5.3.3. Corchetes de Dirac

A fin de invertir los vínculos de segunda clase sería conveniente proyectar los mismos, procedimiento similar al realizado para el caso de 1 + 1 dimensiones. Para ello, se utilizaran las siguientes propiedades de las matrices β :

$$\begin{aligned}
 (\beta^+)^T &= \beta^- \quad , \quad (\beta^-)^T = \beta^+ , \\
 (\beta^0)^\dagger &= \beta^0 \quad , \quad (\beta^1)^\dagger = -\beta^1 , \\
 P &= \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- = \beta^- (\beta^+)^2 \beta^- = \beta^+ (\beta^-)^2 \beta^+ , \\
 P^+ &= P\beta^+ = \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) = \beta^- (\beta^+)^2 , \\
 P^- &= P\beta^- = \beta^+ (\beta^-)^2 , \\
 P^+ \beta^- &= P = P^- \beta^+ \quad , \quad P^+ \beta^+ = 0 = P^- \beta^- ,
 \end{aligned} \tag{5.106}$$

junto con

$$P = P^\dagger \quad , \quad P^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = P \quad , \quad \beta^+ (\beta^-)^2 (P^-)^\dagger = P,$$

al igual que los resultados presentados en la tabla 5.1. Utilizando la siguiente representación explícita de las variables $(\psi, \bar{\psi}, p, \bar{p})$ que definen el espacio de fase:

$$\begin{aligned}
 \psi &\equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi^+ \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^- \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\psi} \equiv (\varphi^* \quad \bar{\psi}^+ \quad \bar{\psi}^1 \quad \bar{\psi}^2 \quad \bar{\psi}^-) , \\
 p &\equiv \begin{pmatrix} p_\varphi \\ p_+ \\ p_1 \\ p_2 \\ p_- \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{p} \equiv (\bar{p}_\varphi \quad \bar{p}_+ \quad \bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \bar{p}_-) .
 \end{aligned} \tag{5.107}$$

Utilizando las identidades (5.106) se puede establecer que para el vínculo

$$\theta = p + \frac{i}{2}\beta^+\psi \approx 0,$$

se cumple

$$\begin{aligned} P\theta &= Pp + \frac{i}{2}P\beta^+\psi = p_\varphi + \frac{i}{2}P^+\psi = p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ \approx 0, \\ P^+\theta &= P^+p + \frac{i}{2}P^+\beta^+\psi = p_+ \approx 0, \\ P^k\theta &= P^kp + \frac{i}{2}P^k\beta^+\psi = p_k \approx 0, \\ P^-\theta &= P^-p + \frac{i}{2}P^-\beta^+\psi = p_- + \frac{i}{2}P\psi = p_- + \frac{i}{2}\varphi \approx 0. \end{aligned} \quad (5.108)$$

Ahora, la proyección del vínculo

$$\begin{aligned} \omega &= (1 - \beta^+\beta^-) (\beta^A i\partial_A^x - m) \psi \\ &= (1 - \beta^+\beta^-) (\beta^- i\partial_-^x + \beta^k i\partial_k^x - m) \psi \approx 0, \end{aligned}$$

indica:

$$\begin{aligned} P\omega &= (P - P^+\beta^-) (\beta^- i\partial_-^x - m) \psi = (P - P) (\beta^- i\partial_-^x - m) \psi \\ &= 0, \\ P^+\omega &= P^+ (\beta^- i\partial_-^x + \beta^k i\partial_k^x - m) \psi = i\partial_-^x (P\psi) - m (P^+\psi) \\ &= i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ \approx 0, \\ P^k\omega &= P^k (\beta^- i\partial_-^x + \beta^k i\partial_k^x - m) \psi = i\partial_k^x (P\psi) - m (P^k\psi) \\ &= i\partial_k^x \varphi - m\psi^k \approx 0, \\ P^-\omega &= (P^- - P^-) (\beta^- i\partial_-^x + \beta^k i\partial_k^x - m) \psi \\ &= 0, \end{aligned} \quad (5.109)$$

En el caso del vínculo

$$\Omega \equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^l \partial_l^x - im^2 \right) \psi \approx 0$$

5.3. Corchetes de Dirac

se determina que

$$\begin{aligned}
 P\Omega &= 0, \\
 P^+\Omega &= P \left(-2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^l \partial_l^x - im^2 \right) \psi \\
 &= -2m \partial_-^x (P^- \psi) - m \partial_k^x (P^k \psi) - im^2 (P\psi) \\
 &= -2m \partial_-^x \psi^- - m \partial_k^x \psi^k - im^2 \varphi \approx 0 \\
 P^k \Omega &= 0, \\
 P^- \Omega &= 0.
 \end{aligned} \tag{5.110}$$

El análisis sobre

$$\bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0,$$

garantiza entonces que

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta} P &= \bar{p} P - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ P = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2} \bar{\psi} (P^-)^\dagger = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2} \bar{\psi}^- \approx 0, \\
 \bar{\theta} (P^+)^\dagger &= \bar{p} (P^+)^\dagger - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ (P^+)^\dagger = \bar{p}_+ - \frac{i}{2} \bar{\psi} P = \bar{p}_+ - \frac{i}{2} \varphi^* \approx 0, \\
 \bar{\theta} (P^k)^\dagger &= \bar{p} (P^k)^\dagger - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ (P^k)^\dagger = \bar{p}_k \approx 0, \\
 \bar{\theta} (P^-)^\dagger &= \bar{p} (P^-)^\dagger - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ (P^-)^\dagger = \bar{p}_- \approx 0.
 \end{aligned} \tag{5.111}$$

En tanto al estudiar la proyección del vínculo

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} &= \bar{\psi} (i \partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \\
 &= \bar{\psi} (i \partial_-^x \beta^- + i \partial_l^x \beta^l + m) (1 - \beta^- \beta^+),
 \end{aligned}$$

se deduce:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}P &= \bar{\psi} (i\partial_-^x \beta^- + i\partial_l^x \beta^l + m) (P - P) = 0, \\
\bar{\omega} (P^+)^\dagger &= \bar{\psi} (i\partial_-^x \beta^- + i\partial_l^x \beta^l + m) \left((P^+)^\dagger - (P^+)^\dagger \right) = 0, \\
\bar{\omega} (P^k)^\dagger &= (i\partial_-^x \beta^- + i\partial_l^x \beta^l + m) (P^k)^\dagger = i\partial_k^x [\bar{\psi}P] + m [\bar{\psi} (P^k)^\dagger] \\
&= i\partial_k^x \varphi^* + m\bar{\psi}^k \approx 0, \\
\bar{\omega} (P^-)^\dagger &= \bar{\psi} (i\partial_-^x \beta^- + i\partial_l^x \beta^l + m) (P^-)^\dagger = i\partial_-^x [\bar{\psi}P] + m [\bar{\psi} (P^-)^\dagger] \\
&= i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.112}$$

Finalmente, cuando se estudia las componentes de

$$\bar{\Omega} = \bar{\psi} \left(-2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_l^x \beta^l + im^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0,$$

se deduce

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}P &= \bar{\psi} \left(-2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_l^x \beta^l + im^2 \right) \beta^+ \beta^- (P^+)^\dagger = 0, \\
\bar{\Omega} (P^+)^\dagger &= \bar{\psi} \left(-2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_l^x \beta^l + im^2 \right) \beta^+ \beta^- \beta^- (P^+)^\dagger = 0, \\
\bar{\Omega} (P^k)^\dagger &= \bar{\psi} \left(-2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_l^x \beta^l + im^2 \right) \beta^+ \beta^- \beta^- (P^k)^\dagger = 0, \\
\bar{\Omega} (P^-)^\dagger &= \bar{\psi} \left(-2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_l^x \beta^l + im^2 \right) P \\
&= -2m\partial_-^x [\bar{\psi} (P^+)^\dagger] + m\partial_l^x [\bar{\psi} (P^l)^\dagger] + \bar{\psi}P \\
&= -2m\partial_-^x \bar{\psi}^+ + m\partial_l^x \bar{\psi}^l + im^2 \varphi^* \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.113}$$

Por tanto, el conjunto de vínculos de segunda clase puros de la teoría de DKP son:

$$\begin{aligned}
p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ &\approx 0, & p_+ &\approx 0, & p_k &\approx 0, & p_- + \frac{i}{2}\varphi &\approx 0 \\
i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ &\approx 0, & i\partial_k^x \varphi - m\psi^k &\approx 0, & -2m\partial_-^x \psi^- - m\partial_k^x \psi^k - im^2 \varphi &\approx 0 \\
\bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- &\approx 0, & \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* &\approx 0, & \bar{p}_k &\approx 0, & \bar{p}_- &\approx 0, \\
i\partial_k^x \varphi^* + m\bar{\psi}^k &\approx 0, & i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- &\approx 0, & -2m\partial_-^x \bar{\psi}^+ + m\partial_l^x \bar{\psi}^l + im^2 \varphi^* &\approx 0.
\end{aligned}$$

5.3. Corchetes de Dirac

Con el fin de calcular la matriz de vínculos de segunda clase asociada a este conjunto es conveniente denotarlos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &\equiv p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ & , & & \Psi_8 &\equiv \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \\
 \Psi_2 &\equiv p_+ & , & & \Psi_9 &\equiv \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\bar{\varphi}^* \\
 \Psi_3 &\equiv p_k & , & & \Psi_{10} &\equiv \bar{p}_k \\
 \Psi_4 &\equiv p_- + \frac{i}{2}\varphi & , & & \Psi_{11} &\equiv \bar{p}_- \\
 \Psi_5 &\equiv i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ & , & & \Psi_{12} &\equiv i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \\
 \Psi_6 &\equiv i\partial_k^x \varphi - m\psi^k & , & & \Psi_{13} &\equiv i\partial_k^x \varphi^* + m\bar{\psi}^k \\
 \Psi_7 &\equiv -2m\partial_-^x \psi^- - m\partial_k^x \psi^k - im^2\varphi & , & & \Psi_{14} &\equiv -2m\partial_-^x \bar{\psi}^+ + m\partial_k^x \bar{\psi}^k + im^2\varphi^*
 \end{aligned} \tag{5.114}$$

los cuales satisfacen los siguiente corchetes de Poisson diferentes de cero:

$$\begin{aligned}
 \{ \Psi_1(x), \Psi_9(y) \} &= i\delta^3(x-y) & \{ \Psi_9(x), \Psi_1(y) \} &= -i\delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_1(x), \Psi_{12}(y) \} &= i\partial_-^x \delta^3(x-y) & \{ \Psi_{12}(x), \Psi_1(y) \} &= i\partial_-^x \delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_1(x), \Psi_{13}(y) \} &= i\partial_k^x \delta^3(x-y) & \{ \Psi_{13}(x), \Psi_1(y) \} &= i\partial_k^x \delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_1(x), \Psi_{14}(y) \} &= -im^2\delta^3(x-y) & \{ \Psi_{14}(x), \Psi_1(y) \} &= im^2\delta^3(x-y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \{ \Psi_2(x), \Psi_{14}(y) \} &= -2m\partial_-^x \delta^3(x-y) & \{ \Psi_{14}(x), \Psi_2(y) \} &= -2m\partial_-^x \delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_3(x), \Psi_{13}(y) \} &= -m\delta_{kl}\delta^3(x-y) & \{ \Psi_{13}(x), \Psi_3(y) \} &= m\delta_{kl}\delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_3(x), \Psi_{14}(y) \} &= m\partial_k^x \delta^3(x-y) & \{ \Psi_{14}(x), \Psi_3(y) \} &= m\partial_k^x \delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_4(x), \Psi_8(y) \} &= i\delta^3(x-y) & \{ \Psi_8(x), \Psi_4(y) \} &= -i\delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_4(x), \Psi_{12}(y) \} &= -m\delta^3(x-y) & \{ \Psi_{12}(x), \Psi_4(y) \} &= m\delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_5(x), \Psi_8(y) \} &= i\partial_-^x \delta^3(x-y) & \{ \Psi_8(x), \Psi_5(y) \} &= i\partial_-^x \delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_5(x), \Psi_9(y) \} &= -m\delta^3(x-y) & \{ \Psi_9(x), \Psi_5(y) \} &= m\delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_6(x), \Psi_8(y) \} &= i\partial_k^x \delta^3(x-y) & \{ \Psi_8(x), \Psi_6(y) \} &= i\partial_k^x \delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_6(x), \Psi_{10}(y) \} &= -m\delta_{kl}\delta^3(x-y) & \{ \Psi_{10}(x), \Psi_6(y) \} &= m\delta_{kl}\delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_7(x), \Psi_8(y) \} &\approx -im^2\delta^3(x-y) & \{ \Psi_8(x), \Psi_7(y) \} &= im^2\delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_7(x), \Psi_{10}(y) \} &\approx -m\partial_k^x \delta^3(x-y) & \{ \Psi_{10}(x), \Psi_7(y) \} &= -m\partial_k^x \delta^3(x-y) \\
 \{ \Psi_7(x), \Psi_{11}(y) \} &\approx -2m\partial_-^x \delta^3(x-y) & \{ \Psi_{11}(x), \Psi_7(y) \} &= -2m\partial_-^x \delta^3(x-y)
 \end{aligned}$$

De los resultados anteriores se puede definir la matriz de vínculos de segunda clase donde sus elementos de matriz son definidos por la siguiente relación:

$$D_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_i(x), \Psi_j(y) \right\}, \quad (5.115)$$

y que tendrá la siguiente estructura matricial:

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{7 \times 7} & \boldsymbol{\varphi}(x, y) \\ \boldsymbol{\chi}(x, y) & \mathbf{0}_{7 \times 7} \end{pmatrix}, \quad (5.116)$$

donde $\mathbf{A}(x, y)$ y $\mathbf{B}(x, y)$ son matrices 7×7 que tienen la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\varphi}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & i\partial_-^x & i\partial_k^x & -im^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2m\partial_-^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\delta_{kl} & m\partial_k^x \\ i & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 \\ i\partial_-^x & -m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_k^x & 0 & -m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -im^2 & 0 & -m\partial_k^x & -2m\partial_-^x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \quad (5.117)$$

$$\boldsymbol{\chi}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & i\partial_-^x & i\partial_k^x & im^2 \\ -i & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m\delta_{kl} & -m\partial_k^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2m\partial_-^x \\ i\partial_-^x & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_k^x & 0 & m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ im^2 & -2m\partial_-^x & m\partial_k^x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

mientras que $\mathbf{0}_{7 \times 7}$ se interpretan como matrices nulas de 7×7 . A fin de calcular los corchetes de Dirac es necesario calcular la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase la cual sebera satisfacer la siguiente ecuación:

$$\int d^3z D(x, z) C^{-1}(z, y) = \int d^3z C^{-1}(x, z) D(z, y) = \delta^3(x - y). \quad (5.118)$$

5.3. Corchetes de Dirac

Un cálculo laborioso permite determinar que la inversa de la matriz de vínculos tiene la siguiente representación:

$$\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{9 \times 9} & \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \mathbf{0}_{9 \times 9} \end{pmatrix}, \quad (5.119)$$

donde

$$\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{17} & B_{18} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & 0 & 0 \\ D_{10} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & 0 & D_{17} & 0 \\ E_{10} & E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & 0 & 0 & 0 \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & 0 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & 0 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 & 0 & R_8 & 0 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & W_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo que los elementos de matriz de $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ y $\boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ son funciones de (\mathbf{x}, \mathbf{y}) y tienen la siguiente forma:

Funciones $A_i(x, y)$:

$$A_{10}(x, y) = -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y),$$

$$A_{11}(x, y) = \frac{i}{2} \delta^3(x - y),$$

$$A_{12}(x, y) = \frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right),$$

$$A_{13}(x, y) = \frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right),$$

$$A_{14}(x, y) = -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right],$$

$$A_{15}(x, y) = -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).$$

Funciones $B_i(x, y)$:

$$B_{10}(x, y) = \frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right],$$

$$B_{11}(x, y) = \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \delta^3(x - y) \right\},$$

5.3. Corchetes de Dirac

$$B_{12}(x, y) = \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x-y) \right) \right],$$

$$B_{13}(x, y) = \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x-y) \right) \right],$$

$$B_{14}(x, y) = -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \frac{1}{2} \left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\},$$

$$B_{15}(x, y) = -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right],$$

$$B_{16}(x, y) = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x-y) \right),$$

$$B_{17}(x, y) = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x-y) \right),$$

$$B_{18}(x, y) = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y).$$

Funciones $C_i(x, y)$:

$$C_{10}(x, y) = \frac{i}{2} \partial_1^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right),$$

$$C_{11}(x, y) = \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x-y),$$

$$C_{12}(x, y) = \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x-y) \right) \right],$$

$$C_{13}(x, y) = \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x-y) \right) \right],$$

$$C_{14}(x, y) = -\frac{1}{4m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right],$$

$$C_{15}(x, y) = -\frac{1}{2m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right],$$

$$C_{16}(x, y) = \frac{1}{m} \delta^3(x-y).$$

Funciones $D_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 D_{10}(x, y) &= \frac{i}{2} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 D_{11}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x - y), \\
 D_{12}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 D_{13}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 D_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 D_{15}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \partial_2^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
 D_{17}(x, y) &= \frac{1}{m} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

Funciones $E_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 E_{10}(x, y) &= \frac{i}{2} \delta^3(x - y), \\
 E_{11}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x - y), \\
 E_{12}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
 E_{13}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x - y), \\
 E_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \\
 E_{15}(x, y) &= \frac{1}{2m} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

5.3. Corchetes de Dirac

Funciones $F_i(x, y)$:

$$F_{10}(x, y) = -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y),$$

$$F_{11}(x, y) = \frac{1}{2m} \delta^3(x - y),$$

$$F_{12}(x, y) = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right),$$

$$F_{13}(x, y) = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right),$$

$$F_{14}(x, y) = -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right],$$

$$F_{15}(x, y) = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).$$

Funciones $G_i(x, y)$:

$$G_{12}(x, y) = \frac{1}{m} \delta^3(x - y),$$

$$G_{14}(x, y) = -\frac{1}{2m} \partial_1^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right).$$

Funciones $H_i(x, y)$:

$$H_{13}(x, y) = \frac{1}{m} \delta^3(x - y),$$

$$H_{14}(x, y) = -\frac{1}{2m} \partial_2^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right).$$

Funciones $K_i(x, y)$:

$$K_{14}(x, y) = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).$$

Funciones $M_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}M_1(x, y) &= -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \\M_2(x, y) &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\M_3(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right), \\M_4(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right), \\M_5(x, y) &= -\frac{i}{2} \delta^3(x - y), \\M_6(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).\end{aligned}$$

Funciones $P_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}P_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \delta^3(x - y), \\P_2(x, y) &= \frac{1}{4m} \left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \\P_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\P_4(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x - y), \\P_5(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x - y), \\P_6(x, y) &= -\frac{1}{2m} \delta^3(x - y).\end{aligned}$$

5.3. Corchetes de Dirac

Funciones $Q_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 Q_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \partial_1^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
 Q_2(x, y) &= \frac{1}{4m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 Q_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 Q_4(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 Q_5(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
 Q_6(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
 Q_7(x, y) &= -\frac{1}{m} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

Funciones $R_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 R_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \partial_2^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
 R_2(x, y) &= \frac{1}{4m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 R_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 R_4(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 R_5(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x - y), \\
 R_6(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
 R_8(x, y) &= -\frac{1}{m} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

Funciones $S_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 S_1(x, y) &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 S_2(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \frac{1}{4} \left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right] \right\}, \\
 S_3(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 S_4(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
 S_5(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \delta^3(x - y) \right], \\
 S_6(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 S_7(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right), \\
 S_8(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right), \\
 S_9(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

Funciones $T_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 T_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \quad , \quad T_5(x, y) = -\frac{1}{2m} \delta^3(x - y), \\
 T_2(x, y) &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\left(\partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
 T_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_1^x \delta^3(x - y) \right), \\
 T_4(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left(\partial_2^x \delta^3(x - y) \right), \\
 T_6(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).
 \end{aligned}$$

5.3. Corchetes de Dirac

Funciones $U_i(x, y)$:

$$U_2(x, y) = -\frac{1}{2m} \partial_1^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right),$$

$$U_3(x, y) = -\frac{1}{m} \delta^3(x - y).$$

Funciones $W_i(x, y)$:

$$W_2(x, y) = -\frac{1}{2m} \partial_2^x \left(\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right),$$

$$W_4(x, y) = -\frac{1}{m} \delta^3(x - y).$$

Funciones $Z_i(x, y)$:

$$Z_2(x, y) = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).$$

Los resultados anteriores garantizan que se pueda definir el corchete de Dirac entre dos variables dinámicas $A_a(x)$ y $B_b(y)$ de la siguiente manera:

$$\left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_D = \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ A_a(x), \Psi_\alpha(u) \right\} D_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), B_b(y) \right\}. \quad (5.120)$$

De la estructura de vínculos definidos por (5.114), que en total constituye un conjunto de 19 elementos, es posible determinar que el espacio de fase expandido por $(\psi, \bar{\psi}, p, \bar{p})$, que tiene dimensión 20, solamente existen 2 campos independientes, que dada forma de los mismos vínculos se pueden considerar como siendo (φ, φ^*) . Utilizando las siguientes corchetes de Poisson, diferentes de cero, entre los grados de libertad (φ, φ^*) y los vínculos (5.114):

$$\left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\} = \delta^3(x - u) \quad , \quad \left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\} = \delta^3(x - u), \quad (5.121)$$

se deduce que el corchete de Dirac asociados al campo $\varphi(x)$ se calculan a partir de:

$$\begin{aligned} \{\varphi(x), \mathbf{B}_b(y)\}_D &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int du dv \left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\} D_{8\beta}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\} \\ &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int du dv \delta^3(x-u) D_{8\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\} \\ &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int dv D_{8\beta}^{-1}(x, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}. \end{aligned}$$

Así, se determina que el corchetes de Dirac entre los campos (φ, φ^*) es:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D &= - \int dv D_{81}^{-1}(x, v) \left\{ \Psi_1(v), \varphi^*(y) \right\} \\ &= \int dv D_{81}^{-1}(x, v) \delta^3(v-y) \\ &= D_{81}^{-1}(x, y) \end{aligned}$$

De la representación matricial de la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase se puede deducir que

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D = M_1(x, y) = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top). \quad (5.122)$$

Si hacemos uso de la forma física de la función de onda del campo de DKP para el sector de espín 0 indicada por la ecuación (4.126), según la cual:

$$\varphi(x) = \sqrt{m} \phi(x) \quad , \quad \varphi^*(x) = \sqrt{m} \phi^*(x), \quad (5.123)$$

se puede observar a partir de (5.122)

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D = m \left\{ \phi(x), \phi^*(y) \right\}_D = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top),$$

es decir:

$$\left\{ \phi(x), \phi^*(y) \right\}_D = -\frac{1}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top), \quad (5.124)$$

resultado que es equivalente a las relaciones derivadas en (4.70) para el caso libre.

Capítulo 6

Electrodinámica Escalar de primer Orden en las Coordenadas de Plano Nulo

6.1. Introducción

En el periodo comprendido entre 1939 hasta 1970 los trabajos desarrollados con la ecuación de DKP se direccionaron al estudio de partículas cargadas interactuando con un campo electromagnético. Estudios de diferentes procesos tomando como base la formulación de DKP y de Klein-Gordon condujeron a resultados idénticos hasta correcciones de un loop [87]. Sin embargo, A. Wightman [88] mostró que cuando el campo de DKP se acopla al campo electromagnético, la ecuación de campo para la partícula de espín 0 es estable bajo perturbaciones locales suaves de campos externos.

Es bien conocido el hecho que en el caso de campos libres existe una equivalencia entre el formalismo de DKP con las ecuaciones de campo de KG y

de Proca, no obstante, cuando alguna interacción es presente, como en el caso de la electromagnética, surgen ciertas dudas. Fue mostrado [91] la presencia de términos anómalos en el Hamiltoniano de la teoría y la aparente diferencia entre las descripciones no existen si se especifican cuidadosamente las componentes físicas de los campos de DKP. Ha sido probado [92] que los elementos de matriz S en las teorías de DKP y de KG coinciden en el caso de partículas de espín 0 interactuando con campos externos gauge abelianos y no abelianos incluyendo el campo gravitacional.

En este capítulo estudiaremos la estructura canónica del campo de DKP interactuando con el campo electromagnético. Se realizará el estudio de la estructura de vínculos de la teoría para el caso de dos y cuatro dimensiones en el formalismo de las coordenadas de plano nulo. Se estudiará la naturaleza gauge del problema y se considerará la condición de gauge más conveniente con el fin de calcular los DB entre los grados de libertad.

6.2. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en $1 + 1$ Dimensiones

La teoría, en forma general, es descrita por la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu (\bar{D}_\mu \psi) - \frac{i}{2} (D_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (6.1)$$

donde hemos definido las derivadas covariantes $D_\mu \equiv i\partial_\mu - gA_\mu$ and $\bar{D}_\mu \equiv i\partial_\mu + gA_\mu$. Las ecuaciones de campo que correspondientes a la densidad Lagrangiana (6.1) son:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - g\bar{\psi}\beta^\nu\psi = 0 \quad , \quad \bar{\psi}(\beta^\mu\bar{D}_\mu + m) = 0 \quad , \quad (\beta^\mu D_\mu - m)\psi = 0, \quad (6.2)$$

6.2. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 1 + 1 Dimensiones

Los momentos canónicos (π^μ, \bar{p}, p) conjugados a las variables $(A_\mu, \psi, \bar{\psi})$, respectivamente, son definidos de la siguiente manera:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ A_\mu)} = -F^{+\mu} \quad , \quad \bar{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \quad , \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{2} \beta^+ \psi \quad (6.3)$$

De conjunto de relaciones (6.3) es posible deducir el siguiente conjunto de vínculos primarios:

$$\pi^+ \approx 0 \quad , \quad \theta = p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0 \quad , \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0, \quad (6.4)$$

junto con la siguiente relación dinámica:

$$\partial_+ A_- = \pi^- + \partial_- A_+ \quad (6.5)$$

La evolución temporal de las variables del espacio de fase $(A_\mu, \psi, \bar{\psi}, \pi^\mu, \bar{p}, p)$ es determinada por el Hamiltoniano canónico al cual se le asocia la siguiente densidad:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &\equiv \pi^\mu \partial_+ A_\mu + \bar{p} \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} p - \mathcal{L} \\ &= \pi^- \left(\pi^- + \partial_- A_+ \right) + \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \dot{\psi} - \frac{i}{2} \dot{\bar{\psi}} \beta^+ \psi - \left[\frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \dot{\psi} - \frac{i}{2} \dot{\bar{\psi}} \beta^+ \psi \right. \\ &\quad \left. \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^- \partial_- \psi - \frac{i}{2} \partial_- \bar{\psi} \beta^- \psi + g A_- \bar{\psi} \beta^- \psi + g A_+ \bar{\psi} \beta^+ \psi + m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{2} \pi^{-2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \pi^{-2} + \left(\pi^- \partial_- + g \bar{\psi} \beta^+ \psi \right) A_+ + \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_- - \overrightarrow{\partial}_- \right) + g A_- \beta^- + m \right] \psi, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \int dx^- \left\{ \frac{1}{2} \pi^{-2} + \left(\pi^- \partial_- + g \bar{\psi} \beta^+ \psi \right) A_+ \right. \\ &\quad \left. + \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_- - \overrightarrow{\partial}_- \right) + g A_- \beta^- + m \right] \psi \right\}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Sin embargo, debido a la presencia de los vínculos primarios, la dinámica del sistema no es únicamente definida por \mathcal{H}_c con lo cual se debe introducir el

Hamiltoniano primario H_P definido a partir del Hamiltoniano canónico mas una combinación de los vínculos primarios, ósea:

$$H_P = H_C + \int dx^- \left(u(x) \pi^+(x) + \bar{\lambda}(x) \theta(x) + \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right), \quad (6.7)$$

donde $(u, \bar{\lambda}, \lambda)$ son un conjunto de multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos primarios $(\pi^+, \theta, \bar{\theta})$ respectivamente. Ahora, con el fin de determinar la consistencia de los vínculos primarios se procede a definir los corchetes fundamentales de Poisson entre las variables dinámicas fundamentales de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left\{ A_\mu(x), \pi^\nu(y) \right\} &= \delta_\mu^\nu \delta(x-y), \\ \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} &= \delta_{ab} \delta(x-y), \\ \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} &= \delta_{ab} \delta(x-y). \end{aligned} \quad (6.8)$$

A partir de (6.8) es posible mostrar que el conjunto de vínculos primarios satisface los siguientes corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned} \left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= i\beta_{ab}^+ \delta(x-y), \\ \left\{ \bar{\theta}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= -i\beta_{ba}^+ \delta(x-y). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Ahora, se procese a calcular la consistencia del vínculo primario $\pi^+(x)$ del sector electromagnético de manera que se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^+(x) &= \left\{ \pi^+(x), H_P \right\} = \int dy \left\{ \pi^+(x), \left[\pi^-(y) \partial_-^y + g \bar{\psi}(y) \beta^+ \psi(y) \right] A_+(y) \right\} \\ &= - \int dy^- \left[\pi^-(y) \partial_-^y + g \bar{\psi}(y) \beta^+ \psi(y) \right] \delta(x^- - y^-) \\ &= - \int dy^- \left[-\pi^-(y) \partial_-^x + g \bar{\psi}(y) \beta^+ \psi(y) \right] \delta(x^- - y^-) \\ &= \partial_-^x \pi^-(x) - g \bar{\psi}(x) \beta^+ \psi(x) \approx 0, \end{aligned}$$

6.2. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 1 + 1 Dimensiones

entonces,

$$G(x) \equiv \partial_-^x \pi^-(x) - g \bar{\psi}(x) \beta^+ \psi(x) \approx 0, \quad (6.10)$$

lo que implica que un vínculo secundario asociado con el sector electromagnético es encontrado que se conoce como la ley de Gauss para la electrodinámica escalar. Con el fin de calcular la consistencia de éste vínculo se utilizarán las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ G(x), \theta_b(y) \right\} &= -g \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} [\beta^+ \psi(x)]_a \\ &= -g [\beta^+ \psi(x)]_b \delta(x^- - y^-) \\ \left\{ G(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= -g [\bar{\psi} \beta^+(x)]_a \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} \\ &= -g [\bar{\psi} \beta^+(x)]_b \delta(x^- - y^-). \end{aligned} \quad (6.11)$$

A partir de los resultados anteriores se determina que:

$$\begin{aligned} \dot{G}(x) &= \left\{ G(x), H_p \right\} \\ &= \int dy^- \left\{ G(x), g A_-(y) \bar{\psi}(y) \beta^- \psi(y) + \bar{\lambda}(y) \theta(y) + \bar{\theta}(y) \lambda(y) \right\} \\ &= g \partial_-^x \int dy^- \left\{ \pi^-(x), A_-(y) \right\} (\bar{\psi}(y) \beta^- \psi(y)) + \int dy^- \bar{\lambda}_b(y) \left\{ G(x), \theta_b(y) \right\} \\ &\quad + \int dy^- \left\{ G(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} \lambda_b(y) \\ &= \int dy^- \left[-g (\bar{\psi}(y) \beta^- \psi(y)) \partial_-^x - g \bar{\lambda}(y) \beta^+ \psi(x) \right. \\ &\quad \left. - g \bar{\psi} \beta^+(x) \lambda(y) \right] \delta(x^- - y^-) \\ &= -g \left[\partial_-^x (\bar{\psi}(x) \beta^- \psi(x)) + \bar{\lambda}(x) \beta^+ \psi(x) + \bar{\psi}(x) \beta^+ \lambda(x) \right] \approx 0, \end{aligned}$$

de manera que

$$\dot{G} = \partial_-^x (\bar{\psi} \beta^- \psi) + \bar{\lambda} \beta^+ \psi + \bar{\psi} \beta^+ \lambda \approx 0 \quad (6.12)$$

Siendo que es necesario probar que la ley de Gauss se conserva es necesario analizar la consistencia de los vínculos primarios asociados al sector de DKP.

Así, la consistencia del vínculo $\theta(x)$ determina que

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_a(x) &= \left\{ \theta_a(x), H_P \right\} \\
&= \int dy^- \left\{ \theta_a(x), \bar{\psi}_b(y) \right\} \left[g \beta^+ \psi(y) A_+(y) + \left[\frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) \beta^- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g A_-(y) \beta^- + m \right] \psi(y) \right]_b + \int dy^- \left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} \lambda^b(y) \\
&= \int dy^- \delta(x^- - y^-) \left[- \left[g \beta^+ \psi(y) A_+(y) + \frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) \beta^- \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g A_-(y) \beta^- + m \right] \psi + i\beta^+ \lambda(y) \right]_a \\
&= \int dy^- \delta(x^- - y^-) \left[- \left[g \beta^+ \psi(y) A_+(y) + \frac{i}{2} \left(-\overleftarrow{\partial}_-^x - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) \beta^- \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g A_-(y) \beta^- + m \right] \psi + i\beta^+ \lambda(y) \right]_a \\
&= \left[\left[\beta^- \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) - m \right] \psi(x) - g A_+(x) \beta^+ \psi(x) \right. \\
&\quad \left. + i\beta^+ \lambda(x) \right]_a, \\
&= \left[\left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi(x) - g A_+(x) \beta^+ \psi(x) + i\beta^+ \lambda(x) \right]_a,
\end{aligned}$$

entonces

$$\dot{\theta} = \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi - g A_+ \beta^+ \psi + i\beta^+ \lambda \approx 0, \quad (6.13)$$

donde hemos utilizado de definición de derivada covariantes $D_-^x \equiv i\partial_-^x - gA_-$.

6.2. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 1 + 1 Dimensiones

En forma similar, la consistencia del vínculos $\bar{\theta}(x)$ implica que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\theta}}_a(x) &= \left\{ \bar{\theta}_a(x), H_P \right\} \\
 &= \int dy^- \left(g \bar{\psi}(y) \beta^+ \mathcal{A}_+(y) + \bar{\psi}(y) \left[\frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) \beta^- + g \mathcal{A}_-(y) \beta^- + m \right] \right)_b \\
 &\quad \left\{ \bar{\theta}_a(x), \psi_b(y) \right\} + \int dy^- \bar{\lambda}^a(y) \left\{ \bar{\theta}_a(x), \theta_a(y) \right\} \\
 &= \int dy^- \left[-\bar{\psi}(y) \left[g \beta^+ \mathcal{A}_+(y) + \frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y \right) \beta^- + g \mathcal{A}_-(y) \beta^- + m \right] \right. \\
 &\quad \left. - i \bar{\lambda}(y) \beta^+ \right]_a \delta(x^- - y^-) \\
 &= \int dy^- \left[-\bar{\psi}(y) \left[g \beta^+ \mathcal{A}_+(y) + \frac{i}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_-^y + \overrightarrow{\partial}_-^x \right) \beta^- + g \mathcal{A}_-(y) \beta^- + m \right] \right. \\
 &\quad \left. - i \bar{\lambda}(y) \beta^+ \right]_a \delta(x^- - y^-) \\
 &= \left[-\bar{\psi}(x) \left[\beta^- \left(i \partial_-^x + g \mathcal{A}_-(x) \right) + m \right] - g \mathcal{A}_+(x) \bar{\psi}(x) \beta^+ - i \bar{\lambda}(x) \beta^+ \right]_a \\
 &= - \left[\bar{\psi}(x) \left[\beta^- \overline{D}_-^x + m \right] + g \mathcal{A}_+(x) \bar{\psi}(x) \beta^+ + i \bar{\lambda}(x) \beta^+ \right]_a,
 \end{aligned}$$

así que:

$$\dot{\bar{\theta}} = \bar{\psi} \left(\beta^- \overline{D}_-^x + m \right) + g \mathcal{A}_+ \bar{\psi} \beta^+ + i \bar{\lambda} \beta^+ \approx 0, \quad (6.14)$$

con $\overline{D}_-^x \equiv i \partial_-^x + g \mathcal{A}_-$. De las relaciones (6.13) y (6.14) es posible determinar que:

$$\begin{aligned}
 \beta^+ \lambda &\approx i \left(\beta^- \overline{D}_-^x - m \right) \psi - i g \mathcal{A}_+ \beta^+ \psi, \\
 \bar{\lambda} \beta^+ &\approx i \bar{\psi} \left(\beta^- \overline{D}_-^x + m \right) + i g \mathcal{A}_+ \bar{\psi} \beta^+,
 \end{aligned}$$

que al ser substituidas en la expresi3n (6.12) resulta en:

$$\begin{aligned}
\dot{G} &= \partial_-^x (\bar{\psi} \beta^- \psi) + \bar{\lambda} \beta^+ \psi + \bar{\psi} \beta^+ \lambda \\
&= \partial_-^x (\bar{\psi} \beta^- \psi) + \left[i \bar{\psi} \left(\beta^- \bar{D}_-^x + m \right) + ig A_+ \bar{\psi} \beta^+ \right] \psi \\
&\quad + \bar{\psi} \left[i \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi - ig A_+ \beta^+ \psi \right] \\
&= \partial_-^x (\bar{\psi} \beta^- \psi) - (\partial_-^x \bar{\psi}) \beta^- \psi + ig A_- \bar{\psi} \beta^- \psi + mi \bar{\psi} \psi \\
&\quad + ig A_+ \bar{\psi} \beta^+ \psi - \bar{\psi} \beta^- (\partial_-^x \psi) - ig A_- \bar{\psi} \beta^- \psi - mi \bar{\psi} \psi - ig A_+ \bar{\psi} \beta^+ \psi \\
&= \partial_-^x (\bar{\psi} \beta^- \psi) - \partial_-^x (\bar{\psi} \beta^- \psi) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{G} = 0, \quad (6.15)$$

as3, la ley de gauss de la electrodin3mica escalar es autom3ticamente conservada.

Si la representaci3n matricial de las matrices β en $1 + 1$ dimensiones es utilizada, es posible determinar a partir de la ecuaci3n (6.13) que al utilizar el proyector $\beta^- \beta^+$ se deduce:

$$\begin{aligned}
i \beta^- \beta^+ \left(\lambda + ig A_+ \psi \right) &\approx -\beta^- \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi \Rightarrow \\
i \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 + ig A_+ \psi_1 \\ \lambda_2 + ig A_+ \psi_2 \\ \lambda_3 + ig A_+ \psi_3 \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -m & 0 & D_-^x \\ D_-^x & -m & 0 \\ 0 & 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} i \left(\lambda_1 + ig A_+ \psi_1 \right) \\ i \left(\lambda_2 + ig A_+ \psi_2 \right) \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} m \psi_3 \\ m \psi_1 - D_-^x \psi_3 \\ 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

de manera que la consistencia del v3nculo $\theta(x)$ determina condiciones sobre las componentes $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$ del multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ en tanto que la componente $\lambda_3(x)$ a3n se mantiene indeterminada. De manera similar al analizar la expresi3n (6.14) se deriva con la ayuda del proyector $\beta^+ \beta^-$ que:

$$i (\bar{\lambda} - ig A_+ \bar{\psi}) \beta^+ \beta^- \approx -\bar{\psi} \left(\beta^- \bar{D}_-^x + m \right) \beta^-,$$

lo que en forma matricial es equivalente con:

$$\left(i \left(\bar{\lambda}_1 - igA_+ \bar{\psi}_1 \right) \quad 0 \quad i \left(\bar{\lambda}_3 - igA_+ \bar{\psi}_3 \right) \right) = - \left(m \bar{\psi}_2 \quad 0 \quad m \bar{\psi}_1 + \bar{D}_-^x \bar{\psi}_2 \right),$$

con lo cual, solo las componentes $\bar{\lambda}_1(x)$ y $\bar{\lambda}_3(x)$ consiguen ser fijadas en tanto que la componente $\bar{\lambda}_2(x)$ del multiplicador $\bar{\lambda}(x)$ esta por especificar. Las afirmaciones anteriores dan an entender que la arbitrariedad en algunas de las componentes de los multiplicadores de Lagrange dan indicio de la existencia de vínculos secundarios en el sector escalar. En forma análoga a los resultados derivados con la teoría libre, los vínculos secundarios se infieren de los proyectores complementarios a aquellos utilizados anteriormente, con lo cual el conjunto de vínculos correspondientes al sector escalar tendrán la forma:

$$\begin{aligned} \omega_\delta &= \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi \right]_\delta \approx 0, & \delta = 2, & (6.16) \\ \bar{\omega}_\delta &= \left[\bar{\psi} \left(\bar{D}_-^x \beta^- + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_\delta \approx 0, & \delta = 3. & \end{aligned}$$

La consistencia de este nuevo conjunto de vínculos es analizado utilizando los siguientes corchetes de Poisson.

$$\begin{aligned} \left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^- D_-^x - m \right) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \bar{\theta}_a(x), \omega_b(y) \right\} &= - \left\{ \omega_b(y), \bar{\theta}_a(x) \right\} \\ &= \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^- \bar{D}_-^x + m \right) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[\left(\bar{D}_-^x \beta^- + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \theta_a(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= - \left\{ \bar{\omega}_b(y), \theta_a(x) \right\} & (6.17) \\ &= \left[\left(D_-^x \beta^- - m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \end{aligned}$$

junto con las relaciones,

$$\begin{aligned} \left\{ \omega_a(x), \pi^-(y) \right\} &= -g \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) \right]_a \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \bar{\omega}_a(x), \pi^-(y) \right\} &= g \left[\bar{\psi}(x) \beta^- \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \delta(x^- - y^-). & (6.18) \end{aligned}$$

Entonces, la consistencia del vínculo $\omega(x)$ establece que

$$\begin{aligned}
\dot{\omega}_\delta(x) &= \{\omega_\delta(x), H_P\} \\
&= \int dy^- \pi^-(y) \{\omega_\delta(x), \pi^-(y)\} + \int dy^- \partial_-^y A_+(y) \{\omega_\delta(x), \pi^-(y)\} \\
&\quad + \int dy^- \{\omega_\delta(x), \bar{\theta}_b(y)\} \lambda^b(y) \\
&= \int dy^- \left[-g \pi^-(y) (1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- \psi(x) - g \partial_-^y A_+(y) (1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- \psi(x) \right. \\
&\quad \left. + (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- \lambda(y) D_-^x - m \lambda(y)) \right] \delta(x^- - y^-) \\
&= \left[(1 - \beta^+ \beta^-) \left[-g (\pi^-(x) + \partial_-^x A_+(x)) \beta^- \psi + (\beta^- D_-^x - m) \lambda(x) \right] \right] \delta,
\end{aligned}$$

entonces

$$\dot{\omega} = (1 - \beta^+ \beta^-) \left[-g (\pi^- + \partial_-^x A_+) \beta^- \psi + (\beta^- D_-^x - m) \lambda \right] \approx 0, \quad (6.19)$$

con $\delta = 2$. Al utilizar la representación matricial de la anterior ecuación se deduce que:

$$\dot{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g (\pi^- + \partial_-^x A_+) \psi_1 + D_-^x \lambda_1 - m \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} \approx 0,$$

lo que implica una nueva relación entre las componentes $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$ manteniendo aún la componente $\lambda_3(x)$ indeterminada. Utilizando la relación $\beta^- \beta^{+2} \beta^- =$

6.2. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 1 + 1 Dimensiones

$\beta^+ \beta^{-2} \beta^+$ se determina

$$\begin{aligned}
 \beta^+ \dot{\omega} &= \beta^+ \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left[-g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \beta^- \psi + \left(\beta^- D_-^x - m \right) \lambda \right] \\
 &= \beta^- \beta^{+2} \left[-g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \beta^- \psi + \left(\beta^- D_-^x - m \right) \lambda \right] \\
 &= -g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \beta^- \beta^{+2} \beta^- \psi + \beta^- \beta^{+2} \beta^- D_-^x \lambda - m \beta^- \beta^{+2} \lambda \\
 &= -g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi - i \beta^+ \beta^{-2} D_-^x \left(i \beta^+ \lambda \right) + i m \beta^- \beta^+ \left(i \beta^+ \lambda \right) \\
 &= -g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi + i \beta^+ \beta^{-2} D_-^x \left[\left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi - g A_+ \beta^+ \psi \right] \\
 &\quad - i m \beta^- \beta^+ \left[\left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi - g A_+ \beta^+ \psi \right] \\
 &= -g \pi^- \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi - g \partial_-^x A_+ \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi - m i \beta^+ \beta^{-2} D_-^x \psi \\
 &\quad + g \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \partial_-^x \left(A_+ \psi \right) + g^2 i A_- A_+ \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi \\
 &\quad - i m \beta^- \beta^+ \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi + g i m A_+ \beta^- \beta^{+2} \psi \\
 &= -g \pi^- \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi - m i \beta^+ \beta^{-2} D_-^x \psi + g \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ A_+ \partial_-^x \psi \\
 &\quad + g^2 i A_- A_+ \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi - i m \beta^- D_-^x \psi + i m^2 \beta^- \beta^+ \psi + g i m A_+ \beta^- \beta^{+2} \psi \\
 &= -i m \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x \psi + i m^2 \beta^- \beta^+ \psi - g \pi^- \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi \\
 &\quad - i g A_+ \beta^- \beta^{+2} \left[\beta^- \left(i \partial_-^x - g A_- \right) - m \right] \psi \\
 &= -i m \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x \psi + i m^2 \beta^- \beta^+ \psi - g \pi^- \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi \\
 &\quad - i g A_+ \beta^+ \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi,
 \end{aligned}$$

relación que en forma compacta se expresa como:

$$\beta^+ \dot{\omega} = -i m \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x \psi + i m^2 \beta^- \beta^+ \psi - g \pi^- \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi - i g A_+ \beta^+ \omega \approx 0.$$

La relación anterior pone de manifiesto la existencia de un vínculo terciario que se definirá de la siguiente manera:

$$\Omega \equiv \left[-i m \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x + i m^2 \beta^- \beta^+ - g \pi^- \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \right] \psi \approx 0 \quad (6.20)$$

De forma similar se estudia la consistencia del otro vínculo secundario, a partir del cual se determina que

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\omega}}_\delta(x) &= \left\{ \bar{\omega}_\delta(x), H_P \right\} \\
&= \int dy^- \left[\pi^-(y) \left\{ \bar{\omega}_\delta(x), \pi^-(y) \right\} + \partial_-^y A_+(y) \left\{ \bar{\omega}_\delta(x), \pi^-(y) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \bar{\lambda}^b(y) \left\{ \bar{\omega}_\delta(x), \theta_b(y) \right\} \right] \\
&= \int dy^- \left[g\pi^-(y) \bar{\psi}(x) \beta^- (1 - \beta^- \beta^+) + g\partial_-^y A_+(y) \bar{\psi}(x) \beta^- (1 - \beta^- \beta^+) \right. \\
&\quad \left. + \bar{\lambda}^b(y) (\bar{D}_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_\delta \delta(x^- - y^-) \\
&= \left[\left[g \left(\pi^-(x) + \partial_-^x A_+(x) \right) \bar{\psi}(x) \beta^- + \bar{\lambda}(x) (\bar{D}_-^x \beta^- + m) \right] (1 - \beta^- \beta^+) \right]_\delta \\
&\approx 0,
\end{aligned}$$

para $\delta = 3$, es decir,

$$\dot{\bar{\omega}}(x) = \left[g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi} \beta^- + \bar{\lambda} (\bar{D}_-^x \beta^- + m) \right] (1 - \beta^- \beta^+) \approx 0, \quad (6.21)$$

que al ser representado en forma matricial se determina

$$\dot{\bar{\omega}}(x) = \left(0 \quad 0 \quad g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi}_1 + \bar{D}_-^x \bar{\lambda}_1 + m \bar{\lambda}_3 \right) \approx 0, \quad (6.22)$$

con lo cual una nueva relación entre las compones $\bar{\lambda}_1(x)$ y $\bar{\lambda}_3(x)$ se ha establecido, entre tanto $\bar{\lambda}_2(x)$ aún es indeterminada lo que indica la existencia de

un nuevo vínculo el cual se procede a determinar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\omega}}\beta^+ &= \left[g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi}\beta^- + \bar{\lambda} \left(\bar{D}_-^x \beta^- + m \right) \right] \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \beta^+ \\
 &= \left[g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi}\beta^- + \bar{\lambda} \left(\bar{D}_-^x \beta^- + m \right) \right] \beta^{+2} \beta^- \\
 &= g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi}\beta^- \beta^{+2} \beta^- + \bar{D}_-^x \bar{\lambda} \beta^- \beta^{+2} \beta^- + m \bar{\lambda} \beta^{+2} \beta^- \\
 &= g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi}\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ - i \bar{D}_-^x \left[i \bar{\lambda} \beta^+ \right] \beta^{-2} \beta^+ - i m \left[i \bar{\lambda} \beta^+ \right] \beta^+ \beta^- \\
 &= g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi}\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ + i \bar{D}_-^x \left[\left(\bar{\psi}\beta^- \bar{D}_-^x + m \bar{\psi} + g A_+ \bar{\psi}\beta^+ \right) \right] \beta^{-2} \beta^+ \\
 &\quad + i m \left[\left[\bar{\psi} \left(\beta^- \bar{D}_-^x + m \right) + g A_+ \bar{\psi}\beta^+ \right] \right] \beta^+ \beta^- \\
 &= g \pi^- \bar{\psi}\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ + g \partial_-^x A_+ \bar{\psi}\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ + m i \bar{D}_-^x \bar{\psi}\beta^{-2} \beta^+ \\
 &\quad - g \partial_-^x \left(A_+ \bar{\psi} \right) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ + i g^2 A_- A_+ \bar{\psi}\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ + i m \bar{\psi}\beta^- \beta^+ \beta^- \bar{D}_-^x \\
 &\quad + i m^2 \bar{\psi}\beta^+ \beta^- + i m g A_+ \bar{\psi}\beta^+ \beta^+ \beta^- \\
 &= i m \bar{D}_-^x \bar{\psi}\beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + i m^2 \bar{\psi}\beta^+ \beta^- + g \pi^- \bar{\psi}\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \\
 &\quad + i g A_+ \bar{\psi} \left[\beta^- \left(i \partial_-^x + g A_- \right) + m \right] \beta^{+2} \beta^- \\
 &= i m \bar{D}_-^x \bar{\psi}\beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + i m^2 \bar{\psi}\beta^+ \beta^- + g \pi^- \bar{\psi}\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \\
 &\quad + i g A_+ \bar{\psi} \left(\beta^- \bar{D}_-^x + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \beta^+ \\
 &= i m \bar{D}_-^x \bar{\psi}\beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + i m^2 \bar{\psi}\beta^+ \beta^- + g \pi^- \bar{\psi}\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ + i g A_+ \bar{\omega}\beta^+ \\
 &\approx i m \bar{D}_-^x \bar{\psi}\beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + i m^2 \bar{\psi}\beta^+ \beta^- + g \pi^- \bar{\psi}\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \approx 0,
 \end{aligned}$$

con lo cual un nuevo vínculos terciario resulta al cual se denotara de la siguiente manera:

$$\bar{\Omega} \equiv \bar{\psi} \left[i m \bar{D}_-^x \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + i m^2 \beta^+ \beta^- + g \pi^- \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \right] \approx 0 \quad (6.23)$$

Ahora, con el fin de calcular la consistencia de éste nuevo conjunto de vínculos primarios deducimos los siguientes PB de los vínculos terciarios con el restante

conjunto de vínculos del sector DKP, es decir:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ \right. \\
&\quad \left. - g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{ab} \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \bar{\theta}_a(x), \Omega_b(y) \right\} &= - \left\{ \Omega_b(y), \bar{\theta}_a(x) \right\} \\
&= \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \bar{D}_-^x - im^2 \beta^- \beta^+ \right. \\
&\quad \left. + g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{ba} \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[im \bar{D}_-^x \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + im^2 \beta^+ \beta^- \right. \\
&\quad \left. + g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{ba} \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ \theta_a(x), \bar{\Omega}_b(y) \right\} &= - \left\{ \bar{\Omega}_b(y), \theta_a(x) \right\} \\
&= \left[im D_-^x \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) - im^2 \beta^+ \beta^- \right. \\
&\quad \left. - g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{ab} \delta(x^- - y^-),
\end{aligned}$$

junto con el siguiente conjunto de relaciones

$$\begin{aligned}
\left\{ \Omega_a(x), \pi^-(y) \right\} &= igm \left[\left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) \right]_a \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \bar{\Omega}_a(x), \pi^-(y) \right\} &= igm \left[\bar{\psi}(x) \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \Omega_a(x), A_-(y) \right\} &= g \left[\beta^+ \beta^- \beta^+ \psi(x) \right]_a \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \bar{\Omega}_a(x), A_-(y) \right\} &= -g \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_a \delta(x^- - y^-).
\end{aligned}$$

Entonces, al considerar los resultados anteriores se puede deducir de la con-

sistencia del vínculo $\Omega(x)$ que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega}_a(x) &= \left\{ \Omega_a(x), H_P \right\} \\
 &= \int dy^- \left[\pi^-(y) \left\{ \Omega_a(x), \pi^-(y) \right\} + \partial_-^y \mathcal{A}_+(y) \left\{ \Omega_a(x), \pi^-(y) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + g \left(\bar{\Psi}(y) \beta^- \psi(y) \right) \left\{ \Omega_a(x), \mathcal{A}_-(y) \right\} + \left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}^b(y) \right\} \lambda_b(y) \right] \\
 &= \int dy^- \left[igm\pi^-(y) \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) + igm\partial_-^y \mathcal{A}_+(y) \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) \right. \\
 &\quad \left. + g^2 \left(\bar{\Psi}(y) \beta^- \psi(y) \right) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi(x) + \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \lambda(y) D_-^x \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + im^2 \beta^- \beta^+ \lambda(y) - g\pi^-(y) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \lambda(y) \right] \right] \delta(x^- - y^-) \\
 &= \left[igm\pi^-(x) \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) + igm\partial_-^x \mathcal{A}_+(x) \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) \right. \\
 &\quad \left. + g^2 \left(\bar{\Psi}(x) \beta^- \psi(x) \right) \beta^- \beta^{+2} \beta^- \psi(x) - im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x \lambda(x) \right. \\
 &\quad \left. + im^2 \beta^- \beta^+ \lambda(x) - g\pi^-(x) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \lambda(x) \right]_a \\
 &= \left[ig \left\{ m \left(\pi^-(x) + \partial_-^x \mathcal{A}_+(x) \right) \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - ig \left(\bar{\Psi}(x) \beta^- \psi(x) \right) \beta^+ \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \right\} \beta^- \psi(x) \right. \\
 &\quad \left. + \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ - g\pi^-(x) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \right] \lambda(x) \right]_a \\
 &\approx 0,
 \end{aligned}$$

de manera que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\Omega} &= ig \left\{ m \left(\pi^- + \partial_-^y \mathcal{A}_+ \right) \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) - ig \left(\bar{\Psi} \beta^- \psi \right) \beta^+ \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \right\} \beta^- \psi \\
 &\quad + \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ - g\pi^- \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \right] \lambda \approx 0. \quad (6.24)
 \end{aligned}$$

Si la representación matricial de las matrices β en 1 + 1 dimensiones es utili-

zada se puede mostrar que:

$$\dot{\Omega} = \begin{pmatrix} 2igm(\pi^- + \partial_y^- A_+) \psi_3 + g^2(\bar{\psi}\beta^-\psi) \psi_1 + (im^2 - g\pi^-) \lambda_1 - 2imD_-^x \lambda_3 \\ igm(\pi^- + \partial_y^- A_+) \psi_1 - imD_-^x \lambda_1 + im^2 \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

implicando en una nueva condición para las componentes $\lambda_1(x)$ y $\lambda_2(x)$ del multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$ junto con una condición para la componente $\lambda_3(x)$, así, nuevos vínculos no surgen de la consistencia de $\Omega(x)$. En forma similar, si estudiamos la consistencia del vínculo $\bar{\Omega}(x)$ se determina que:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}}_a(x) &= \{ \bar{\Omega}_a(x), H_p \} \\ &= \int dy^- \left[\pi^-(y) \{ \bar{\Omega}_a(x), \pi^-(y) \} + \partial_y^- A_+(y) \{ \bar{\Omega}_a(x), \pi^-(y) \} \right. \\ &\quad \left. + g(\bar{\psi}(y) \beta^-\psi(y)) \{ \bar{\Omega}_a(x), A_-(y) \} + \bar{\lambda}^b(y) \{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \} \right] \\ &= \int dy^- \left[igm\pi^-(y) \bar{\psi}(x) \beta^- (1 + \beta^-\beta^+) + igm\partial_y^- A_+(y) \bar{\psi}(x) \right. \\ &\quad \left. \beta^- (1 + \beta^-\beta^+) - g^2(\bar{\psi}(y) \beta^-\psi(y)) \bar{\psi}(x) \beta^+\beta^{-2}\beta^+ + \bar{\lambda}(y) \right. \\ &\quad \left. \left[im\bar{D}_-^x \beta^- (1 + \beta^-\beta^+) + im^2\beta^+\beta^- + g\pi^-\beta^+\beta^{-2}\beta^+ \right] \right]_a \delta(x^- - y^-) \\ &= \left[igm\pi^-(x) \bar{\psi}(x) \beta^- (1 + \beta^-\beta^+) + igm\partial_x^- A_+(x) \bar{\psi}(x) \right. \\ &\quad \left. \beta^- (1 + \beta^-\beta^+) - g^2(\bar{\psi}(x) \beta^-\psi(x)) \bar{\psi}(x) \beta^+\beta^{-2}\beta^+ \right. \\ &\quad \left. + \bar{\lambda}(x) \left[im\bar{D}_-^x \beta^- (1 + \beta^-\beta^+) + im^2\beta^+\beta^- + g\pi^-(x) \beta^+\beta^{-2}\beta^+ \right] \right]_a \\ &= \left[ig\bar{\psi}(x) \beta^- \left[m(\pi^-(x) + \partial_x^- A_+(x)) (1 + \beta^-\beta^+) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + ig(\bar{\psi}(x) \beta^-\psi(x)) (1 - \beta^-\beta^+) \beta^+ \right] + \bar{\lambda}(x) \right. \\ &\quad \left. \left[im\bar{D}_-^x \beta^- (1 + \beta^-\beta^+) + im^2\beta^+\beta^- + g\pi^-(x) \beta^+\beta^{-2}\beta^+ \right] \right]_a \\ &\approx 0, \end{aligned}$$

6.2. Clasificación de los Vínculos

resultando por tanto en

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}} = & ig\bar{\psi}\beta^- \left[m \left(\pi^- + \partial_-^y A_+ \right) \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + ig \left(\bar{\psi}\beta^- \psi \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \beta^+ \right] \\ & + \bar{\lambda} \left[im\bar{D}_-^x \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + im^2 \beta^+ \beta^- + g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right] \approx 0, \end{aligned} \quad (6.26)$$

que en forma de componentes se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}} = & \begin{pmatrix} -g^2 (\bar{\psi}\beta^- \psi) \bar{\psi}_1 + 2igm (\pi^- + \partial_-^y A_+) \bar{\psi}_2 + (im^2 + g\pi^-) \bar{\lambda}_1 + 2im\bar{D}_-^x \bar{\lambda}_2 \\ 0 \quad igm (\pi^- + \partial_-^y A_+) \bar{\psi}_1 + im\bar{D}_-^x \bar{\lambda}_1 + im^2 \bar{\lambda}_3 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.27)$$

así, una nueva condición entre las compones $\bar{\lambda}_1(x)$ y $\bar{\lambda}_3(x)$ del multiplicador de Lagrange $\bar{\lambda}(x)$ se ha deducido, junto con una condición sobre $\bar{\lambda}_2(x)$ que se mantenía desconocida.

6.2.1. Clasificación de los Vínculos

Finalmente se ha podido comprobar que $(\pi^+, G, \theta, \bar{\theta}, \omega, \bar{\omega}, \Omega, \bar{\Omega})$ que explícitamente tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \pi^+ & \approx 0 \quad , \quad G = \partial_-^x \pi^- - g\bar{\psi}\beta^+ \psi \approx 0, \\ \theta & = p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0 \quad , \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi}\beta^+ \approx 0, \\ \omega & = (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^- D_-^x - m) \psi \approx 0, \\ \bar{\omega} & = \bar{\psi} (\bar{D}_-^x \beta^- + m) (1 - \beta^- \beta^+) \approx 0, \\ \Omega & \equiv [-im (1 + \beta^+ \beta^-) \beta^- D_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ - g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+] \psi \approx 0, \\ \bar{\Omega} & \equiv \bar{\psi} \left[im\bar{D}_-^x \beta^- (1 + \beta^- \beta^+) + im^2 \beta^+ \beta^- + g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \right] \approx 0, \end{aligned} \quad (6.28)$$

constituye el conjunto máximo que la teoría posee y que satisfacen los siguientes PB:

$$\begin{aligned}
\left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= i\beta_{ab}^+ \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ G(x), \theta_b(y) \right\} &= -g \left[\beta^+ \psi(x) \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ G(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= -g \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^- D_-^x - m \right) \right]_{ab} \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[\left(\bar{D}_-^x \beta^- + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{ba} \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ \right. \\
&\quad \left. - g\pi^-(x) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \right]_{ab} \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[im \bar{D}_-^x \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + im^2 \beta^+ \beta^- \right. \\
&\quad \left. + g\pi^-(x) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \right]_{ba} \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ \omega_a(x), \Omega_b(y) \right\} &= g^2 \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) \right]_a \left[\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi(x) \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ \omega_a(x), \bar{\Omega}_b(y) \right\} &= -g^2 \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) \right]_a \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \Omega_b(y) \right\} &= -g^2 \left[\bar{\psi}(x) \beta^- \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \left[\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi(x) \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \bar{\Omega}_b(y) \right\} &= g^2 \left[\bar{\psi}(x) \beta^- \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
\left\{ \Omega_a(x), \bar{\Omega}_b(y) \right\} &= img^2 \left[\left[\left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi \right]_a \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \right]_b \right. \\
&\quad \left. + \left[\beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \psi(x) \right]_a \left[\bar{\psi}(x) \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) \right]_b \right] \delta(x^- - y^-)
\end{aligned} \tag{6.29}$$

Las relaciones anteriores muestran que $\pi^+(x)$ satisface la condición que el PB de él con cualquier otro vínculo de la teoría es cero, por tanto, se identifica a $\pi^+(x)$ como un vínculo de primera clase. Sin embargo, dado el hecho que el sistema que se está estudiando es una teoría gauge se debe mostrar que existe un vínculo mas de primera clase, similar a lo que se pudo determinar

6.2. Clasificación de los Vínculos

en la electrodinámica cuántica escalar (SQED). Utilizando lo que fue aprendido con la SQED, el segundo vínculo de primera clase debe resultar de una combinación lineal del segundo vínculo asociado al sector electromagnético y el conjunto de vínculos del sector DKP. Mostremos ahora, que el segundo vínculo de primera clase es dado por la siguiente expresión:

$$\Sigma \equiv G - ig \left(\bar{\psi}\theta - \bar{\theta}\psi \right) = \partial_- \pi^- - ig \left(\bar{\psi}p - \bar{p}\psi \right). \quad (6.30)$$

La demostración consiste en calcular los PB de (6.30) con los vínculos indicados en (6.28) y comprobar que los PB resultantes son cero o debilmente iguales a cero. Entonces, se deduce que el PB con $\theta(x)$ resulta en:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \theta_b(y) \right\} &= -ig \left[p_a(x) \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} - \frac{i}{2} \beta_{bc}^+ \psi_a(x) \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_c(y) \right\} \right] \\ &= -ig \left[p(x) + \frac{i}{2} \beta^+ \psi(x) \right]_b \delta(x^- - y^-) = -ig \theta_a(x) \delta(x^- - y^-) \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

Cuando se considera $\bar{\theta}(x)$ se deduce que:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= -ig \left[-\bar{p}_a(x) \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} - \frac{i}{2} \bar{\psi}_a(x) \beta_{cb}^+ \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_c(y) \right\} \right] \\ &= -ig \left[-\bar{p}(x) + \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta^+ \right]_b \delta(x^- - y^-) = ig \bar{\theta}_b(x) \delta(x^- - y^-) \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

Si el vínculo $\omega(x)$ es tenido en cuenta se determina:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Sigma(x), \omega_b(y) \right\} &= -g \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(y) \right]_b \partial_-^x \left\{ \pi^-(x), \mathcal{A}_-(y) \right\} \\
&\quad + ig \psi_a(x) \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^- D_-^y - m \right) \right]_{bc} \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_c(y) \right\} \\
&= g \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(y) \right]_b \partial_-^x \delta(x^- - y^-) \\
&\quad - ig \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(-\beta^- \psi(x) \bar{D}_-^x - m \psi(x) \right) \right]_b \delta(x^- - y^-) \\
&= \left\{ g \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left[\beta^- \partial_-^x \left[\psi(y) \delta(x^- - y^-) \right] + i \beta^- \psi(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left(i \partial_-^x + g \mathcal{A}_-(x) \right) \delta(x^- - y^-) + i m \psi(x) \delta(x^- - y^-) \right] \right\}_b \\
&= \left\{ g \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left[\delta(x^- - y^-) \beta^- \partial_-^x \psi(x) + \beta^- \psi(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \partial_-^x \delta(x^- - y^-) - \beta^- \psi(x) \partial_-^x \delta(x^- - y^-) + ig \mathcal{A}_-(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \beta^- \psi(x) \delta(x^- - y^-) + i m \psi(x) \delta(x^- - y^-) \right] \right\}_b \\
&= -i \delta(x^- - y^-) \left\{ g \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \right\} \\
&\quad \left[\beta^- \left(i \partial_-^x - g \mathcal{A}_-(x) \right) - m \right] \psi(x) \Big\}_b \\
&= -i \delta(x^- - y^-) \left\{ \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi(x) \right\}_b \\
&= -i \delta(x^- - y^-) \omega_b(x) \\
&\approx 0
\end{aligned}$$

Ahora, si el PB con $\bar{\omega}(x)$ se calcula se determina que:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Sigma(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= g \left[\bar{\psi}(y) \beta^- \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_b \partial_-^x \left\{ \pi^-(x), \mathcal{A}_-(y) \right\} \\
&\quad - ig \bar{\psi}_a(x) \left[\left(\bar{D}_-^y \beta^- + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{cb} \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_c(y) \right\} \\
&= -g \left[\bar{\psi}(y) \beta^- \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_b \partial_-^x \delta(x^- - y^-) \\
&\quad + ig \left[\bar{\psi}(x) \left(-D_-^x \beta^- + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_b \delta(x^- - y^-)
\end{aligned}$$

6.2. Clasificación de los Vínculos

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \left[-\partial_-^x \left[\bar{\psi}(y) \delta(x^- - y^-) \right] \beta^- - i\bar{\psi}(x) \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \delta(x^- - y^-) \beta^- + mi\bar{\psi}(x) \delta(x^- - y^-) \right] \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right\}_b \\
&= g \left\{ \left[-\delta(x^- - y^-) \partial_-^x \bar{\psi}(x) \beta^- - \bar{\psi}(x) \beta^- \partial_-^x \delta(x^- - y^-) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \bar{\psi}(x) \beta^- \partial_-^x \delta(x^- - y^-) + igA_-(x) \bar{\psi}(x) \beta^- \delta(x^- - y^-) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + mi\bar{\psi}(x) \delta(x^- - y^-) \right] \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right\}_b \\
&= ig\delta(x^- - y^-) \left\{ \bar{\psi}(x) \left[\beta^- \left(i\partial_-^x + gA_-(x) \right) + m \right] \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right\}_b \\
&= ig\delta(x^- - y^-) \left\{ \bar{\psi}(x) \left(\beta^- \bar{D}_-^x + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right\}_b \\
&= ig\delta(x^- - y^-) \bar{\omega}_b(x) \\
&\approx 0.
\end{aligned}$$

El análisis correspondiente a $\Omega(x)$ establece que:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Sigma(x), \Omega_b(y) \right\} &= \text{img} \left[\left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(y) \right]_b \partial_-^x \left\{ \pi^-(x), A_-(y) \right\} \\
&\quad + ig\psi_a(x) \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) D_-^y + im^2 \beta^- \beta^+ \right. \\
&\quad \left. - g\pi^-(y) \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{bc} \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_c(y) \right\} \\
&= -ig \left\{ m \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(y) \partial_-^x \delta(x^- - y^-) \right. \\
&\quad \left. + \left[im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) \bar{D}_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ \psi(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - g\pi^-(x) \beta^+ \beta^- \beta^+ \psi(x) \right] \delta(x^- - y^-) \right\}_b \\
&= -ig \left\{ m \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \partial_-^x \left[\psi(y) \delta(x^- - y^-) \right] \right. \\
&\quad \left. + im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) \left(i\partial_-^x + gA_-(x) \right) \delta(x^- - y^-) + im^2 \right. \\
&\quad \left. \beta^- \beta^+ \psi(x) \delta(x^- - y^-) - g\pi^-(x) \beta^+ \beta^- \beta^+ \psi(x) \delta(x^- - y^-) \right\}_b
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -ig \left\{ m \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \left[\delta \left(x^- - y^- \right) \partial_-^x \psi \left(y \right) + \psi \left(y \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \partial_-^x \delta \left(x^- - y^- \right) - \psi \left(x \right) \partial_-^x \delta \left(x^- - y^- \right) \right] + imgA_- \left(x \right) \right. \\
&\quad \left. \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi \left(x \right) \delta \left(x^- - y^- \right) + im^2 \beta^- \beta^+ \right. \\
&\quad \left. \psi \left(x \right) \delta \left(x^- - y^- \right) - g\pi^- \left(x \right) \beta^+ \beta^- \beta^+ \psi \left(x \right) \delta \left(x^- - y^- \right) \right\}_b \\
&= -ig \delta \left(x^- - y^- \right) \left[-im \left(i\partial_-^x - gA_- \left(x \right) \right) \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi \left(x \right) \right. \\
&\quad \left. + im^2 \beta^- \beta^+ \psi \left(x \right) - g\pi^- \beta^+ \beta^- \beta^+ \psi \left(x \right) \right]_b \\
&= -ig \delta \left(x^- - y^- \right) \left\{ \left[-im \left(1 + \beta^+ \beta^- \right) \beta^- D_-^x + im^2 \beta^- \beta^+ \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - g\pi^- \left(x \right) \beta^+ \beta^- \beta^+ \right] \psi \left(x \right) \right\}_b \\
&= -ig \delta \left(x^- - y^- \right) \Omega_b \left(x \right) \\
&\approx 0
\end{aligned}$$

Y cuando se calcula el PB con el vínculo $\overline{\Omega} \left(x \right)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Sigma \left(x \right), \overline{\Omega}_b \left(y \right) \right\} &= img \left[\overline{\psi} \left(y \right) \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) \right]_b \partial_-^x \left\{ \pi^- \left(x \right), A_- \left(y \right) \right\} \\
&\quad - ig \overline{\psi}_a \left(x \right) \left[im \overline{D}_-^y \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + im^2 \beta^+ \beta^- \right. \\
&\quad \left. + g\pi^- \left(y \right) \beta^+ \beta^- \beta^+ \right]_{cb} \left\{ p_a \left(x \right), \overline{\psi}_c \left(y \right) \right\} \\
&= ig \left\{ -m \overline{\psi} \left(y \right) \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) \partial_-^x \delta \left(x - y \right) + \left[-im \overline{\psi} \left(x \right) \beta^- \right. \right. \\
&\quad \left. \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) D_-^x + im^2 \overline{\psi} \left(x \right) \beta^+ \beta^- + g\pi^- \left(x \right) \overline{\psi} \left(x \right) \right. \\
&\quad \left. \left. \beta^+ \beta^- \beta^+ \right] \delta \left(x^- - y^- \right) \right\}_b \\
&= ig \left\{ -m \partial_-^x \left[\overline{\psi} \left(y \right) \delta \left(x^- - y^- \right) \right] \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) - im \overline{\psi} \left(x \right) \right. \\
&\quad \left. \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) \left(i\partial_-^x - gA_- \left(x \right) \right) \delta \left(x^- - y^- \right) + im^2 \overline{\psi} \left(x \right) \right. \\
&\quad \left. \beta^+ \beta^- \delta \left(x^- - y^- \right) + g\pi^- \left(x \right) \overline{\psi} \left(x \right) \beta^+ \beta^- \beta^+ \delta \left(x^- - y^- \right) \right\}_b
\end{aligned}$$

6.2. Clasificación de los Vínculos

$$\begin{aligned}
&= ig \left\{ m \left[-\delta(x^- - y^-) \partial_-^x \bar{\psi}(x) - \bar{\psi}(x) \partial_-^x \delta(x^- - y^-) + \bar{\psi}(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \partial_-^x \delta(x^- - y^-) \right] \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + imgA_-(x) \bar{\psi}(x) \beta^- \right. \\
&\quad \left. \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) \delta(x^- - y^-) + im^2 \bar{\psi}(x) \beta^+ \beta^- \delta(x^- - y^-) \right. \\
&\quad \left. + g\pi^-(x) \bar{\psi}(x) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \delta(x^- - y^-) \right\}_b \\
&= ig\delta(x^- - y^-) \left\{ \bar{\psi}(x) \left[im \left(i\partial_-^x + gA_- \right) \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + im^2 \beta^+ \beta^- + g\pi^-(x) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \right] \right\}_b \\
&= ig\delta(x^- - y^-) \left\{ \bar{\psi}(x) \left[im\bar{D}_-^x \beta^- \left(1 + \beta^- \beta^+ \right) + im^2 \beta^+ \beta^- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g\pi^-(x) \beta^+ \beta^{-2} \beta^+ \right] \right\}_b \\
&= ig\delta(x^- - y^-) \bar{\Omega}_b(x) \\
&\approx 0.
\end{aligned}$$

Finalmente, cuando se estudia el PB con el vínculo $G(x)$ se deduce que:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Sigma(x), G(y) \right\} &= ig^2 \left[\bar{\psi}_a(x) \left[\beta^+ \psi(y) \right]_b \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_b(y) \right\} \right. \\
&\quad \left. - \psi_a(x) \left[\bar{\psi}(y) \beta^+ \right]_b \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_b(y) \right\} \right] \\
&= ig^2 \left[-\bar{\psi}(x) \beta^+ \psi(x) + \bar{\psi}(x) \beta^+ \psi(x) \right] \delta(x^- - y^-) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Todos los resultados anteriores permiten establecer que la teoría posee el siguiente conjunto de vínculos de primera clase:

$$\pi^+ \approx 0 \quad , \quad \Sigma = \partial_-^x \pi^- - ig(\bar{\psi}p - \bar{p}\psi) \approx 0 \quad (6.31)$$

en tanto que el correspondiente conjunto de vínculos de segunda clase esta constituido por:

$$\begin{aligned}
\theta &= p + \frac{i}{2}\beta^+\psi \approx 0, \\
\bar{\theta} &= \bar{p} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+ \approx 0, \\
\omega &= \left(1 - \beta^+\beta^-\right) \left(\beta^-D_-^x - m\right) \psi \approx 0, \\
\bar{\omega} &= \bar{\psi} \left(\bar{D}_-^x \beta^- + m\right) \left(1 - \beta^-\beta^+\right) \approx 0, \\
\Omega &\equiv \left[-im \left(1 + \beta^+\beta^-\right) \beta^-D_-^x + im^2\beta^-\beta^+ - g\pi^-\beta^+\beta^{-2}\beta^+\right] \psi \approx 0, \\
\bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} \left[im\bar{D}_-^x\beta^- \left(1 + \beta^-\beta^+\right) + im^2\beta^+\beta^- + g\pi^-\beta^+\beta^{-2}\beta^+\right] \approx 0.
\end{aligned} \tag{6.32}$$

Ahora, con el fin de eliminar los vínculos de primera clase y tornarlos de segunda se considerarán las condiciones de gauge de cono de Luz, definidas como:

$$A_- \approx 0 \quad , \quad \pi^- + \partial_-^x A_+ \approx 0, \tag{6.33}$$

lo anterior con el fin de garantizar la equivalencia de los resultados que se deducirán con aquellos derivados en la electrodinámica escalar.

6.2.2. Ecuaciones de Movimiento

Después de haber deducido todos los vínculos de primera clase que la teoría posee, estamos en posición de determinar completamente la dinámica de la teoría la cual reflejara la libertad de gauge de la misma. Para ello, es necesario definir el Hamiltoniano extendido H_E , el cual resulta de considerar todos los vínculos de primera clase secundarios que en el problema surjan. Entonces,

6.2. Ecuaciones de Movimiento

para nuestro caso dicho Hamiltoniano se expresará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 H_E &\equiv H_P + \int dx^- u_2(x) \Sigma(x) \\
 &= \int dx^- \left[\frac{1}{2} \pi^{-2} + (\pi^- \partial_-^y + g \bar{\psi} \beta^+ \psi) A_+ + \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^- (\overleftarrow{\partial}_-^y - \overrightarrow{\partial}_-^y) + g A_- \beta^- + m \right] \psi \right. \\
 &\quad \left. + u_1 \pi^+ + \bar{\lambda} \theta + \bar{\theta} \lambda + u_2 \Sigma \right]. \tag{6.34}
 \end{aligned}$$

Entonces, considera la evolución temporal de las variables dinámicas asociadas al sector electromagnético. En primer lugar, se estudia la dinámica de $A_+(x)$ para la cual se determina:

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_+(x) &= \{A_+(x), H_E\} = \int dy^- u_1(y) \{A_+(x), \pi^+(y)\} \\
 &= \int dy^- u_1(y) \delta(x^- - y^-) = u_1(x), \tag{6.35}
 \end{aligned}$$

resultado que da a entender que la evolución temporal de $A_+(x)$ es completamente indeterminada por el hecho de estar asociado con $u_1(x)$ que es el multiplicador de Lagrange asociado a un vínculo de primera clase y que hasta el momento mantienen indeterminados. De manera similar, la evolución temporal del campo $A_-(x)$ establece que:

$$\begin{aligned}
 \dot{A}_-(x) &= \{A_-(x), H_E\} \\
 &= \int dy^- \left\{ A_-(x), \frac{1}{2} \pi^{-2}(y) + \pi^-(y) \partial_-^y A_+(y) + u_2(y) \Sigma(y) \right\} \\
 &= \int dy^- \pi^-(y) \{A_-(x), \pi^-(y)\} + \int dy^- \partial_-^y A_+(y) \{A_-(x), \pi^-(y)\} \\
 &\quad + \int dy^- u_2(y) \partial_-^y \{A_-(x), \pi^-(y)\} \\
 &= \int dy^- \left[\pi^-(y) + \partial_-^y A_+(y) + u_2(y) \partial_-^y \right] \delta(x^- - y^-) \\
 &= \int dy^- \left[\pi^-(y) + \partial_-^y A_+(y) - u_2(y) \partial_-^x \right] \delta(x^- - y^-) \\
 &= \pi^-(x) + \partial_-^x A_+(x) - \partial_-^x u_2(x), \tag{6.36}
 \end{aligned}$$

relación que indica que si se desea que se equivalente con la ecuación (6.5), el multiplicador $u_2(x)$ de Lagrange podrá ser como mínimo una constante. Si se analiza la evolución temporal de los momentos canónicos conjugados a las variables consideradas anteriormente se deduce que:

$$\dot{\pi}^+(x) = \left\{ \pi^+(x), H_E \right\} = G(x) \approx 0. \quad (6.37)$$

Finalmente, el estudio sobre el momento $\pi^-(x)$ determina que:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^-(x) &= \left\{ \pi^-(x), H_E \right\} = \int dy^- \left\{ \pi^-(x), gA_-(x) \bar{\psi}(x) \beta^- \psi(y) \right\} \\ &= g \int dy^- \bar{\psi}(x) \beta^- \psi(x) \left\{ \pi^-(x), A_-(y) \right\} \\ &= -g \int dy^- \bar{\psi}(y) \beta^- \psi(y) \delta(x^- - y^-) \\ &= -g \bar{\psi}(x) \beta^- \psi(x). \end{aligned} \quad (6.38)$$

Combinando las relaciones (6.36) y (6.37) es posible deducir que:

$$\dot{\pi}^+ = \partial_+^x F^{++} = \partial_-^x \pi^- - g \bar{\psi} \beta^+ \psi \approx -\partial_-^x F^{+-} - g \bar{\psi} \beta^+ \psi,$$

de manera que

$$\partial_+^x F^{++} + \partial_-^x F^{--} = \partial_\mu^x F^{\mu+} \approx g \bar{\psi} \beta^+ \psi.$$

En forma similar, usando la antisimetría del tensor de campo electromagnético se determina que

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^- &= -\partial_+^x F^{+-} = -\partial_+^x F^{+-} - \partial_-^x F^{--} \\ &= -\partial_\mu^x F^{\mu-} = -g \bar{\psi} \beta^- \psi, \end{aligned}$$

de manera que si se combinan los dos últimos resultados se obtienen que:

$$\partial_\mu^x F^{\mu\nu} - g \bar{\psi} \beta^\nu \psi \approx 0. \quad (6.39)$$

6.2. Ecuaciones de Movimiento

Ahora, si el estudio es realizado con el sector de DKP se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_a(x) &= \left\{ \psi_a(x), H_E \right\} \\
 &= \int dy^- \left[\left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} \lambda_b(y) + igu_2(y) \psi_b(y) \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} \right] \\
 &= \int dy^- \left[\lambda(y) + igu_2(y) \psi(y) \right]_a \delta(x^- - y^-) \\
 &= \left[\lambda(x) + igu_2(x) \psi(x) \right]_a. \tag{6.40}
 \end{aligned}$$

Si el campo $\bar{\psi}(x)$ es considerado, se deduce que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\psi}}_a(x) &= \left\{ \bar{\psi}_a(x), H_E \right\} \\
 &= \int dy^- \left[\bar{\lambda}_b(y) \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} - igu_2(y) \bar{\psi}_b(y) \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} \right] \\
 &= \int dy^- \left[\bar{\lambda}(y) - igu_2(y) \bar{\psi}(y) \right]_a \delta(x^- - y^-) \\
 &= \left[\bar{\lambda}(x) - igu_2(x) \bar{\psi}(x) \right]_a. \tag{6.41}
 \end{aligned}$$

Igualmente, cuando la dinámica de los momentos canónicos (p, \bar{p}) se estudia a partir de H_E resulta en:

$$\begin{aligned}
 \dot{p}_a(x) &= \left\{ p_a(x), H_E \right\} \\
 &= \int dy^- \left[gA_+(y) [\beta^+ \psi(y)]_b \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_b(y) \right\} + \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_b(y) \right\} \right. \\
 &\quad \left. \left(\left[\frac{i}{2} \beta^- (\overleftarrow{\partial}_y^- - \overrightarrow{\partial}_y^-) + g A_- \beta^- + m \right] \psi \right)_b - \frac{i}{2} \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_c(y) \right\} \beta_{cb}^+ \lambda_b(y) \right. \\
 &\quad \left. - igu_2(y) \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_b(y) \right\} p_b(y) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int dy^- \delta(x-y) \left[-gA_+(y) \beta^+ \psi(y) - \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_- - \overrightarrow{\partial}_- \right) + gA_-(y) \beta^- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m \right] \psi(y) + \frac{i}{2} \beta^{+\lambda}(y) + igu_2(y) p(y) \right]_a \\
&= \int dy^- \delta(x^- - y^-) \left[-gA_+(y) \beta^+ \psi(y) - \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(-\overleftarrow{\partial}_- - \overrightarrow{\partial}_- \right) + gA_-(y) \beta^- \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + m \right] \psi(y) + \frac{i}{2} \beta^{+\lambda}(y) + igu_2(y) p(y) \right]_a \\
&= \left[-gA_+(x) \beta^+ \psi(x) + \left[\beta^- \left(i\partial_- - gA_- \right) - m \right] \psi(x) \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \beta^{+\lambda}(x) + igu_2(x) p(x) \right]_a. \tag{6.42}
\end{aligned}$$

Si se junta las expresiones (6.3) y (6.40), la ecuación (6.42) toma la forma:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \partial_+ p = -gA_+ \beta^+ \psi + \left[\beta^- \left(i\partial_- - gA_- \right) - m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^{+\lambda} + igu_2 p \\
&= -gA_+ \beta^+ \psi + \left[\beta^- \left(i\partial_- - gA_- \right) - m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi + \frac{1}{2} \beta^+ gu_2 \psi \\
&\quad + igu_2 p \\
&\approx -\frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\beta^+ \left(i\partial_+ - gA_+ \right) \psi + \left[\beta^- \left(i\partial_- - gA_- \right) - m \right] \psi \approx -gu_2 \beta^+ \psi,$$

que en forma compacta se expresa como:

$$\left(\beta^\mu D_\mu - m \right) \psi \approx -gu_2 \beta^+ \psi. \tag{6.43}$$

6.2. Ecuaciones de Movimiento

De forma similar, al analizar la dinámica del momento canónico $\bar{p}(x)$ se establece que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{p}}_a(x) &= \left\{ \bar{p}_a(x), H_E \right\} \\
 &= \int dy^- \left[\left(gA_+(y) \bar{\psi}(y) \beta^+ + \bar{\psi}(y) \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_y^- - \overrightarrow{\partial}_y^- \right) + gA_-(y) \beta^- + m \right] \right) \right]_b \\
 &\quad \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_b(y) \right\} + \frac{i}{2} \bar{\lambda}_b(y) \beta_{bc}^+ \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_c(y) \right\} + igu_2(y) \bar{p}_b(y) \\
 &\quad \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_b(y) \right\} \Big] \\
 &= \int dy^- \left[-gA_+(y) \bar{\psi}(y) \beta^+ - \bar{\psi}(y) \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_y^- - \overrightarrow{\partial}_y^- \right) + gA_-(y) \beta^- + m \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i}{2} \bar{\lambda}(y) \beta^+ - igu_2(y) \bar{p}(y) \right]_a \delta(x^- - y^-) \\
 &= \int dy^- \left[-gA_+(y) \bar{\psi}(y) \beta^+ - \bar{\psi}(y) \left[\frac{i}{2} \beta^- \left(\overleftarrow{\partial}_y^- + \overrightarrow{\partial}_y^- \right) + gA_-(y) \beta^- + m \right] \right. \\
 &\quad \left. - \frac{i}{2} \bar{\lambda}(y) \beta^+ - igu_2(y) \bar{p}(y) \right]_a \delta(x^- - y^-) \\
 &= \left[-gA_+(x) \bar{\psi}(x) \beta^+ - \bar{\psi}(x) \left[\beta^- \left(i\partial_-^x + gA_-(x) \right) + m \right] - \frac{i}{2} \bar{\lambda}(x) \beta^+ \right. \\
 &\quad \left. - igu_2(x) \bar{p}(x) \right]_a. \tag{6.44}
 \end{aligned}$$

Utilizando las expresiones (6.3) y (5.39) se infiere:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{p}} &= \partial_+ \bar{p} = -gA_+ \bar{\psi} \beta^+ - \bar{\psi} \left[\beta^- \left(i\partial_- + gA_- \right) + m \right] - \frac{i}{2} \bar{\lambda} \beta^+ - igu_2 \bar{p} \\
 &= -gA_+ \bar{\psi} \beta^+ - \bar{\psi} \left[\beta^- \left(i\partial_- + gA_- \right) + m \right] - \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+ + \frac{1}{2} gu_2 \bar{\psi} \beta^+ \\
 &\quad - igu_2 \bar{p} \\
 &\approx \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+,
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\bar{\psi} \beta^+ \left(i\partial_+ + gA_+ \right) + \bar{\psi} \left[\beta^- \left(i\partial_- + gA_- \right) + m \right] \approx gu_2 \bar{\psi} \beta^+,$$

lo cual tiene la forma:

$$\bar{\psi} \left(\beta^\mu \bar{D}_\mu + m \right) \approx g u_2 \bar{\psi} \beta^+. \quad (6.45)$$

Entonces, si las ecuaciones de campo derivadas a nivel Hamiltoniano son débilmente equivalentes a las ecuaciones de campo deducidas a nivel Lagrangiano, esto establece que el multiplicador de Lagrange $u_2(x)$ satisfaga la condición $u_2(x) \approx 0$.

6.2.3. Proyección de los Vínculos

Con el fin de calcular los corchetes de Dirac entre los grados de libertad de la teoría se procede a expresar los vínculos del sector de DKP en su forma mas simple, es decir, en términos de las componentes elementales de los campos de DKP. Utilizando las expresiones (5.38) y (5.39) es posible mostrar que: las componentes del vínculos $\theta(x)$ son:

$$\begin{aligned} P\theta &= Pp + \frac{i}{2}P\beta^+\psi = p_\varphi + \frac{i}{2}P^+\psi = p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ \approx 0, \\ P^+\theta &= P^+p + \frac{i}{2}P^+\beta^+\psi = p_+ \approx 0, \\ P^-\theta &= P^-p + \frac{i}{2}P^-\beta^+\psi = p_- + \frac{i}{2}P\psi = p_- + \frac{i}{2}\varphi \approx 0. \end{aligned}$$

Ahora, cuando el vínculos $\omega(x)$ es considerado se determina que:

$$\begin{aligned} P\omega &= \left(P - P^+\beta^- \right) \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi = (P - P) \left(\beta^- D_-^x - m \right) \psi = 0, \\ P^+\omega &= D_-^x P\psi - mP^+\psi = D_-^x \varphi - m\psi^+ \approx 0, \\ P^-\omega &= 0. \end{aligned}$$

Entre tanto, cuando $\Omega(x)$ es examinado se deduce:

$$\begin{aligned} P\Omega &= -2imP^-D_-^x\psi + im^2P\psi - g\pi^-P\psi = -2imD_-^x\psi^- + im^2\varphi - g\pi^-\varphi \approx 0 \\ P^+\Omega &= -imD_-^x\varphi + im^2\psi^+ = -im(D_-^x\varphi - m\psi^+) = -imP^+\omega \approx 0, \\ P^-\Omega &= 0. \end{aligned}$$

6.2. Proyección de los Vínculos

De manera similar, si estudiamos el caso para $\bar{\theta}(x)$:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}P &= \bar{p}P - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+P = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}(P^-)^\dagger = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \approx 0, \\ \bar{\theta}(P^+)^\dagger &= \bar{p}(P^+)^\dagger - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+(P^+)^\dagger = \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\bar{\psi}P = \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \approx 0, \\ \bar{\theta}(P^-)^\dagger &= \bar{p}(P^-)^\dagger - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+(P^-)^\dagger = \bar{p}_- \approx 0.\end{aligned}$$

Si consideramos $\bar{\omega}(x)$ se infiere:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}P &= \bar{\psi}\left(\bar{D}_-^x\beta^- + m\right)(P - P) = 0, \\ \bar{\omega}(P^+)^\dagger &= \bar{\psi}\left(\bar{D}_-^x\beta^- + m\right)(\beta^-P - \beta^-P) = 0, \\ \bar{\omega}(P^-)^\dagger &= \bar{\psi}\bar{D}_-^xP + m\bar{\psi}(P^-)^\dagger = \bar{D}_-^x\varphi^* + m\bar{\psi}^- \approx 0.\end{aligned}$$

Finalmente, a partir de $\bar{\Omega}(x)$ resulta:

$$\begin{aligned}\bar{\Omega}P &= 2im\bar{D}_-^x\bar{\psi}(P^+)^\dagger + im^2\bar{\psi}P + g\pi^-\bar{\psi}P \\ &= 2im\bar{D}_-^x\bar{\psi}^+ + im^2\varphi^* + g\pi^-\varphi^* \approx 0, \\ \bar{\Omega}(P^+)^\dagger &= 0, \\ \bar{\Omega}(P^-)^\dagger &= im\bar{D}_-^x\bar{\psi}P + im^2\bar{\psi}(P^-)^\dagger = im\bar{D}_-^x\varphi^* + im^2\bar{\psi}^- \\ &= im\left(\bar{D}_-^x\varphi^* + m\bar{\psi}^-\right) = im\bar{\omega}(P^-)^\dagger \approx 0.\end{aligned}$$

Así, se puede concluir que en términos de las componentes de los campos DKP el sector escalar presenta el siguiente conjunto de vínculos de segunda clase.

$$\begin{aligned}p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ &\approx 0 \quad , \quad p_+ \approx 0 \quad , \quad p_- + \frac{i}{2}\varphi \approx 0 \\ \bar{D}_-^x\varphi - m\psi^+ &\approx 0 \quad , \quad -2im\bar{D}_-^x\psi^- + im^2\varphi - g\pi^-\varphi \approx 0, \\ \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- &\approx 0 \quad , \quad \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \approx 0 \quad , \quad \bar{p}_- \approx 0, \\ \bar{D}_-^x\varphi^* + m\bar{\psi}^- &\approx 0 \quad , \quad 2im\bar{D}_-^x\bar{\psi}^+ + im^2\varphi^* + g\pi^-\varphi^* \approx 0.\end{aligned}\tag{6.46}$$

Finalmente, si el vínculo $\Sigma(x)$ de primera clase es expresado en términos de las componentes de los campos de DKP éste tendrá la forma:

$$\begin{aligned}\Sigma &= \partial_-^x \pi^- - ig (\bar{\psi} p - \bar{p} \psi) \\ &= \partial_-^x \pi^- - ig \left(\varphi^* p_\varphi + \bar{\psi}^+ p_+ + \bar{\psi}^- p_- - \bar{p}_\varphi \varphi - \bar{p}_+ \psi^+ - \bar{p}_- \psi^- \right).\end{aligned}$$

6.2.4. Inversion Vínculos del Sector Electromagnético

En este momento, se procederá a invertir los vínculos de segunda clase del sector electromagnético los cuales están constituidos por los vínculos de primera clase (6.31) y las dos condiciones de gauge y (6.33). Estos elementos se denotaran de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\Theta_1 &\equiv \pi^+, \\ \Theta_2 &\equiv \partial_-^x \pi^- - ig \left(\varphi^* p_\varphi + \bar{\psi}^+ p_+ + \bar{\psi}^- p_- - \bar{p}_\varphi \varphi - \bar{p}_+ \psi^+ - \bar{p}_- \psi^- \right), \\ \Theta_3 &\equiv A_-, \\ \Theta_4 &\equiv \pi^- + \partial_-^x A_+, \end{aligned} \tag{6.47}$$

y satisfacen los siguientes PB:

$$\begin{aligned}\left\{ \Theta_1(x), \Theta_4(y) \right\} &= \partial_-^x \delta(x^- - y^-) & , & \quad \left\{ \Theta_4(x), \Theta_1(y) \right\} = \partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \Theta_2(x), \Theta_3(y) \right\} &= -\partial_-^x \delta(x^- - y^-) & , & \quad \left\{ \Theta_3(x), \Theta_2(y) \right\} = -\partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\ \left\{ \Theta_3(x), \Theta_4(y) \right\} &= \delta(x^- - y^-) & , & \quad \left\{ \Theta_4(x), \Theta_3(y) \right\} = -\delta(x^- - y^-).\end{aligned} \tag{6.48}$$

A partir de (6.48) se puede construir una primera matriz de vínculos de segunda clase la cual es definida por las siguientes elementos:

$$C_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Phi_i(x), \Phi_j(y) \right\}, \tag{6.49}$$

6.2. Inversion Vínculos del Sector Electromagnético

y que posee las siguiente representación matricial:

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-). \quad (6.50)$$

Con el fin de eliminar los vínculos de segunda clase (6.47) se procede a construir un primer conjunto de DB que para dos variables dinámica $\mathbf{A}_a(x)$ y $\mathbf{B}_b(x)$ son definidos de la siguiente forma:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_c(u) \right\} C_{ij}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}, \quad (6.51)$$

donde $C_{ij}^{-1}(x, y)$ se interpreta como las componentes de la inversa de la matriz de vínculos (6.50) y que se calcula por la siguiente identidad que debe satisfacer:

$$\int dz^- C(x, z) C^{-1}(z, y) = \int dz^- C^{-1}(x, z) C(z, y) = \mathbf{I} \delta(x^- - y^-), \quad (6.52)$$

siendo que \mathbf{I} es la matriz identidad de 3×3 . Es posible mostrar por cálculo directo que la matriz $C^{-1}(x, y)$ tiene la siguiente representación:

$$C^{-1}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -|x^- - y^-| & 0 & \epsilon(x^- - y^-) \\ |x^- - y^-| & 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 \\ 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 \\ \epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.53)$$

De la definición de los vínculos (6.47) y bajo la definición de los DB D1, se puede verificar que se deben cumplir las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \pi^+ &= 0, \\ \partial_-^x \pi^- - ig \left(\varphi^* p_\varphi + \bar{\psi}^+ p_+ + \bar{\psi}^- p_- - \bar{p}_\varphi \varphi - \bar{p}_+ \psi^+ - \bar{p}_- \psi^- \right) &= 0, \\ \mathbf{A}_- &= 0, \\ \pi^- + \partial_-^x \mathbf{A}_+ &= 0, \end{aligned} \quad (6.54)$$

de manera que las coordenadas (A_-, π^+) son idénticamente nulas en tanto que A_+ es la única coordenada independiente asociada al sector electromagnético. Por tanto, se se puede afirmar que aún sin tener en cuenta los vínculos asociados al sector DKP, el espacio de fase de coordenadas independientes estaría dado por: $(A_+, \varphi, \varphi^*, \psi^+, \psi^-, \bar{\psi}^+, \bar{\psi}^-, p_\varphi, \bar{p}_\varphi, p_+, p_-, \bar{p}_+, \bar{p}_-)$. Utilizando los siguientes PB diferentes de cero:

$$\begin{aligned}
\left\{ \psi_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= ig\psi_a(x) \delta(x^- - u^-), \\
\left\{ \bar{\psi}_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= -ig\bar{\psi}_a(x) \delta(x^- - u^-), \\
\left\{ p_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= igp_a(x) \delta(x^- - u^-), \\
\left\{ \bar{p}_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= -ig\bar{p}_a(x) \delta(x^- - u^-), \\
\left\{ \Theta_1(v), A_+(y) \right\} &= -\delta(v^- - y^-),
\end{aligned} \tag{6.55}$$

es posible mostrar que en el caso en que la variable dinámica A_a es identificada con uno de los campos del sector DKP se deduce que:

$$\begin{aligned}
\left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D1} &= \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\} - \int du^- dv^- \left\{ A_a(x), \Theta_2(u) \right\} \\
&\quad C_{2j}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), B_b(y) \right\}.
\end{aligned} \tag{6.56}$$

Entonces, si $B_b(y)$ es otra de los campos DKP se determina de la presentación matricial (6.53) que

$$\left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ A_a(x), B_b(y) \right\}. \tag{6.57}$$

El resultado (6.57) establece que el primer conjunto de DB entre campos de DKP coincide con los PB inicialmente definidos entre las mismas variables, de manera que:

$$\begin{aligned}
\left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\}_{D1} &= \delta_{ab}\delta(x - y), \\
\left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\}_{D1} &= \delta_{ab}\delta(x - y).
\end{aligned} \tag{6.58}$$

6.2. Inversion Vínculos del Sector Electromagnético

Ahora, en el caso en que $\mathbf{B}_b = \mathbf{A}_+$, es posible deducir:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{A}_+(y) \right\}_{D1} &= \int du^- dv^- \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_2(u) \right\} C_{21}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_1(v), \mathbf{A}_+(y) \right\} \\ &= \int du^- \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_2(u) \right\} C_{21}^{-1}(u, y) \\ &= \frac{1}{2} \int du \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_2(u) \right\} |u^- - y^-|. \end{aligned}$$

Entonces, si $\mathbf{A}_a(x) = \psi_a(x)$ se determina que:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_a(x), \mathbf{A}_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} \int du^- \left\{ \psi_a(x), \Theta_2(u) \right\} |u^- - y^-| \\ &= \frac{ig}{2} \int du^- \psi_a(x) \delta(x^- - u^-) |u^- - y^-| \\ &= \frac{ig}{2} \psi_a(x) |x^- - y^-|. \end{aligned} \quad (6.59)$$

A partir de la identidad (6.54) es posible determinar que:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_a(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} &= -\partial_-^y \left\{ \psi_a(x), \mathbf{A}_+(y) \right\}_{D1} \\ &= -\frac{ig}{2} \psi_a(x) \partial_-^y |x^- - y^-| \\ &= \frac{ig}{2} \psi_a(x) \epsilon(x^- - y^-). \end{aligned} \quad (6.60)$$

De igual manera, cuando $\mathbf{A}_a(x) = p_a(x)$ se deduce:

$$\begin{aligned} \left\{ p_a(x), \mathbf{A}_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} \int du^- \left\{ p_a(x), \Theta_2(u) \right\} |u^- - y^-| \\ &= \frac{ig}{2} \int du^- p_a(x) \delta(x - u) |u^- - y^-| \\ &= \frac{ig}{2} p_a(x) |x^- - y^-|, \end{aligned} \quad (6.61)$$

resultando también en:

$$\begin{aligned} \left\{ p_a(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} &= -\frac{ig}{2} p_a(x) \partial_-^y |x^- - y^-| \\ &= \frac{ig}{2} p_a(x) \epsilon(x^- - y^-). \end{aligned} \quad (6.62)$$

Considerando que $A_a(x) = \bar{\psi}_a(x)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\psi}_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} \int du^- \left\{ \bar{\psi}_a(x), \Theta_2(u) \right\} |u^- - y^-| \\ &= -\frac{ig}{2} \int du^- \bar{\psi}_a(x) \delta(x - u) |u^- - y^-| \\ &= -\frac{ig}{2} \bar{\psi}_a(x) |x^- - y^-|, \end{aligned} \quad (6.63)$$

con lo cual:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\psi}_a(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} &= \frac{ig}{2} \bar{\psi}_a(x) \partial_-^y |x^- - y^-| \\ &= -\frac{ig}{2} \bar{\psi}_a(x) \epsilon(x^- - y^-). \end{aligned} \quad (6.64)$$

Y finalmente, en el caso en que $A_a(x) = \bar{p}_a(x)$,

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{p}_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} \int du^- \left\{ \bar{p}_a(x), \Theta_2(u) \right\} |u^- - y^-| \\ &= -\frac{ig}{2} \int du^- \bar{p}_a(x) \delta(x - u) |u^- - y^-| \\ &= -\frac{ig}{2} \bar{p}_a(x) |x^- - y^-|, \end{aligned} \quad (6.65)$$

de manera que:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{p}_a(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} &= \frac{ig}{2} \bar{p}_a(x) \partial_-^y |x^- - y^-| \\ &= -\frac{ig}{2} \bar{p}_a(x) \epsilon(x^- - y^-). \end{aligned} \quad (6.66)$$

6.2.5. Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac

Bajo la definición de los DB (6.56) los vínculos asociados al sector de DKP se expresan en la forma:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &\equiv p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ & , & & \Psi_6 &\equiv \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \\
 \Psi_2 &\equiv p_+ & , & & \Psi_7 &\equiv \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \\
 \Psi_3 &\equiv p_- + \frac{i}{2}\varphi & , & & \Psi_8 &\equiv \bar{p}_- \\
 \Psi_4 &\equiv i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ & , & & \Psi_9 &\equiv i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \\
 \Psi_5 &\equiv 2m\partial_-^x \psi^- + im^2\varphi - g\pi^- \varphi & , & & \Psi_{10} &\equiv 2m\partial_-^x \bar{\psi}^+ - im^2\varphi^* - g\pi^- \varphi^*
 \end{aligned} \tag{6.67}$$

con el siguiente conjunto de DB diferentes de cero entre ellos:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Psi_1(x), \Psi_7(y) \right\} &= i\delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_1(x), \Psi_9(y) \right\} &= i\partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_1(x), \Psi_{10}(y) \right\} &= \left(im^2 + g\pi^-(x) \right) \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_2(x), \Psi_{10}(y) \right\} &= 2m\partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_3(x), \Psi_6(y) \right\} &= i\delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_3(x), \Psi_9(y) \right\} &= -m\delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_4(x), \Psi_6(y) \right\} &= i\partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_4(x), \Psi_7(y) \right\} &= -m\delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_4(x), \Psi_5(y) \right\} &= g^2\varphi(x)\varphi(x)\delta(x^- - y^-), \\
 \left\{ \Psi_4(x), \Psi_{10}(y) \right\} &= g^2\varphi^*(x)\varphi(x)\delta(x^- - y^-),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \Psi_5(x), \Psi_6(y) \right\} &= \left(im^2 - g\pi^-(x) \right) \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \Psi_5(x), \Psi_8(y) \right\} &= 2m\partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \Psi_5(x), \Psi_9(y) \right\} &= g^2\varphi^*(x) \varphi(x) \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \Psi_5(x), \Psi_{10}(y) \right\} &= -2img^2 \left[\varphi^*(x) \psi^-(x) + \varphi(x) \bar{\psi}^+(x) \right] \delta(x^- - y^-), \\
\left\{ \Psi_9(x), \Psi_{10}(y) \right\} &= -g^2\varphi^*(x) \varphi^*(x) \delta(x^- - y^-).
\end{aligned} \tag{6.68}$$

Ahora, con el fin de tornar los vínculos (6.67) en identidades fuertes, se procede a definir un nuevo conjunto de DB que para dos variables dinámicas $\mathbf{A}_a(x)$ y $\mathbf{B}_b(y)$ se definen de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathbf{A}_b(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Psi_\alpha(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1},
\end{aligned} \tag{6.69}$$

donde $D_{\alpha\beta}^{-1}(x, y)$ denota la inversa de la matriz de vínculos la cual se expresa a partir de las siguientes componentes:

$$D_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_i(x), \Psi_j(y) \right\}_{D_1}, \tag{6.70}$$

la cual posee la siguiente representación matricial:

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{A}(x, y) & \mathbf{B}(x, y) \\ \mathbf{C}(x, y) & \mathbf{D}(x, y) \end{pmatrix}, \tag{6.71}$$

siendo que $\mathbf{A}(x, y)$, $\mathbf{B}(x, y)$, $\mathbf{C}(x, y)$ y $\mathbf{D}(x, y)$ son matrices 5×5 con la siguiente estructura:

$$\mathbf{A}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha(x) \\ 0 & 0 & 0 & \alpha(x) & 0 \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-),$$

6.2. Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & i\partial_-^x & \lambda(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\ i & 0 & 0 & -m & 0 \\ i\partial_-^x & -m & 0 & 0 & -\beta(x) \\ \theta(x) & 0 & 2m\partial_-^x & -\beta(x) & \xi(x) \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-), \\
 \mathbf{C}(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & i\partial_-^x & -\theta(x) \\ -i & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\ i\partial_-^x & 0 & m & 0 & \beta(x) \\ -\lambda(x) & 2m\partial_-^x & 0 & \beta(x) & -\xi(x) \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-), \\
 \mathbf{D}(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(x) \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma(x) & 0 \end{pmatrix} \delta(x^- - y^-),
 \end{aligned}$$

siendo que se ha introducido la siguiente notación:

$$\begin{aligned}
 \alpha(x) &\equiv -g^2 \varphi(x) \varphi(x), & \beta(x) &\equiv -g^2 \varphi^*(x) \varphi(x), \\
 \gamma(x) &\equiv -g^2 \varphi^*(x) \varphi^*(x), & \theta(x) &\equiv \left(im^2 - g\pi^-(x) \right), \\
 \lambda(x) &\equiv \left(im^2 + g\pi^-(x) \right), & \xi(x) &\equiv -2img^2 \left[\varphi^*(x) \psi^-(x) + \varphi(x) \bar{\psi}^+(x) \right].
 \end{aligned} \tag{6.72}$$

Ahora, la matriz $D^{-1}(x, y)$ es determinada a partir de la siguiente identidad:

$$\int dz^- D(x, z) D^{-1}(z, y) = \int dz^- D^{-1}(x, z) C(z, y) = \mathbf{I} \delta(x^- - y^-), \tag{6.73}$$

Es posible mostrar que, después de un trabajo laborioso, la matriz inversa de vínculos tendrá la siguiente forma:

$$D^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}(x, y) & \tilde{\mathbf{B}}(x, y) \\ \tilde{\mathbf{C}}(x, y) & \tilde{\mathbf{D}}(x, y) \end{pmatrix},$$

con

$$\tilde{\mathbf{A}}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & A_2(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ B_1(x, y) & B_2(x, y) & B_3(x, y) & B_4(x, y) & 0 \\ 0 & C_2(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(x, y) = \begin{pmatrix} A_6(x, y) & A_7(x, y) & A_8(x, y) & A_9(x, y) & 0 \\ B_6(x, y) & B_7(x, y) & B_8(x, y) & B_9(x, y) & B_{10}(x, y) \\ C_6(x, y) & C_7(x, y) & C_8(x, y) & C_9(x, y) & 0 \\ D_6(x, y) & D_7(x, y) & D_8(x, y) & D_9(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & E_8(x, y) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{C}}(x, y) = \begin{pmatrix} F_1(x, y) & F_2(x, y) & F_3(x, y) & F_4(x, y) & 0 \\ G_1(x, y) & G_2(x, y) & G_3(x, y) & G_4(x, y) & 0 \\ H_1(x, y) & H_2(x, y) & H_3(x, y) & H_4(x, y) & H_5 \\ K_1(x, y) & K_2(x, y) & K_3(x, y) & K_4(x, y) & 0 \\ 0 & M_2(x, y) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{D}}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_8(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_8(x, y) & 0 & 0 \\ H_6(x, y) & H_7(x, y) & H_8 & H_9(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & K_8(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los elementos diferentes de cero que aparecen en la matrices $\tilde{\mathbf{A}}(x, y)$, $\tilde{\mathbf{B}}(x, y)$, $\tilde{\mathbf{C}}(x, y)$ y $\tilde{\mathbf{D}}(x, y)$ son dados por:

Expresiones asociadas a $A_i(x, y)$:

$$A_2(x, y) = \frac{i}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right], \quad A_6(x, y) = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-),$$

$$A_7(x, y) = \frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \quad A_9(x, y) = -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-),$$

$$A_8(x, y) = \frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}.$$

6.2. Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac

Expresiones asociadas a $B_i(x, y)$:

$$B_1(x, y) = -\frac{i}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right],$$

$$B_2(x, y) = \frac{1}{16m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right] + \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \right\},$$

$$B_3(x, y) = -\frac{1}{8m^2} \epsilon(x^- - y^-),$$

$$B_4(x, y) = \frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right],$$

$$B_6(x, y) = \frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\},$$

$$B_7(x, y) = \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\},$$

$$B_8(x, y) = \frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \frac{1}{2} \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} + \frac{\xi(x)}{m} \epsilon(x^- - y^-) + \frac{\gamma(x)}{2m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right] \right\},$$

$$B_9(x, y) = -\frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\},$$

$$B_{10}(x, y) = \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).$$

Expresiones asociadas a $C_i(x, y)$:

$$C_2(x, y) = -\frac{1}{8m^2} \gamma(x) \epsilon(x^- - y^-), \quad C_6(x, y) = \frac{i}{2} \delta(x^- - y^-),$$

$$C_7(x, y) = \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-), \quad C_9(x, y) = \frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-),$$

$$C_8(x, y) = \frac{1}{8m} \left[i\theta(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-).$$

Expresiones asociadas a $D_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 D_2(x, y) &= -\frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right], \\
 D_6(x, y) &= -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\
 D_7(x, y) &= \frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-), \\
 D_8(x, y) &= -\frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\
 D_9(x, y) &= \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).
 \end{aligned}$$

Expresiones asociadas a $E_i(x, y)$:

$$E_8(x, y) = \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).$$

Expresiones asociadas a $F_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 F_1(x, y) &= -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-), & F_3(x, y) &= -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \\
 F_2(x, y) &= -\frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\
 F_4(x, y) &= -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\
 F_8(x, y) &= -\frac{i}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right].
 \end{aligned}$$

6.2. Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac

Expresiones asociadas a $G_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 G_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \\
 G_2(x, y) &= \frac{1}{8m} \left[i\lambda(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-), \\
 G_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-), \\
 G_4(x, y) &= -\frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-), \\
 G_8(x, y) &= -\frac{1}{8m^2} \alpha(x) \epsilon(x^- - y^-).
 \end{aligned}$$

Expresiones asociadas a $H_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 H_1(x, y) &= -\frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\
 H_2(x, y) &= -\frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ -\frac{1}{2} \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\alpha(x)}{2m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - y^-) \right] + \frac{\xi(x)}{m} \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\
 H_3(x, y) &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \delta(x^- - y^-) \right\}, \\
 H_4(x, y) &= \frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\
 H_5(x, y) &= \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-), \\
 H_6(x, y) &= \frac{i}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right], \\
 H_7(x, y) &= -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \delta(x^- - y^-) \right],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_8(x, y) &= \frac{1}{16m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right] \right\}, \\
H_9(x, y) &= -\frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right].
\end{aligned}$$

Expresiones asociadas a $K_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
K_1(x, y) &= -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-), \\
K_2(x, y) &= \frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\}, \\
K_3(x, y) &= -\frac{1}{2m} \delta(x^- - y^-), \\
K_4(x, y) &= \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-), \\
K_8(x, y) &= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - y^-) \right].
\end{aligned}$$

Expresiones asociadas a $K_i(x, y)$:

$$M_2(x, y) = \frac{1}{4m} \epsilon(x^- - y^-).$$

Bajo la definición de los DB (6.69), es posible estimar que del conjunto de identidades (6.67) se pueda considerar como variables independientes a los siguientes campos: $(\varphi, \psi^+, \psi^-, \varphi^*, \bar{\psi}^+, \bar{\psi}^-)$, de manera que si se utiliza los siguientes DB diferentes de cero:

$$\begin{aligned}
\left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\}_{D1} &= \delta(x^- - u^-), \\
\left\{ \varphi(x), \Psi_5(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \varphi(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-),
\end{aligned}$$

6.2. Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac

$$\begin{aligned}
 \left\{ \varphi(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \varphi(x) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-), \\
 \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\}_{D1} &= \delta(x^- - u^-), \\
 \left\{ \psi^+(x), \Psi_5(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \psi^+(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-), \\
 \left\{ \psi^+(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \psi^+(x) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-), \\
 \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\}_{D1} &= \delta(x^- - u^-), \\
 \left\{ \psi^-(x), \Psi_5(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \psi^-(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-), \\
 \left\{ \psi^-(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \psi^-(x) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-), \\
 \left\{ \psi_a(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{ig}{2} \psi_a(x) |x^- - u^-|, \\
 \left\{ \psi_4(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{g}{2} \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-), \\
 \left\{ \psi_9(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{g}{2} \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-),
 \end{aligned}$$

junto con:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\}_{D1} &= \delta(x^- - u^-), \\
 \left\{ \varphi^*(x), \Psi_5(u) \right\}_{D1} &= \frac{ig^2}{2} \varphi^*(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-), \\
 \left\{ \varphi^*(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D1} &= \frac{ig^2}{2} \varphi^*(x) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-), \\
 \left\{ \bar{\psi}^+(x), \Psi_2(u) \right\}_{D1} &= \delta(x^- - u^-), \\
 \left\{ \bar{\psi}^+(x), \Psi_5(u) \right\}_{D1} &= \frac{ig^2}{2} \bar{\psi}^+(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \bar{\psi}^+(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D1} &= \frac{ig^2}{2} \bar{\psi}^+(x) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-), \\
\left\{ \bar{\psi}^-(x), \Psi_3(u) \right\}_{D1} &= \delta(x^- - u^-), \\
\left\{ \bar{\psi}^-(x), \Psi_5(u) \right\}_{D1} &= \frac{ig^2}{2} \bar{\psi}^-(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-), \\
\left\{ \bar{\psi}^-(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D1} &= \frac{ig^2}{2} \bar{\psi}^-(x) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-), \\
\left\{ \bar{\psi}_a(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{ig}{2} \bar{\psi}_a(x) |x^- - y^-|, \\
\left\{ \psi_5(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= img\psi^-(v) \epsilon(v^- - y^-), \\
\left\{ \psi_{10}(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= -img\bar{\psi}^+(v) \epsilon(v^- - y^-).
\end{aligned}$$

Así, es posible deducir a partir de (6.69) que para el caso cuando $\mathbf{A}_a(x) = \varphi(x)$ se determina que:

$$\begin{aligned}
\left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D2} &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_5(u) \right\}_{D1} \\
&\quad D_{5\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\}_{D1} \\
&\quad D_{6\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D1} \\
&\quad D_{10\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1},
\end{aligned}$$

relación que permite establecer los siguientes DB:

$$\begin{aligned}
\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D2} &= - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\}_{D1} D_{61}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_1(v), \varphi^*(y) \right\}_{D1} \\
&= \int du^- dv^- \delta(x^- - u^-) D_{61}^{-1}(u, v) \delta(v^- - y^-) \\
&= D_{61}^{-1}(x, y) = F_1(x, y) \\
&= -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-),
\end{aligned}$$

6.2. Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac

es decir,

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D2} = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-). \quad (6.74)$$

De igual manera:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D2} &= - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\}_{D1} D_{62}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_2(v), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D1} \\ &\quad - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D1} D_{10,2}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_2(v), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D1} \\ &= D_{62}^{-1}(x, y) - \frac{ig^2}{2} \varphi(x) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) D_{10,2}^{-1}(u, y) \\ &= F_2(x, y) - \frac{ig^2}{2} \varphi(x) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) M_2(u, y) \\ &= -\frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \\ &\quad - \frac{ig^2}{8m} \varphi(x) \int du \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) \epsilon(u^- - y^-), \end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \\ &\quad - \frac{ig^2}{8m} \varphi(x) \int du \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) \epsilon(u^- - y^-). \end{aligned} \quad (6.75)$$

Ahora, si $B_b(y) = \bar{\psi}^-(y)$ se determina:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D2} &= - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\}_{D1} D_{63}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_3(v), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D1} \\ &= D_{63}^{-1}(x, y) = F_3(x, y) = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\left\{ \varphi(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D2} = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-). \quad (6.76)$$

Considerando el caso cuando $\mathbf{A}_a(x) = \psi^+(x)$, los DB asociados a esta cantidad que son diferentes de cero se calculan de:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^+(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \psi^+(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_5(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{5\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{7\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{10\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1}. \end{aligned}$$

De manera que en el caso cuando $\mathbf{B}_b(y) = \varphi^*(y)$ resulta en:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^+(x), \varphi^*(y) \right\}_{D_2} &= - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\}_{D_1} D_{71}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_1(v), \varphi^*(y) \right\}_{D_1} \\ &= D_{71}^{-1}(x, y) = G_1(x, y) \\ &= -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-), \end{aligned}$$

entonces:

$$\left\{ \psi^+(x), \varphi^*(y) \right\}_{D_2} = -\frac{i}{2} \delta(x^- - y^-). \quad (6.77)$$

Para $\mathbf{B}_b(y) = \bar{\psi}^+(y)$:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D_2} &= - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\}_{D_1} D_{72}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_2(v), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D_1} \\ &\quad - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D_1} D_{10,2}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_2(v), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D_1} \end{aligned}$$

6.2. Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac

$$\begin{aligned}
 &= D_{72}^{-1}(x, y) - \frac{ig^2}{2} \psi^+(x) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) D_{10,2}^{-1}(u, y) \\
 &= D_{72}^{-1}(x, y) - \frac{ig^2}{2} \psi^+(x) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) D_{10,2}^{-1}(u, y) \\
 &= G_2(x, y) - \frac{ig^2}{2} \psi^+(x) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) M_2(u, y) \\
 &= \frac{1}{8m} \left[i\lambda(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \\
 &\quad - \frac{ig^2}{8m} \psi^+(x) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - y^-),
 \end{aligned}$$

es decir:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D_2} &= \frac{1}{8m} \left[i\lambda(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \\
 &\quad - \frac{ig^2}{8m} \psi^+(x) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - y^-).
 \end{aligned} \tag{6.78}$$

Ahora, si $\mathbf{B}_b(y) = \bar{\psi}^-(y)$ se deduce:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D_2} &= - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\}_{D_1} D_{73}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_3(v), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D_1} \\
 &= D_{73}^{-1}(x, y) = G_3(x, y) \\
 &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-),
 \end{aligned}$$

así que:

$$\left\{ \psi^+(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D_2} = \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta(x^- - y^-) \tag{6.79}$$

Ahora, si se considera el caso $\mathbf{A}_a(x) = \psi^-(x)$ es posible deducir que los DB

asociados a esta variable se calculan a partir de:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^-(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \psi^-(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_5(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{5\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{8\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_{10}(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{10\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1}. \end{aligned}$$

Cuando $\mathbf{B}_b(y) = \varphi^*(y)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^-(x), \varphi^*(y) \right\}_{D_2} &= - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\}_{D_1} D_{81}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_1(v), \varphi^*(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\}_{D_1} \\ &\quad D_{85}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_5(v), \varphi^*(y) \right\}_{D_1} \\ &= D_{81}^{-1}(x, y) - \frac{ig^2}{2} \varphi^*(y) \int dv^- D_{85}^{-1}(x, v) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\ &= H_1(x, y) - \frac{ig^2}{2} \varphi^*(y) \int dv^- H_5(x, v) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\ &= -\frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \\ &\quad - \frac{ig^2}{8m} \varphi^*(y) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-), \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \left\{ \psi^-(x), \varphi^*(y) \right\}_{D_2} &= -\frac{i}{8} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - y^-) \right\} \quad (6.80) \\ &\quad - \frac{ig^2}{8m} \varphi^*(y) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned}$$

6.2. Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac

En el caso cuando $\mathbf{B}_b(\mathbf{y}) = \varphi^*(\mathbf{y})$:

$$\begin{aligned}
\left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D2} &= - \int d\mathbf{u}^- d\mathbf{v}^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(\mathbf{u}) \right\}_{D1} D_{82}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \left\{ \Psi_2(\mathbf{v}), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D1} \\
&\quad - \int d\mathbf{u}^- d\mathbf{v}^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(\mathbf{u}) \right\}_{D1} D_{85}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \left\{ \Psi_5(\mathbf{v}), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D1} \\
&\quad - \int d\mathbf{u}^- d\mathbf{v}^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_{10}(\mathbf{u}) \right\}_{D1} D_{10,2}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \left\{ \Psi_2(\mathbf{v}), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D1} \\
&= D_{82}^{-1}(x, y) - \frac{ig^2}{2} \bar{\psi}^+(y) \int d\mathbf{v}^- D_{85}^{-1}(x, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{v}) \epsilon(\mathbf{v}^- - \mathbf{y}^-) \\
&\quad - \frac{ig^2}{2} \psi^-(x) \int d\mathbf{u}^- \epsilon(x^- - \mathbf{u}^-) \varphi^*(\mathbf{u}) D_{10,2}^{-1}(\mathbf{u}, y) \\
&= H_2(x, y) - \frac{ig^2}{2} \bar{\psi}^+(y) \int d\mathbf{v}^- H_5(x, \mathbf{v}) \varphi(\mathbf{v}) \epsilon(\mathbf{v}^- - \mathbf{y}^-) \\
&\quad - \frac{ig^2}{2} \psi^-(x) \int d\mathbf{u}^- \epsilon(x^- - \mathbf{u}^-) \varphi^*(\mathbf{u}) M_2(\mathbf{u}, y) \\
&= -\frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ -\frac{\alpha(x)}{2m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - \mathbf{y}^-) \right] - \frac{1}{2} \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - \mathbf{y}^-) \right\} + \frac{\xi(x)}{m} \epsilon(x^- - \mathbf{y}^-) \right\} \\
&\quad - \frac{ig^2}{8m} \bar{\psi}^+(y) \int d\mathbf{v}^- \epsilon(x^- - \mathbf{v}^-) \varphi(\mathbf{v}) \epsilon(\mathbf{v}^- - \mathbf{y}^-) \\
&\quad - \frac{ig^2}{8m} \psi^-(x) \int d\mathbf{u}^- \epsilon(x^- - \mathbf{u}^-) \varphi^*(\mathbf{u}) \epsilon(\mathbf{u}^- - \mathbf{y}^-),
\end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned}
\left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{1}{8m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ -\frac{\alpha(x)}{2m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - \mathbf{y}^-) \right] - \frac{1}{2} \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - \mathbf{y}^-) \right\} + \frac{\xi(x)}{m} \epsilon(x^- - \mathbf{y}^-) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{ig^2}{8m}\bar{\psi}^+(y)\int dv^-\epsilon(x^- - v^-)\varphi(v)\epsilon(v^- - y^-) \\
& -\frac{ig^2}{8m}\psi^-(x)\int du^-\epsilon(x^- - u^-)\varphi^*(u)\epsilon(u^- - y^-), \quad (6.81)
\end{aligned}$$

De igual manera, el DB calculado con el campo $\bar{\psi}^-(y)$ determina que:

$$\begin{aligned}
& \left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D_2} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\}_{D_1} D_{83}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_3(v), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D_1} \\
& - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\}_{D_1} D_{85}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_5(v), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D_1} \\
& = D_{83}^{-1}(x, y) - \frac{ig^2}{2}\bar{\psi}^-(y)\int dv^- D_{85}^{-1}(x, v)\varphi(v)\epsilon(v^- - y^-) \\
& = D_{83}^{-1}(x, y) - \frac{ig^2}{2}\bar{\psi}^-(y)\int dv^- D_{85}^{-1}(x, v)\varphi(v)\epsilon(v^- - y^-) \\
& = H_3(x, y) - \frac{ig^2}{2}\bar{\psi}^-(y)\int dv^- H_5(x, v)\varphi(v)\epsilon(v^- - y^-) \\
& = \frac{1}{4m}\frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \delta(x^- - y^-) \right\} \\
& - \frac{ig^2}{8m}\bar{\psi}^-(y)\int dv^-\epsilon(x^- - y^-)\varphi(v)\epsilon(v^- - y^-),
\end{aligned}$$

así que:

$$\begin{aligned}
\left\{ \psi^-(x), \bar{\psi}^-(y) \right\}_{D_2} & = \frac{1}{4m}\frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) - \frac{\beta(x)}{m} \right] \delta(x^- - y^-) \right\} \quad (6.82) \\
& - \frac{ig^2}{8m}\bar{\psi}^-(y)\int dv^-\epsilon(x^- - y^-)\varphi(v)\epsilon(v^- - y^-).
\end{aligned}$$

Consideremos el caso cuando $B_b(y) = A_+(y)$ de las relaciones que permiten calcular los DB asociados a los campos DKP. Entonces, se establece en primer

6.2. Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac

lugar que:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \varphi(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \varphi(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \varphi(x), \Psi_6(u) \right\}_{D_1} D_{64}^{-1}(u, v) \\
 &\quad \left\{ \Psi_4(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_1} \\
 &= \frac{ig}{2} \varphi(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{2} \int dv D_{64}^{-1}(x, v) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
 &= \frac{ig}{2} \varphi(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{2} \int dv F_4(x, v) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
 &= \frac{ig}{2} \left[\varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv \epsilon(x^- - v^-) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right],
 \end{aligned}$$

así:

$$\left\{ \varphi(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_2} = \frac{ig}{2} \left[\varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv \epsilon(x^- - v^-) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right]. \quad (6.83)$$

De manera similar cuando el campo en consideración es $\psi^+(x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \psi^+(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \psi^+(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^+(x), \Psi_7(u) \right\}_{D_1} D_{74}^{-1}(u, v) \\
 &\quad \left\{ \Psi_4(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_1} \\
 &= \frac{ig}{2} \psi^+(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{2} \int dv^- D_{74}^{-1}(x, v) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
 &= \frac{ig}{2} \psi^+(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{2} \int dv^- G_4(x, v) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
 &= \frac{g}{2} \left[i\psi^+(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{2m} \varphi(x) \epsilon(x^- - y^-) \right],
 \end{aligned}$$

dando

$$\left\{ \psi^+(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_2} = \frac{g}{2} \left[i\psi^+(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{2m} \varphi(x) \epsilon(x^- - y^-) \right]. \quad (6.84)$$

Si se estudia el caso para $\psi^-(x)$:

$$\begin{aligned}
\left\{ \psi^-(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \psi^-(x), A_+(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{84}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_4(v), A_+(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{85}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_5(v), A_+(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \psi^-(x), \Psi_8(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{89}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_9(v), A_+(y) \right\}_{D_1} \\
&= \frac{ig}{2} \psi^-(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{2} \int dv^- D_{84}^{-1}(x, v) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
&\quad - img \int dv^- D_{85}^{-1}(x, v) \psi^-(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
&\quad - \frac{g}{2} \int dv^- D_{89}^{-1}(x, v) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
&= \frac{ig}{2} \psi^-(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{2} \int dv^- H_4(x, v) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
&\quad - img \int dv^- H_5(x, v) \psi^-(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
&\quad - \frac{g}{2} \int dv^- H_9(x, v) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-),
\end{aligned}$$

siendo que

$$\begin{aligned}
\left\{ \psi^-(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= \frac{ig}{2} \psi^-(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{16m} \int dv^- \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\theta(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \right. \\
&\quad \left. \epsilon(x - v) \right\} \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) - \frac{ig}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \\
&\quad \psi^-(v) \epsilon(v^- - y^-) + \frac{g}{16m^2} \int dv^- \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \epsilon(x^- - v^-) \right] \\
&\quad \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-). \tag{6.85}
\end{aligned}$$

6.2. Inversión de los Vínculos de DKP y Corchetes de Dirac

Ahora, cuando se analiza el campo $\varphi^*(x)$ resulta que:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \varphi^*(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \varphi^*(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\}_{D_1} \\
 &\quad D_{19}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_9(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_1} \\
 &= -\frac{ig}{2} \varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{g}{2} \int dv^- D_{19}^{-1}(x, v) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
 &= -\frac{ig}{2} \varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{g}{2} \int dv^- \mathcal{A}_9(x, v) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-),
 \end{aligned}$$

entonces

$$\left\{ \varphi^*(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_2} = -\frac{ig}{2} \left[\varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \right]. \quad (6.86)$$

De manera similar, para el campo $\bar{\psi}^+(x)$:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \bar{\psi}^+(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \bar{\psi}^+(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \bar{\psi}^+(x), \Psi_2(u) \right\}_{D_1} \\
 &\quad D_{24}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_4(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \bar{\psi}^+(x), \Psi_2(u) \right\}_{D_1} \\
 &\quad D_{29}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_9(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \bar{\psi}^+(x), \Psi_2(u) \right\}_{D_1} \\
 &\quad D_{2,10}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_{10}(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D_1} \\
 &= -\frac{ig}{2} \bar{\psi}^+(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{2} \int dv^- D_{24}^{-1}(x, v) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
 &\quad - \frac{g}{2} \int dv^- D_{29}^{-1}(x, v) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) + img \int dv^- D_{2,10}^{-1}(x, v) \\
 &\quad \bar{\psi}^+(v) \epsilon(v^- - y^-)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{ig}{2}\bar{\psi}^+(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{2} \int dv^- B_4(x, v) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
&\quad - \frac{g}{2} \int dv^- B_9(x, v) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) + img \int dv^- B_{10}(x, v) \bar{\psi}^+(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
&= -\frac{ig}{2}\bar{\psi}^+(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{16m^2} \int dv^- \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - v^-) \right] \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
&\quad + \frac{g}{16m} \int dv^- \left(\frac{1}{\partial_-^x} \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - v^-) \right) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
&\quad + \frac{ig}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \bar{\psi}^+(v) \epsilon(v^- - y^-),
\end{aligned}$$

de modo que:

$$\begin{aligned}
\left\{ \bar{\psi}^+(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= -\frac{ig}{2}\bar{\psi}^+(x) |x^- - y^-| + \frac{g}{16m^2} \int dv^- \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \epsilon(x^- - v^-) \right] \\
&\quad \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) + \frac{g}{16m} \int dv^- \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[i\lambda(x) + \frac{\beta(x)}{m} \right] \epsilon(x^- - v^-) \right\} \\
&\quad \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) + \frac{ig}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \bar{\psi}^+(v) \epsilon(v^- - y^-),
\end{aligned} \tag{6.87}$$

Finalmente, cuando se estudia el Db para el campo $\bar{\psi}^-(x)$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left\{ \bar{\psi}^-(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \bar{\psi}^-(x), A_+(y) \right\}_{D_1} - \int du^- dv^- \left\{ \bar{\psi}^-(x), \Psi_3(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{39}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_9(v), A_+(y) \right\}_{D_1} \\
&= -\frac{ig}{2}\bar{\psi}^-(x) |x^- - y^-| - \frac{g}{2} \int dv^- D_{39}^{-1}(x, v) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
&= -\frac{ig}{2}\bar{\psi}^-(x) |x^- - y^-| - \frac{g}{2} \int dv^- C_9(x, v) \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \\
&= -\frac{g}{2} \left[i\bar{\psi}^-(x) |x^- - y^-| + \frac{1}{2m} \varphi^*(x) \epsilon(x^- - y^-) \right],
\end{aligned}$$

así que:

$$\left\{ \bar{\psi}^-(x), A_+(y) \right\}_{D2} = -\frac{g}{2} \left[i\bar{\psi}^-(x) |x^- - y^-| + \frac{1}{2m} \varphi^*(x) \epsilon(x^- - y^-) \right]. \quad (6.88)$$

6.3. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 3 + 1 Dimensiones

A partir de la densidad Lagrangiana (6.1) y de las relaciones asociadas a los momentos canónicos conjugados definidas por (6.3), es posible demostrar que la electrodinámica escalar de primer orden en 3 + 1 dimensiones presenta el siguiente conjunto de vínculos primarios en el sector electromagnético:

$$\pi^+ \approx 0 \quad , \quad \phi^k \equiv \pi^k - \partial_- A_k + \partial_k A_-, \quad (6.89)$$

Al igual que un conjunto de vínculos correspondientes al sector escalar:

$$\theta \equiv p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0 \quad , \quad \bar{\theta} \equiv \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0. \quad (6.90)$$

Además de una relación dinámica definida por:

$$\partial_+ A_- = \pi^- + \partial_- A_+ \quad (6.91)$$

La Hamiltoniano canónico correspondiente a la teoría es definido por

$$H_C = \int d^3y \mathcal{H}_C,$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= \pi^\mu \partial_+ A_\mu + \bar{p} \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} p - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \pi^{-2} + (\pi^A \partial_A^y + g \bar{\psi} \beta^+ \psi) A_+ + \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A (\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y) + g A_A \beta^A + m \right] \psi \\ &\quad + \frac{1}{4} (F^{kl})^2, \end{aligned} \quad (6.92)$$

donde $A = -, 1, 2$. La evolución dinámica del sistema estará determinado por el Hamiltoniano primario, el cual se construye a partir del hamiltoniano canónico mas una combinación lineal de los vínculos primarios vía multiplicadores de Lagrange, que para el caso sera:

$$H_P = H_C + \int d^3x \left[u(x) \pi^+(x) + u_l(x) \phi^l(x) + \bar{\lambda}(x) \theta(x) + \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right], \quad (6.93)$$

donde $d^3x \equiv dx^- dx^1 dx^2 = d^3x^A$. Con el fin de complementar la evolución del sistema se introduce los PB fundamentales los cuales son definidos por:

$$\begin{aligned} \left\{ A_\mu(x), \pi^\nu(y) \right\} &= \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \\ \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} &= \delta_{ab} \delta^3(x-y), \\ \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} &= \delta_{ab} \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (6.94)$$

Ahora, analicemos la consistencia de los vínculos primarios estudiando en primer lugar aquella correspondientes al sector electromagnético, de manera que:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^+(x) &= \left\{ \pi^+(x), H_P \right\} = \int d^3y \left\{ \pi^+(x), \left(\pi^A \partial_A^y + g \bar{\psi}(y) \beta^+ \psi(y) \right) A_+(y) \right\} \\ &= - \int d^3y \left(\pi^A \partial_A^y + g \bar{\psi}(y) \beta^+ \psi(y) \right) \delta^3(x-y) \\ &= - \int d^3y \left(-\pi^A \partial_A^x + g \bar{\psi}(y) \beta^+ \psi(y) \right) \delta^3(x-y) \\ &= \partial_A^x \pi^A(x) - g \bar{\psi}(x) \beta^+ \psi(x) \approx 0, \end{aligned}$$

de manera que

$$\dot{\pi}^+ = \partial_A^x \pi^A - g \bar{\psi} \beta^+ \psi \equiv G \approx 0, \quad (6.95)$$

es decir, un vínculo secundario a surgido del sector electromagnético. Ahora, con el fin de estudiar su consistencia se utilizara los siguientes PB calculados

6.3. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 3+1 Dimensiones

entre $G(x)$ y los vínculos primarios:

$$\begin{aligned}
 \left\{ G(x), \phi^l(y) \right\} &= \partial_-^x \partial_l^y \left\{ \pi^-(x), A_-(y) \right\} - \partial_k^x \partial_-^y \left\{ \pi^k(x), A_l(y) \right\} \\
 &= \partial_-^x \partial_l^x \delta^3(x-y) - \partial_l^x \partial_-^x \delta^3(x-y) = 0, \\
 \left\{ G(x), \theta_b(y) \right\} &= -g \left\{ \bar{\Psi}_a(x), p_b(y) \right\} \left[\beta^+ \psi(x) \right]_a \\
 &= -g \left[\beta^+ \psi(x) \right]_b \delta^3(x-y), \\
 \left\{ G(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= -g \left[\bar{\Psi} \beta^+(x) \right]_a \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} \\
 &= -g \left[\bar{\Psi}(x) \beta^+ \right]_b \delta^3(x-y),
 \end{aligned} \tag{6.96}$$

junto con las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \left\{ G(x), F^{mn}(y) \right\} &= \partial_k^x \partial_m^y \left\{ \pi^k(x), A_n(y) \right\} - \partial_k^x \partial_n^y \left\{ \pi^k(x), A_m(y) \right\} \\
 &= \partial_n^x \partial_m^x \delta^3(x-y) - \partial_m^x \partial_n^x \delta^3(x-y) = 0, \\
 \left\{ G(x), A_-(y) \right\} &= \partial_-^x \left\{ \pi^-(x), A_-(y) \right\} = -\partial_-^x \delta^3(x-y), \\
 \left\{ G(x), A_l(y) \right\} &= \partial_k^x \left\{ \pi^k(x), A_l(y) \right\} = -\partial_l^x \delta^3(x-y).
 \end{aligned} \tag{6.97}$$

De manera que la consistencia $G(x)$ establece que:

$$\begin{aligned}
 \dot{G}(x) &= \left\{ G(x), H_p \right\} \\
 &= g \int d^3y \left\{ G(x), A_-(y) \right\} \bar{\Psi}(y) \beta^- \psi(y) + g \int d^3y \left\{ G(x), A_l(y) \right\} \\
 &\quad \bar{\Psi}(y) \beta^l \psi(y) + \int d^3y \bar{\lambda}_b(y) \left\{ G(x), \theta_b(y) \right\} + \int d^3y \lambda_b(y) \left\{ G(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} \\
 &= \int d^3y \left[-g \bar{\Psi}(y) \beta^- \psi(y) \partial_-^x - g \bar{\Psi}(y) \beta^l \psi(y) \partial_l^x - g \bar{\lambda}(y) \beta^+ \psi(x) \right. \\
 &\quad \left. - g \bar{\Psi} \beta^+(x) \lambda(y) \right] \delta^3(x-y) \\
 &= -g \left[\partial_-^x \left[\bar{\Psi}(x) \beta^- \psi(x) \right] + \partial_l^x \left[\bar{\Psi}(x) \beta^l \psi(x) \right] + \bar{\lambda}(x) \beta^+ \psi(x) \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\Psi}(x) \beta^+ \lambda(x) \right] \approx 0,
 \end{aligned}$$

resultando que:

$$\dot{G} = \partial_A^x \left(\bar{\psi} \beta^A \psi \right) + \bar{\lambda} \beta^+ \psi + \bar{\psi} \beta^+ \lambda \approx 0. \quad (6.98)$$

Ahora, con el fin de calcular la consistencia del vínculo $\phi^k(x)$ consideremos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \left\{ \phi^k(x), \pi^-(y) \right\} &= \partial_k^x \left\{ A_-(x), \pi^-(y) \right\} = \partial_k^x \delta^3(x-y) \\ \left\{ \phi^k(x), \pi^A(y) \partial_A^y A_+(y) \right\} &= \partial_k^x \left\{ A_-(x), \pi^-(y) \right\} \partial_-^y A_+(y) \\ &\quad - \partial_-^x \left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\} \partial_l^y A_+(y) \\ &= \left[\partial_-^y A_+(y) \partial_k^x - \partial_k^y A_+(y) \partial_-^x \right] \delta^3(x-y), \\ \left\{ \phi^k(x), g A_A(y) \bar{\psi}(y) \beta^A \psi(y) \right\} &= g \bar{\psi}(y) \beta^l \psi(y) \left\{ \pi^k(x), A_l(y) \right\} \\ &= -g \bar{\psi}(x) \beta^k \psi(x) \delta^3(x-y), \\ \left\{ \phi^k(x), F_{mn}(y) \right\} &= \partial_m^y \left\{ \pi^k(x), A_n(y) \right\} - \partial_n^y \left\{ \pi^k(x), A_m(y) \right\} \\ &= (\delta_n^k \partial_m^x - \delta_m^k \partial_n^x) \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

Entonces, determinamos que la consistencia de $\phi^k(x)$ establece que:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^k(x) &= \left\{ \phi^k(x), H_P \right\} \\ &= \int d^3y \pi^-(y) \left\{ \phi^k(x), \pi^-(y) \right\} + \int d^3y \left\{ \phi^k(x), \pi^A(y) \partial_A^y A_+(y) \right\} \\ &\quad + \int d^3y \left\{ \phi^k(x), g A_A(y) \bar{\psi}(y) \beta^A \psi(y) \right\} + \frac{1}{2} \int d^3y F_{mn}(y) \\ &\quad \left\{ \phi^k(x), F_{mn}(y) \right\} + \int d^3y u_l(y) \left\{ \phi^k(x), \phi^l(y) \right\} \end{aligned}$$

6.3. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 3+1 Dimensiones

$$\begin{aligned}
&= \int d^3\mathbf{y} \pi^-(\mathbf{y}) \partial_{\mathbf{k}}^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \int d^3\mathbf{y} \left(\partial_{\mathbf{k}}^y \mathcal{A}_+(\mathbf{y}) \partial_{\mathbf{k}}^x - \partial_{\mathbf{k}}^y \mathcal{A}_+(\mathbf{y}) \partial_{\mathbf{k}}^x \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&\quad - g \int d^3\mathbf{y} \bar{\psi}(\mathbf{x}) \beta^k \psi(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \int d^3\mathbf{y} \frac{1}{2} F_{mn}(\mathbf{y}) (\delta_n^k \partial_m^x - \delta_m^k \partial_n^x) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&\quad - 2 \int d^3\mathbf{y} u_k(\mathbf{y}) \partial_{\mathbf{k}}^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \partial_{\mathbf{k}}^x \pi^-(\mathbf{x}) + \partial_{\mathbf{k}}^x \partial_{\mathbf{k}}^x \mathcal{A}_+(\mathbf{x}) - \partial_{\mathbf{k}}^x \partial_{\mathbf{k}}^x \mathcal{A}_+(\mathbf{x}) - g \bar{\psi}(\mathbf{x}) \beta^k \psi(\mathbf{x}) \\
&\quad + \frac{1}{2} (\delta_n^k \partial_m^x - \delta_m^k \partial_n^x) F_{mn}(\mathbf{x}) - 2 \partial_{\mathbf{k}}^x u_k(\mathbf{x}) \\
&= \partial_{\mathbf{k}}^x \pi^-(\mathbf{x}) - g \bar{\psi}(\mathbf{x}) \beta^k \psi(\mathbf{x}) + \partial_m^x F_{mk}(\mathbf{x}) - 2 \partial_{\mathbf{k}}^x u_k(\mathbf{x}) \\
&\approx 0,
\end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{\phi}^k = \partial_{\mathbf{k}}^x \pi^- - g \bar{\psi} \beta^k \psi + \partial_m^x F_{mk} - 2 \partial_{\mathbf{k}}^x u_k, \quad (6.99)$$

lo que indica una relación sobre el multiplicador de Lagrange $u_k(\mathbf{x})$.

Ahora, se procede a analizar la consistencia de los vínculos asociados al sector DKP, con lo cual se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\theta}_a(\mathbf{x}) &= \left\{ \theta_a(\mathbf{x}), H_P \right\} \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left\{ \theta_a(\mathbf{x}), \bar{\psi}_b(\mathbf{y}) \right\} \left(g \beta^+ \psi(\mathbf{y}) \mathcal{A}_+(\mathbf{y}) + \left[\frac{i}{2} \beta^A (\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g \mathcal{A}_A(\mathbf{y}) \beta^A + m \right] \psi(\mathbf{y}) \right)_b + \int d^3\mathbf{y} \left\{ \theta_a(\mathbf{x}), \bar{\theta}_b(\mathbf{y}) \right\} \lambda^b(\mathbf{y}) \\
&= - \int d^3\mathbf{y} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left(\left[g \beta^+ \mathcal{A}_+ + \frac{i}{2} \beta^A (\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y) + g \mathcal{A}_A \beta^A + m \right] \psi \right)_a \\
&\quad + i \int d^3\mathbf{y} \left[\beta^+ \lambda(\mathbf{y}) \right]_a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int d^3\mathbf{y} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left(\left[g \beta^+ \mathcal{A}_+ + \frac{i}{2} \beta^A \left(-\overleftarrow{\partial}_A^x - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + g \mathcal{A}_A \beta^A + m \right] \psi \right)_a \\
&\quad + i \int d^3\mathbf{y} \left[\beta^+ \lambda(\mathbf{y}) \right]_a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \left[\left[\left(i \partial_A^x - g \mathcal{A}_A(\mathbf{x}) \right) \beta^A - m \right] \psi(\mathbf{x}) - g \mathcal{A}_+(\mathbf{x}) \beta^+ \psi(\mathbf{x}) + i \beta^+ \lambda(\mathbf{x}) \right]_a \\
&= \left[\left(D_A^x \beta^A - m \right) \psi(\mathbf{x}) + \beta^+ \left(i \lambda(\mathbf{x}) - g \mathcal{A}_+ \psi(\mathbf{x}) \right) \right]_a,
\end{aligned}$$

entonces,

$$\dot{\theta} = (D_A^x \beta^A - m) \psi + \beta^+ (i \lambda - g \mathcal{A}_+ \psi) \approx 0, \quad (6.100)$$

con $D_A^x \equiv i \partial_A^x - g \mathcal{A}_A$. De manera similar, cuando se estudia la consistencia de $\bar{\theta}(\mathbf{x})$ se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\theta}}_a(\mathbf{x}) &= \left\{ \bar{\theta}_a(\mathbf{x}), H_P \right\} \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left(g \bar{\psi}(\mathbf{y}) \beta^+ \mathcal{A}_+(\mathbf{y}) + \bar{\psi}(\mathbf{y}) \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + g \mathcal{A}_A(\mathbf{y}) \beta^A + m \right] \right)_b \\
&\quad \left\{ \bar{\theta}_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y}) \right\} + \int d^3\mathbf{y} \bar{\lambda}^a(\mathbf{y}) \left\{ \bar{\theta}_a(\mathbf{x}), \theta_a(\mathbf{y}) \right\} \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left[-\bar{\psi}(\mathbf{y}) \left[g \beta^+ \mathcal{A}_+(\mathbf{y}) + \frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + g \mathcal{A}_A(\mathbf{y}) \beta^A + m \right] \right. \\
&\quad \left. - i \bar{\lambda}(\mathbf{y}) \beta^+ \right]_a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left[-\bar{\psi}(\mathbf{y}) \left[g \beta^+ \mathcal{A}_+(\mathbf{y}) + \frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y + \overrightarrow{\partial}_A^x \right) + g \mathcal{A}_A(\mathbf{y}) \beta^A + m \right] \right. \\
&\quad \left. - i \bar{\lambda}(\mathbf{y}) \beta^+ \right]_a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= - \left[\bar{\psi}(\mathbf{x}) \left[\beta^A \left(i \partial_A^x + g \mathcal{A}_A(\mathbf{x}) \right) + m \right] + i \bar{\lambda}(\mathbf{x}) \beta^+ + g \bar{\psi}(\mathbf{x}) \beta^+ \mathcal{A}_+(\mathbf{x}) \right]_a \\
&= - \left[\bar{\psi}(\mathbf{x}) \left(\beta^A \overline{D}_A^x + m \right) + (i \bar{\lambda}(\mathbf{x}) + g \bar{\psi}(\mathbf{x}) \mathcal{A}_+(\mathbf{x})) \beta^+ \right]_a,
\end{aligned}$$

siendo

$$\dot{\bar{\theta}} = \bar{\psi} \left(\beta^A \overline{D}_A^x + m \right) + (i \bar{\lambda} + g \bar{\psi} \mathcal{A}_+) \beta^+ \approx 0, \quad (6.101)$$

6.3. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 3+1 Dimensiones

con $\bar{D}_A^x \equiv i\partial_A^x + gA_A$. Las expresiones (6.100) y (6.101) pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\beta^{+\lambda} &\approx i \left(D_A^x \beta^A - m \right) \psi - igA_+ \beta^+ \psi, \\ \bar{\lambda} \beta^+ &\approx i\bar{\psi} \left(\beta^A \bar{D}_A^x + m \right) + ig\bar{\psi} \beta^+ A_+, \end{aligned}$$

que al ser substituidas en (6.98) se obtiene:

$$\begin{aligned}\dot{G} &= \partial_A^x \left(\bar{\psi} \beta^A \psi \right) + i \left[\bar{\psi} \left(\beta^A \bar{D}_A^x + m \right) \right] \psi + igA_+ \bar{\psi} \beta^+ \psi + i\bar{\psi} \left[\left(D_A^x \beta^A - m \right) \psi \right] \\ &\quad - igA_+ \bar{\psi} \beta^+ \psi \\ &= \partial_A^x \left(\bar{\psi} \beta^A \psi \right) - \left(\partial_A^x \bar{\psi} \right) \beta^A \psi + igA_A \bar{\psi} \beta^A \psi + im\bar{\psi} \psi - \bar{\psi} \beta^A \left(\partial_A^x \psi \right) \\ &\quad - igA_A \bar{\psi} \beta^A \psi - im\bar{\psi} \psi \\ &= \partial_A^x \left(\bar{\psi} \beta^A \psi \right) - \left(\partial_A^x \bar{\psi} \right) \beta^A \psi - \bar{\psi} \beta^A \left(\partial_A^x \psi \right) \\ &= \partial_A^x \left(\bar{\psi} \beta^A \psi \right) - \partial_A^x \left(\bar{\psi} \beta^A \psi \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

así que:

$$\dot{G} = 0, \tag{6.102}$$

con lo cual, la ley de Gauss para la electrodinámica escalar de primer orden, identificada con la relación $G(x)$, es automáticamente conservada.

Ahora, es necesario determinar si el conjunto de relaciones (6.100) y (6.101) determina completamente los multiplicadores de Lagrange $(\lambda, \bar{\lambda})$. Para este fin, se utilizara el siguiente conjunto de propiedades que satisfacen las matrices beta en las coordenadas de plano nulo:

$$\begin{aligned} P\beta^+ &= P^+, & P\beta^- &= P^-, & P\beta^k &= P^k, \\ P^-\beta^+ &= P, & P^-\beta^- &= 0, & P^-\beta^k &= 0, \\ P^+\beta^+ &= 0, & P^+\beta^- &= P, & P^+\beta^k &= 0, \\ P^k\beta^+ &= 0, & P^k\beta^- &= 0, & P^k\beta^l &= \delta_l^k P. \end{aligned} \tag{6.103}$$

además de las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\beta^- P &= (P^+)^\dagger, & \beta^+ P &= (P^-)^\dagger, & \beta^k P &= - (P^k)^\dagger, \\
\beta^- (P^-)^\dagger &= P, & \beta^+ (P^-)^\dagger &= 0, & \beta^k (P^-)^\dagger &= 0, \\
\beta^- (P^+)^\dagger &= 0, & \beta^+ (P^+)^\dagger &= P, & \beta^k (P^+)^\dagger &= 0, \\
\beta^- (P^k)^\dagger &= 0, & \beta^+ (P^k)^\dagger &= 0, & \beta^l (P^k)^\dagger &= \delta_l^k,
\end{aligned} \tag{6.104}$$

donde los operadores de proyección son definidos de la siguiente manera:

$$P = P^\dagger, \quad P^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = P, \quad \beta^+ (\beta^-)^2 (P^-)^\dagger = P. \tag{6.105}$$

De manera que al utilizar a representación matricial de las variables $(\psi, \bar{\psi}, p, \bar{p})$ correspondientes al espacio de fase del sector DKP expresadas en la forma:

$$\begin{aligned}
\psi &\equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi^+ \\ \psi^- \\ \psi^l \end{pmatrix}, & \bar{\psi} &\equiv (\varphi^* \quad \bar{\psi}^+ \quad \bar{\psi}^- \quad \bar{\psi}^l), \\
p &\equiv \begin{pmatrix} p_\varphi \\ p_+ \\ p_- \\ p_l \end{pmatrix}, & \bar{p} &\equiv (\bar{p}_\varphi \quad \bar{p}_+ \quad \bar{p}_- \quad \bar{p}_l),
\end{aligned} \tag{6.106}$$

con $l = 1, 2$, es posible deducir de (6.100):

$$\begin{aligned}
P\dot{\theta} &= D_-^x (P^- \psi) + D_k^x (P^k \psi) - m (P\psi) + i (P^+ \lambda) - gA_+ (P^+ \psi) \approx 0, \\
P^+ \dot{\theta} &= D_-^x (P\psi) - m (P^+ \psi) \approx 0, \\
P^l \dot{\theta} &= D_l^x (P\psi) - m (P^l \psi) \approx 0, \\
P^- \dot{\theta} &= -m (P^- \psi) + i (P\lambda) - gA_+ (P\psi) \approx 0,
\end{aligned} \tag{6.107}$$

con lo cual, dos condiciones sobre el multiplicador de Lagrange λ pueden ser determinadas y que corresponden a $P^+ \lambda$ y $P\lambda$, siendo que las componentes $P^l \lambda$ aún mantienen indeterminadas. Lo anterior da a entender que la teoría posee un vínculo secundario, como lo dan a entender las relaciones (6.107), asociado a la consistencia de $\theta(x)$ y el cual puede ser deducido, en analogía

6.3. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 3+1 Dimensiones

con el caso libre, mediante la aplicación del operador $(1 - \beta^+ \beta^-)$, de manera que el vínculo secundario correspondiente es dado por:

$$\omega_\delta = [(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A D_A^x - m) \psi]_\delta \approx 0, \quad (6.108)$$

con $\delta = 2, 3, 4$. Mediante la acción de los proyectores (6.105), es posible observar que:

$$\begin{aligned} P^+ \omega &= P^+ (\beta^- D_-^x \psi + \beta^k D_k^x \psi - m \psi) \\ &= D_-^x (P \psi) - m (P^+ \psi) = P^+ \dot{\theta} \approx 0 \\ P^l \omega &= P^l (\beta^- D_-^x \psi + \beta^k D_k^x \psi - m \psi) \\ &= D_l^x (P \psi) - m (P^l \psi) = P^l \dot{\theta} \approx 0 \\ P \omega &= 0 \quad , \quad P^- \omega = 0, \end{aligned}$$

que son consistentes con (6.107). De forma similar, cuando la expresión (6.101) es considerada, se deduce que:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} P &= \bar{D}_-^x [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}] - \bar{D}_k^x [\bar{\psi} (P^k)^{\dagger}] + m (\bar{\psi} P) + i [\bar{\lambda} (P^-)^{\dagger}] \\ &\quad + g A_+ [\bar{\psi} (P^-)^{\dagger}] \approx 0, \\ \dot{\theta} (P^+)^{\dagger} &= m [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}] + i (\bar{\lambda} P) + g A_+ (\bar{\psi} P) \approx 0, \\ \dot{\theta} (P^l)^{\dagger} &= \bar{D}_l^x (\bar{\psi} P) + m [\bar{\psi} (P^l)^{\dagger}] \approx 0, \\ \dot{\theta} (P^-)^{\dagger} &= \bar{D}_-^x (\bar{\psi} P) + m [\bar{\psi} (P^-)^{\dagger}] \approx 0. \end{aligned} \quad (6.109)$$

Así, las relaciones que donde se evidencia $\bar{\lambda} P$ y $\bar{\lambda} (P^-)^{\dagger}$, dan a entender que solamente dos componentes del multiplicador $\bar{\lambda}$ consiguen ser fijadas, en tanto que las componentes $\bar{\lambda} (P^l)^{\dagger}$ aún están por ser deducidas. De la expresión anterior es posible constatar que nuevamente vínculos secundarios surgen de la consistencia de $\bar{\theta}(x)$ y que pueden ser identificados mediante la acción del operador $(1 - \beta^- \beta^+)$, de manera que:

$$\bar{\omega}_\delta = [\bar{\psi} (\bar{D}_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+)]_\delta \approx 0, \quad (6.110)$$

donde $\delta = 3, 4, 5$. Fácilmente, es posible mostrar a partir de (6.110) que:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}(P^l)^\dagger &= \left(\bar{D}_-^x \bar{\psi} \beta^- + \bar{D}_k^x \bar{\psi} \beta^k + m \bar{\psi} \right) (P^l)^\dagger \\
&= \bar{D}_l^x (\bar{\psi} P) + m \left[\bar{\psi} (P^l)^\dagger \right] = \dot{\bar{\theta}} (P^l)^\dagger \approx 0 \\
\bar{\omega}(P^-)^\dagger &= \left(\bar{D}_-^x \bar{\psi} \beta^- + \bar{D}_k^x \bar{\psi} \beta^k + m \bar{\psi} \right) (P^-)^\dagger \\
&= \bar{D}_-^x (\bar{\psi} P) + m \left[\bar{\psi} (P^-)^\dagger \right] = \dot{\bar{\theta}} (P^-)^\dagger \approx 0 \\
\bar{\omega} P &= 0 \quad , \quad \bar{\omega} (P^+)^\dagger = 0,
\end{aligned}$$

lo que resulta compatible con (6.109). Entonces, podemos concluir que la teoría posee un conjunto de vínculos secundarios asociados al sector DKP identificados con (6.108) y (6.110) y que satisfacen los siguientes PB:

$$\begin{aligned}
\left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^A D_A^x - m \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\
\left\{ \bar{\theta}_a(x), \omega_b(y) \right\} &= \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^A \bar{D}_A^x + m \right) \right]_{ba} \delta^3(x-y), \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[\left(\bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{ba} \delta^3(x-y), \\
\left\{ \theta_a(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= \left[\left(D_A^x \beta^A - m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\
\left\{ \omega_a(x), \phi^k(y) \right\} &= -g \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^k \psi(x) \right]_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \phi^k(x), \omega_a(y) \right\} &= g \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^k \psi(x) \right]_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \phi^k(y) \right\} &= g \left[\bar{\psi}(x) \beta^k \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \phi^k(x), \bar{\omega}_a(y) \right\} &= -g \left[\bar{\psi}(x) \beta^k \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \delta^3(x-y).
\end{aligned} \tag{6.111}$$

6.3. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 3+1 Dimensiones

Utilizando los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 \{\omega_a(x), \pi^-(y)\} &= -g \left[(1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- \psi(x) \right]_a \delta^3(x - y), \\
 \{\omega_a(x), \pi^A(y) \partial_A^y \mathcal{A}_+(y)\} &= -g \delta^3(x - y) \left[\left[(1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- \psi(x) \right]_a \partial_x^- \mathcal{A}_+(x) \right. \\
 &\quad \left. + \left[(1 - \beta^+ \beta^-) \beta^k \psi(x) \right]_a \partial_k^x \mathcal{A}_+(x) \right], \\
 \{\bar{\omega}_a(x), \pi^-(y)\} &= g \left[\bar{\psi}(x) \beta^- (1 - \beta^- \beta^+) \right]_a \delta^3(x - y), \\
 \{\bar{\omega}_a(x), \pi^A(y) \partial_A^y \mathcal{A}_+(y)\} &= g \delta^3(x - y) \left[\left[\bar{\psi}(x) \beta^- (1 - \beta^- \beta^+) \right]_a \partial_x^- \mathcal{A}_+(x) \right. \\
 &\quad \left. + \left[\bar{\psi}(x) \beta^k (1 - \beta^- \beta^+) \right]_a \partial_k^x \mathcal{A}_+(x) \right],
 \end{aligned}$$

se determina que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\omega}_\delta(x) &= \left\{ \omega_\delta(x), H_P \right\} \\
 &= \int d^3y \pi^-(y) \left\{ \omega_\delta(x), \pi^-(y) \right\} + \int d^3y \left\{ \omega_\delta(x), \pi^A(y) \partial_A^y \mathcal{A}_+(y) \right\} \\
 &\quad + \int d^3y u_l(y) \left\{ \omega_\delta(x), \Phi^l(y) \right\} + \int d^3y \lambda_b(y) \left\{ \omega_\delta(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} \\
 &= \int d^3y \left[-g \pi^-(y) \left[(1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- \psi(x) \right]_\delta - g \left[(1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- \psi(x) \right]_\delta \partial_x^- \mathcal{A}_+(x) \right. \\
 &\quad - g \left[(1 - \beta^+ \beta^-) \beta^k \psi(x) \right]_\delta \partial_k^x \mathcal{A}_+(x) - g u_l(y) \left[(1 - \beta^+ \beta^-) \beta^l \psi(x) \right]_\delta \\
 &\quad \left. + \lambda_b(y) \left[(1 - \beta^+ \beta^-) \left(\beta^A D_A^x - m \right) \right]_{\delta b} \right] \delta^3(x - y) \\
 &= \left[-g \pi^-(x) (1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- \psi(x) - g (1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- \psi(x) \partial_x^- \mathcal{A}_+(x) \right. \\
 &\quad - g (1 - \beta^+ \beta^-) \beta^k \psi(x) \partial_k^x \mathcal{A}_+(x) - g u_l(x) (1 - \beta^+ \beta^-) \beta^l \psi(x) \\
 &\quad \left. + (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A D_A^x - m) \lambda(x) \right]_\delta \\
 &= \left\{ (1 - \beta^+ \beta^-) \left[-g \pi^-(x) \beta^- \psi(x) - g \beta^- \psi(x) \partial_x^- \mathcal{A}_+(x) - g \beta^k \psi(x) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \partial_k^x \mathcal{A}_+(x) - g u_l(x) \beta^l \psi(x) + (\beta^A D_A^x - m) \lambda(x) \right] \right\}_\delta,
 \end{aligned}$$

de manera que:

$$\begin{aligned} \dot{\omega} = & \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left[-g\pi^- \beta^- \psi - g\beta^- \psi \partial_-^x A_+ - g\beta^k \psi \partial_k^x A_+ \right. \\ & \left. - g u_l \beta^l \psi + \left(\beta^A D_A^x - m \right) \lambda \right] \approx 0. \end{aligned} \quad (6.112)$$

Ahora, es necesario determinar si la expresión (6.112) garantiza fijar todas las componentes del multiplicador de Lagrange $\lambda(x)$, para ello, es necesario utilizar los operadores de proyección (6.105), de manera que se determina lo siguiente:

$$\begin{aligned} P\dot{\omega} &= 0, & P^-\dot{\omega} &= 0, \\ P^l\dot{\omega} &= -g \left(\partial_l^x A_+ + u_l \right) (P\psi) + D_l^x (P\lambda) - m (P^l\lambda) \approx 0, \\ P^+\dot{\omega} &= -g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) (P\psi) + D_-^x (P\lambda) - m (P^+\lambda) \approx 0, \end{aligned}$$

entonces, utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} (P^+\lambda) &= iD_-^x (P^-\psi) + iD_k^x (P^k\psi) - im (P\psi) - igA_+ (P^+\psi), \\ (P\lambda) &= -im (P^-\psi) - igA_+ (P\psi), \end{aligned}$$

deducidas con anterioridad de la consistencia de los vínculos $\theta(x)$, es posible mostrar el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} P^+\dot{\omega} &= -g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) (P\psi) - im D_-^x (P^-\psi) - ig D_-^x [A_+ (P\psi)] \\ &\quad - im D_-^x (P^-\psi) - im D_k^x (P^k\psi) + im^2 (P\psi) + igm A_+ (P^+\psi) \\ &= -g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) (P\psi) - im D_-^x (P^-\psi) - ig \left[i (\partial_-^x A_+) (P\psi) + A_+ D_-^x (P\psi) \right] \\ &\quad - im D_-^x (P^-\psi) - im D_k^x (P^k\psi) + im^2 (P\psi) + igm A_+ (P^+\psi) \end{aligned}$$

6.3. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 3+1 Dimensiones

$$\begin{aligned}
&= -g\pi^- (P\psi) - 2im D_-^x (P^- \psi) - im D_k^x (P^k \psi) + im^2 (P\psi) \\
&\quad - igA_+ \left[D_-^x (P\psi) - m (P^+ \psi) \right] \\
&= -P \left(2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \psi - igA_+ P^+ \dot{\theta} \\
&= -P^+ \left\{ (\beta^-)^2 \beta^+ \left(2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \psi + igA_+ \dot{\theta} \right\} \\
&\approx -P^+ \left\{ (\beta^-)^2 \beta^+ \left(2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \psi \right\}.
\end{aligned}$$

Así, se puede concluir que un vínculo terciario resulta y que se define como:

$$\Omega \equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left(2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \psi \approx 0. \quad (6.113)$$

Si la condición de consistencia del vínculo $\bar{\omega}(x)$ es estudiada se determina que:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\omega}}_\delta(x) &= \left\{ \bar{\omega}_\delta(x), H_P \right\} \\
&= \int d^3y \pi^-(y) \left\{ \bar{\omega}_\delta(x), \pi^-(y) \right\} + \int d^3y \left\{ \bar{\omega}_\delta(x), \pi^A(y) \partial_A^y A_+(y) \right\} \\
&\quad + \int d^3y u_l(y) \left\{ \bar{\omega}_\delta(x), \phi^l(y) \right\} + \int d^3y \bar{\lambda}_b(y) \left\{ \bar{\omega}_\delta(x), \theta_b(y) \right\} \\
&= \int d^3y \left[g\pi^-(y) \left[\bar{\psi}(x) \beta^- \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_\delta + g \left[\bar{\psi}(x) \beta^- \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_\delta \partial_-^x A_+(x) \right. \\
&\quad + g \left[\bar{\psi}(x) \beta^k \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_\delta \partial_k^x A_+(x) + g u_l(y) \left[\bar{\psi}(x) \beta^l \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_\delta \\
&\quad \left. + \bar{\lambda}_b(y) \left[\left(\bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{b\delta} \right] \delta^3(x-y) \\
&= \left\{ \left[g\pi^-(x) \bar{\psi}(x) \beta^- + g \bar{\psi}(x) \beta^- \partial_-^x A_+(x) + g \bar{\psi}(x) \beta^k \partial_k^x A_+(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + g u_l(x) \bar{\psi}(x) \beta^l + \bar{\lambda}(x) \left(\bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \right] \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right\}_\delta,
\end{aligned}$$

con lo cual:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\omega}} &= \left[g\pi^- \bar{\psi} \beta^- + g \bar{\psi} \beta^- \partial_-^x A_+ + g \bar{\psi} \beta^k \partial_k^x A_+ + g u_l \bar{\psi} \beta^l + \bar{\lambda} \left(\bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \right] \\
&\quad \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \approx 0.
\end{aligned} \quad (6.114)$$

Utilizando nuevamente los proyectores, se deduce que

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\omega}}P &= 0 \quad , \quad \dot{\bar{\omega}}(P^+)^\dagger = 0, \\ \dot{\bar{\omega}}(P^l)^\dagger &= g \left(\partial_1^x A_+ + u_1 \right) (\bar{\psi}P) + \bar{D}_1^x (\bar{\lambda}P) + m \left[\bar{\lambda}(P^l)^\dagger \right], \\ \dot{\bar{\omega}}(P^-)^\dagger &= g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) (\bar{\psi}P) + \bar{D}_-^x (\bar{\lambda}P) + m \left[\bar{\lambda}(P^-)^\dagger \right].\end{aligned}$$

De las expresiones que resultan de la consistencia de $\bar{\theta}(x)$, es posible verificar que:

$$\begin{aligned}(\bar{\lambda}P) &= im \left[\bar{\psi}(P^+)^\dagger \right] + igA_+ (\bar{\psi}P), \\ \left[\bar{\lambda}(P^-)^\dagger \right] &= i\bar{D}_-^x \left[\bar{\psi}(P^+)^\dagger \right] - i\bar{D}_k^x \left[\bar{\psi}(P^k)^\dagger \right] + im (\bar{\psi}P) + igA_+ \left[\bar{\psi}(P^-)^\dagger \right],\end{aligned}$$

de manera que:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\omega}}(P^-)^\dagger &= g \left(\pi^- + \partial_-^x A_+ \right) (\bar{\psi}P) + im\bar{D}_-^x \left[\bar{\psi}(P^+)^\dagger \right] + ig\bar{D}_-^x \left[A_+ (\bar{\psi}P) \right] \\ &\quad + im\bar{D}_-^x \left[\bar{\psi}(P^+)^\dagger \right] - im\bar{D}_k^x \left[\bar{\psi}(P^k)^\dagger \right] + im^2 (\bar{\psi}P) + igmA_+ \left[\bar{\psi}(P^-)^\dagger \right] \\ &= g\pi^- (\bar{\psi}P) + g\partial_-^x A_+ (\bar{\psi}P) + im\bar{D}_-^x \left[\bar{\psi}(P^+)^\dagger \right] \\ &\quad + ig \left[i\partial_-^x A_+ (\bar{\psi}P) + A_+ \bar{D}_-^x (\bar{\psi}P) \right] + im\bar{D}_-^x \left[\bar{\psi}(P^+)^\dagger \right] \\ &\quad - im\bar{D}_k^x \left[\bar{\psi}(P^k)^\dagger \right] + im^2 (\bar{\psi}P) + igmA_+ \left[\bar{\psi}(P^-)^\dagger \right] \\ &= g\pi^- (\bar{\psi}P) + 2im\bar{D}_-^x \left[\bar{\psi}(P^+)^\dagger \right] - im\bar{D}_k^x \left[\bar{\psi}(P^k)^\dagger \right] + im^2 (\bar{\psi}P) \\ &\quad + igA_+ \left\{ \bar{D}_-^x (\bar{\psi}P) + m \left[\bar{\psi}(P^-)^\dagger \right] \right\} \\ &= \bar{\psi} \left(2im\bar{D}_-^x \beta^- + im\bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right) P + igA_+ \dot{\bar{\theta}}(P^-)^\dagger \\ &= \left\{ \bar{\psi} \left(2im\bar{D}_-^x \beta^- + im\bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2 + igA_+ \dot{\bar{\theta}} \right\} (P^-)^\dagger \\ &\approx \left\{ \bar{\psi} \left(2im\bar{D}_-^x \beta^- + im\bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \right\} (P^-)^\dagger,\end{aligned}$$

entonces, un vinculo terciario resulta y que se define en la forma:

$$\bar{\Omega} \equiv \bar{\psi} \left(2im\bar{D}_-^x \beta^- + im\bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0. \quad (6.115)$$

6.3. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en 3+1 Dimensiones

Con el fin de calcular la consistencia del conjunto de vínculos terciarios que han surgido en la teoría correspondiente al sector escalar, es necesario utilizar los siguientes PB:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \left(2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \Omega_a(x), \phi^k(y) \right\} &= -g \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \left(im \beta^k \psi(x) - \psi(x) \partial_k^x \right) \right]_a \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[\left(2im \bar{D}_-^x \beta^- + im \bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_{ba} \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \phi^k(y) \right\} &= g \left\{ \left(im \bar{\psi}(x) \beta^k + \bar{\psi}(x) \partial_k^x \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \right\}_a \delta^3(x-y),
 \end{aligned} \tag{6.116}$$

al igual que las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Omega_a(x), \pi^-(y) \right\} &= -2img \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \beta^- \psi(x) \right]_a \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \Omega_a(x), \pi^A(y) \partial_A^y \mathcal{A}_+(y) \right\} &= -img \left\{ (\beta^-)^2 \beta^+ \left(2 \beta^- \psi(x) \partial_-^x \mathcal{A}_+(x) + \beta^l \psi(x) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \partial_l^x \mathcal{A}_+(x) \right) \right\}_a \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \Omega_a(x), \mathcal{A}_-(y) \right\} &= -g \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \psi(x) \right]_a \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \pi^-(y) \right\} &= 2img \left[\bar{\psi}(x) \beta^- \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_a \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \pi^A(y) \partial_A^y \mathcal{A}_+(y) \right\} &= img \left\{ \left(2 \partial_-^x \mathcal{A}_+(x) \bar{\psi}(x) \beta^- + \partial_l^x \mathcal{A}_+(x) \bar{\psi}(x) \beta^l \right) \right. \\
 &\quad \left. \beta^+ (\beta^-)^2 \right\}_a \delta^3(x-y), \\
 \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \mathcal{A}_-(y) \right\} &= -g \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_a \delta^3(x-y),
 \end{aligned}$$

es posible calcular la consistencia de los vínculos $\Omega(x)$ y $\bar{\Omega}(x)$ resultando en:

$$\dot{\Omega}_a(x) = \left\{ \Omega_a(x), H_P \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3y \pi^-(y) \left\{ \Omega_a(x), \pi^-(y) \right\} + \int d^3y \left\{ \Omega_a(x), \pi^A(y) \partial_A^y \mathcal{A}_+(y) \right\} \\
&\quad + g \int d^3y [\bar{\psi}(y) \beta^- \psi(y)] \left\{ \Omega_a(x), \mathcal{A}_-(y) \right\} + \int d^3y u_l(y) \left\{ \Omega_a(x), \phi^l(y) \right\} \\
&\quad + \int d^3y \lambda_b(y) \left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} \\
&= \int d^3y \left[-2im g \pi^-(y) (\beta^-)^2 \beta^+ \beta^- \psi(x) - im g (\beta^-)^2 \beta^+ \right. \\
&\quad \left[2 \beta^- \psi(x) \partial_-^x \mathcal{A}_+(x) + \beta^l \psi(x) \partial_l^x \mathcal{A}_+(x) \right] - g^2 [\bar{\psi}(y) \beta^- \psi(y)] (\beta^-)^2 \beta^+ \psi(x) \\
&\quad - g u_l(y) (\beta^-)^2 \beta^+ \left(im \beta^l \psi(x) - \psi(x) \partial_l^x \right) + (\beta^-)^2 \beta^+ \\
&\quad \left. \left(2im \beta^- \lambda(y) D_-^x + im \beta^k \lambda(y) D_k^x - im^2 \lambda(y) + g \pi^- \lambda(y) \right) \right] \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

resultando en

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega} = & (\beta^-)^2 \beta^+ \left\{ -g \left[2im \left(\pi^- + \partial_-^x \mathcal{A}_+ \right) \beta^- \psi + im \left(\partial_l^x \mathcal{A}_+ + u_l \right) \beta^l \psi - \psi \partial_l^x u_l \right] \right. \\
& \left. - g^2 [\bar{\psi} \beta^- \psi] \psi + \left(2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g \pi^- \right) \lambda \right\}.
\end{aligned}$$

De la relación anterior se puede deducir que:

$$\begin{aligned}
P^- \dot{\Omega} &= 0, & P^k \dot{\Omega} &= 0, & P \dot{\Omega} &= 0 \\
P^+ \dot{\Omega} &= -g \left[2im \left(\pi^- + \partial_-^x \mathcal{A}_+ \right) (P^- \psi) + im \left(\partial_l^x \mathcal{A}_+ + u_l \right) (P^l \psi) - (P \psi) \partial_l^x u_l \right] \\
&\quad - g^2 [\bar{\psi} \beta^- \psi] (P \psi) + \left[2im D_-^x (P^- \lambda) + im D_k^x (P^k \lambda) - im^2 (P \lambda) + g \pi^- (P \lambda) \right],
\end{aligned}$$

indicando que nos vínculos son generados. De manera similar, al estudiar la consistencia de $\bar{\Omega}(x)$ se deduce:

$$\dot{\bar{\Omega}}_a(x) = \left\{ \bar{\Omega}_a(x), H_P \right\}$$

6.3. Clasificación de los Vínculos

$$\begin{aligned}
&= \int d^3\mathbf{y} \pi^-(\mathbf{y}) \left\{ \bar{\Omega}_a(\mathbf{x}), \pi^-(\mathbf{y}) \right\} + \int d^3\mathbf{y} \left\{ \bar{\Omega}_a(\mathbf{x}), \pi^A(\mathbf{y}) \partial_A^y \mathcal{A}_+(\mathbf{y}) \right\} \\
&\quad + g \int d^3\mathbf{y} [\bar{\psi}(\mathbf{y}) \beta^- \psi(\mathbf{y})] \left\{ \bar{\Omega}_a(\mathbf{x}), \mathcal{A}_-(\mathbf{y}) \right\} + \int d^3\mathbf{y} u_l(\mathbf{y}) \left\{ \bar{\Omega}_a(\mathbf{x}), \phi^l(\mathbf{y}) \right\} \\
&\quad + \int d^3\mathbf{y} \bar{\lambda}_b(\mathbf{y}) \left\{ \bar{\Omega}_a(\mathbf{x}), \theta_b(\mathbf{y}) \right\} \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left[2im g \pi^-(\mathbf{y}) \bar{\psi}(\mathbf{x}) \beta^- \beta^+ (\beta^-)^2 + im g \left[2\partial_-^x \mathcal{A}_+(\mathbf{x}) \bar{\psi}(\mathbf{x}) \beta^- + \partial_l^x \mathcal{A}_+(\mathbf{x}) \bar{\psi}(\mathbf{x}) \beta^l \right] \right. \\
&\quad \beta^+ (\beta^-)^2 - g^2 [\bar{\psi}(\mathbf{y}) \beta^- \psi(\mathbf{y})] \bar{\psi}(\mathbf{x}) \beta^+ (\beta^-)^2 + g u_l(\mathbf{y}) \left(im \bar{\psi}(\mathbf{x}) \beta^l + \bar{\psi}(\mathbf{x}) \partial_l^x \right) \\
&\quad \beta^+ (\beta^-)^2 + \left(2im \bar{\lambda}(\mathbf{y}) \beta^- \bar{D}_-^x + im \bar{\lambda}(\mathbf{y}) \beta^k \bar{D}_k^x + im^2 \bar{\lambda}(\mathbf{y}) + g \pi^- \bar{\lambda}(\mathbf{y}) \right) \\
&\quad \left. \beta^+ (\beta^-)^2 \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),
\end{aligned}$$

que al evaluar la integral conduce a:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\Omega}} = & \left\{ g \left[2im \left(\pi^- + \partial_-^x \mathcal{A}_+ \right) \bar{\psi} \beta^- + im \left(\partial_l^x \mathcal{A}_+ + u_l \right) \bar{\psi} \beta^l + \bar{\psi} \partial_l^x u_l \right] \right. \\
& \left. - g^2 [\bar{\psi} \beta^- \psi] \bar{\psi} + \left(2im \bar{D}_-^x \bar{\lambda} \beta^- + im \bar{D}_k^x \bar{\lambda} \beta^k + im^2 \bar{\lambda} + g \pi^- \bar{\lambda} \right) \right\} \beta^+ (\beta^-)^2,
\end{aligned}$$

a partir de la cual es posible verificar:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\Omega}}(P^k)^\dagger &= 0 \quad , \quad \dot{\bar{\Omega}}(P^+)^\dagger = 0 \quad , \quad \dot{\bar{\Omega}}P = 0 \\
\dot{\bar{\Omega}}(P^-)^\dagger &= g \left[2im \left(\pi^- + \partial_-^x \mathcal{A}_+ \right) [\bar{\psi}(P^+)^\dagger] - im \left(\partial_l^x \mathcal{A}_+ + u_l \right) [\bar{\psi}(P^l)^\dagger] + (\bar{\psi}P) \partial_l^x u_l \right] \\
&\quad - g^2 [\bar{\psi} \beta^- \psi] (\bar{\psi}P) + 2im \bar{D}_-^x [\bar{\lambda}(P^+)^\dagger] - im \bar{D}_k^x [\bar{\lambda}(P^l)^\dagger] \\
&\quad + im^2 (\bar{\lambda}P) + g \pi^- (\bar{\lambda}P)
\end{aligned}$$

6.3.1. Clasificación de los Vínculos

En resumen, la teoría esta constituida por el siguiente conjunto de vínculos asociados al sector electromagnético:

$$\pi^+ \approx 0 \quad , \quad \phi^k \equiv \pi^k - \partial_-^x A_k + \partial_k^x A_- \quad , \quad G = \partial_A^x \pi^A - g \bar{\psi} \beta^+ \psi, \quad (6.117)$$

junto con el siguiente conjunto de vínculos asociados al sector DKP:

$$\begin{aligned} \theta &= p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \quad , \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+, \quad (6.118) \\ \omega &= \left(1 - \beta^+ \beta^-\right) \left(\beta^A D_A^x - m\right) \psi \quad , \quad \bar{\omega} = \bar{\psi} \left(\bar{D}_A^x \beta^A + m\right) \left(1 - \beta^- \beta^+\right) \\ \Omega &\equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left(2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^-\right) \psi \\ \bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} \left(2im \bar{D}_-^x \beta^- + im \bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^-\right) \beta^+ (\beta^-)^2 \end{aligned}$$

En analogía con los mostrados en 1 + 1 dimensiones, mostremos que además de $\pi^+(x)$, el segundo vínculo de segunda clase es dado por la siguiente combinación lineal:

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv G - ig \left(\bar{\psi} \theta - \bar{\theta} \psi\right) = \partial_A^x \pi^A - ig \left(\bar{\psi} p - \bar{p} \psi\right) \\ &= \partial_-^x \pi^- + \partial_k^x \pi^k - ig \left(\bar{\psi} p - \bar{p} \psi\right) \end{aligned} \quad (6.119)$$

En primer lugar, se sabe que al considerar los PB con los vínculos correspondientes al sector electromagnético se determina que:

$$\left\{ \Sigma(x), \phi^k(y) \right\} = \left\{ G(x), \phi^k(y) \right\} = 0,$$

de igual manera:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), G(y) \right\} &= -ig \left[\bar{\psi}_b(x) \left\{ \theta_b(x), G(y) \right\} - \left\{ \bar{\theta}_b(x), G(y) \right\} \psi_b(x) \right] \\ &= -ig^2 \left[\bar{\psi}(x) \beta^+ \psi(x) - \bar{\psi}(x) \beta^+ \psi(x) \right] \delta^3(x-y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

6.3. Clasificación de los Vínculos

Ahora, cuando el análisis es realizado con los vínculos del sector DKP se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Sigma(x), \theta_b(y) \right\} &= \left\{ G(x), \theta_b(y) \right\} - ig \left\{ \bar{\psi}_a(x), \theta_b(y) \right\} \theta_a(x) \\
 &\quad + ig \left\{ \bar{\theta}_a(x), \theta_b(y) \right\} \psi_a(x) \\
 &\approx -g [\beta^+ \psi(x)]_b \delta^3(x-y) + g [\beta^+ \psi(x)]_b \delta^3(x-y) \\
 &\approx 0.
 \end{aligned}$$

En forma similar:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Sigma(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left\{ G(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} - ig \bar{\psi}_a(x) \left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} \\
 &\quad + ig \bar{\theta}_a(x) \left\{ \psi_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} \\
 &\approx -g [\bar{\psi}(x) \beta^+]_b \delta^3(x-y) + g [\bar{\psi}(x) \beta^+]_b \delta^3(x-y) \\
 &\approx 0.
 \end{aligned}$$

Cuando los vínculos secundarios del sector DKP son considerados se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Sigma(x), \omega_b(y) \right\} &= \left(1 - \beta^+ \beta^- \right)_{bc} \left[-g [\beta^- \psi(y)]_c \partial_-^x \left\{ \pi^-(x), A_-(y) \right\} \right. \\
 &\quad \left. -g [\beta^l \psi(y)]_c \partial_k^x \left\{ \pi^k(x), A_l(y) \right\} + ig \psi_a(x) \right. \\
 &\quad \left. \left(\beta^- D_-^y + \beta^l D_l^y - m \right)_{cd} \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_d(y) \right\} \right] \\
 &= \left(1 - \beta^+ \beta^- \right)_{bc} \left[g [\beta^- \psi(y)]_c \partial_-^x \delta^3(x-y) \right. \\
 &\quad \left. +g [\beta^k \psi(y)]_c \partial_k^x \delta^3(x-y) - ig \psi_a(x) \right. \\
 &\quad \left. \left(\beta^- D_-^y + \beta^l D_l^y - m \right)_{ca} \delta^3(x-y) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g \left(1 - \beta^+ \beta^- \right)_{bc} \left[\delta^3(x-y) \partial_-^x [\beta^- \psi(x)]_c + [\beta^- \psi(x)]_c \partial_-^x \delta^3(x-y) \right. \\
&\quad + \delta^3(x-y) \partial_k^x [\beta^k \psi(x)]_c + [\beta^k \psi(x)]_c \partial_k^x \delta^3(x-y) - i [\beta^- \psi(x)]_c \\
&\quad \left. \left(i \partial_-^y - g A_- (y) \right) \delta^3(x-y) - i [\beta^l \psi(x)]_c \left(i \partial_l^y - g A_l (y) \right) \delta^3(x-y) \right. \\
&\quad \left. + i m \psi_c(x) \delta^3(x-y) \right] \\
&= g \delta^3(x-y) \left(1 - \beta^+ \beta^- \right)_{bc} \left[-i \beta^- \left(i \partial_-^x - g A_- (x) \right) \psi(x) \right. \\
&\quad \left. - i \beta^k \left(i \partial_k^x - g A_k (x) \right) \psi(x) + i m \psi(x) \right]_c \\
&= -ig \delta^3(x-y) \left[\left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^A D_A^x - m \right) \psi(x) \right]_b \\
&= -ig \delta^3(x-y) \omega_b(x) \approx 0.
\end{aligned}$$

Ahora, cuando se considera el vínculo $\bar{\omega}(x)$ se determina que:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Sigma(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= \left(1 - \beta^- \beta^+ \right)_{cb} \left[g [\bar{\psi}(y) \beta^-]_c \partial_-^x \left\{ \pi^-(x), A_-(y) \right\} \right. \\
&\quad + g [\bar{\psi}(y) \beta^l]_c \partial_k^x \left\{ \pi^k(x), A_-(y) \right\} - ig \bar{\psi}(x) \\
&\quad \left. \left(\bar{D}_-^y \beta^- + \bar{D}_l^y \beta^l + m \right)_{dc} \left\{ p(x), \bar{\psi}_d(y) \right\} \right] \\
&= -g \left(1 - \beta^- \beta^+ \right)_{cb} \left[[\bar{\psi}(y) \beta^-]_c \partial_-^x \delta^3(x-y) + [\bar{\psi}(y) \beta^k]_c \right. \\
&\quad \left. \partial_k^x \delta^3(x-y) - i \bar{\psi}_d(x) \left(\bar{D}_-^y \beta^- + \bar{D}_l^y \beta^l + m \right)_{dc} \delta^3(x-y) \right] \\
&= -g \left(1 - \beta^- \beta^+ \right)_{cb} \left[\delta^3(x-y) \partial_-^x \bar{\psi}(x) \beta^- + \bar{\psi}(x) \beta^- \partial_-^x \delta^3(x-y) \right. \\
&\quad + \delta^3(x-y) \partial_k^x \bar{\psi}(x) \beta^k + \bar{\psi}(x) \beta^k \partial_k^x \delta^3(x-y) - i \bar{\psi}(x) \beta^- \\
&\quad \left. \left(i \partial_-^y + g A_- (y) \right) \delta^3(x-y) - i \bar{\psi}(x) \beta^l \left(i \partial_l^y + g A_l (y) \right) \right. \\
&\quad \left. \delta^3(x-y) - i m \bar{\psi}(x) \delta^3(x-y) \right]_c \\
&= -g \delta^3(x-y) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right)_{cb} \left[-i \bar{\psi}(x) \left(i \partial_-^x + g A_- (x) \right) \beta^- \right. \\
&\quad \left. - i \bar{\psi}(x) \left(i \partial_k^x + g A_k (x) \right) \beta^k - i m \bar{\psi}(x) \right]_c
\end{aligned}$$

6.3. Clasificación de los Vínculos

$$\begin{aligned}
 &= ig\delta^3(x-y) \left[\bar{\psi}(x) \left(\beta^A \bar{D}_A^x + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_b \\
 &= ig\delta^3(x-y) \bar{\omega}_b(x) \approx 0.
 \end{aligned}$$

Finalmente, cuando se tiene en cuenta los vínculos terciarios del sector DKP se deduce:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Sigma(x), \Omega_b(y) \right\} &= \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \right]_{bc} \left[-g2im \left[\beta^- \psi(y) \right]_c \partial_-^x \left\{ \pi^-(x), A_-(y) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - gim \left[\beta^l \psi(y) \right]_c \partial_k^x \left\{ \pi^k(x), A_l(y) \right\} + ig\psi_a(x) \right. \\
 &\quad \left. \left(2im \beta^- D_-^y + im\beta^l D_l^y - im^2 + g\pi^-(y) \right)_{cd} \left\{ \bar{p}_a(x), \psi_d(y) \right\} \right] \\
 &= g \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \right]_{bc} \left[2im \left[\beta^- \psi(y) \right] \partial_-^x \delta^3(x-y) + im \left[\beta^k \psi(y) \right] \partial_k^x \delta^3(x-y) \right. \\
 &\quad \left. - i \left(2im \beta^- \psi(x) D_-^y + im\beta^l \psi(x) D_l^y - im^2 \psi(x) + g\psi(x) \pi^-(y) \right) \delta^3(x-y) \right]_c \\
 &= g \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \right]_{bc} \left[\delta^3(x-y) 2im \beta^- \partial_-^x \psi(x) + 2im \beta^- \psi(x) \partial_-^x \delta^3(x-y) \right. \\
 &\quad \left. + \delta^3(x-y) \beta^k \partial_k^x \psi(x) + \beta^k \psi(x) \partial_k^x \delta^3(x-y) + 2m \beta^- \psi(x) \right. \\
 &\quad \left. \left(i\partial_-^y - gA_-(y) \right) \delta^3(x-y) + m\beta^l \psi(x) \left(i\partial_l^y - gA_l(y) \right) \delta^3(x-y) \right. \\
 &\quad \left. - m^2 \psi(x) \delta^3(x-y) - ig\psi(x) \pi^-(x) \delta^3(x-y) \right]_c \\
 &= g \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \right]_{bc} \left[2m\beta^- \left(i\partial_-^x - gA_-(x) \right) \psi(x) + m\beta^k \left(\partial_k^x - gA_k(x) \right) \psi(x) \right. \\
 &\quad \left. - m^2 \psi(x) - ig\psi(x) \pi^-(x) \right]_c \delta^3(x-y) \\
 &= -ig \left[(\beta^-)^2 \beta^+ \left(2im\beta^- D_-^x \psi(x) + im\beta^k D_k^x \psi(x) - im^2 \psi(x) + g\pi^-(x) \psi(x) \right) \right]_b \\
 &\quad \delta^3(x-y) \\
 &= -ig\Omega_b(x) \delta^3(x-y) \approx 0.
 \end{aligned}$$

Y finalmente,

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Sigma(x), \bar{\Omega}_b(y) \right\} &= \left[\beta^+ (\beta^-)^2 \right]_{cb} \left[2igm \left[\bar{\psi}(y) \beta^- \right]_c \partial_-^x \left\{ \pi^-(x), A_-(y) \right\} \right. \\
 &\quad \left. + igm \left[\bar{\psi}(y) \beta^l \right]_c \partial_k^x \left\{ \pi^k(x), A_l(y) \right\} - ig\bar{\psi}_a(x) \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(2im\bar{D}_-^y\beta^- + im\bar{D}_l^y\beta^l + im^2 + g\pi^-(y) \right)_{dc} \left\{ p_a(x), \bar{\Psi}_d(y) \right\} \\
= & g \left[\beta^+ (\beta^-)^2 \right]_{cb} \left[-2im\bar{\Psi}(y) \beta^- \partial_-^x \delta^3(x-y) - im\bar{\Psi}(y) \beta^k \partial_k^x \delta^3(x-y) \right. \\
& \left. + i \left(2im\bar{\Psi}(x) \beta^- \bar{D}_-^y + im\bar{\Psi}(x) \beta^l \bar{D}_l^y + im^2 \bar{\Psi}(x) + g\pi^-(y) \bar{\Psi}(x) \right) \delta^3(x-y) \right]_c \\
= & g \left[\beta^+ (\beta^-)^2 \right]_{cb} \left[-\delta^3(x-y) 2im\partial_-^x \bar{\Psi}(x) \beta^- - 2im\bar{\Psi}(x) \beta^- \partial_-^x \delta^3(x-y) \right. \\
& - \delta^3(x-y) im\partial_k^x \bar{\Psi}(x) \beta^k + \bar{\Psi}(x) \beta^k \partial_k^x \delta^3(x-y) - 2m\bar{\Psi}(x) \beta^- \\
& \left(i\partial_-^y + gA_-(y) \right) \delta^3(x-y) - m\bar{\Psi}(x) \beta^l \left(i\partial_l^y + gA_l(y) \right) \delta^3(x-y) \\
& \left. - m^2 \bar{\Psi}(x) \delta^3(x-y) + ig\pi^-(x) \bar{\Psi}(x) \delta^3(x-y) \right]_c \\
= & g \left[\beta^+ (\beta^-)^2 \right]_{cb} \left[-2m\bar{\Psi}(x) \left(i\partial_-^x + gA_-(x) \right) \beta^- - m\bar{\Psi}(x) \right. \\
& \left. \left(i\partial_k^x + gA_k(x) \right) \beta^k - m^2 \bar{\Psi}(x) + ig\pi^-(x) \bar{\Psi}(x) \right]_c \delta^3(x-y) \\
= & ig \left[\bar{\Psi}(x) \left(i2m\bar{D}_-^x \beta^- + im\bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^-(x) \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_b \delta^3(x-y) \\
= & ig\bar{\Omega}_b(x) \delta^3(x-y) \approx 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, se ha podido determinar explícitamente que el conjunto máximo de vínculos deducidos para la teoría se pueden clasificar de la siguiente manera: Vínculos de primera clase,

$$\pi^+ \approx 0 \quad , \quad \Sigma \equiv G - ig \left(\bar{\Psi}\theta - \bar{\theta}\psi \right) = \partial_A^x \pi^A - ig \left(\bar{\Psi}p - \bar{p}\psi \right), \quad (6.120)$$

y vínculos de segunda clase:

$$\begin{aligned}
\theta &= p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \quad , \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\Psi} \beta^+, \\
\omega &= \left(1 - \beta^+ \beta^- \right) \left(\beta^A D_A^x - m \right) \psi \quad , \quad \bar{\omega} = \bar{\Psi} \left(\bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \left(1 - \beta^- \beta^+ \right) \\
\Omega &= \left(\beta^- \right)^2 \beta^+ \left(2im\beta^- D_-^x + im\beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \psi, \\
\bar{\Omega} &= \bar{\Psi} \left(2im\bar{D}_-^x \beta^- + im\bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2, \\
\phi^k &= \pi^k - \partial_-^x A_k + \partial_k^x A_-. \tag{6.121}
\end{aligned}$$

6.3. Ecuaciones de Movimiento

Ahora, con el fin de tornar los vínculos de primera clase en vínculos de segunda clase se introducirán las condiciones de gauge de plano nulo definidas como:

$$A_- \approx 0 \quad , \quad \pi^- + \partial^x A_+ \approx 0 \quad (6.122)$$

6.3.2. Ecuaciones de Movimiento

Siendo que se ha determinado la completa libertad de gauge de la teoría al momento de identificar todos los vínculos de primera y de segunda, se esta en posición de determinar la dinámica de los campos que sea compatible con estos vínculos. Para ello, se utilizara el Hamiltoniano extendido H_E que resulta de adicionar al Hamiltoniano canónico todos los vínculos de primera clase que del problema resultan, por tanto, para el caso en consideración H_E se define como:

$$\begin{aligned} H_E &= H_P + \int d^3y u_2 \Sigma \\ &= \int d^3y \left[\frac{1}{2} \pi^{-2} + (\pi^A \partial_A^y + g \bar{\psi} \beta^+ \psi) A_+ + \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A (\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y) + g A_A \beta^A + m \right] \psi \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (F_{mn})^2 + u_1 \pi^+ + u_1 \phi^l + \bar{\lambda} \theta + \bar{\theta} \lambda + u_2 \Sigma \right]. \end{aligned} \quad (6.123)$$

Al anilizar la dinámica de los campos asociados al sector electromagnético se determina que:

$$\begin{aligned} \dot{A}_+(x) &= \{ A_+(x), H_E \} = \int d^3y \{ A_+(x), u_1(y) \pi^+(y) \} \\ &= \int d^3y u_1(y) \delta(x-y) = u_1(x). \end{aligned} \quad (6.124)$$

De manera similar:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_-(\mathbf{x}) &= \left\{ A_-(\mathbf{x}), H_E \right\} \\
&= \int d^3\mathbf{y} \pi^-(\mathbf{y}) \left\{ A_-(\mathbf{x}), \pi^-(\mathbf{y}) \right\} + \int d^3\mathbf{y} \partial_-^y A_+ \left\{ A_-(\mathbf{x}), \pi^-(\mathbf{y}) \right\} \\
&\quad + \int d^3\mathbf{y} u_2(\mathbf{y}) \partial_-^y \left\{ A_-(\mathbf{x}), \pi^-(\mathbf{y}) \right\} \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left[\pi^-(\mathbf{y}) + \partial_-^y A_+ + u_2(\mathbf{y}) \partial_-^y \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left[\pi^-(\mathbf{y}) + \partial_-^y A_+ - u_2(\mathbf{y}) \partial_-^x \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \pi^- + \partial_-^x A_+ - \partial_-^x u_2.
\end{aligned} \tag{6.125}$$

De igual forma:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_s(\mathbf{x}) &= \left\{ A_s(\mathbf{x}), H_E \right\} \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left\{ A_s(\mathbf{x}), \pi^k(\mathbf{y}) \right\} \partial_k^y A_+(\mathbf{y}) + \int d^3\mathbf{y} u_l(\mathbf{y}) \left\{ A_s(\mathbf{x}), \pi^l(\mathbf{y}) \right\} \\
&\quad + \int d^3\mathbf{y} u_2(\mathbf{y}) \partial_k^y \left\{ A_s(\mathbf{x}), \pi^k(\mathbf{y}) \right\} \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left[\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_s^y A_+(\mathbf{y}) + u_s(\mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + u_2(\mathbf{y}) \partial_s^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left[\partial_s^y A_+(\mathbf{y}) + u_s(\mathbf{y}) - u_2(\mathbf{y}) \partial_s^x \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \partial_s^x A_+(\mathbf{x}) + u_s(\mathbf{x}) - \partial_s^x u_2(\mathbf{x}).
\end{aligned} \tag{6.126}$$

Ahora, si la dinámica de los momentos canónicos asociados a los campos $A_\mu(\mathbf{x})$ es considerada, resulta que:

$$\dot{\pi}^+(\mathbf{x}) = \left\{ \pi^+(\mathbf{x}), H_E \right\} = G(\mathbf{x}) \approx 0, \tag{6.127}$$

6.3. Ecuaciones de Movimiento

Además,

$$\begin{aligned}
 \dot{\pi}^-(x) &= \left\{ \pi^-(x), H_E \right\} \\
 &= \int d^3y \left[g\bar{\psi}(y) \beta^- \psi(y) \left\{ \pi^-(x), A_-(y) \right\} + u_l(y) \partial_l^y \left\{ \pi^-(x), A_-(y) \right\} \right] \\
 &= - \int d^3y \left[g\bar{\psi}(y) \beta^- \psi(y) + u_l(y) \partial_l^y \right] \delta^3(x-y) \\
 &= - \int d^3y \left[g\bar{\psi}(y) \beta^- \psi(y) - u_l(y) \partial_l^x \right] \delta^3(x-y) \\
 &= -g\bar{\psi}(x) \beta^- \psi(x) + \partial_l^x u_l(x). \tag{6.128}
 \end{aligned}$$

Y finalmente,

$$\begin{aligned}
 \dot{\pi}^s(x) &= \left\{ \pi^s(x), H_E \right\} \\
 &= \int d^3y g\bar{\psi}(y) \beta^k \psi(y) \left\{ \pi^s(x), A_k(y) \right\} + \int d^3y \frac{1}{2} F_{mn}(y) \left\{ \pi^s(x), F_{mn}(y) \right\} \\
 &\quad + \int d^3y u_l(y) \left\{ \pi^s(x), \Phi^l(y) \right\} \\
 &= - \int d^3y g\bar{\psi}(y) \beta^s \psi(y) \delta^3(x-y) + \int d^3y \frac{1}{2} F_{mn}(y) \left[\partial_m^y \left\{ \pi^s(x), A_n(y) \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \partial_n^y \left\{ \pi^s(x), A_m(y) \right\} \right] - \int d^3y u_l(y) \partial_-^y \left\{ \pi^s(x), A_l(y) \right\} \\
 &= -g\bar{\psi}(x) \beta^s \psi(x) - \int d^3y \frac{1}{2} F_{mn}(y) \left(\delta_n^s \partial_m^y - \delta_m^s \partial_n^y \right) \delta^3(x-y) \\
 &\quad + \int d^3y u_s(y) \partial_-^y \delta^3(x-y) \\
 &= -g\bar{\psi}(x) \beta^s \psi(x) + \left(\delta_n^s \partial_m^x - \delta_m^s \partial_n^x \right) \int d^3y \frac{1}{2} F_{mn}(y) \delta^3(x-y) \\
 &\quad - \partial_-^x \int d^3y u_s(y) \delta^3(x-y) \\
 &= -g\bar{\psi}(x) \beta^s \psi(x) + \frac{1}{2} \left(\partial_m^x F_{ms}(x) - \partial_n^x F_{sn}(x) \right) - \partial_-^x u_s(x) \\
 &= -g\bar{\psi}(x) \beta^s \psi(x) + \partial_m^x F_{ms}(x) - \partial_-^x u_s(x). \tag{6.129}
 \end{aligned}$$

Ahora se procede a garantizar la equivalencia de éstas ecuaciones de movimiento con su contraparte Lagrangiano, para ello, se puede deducir de la expresión (6.126) que:

$$u_s = \partial_+ A_s - \partial_s A_+ + \partial_s u_2 = F_{+s} + \partial_s u_2 = F^{s-} + \partial_s u_2, \quad (6.130)$$

de manera que:

$$\dot{\pi}^+ = \partial_+ \pi^+ = \partial_+ F^{++} \approx \partial_A \pi^A - g\bar{\psi}\beta^+\psi = \partial_A F^{A+} - g\bar{\psi}\beta^+\psi,$$

es decir:

$$\partial_+ F^{++} + \partial_A F^{A+} - g\bar{\psi}\beta^+\psi \approx 0,$$

que en forma compacta se expresa como,

$$\partial_\mu F^{\mu+} - g\bar{\psi}\beta^+\psi \approx 0. \quad (6.131)$$

De igual manera:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^- &= \partial_+ \pi^- = \partial_+ F^{-+} = -g\bar{\psi}\beta^-\psi + \partial_l u_l = -g\bar{\psi}\beta^-\psi + \partial_l F^{l-} + \partial_l \partial_l u_2 \quad \Rightarrow \\ 0 &= \partial_+ F^{+-} + \partial_l F^{l-} - g\bar{\psi}\beta^-\psi + \partial_l \partial_l u_2 = \partial_+ F^{+-} + \partial_- F^{--} + \partial_l F^{l-} \\ &\quad - g\bar{\psi}\beta^-\psi + \partial_l \partial_l u_2, \end{aligned}$$

entonces

$$\partial_\mu F^{\mu-} - g\bar{\psi}\beta^-\psi + \partial_l \partial_l u_2 = 0. \quad (6.132)$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^s &= \partial_+ \pi^s = \partial_+ F^{s+} = -g\bar{\psi}\beta^s\psi + \partial_m F_{ms} - \partial_- u_s \\ &= -g\bar{\psi}\beta^s\psi + \partial_m F^{ms} - \partial_- F^{s-} - \partial_- \partial_s u_2 \\ &= -g\bar{\psi}\beta^s\psi + \partial_m F^{ms} + \partial_- F^{-s} - \partial_- \partial_s u_2 \quad \Rightarrow \\ 0 &= \partial_+ F^{+s} + \partial_- F^{-s} + \partial_m F^{ms} - g\bar{\psi}\beta^s\psi - \partial_- \partial_s u_2 \end{aligned}$$

Así que:

$$\partial_\mu F^{\mu s} - g\bar{\psi}\beta^s\psi - \partial_- \partial_s u_2 = 0. \quad (6.133)$$

Lo que implica que la equivalencia con la ecuación de movimiento para el campo electromagnético derivada en el espacio de configuración dada en la forma:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - g\bar{\psi}\beta^\nu\psi = 0,$$

6.3. Ecuaciones de Movimiento

exigirá que se deba cumplir la siguiente la condición $u_2 = 0$. Ahora, si se estudia la dinámica de los campos asociados al sector DKP se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \dot{\psi}_a(x) &= \left\{ \psi_a(x), H_E \right\} \\
 &= \int d^3y \left[\left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} \lambda_b(y) + igu_2(y) \psi_b(y) \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} \right] \\
 &= \int d^3y \left[\lambda(y) + igu_2(y) \psi(y) \right]_a \delta^3(x-y) \\
 &= \left[\lambda + igu_2 \psi \right]_a, \tag{6.134}
 \end{aligned}$$

Si el campo $\bar{\psi}(x)$ es considerado se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\psi}}_a(x) &= \left\{ \bar{\psi}_a(x), H_E \right\} \\
 &= \int d^3y \left[\bar{\lambda}_b(y) \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} - igu_2(y) \bar{\psi}_b(y) \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} \right] \\
 &= \int d^3y \left[\bar{\lambda}(y) - igu_2(y) \bar{\psi}(y) \right]_a \delta^3(x-y) \\
 &= \left[\bar{\lambda} - igu_2 \bar{\psi} \right]_a. \tag{6.135}
 \end{aligned}$$

En el caso de los momentos canónicos conjugados a los campos $(\psi, \bar{\psi})$ se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \dot{p}(x) &= \left\{ p_a(x), H_E \right\} \\
 &= g \int d^3y \mathcal{A}_+(y) [\beta^+ \psi(y)]_b \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_b(y) \right\} \\
 &\quad + \int d^3y \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_b(y) \right\} \left(\left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + g \mathcal{A}_A \beta^A + m \right] \psi \right)_b \\
 &\quad - \frac{i}{2} \int d^3y \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_c(y) \right\} \beta_{cb}^+ \lambda_b(y) - ig \int d^3y u_2(y) \left\{ p_a(x), \bar{\psi}_b(y) \right\} p_b(y)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3\mathbf{y} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[-g\mathcal{A}_+(\mathbf{y}) \beta^+ \psi(\mathbf{y}) - \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} \right) + g \mathcal{A}_A \beta^A + m \right] \psi \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \beta^{+\lambda}(\mathbf{y}) + i g u_2(\mathbf{y}) \mathbf{p}(\mathbf{y}) \right]_a \\
&= \int d^3\mathbf{y} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[-g\mathcal{A}_+(\mathbf{y}) \beta^+ \psi(\mathbf{y}) - \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(-\overleftarrow{\partial}_A^{\mathbf{x}} - \overrightarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} \right) + g \mathcal{A}_A \beta^A + m \right] \psi \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \beta^{+\lambda}(\mathbf{y}) + i g u_2(\mathbf{y}) \mathbf{p}(\mathbf{y}) \right]_a \\
&= \left[-g\mathcal{A}_+ \beta^+ \psi + \left[\beta^A \left(i\partial_A^{\mathbf{x}} - g\mathcal{A}_A \right) - m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^{+\lambda} + i g u_2 \mathbf{p} \right]_a. \quad (6.136)
\end{aligned}$$

A partir de la cual se puede deducir que:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{p}} &= \partial_+ \mathbf{p} = -g\mathcal{A}_+ \beta^+ \psi + \left[\beta^A \left(i\partial_A - g\mathcal{A}_A \right) - m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^{+\lambda} + i g u_2 \mathbf{p} \\
&= -g\mathcal{A}_+ \beta^+ \psi + \left[\beta^- \left(i\partial_A - g\mathcal{A}_A \right) - m \right] \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi + \frac{1}{2} \beta^+ g u_2 \psi + i g u_2 \mathbf{p} \\
&\approx -\frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi
\end{aligned}$$

es decir,

$$\beta^+ \left(i\partial_+ - g\mathcal{A}_+ \right) \psi + \left[\beta^A \left(i\partial_A - g\mathcal{A}_A \right) - m \right] \psi = \left(\beta^\mu D_\mu - m \right) \psi \approx -g u_2 \beta^+ \psi. \quad (6.137)$$

En el caso del momento $\bar{\mathbf{p}}(\mathbf{x})$ se determina que:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\mathbf{p}}}_a(\mathbf{x}) &= \left\{ \bar{\mathbf{p}}_a(\mathbf{x}), H_E \right\} \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left[\left(g\mathcal{A}_+ \bar{\psi} \beta^+ + \bar{\psi} \left[\frac{i}{2} \beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} \right) + g \mathcal{A}_A \beta^A + m \right] \right)_b \left\{ \bar{\mathbf{p}}_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y}) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{i}{2} \bar{\lambda}_b(\mathbf{y}) \beta_{bc}^+ \left\{ \bar{\mathbf{p}}_a(\mathbf{x}), \psi_c(\mathbf{y}) \right\} + i g u_2(\mathbf{y}) \bar{\mathbf{p}}_b(\mathbf{y}) \left\{ \bar{\mathbf{p}}_a(\mathbf{x}), \psi_b(\mathbf{y}) \right\} \right]
\end{aligned}$$

6.3. Eliminación de los Vínculos de Primera Clase

$$\begin{aligned}
&= \int d^3\mathbf{y} \left[-g\mathcal{A}_+ \bar{\psi}\beta^+ - \bar{\psi} \left[\frac{i}{2}\beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} - \overrightarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} \right) + g\mathcal{A}_A\beta^A + m \right] - \frac{i}{2}\bar{\lambda}(\mathbf{y})\beta^+ \right. \\
&\quad \left. - igu_2(\mathbf{y})\bar{p}(\mathbf{y}) \right]_a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \int d^3\mathbf{y} \left[-g\mathcal{A}_+ \bar{\psi}\beta^+ - \bar{\psi} \left[\frac{i}{2}\beta^A \left(\overleftarrow{\partial}_A^{\mathbf{y}} + \overrightarrow{\partial}_A^{\mathbf{x}} \right) + g\mathcal{A}_A\beta^A + m \right] - \frac{i}{2}\bar{\lambda}(\mathbf{y})\beta^+ \right. \\
&\quad \left. - igu_2(\mathbf{y})\bar{p}(\mathbf{y}) \right]_a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= \left[-g\mathcal{A}_+ \bar{\psi}\beta^+ - \bar{\psi} \left[\beta^A \left(i\partial_A^{\mathbf{x}} + g\mathcal{A}_A \right) + m \right] - \frac{i}{2}\bar{\lambda}\beta^+ - igu_2\bar{p} \right]_a,
\end{aligned}$$

expresión que puede ser escrita en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{p}} &= \partial_+\bar{p} = -g\mathcal{A}_+ \bar{\psi}\beta^+ - \bar{\psi} \left[\beta^A \left(i\partial_A + g\mathcal{A}_A \right) + m \right] - \frac{i}{2}\bar{\lambda}\beta^+ - igu_2\bar{p} \\
&= -g\mathcal{A}_+ \bar{\psi}\beta^+ - \bar{\psi} \left[\beta^A \left(i\partial_A + g\mathcal{A}_A \right) + m \right] - \frac{i}{2}\partial_+\bar{\psi}\beta^+ + \frac{1}{2}gu_2\bar{\psi}\beta^+ - igu_2\bar{p} \\
&\approx \frac{i}{2}\partial_+\bar{\psi}\beta^+,
\end{aligned}$$

resultado que permite deducir:

$$\bar{\psi}\beta^+ \left(i\partial_+ + g\mathcal{A}_+ \right) + \bar{\psi} \left[\beta^A \left(i\partial_A + g\mathcal{A}_A \right) + m \right] = \bar{\psi} \left(\beta^\mu \overleftarrow{D}_\mu + m \right) \approx gu_2\bar{\psi}\beta^+. \quad (6.138)$$

Resultado que confirma el hecho que la suposición de escoger $u_2 = 0$ es valida.

6.3.3. Eliminación de los Vínculos de Primera Clase

Con el fin de eliminar los vínculos de segunda clase que la teoría posee, procederemos a aplicar el método iterativo, con lo cual se considerará en primer lugar el conjunto de vínculos correspondiente a los vínculos de primera clase y

las condiciones de gauge. De manera que definiremos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &\equiv \pi^+, \\
\Theta_2 &\equiv \partial_-^x \pi^- + \partial_k^x \pi^k - ig \left(\bar{\psi} p - \bar{p} \psi \right), \\
\Theta_3 &\equiv \Lambda_-, \\
\Theta_4 &\equiv \pi^- + \partial_-^x \Lambda_+,
\end{aligned} \tag{6.139}$$

los cuales satisfacen los siguientes PB diferentes de cero:

$$\begin{aligned}
\{ \Theta_1(x), \Theta_4(y) \} &= \partial_-^x \delta^3(x-y) \quad , \quad \{ \Theta_4(x), \Theta_1(y) \} = \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
\{ \Theta_2(x), \Theta_3(y) \} &= -\partial_-^x \delta^3(x-y) \quad , \quad \{ \Theta_3(x), \Theta_2(y) \} = -\partial_-^x \delta^3(x-y), \\
\{ \Theta_3(x), \Theta_4(y) \} &= \delta^3(x-y) \quad , \quad \{ \Theta_4(x), \Theta_3(y) \} = -\delta^3(x-y),
\end{aligned} \tag{6.140}$$

Por tanto, se procede a definir la primera matriz de vínculos cuyos elementos de matriz se calculan de la siguiente manera:

$$C_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Phi_i(x), \Phi_j(y) \right\}, \tag{6.141}$$

así, a partir de (6.140) se puede determinar que la matriz en consideración tendrá la siguiente estructura.

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y), \tag{6.142}$$

La inversa de la matriz anterior fue ya calculada con anterioridad y tiene la siguiente representación:

$$C^{-1}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -|x^- - y^-| & 0 & \epsilon(x^- - y^-) \\ |x^- - y^-| & 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 \\ 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 \\ \epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x^\top - y^\top). \tag{6.143}$$

Entonces, se procede a definir el primer conjunto de DB, identificados con D1, que para dos variables dinámicas $\mathbf{A}_a(x)$ y $\mathbf{B}_b(y)$ se calculan de la siguiente

6.3. Eliminación de los Vínculos de Primera Clase

manera:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_c(u) \right\} C_{ij}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}. \quad (6.144)$$

Utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= ig\psi_a(x) \delta^3(x-u), & \left\{ \bar{\psi}_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= -ig\bar{\psi}_a(x) \delta^3(x-u), \\ \left\{ p_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= igp_a(x) \delta^3(x-u), & \left\{ \bar{p}_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= -ig\bar{p}_a(x) \delta^3(x-u), \\ \left\{ \Theta_1(v), A_+(y) \right\} &= -\delta^3(v-y), & \left\{ A_k(x), \Theta_2(u) \right\} &= -\partial_k^x \delta^3(x-u), \\ \left\{ \pi^k(x), \Theta_i(u) \right\} &= 0, \end{aligned}$$

se puede deducir que para el caso cuando $\mathbf{A}_a(x)$ es una variable asociada al sector DKP se cumple:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_2(u) \right\} C_{2j}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}.$$

Si $\mathbf{B}_b(y)$ es también un campos DKP se determina que:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} &= \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_2(u) \right\} C_{22}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Theta_2(v), \mathbf{B}_b(y) \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}, \end{aligned}$$

con lo cual se puede concluir que:

$$\left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\}_{D1} = \delta_{ab} \delta^3(x-y), \quad \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\}_{D1} = \delta_{ab} \delta^3(x-y). \quad (6.145)$$

Cuando se considera que $\mathbf{B}_b(\mathbf{y}) = \mathbf{A}_+(\mathbf{y})$ se determina que:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{A}_a(\mathbf{x}), \mathbf{A}_+(\mathbf{y}) \right\}_{D1} &= - \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{v} \left\{ \mathbf{A}_a(\mathbf{x}), \Theta_2(\mathbf{u}) \right\} \mathbf{C}_{21}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \left\{ \Theta_1(\mathbf{v}), \mathbf{A}_+(\mathbf{y}) \right\} \\ &= \int d^3\mathbf{u} \left\{ \mathbf{A}_a(\mathbf{x}), \Theta_2(\mathbf{u}) \right\} \mathbf{C}_{21}^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{u} \left\{ \mathbf{A}_a(\mathbf{x}), \Theta_2(\mathbf{u}) \right\} | \mathbf{u}^- - \mathbf{y}^- | \delta^2(\mathbf{u}^\top - \mathbf{y}^\top), \end{aligned}$$

a partir de lo cual se deduce:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_a(\mathbf{x}), \mathbf{A}_+(\mathbf{y}) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{u} \left\{ \psi_a(\mathbf{x}), \Theta_2(\mathbf{u}) \right\} | \mathbf{u}^- - \mathbf{y}^- | \delta^2(\mathbf{u}^\top - \mathbf{y}^\top) \\ &= \frac{ig}{2} \psi_a(\mathbf{x}) | \mathbf{x}^- - \mathbf{y}^- | \delta^2(\mathbf{x}^\top - \mathbf{y}^\top), \end{aligned} \quad (6.146)$$

De igual forma

$$\begin{aligned} \left\{ p_a(\mathbf{x}), \mathbf{A}_+(\mathbf{y}) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{u} \left\{ p_a(\mathbf{x}), \Theta_2(\mathbf{u}) \right\} | \mathbf{u}^- - \mathbf{y}^- | \delta^2(\mathbf{u}^\top - \mathbf{y}^\top) \\ &= \frac{ig}{2} p_a(\mathbf{x}) | \mathbf{x}^- - \mathbf{y}^- | \delta^2(\mathbf{x}^\top - \mathbf{y}^\top). \end{aligned} \quad (6.147)$$

Para el caso del campo $\bar{\psi}_a(\mathbf{x})$,

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\psi}_a(\mathbf{x}), \mathbf{A}_+(\mathbf{y}) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{u} \left\{ \bar{\psi}_a(\mathbf{x}), \Theta_2(\mathbf{u}) \right\} | \mathbf{u}^- - \mathbf{y}^- | \delta^2(\mathbf{u}^\top - \mathbf{y}^\top) \\ &= -\frac{ig}{2} \bar{\psi}_a(\mathbf{x}) | \mathbf{x}^- - \mathbf{y}^- | \delta^2(\mathbf{x}^\top - \mathbf{y}^\top). \end{aligned} \quad (6.148)$$

Y en el caso de $\bar{p}_a(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{p}_a(\mathbf{x}), \mathbf{A}_+(\mathbf{y}) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{u} \left\{ \bar{p}_a(\mathbf{x}), \Theta_2(\mathbf{u}) \right\} | \mathbf{u}^- - \mathbf{y}^- | \delta^2(\mathbf{u}^\top - \mathbf{y}^\top) \\ &= -\frac{ig}{2} \bar{p}_a(\mathbf{x}) | \mathbf{x}^- - \mathbf{y}^- | \delta^2(\mathbf{x}^\top - \mathbf{y}^\top). \end{aligned} \quad (6.149)$$

6.3. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

Para el caso cuando $\mathbf{A}_a(x) = A_k(x)$, se puede tener

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} &= \left\{ A_k(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ A_k(x), \Theta_2(u) \right\} C_{2d}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Theta_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\} \\ &= \left\{ A_k(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} + \partial_k^x \int d^3v C_{2d}^{-1}(x, v) \left\{ \Theta_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}, \end{aligned}$$

de manera que los únicos DB iniciales no nulos son:

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= \partial_k^x \int d^3v C_{21}^{-1}(x, v) \left\{ \Theta_1(v), A_+(y) \right\} \\ &= -\partial_k^x C_{21}^{-1}(x, y) \\ &= -\frac{1}{2} \left| x^- - y^- \right| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top). \end{aligned} \quad (6.150)$$

Para cuando $\mathbf{B}_b(y) = \pi^-(y)$:

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} &= -\partial_-^y \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D1} = -\frac{1}{2} \partial_-^x \left| x^- - y^- \right| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top) \\ &= -\frac{1}{2} \epsilon(x^- - y^-) \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top). \end{aligned} \quad (6.151)$$

Fácilmente se puede deducir:

$$\left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_{D1} = \left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\} = \delta_k^l \delta^3(x - y). \quad (6.152)$$

6.3.4. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

Con el fin de eliminar los vínculos asociados al sector escalar representados por los campos de DKP es fundamental extraer las componentes no redundantes de los mismos, para tal fin será necesario utilizar las propiedades asociadas a los proyectores de los campos de DKP indicadas por la ecuación (5.106),

junto con las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 P\beta^+ &= P^+ & P\beta^- &= P^- & P\beta^k &= P^k \\
 P^-\beta^+ &= P & P^-\beta^- &= 0 & P^-\beta^k &= 0 \\
 \beta^-P &= (P^+)^\dagger & \beta^+P &= (P^-)^\dagger & \beta^kP &= -(P^k)^\dagger \\
 \beta^- (P^-)^\dagger &= P & \beta^+ (P^-)^\dagger &= 0 & \beta^k (P^-)^\dagger &= 0
 \end{aligned}$$

además de:

$$\begin{aligned}
 P^+\beta^+ &= 0 & P^+\beta^- &= P & P^+\beta^k &= 0 \\
 P^k\beta^+ &= 0 & P^k\beta^- &= 0 & P^k\beta^l &= \delta_l^k P \\
 \beta^- (P^+)^\dagger &= 0 & \beta^+ (P^+)^\dagger &= P & \beta^k (P^+)^\dagger &= 0 \\
 \beta^- (P^k)^\dagger &= 0 & \beta^+ (P^k)^\dagger &= 0 & \beta^l (P^k)^\dagger &= \delta_l^k P
 \end{aligned}$$

Empleando la representación física de los campos DKP indicados por la ecuación (5.107), es posible extraer de los vínculos asociados a los campos DKP los vínculos no triviales de la siguiente manera: En el caso del vínculo $\theta(x)$ se determina:

$$\begin{aligned}
 P\theta &= Pp + \frac{i}{2}P\beta^+\psi = p_\varphi + \frac{i}{2}P^+\psi = p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ \approx 0, \\
 P^+\theta &= P^+p + \frac{i}{2}P^+\beta^+\psi = p_+ \approx 0, \\
 P^k\theta &= P^kp + \frac{i}{2}P^k\beta^+\psi = p_k \approx 0, \\
 P^-\theta &= P^-p + \frac{i}{2}P^-\beta^+\psi = p_- + \frac{i}{2}P\psi = p_- + \frac{i}{2}\varphi \approx 0.
 \end{aligned}$$

Cuando el vínculo $\omega(x)$ es tenido en cuenta se obtiene:

$$\begin{aligned}
 P\omega &= (P - P^+\beta^-) (\beta^-D_-^x - m) \psi = (P - P) (\beta^-D_-^x - m) \psi = 0, \\
 P^+\omega &= P^+ (\beta^-D_-^x + \beta^kD_k^x - m) \psi = D_-^x (P\psi) - m (P^+\psi) = D_-^x\varphi - m\psi^+ \approx 0, \\
 P^k\omega &= P^k (\beta^-D_-^x + \beta^kD_k^x - m) \psi = D_k^x (P\psi) - m (P^k\psi) = D_k^x\varphi - m\psi^k \approx 0, \\
 P^-\omega &= (P^- - P^-) (\beta^-D_-^x + \beta^kD_k^x - m) \psi = 0,
 \end{aligned}$$

6.3. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

Si se considera ahora $\Omega(x)$,

$$\begin{aligned}
 P\Omega &= 0, \\
 P^+\Omega &= P [2im\beta^-D_-^x + im\beta^kD_k^x - im^2 + g\pi^-] \psi \\
 &= 2imD_-^x (P^-\psi) + imD_k^x (P^k\psi) + (-im^2 + g\pi^-) (P\psi) \\
 &= 2imD_-^x\psi^- + imD_k^x\psi^k + (-im^2 + g\pi^-) \varphi \approx 0, \\
 P^k\Omega &= 0, \\
 P^-\Omega &= 0.
 \end{aligned}$$

De manera análoga, cuando se consiopera el caso del vínculo $\bar{\theta}(x)$,

$$\begin{aligned}
 \bar{\theta}P &= \bar{p}P - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+P = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi} (P^-)^\dagger = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \approx 0, \\
 \bar{\theta} (P^+)^\dagger &= \bar{p} (P^+)^\dagger - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+ (P^+)^\dagger = \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\bar{\psi}P = \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \approx 0, \\
 \bar{\theta} (P^k)^\dagger &= \bar{p} (P^k)^\dagger - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+ (P^k)^\dagger = \bar{p}_k \approx 0, \\
 \bar{\theta} (P^-)^\dagger &= \bar{p} (P^-)^\dagger - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+ (P^-)^\dagger = \bar{p}_- \approx 0.
 \end{aligned}$$

Ahora, cuando analizamos el caso para $\bar{\omega}(x)$,

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega}P &= \bar{\psi} (\bar{D}_-^x \beta^- + \bar{D}_l^x \beta^l + m) (P - P) = 0, \\
 \bar{\omega} (P^+)^\dagger &= \bar{\psi} (\bar{D}_-^x \beta^- + \bar{D}_l^x \beta^l + m) ((P^+)^\dagger - (P^+)^\dagger) = 0, \\
 \bar{\omega} (P^k)^\dagger &= \bar{\psi} (\bar{D}_-^x \beta^- + \bar{D}_l^x \beta^l + m) (P^k)^\dagger = \bar{D}_k^x [\bar{\psi}P] + m [\bar{\psi} (P^k)^\dagger] \\
 &= \bar{D}_k^x \varphi^* + m\bar{\psi}^k \approx 0, \\
 \bar{\omega} (P^-)^\dagger &= \bar{\psi} (\bar{D}_-^x \beta^- + \bar{D}_l^x \beta^l + m) (P^-)^\dagger = \bar{D}_-^x [\bar{\psi}P] + m [\bar{\psi} (P^-)^\dagger] \\
 &= \bar{D}_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \approx 0.
 \end{aligned}$$

Finalmente, cuando $\bar{\Omega}(x)$ es considerado:

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}P &= \bar{\psi} \left[2im\bar{D}_-^x\beta^- + im\bar{D}_k^x\beta^k + im^2 + g\pi^- \right] \beta^+\beta^- (P^+)^\dagger = 0, \\
\bar{\Omega}(P^+)^\dagger &= \bar{\psi} \left[2im\bar{D}_-^x\beta^- + im\bar{D}_k^x\beta^k + im^2 + g\pi^- \right] \beta^+\beta^-\beta^- (P^+)^\dagger = 0, \\
\bar{\Omega}(P^k)^\dagger &= \bar{\psi} \left[2im\bar{D}_-^x\beta^- + im\bar{D}_l^x\beta^l + im^2 + g\pi^- \right] \beta^+\beta^-\beta^- (P^k)^\dagger = 0, \\
\bar{\Omega}(P^-)^\dagger &= \bar{\psi} \left[2im\bar{D}_-^x\beta^- + im\bar{D}_l^x\beta^l + im^2 + g\pi^- \right] P \\
&= 2im\bar{D}_-^x \left[\bar{\psi}(P^+)^\dagger \right] - im\bar{D}_l^x \left[\bar{\psi}(P^l)^\dagger \right] + (im^2 + g\pi^-) (\bar{\psi}P) \\
&= 2im\bar{D}_-^x\bar{\psi}^+ - im\bar{D}_l^x\bar{\psi}^l + (im^2 + g\pi^-) \varphi^* \approx 0.
\end{aligned}$$

Así, se puede concluir que el conjunto de vínculos no redundantes de la teoría correspondientes al sector DKP está constituido por los siguientes elementos:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &\equiv p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ \approx 0, \quad \Psi_2 \equiv p_+ \approx 0, \quad \Psi_3 \equiv p_k \approx 0, \\
\Psi_4 &\equiv p_- + \frac{i}{2}\varphi \approx 0, \quad \Psi_5 \equiv i\partial_-^x\varphi - m\psi^+ \approx 0, \\
\Psi_6 &\equiv \left(i\partial_k^x - gA_k \right) \varphi - m\psi^k \approx 0, \\
\Psi_7 &\equiv 2m\partial_-^x\psi^- - im \left(i\partial_k^x - gA_k \right) \psi^k + \left(im^2 - g\pi^- \right) \varphi \approx 0, \\
\Psi_8 &\equiv \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \approx 0, \quad \Psi_9 \equiv \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \approx 0, \quad \Psi_{10} \equiv \bar{p}_k \approx 0, \\
\Psi_{11} &\equiv \bar{p}_- \approx 0, \quad \Psi_{12} \equiv i\partial_-^x\varphi^* + m\bar{\psi}^- \approx 0, \\
\Psi_{13} &\equiv \left(i\partial_k^x + gA_k \right) \varphi^* + m\bar{\psi}^k, \\
\Psi_{14} &\equiv 2m\partial_-^x\bar{\psi}^+ + im \left(i\partial_k^x + gA_k \right) \bar{\psi}^k - \left(im^2 + g\pi^- \right) \varphi^* \approx 0.
\end{aligned} \tag{6.153}$$

A partir del conjunto de vínculos definidos por (6.153) es posible construir una segunda matriz de vínculos cuyos elementos de matriz están definidos de la siguiente manera:

$$D_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_i(x), \Psi_j(y) \right\}_{D1}, \tag{6.154}$$

6.3. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

La cual tiene la siguiente representación:

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbb{A}(x, y) & \mathbb{B}(x, y) \\ \mathbb{C}(x, y) & \mathbb{D}(x, y) \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \quad (6.155)$$

donde se han introducido las siguientes submatrices:

$$\mathbb{A}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha(x) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{B}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & i\partial_-^x & D_k^x & \lambda(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\delta_{kl} & imD_k^x \\ i & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 \\ i\partial_-^x & -m & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta(x) \\ D_k^x & 0 & -m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta(x) & 0 & -imD_k^x & 2m\partial_-^x & \beta(x) & 0 & -\xi(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & i\partial_-^x & \bar{D}_k^x & -\theta(x) \\ -i & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m\delta_{kl} & -im\bar{D}_k^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\ i\partial_-^x & 0 & 0 & m & 0 & 0 & -\beta(x) \\ \bar{D}_k^x & 0 & m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda(x) & 2m\partial_-^x & im\bar{D}_k^x & 0 & -\beta(x) & 0 & \xi(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{D}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(x) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y se han definido los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &\equiv g^2 \varphi(x) \varphi(x) \quad , \quad \beta(x) \equiv g^2 \varphi(x) \varphi^*(x) \quad , \quad \gamma(x) \equiv g^2 \varphi^*(x) \varphi^*(x), \\ \theta(x) &\equiv \left[im^2 - g\pi^-(x) \right] \quad , \quad \lambda(x) \equiv \left[im^2 + g\pi^-(x) \right], \\ \xi(x) &\equiv 2img^2 \left[\varphi^*(x) \psi^-(x) + \varphi(x) \bar{\psi}^+(x) \right]. \end{aligned} \quad (6.156)$$

La matriz inversa $C^{-1}(x, y)$ asociada a $D(x, y)$ es calculada a partir de la siguiente identidad:

$$\int d^3y D(x, y) C^{-1}(x, z) = \mathbf{I} \delta^3(x - z), \quad (6.157)$$

siendo que \mathbf{I} la correspondiente matriz identidad. Al utilizar la relación (6.157) y después del análisis correspondiente se puede mostrar que la matriz $C^{-1}(x, y)$ se expresa de la siguiente manera:

$$C^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(x, y) & \mathbb{F}(x, y) \\ \mathbb{G}(x, y) & \mathbb{D}(x, y) \end{pmatrix},$$

con

$$\mathbb{E}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

6.3. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

$$\mathbb{F}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{17} & B_{18} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & 0 & 0 \\ D_{10} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & 0 & D_{17} & 0 \\ E_{10} & E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & 0 & 0 & 0 \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{G}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & 0 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & 0 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 & 0 & R_8 & 0 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & W_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{H}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & M_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{10} & S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con los siguientes valores: Las funciones correspondientes a $A_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 A_2 &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right], & A_{10} &= -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y), \\
 A_{11} &= \frac{i}{2} \delta^3(x-y), & A_{12} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\bar{D}_1^x \delta^3(x-y) \right], \\
 A_{13} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\bar{D}_2^x \delta^3(x-y) \right], & A_{14} &= \frac{i}{4} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y), \\
 A_{15} &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y).
 \end{aligned}$$

Las funciones $B_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right], & B_5 &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\gamma(x) \delta^3(x-y) \right], \\
 B_2 &= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \gamma(x) \left\{ \frac{1}{\partial_x^-} \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right\} \right\}, \\
 B_3 &= \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \gamma(x) \frac{1}{\partial_x^-} \left[D_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, & B_4 &= \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \gamma(x) \frac{1}{\partial_x^-} \left[D_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
 B_6 &= -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right], & B_{16} &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\bar{D}_1^x \delta^3(x-y) \right], \\
 B_{10} &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right\}, \\
 B_{11} &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \delta^3(x-y) \right\}, \\
 B_{12} &= \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \left[\bar{D}_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

6.3. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

$$\begin{aligned}
 B_{13} &= \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\overline{D}_k^x \overline{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\} \\
 B_{14} &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \frac{1}{m} \left\{ \xi(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) - \frac{\gamma(x)}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\overline{D}_k^x \overline{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\overline{D}_k^x \overline{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \right\}, \\
 B_{15} &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\overline{D}_k^x \overline{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\
 B_{17} &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_2^x \delta^3(x-y) \right], \quad B_{18} = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y),
 \end{aligned}$$

Las funciones $C_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 C_2 &= \frac{i}{4m^2} \overline{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\}, \quad C_{16} = \frac{1}{m} \delta^3(x-y), \\
 C_{10} &= \frac{1}{2} \overline{D}_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \quad C_{11} = -\frac{i}{2m} \overline{D}_1^x \delta^3(x-y), \\
 C_{12} &= -\frac{1}{2m} \overline{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \quad C_{15} = \frac{i}{2m} \overline{D}_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
 C_{13} &= -\frac{1}{2m} \overline{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
 C_{14} &= -\frac{i}{4m} \overline{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_k^x \overline{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}.
 \end{aligned}$$

Las funciones $D_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 D_2 &= \frac{i}{4m^2} \overline{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\}, \quad D_{10} = \frac{1}{2} \overline{D}_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
 D_{11} &= -\frac{i}{2m} \overline{D}_2^x \delta^3(x-y), \quad D_{12} = -\frac{1}{2m} \overline{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_1^x \delta^3(x-y) \right] \right\},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{13} &= -\frac{1}{2m} \overline{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_2^x \delta^3(x-y) \right] \right\}, & D_{15} &= \frac{i}{2m} \overline{D}_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \\
D_{14} &= -\frac{i}{4m} \overline{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_k^x \overline{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\
D_{17} &= \frac{1}{m} \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Las funciones $E_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{\gamma(x)}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), & E_{10} &= \frac{i}{2} \delta^3(x-y), & E_{11} &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
E_{12} &= -\frac{i}{2m} \overline{D}_1^x \delta^3(x-y), & E_{13} &= -\frac{i}{2m} \overline{D}_2^x \delta^3(x-y), & E_{15} &= \frac{1}{2m} \delta^3(x-y), \\
E_{14} &= \frac{1}{4m} \left[\overline{D}_k^x \overline{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Las funciones $F_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
F_2 &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], & F_{10} &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
F_{11} &= \frac{1}{2m} \delta^3(x-y), & F_{12} &= \frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_1^x \delta^3(x-y) \right], \\
F_{13} &= \frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\overline{D}_2^x \delta^3(x-y) \right], & F_{15} &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
F_{14} &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[\overline{D}_k^x \overline{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}.
\end{aligned}$$

Las funciones $G_i(x, y)$:

$$G_{12} = \frac{1}{m} \delta^3(x-y), \quad G_{14} = \frac{i}{2m} \overline{D}_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right].$$

Las funciones $H_i(x, y)$:

$$H_{13} = \frac{1}{m} \delta^3(x-y), \quad H_{14} = \frac{i}{2m} \overline{D}_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right].$$

6.3. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

Las funciones $K_i(x, y)$:

$$K_{14} = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).$$

Las funciones $M_i(x, y)$:

$$M_1 = -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \quad , \quad M_2 = \frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right\},$$

$$M_3 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\partial_-^x} [D_1^x \delta^3(x - y)] \quad , \quad M_4 = -\frac{1}{2} \frac{1}{\partial_-^x} [D_2^x \delta^3(x - y)],$$

$$M_5 = -\frac{i}{2} \delta^3(x - y) \quad , \quad M_6 = -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y),$$

$$M_{14} = \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right].$$

Las funciones $P_i(x, y)$:

$$P_1 = -\frac{i}{2} \delta^3(x - y) \quad , \quad P_2 = -\frac{1}{4m} \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y),$$

$$P_3 = -\frac{i}{2m} D_1^x \delta^3(x - y) \quad , \quad P_4 = -\frac{i}{2m} D_2^x \delta^3(x - y) \quad , \quad P_5 = \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x - y),$$

$$P_6 = -\frac{1}{2m} \delta^3(x - y) \quad , \quad P_{14} = \frac{\alpha(x)}{4m^2} \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right].$$

Las funciones $Q_i(x, y)$:

$$Q_1 = -\frac{1}{2} D_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right] \quad , \quad Q_3 = -\frac{1}{2m} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} [D_1^x \delta^3(x - y)] \right\},$$

$$Q_2 = \frac{i}{4m} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right\},$$

$$Q_4 = -\frac{1}{2m} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} [D_2^x \delta^3(x - y)] \right\} \quad , \quad Q_5 = -\frac{i}{2m} D_1^x \delta^3(x - y),$$

$$Q_6 = -\frac{i}{2m} D_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right] \quad , \quad Q_7 = -\frac{1}{m} \delta^3(x - y),$$

$$Q_{14} = \frac{i}{4m^2} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right] \right\}.$$

Las funciones $R_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= -\frac{1}{2}D_2^x \left[\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right], \quad R_3 = -\frac{1}{2m}D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_x^-} [D_1^x \delta^3(x-y)] \right\}, \\
 R_2 &= \frac{i}{4m}D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_x^-} \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right\}, \\
 R_4 &= -\frac{1}{2m}D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_x^-} [D_2^x \delta^3(x-y)] \right\}, \quad R_5 = -\frac{i}{2m}D_2^x \delta^3(x-y), \\
 R_6 &= -\frac{i}{2m}D_2^x \left[\frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right], \quad R_8 = -\frac{1}{m} \delta^3(x-y), \\
 R_{14} &= \frac{i}{4m^2}D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_x^-} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Las funciones $S_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right\} \\
 S_2 &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \frac{1}{2} \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right\} - \frac{1}{m} \left\{ \xi(x) \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) + \frac{\alpha(x)}{2m} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\gamma(x) \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right] \right\} \right\}, \\
 S_3 &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} [D_1^x \delta^3(x-y)] \right\}, \\
 S_4 &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} [D_2^x \delta^3(x-y)] \right\}, \\
 S_5 &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \delta^3(x-y) \right\}, \quad S_8 = -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_x^-} [D_2^x \delta^3(x-y)], \\
 S_6 &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right\}, \quad S_9 = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y), \\
 S_{10} &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right], \quad S_7 = -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_x^-} [D_1^x \delta^3(x-y)],
 \end{aligned}$$

6.3. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} [\alpha(x) \delta^3(x-y)] \quad , \quad S_{12} = \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_1^x \delta^3(x-y)] \right\} \\
 S_{13} &= \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_2^x \delta^3(x-y)] \right\} \quad , \quad S_{15} = \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \\
 S_{14} &= -\frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left\{ \left[D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \alpha(x) \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[\bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \right\}
 \end{aligned}$$

Las funciones $T_i(x, y)$:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \quad , \quad T_3 = -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} [D_1^x \delta^3(x-y)] \quad , \\
 T_2 &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \quad , \\
 T_4 &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} [D_2^x \delta^3(x-y)] \quad , \quad T_5 = -\frac{1}{2m} \delta^3(x-y) \quad , \\
 T_6 &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \quad , \quad T_{14} = -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[\alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \quad .
 \end{aligned}$$

Las funciones $U_i(x, y)$:

$$U_2 = \frac{i}{2m} D_1^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \quad , \quad U_3 = -\frac{1}{m} \delta^3(x-y) \quad .$$

Las funciones $W_i(x, y)$:

$$W_2 = \frac{i}{2m} D_2^x \left[\frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \quad , \quad W_4 = -\frac{1}{m} \delta^3(x-y) \quad .$$

Las funciones $Z_i(x, y)$:

$$Z_2 = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \quad .$$

Con la matriz $D^{-1}(x, y)$ habiendo sido calculada, se procede a definir el segundo conjunto de DB, para dos variables dinámicas $A_a(x)$ y $B_b(y)$, de la

siguiente manera:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D2} = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Psi_\alpha(u) \right\}_{D1} D_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1}. \quad (6.158)$$

De la definición del conjunto de vínculos de segunda clase asociados al sector escalar (6.153), es posible considerar a las variables (φ, φ^*) de los campos de DKP como los grados de libertad correspondientes a este sector, en tanto que las otras componentes se pueden interpretar como variables dependientes. De igual manera, de la definición de los DB D1, se puede considerar inicialmente como coordenadas independientes del sector electromagnético a (A_+, A_k) . Entonces, con el fin de calcular los correspondientes DB D2, se utilizarán las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\}_{D1} &= \delta^3(x - u), \\ \left\{ \varphi(x), \bar{\Psi}_{14}(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \varphi(x) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top), \\ \left\{ \psi^+(x), \bar{\Psi}_7(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \psi^+(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top), \\ \left\{ \varphi(x), \bar{\Psi}_7(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \varphi(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top), \\ \left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\}_{D1} &= \delta^3(x - y), \\ \left\{ \varphi^*(x), \bar{\Psi}_7(u) \right\}_{D1} &= \frac{ig^2}{2} \varphi^*(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top), \\ \left\{ \varphi^*(x), \bar{\Psi}_{14}(u) \right\}_{D1} &= \frac{ig^2}{2} \varphi^*(x) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top), \\ \left\{ \bar{\psi}^+(x), \Psi_2(u) \right\}_{D1} &= \delta^3(x - y), \end{aligned} \quad (6.159)$$

6.3. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

junto con:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \Psi_5(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{g}{2} \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top), \\
 \left\{ \Psi_7(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= i m g \psi^-(v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top), \\
 \left\{ \Psi_{12}(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{g}{2} \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top), \\
 \left\{ \Psi_{14}(v), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= -i g m \bar{\psi}^+(v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top), \\
 \left\{ \psi_a(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{i g}{2} \psi_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top), \quad (6.160) \\
 \left\{ \bar{\psi}_a(x), \mathcal{A}_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{i g}{2} \bar{\psi}_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top), \\
 \left\{ \mathcal{A}_k(x), \Psi_7(u) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} g \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-) \partial_k^x \delta^2(x^\top - u^\top), \\
 \left\{ \mathcal{A}_k(x), \Psi_{14}(u) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} g \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-) \partial_k^x \delta^2(x^\top - u^\top).
 \end{aligned}$$

Entonces, los DB D2 que pueden ser asociados al campo $\varphi(x)$, se calcula a partir de (6.158) y (6.159) con los siguientes términos relevantes:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D2} &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi(x), \Psi_7(u) \right\}_{D1} D_{7\beta}^{-1}(u, v) \\
 &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\}_{D1} D_{8\beta}^{-1}(u, v) \\
 &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi(x), \Psi_{14}(u) \right\}_{D1} D_{14\beta}^{-1}(u, v) \\
 &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1}.
 \end{aligned}$$

De manera que cuando se calcula el DB D2 con el campo $\varphi^*(y)$ se deduce que:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D2} &= - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\}_{D1} D_{8,1}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_1(v), \varphi^*(y) \right\}_{D1} \\ &= D_{81}^{-1}(x, y) = M_1(x, y) = -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x - y) \\ &= -\frac{m}{4} \epsilon(x - y) \delta^2(x^\top - x^\top), \end{aligned}$$

es decir:

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D2} = -\frac{m}{4} \epsilon(x - y) \delta^2(x^\top - x^\top). \quad (6.161)$$

Ahora, cuando el campo $A_+(y)$ se consiedera se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\}_{D1} D_{8,5}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_5(v), A_+(y) \right\}_{D1} \\ &= \frac{ig}{2} \varphi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top) + \frac{g}{2} \int d^3v M_6(x, v) \varphi(v) \\ &\quad \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) \\ &= \frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[\varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\ &\quad \left. \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right], \end{aligned}$$

entonces,

$$\left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_{D2} = \frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[\varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\ \left. \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right], \quad (6.162)$$

donde cualquier otro DB D2 con el campo $\varphi(x)$ y campos independientes es nulo. De forma similar, los DB D2 correspondientes al campo $\varphi^*(x)$ se

6.3. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

determinan a partir de:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \varphi^*(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D2} &= \left\{ \varphi^*(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\}_{D1} D_{1\beta}^{-1}(u, v) \\
 &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi^*(x), \Psi_7(u) \right\}_{D1} D_{7\beta}^{-1}(u, v) \\
 &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi^*(x), \Psi_{14}(u) \right\}_{D1} D_{14\beta}^{-1}(u, v) \\
 &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1}.
 \end{aligned}$$

Con lo cual, cuando el DB D2 con el campo $A_+(y)$ se concederá se obtiene que:

$$\begin{aligned}
 \left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\}_{D1} D_{1,12}^{-1}(u, v) \\
 &\quad \left\{ \Psi_{12}(v), A_+(y) \right\}_{D1} \\
 &= -\frac{ig}{2} \varphi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top) - \frac{g}{2} \int d^3v A_{15}(x, v) \varphi^*(v) \\
 &\quad \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) \\
 &= -\frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[\varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \varphi^*(v) \right. \\
 &\quad \left. \epsilon(x^- - v^-) \epsilon(v^- - y^-) \right],
 \end{aligned}$$

así que,

$$\begin{aligned}
 \left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[\varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \varphi^*(v) \right. \\
 &\quad \left. \epsilon(x^- - v^-) \epsilon(v^- - y^-) \right]. \tag{6.163}
 \end{aligned}$$

Otro posible conjunto de DB D2 correspondientes al campo $A_+(x)$ se calculan de:

$$\begin{aligned}
\left\{ A_+(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ A_+(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_5(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{5,\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_7(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{7,\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_{12}(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{12,\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_{14}(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{14\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1},
\end{aligned}$$

a partir del cual se puede deducir:

$$\begin{aligned}
\left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_5(u) \right\}_{D_1} D_{5,12}^{-1}(u, v) \\
&\quad \left\{ \Psi_{12}(v), A_+(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_{12}(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{12,5}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_5(v), A_+(y) \right\}_{D_1} \\
&= \frac{g^2}{4} \int d^3u d^3v \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top) F_{15}(u, v) \varphi^*(v) \\
&\quad \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) + \frac{g^2}{4} \int d^3u d^3v \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-) \\
&\quad \delta^2(x^\top - u^\top) T_6(u, v) \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) \\
&= \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v \varphi(u) \varphi^*(v) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top) \\
&\quad \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) \\
&\quad + \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v \varphi^*(u) \varphi(v) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top) \\
&\quad \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) \\
&= \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v [\varphi(u) \varphi^*(v) + \varphi^*(u) \varphi(v)] \epsilon(x^- - u^-) \\
&\quad \delta^2(x^\top - u^\top) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top)
\end{aligned}$$

6.3. Conjunto Final de Corchetes de Dirac

$$\left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_{D2} = \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v [\varphi(u) \varphi^*(v) + \varphi^*(u) \varphi(v)] \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) \quad (6.164)$$

En el caso que se consideren los campos $A_k(x)$, es posible mostrar que los DB D2 diferentes de cero con ésta variable son:

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top), \\ \left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_{D2} &= \delta_k^l \delta^3(x - y). \end{aligned} \quad (6.165)$$

6.3.5. Conjunto Final de Corchetes de Dirac

Finalmente, se ha determinado que el conjunto de vínculos que restan por ser invertidos bajo la definición de los DB D2 son:

$$\phi^p \equiv \pi^p - \partial_-^x A_p, \quad (6.166)$$

a partir de los cuales se definen la última matriz de vínculos, cuyos elementos de matriz son determinados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} F_{kl}(x, y) &\equiv \left\{ \phi^k(x), \phi^l(y) \right\}_{D2} \\ &= -\partial_-^y \left\{ \pi^k(x), A_l(y) \right\}_{D2} - \partial_-^x \left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_{D2} \\ &= \delta_k^l \partial_-^y \delta^3(x - y) - \delta_k^l \partial_-^x \delta^3(x - y) \\ &= -2\delta_k^l \partial_-^x \delta^3(x - y), \end{aligned}$$

donde su correspondiente inversa tiene la forma:

$$F_{kl}^{-1}(x, y) = -\frac{1}{4} \delta_k^l \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top). \quad (6.167)$$

A partir de (6.167), es posible definir el conjunto final de DB entre dos variables dinámicas $\mathbf{A}_a(x)$ y $\mathbf{B}_b(y)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y)\}_D &= \{\mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y)\}_{D2} - \int d^3u d^3v \{\mathbf{A}_a(x), \phi^p(u)\}_{D2} F_{pq}^{-1}(u, v) \\ &\quad \{\phi^q(v), \mathbf{B}_b(y)\}_{D2} \\ &= \{\mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y)\}_{D2} + \frac{1}{4} \int d^3u d^3v \{\mathbf{A}_a(x), \phi^p(u)\}_{D2} \\ &\quad \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \{\phi^p(v), \mathbf{B}_b(y)\}_{D2}. \end{aligned} \quad (6.168)$$

Siendo que bajo la definición de el conjunto de DB $D2$ y el conjunto de vínculos (6.166) se puede considerar como variables independientes a los campos $(A_k, A_+, \varphi, \varphi^*)$, de manera que con el fin de calcular los DB finales entre ellas se utilizaran las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), \phi^p(u) \right\}_{D2} &= \delta_k^p \delta^3(x - u), \\ \left\{ A_+(x), \phi^p(u) \right\}_{D2} &= -\frac{1}{2} \epsilon(x^- - u^-) \partial_p^x \delta^2(x^\top - u^\top), \\ \left\{ \varphi(x), \phi^p(u) \right\}_{D2} &= 0, \quad \left\{ \varphi^*(x), \phi^p(u) \right\}_{D2} = 0. \end{aligned} \quad (6.169)$$

En el caso que se considere calcular el DB asociado al campo $A_k(x)$, los terminos relevantes de la relación (6.168) son:

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D &= \left\{ A_k(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D2} + \frac{1}{4} \int d^3u d^3v \left\{ A_k(x), \phi^p(u) \right\}_{D2} \\ &\quad \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \left\{ \phi^p(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D2} \\ &= \left\{ A_k(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D2} + \frac{1}{4} \int d^3v \epsilon(x^- - v^-) \delta^2(x^\top - v^\top) \\ &\quad \left\{ \phi^k(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D2}, \end{aligned}$$

de manera que cuando $\mathbf{B}_b(y) = A_l(y)$ se determina:

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), A_l(y) \right\}_D &= \frac{1}{4} \int d^3v \epsilon(x^- - v^-) \delta^2(x^\top - v^\top) \left\{ \phi^k(v), A_l(y) \right\}_{D2} \\ &= -\frac{1}{4} \delta_k^l \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top), \end{aligned}$$

6.3. Conjunto Final de Corchetes de Dirac

es decir:

$$\left\{ A_k(x), A_l(y) \right\}_D = -\frac{1}{4} \delta_k^l \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top). \quad (6.170)$$

Ahora, si se considera $\mathbf{B}_b(y) = \mathbf{A}_+(y)$ se obtiene:

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_D &= \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D_2} + \frac{1}{4} \int d^3v \epsilon(x^- - v^-) \delta^2(x^\top - v^\top) \\ &\quad \left\{ \phi^k(v), A_+(y) \right\}_{D_2} \\ &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top) - \frac{1}{24} \partial_k^y \delta^2(x^\top - v^\top) \\ &\quad \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \epsilon(v^- - y^-) \\ &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top) + \frac{1}{4} |x^- - y^-| \partial_p^x \delta^2(x^\top - v^\top) \\ &= -\frac{1}{4} |x^- - y^-| \partial_p^x \delta^2(x^\top - v^\top), \end{aligned}$$

entonces:

$$\left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_D = -\frac{1}{4} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\top - v^\top). \quad (6.171)$$

Es posible mostrar que los siguientes casos particulares resultan:

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), \varphi(y) \right\}_D &= 0, \\ \left\{ A_k(x), \varphi^*(y) \right\}_D &= 0. \end{aligned} \quad (6.172)$$

De la relación (6.168) se puede verificar que cuando $\mathbf{A}_a(x) = \varphi(x)$ ó $\mathbf{A}_a(x) = \varphi^*(x)$, se cumple:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2}, \\ \left\{ \varphi^*(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2}, \end{aligned} \quad (6.173)$$

de manera que los resultados derivados para los campos $\varphi(x)$ y $\varphi^*(x)$ siguen siendo validos de manera que:

$$\begin{aligned}
\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D2} &= -\frac{m}{4} \epsilon(x-y) \delta^2(x^\top - x^\top), \\
\left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[\varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\
&\quad \left. \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right], \\
\left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[\varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\
&\quad \left. \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \right]. \tag{6.174}
\end{aligned}$$

Finalmente, cuando se estudia el caso $A_a(x) = A_+(x)$, se concluye que los términos a considerar de la expresión (6.168) son:

$$\begin{aligned}
\left\{ A_+(x), B_b(y) \right\}_D &= \left\{ A_+(x), B_b(y) \right\}_{D2} + \frac{1}{4} \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \phi^p(u) \right\}_{D2} \\
&\quad \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \left\{ \phi^p(v), B_b(y) \right\}_{D2} \\
&= \left\{ A_+(x), B_b(y) \right\}_{D2} - \frac{1}{8} \partial_p^x \int du^- d^3v \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - v^\top) \\
&\quad \epsilon(u^- - v^-) \left\{ \phi^p(v), B_b(y) \right\}_{D2},
\end{aligned}$$

a partir del cual se infiere que:

$$\begin{aligned}
\left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_D &= \left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_{D2} - \frac{1}{8} \partial_p^x \int du^- d^3v \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - v^\top) \\
&\quad \epsilon(u^- - v^-) \left\{ \phi^p(v), A_+(y) \right\}_{D2} \\
&= \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v [\varphi(u) \varphi^*(v) + \varphi^*(u) \varphi(v)] \epsilon(x^- - u^-) \\
&\quad \delta^2(x^\top - u^\top) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) \\
&\quad + \frac{1}{82} \partial_p^x \partial_p^y \delta^2(x^\top - y^\top) \int du^- dv^- \epsilon(x^- - u^-) \epsilon(u^- - v^-) \\
&\quad \epsilon(v^- - y^-),
\end{aligned}$$

6.3. Conjunto Final de Corchetes de Dirac

es decir:

$$\begin{aligned} \left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_D &= \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v [\varphi(u) \varphi^*(v) + \varphi^*(u) \varphi(v)] \epsilon(x^- - u^-) \\ &\quad \delta^2(x^\top - u^\top) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{1}{2} \nabla_x^2 \delta^2(x^\top - y^\top) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) |u^- - y^-|. \end{aligned} \quad (6.175)$$

En resumen, la teoría está caracterizada por el siguiente conjunto de DB, que son consistentes con todos los vínculos de segunda clase y condiciones de gauge introducidos:

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), A_l(y) \right\}_D &= -\frac{1}{4} \delta_k^l \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top). \\ \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_D &= -\frac{1}{4} |x^- - y^-| \partial_k^\top \delta^2(x^\top - y^\top). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_D &= \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v [\varphi(u) \varphi^*(v) + \varphi^*(u) \varphi(v)] \epsilon(x^- - u^-) \\ &\quad \delta^2(x^\top - u^\top) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{1}{2} \nabla_x^2 \delta^2(x^\top - y^\top) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) |u^- - y^-|. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D2} &= -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top), \\ \left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[\varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\ &\quad \left. \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right], \\ \left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[\varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\ &\quad \left. \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \right]. \end{aligned}$$

Capítulo 7

Conclusiones

En este trabajo consideramos los aspectos clásicos mas importantes de la electrodinámica escalar de primer orden en las coordenadas de plano nulo. Debido al carácter singular de la teoría, la formulación de Dirac para estudiar sistemas con vínculos fue utilizada.

En la primera parte se introdujo las bases de la dinámica en las coordenadas de plano nulo, en donde se discutió las algunas características fundamentales del grupo de Poincare. Se mostró las relaciones que existen entre los conmutadores a tiempos iguales de los operadores de campos escalar co las soluciones de las ecuaciones de campo y las condiciones de frontera. Se pudo determinar que una teoría de campos en las coordenadas de plano nulo será siempre descrito por un Lagrangiano singular, lo cual requiere que un tratamiento adecuado sea utilizado de manera de lo lograr un análisis consistente con los vínculos que resulten en una teoría particular.

En el capitulo 2 del trabajo se realizo una análisis consistente de la electrodinámica escalar, $SQED_4$, en las coordenadas de plano nulo y varias características se presentaron que se contrastan con su contraparte desarrollada en el formalismo desarrollado en una superficie tipo espacio. En primer lugar se observo que el vínculo de primera clase, que se identifica como la ley de Gauss,

resulta de una combinación lineal de los vínculos del sector electromagnético y escalar y se obtiene como consecuencia del autovector de modo cero de la matriz de vínculos. Lo anterior es consecuencia de la existencia de vínculos asociados al sector escalar. Sin embargo, cuando el análisis es realizado en el instante forma es posible mostrar que el segundo vínculo de primera clase no tiene contribución del sector escalar ya que en este formalismo el sector escalar está libre de vínculos.

Después de seleccionar las condiciones de gauge de plano nulo, los vínculos de primera clase se tornan de segunda, no en tanto, fue necesario importar apropiadas condiciones de frontera sobre los campos con el fin de eliminar el subconjunto oculto de vínculos de primera clase, lo cual permitirá obtener una inversa de la matriz de vínculos de segunda clase bien definida. Así, los corchetes de Dirac de la teoría pueden ser derivados de manera consistente y pueden ser cuantizados via principio de correspondencia. Las relaciones de conmutación entre los campos que fueron derivadas, son consistente con aquellos resultados reportados en la literatura [93]. Sin embargo, las relaciones de conmutación que involucran al operador de campo A_+ no fueron obtenidos por Neville and Rohrlich, sin embargo, ellos afirmaron que dichas expresiones podrían ser derivadas resolviendo las ecuaciones de vínculo cuánticas. No obstante, esos conmutadores fueron calculados al cuantizar los corchetes de Dirac que se derivaron clásicamente siguiendo un cuidadoso análisis de la estructura de vínculos de la SQED₄.

En el capítulo 4 se estudio la teoría de Duffin-Kemmer-Petiau que es una formulación relativista en primer orden para describir partículas de espín 0 y 1. Se estudio las propiedades generales de la ecuación de DKP y el álgebra de las matrices β . Posteriormente se analizo la covarianza de la ecuación de DKP bajo transformaciones de Lorentz y la ley de transformación de los campos fundamentales. En seguida, se examino las representaciones irreducibles de la teoría d DKP y se mostró la equivalencia entre éste formalismo y el formalismo de Klein-Gordon-Fock, cuando se se selecciona el sector de espín 0 con el formalismo de Proca cuando se considera el sector de spin 1. Debido a la

7.0. Conjunto Final de Corchetes de Dirac

dependencia lineal en la derivada de los campos en la densidad Lagrangiana asociada a la teoría de DKP, el método de Dirac fue necesario utilizar con el fin de dar un manejo apropiado a la estructura de vínculos que la teoría presenta y encontrar los apropiados grados de libertad y corchetes de Poisson consistente con los vínculos que resulten de la teoría. Finalmente, se discutió el acoplamiento mínimo electromagnético en la teoría de DKP

En el capítulo 5 estudiamos la teoría de DKP libre en las coordenadas de plano nulo en dos y cuatro dimensiones. La naturaleza singular de la teoría resultó más evidente en este sistema de coordenadas, ya que a diferencia de su contraparte en las coordenadas de instante forma, la teoría posee un nuevo conjunto de vínculos, secundarios y terciarios. Su presencia pone de manifiesto que los multiplicadores de Lagrange que se deben considerar para estudiar la dinámica de los campos no se pueden fijar completamente y el número de componentes determinadas depende, inicialmente, de la dimensión de la representación de los campos a considerar. Sin embargo, con el fin de poner en evidencia los vínculos secundarios que resultan fue necesario introducir un nuevo conjunto de proyectores. Solamente hasta que se determinó completamente el conjunto máximo de vínculos que la teoría posee se logró configurar el conjunto de vínculos independientes. Para tal fin, se utilizaron los proyectores que determinan las componentes físicas de los campos de DKP. Finalmente, ya definidos éste conjunto de vínculos, se procedió a determinar los grados de libertad correspondientes a la teoría y los corchetes de Dirac asociados a estas cantidades. Finalmente, se pudo observar que las expresiones que resultaron eran equivalentes a aquellas que se derivan para el campo escalar de KGF complejo en las coordenadas de plano nulo.

En el último capítulo, se estudió la electrodinámica escalar de primer orden que se interpreta como la interacción de un campo escalar descrito por el campo de DKP con el campo electromagnético. Como era de esperar, la estructura de vínculos es completamente diferente de aquella que se conoce en el formalismo de segundo orden de la SQED₄. Se mostró con detalle la estructura de vínculos que el sistema posee y se pudo visualizar directamente,

que en el límite cuando la constante de acople tiende a cero se reproduce los resultados que se conocen en las teorías libres, lo que garantizó la coherencia de los resultados derivados. Se pudo observar, cuando los vínculos se clasifican, que el segundo vínculo de primera clase que se identifica como la ley de Gauss para la teoría en interacción, resulta de una combinación lineal de los vínculos del vínculo subsidiario del sector electromagnético con los vínculos primarios del sector DKP. Un análisis detallado, permite identificar a los campos $(\varphi, \varphi^*, A_+)$, se pueden identificar como los grados de libertad de la teoría. Los corchetes de Dirac entre estas variables fueron calculadas, después de un análisis laborioso, y se mostró que son equivalentes a los resultados obtenidos en el formalismo de segundo orden, cuando la representación física de los campos DKP es considerada.

Bibliografía

- [1] G. Petiau, Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect. **16** (1936).
 - [2] R. Y. Duffin, Phys. Rev. **54**, 1114 (1938).
 - [3] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. **A173**, 91 (1939).
 - [4] L. de Broglie, Compt. Rend. **199**, 445 (1934).
 - [5] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetski, *Quantum Electrodynamics*, 2nd ed. Inter., New York, 1965.
 - [6] A. Wightman, *Aspects of Quantum Theory*, p. 95. Edited by A. Salam and E. P. Wigner, Cambridge, University Press (1972).
 - [7] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
 - [8] P. P. Srivastava, *Light front quantized field theory (an introduction): Spontaneous symmetry breaking. Phase transition in ϕ^4 theory*. Invited article for: Saga of Field CBPF-NF-075-93, Sep 1993. 31pp. Lecture at Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambu, Brazil, Sep 1993. e-Print Archive: hep-th/9312064.
 - [9] P. P. Srivastava, *Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model*. Talk given at the 1st U.S.-Brazil Workshop on Topology, Geometry, and Physics, UNICAMP, Campinas, Brazil, Jul 1996. hep-th/9610149.
- P. P. Srivastava, *Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results*. Invited article for: Saga of Field Theory, From

Points to Strings, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India. hep-ph/9908492.

- [10] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.
- [11] M. Nowakowski, Phys. Lett. A 244, 329 (1998).
J. T. Lunardi et al., Phys. Lett. A 268, 165 (2000).
- [12] E. Fischbach, M. M. Nieto e C. K. Scott, J. Math. Phys. 14, 1760 (1973).
M. Riedel, Relativistische Gleichungen fuer Spin-1 Teilchen, Diplomarbeit, Institute for Theoretical Physics, Johann Wolfgang Goethe-University, Frankfurt/Main (1979).
- [13] G. Kalbermann, Phys. Rev. C 34 , 2240 (1986).
R. E. Kozack et al., Phys. Rev. C 37 , 2898 (1988).
R. E. Kozack, Phys. Rev. C 40 , 2181 (1989).
L. J. Kurth et al., Phys. Rev. C 50, 2624 (1994).
R. C. Barret e Y. Nedjadi, Nucl. Phys. A 585, 311c (1995).
L. J. Kurth et al., Nucl. Phys. A 585, 335c (1995).
- [14] V. Ya. Fainberg e B. M. Pimentel, Braz. J. Phys. 30 (2000) 275.
Phys. Lett. A 271 (2000) 16.
- [15] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira e J. S. Valverde, Phys. Lett. A 268 (2000) 165.
- [16] Y. Nedjadi e R. C. Barrett, J. Phys. A: Math. Gen. 27 (1994) 4301.
- [17] M. Falekl, M. Merad, Commun. Theor. Phys. (Beijing-China) 50 (2008) 587.
- [18] V. Gribov, Eur. Phys. J. C. 10 (1999) 71.
- [19] I. V Kanatchikov, hep-th/9911175.

7.0. Conjunto Final de Corchetes de Dirac

- [20] R. Casana, V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel e J. S. Valverde, *Phys. Lett. A* **316** (2003) 33.
- [21] R. Casana, B. M. Pimentel e J. S. Valverde *J. Phys. A:* **370** (2006) 441.
- [22] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Nuovo Cimento*, **A1** , 625 (1971).
F. Rohrlich, *Acta Phys. Austriaca*, Suppl. VIII, 277(1971).
- [23] G. Mc Cartor, *Z. Phys*, **C41**, 271 (1988).
- [24] P. J. Steinhardt, *Ann. Phys* **128**, 425 (1980).
- [25] R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboim, *Nucl. Phys.* **B122**, 61 (1976).
- [26] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A modern perspective*, John Wiley and Sons (1974).
K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics, Vol. 169*. Berlin, Heidelberg New York: Springer 1982.
A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim: *Constrained Hamiltonian systems*. Rome: Academic Nazionale dei Lincei 1976
K. Sundermeyer: *Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics, Vol. 169*. Berlin, Heidelberg New York: Springer 1982.
- [27] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Phys. Rev.* **D3**, 692(1971).
- [28] R. Casana, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Braz. J. Phys.* **44**, 398 (2014).
- [29] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Phys. Rev.* **D3**, 1692(1971).
- [30] R, Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Int. J. Mod. Phys.*, **E16**, 2993 (2007).
R, Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Rev. Col. Fis.*, **41**, 220 (2009).
R, Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Rev. Col. Fis.*, **41**, 206 (2009).

- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *J. Math. Phys.* **52** (2011) 102902.
- C.A. Bonin, R. Bufalo, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Phys.Rev.* **D81** (2010) 025003.
- R. Casana, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **199** (2010) 219-222.
- Rodrigo Bufalo, Bruto Max Pimentel, German Enrique Ramos Zambrano, *Phys. Rev.* **D83** (2011) 045007.
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcarcel, G.E.R. Zambrano, *AIP Conf. Proc.* **1296** (2010) 402-405.
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *AIP Conf. Proc.* **1296** (2010) 398-401.
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcarcel, G.E.R. Zambrano, *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 175015.
- R. Bufalo, B.M. Pimentel, G.E. Zambrano, *AIP Conf. Proc.* **1520** (2013) 394-396.
- B.M. Pimentel, A.T. Suzuki, G.E.R. Zambrano, *Few Body Syst.* **52** (2012) 437-442.
- R. Bufalo, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Phys. Rev.* **D86** (2012) 125023.
- R. Casana, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Braz. J. Phys.* **44**, 398 (2014).
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcárcel, G.E.R. Zambrano, *J. Math. Phys.* **55** (2014) 042902.
- [31] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).
- [32] T. Heinzl, *Light-Cone Dynamics of Particles and Field*, hep-th/9812190.
- T. Heinzl, *Light-Cone Quantization: Fundamentation and Applications*, hep-th/0008096.

7.0. Conjunto Final de Corchetes de Dirac

- [33] H. Leutwyler and J. Stern, *Ann. Phys.*, **112**, 94 (1978).
- [34] H. Bacry, P. Combe and P. Sorba, *Rep. Math. Phys.* **5**, 145 (1974); **5**, 361 (1974).
J. Patera, P. Winternitz and H Zassenhaus, *J. Math. Phys.* **16**, 1597 (1975).
J. Patera, R. Sharp, P. Winternitz and H Zassenhaus, *J. Math. Phys.* **17**, 977 (1976);
- [35] L. Parker and G. Schmieg, *Am. J. Phys.* **38**, 218 (1970).
Y. S. Kim and M. E. Noz, *Am. J. Phys.* **50**, 721 (1982).
E. N. Glass, *Am. J. Phys.* **43**, 1013 (1975).
- [36] P. P. Srivastava, *Light-Front Quantization of Field Theory*, Topics in Theoretical Physics, pp. 206 - 217, eds, V.C. Aguilera-Navarro, D. Galetti, B. M. Pimentel and L. Tomio, IFT - São Paulo, SP, 1995.
- [37] P. E. Soper, *Field Theories in the Infinite Momentum Frame*, SLAC-137, UC-34, Sep. 1971.
J. B. Kagut and D. E. Soper, *Quantum Electrodynamics in the Infinite Momentum Frame*, SLAC-PUB-680, Oct. 1969.
- [38] P. P. Srivastava, *Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results*. Saga of Field Theory, From Points to Strings, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India. hep-ph/9908492.
- [39] P. P. Srivastava, *Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model*. Brazil Workshop on Topology, Geometry, and Physics, UNICAMP, Campinas, Brazil, Jul 1996. hep-th/9610149.
- [40] Th. Heinzl, St. Krusche and E. Werner, *Phys. Lett.*, **B272**, 54 (1991); **B256**, 55 (1991).
- [41] P. P. Srivastava, *Light-Front Quantized Field Theory: (an introduction) Spontaneous Symmetry Breaking. Phase transition in ϕ^4*

- Theory*, XIV Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambu, MG, September 1993, CBPF-NF-075/93.
- [42] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, Vol. 169, Springer, New York, 1982.
- [43] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New-York, 1964.
- P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **2**, 129 (1950).
- P. A. M. Dirac, Can. J. Math. **3**, 1 (1951).
- P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A246**, 236 (1958).
- P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **A246**, 333 (1958).
- [44] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1969.
- [45] J. Mathews and R. Walker, *Mathematical Method of Physics*, Benjamin, New York, 1965.
- J. Irving and N. Mullineux, *Mathematical in Physics and Engineering*, Academic Press, New York, 1962.
- T. Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier, New York, 1973.
- [46] N. E. Ligterink and B. L. G. Bakker, Vrije Universiteit Amsterdam, preprint 1993.
- [47] R. A. Neville and F. Rohrlich, Nuovo Cimento, **A1** , 625 (1971).
- [48] G. Domokos, in *Boulder Lectures*, Vol. XIV, 1971. Eds. A. O. Barut and W. E. Brittin, Boulder: Colorado University Press, 1972.
- [49] J. W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Germany, 1986.
- [50] T. Heinzl and E. Werner, Z. Phys. **C62**, 521 (1994).

7.0. Conjunto Final de Corchetes de Dirac

- [51] G. McCartor, Z. Phys. **C41**, 271 (1988).
- [52] J. W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Germany, 1986.
- [53] P. P. Srivastava, *Light front quantized field theory (an introduction): Spontaneous symmetry breaking. Phase transition in ϕ^4 theory*. Invited article for: Saga of Field CBPF-NF-075-93, Sep 1993. 31pp. Lecture at Encontro Nacional de Particulas e Campos, Caxambu, Brazil, Sep 1993. e-Print Archive: hep-th/9312064.
- P. P. Srivastava, *Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model*. Talk given at the 1st U.S.-Brazil Workshop on Topology, Geometry, and Physics, UNICAMP, Campinas, Brazil, Jul 1996. hep-th/9610149.
- P. P. Srivastava, *Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results*. Invited article for: Saga of Field Theory, From Points to Strings, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India. hep-ph/9908492.
- [54] G. McCartor, Z. Phys, **C41**, 271 (1988).
- [55] P. J. Steinhardt, Ann. Phys **128**, 425 (1980).
- [56] R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboin, Nucl. Phys. **B122**, 61 (1976).
- [57] E. Tomboulis, Phys. Rev. **D8**, 2736(1971).
- [58] F. Rohrlich, Acta Phys. Austriaca, Suppl. VIII, 277(1971).
- [59] S. B. Pereslegin and V. A. Franke, Theor. Math. Phys. **59**, 365 (1984).
- [60] R. A. Neville and F. Rohrlich, Phys. Rev. **D3**, 1692(1971).
- [61] P. A. M. Dirac, Proceeding of the Royal Society of London, **117**, 610 (1828).
- [62] W. Pauli and W. F. Weisskopf, Helvetica Physica Acta, **1**, 709 (1934).

- [63] H. Yukawa, Proc. Phys.. Math. Soc. Japan, **17**, 48 (1935).
- [64] S.H. Neddermeyer and C.D. Anderson Phys. Rev., **51**, 884 (1937).
- [65] M. Conversi, E. Pancini and O. Piccioni, Phys. Rev., **71**, 209 (1947).
C.M.G. Lattes, H. Muirhead, G.P.S. Occhialini and C.F. Powell, Nature, **59**, 694 (1947).
- [66] L. de Broglie, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, **199**, 445 (1934).
- [67] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. London, **A 166**, 127 (1938).
- [68] R.J. Duffin, Phys. Rev., **54**, 1114 (1938).
- [69] J. Géhéniau, Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect, **18**, 8 No. 1(1938).
- [70] R. A. Krajcik and M. M. Nieto, Am. J. Phys., **45**, 818 (1977).
- [71] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1956.
- [72] Hans A. Bethe and Roman Jackiw, *Intermediate Quantum Mechanics*, 3a Edi., Advanced Books Classics, Westview Press, 1997.
- [73] H. M. Pilkuhn, *Relativistica Quantum Mechanics*, Berlin, Springer (2000).
- [74] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, Berlin, Springer (2000).
- [75] Harish-Chandra, Phys. Rev., **71**, 793 (1947).
E. M. Corson, *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations*, Blackie and Son Limited, London and Glasgow, 1953.
- [76] R. A. Krajcik and N. M. Nieto, Phys. Rev. **D 10**, 4049 (1974).
- [77] I. Fijiwara, Prog. Theor. Phys, **10**, 589 (1953).
- [78] D. C. Peaslee, Prog. Theor. Phys, **6**, 639 (1951).

7.0. Conjunto Final de Corchetes de Dirac

- [79] Y. Nedjadi and R. C. Barret. *J. Phys*, **G 19**, 87, 1993.
N. Debergh, J. Ndimubandi and D. Strivay, *Z. Phys*, **C 56**, 421 (1992).
- [80] Y. Nedjadi and R. C. Barret. *J. Mhat. Phys*, **35**,4517, 1993.
- [81] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, Vol. 169, Springer, New York, 1982.
- [82] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New-York,1964.
P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950).
P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **3**, 1 (1951).
- [83] G. Petiau, *Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect.* **16** (1936).
- [84] R. Y. Duffin, *Phys. Rev.* **54**, 1114 (1938).
- [85] N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc. London*, **A 166**, 127 (1938). (1935).
- [86] L. de Broglie, *Compt. Rend.* **199**, 445 (1934).
- [87] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetski, *Quantum Electrodynamics*, 2nd ed. Inter., New Yory, 1965.
- [88] A. Wightman, *Aspects of Quantum Theory*, p. 95. Edited by A. Salam and E. P. Wigner, Cambridge, University Press (1972).
- [89] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).
- [90] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics* (Benjamin, New York, 1964).
- [91] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Texeira and J. S. Valverde, *Phys. Lett* **A268**, 165 (2000).
- [92] V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, *Phys. Lett.* **A271**, 16 (2000).
- [93] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Phys. Rev.* **D3**, 1692(1971).