

# Electrodinámica Escalar de Primer Orden en las Coordenadas de Plano Nulo

German Enrique Ramos Zambrano  
Departamento de Física  
Facultad de Ciencias Naturales y Exactas  
Universidad de Nariño  
gramos@udenar.edu.co

---

## Abstract

En este trabajo se estudiara la electrodinámica escalar ( $SQED_4$ ) y la electrodinámica escalar de primer orden en el formalismo de plano nulo. Se utilizara el formalismo de Dirac para sistemas con vínculos con el fin de realizar un análisis detallado de la estructura de vínculos en ambas teorías. Se impondrán apropiadas condiciones de de frontera en los campos para poder fijar el subconjunto oculto de vínculos de primera clase que generan transformaciones de gauge impropias y así obtener una única inversa de la matriz de vínculos de segunda clase. Finalmente, escogiendo las condiciones de gauge de plano nulo, se determinan los corchetes de Dirac asociadas a las variables dinámicas independientes.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>5</b>
<b>2. Electrodinámica Escalar <math>SQED_4</math> en las Coordenadas de Plano Nulo</b>	<b>9</b>
2.1. Estructura de vínculos de la $SQED_4$ en las Coordenadas de Plano Nulo . . . . .	9
2.2. Clasificación de los Vínculos . . . . .	14
2.3. Ecuaciones de Movimiento . . . . .	17
2.4. Eliminación de los Vínculos . . . . .	19
2.5. Inversion de Vínculos Escalares . . . . .	24
2.6. Corchetes de Dirac . . . . .	26
<b>3. Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)</b>	<b>31</b>
3.1. Introducción . . . . .	31
3.2. Ecuación de Onda Relativista DKP . . . . .	34
3.3. Propiedades de las Matrices Beta . . . . .	40
3.4. Ecuación de DKP Conjugada . . . . .	43
3.5. Covarianza de Lorentz de la Ecuación de DKP . . . . .	47
3.6. Representaciones irreducibles de la teoría DKP . . . . .	51
3.6.1. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de KGF . . . . .	52
3.6.2. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de Proca . . . . .	56
3.7. Representación de las Matrices Beta . . . . .	60
3.8. Formulación Lagrangiana de la teoría de DKP . . . . .	63
3.9. Interacción con Campo Electromagnético . . . . .	74

---

<b>4. Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) Libre en las Coordenadas de Plano Nulo</b>	<b>79</b>
4.1. Introducción . . . . .	79
4.2. Ecuación de DKP en las Coordenadas de Plano Nulo . . . . .	80
4.3. Estructura de Vínculos . . . . .	83
4.4. Ecuaciones de movimiento . . . . .	92
4.5. Corchetes de Dirac . . . . .	93
<b>5. Electrodinámica Escalar de primer Orden en las Coordenadas de Plano Nulo</b>	<b>109</b>
5.1. Introducción . . . . .	109
5.2. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en las Coordenadas de Plano Nulo . . . . .	110
5.3. Clasificación de los Vínculos . . . . .	121
5.4. Ecuaciones de Movimiento . . . . .	124
5.5. Eliminación de los Vínculos de Primera Clase . . . . .	126
5.6. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP . . . . .	129
5.7. Conjunto Final de Corchetes de Dirac . . . . .	145
<b>6. Conclusiones</b>	<b>149</b>
<b>A. Coordenadas de Plano Nulo</b>	<b>153</b>
A.1. Notación . . . . .	153
A.2. Problema de Valores Inicias Sobre el Plano Nulo . . . . .	154
Bibliografía . . . . .	160

# Capítulo 1

## Introducción

*El éxito de la ecuación de Dirac para estudiar partículas relativistas de espín  $\frac{1}{2}$  inspiró a algunos investigadores en buscar ecuaciones de onda de primer orden que describan partículas de espín 0 y espín 1. De esta manera, G. Petiau [1], R. Duffin [2], y N. Kemmer [3] propusieron una ecuación de primer orden en una formulación única que sigue las ideas propuestas por los trabajos de Broglie [4]. Ésta ecuación es conocida como ecuación de Duffin-Kemmer-Petiau o también como teoría DKP y su forma es similar a la ecuación de Dirac con la diferencia que las matrices que la definen obedecen un álgebra diferente.*

*Una característica fundamental de la teoría de DKP es que puede ser descompuesta en tres representaciones irreducibles: La representación  $5 \times 5$  esta asociada a partículas de espín 0, la representación  $10 \times 10$  correspondiente a partículas de espín 1 y una representación trivial  $1 \times 1$  la cual no tiene significado físico. Durante el periodo de 1939 hasta aproximadamente 1970 la mayoría de los trabajos acerca de la ecuación DKP fue dirigida al desarrollo del formalismo e investigación de partículas cargadas DKP en interacción con un campo electromagnético. Cálculos correspondientes a diferentes procesos basados sobre las ecuaciones de DKP y de Klein-Gordon condujeron a resultados idénticos en aproximaciones de one loop [5]. Una importante contribución para entender esas ecuaciones fue hecha por A. Wightman [6], quien mostró que cuando el campo de DKP es acoplado al campo electromagnético las ecuaciones de DKP para partículas de espín 1 es estable bajo suaves perturbaciones locales del campo*

---

externo.

La ecuación de DKP ha sido utilizada con éxito en el análisis de interacciones relativistas entre hadrones y núcleos. Esta ecuación relativista de primer orden permite describir de una manera unificada bosones de espín 0 y 1, resultando así en un mecanismo alternativo a las formulaciones convencionales de segundo orden de Klein-Gordon y Proca. Las ecuaciones de DKP se asemejan mucho a la ecuación de Dirac, no obstante las álgebras asociadas a las matrices  $\beta_\mu$  difieren substancialmente de las matrices  $\gamma_\mu$ . La equivalencia entre las ecuaciones de DKP y las ecuaciones de Klein-Gordon y Proca fue demostrada para el caso de las interacciones vectoriales mínimamente acopladas [11] aun cuando la equivalencia entre la ecuación de DKP y la ecuación de Proca ya tuvo un precedente si no se consideran corrientes parcialmente conservadas en las interacciones [12].

La gran variedad de acoplamientos incapaces de ser expresados en la formulación de Klein-Gordon y Proca garantiza mayor contenido físico para sistemas descritos a partir de la teoría de DKP. Los acoplamientos se clasifican de acuerdo al comportamiento de los mismos bajo transformaciones de Lorentz. Los acoplamientos escalares y vectoriales han sido utilizados para describir la dispersión elástica mesón-nucleón con mejores resultados experimentales comparados a aquellos obtenidos a partir del formalismos de Klein-Gordon y Proca [13].

Al investigar la equivalencia entre las teorías de DKP y su contraparte de segundo orden, algunos resultados recientes fueron adicionados como la prueba de equivalencia entre los elementos físicos de la matriz  $S$  para el campo de partículas escalares interactuando con los campos externos electromagnéticos, Yang-Mills y gravitacional [14]. La teoría de DKP mostró su equivalencia a las teorías de segundo orden cuando presentan un acoplamiento mínimo al campo electromagnético donde fueron analizados también los términos anómalos que surgen en el Hamiltoniano de la ecuación de onda acoplada [15]. La teoría de DKP relativista ha sido aplicada con éxito en la mecánica cuántica en el estudio de osciladores de bosones escalares y vectoriales [16], de osciladores en espacios no conmutativos [17], en la QCD [18], en el estudio de Hamiltoniano covariante

---

[19], en la condensación de Bose-Einstein [20], en el campo electromagnético a temperatura finita [21], etc.

A la mitad del siglo pasado, Dirac impuso dos requerimientos sobre sistemas dinámicos relativistas: relatividad espacial y que las ecuaciones de movimiento deban ser expresadas en forma Hamiltoniana. Estas condiciones no definen el sistema dinámico pero limitan las posibles formas que éste pueda tener. Una completa descripción de la dinámica implica que se especifique todas las posibles interacciones que el sistema pueda tener. La evolución de un sistema en mecánica no relativista es determinada por el Hamiltoniano: el estado del sistema en un instante  $t = cte$  permite calcular su comportamiento en un instante posterior. Dirac propuso tres diferentes formas de dinámica relativista dependiendo del tipo de superficies donde las condiciones iniciales fueran establecidas [7]. La primera forma, identificada como *frente forma*, es aquella cuando se selecciona una superficie tipo espacio y es la que frecuentemente se utiliza. La segunda, *punto forma*, es aquella consistente en considerar una rama de la superficie hiperbólica  $x^\mu x_\mu = \kappa^2$ ,  $x_0 > 0$  y finalmente, el *frente forma*, es una superficie de una onda de luz a la que comúnmente se conoce como *formalismo de plano nulo*.

En el frente forma dos puntos a tiempos iguales poseen separación tipo espacio y por tanto los campos definidos en esos puntos son cantidades independientes. Sin embargo, en el plano nulo la situación difiere porque el principio de micro-causalidad conduce a un requerimiento de localidad en las componentes transversales y de no localidad en la coordenada longitudinal [8]. Las coordenadas de plano nulo no son relacionadas por una transformación de Lorentz a las coordenadas tradicionales utilizadas en el frente forma y como tal las descripción del mismo contenido físico en una teoría dinámica sobre el plano nulo podría resultar diferente de aquella descrita en el tratamiento convencional [9].

Una importante ventaja señalada por Dirac de la formulación de plano nulo es que siete de los generadores del grupo de Poincare son cinemáticos mientras que en el tratamiento convencional solo seis tiene esta propiedad. Otra interesante característica de una teoría relativista descrita en el plano nulo es que da origen a Lagrangianos singulares, es decir, a sistemas dinámicos con vínculos

---

[10]. Esto en general conduce a una reducción en el número de operadores de campo independientes en el correspondiente espacio de fase.

La electrodinámica escalar de primer orden describe un campo de DKP en la representación  $5 \times 5$  con acoplamiento mínimo a un campo electromagnético. Dada la estructura singular de la densidad Lagrangiana que describe el campo DKP y la naturaleza gauge del campo de Maxwell, un análisis consistente de la teoría requiere un procedimiento canónico apropiado que garantice compatibilidad entre los vínculos que surgirán de la teoría y un adecuado conjunto de corchetes de Poisson. Ahora, siendo que el estudio se realizara en las coordenadas de plano nulo, se deberá construir una representación conveniente de las matrices  $\beta_\mu$  y del campo fundamental de DKP. Además, se espera que la estructura de vínculos que surgen en la teoría sea, de alguna manera, equivalentes a los resultados que ya se han derivado en las coordenadas usuales [15]. Siendo que se deben obtener un conjunto de corchetes consistente con los vínculos de primera clase, apropiadas condiciones de gauge tendrán que ser impuestas.

Neville and Rohrlich [22] observaron que la cuantización sobre el plano nulo significa cuantizar sobre las superficies características de las ecuaciones de campo clásicas, es decir, se debe especificar condiciones sobre ambas características,  $x^+ = cte$ ,  $x^- = cte$  y no solo sobre un plano nulo. Mc Cartor's [23] demostró que al cuantizar fermiones sin masa en  $(1 + 1)$  en ambas características implica que existan conmutadores a iguales  $x^+$  y  $x^-$  en la descripción Hamiltoniana y así dos parámetros de evolución temporal son necesarios lo cual dificultara determinar una única formulación Hamiltoniana. Sin embargo, Steinhardt [24] destaco un importante problema asociado al procedimiento de cuantización sobre el plano nulo. Después que la condición de gauge ha sido introducida a la teoría y los vínculos de primera clase han sido eliminados de la misma de tal manera que no existan mas transformaciones de gauge propias, surgen transformaciones de gauge impropias que son consecuencia de no definir apropiadamente las condiciones de frontera y que por ende no se pueden eliminar introduciendo condiciones de gauge adicionales ya que pueden eliminar posibles estados físicos [25]. Además, la presencia de las transformaciones de gauge impropias no permite definir coherentemente los conmutadores de la teoría.

# Capítulo 2

## Electrodinámica Escalar $SQED_4$ en las Coordenadas de Plano Nulo

*En este capítulo se estudiará la estructura de vínculos de la electrodinámica escalar  $SQED_4$  en forma detallada y las ecuaciones de movimiento de las variables dinámicas serán determinadas utilizando el Hamiltoniano extendido. Se procederá a clasificar el conjunto de vínculos y a eliminar estos imponiendo condiciones de gauge y apropiadas condiciones de frontera sobre los campos. Finalmente, se calcularán los correspondientes corchetes de Dirac entre las variables dinámicas fundamentales.*

### 2.1. Estructura de vínculos de la $SQED_4$ en las Coordenadas de Plano Nulo

*La teoría gauge que se está considerando es descrita por la siguiente densidad Lagrangiana:*

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}D_\mu\phi(D_\nu\phi)^* - m^2\phi\phi^*, \quad (2.1)$$

---

donde  $\phi$  es un campo escalar complejo de una componente,  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  denota el tensor de campo electromagnético,  $D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu$  se identifica como la derivada covariante. La densidad Lagrangiana (2.1) es invariante bajo la siguiente transformación:

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\phi \quad , \quad \phi^* \rightarrow e^{-i\alpha(x)}\phi^* \quad , \quad A_\mu \rightarrow A_\mu - \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha. \quad (2.2)$$

Las ecuaciones de campo correspondientes son:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta A_\alpha(x)} &= \partial_\mu^x F^{\mu\alpha} + j^\alpha = 0, \\ \frac{\delta L}{\delta \phi(x)} &= (D_\mu^* D^{*\mu} + m^2)\phi^* = 0, \\ \frac{\delta L}{\delta \phi^*(x)} &= (D_\mu D^\mu + m^2)\phi = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

donde  $j^\mu$  es la corriente que se expresa como:

$$j^\mu \equiv ig [\phi (D^\mu \phi)^* - \phi^* D^\mu \phi]. \quad (2.4)$$

Con el fin de calcular los momentos canónicos se re escribirá la densidad Lagrangiana (2.1) de la siguiente manera <sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + D_+\phi (D_-\phi)^* + D_-\phi (D_+\phi)^* + D_k\phi (D^k\phi)^* \\ &\quad - m^2\phi\phi^*. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ahora, de la expresión (2.5) se puede deducir que los momentos canónicos asociados a los campos  $A_\mu$ ,  $\phi$  y  $\phi^*$  son :

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ A_\mu)} = F^{\mu+}, \quad (2.6)$$

$$\pi^* \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ \phi)} = (D_-\phi)^* \quad , \quad \pi \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ \phi^*)} = D_-\phi, \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup>Para notación ver Apéndice ??

---

respectivamente. De la relación (2.6) es posible identificar la siguiente ecuación dinámica:

$$\pi^- = \partial_+ A_- - \partial_- A_+, \quad (2.8)$$

junto con un conjunto de cinco vínculos primarios identificados de la siguiente manera:

- Tres vínculos asociados al sector electromagnético:

$$C \equiv \pi^+ \approx 0 \quad , \quad \chi^k \equiv \pi^k - \partial_- A_k + \partial_k A_- \approx 0. \quad (2.9)$$

- Dos vínculos correspondientes al sector escalar:

$$\Gamma \equiv \pi - D_- \phi \approx 0 \quad , \quad \Gamma^* \equiv \pi^* - (D_- \phi)^* \approx 0. \quad (2.10)$$

Siguiendo el procedimiento de Dirac [43], es necesario calcular la consistencia de los vínculos primarios, para ello, se procede a definir la densidad Hamiltoniana canónica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= \pi^\mu \partial_+ A_\mu + \partial_+ \phi^* \pi + \pi^* \partial_+ \phi - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} (\pi^-)^2 + (\pi^- \partial_-^y + \pi^k \partial_k^y - j^+) A_+ - (D_k \phi) (D_k \phi)^* \\ &\quad + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

por consiguiente, el Hamiltoniano canónico se especifica como:

$$H_C = \int d^3 y \mathcal{H}_C \quad \therefore \quad \int d^3 y \equiv \int dy^1 dy^2 dy^- = \int d^2 y^\perp dy^-. \quad (2.12)$$

Ahora, se procede a introducir el Hamiltoniano primario  $H_P$  el cual resulta de adicionar al Hamiltoniano canónico los vínculos primarios vía multiplicadores de Lagrange,

$$H_P = H_C + \int d^3 y (u C + u_k \chi^k + v^* \Gamma + \Gamma^* v), \quad (2.13)$$

con  $u, u_k$  siendo los multiplicadores asociados a los vínculos electromagnéticos en tanto que  $v$  y  $v^*$  los respectivos multiplicadores de los vínculos escalares.

En este momento, se procede a definir los corchetes de Poisson (CP) fundamentales entre los campos de la teoría en la siguiente manera:

$$\left\{ A_\mu(x), \pi^\nu(y) \right\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \quad (2.14)$$

$$\left\{ \phi(x), \pi^*(y) \right\} = \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \phi^*(x), \pi(y) \right\} = \delta^3(x-y) \quad , \quad (2.15)$$

donde  $\delta^3(x-y) \equiv \delta(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp)$ . El procedimiento de Dirac establece que los vínculos primarios se deben preservar en el tiempo bajo la evolución generada por el Hamiltoniano primario, ésta afirmación se conoce como condición de consistencia de los vínculos. Con el fin de garantizar la consistencia de los vínculos primarios se debe requerir que ellos tengan un CP que desaparezca débilmente con  $H_P$ . Utilizando los CP (2.14) y (2.15), es posible deducir los siguientes CP entre los vínculos primarios:

$$\begin{aligned} \left\{ \Gamma(x), \Gamma^*(y) \right\} &= -2D_-^x \delta^3(x-y), \\ \left\{ \Gamma^*(x), \Gamma(y) \right\} &= -2D_-^{x*} \delta^3(x-y), \\ \left\{ \chi^k(x), \chi^l(y) \right\} &= -2\delta_l^k \partial_-^x \delta^3(x-y), \end{aligned} \quad (2.16)$$

junto con las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \left\{ j^+(x), \pi^-(y) \right\} &= 2g^2 \phi(x) \phi^*(x) \delta^3(x-y), \\ \left\{ \Gamma(x), j^+(y) \right\} &= ig \left[ \phi(y) D_-^x \delta^3(x-y) + \delta^3(x-y) D_-^y \phi(y) \right], \\ \left\{ \Gamma^*(x), j^+(y) \right\} &= -ig \left[ \delta^3(x-y) \left( D_-^y \phi(y) \right)^* + \left( \phi(y) D_-^x \right)^* \delta^3(x-y) \right], \\ \left\{ \Gamma(x), \pi^-(y) \right\} &= -ig \phi(x) \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \Gamma^*(x), \pi^-(y) \right\} = ig \phi^*(x) \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Así, se puede verificar que la consistencia del vínculo  $\Gamma$  resulta en:

$$\dot{\Gamma} = \left\{ \Gamma, H_P \right\} = -ig \left[ \phi \pi^- + 2D_- (A_+ \phi) \right] - D^k D_k \phi - m^2 \phi - 2D_- v \approx 0. \quad (2.18)$$

---

Un procedimiento similar permite mostrar que en el caso del vínculo  $\Gamma^*$  se deduce que:

$$\dot{\Gamma}^* = \left\{ \Gamma^*, H_P \right\} = ig \left[ \phi^* \pi^- + 2D_-^* (A_+ \phi^*) \right] - (D_k D^k \phi)^* - m^2 \phi^* - 2(D_- v)^* \approx 0. \quad (2.19)$$

Las expresiones (2.18) y (2.19) se interpretan como condiciones que permiten fijar el valor de los multiplicadores de Lagrange  $v$  y  $v^*$  respectivamente, como consecuencia, no existirán mas vínculos asociados al sector escalar.

Ahora, se procede a calcular la condición de consistencia asociado a los vínculos primarios del sector electromagnético. En el caso del vínculo  $\chi^k$  se determina:

$$\dot{\chi}^k = \left\{ \chi^k, H_P \right\} = \partial_k \pi^- + j^k + \partial_j F_{jk} - 2\partial_- u_k \approx 0, \quad (2.20)$$

que se entiende como una ecuación que determina  $u_k$ . Finalmente, en el caso del vínculo  $\pi^+$  resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^+(x) &= \left\{ \pi^+(x), H_P \right\} = \partial_-^x \pi^- + \partial_k^x \pi^k + j^+ \\ &\approx 0, \end{aligned}$$

que se interpreta como un vínculo secundario asociado a  $\pi^+$  y que se definirá como:

$$G \equiv \partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k + j^+ \approx 0. \quad (2.21)$$

Esta ecuación se interpreta como la ley de Gauss para la electrodinámica escalar en las coordenadas de plano nulo.

Dado la presencia del vínculo (2.21), el método de Dirac exige que se debe analizar su consistencia, para ello se utiliza las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ G(x), \Gamma(y) \right\} &= 2ig\phi(x) (\partial_-^x - igA_-) \delta^3(x-y), \\ \left\{ G(x), \Gamma^*(y) \right\} &= -2ig\phi^*(x) (\partial_-^x + igA_-) \delta^3(x-y), \\ \left\{ G(x), \chi^k(y) \right\} &= 0, \end{aligned}$$

---

lo que permite mostrar que de la consistencia de la ley de Gauss resulta en:

$$\dot{G}(x) = g \left\{ 2 \left[ g \left( \phi\phi^*\pi^- + \phi\phi^*\partial_-^x A_+ + \partial_-^x [\phi\phi^*A_+] \right) + i\phi(\partial_-^x - igA_-)v^* - i\phi^*(\partial_-^x + igA_-)v \right] + i\partial_k^x [\phi\partial_x^k\phi^* - \phi^*\partial_x^k\phi - 2igA^k\phi\phi^*] \right\}.$$

Sin embargo, es posible observar que:

$$\phi^*\dot{\Gamma} - \phi\dot{\Gamma}^* = -i \left\{ 2 \left[ g \left[ \phi\phi^*\pi^- + \partial_-^x (\phi^*A_+\phi) + \phi\phi^*(\partial_-^x A_+) \right] - i\phi^*[\partial_-^x + igA_-]v + i\phi(\partial_-^x - igA_-)v^* \right] + i\partial_k^x [\phi\partial_x^k\phi^* - \phi^*\partial_x^k\phi - 2igA^k\phi\phi^*] \right\},$$

de tal manera que:

$$\dot{G}(x) = ig \left[ \phi^*(x)\dot{\Gamma}(x) - \phi(x)\dot{\Gamma}^*(x) \right] \approx 0, \quad (2.22)$$

es decir, que ningún vínculo adicional es generado de la consistencia de la ley de Gauss ya que la expresión (2.22) indica que ésta es automáticamente conservada.

## 2.2. Clasificación de los Vínculos

Las relaciones (2.9), (2.10) y (2.21) constituyen el conjunto completo de vínculos que la teoría posee, por lo tanto, se procede a clasificarlos en vínculos de primera y segunda clase [42, 43]. Fácilmente, se puede observar que  $\pi^+$  tiene CP débilmente cero con el restante conjunto de vínculos de la teoría, entonces,  $\pi^+$  se identifica como un vínculo de primera clase. Ahora, con el fin de clasificar el restante conjunto de vínculos  $\Phi^a(x) = \{ \Gamma(x), \Gamma^*(x), G(x), \chi^k(x) \}$ , se

requiere considerar los correspondientes  $CP$  entre ellos:

$$\begin{aligned}
\left\{ \chi^k(x), \chi^l(y) \right\} &= -2\delta_l^k \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
\left\{ \Gamma(x), \Gamma^*(y) \right\} &= -2D_-^x \delta^3(x-y), \\
\left\{ \Gamma(x), G(y) \right\} &= 2ig\delta^3(x-y) D_-^x \phi(x) + 2ig\phi(x) \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
\left\{ \Gamma^*(x), G(y) \right\} &= -2ig\delta^3(x-y) (D_-^x \phi(x))^* - 2ig\phi^*(x) \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
\left\{ G(x), G(y) \right\} &= -2g^2 \left[ \delta^3(x-y) \partial_-^x (\phi(x) \phi^*(x)) + 2\phi(x) \phi^*(x) \partial_-^x \delta^3(x-y) \right].
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Las relaciones anteriores parecen indicar que el conjunto de vínculos  $\Phi^a(x)$ , aparentemente son de segunda clase. Sin embargo, al construir la matriz de vínculos asociado a  $\Phi^a$  con elementos de matriz definidos por:  $C_{ab}(x, y) = \{\Phi^a(x), \Phi^b(y)\} = \Delta_{ab}(x) \delta^3(x-y)$ , donde  $\Delta(x)$  tiene la forma:

$$\Delta(x) = \begin{pmatrix} 0 & -2(D_-^x)^* & 2ig[(D_-^x)^* \phi(x)] + 2ig\phi(x) \partial_-^x & 0 \\ -2D_-^x & 0 & -2ig[D_-^x \phi^*(x)] - 2ig\phi^*(x) \partial_-^x & 0 \\ 2ig\phi(x) D_-^x & -2ig\phi^*(x) (D_-^x)^* & F(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\delta_l^k \partial_-^x \end{pmatrix} \tag{2.24}$$

y con  $F$  es un operador que se expresa como:

$$F \equiv -2g^2 \partial_- (\phi \phi^*) - 4g^2 \phi \phi^* \partial_- . \tag{2.25}$$

se puede mostrar que  $C(x, y)$  es singular. La anterior implica que  $C(x, y)$  posee un autovalor nulo cuyo autovector asociado se puede expresar como una combinación de los vínculos  $\Phi^a(x)$  y que tiene la propiedad de ser un vínculo de primera clase. El autovector correspondiente  $U(x)$ , se calcula a partir de la siguiente ecuación de autovalores:

$$\int d^3x C(x, y) U(y) = 0. \tag{2.26}$$

---

De la expresión anterior es posible mostrar que el segundo vínculo de primera clase es de la forma:

$$\Sigma(x) = \Phi^a(x) U_a(x) = G(x) - ig \left[ \phi^*(x) \Gamma(x) - \phi(x) \Gamma^*(x) \right]. \quad (2.27)$$

Una manera alternativa de garantizar el resultado anterior es observar la ley de Gauss representada por el vínculo  $G$  que según el conjunto de CP (2.23) es de segunda clase. En el límite  $g \rightarrow 0$ , se debe recuperar la teoría de campo de Maxwell libre en la cual la ley de Gauss es estrictamente un vínculo de primera clase. Por otra parte, si  $G$  pertenece a un conjunto mínimo de vínculos de segunda clase, el límite en el que la constante de acoplamiento tiende a cero no se podría considerar naturalmente con el fin de recuperar las teorías libres debido a que los corchetes de Dirac (CD), que son necesarios construir para una teoría gauge, no estarían bien definidos. Se debe tener en cuenta que los DB asociados a la teoría están definidos en términos de una matriz no singular construida a partir del conjunto mínimo de vínculos de segunda clase y como tal, ésta resultaría singular cuando se restaure las teorías libres, es decir, cuando  $g \rightarrow 0$ . En conclusión, se deberá considerar una combinación lineal de vínculos  $\Phi^a(x) = \{ \Gamma(x), \Gamma^*(x), G(x), \chi^k(x) \}$  que resulta ser de primera clase y la cual será dada por (2.27).

Con el fin de corroborar que  $\Sigma(x)$  es un vínculo de primera clase se calcula los CP de  $\Sigma(x)$  con el restante conjunto de vínculos que la teoría tiene. Se puede verificar que:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \Gamma(y) \right\} &= -ig \Gamma(x) \delta^3(x-y) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), \Gamma^*(y) \right\} &= ig \Gamma^*(x) \delta^3(x-y) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), G(y) \right\} &= 0, \\ \left\{ \Sigma(x), \chi^k(y) \right\} &= 0, \end{aligned} \quad (2.28)$$

lo que garantiza que (2.27) es de primera clase. Es posible notar que  $\Sigma(x)$  se

---

puede expresar como:

$$\begin{aligned}\Sigma &= G - ig(\phi^*\Gamma - \phi\Gamma^*) \\ &= \partial_-\pi^- + \partial_k\pi^k - ig\left(\phi^*\pi - \phi\pi^*\right).\end{aligned}\quad (2.29)$$

Así, se concluye que los vínculos de la  $SQED_4$  en las coordenadas de plano nulo se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Vínculos de primera clase:

$$C = \pi^+ \approx 0 \quad , \quad \Sigma = \partial_-\pi^- + \partial_k\pi^k - ig\left(\phi^*\pi - \phi\pi^*\right) \approx 0. \quad (2.30)$$

- Vínculos de segunda clase:

$$\begin{aligned}\Gamma &\equiv \pi - D_-\phi \approx 0 \quad , \quad \Gamma^* \equiv \pi^* - (D_-\phi)^* \approx 0, \\ \chi^k &\equiv \pi^k - \partial_-A_k + \partial_kA_- \approx 0.\end{aligned}\quad (2.31)$$

El vínculo de primera clase  $\Sigma$ , (2.27), puede ser comparado con su equivalente en el instante forma [42] donde el segundo vínculo de primera clase, en este sistema de coordenadas, no resulta de una combinación lineal de los vínculos del sector escalar y electromagnético ya que en el análisis canónico en el instante forma el sector escalar es regular.

## 2.3. Ecuaciones de Movimiento

Ahora, se procederá a derivar las ecuaciones de movimiento que deberán ser compatibles con la completa libertad de gauge que existe en la teoría. Es así que dada la presencia del nuevo vínculo de primera clase (2.30), la evolución temporal de los campos deberá ser evaluado con el Hamiltoniano extendido,  $H_E$  [10]. Es decir, si

$$\Psi_a(x) \equiv (A_\mu(x), \pi^\mu(x), \phi(x), \phi^*(x), \pi(x), \pi^*(x))$$

denota las variables del espacio de fase de la teoría, su dinámica es determinada a partir de:

$$\dot{\Psi}_a(x) = \left\{ \Psi_a(x), H_E \right\}, \quad (2.32)$$

donde el Hamiltoniano extendido se obtiene adicionando a  $H_P$  todos los vínculos de primera clase que surgieron en el problema. Para el caso en consideración  $H_E$  toma la forma:

$$H_E = \int d^3y \left[ \frac{1}{2} (\pi^-)^2 + (\pi^- \partial_- + \pi^k \partial_k - j^+) A_+ - D_k \phi (D^k \phi)^* + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \right] \\ + \int d^3y \left[ w_1 C + u_k \chi^k + v^* \Gamma + \Gamma^* v + w_2 \Sigma \right]. \quad (2.33)$$

Las cantidades  $(v, v^*, u_k)$  son los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de segunda clase y que se pueden determinar de la consistencia de  $(\Gamma, \Gamma^*, \chi^k)$ .  $(w_1, w_2)$  son los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase y que son, en principio, indeterminados y arbitrarios.

A partir de (2.32) es posible establecer que la evolución temporal de los campos asociados al sector electromagnéticos es dada como:

$$\begin{aligned} \dot{A}_+(x) &= w_1(x), \\ \dot{A}_-(x) &= \pi^-(x) + \partial_-^x A_+(x) - \partial_-^x w_2(x), \\ \dot{A}_k(x) &= \partial_k^x A_+(x) + u_k(x) - \partial_k^x w_2(x). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Por consistencia de la segunda relación (2.33) con la ecuación de movimiento (2.8) se podría escoger  $w_2 = 0$ . En forma similar, la evolución temporal de sus momentos canónicos conjugados resulta en:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}^+(x) &= G(x) \approx 0, \\ \dot{\pi}^-(x) &= 2g^2 \phi(x) \phi^*(x) A_+(x) + \partial_k^x u_k(x) + igv^*(x) \phi(x) - ig\phi^*(x) v(x), \\ \dot{\pi}^k(x) &= ig\phi(x) \left[ \partial_x^k \phi^*(x) - igA^k(x) \phi^*(x) \right] + ig\phi^*(x) \left[ \partial_k^x \phi(x) + igA_k(x) \phi(x) \right] \\ &\quad + \partial_l^x F_{lk}(x) - \partial_-^x u_k(x). \end{aligned} \quad (2.35)$$

---

Al combinar las ecuaciones (2.34) y (2.35) se obtiene:

$$\partial_\mu^x F^{\mu\nu} + j^\nu \approx 0 \quad (2.36)$$

Un análisis similar sobre el sector escalar permite establecer que:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(x) &= v(x) + igw_2(x)\phi(x), \\ \dot{\phi}^*(x) &= v^*(x) - igw_2(x)\phi^*(x), \\ \dot{\pi}(x) &= -D_-^x D_-^x \phi(x) - igA_+(x)D_-^x \phi(x) - D_x^k D_k^x \phi(x) - m^2 \phi(x) \\ &\quad + igD_-^x [w_2(x)\phi(x)] + igw_2(x)D_-^x \phi(x), \\ \dot{\pi}^*(x) &= -(D_-^x D_-^x \phi(x))^* + igA_+(x)(D_-^x \phi(x))^* - (D_k^x D_x^k \phi(x))^* \\ &\quad - m^2 \phi^*(x) - ig(\phi(x)D_-^x)^* w_2(x) - 2igw_2(x)(D_-^x \phi(x))^* \end{aligned} \quad (2.37)$$

a partir de las cuales se puede deducir que:

$$\begin{aligned} \left( D_\mu^x D_x^\mu + m^2 \right) \phi &\approx ig\partial_-^x w_2 + 2igw_2 D_-^x \phi, \\ \left( D_\mu^{x*} D_x^{\mu*} + m^2 \right) \phi^* &\approx -ig\phi^* \partial_-^x w_2 - 2igw_2 (D_-^x \phi)^*, \end{aligned} \quad (2.38)$$

## 2.4. Eliminación de los Vínculos

El algoritmo de Dirac requiere de tantas condiciones de gauge como vínculos de primera clase surjan en la teoría. Sin embargo, tales condiciones de gauge deberán ser compatibles con las ecuaciones de movimiento y deben fijar los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase y transformarlos en vínculos de segunda clase. Una condición de gauge que satisface tales requerimientos es:

$$A_- \approx 0 \quad , \quad \pi^- + \partial_- A_+ \approx 0 \quad (2.39)$$

la cual es estándar en teorías de gauge que se describen por coordenadas de plano nulo y se conocen en la literatura como gauge de plano nulo [55, 56].

Ahora, se procede a eliminar un primer grupo de vínculos de segunda clase y para ello se aplicará el método iterativo [42]. Para cumplir con tal propósito,

se seleccionara el conjunto de vínculos de primera clase (2.30) junto con las condiciones de gauge (2.39) y se los denotará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\Phi_1 &\equiv \pi^+ & , & & \Phi_3 &\equiv A_- \\ \Phi_2 &\equiv \Sigma = G - ig(\phi^*\Gamma - \phi\Gamma^*) & , & & \Phi_4 &\equiv \pi^- + \partial_- A_+.\end{aligned}\tag{2.40}$$

Utilizando los siguientes PB no nulos entre ellos:

$$\begin{aligned}\left\{ \Phi_1(x), \Phi_4(y) \right\} &= \partial_-^x \delta^3(x-y), \\ \left\{ \Phi_2(x), \Phi_3(y) \right\} &= -\partial_-^x \delta^3(x-y), \\ \left\{ \Phi_3(x), \Phi_4(y) \right\} &= \delta^3(x-y),\end{aligned}$$

se definirá una primera matriz de vínculos de segunda clase con los siguientes elementos:  $C_{ij}(x, y) \equiv \{\Phi_i(x), \Phi_j(y)\}$ . Esta posee la siguiente representación:

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y),\tag{2.41}$$

siendo que su inversa es determinada de la solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\int d^3z C_{ik}^{-1}(x, z) C_{kj}(z, y) = \int d^3z C_{ik}(x, z) C_{kj}^{-1}(z, y) = \delta_{ij} \delta^3(x-y).\tag{2.42}$$

Sin embargo, a fin de cumplir con ésta relación se requiere definir la inversa del operador longitudinal  $\partial_-$ . En general, se sabe que:

$$(\partial_-)^{-1} f(x^-) = \frac{1}{2} \int dy^- \epsilon(x^- - y^-) f(y^-, x^+, x^\perp) + F(x^+, x^\perp),\tag{2.43}$$

donde la función  $\epsilon(x)$  es definida por,

$$\epsilon(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}\tag{2.44}$$

---

y  $F(x^+, x^\perp)$  es una función arbitraria independiente de  $x^-$ . La presencia de la función  $F$  en la expresión (2.43) es asociada con el hecho de no haber especificado las condiciones de frontera lo que podría implicar que a la matriz de vínculos (2.41) no se le pueda asociar una única inversa. Dirac mostró que la matriz formada por un conjunto completo de vínculos de segunda clase debe tener una única inversa [43], por lo que el grupo de vínculos (2.40) no es un conjunto puro de vínculos de segunda clase. La matriz inversa de (2.41) no es por tanto única porque entre los vínculos de segunda clase se encuentra un subconjunto de vínculos de primera clase ocultos [56]. La presencia de éste conjunto oculto de vínculos puede ser visualizada observando las condiciones de consistencia (2.18), (2.19) y (2.20) a las cuales se les puede asociar las siguientes soluciones a los correspondientes multiplicadores de Lagrange  $(v, v^*, u_k)$ :

$$\begin{aligned}
v(x) &= \hat{v}(x) + s(x^+, x^\perp), \\
v^*(x) &= \hat{v}^*(x) + s^*(x^+, x^\perp), \\
u_k(x) &= \hat{u}_k(x) + s_k(x^+, x^\perp),
\end{aligned} \tag{2.45}$$

donde  $s(x^+, x^\perp)$ ,  $s^*(x^+, x^\perp)$  y  $s_k(x^+, x^\perp)$  son funciones arbitrarias de  $(x^+, x^\perp)$ , en tanto que  $\hat{v}(x)$ ,  $\hat{v}^*(x)$  y  $\hat{u}_k(x)$  representan soluciones sin ambigüedades. Ahora, el Hamiltoniano extendido se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
H'_E &= \int d^3y \left[ \frac{1}{2} (\pi^-)^2 + (\pi^- \partial_- + \pi^k \partial_k - j^+) A_+ - D_k \phi (D^k \phi)^* + m^2 \phi \phi^* + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \right] \\
&\quad + \int d^3y \left[ w_1 C + \hat{u}_k \chi^k + \hat{v}^* \Gamma + \Gamma^* \hat{v} + w_2 \Sigma \right] + \int d^3y \left[ s_k \chi^k + s^* \Gamma + \Gamma^* s \right]. \tag{2.46}
\end{aligned}$$

Dirac notó que la contribución de la solución homogénea para  $v$ ,  $v^*$  y  $u_k$ , (2.45), estará siempre asociada con vínculos de primera clase, que en nuestro caso, son los vínculos ocultos de primera clase. Steinhardt [55] demostró que este subconjunto de vínculos oculto de vínculos de primera clase está asociado con transformaciones de gauge impropias [56], las cuales cambian el estado físico de un sistema y proyectan una solución de las ecuaciones de movimiento en otra solución completamente diferente. Por tanto, no es posible eliminar las transformaciones de gauge impropias por medio de condiciones de gauge ya que tal procedimiento podría excluir consideraciones físicas permitidas al sistema.

---

La manera natural de eliminar los vínculos ocultos es fijando adecuadas condiciones de frontera con el fin de que el Hamiltoniano total sea un apropiado generador de traslaciones temporales. De hecho, la invariancia de la acción por transformaciones de gauge impropias da origen a leyes de conservación no triviales que se expresan en la forma de integrales de superficie [56]. Distinto a las transformaciones de gauge usuales las cuales generan transformaciones propias, que son característica de una teoría gauge, y las cuales no cambian el estado físico del sistema. La posibilidad de realizar transformaciones de gauge propias puede siempre ser eliminada imponiendo condiciones de gauge.

Entonces, la evaluación explícita de la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase (2.41) involucra la determinación de una función arbitraria de  $(x^+, x^\perp)$  que puede ser evaluada considerando apropiadas condiciones de frontera sobre la variación en la coordenada canónica generada por el vínculo. Entonces, imponiendo las condiciones de frontera sobre los campos  $(\phi, \phi^*, A_k)$  citadas en [47] y [58], la inversa del operador  $\partial_-$  es definida sobre toda función integrable  $f(x^-)$  en la forma:

$$(\partial_-)^{-1} f(x^-) = \frac{1}{2} \int dy^- \epsilon(x^- - y^-) f(y^-), \quad (2.47)$$

la cual es menos singular que  $\frac{1}{x^-}$  y desaparece mas rápido que  $\frac{1}{x^-}$  para valores grandes de  $x^-$ . A partir de (2.47) se puede garantizar que la inversa única de la matriz de vínculos (2.41) es dada por:

$$C_{ij}^{-1}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -|x^- - y^-| & 0 & \epsilon(x^- - y^-) \\ |x^- - y^-| & 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 \\ 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 \\ \epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x^\perp - y^\perp). \quad (2.48)$$

Una manera alternativa de calcular la inversa (2.48) es usar el hecho que los DB deben satisfacer las identidades de Jacobi [59].

Utilizando la inversa de la matriz de vínculos definida por la ecuación (2.48), el primer conjunto de corchetes de Dirac (CD)  $\{\cdot, \cdot\}_{D_1}$  para dos variables dinámi-

cas  $\mathbf{A}(x)$  y  $\mathbf{B}(y)$  son calculados a partir de:

$$\left\{ \mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y) \right\}_{D_1} = \left\{ \mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}(x), \Phi_i(u) \right\} C_{ij}^{-1}(u, v) \left\{ \Phi_j(v), \mathbf{B}(y) \right\}. \quad (2.49)$$

Utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ \phi(x), \Theta_2(u) \right\} &= ig\phi(x) \delta^3(x-y), \quad \left\{ \phi^*(x), \Theta_2(u) \right\} = -ig\phi^*(x) \delta^3(x-y), \\ \left\{ \pi(x), \Theta_2(u) \right\} &= ig\delta^3(x-y) \partial_-^u \phi(u), \quad \left\{ \pi^*(x), \Theta_2(u) \right\} = -ig\delta^3(x-y) \partial_-^u \phi^*(u) \\ \left\{ \Theta_1(v), A_+(y) \right\} &= -\delta^3(x-y), \quad \left\{ A_k(x), \Theta_2(u) \right\} = -\partial_k^x \delta^3(x-u) \\ \left\{ \pi^k(x), \Theta_i(u) \right\} &= 0, \end{aligned}$$

se puede determinar que el primer conjunto de CD no nulos son:

$$\left\{ \phi(x), \pi^*(y) \right\}_{D_1} = \delta^3(x-y), \quad \left\{ \phi^*(x), \pi(y) \right\}_{D_1} = \delta^3(x-y). \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \phi(x), A_+(y) \right\}_{D_1} &= \frac{ig}{2} \phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top), \\ \left\{ \phi^*(x), A_+(y) \right\}_{D_1} &= -\frac{ig}{2} \phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top), \\ \left\{ \pi(x), A_+(y) \right\}_{D_1} &= \frac{ig}{2} |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top) \partial_-^x \phi(x), \\ \left\{ \pi^*(x), A_+(y) \right\}_{D_1} &= -\frac{ig}{2} |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top) \partial_-^x \phi^*(x). \end{aligned} \quad (2.51)$$

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_{D_1} &= \delta_k^l \delta^3(x-y), \\ \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D_1} &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top). \end{aligned} \quad (2.52)$$

La definición de los DB  $\{\cdot, \cdot\}_{D_1}$  implica que:

$$\left\{ \Psi_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} = 0,$$

---

es decir, debido a (2.49) se tiene las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \pi^+ = 0 \quad , \quad A_- = 0 \\ G - ig(\phi^* \Gamma - \phi \Gamma^*) = 0 \quad , \quad \pi^- + \partial_- A_+ = 0. \end{aligned} \quad (2.53)$$

## 2.5. Inversion de Vínculos Escalares

En este instante se procede a invertir los vínculos de segunda clase asociados al sector escalar. Para ello, sera necesario definir un segundo conjunto de CD,  $\{\cdot, \cdot\}_{D_2}$ , a partir de los vínculos:

$$\Psi_1(x) \equiv \pi(x) - \partial_-^x \phi(x) \approx 0 \quad , \quad \Psi_2 \equiv \pi^*(x) - \partial_-^x \phi^*(x) \approx 0. \quad (2.54)$$

El CD  $\{\cdot, \cdot\}_{D_2}$  para las variables  $\mathbf{A}_a(x)$  y  $\mathbf{B}_b(y)$  es definido de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} \equiv \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Psi_c(u) \right\}_{D_1} \\ D_{cd}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

donde  $D_{ab}^{-1}(x, y)$  (con  $a, b = 1, 2$ ) es la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase  $D_{ab}(x, y)$  construida a partir de (2.54) y que sus componentes se determinan por:

$$D_{ab}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_a(x), \Psi_b(y) \right\}. \quad (2.56)$$

Utilizando las siguientes relaciones:

$$\left\{ \Psi_1(x), \Psi_2(y) \right\} = -2\partial_-^x \delta^3(x - y) \quad , \quad \left\{ \Psi_2(x), \Psi_1(y) \right\} = -2\partial_-^x \delta^3(x - y),$$

se observa que  $D(x, y)$  se expresa:

$$D(x, y) = -2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \partial_-^x \delta^3 \delta^3(x - y), \quad (2.57)$$

---

siendo que su inversa es:

$$D^{-1}(x, y) = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \epsilon (x^- - y^-) \delta^2 (x^\top - y^\top). \quad (2.58)$$

Bajo la definición de los DB  $\{\cdot, \cdot\}_{D_2}$  se cumple la siguiente condición:

$$\left\{ \Psi_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} = 0,$$

es decir, debido a (2.55) los vínculos escalares se pueden considerar identidades fuertes:

$$\pi(x) - \partial_-^x \phi(x) = 0 \quad , \quad \pi^*(x) - \partial_-^x \phi^*(x) = 0, \quad (2.59)$$

de tal manera que las cuatro coordenadas asociadas a ellos,  $(\phi, \phi^*, \pi, \pi^*)$  solo dos son independientes. Aun cuando los vínculos no especifican cuales con las coordenadas independientes, existe completa libertad en la selección de los grados de libertad. La forma funcional de las relaciones (2.58) permite considerar a  $(\phi, \phi^*)$  como las coordenadas independientes que se derivan de (2.55) y por ende, los CD  $\{\cdot, \cdot\}_{D_2}$  se calcularan inicialmente en relación a éstas variables. Si existe interés de calcular los CD asociado a las variables  $(\pi, \pi^*)$  se utilizara, simplemente, las expresiones (2.58).

Ahora, deducir los CD  $\{\cdot, \cdot\}_{D_2}$  sera conveniente utilizar las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \left\{ \phi(x), \Psi_2(u) \right\}_{D_1} &= \delta^3(x - y) \quad , \quad \left\{ \Psi_1(v), \phi^*(y) \right\}_{D_1} = -\delta^3(x - y) \\ \left\{ \Psi_1(v), A_+(y) \right\}_{D_1} &= -\frac{ig}{2} \phi(v) \epsilon (v^- - y^-) \delta^2 (v^\top - y^\top), \\ \left\{ \Psi_2(v), A_+(y) \right\}_{D_1} &= \frac{ig}{2} \phi^*(v) \epsilon (v^- - y^-) \delta^2 (v^\top - y^\top), \quad (2.60) \\ \left\{ \Psi_i(v), A_k(y) \right\}_{D_1} &= 0 \quad , \quad \left\{ \Psi_i(v), \pi^k(y) \right\}_{D_1} = 0. \end{aligned}$$

A partir de (2.55) y (2.60) se puede determinar el siguiente conjunto de CD

---

$\{\cdot, \cdot\}_{D2}$  no nulos:

$$\begin{aligned}
\left\{ \phi(x), \phi^*(y) \right\}_{D2} &= -\frac{1}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top), \\
\left\{ \phi(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[ \phi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \phi(v) \right. \\
&\quad \left. \epsilon(x^- - v^-) \epsilon(v^- - y^-) \right], \\
\left\{ \phi^*(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[ \phi^*(x) |x - y| - \frac{1}{4} \int dv^- \phi^*(v) \right. \\
&\quad \left. \epsilon(x^- - y^-) \epsilon(v^- - y^-) \right],
\end{aligned} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned}
\left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_{D2} &= \delta_k^l \delta^3(x - y), \\
\left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top), \\
\left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{g^2}{16} \int d^3u d^3v \left[ \phi(u) \phi^*(v) + \phi^*(u) \phi(v) \right] \epsilon(x^- - u^-) \\
&\quad \delta^2(x^\top - u^\top) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \epsilon(v^- - y^-) \\
&\quad \delta^2(v^\top - y^\top).
\end{aligned} \tag{2.62}$$

## 2.6. Corchetes de Dirac

El espacio de fase de la  $SQED_4$  esta conformado por:  $(A_\mu, \phi, \phi^*, \pi^\mu, \pi, \pi^*)$ , es decir, un espacio de dimensión 12. Bajo la definición de los  $\{\cdot, \cdot\}_{D2}$ , las

---

siguientes identidades deben ser satisfechas:

$$\begin{aligned}
A_- &= 0, \\
\pi^- + \partial_- A_+ &= 0, \\
\pi - D_- \phi &= \pi - \partial_- \phi = 0, \\
\pi^* - (D_- \phi)^* &= \pi^* - \partial_- \phi^* = 0, \\
\pi^+ &= 0, \\
\partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k - ig \left[ \phi^* \pi - \phi \pi^* \right] &= \partial_- \pi^- + \partial_k \pi^k - ig \left[ \phi^* \partial_- \phi - \phi \partial_- \phi^* \right] = 0.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Así, la teoría hasta el momento estará constituida de 6 coordenadas independientes. De las relaciones (2.63) se deduce que el conjunto de vínculos  $\chi^k(x)$  del sector electromagnético se expresan de la siguiente forma:

$$\chi^k \equiv \pi^k - \partial_- A_k \approx 0, \tag{2.64}$$

lo que permite identificar al momento  $\pi^k(x)$  como dependiente del campo  $A_k(x)$  reduciendo la dimensión del espacio a 5. Con el fin de transformar la igualdad débil (2.64) en una identidad, definiremos una nueva matriz de vínculos de segunda clase asociada a  $\chi^k$  con elementos:

$$F^{kl}(x, y) \equiv \left\{ \chi^k(x), \chi^l(y) \right\}_{D_2} = -2\delta_l^k \partial_-^x \delta^3(x - y). \tag{2.65}$$

De manera sencilla, es posible mostrar que ésta matriz posee la siguiente inversa:

$$(F^{-1})^{kl}(x, y) = -\frac{1}{4} \delta_l^k \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\Gamma - y^\Gamma). \tag{2.66}$$

Así, el conjunto final de DB para un par de variables  $\mathbf{A}_a(x)$  y  $\mathbf{B}_a(x)$  será definido como:

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D &\equiv \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \chi^s(u) \right\}_{D_2} \\
&\quad (F^{-1})^{sn}(u, v) \left\{ \chi^n(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Utilizando la representación explícita de  $(F^{-1})^{sn}(x, y)$  dada por (2.66), los CD (2.67) se expresan:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} + \frac{1}{4} \int d^3u d^3v \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \left\{ \mathbf{A}_a(x), \chi^s(u) \right\}_{D_2} \left\{ \chi^s(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2}. \quad (2.68)$$

Utilizando las siguientes relaciones,

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), \chi^l(u) \right\}_{D_2} &= \delta_l^k \delta^3(x - u), \\ \left\{ \chi^s(v), A_+(y) \right\}_{D_2} &= -\frac{1}{2} \epsilon(v^- - y^-) \partial_s^y \delta^2(v^\top - y^\top), \\ \left\{ A_+(x), \chi^s(u) \right\}_{D_2} &= -\frac{1}{2} \epsilon(x^- - u^-) \partial_s^x \delta^2(v^\top - y^\top), \\ \left\{ \phi(x), \chi^s(u) \right\}_{D_2} &= 0, \\ \left\{ \phi^*(x), \chi^s(u) \right\}_{D_2} &= 0, \end{aligned}$$

se deriva el conjunto final de CD entre las coordenadas independientes de la teoría que consideramos como siendo:  $(\phi, \phi^*, A_+, A_k,)$  :

$$\left\{ A_k(x), A_l(y) \right\}_D = -\frac{1}{4} \delta_l^k \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp), \quad (2.69)$$

$$\left\{ \phi(x), \phi^*(y) \right\}_D = -\frac{1}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp),$$

$$\begin{aligned} \left\{ \phi(x), A_+(y) \right\}_D &= \frac{i}{2} g \phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad - \frac{i}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-), \end{aligned} \quad (2.70)$$

$$\begin{aligned} \left\{ \phi^*(x), A_+(y) \right\}_D &= -\frac{i}{2} g \phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad + \frac{i}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi^*(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (2.71)$$

---

Del principio de correspondencia se deduce los siguientes conmutadores entre los campos:

$$\left[ A_k(x), A_l(y) \right] = -\frac{i}{4} \delta_l^k \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp), \quad (2.72)$$

$$\left[ \phi(x), \phi^*(y) \right] = -\frac{i}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\perp - y^\perp),$$

$$\begin{aligned} \left[ \phi(x), A_+(y) \right] &= -\frac{1}{2} g \phi(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad + \frac{1}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-), \end{aligned} \quad (2.73)$$

$$\begin{aligned} \left[ \phi^*(x), A_+(y) \right] &= \frac{1}{2} g \phi^*(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\perp - y^\perp) \\ &\quad - \frac{1}{8} g \delta^2(x^\perp - y^\perp) \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \phi^*(x^\perp, v^-) \epsilon(v^- - y^-). \end{aligned} \quad (2.74)$$

Las primeras dos relaciones fueron derivadas por Neville y Rohrlich [60]. Ellos calcularon estas expresiones a partir de las relaciones de conmutación entre los operadores de campo libres a tiempos iguales  $x^+$ ,  $y^+$  y posteriormente obtuvieron los conmutadores sobre el plano nulo  $x^+ = y^+$ . Las relaciones de conmutación que involucra los operadores de campo  $\hat{A}_+(x)$  no fueron obtenidas por Neville y Rohrlich, sin embargo, ellos afirmaron que éstas expresiones deberían ser deducidas al resolver una serie de vínculos cuánticos. En esta parte del trabajo se obtuvieron los conmutadores entre campos independientes de la teoría los cuales fueron derivados a nivel clásico siguiendo un cuidadoso análisis de la estructura de vínculos del modelo.

Se ha mostrado que la  $SQED_4$  posee un vínculo de primera clase que resulta de una combinación lineal de vínculos y que es el autovector asociado al modo cero. De hecho, ésta cantidad es consecuencia de la existencia de vínculos asociados al sector escalar. El resultado se debe contrastar con el estudio de la teoría en las coordenadas de instante forma en los cuales el segundo vínculo de

---

primera clase es simplemente la ley de Gauss la cual depende únicamente de las variables del sector electromagnético y donde los vínculos correspondientes a la parte escalar no existen.

En ésta primera parte del trabajo se ha utilizado el gauge de plano nulo con el fin de transformar los vínculos de primera en segunda clase. Cuando apropiadas condiciones de frontera se han impuesto sobre los campos, se ha fijado el subconjunto oculto de vínculos de primera clase y se determino una única inversa correspondiente a la matriz de vínculos de segunda clase. Se dedujeron los CD de la teoría y se cuantizaron via principio de correspondencia. Las relaciones de conmutación entre los operadores de campo libre son consistentes con los resultados reportados en la literatura [60]. Los conmutadores que involucran los operadores de campo  $\hat{A}_+$  fueron calculados cuantizando los CD derivados a nivel clásico siguiendo un cuidadoso análisis de la estructura de vínculos.

# Capítulo 3

## Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

### 3.1. Introducción

En 1928 Dirac propuso una teoría destinada a describir partículas de espín  $\frac{1}{2}$  [61] la cual se caracterizaba por que la estructura fina del átomo de hidrógeno surgía naturalmente a consecuencia del estudio de la interacción de un electron con un proton bajo el dominio de un potencial coulombiano. Al analizar el limite no relativista de la ecuación de Dirac en la presencia de éste tipo de potencial se reduce a la ecuación de Schrödinger mas el término de spin-orbita. La razón de Dirac de proponer su ecuación fue resolver el problema de la densidad de probabilidad que surgía de la ecuación relativista de Klein-Gordon-Fock (KGF). Se sabe que la ecuación de KGF se obtiene de la relación energía-momento relativista:  $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ , cuando se identifica la energía  $E$  y el momento  $\mathbf{p}$  con los operadores  $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$  y  $-i\hbar\nabla$ , respectivamente, los cuales deberán actuar sobre una función de onda compleja  $\psi(\mathbf{x}, t)$  de manera que se obtiene:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2} + \nabla^2 \psi(\mathbf{x}, t) - \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (3.1)$$

---

o en forma equivalente:

$$\left( \square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.2)$$

La ecuación de KGF fue considerada inicialmente por Schrödinger para estudiar el espectro del átomo de hidrógeno mucho antes de formular su ecuación no relativista.

A partir de la función de onda  $\psi(\mathbf{x}, t)$  se puede construir la densidad de probabilidad  $\rho(\mathbf{x}, t)$ , donde su importancia radica en el hecho que  $\rho(\mathbf{x}, t) d^3x$  se interpreta como la probabilidad de encontrar la partícula en un elemento de volumen  $d^3x$  y por lo tanto la cantidad  $\rho(\mathbf{x}, t)$  debe ser positiva definida. En el caso de la ecuación de KGF se puede mostrar que la densidad de probabilidad es dada por:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[ \psi^*(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \psi(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \psi^*(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right], \quad (3.3)$$

la cual no es definida positiva y por lo tanto no puede ser considerada como una densidad de probabilidad. Fue hasta 1934 cuando Pauli y Weisskopf interpretaron la densidad de probabilidad (3.3) como una densidad de carga [62].

La propuesta de Dirac de una teoría cuántica para el electron que condujera a una densidad de probabilidad definida positiva se enfocó en buscar una ecuación relativista de primer orden en la deriva temporal y mostró que ésta debería ser una ecuación matricial de la siguiente forma:

$$\left( i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (3.4)$$

donde las matrices  $\gamma^\mu$  deberán obedecer la siguiente álgebra:

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

A partir de (3.4) se puede mostrar que la correspondiente densidad de probabilidad es de la forma:

$$\rho(x) = \psi^\dagger \psi, \quad (3.6)$$

---

la cual es definida positiva.

El esfuerzo realizado por Yukawa en 1935 para explicar algunas características de las fuerzas nucleares [63] permitió que los físicos trataran con nuevas partículas, diferentes de aquellas conocidas de espín  $\frac{1}{2}$  tales como el protón, neutrón, electrón y positrón. Sus estudios mostraron que la interacción de corto alcance entre dos nucleones es mediada por un bosón con una masa intermedia entre la del protón y la del electrón que denominaron mesón. Fue mostrado que una partícula de éste tipo estaba presente en rayos cósmicos [64], no obstante, se espero diez años para confirmar que dicho mesón era diferente de aquel propuesto por Yukawa [65]. Sin embargo, el éxito de la teoría de Yukawa y la observación en rayos cósmicos de los mesones incentivo la búsqueda de una ecuación que posiblemente describiera éstas partículas. En la época no se había encontrado evidencia experimental contundente acerca del espín de los mesones cargados y neutros, que según la teoría de Yukawa podría ser 0 ó 1.

Después del éxito de la teoría de Dirac, de Broglie propuso que un fotón podría estar conformado por la combinación de dos leptones, un hecho podría explicar la masa del mismo [66]. Fue así que de Broglie busco una ecuación de primer orden que pudiera describir su fotón masivo. En forma simultanea, Kemmer estudiaba las ecuaciones segundo orden de Proca y pudo observar que ellas podrían ser escritas como un conjunto de ecuaciones de primer orden [67], las cuales escribió junto con las correspondientes ecuaciones para el caso de espín 0. Kemmer se dio cuenta que tales ecuaciones se podrían escribir en las formas matriciales de  $10 \times 10$  y  $5 \times 5$  de manera que ellas logren describir las representaciones irreducibles de espín 1 y espín 0 respectivamente, sin embargo, Kemmer no consiguió determinar el álgebra que tales matrices deben satisfacer. Fue entonces cuando Petiau, un matemático y estudiante de de Broglie, mostró en 1936 el álgebra de las correspondientes matrices y que su estructura debería ser  $16 \times 16$  [68].

No obstante, el trabajo de Petiau permaneció prácticamente desconocido por muchos años, sucediendo lo mismo con un estudio de J. Géhéniau [69], quien

---

dos años después, descompuso tal álgebra en las representaciones: diez, cinco y unidimensional o trivial. Después de conocer el trabajo de Duffin, Kemmer unifico toda la información que se disponía y formulo un abordaje de primer orden [70]. El propósito principal de Kemmer fue la de reformular la ecuación de Proca a fin de obtener ecuaciones de onda de primer orden sin usar una forma tensorial. La teoría desarrollada estaba en estrecha correspondencia con la teoría del electron de Dirac. La ecuación derivada por Kemmer tenía la forma:

$$\left( i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (3.7)$$

donde las matrices  $\beta^\mu$  deben satisfacer la siguiente álgebra:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu. \quad (3.8)$$

Las matrices  $\beta^\mu$  tienen dimensión 16 y constituyen una representación reducible del álgebra (3.8). Ésta álgebra solo admite tres representaciones irreducibles: una representación irreducible en 10 dimensiones, de 5 y una trivial de dimensión 1. El objeto  $\psi(x)$  es una función de onda multicomponente: para partículas de espín 1 se expresa como una función de onda de 10 componentes y conduce a la teoría usual basada en la ecuación de Proca, en la cual la función de onda consiste de cuatro componentes formando un cuadri-vector y seis constituyendo un tensor antisimétrico. La función de onda de 5 componentes está asociada a partículas de espín 0 y conduce a la teoría de KGF o llamada también escalar. La función de onda esta constituida de una componente que es un escalar en tanto que las otras cuatro corresponden a su cuadri-gradiente.

## 3.2. Ecuación de Onda Relativista DKP

La ecuación de onda de la mecánica cuántica no relativista no resulta ser invariante de Lorentz por que las derivadas espaciales y temporal no aparecen en ella de forma simétrica. De hecho, la energía que describe una partícula no

---

relativista es  $E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}$  que a nivel cuántico es interpretada por los operadores:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla. \quad (3.9)$$

Se esperaría que la relación (3.9) se podría utilizar para derivar una ecuación de onda relativista de la relación:  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$  lo que resulta en la ecuación de KGF (3.2). Por ésta razón, se asume que los campos de una teoría cuántica deben satisfacer la condición de KGF la cual se interpreta de la siguiente manera: Los campos  $Q_\alpha(x)$  correspondientes a partículas elementales libres deben satisfacer la ecuación:

$$\left( \square + m^2 \right) Q_\alpha(x) = 0. \quad (3.10)$$

Ahora, si las componentes de los campos  $Q_\alpha(x)$  corresponden a un conjunto de partículas con masa  $(m_1, m_2, \dots, m_n)$  la ecuación (3.10) se expresa:

$$\prod_{\alpha=1}^n \left( \square + m_\alpha^2 \right) Q_\alpha(x) = 0. \quad (3.11)$$

Es bien conocido que ecuaciones de algún orden pueden ser transformadas en un sistema de ecuaciones de primer orden al incrementar el número de variables, donde éste nuevo conjunto tiene un importante significado físico. Un ejemplo es el caso de un campo escalar  $\varphi(x)$  el cual satisface una ecuación de campo tipo (3.10), es decir:

$$\left( \square + m^2 \right) \varphi(x) = 0. \quad (3.12)$$

Es posible convertir (3.12) un ecuación de primer orden al re escribirla de la siguiente forma:

$$\eta^{\mu\nu} \partial_\mu \left[ \frac{1}{m} \partial_\nu \varphi(x) \right] + m \varphi(x) = 0. \quad (3.13)$$

Si se define:

$$\varphi_\nu(x) \equiv \frac{1}{m} \partial_\nu \varphi(x), \quad (3.14)$$

la ecuación (3.13) se expresa como:

$$\partial^\nu \varphi_\nu(x) + m \varphi(x) = 0. \quad (3.15)$$

---

De esta manera, al adicionar al campo original  $\varphi(x)$  el cuadri vector  $\varphi_\nu(x)$ , se puede definir un campo que posee cinco componentes  $(\varphi(x), \varphi_\nu(x))$ , las cuales satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\varphi_\nu(x) \equiv \frac{1}{m} \partial_\nu \varphi(x) \quad , \quad \partial^\nu \varphi_\nu(x) + m\varphi(x) = 0. \quad (3.16)$$

Así, la ecuación diferencial de segundo orden (3.12) se ha reducido a un sistema de ecuaciones de primer orden (3.16) al incrementar el número de variables:  $(\varphi(x), \varphi_\nu(x))$ .

En general, una ecuación de onda relativista para la función de onda  $Q_\alpha(x)$  con  $\alpha = 1, 2, \dots, n$  es de la forma:

$$\Delta_\mu^\nu(\partial) Q_\nu(x) = 0. \quad (3.17)$$

La condición de KGF limita la ecuación de onda ya que ésta requiere que exista un operador diferencial  $D_\nu^\sigma(\partial)$  que garantice que se cumpla la mencionada condición, es decir:

$$D_\nu^\sigma(\partial) \Delta_\mu^\nu(\partial) = \left( \square + m^2 \right) \delta_\mu^\sigma. \quad (3.18)$$

En general, el operador  $D_\nu^\sigma(\partial)$  tiene la siguiente forma:

$$D(\partial) \equiv [D_\nu^\sigma(\partial)] = \alpha + \alpha^{\mu_1} \partial_{\mu_1} + \alpha^{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} + \alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} \\ + \dots + \alpha^{\mu_1 \dots \mu_l} \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_l} + \dots, \quad (3.19)$$

donde los coeficientes  $\alpha^{\mu_1 \dots \mu_l}$  son matrices de dimension  $n$ . Si se denota el orden mas alto de diferenciación del operador (3.19) por  $b$ , se debe cumplir que

$$\alpha^{\mu_1 \dots \mu_l} = 0 \quad \text{para} \quad l > b. \quad (3.20)$$

La matriz  $\Delta_\mu^\nu(\partial)$  es de primer orden en el operador  $\partial$  y es, por lo general, de la forma:

$$\Delta(\partial) \equiv [\Delta_\mu^\nu(\partial)] = i\rho^\mu \partial_\mu - m\beta, \quad (3.21)$$

---

donde  $\rho^\mu$  y  $\beta$  son matrices de dimensión  $n$ . El parámetro  $m$  es una constante y la función de onda  $Q_\alpha(x)$  se representa como una matriz columna. A partir de las relaciones (3.18), (3.19) y (3.21), es posible observar que:

$$\square + m^2 = \left( \alpha + \alpha^{\mu_1} \partial_{\mu_1} + \alpha^{\mu_1 \mu_2} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} + \alpha^{\mu_1 \mu_2 \mu_3} \partial_{\mu_1} \partial_{\mu_2} \partial_{\mu_3} + \dots \right) \left( i \rho^\mu \partial_\mu - m \beta \right)$$

Al igualar potencias del mismo orden diferencial en la relación anterior, se debe cumplir:

$$m = -\alpha \beta. \quad (3.22)$$

lo cual se garantiza si:

$$\alpha = -m \beta^{-1}, \quad (3.23)$$

es decir, exigiendo que la matriz  $\beta$  tenga inversa. De esta manera, la ecuación (3.17) se puede expresar en la forma:

$$\beta^{-1} \Delta_\mu^\nu (\partial) Q_\nu(x) = \left( i \beta^{-1} \rho^\mu \partial_\mu - m \right) Q_\nu(x) = 0. \quad (3.24)$$

Definiendo

$$\beta^\mu \equiv \beta^{-1} \rho^\mu, \quad (3.25)$$

la relación (3.24) se escribe:

$$\left( i \beta^\mu \partial_\mu - m \right) Q_\nu(x) = 0, \quad (3.26)$$

la cual es equivalente a (3.17).

Consideremos como un caso particular la siguiente forma para el operador  $D(\partial)$ :

$$D(\partial) = \alpha + \alpha^\mu \partial_\mu. \quad (3.27)$$

Se puede mostrar que

$$\begin{aligned} \square + m^2 &= \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 = \left( \alpha + \alpha^\mu \partial_\mu \right) \left( i \beta^\nu \partial_\nu - m \right) \\ &= -m\alpha + \left( i\alpha\beta^\mu - m\alpha^\mu \right) \partial_\mu + \alpha^\mu \beta^\nu \partial_\mu \partial_\nu \\ &= -m\alpha + \left( i\alpha\beta^\mu - m\alpha^\mu \right) \partial_\mu + \frac{i}{2} \left( \alpha^\mu \beta^\nu + \alpha^\nu \beta^\mu \right) \partial_\mu \partial_\nu, \end{aligned}$$

---

Al igualar potencias del mismo orden diferencial se determina que:

$$\begin{aligned} m^2 &= -m\alpha, \\ 0 &= i\alpha\beta^\mu - m\alpha^\mu, \\ \eta^{\mu\nu} &= \frac{i}{2} \left( \alpha^\mu\beta^\nu + \alpha^\nu\beta^\mu \right), \end{aligned}$$

resultando en:

$$\begin{aligned} \alpha &= -m, \\ \alpha^\mu &= -i\beta^\mu, \\ \eta^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \left( \beta^\mu\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\mu \right), \end{aligned}$$

siendo que la última relación se puede escribir como:

$$\beta^\mu\beta^\nu + \beta^\nu\beta^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (3.28)$$

El número  $b$  que aparece en la expresión (3.20) se puede expresar como siendo:

$$b = 2f, \quad (3.29)$$

donde  $f$  es el máximo valor del espín del campo descrito por  $Q_\nu(x)$  [71].

Ahora, se procede a determinar la estructura de la matrices  $\beta^\mu$  que son de orden  $n \times n$ . Para  $n = 2$  se podría considerar a las matrices de Pauli  $\sigma_k$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) junto con la identidad  $I$  como una base que satisfacen:

$$\left\{ \sigma_k, \sigma_j \right\} = 2\delta_{kj} \quad , \quad \left\{ \sigma_k, I \right\} = 0. \quad (3.30)$$

No obstante, éstas relaciones indican que las matrices  $(\sigma_k, I)$  no obedecen el álgebra (3.28) de manera que no pueden ser identificadas con las matrices  $\beta^\mu$ . Entonces, se procede a considerar la siguiente dimensión,  $n = 4$  [72]. Para éste caso, las matrices asociadas son las de Dirac, que se denotan como  $\gamma^\mu$  y satisfacen (3.28). Por tanto, pueden ser identificadas con las matrices  $\beta^\mu$ , es decir,  $\beta^\mu \rightarrow \gamma^\mu$ , con lo cual la ecuación (3.26) correspondiente se escribe:

$$\left( i\gamma^\mu\partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (3.31)$$

donde  $\gamma^\mu$  satisfacen el álgebra

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}. \quad (3.32)$$

La relación (3.31) se conoce como ecuación de Dirac, la cual describe partículas de masa  $m$ . La interpretación anterior es resultado apenas de una correspondencia ya que la caracterización del campo  $\psi(x)$  como un espinor es consecuencia del estudio de las matrices  $\gamma^\mu$  y de su comportamiento bajo transformaciones de Lorentz.

A partir de (3.32), es posible mostrar que:

$$\left( i\gamma^\mu \partial_\mu + m \right) \left( i\gamma^\nu \partial_\nu - m \right) \psi(x) = \left( \square + m^2 \right) \psi(x) = 0, \quad (3.33)$$

es decir, cada componente del campo  $\psi(x)$  satisface la condición de KGF. Cualquier función de las matrices de Dirac puede ser escrita como una combinación lineal de 16 matrices  $\gamma^A$ , donde  $A = 1, 2, \dots, 16$  definidas de la siguiente manera:

$$\gamma^A = \begin{cases} I & \rightarrow 1 \\ \gamma^\mu & \rightarrow 4 \\ \gamma^\mu \gamma^5 & \rightarrow 4 \\ \gamma^5 & \rightarrow 1 \\ \Sigma^{\mu\nu} & \rightarrow 6 \end{cases},$$

donde

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4, \quad \Sigma^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu).$$

Además se puede mostrar que las matrices  $\gamma^A$  satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} (\gamma^A)^2 &= I, \\ Tr \gamma^A &= 0, & \gamma^A &\neq I, \\ Tr (\gamma^A \gamma^B) &= 0, & A &\neq B. \end{aligned}$$

Las matrices  $\gamma^A$  son linealmente independientes y por tanto constituyen una base por lo que cualquier matriz  $4 \times 4$  se puede descomponer en términos de  $\gamma^A$ .

---

Ahora, analicemos el caso cuando el operador  $D(\partial)$  es de segundo orden, es decir:

$$D(\partial) = \alpha + \alpha^\mu \partial_\mu + \alpha^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu. \quad (3.34)$$

La ecuación (3.18) implica que:

$$\begin{aligned} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 &= \left( \alpha + \alpha^\mu \partial_\mu + \alpha^{\mu\sigma} \partial_\mu \partial_\sigma \right) \left( i\beta^\nu \partial_\nu - m \right) \\ &= -m\alpha + \left( i\alpha\beta^\mu - m\alpha^\mu \right) \partial_\mu + \left[ \frac{i}{2} \left( \alpha^\mu \beta^\nu + \alpha^\nu \beta^\mu \right) - m\alpha^{\mu\nu} \right] \partial_\mu \partial_\nu \\ &\quad + i \sum_P (\alpha^{\mu\sigma} \beta^\nu) \partial_\mu \partial_\sigma \partial_\nu, \end{aligned}$$

siendo que  $\sum_P$  indica una suma sobre todas las permutaciones posibles de los índices  $(\mu\sigma\nu)$  debido a la simetría del tensor  $\partial_\mu \partial_\sigma \partial_\nu$ . La identidad se satisface si las siguientes condiciones se cumplen:

$$\begin{aligned} m &= -\alpha, \\ \alpha^\mu &= -i\beta^\mu, \\ \alpha^{\mu\sigma} &= \frac{1}{m} \left[ \frac{1}{2} \left( \beta^\mu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\mu \right) - \eta^{\mu\sigma} \right], \\ 0 &= \sum_P \left[ \frac{1}{2} \left( \beta^\mu \beta^\sigma \beta^\nu + \beta^\sigma \beta^\mu \beta^\nu \right) - \eta^{\mu\sigma} \beta^\nu \right]. \end{aligned}$$

La última relación conduce a la siguiente álgebra:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu. \quad (3.35)$$

### 3.3. Propiedades de las Matrices Beta

Un análisis de las propiedades de los campos escalares masivos y de los campos vectoriales masivos se puede dar a partir de una ecuación de primer orden. Lo anterior es posible si se aumenta el número de variables como ocurrió con el ejemplo que dio origen a la ecuación (3.15). La ecuación que se desea

---

considerar es proporcionada por el formalismos de primer orden de DKP que describe este tipo de partículas y que se expresa como:

$$\left( i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (3.36)$$

donde las matrices  $\beta^\mu$  satisfacen:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\sigma + \beta^\sigma \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\nu} \beta^\mu. \quad (3.37)$$

Esta álgebra admite tres representaciones irreducibles: 10 dimensiones representando partículas de espín 1; 5 dimensiones representando partículas de espín 0 y 1 dimensión que es una representación trivial sin significado físico. La evidencia de los valores de espín se dará por el hecho de que la función de onda multicomponente  $\psi(x)$  en el caso de espín 0 tendrá 5 componentes, en tanto que en el caso de espín 1 estará constituida de 10 componentes.

Apartir de la relación (3.37) se puede deducir una serie de propiedades útiles de las matrices  $\beta^\mu$ . Si  $\mu = \nu = \sigma$  se obtiene:

$$(\beta^\mu)^3 = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \quad (3.38)$$

donde se entiende que no se suma sobre el índice  $\mu$ . Otro conjunto de matrices que complementan a las  $\beta^\mu$  son:

$$\bar{\eta}^\mu = 2(\beta^\mu)^2 - \eta^{\mu\mu}, \quad (3.39)$$

las cuales, a partir de (3.38), satisfacen la siguiente propiedad:

$$(\bar{\eta}^\mu)^2 = \underbrace{4(\beta^\mu)^4}_{4\eta^{\mu\mu}(\beta^\mu)^2} - 4\eta^{\mu\mu}(\beta^\mu)^2 + (\eta^{\mu\mu})^2 = (\eta^{\mu\mu})^2 = 1. \quad (3.40)$$

Una relación de anticonmutación entre  $\beta^\mu$  y  $\bar{\eta}^\mu$  es satisfecha la cual se deriva de la siguiente manera: Al multiplicar (3.39) por  $\beta^\sigma$  por la derecha se obtiene:

$$\bar{\eta}^\mu \beta^\sigma = 2(\beta^\mu)^2 \beta^\sigma - \eta^{\mu\mu} \beta^\sigma, \quad (3.41)$$

---

Si  $\mu = \nu$  en (3.37) resulta en:

$$(\beta^\mu)^2 \beta^\sigma + \beta^\sigma (\beta^\mu)^2 = \eta^{\mu\mu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\mu} \beta^\mu, \quad (3.42)$$

así que:

$$(\beta^\mu)^2 \beta^\sigma = \eta^{\mu\mu} \beta^\sigma + \eta^{\sigma\mu} \beta^\mu - \beta^\sigma (\beta^\mu)^2.$$

Substituyendo la anterior relación en (3.41) se obtiene

$$\bar{\eta}^\mu \beta^\sigma = 2\eta^{\sigma\mu} \beta^\mu - \beta^\sigma \bar{\eta}^\mu,$$

Entonces:

$$\bar{\eta}^\mu \beta^\sigma + \beta^\sigma \bar{\eta}^\mu = \left\{ \bar{\eta}^\mu, \beta^\sigma \right\} = 2\eta^{\sigma\mu} \beta^\mu, \quad (3.43)$$

a partir de la cual se deduce:

$$\begin{aligned} \text{si } \sigma &\neq \mu & \left\{ \bar{\eta}^\mu, \beta^\sigma \right\} &= 0, \\ \text{si } \sigma &= \mu & \bar{\eta}^\mu \beta^\mu &= \eta^{\mu\mu} \beta^\mu. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Ahora, una relación de conmutación entre las matrices  $\beta^\mu$  y  $\bar{\eta}^\mu$  se deriva multiplicando (3.39) por  $\beta^\mu$  tanto por la izquierda como por la derecha de manera que:

$$\begin{aligned} \beta^\mu \bar{\eta}^\mu &= \underbrace{2(\beta^\mu)^3}_{\eta^{\mu\mu} \beta^\mu} - \eta^{\mu\mu} \beta^\mu = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \\ \bar{\eta}^\mu \beta^\mu &= 2(\beta^\mu)^3 - \eta^{\mu\mu} \beta^\mu = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \end{aligned} \quad (3.45)$$

siendo que se ha utilizado (3.38). Restando las ecuaciones se obtiene que:

$$\beta^\mu \bar{\eta}^\mu - \bar{\eta}^\mu \beta^\mu = \left[ \beta^\mu, \bar{\eta}^\mu \right] = 0. \quad (3.46)$$

En el caso de las matrices  $\bar{\eta}^\mu$  se puede mostrar a partir de (??):

$$\bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu = 4\eta^{\mu\nu} \left[ \beta^\mu, \beta^\nu \right] + \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\mu,$$

---

de manera que

$$\left[ \bar{\eta}^\mu, \bar{\eta}^\nu \right] = 4\eta^{\mu\nu} \left[ \beta^\mu, \beta^\nu \right]. \quad (3.47)$$

De (3.47) se puede deducir en el caso  $\mu \neq \nu$ ,

$$\left[ \bar{\eta}^\mu, \bar{\eta}^\nu \right] = 0. \quad (3.48)$$

Otra relación útil que se puede derivar resulta de (3.37) cuando  $\sigma = \mu$ ,

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu + \beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\mu + \eta^{\mu\nu} \beta^\mu,$$

por tanto:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\mu. \quad (3.49)$$

### 3.4. Ecuación de DKP Conjugada

Si se escoge una representación para las matrices  $\beta$  tal que:

$$(\beta^\mu)^\dagger = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \quad (3.50)$$

se garantiza que

$$\begin{aligned} (\bar{\eta}^\mu)^\dagger &= \left( 2(\beta^\mu)^2 - \eta^{\mu\mu} \right)^\dagger = 2 \left( (\beta^\mu)^\dagger \right)^2 - \eta^{\mu\mu} \\ &= 2(\eta^{\mu\mu} \beta^\mu)^2 - \eta^{\mu\mu} = 2(\beta^\mu)^2 - \eta^{\mu\mu} \\ &= \bar{\eta}^\mu, \end{aligned} \quad (3.51)$$

es decir, las matrices  $\bar{\eta}^\mu$  resultan ser hermíticas. Ahora, se pretende buscar una matriz  $C$  que al actuar sobre  $\beta$  proporcione su conjugado hermítico, tal que cumpla las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} C\beta^\mu C &= (\beta^\mu)^\dagger, \\ C^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.52)$$

---

Combinando (3.52) con (3.50) se obtiene:

$$C\beta^\mu C = \eta^{\mu\mu}\beta^\mu. \quad (3.53)$$

Si se multiplica (3.53) por la matriz  $C$  tanto por la derecha como la izquierda resulta:

$$C\beta^\mu = \eta^{\mu\mu}\beta^\mu C \quad , \quad \beta^\mu C = \eta^{\mu\mu}C\beta^\mu.$$

Combinando estas ecuaciones se deduce:

$$\left[ C, \beta^\mu \right] = \eta^{\mu\mu} \left[ \beta^\mu, C \right] = -\eta^{\mu\mu} \left[ C, \beta^\mu \right]$$

es decir:

$$(1 + \eta^{\mu\mu}) \left[ C, \beta^\mu \right] = 0. \quad (3.54)$$

De (3.54) se puede deducir que: si  $\mu = 0$ , la igualdad se cumple cuando  $\left[ C, \beta^0 \right] = 0$ , sin embargo, en el caso en que  $\mu = i$ , la cantidad  $\left[ C, \beta^i \right]$  mantiene indeterminada. Por tanto, con el fin de garantizar que (3.54) se cumpla para todo  $\mu$  se debe exigir que:

$$\left[ C, \beta^\mu \right] = 0. \quad (3.55)$$

De (3.45), (3.52) y (3.53) se infiere que,

$$C\beta^\mu C = \eta^{\mu\mu}\beta^\mu = \beta^\mu\bar{\eta}^\mu,$$

por lo tanto

$$C\beta^\mu = \beta^\mu\bar{\eta}^\mu C,$$

e igualmente

$$\beta^\mu C = C\beta^\mu\bar{\eta}^\mu.$$

Al restar los dos últimas expresiones resulta:

$$\left[ C, \beta^\mu \right] = \left[ \beta^\mu\bar{\eta}^\mu, C \right] = \beta^\mu \left[ \bar{\eta}^\mu, C \right] + \left[ \beta^\mu, C \right] \bar{\eta}^\mu.$$

Como  $\left[ C, \beta^\mu \right] = 0$ , se debe cumplir:

$$0 = \beta^\mu \left[ \bar{\eta}^\mu, C \right], \quad (3.56)$$

---

con lo cual si (3.56) se debe satisfacer para todo  $\beta^\mu$ , se establece que:

$$\left[ C, \bar{\eta}^\mu \right] = 0. \quad (3.57)$$

Siendo que  $[\bar{\eta}^\mu, \bar{\eta}^\nu] = 0$ , se puede elegir  $C$  tal que:

$$C \equiv A_\mu \bar{\eta}^\mu,$$

sin embargo, dado que el cuadrado de éste matriz deberá ser la identidad, podremos restringir la forma de ésta matriz tal que:

$$C^2 = A_\mu \bar{\eta}^\mu A_\nu \bar{\eta}^\nu = \sum_a A_a A_a \bar{\eta}^a \bar{\eta}^a + \sum_{a \neq b} A_a \bar{\eta}^a A_b \bar{\eta}^b = \sum_a A_a A_a + \sum_{a \neq b} A_a \bar{\eta}^a A_b \bar{\eta}^b.$$

La forma mas simple de satisfacer esta restricción es si todos los coeficientes  $A_a$  son nulos con excepción de uno en particular, que podríamos denotar por  $e$ . No obstante, la condición  $C^2 = 1$ , nos hace seleccionar el valor  $e = 1$ . Con lo cual se establece que  $C \equiv \bar{\eta}^\mu$ , que garantiza  $C^2 = (\bar{\eta}^\mu)^2 = 1$ . Utilizando éste resultado en la expresión (3.53) junto con (3.46) se deduce:

$$\eta^{\mu\mu} \beta^\mu = \bar{\eta}^\mu \beta^\mu \bar{\eta}^\mu = \beta^\mu (\bar{\eta}^\mu)^2 = \beta^\mu,$$

es decir:

$$(1 - \eta^{\mu\mu}) \beta^\mu = 0. \quad (3.58)$$

Si la expresión anterior se cumple para todo  $\beta^\mu$  se debe garantizar que  $\eta^{\mu\mu} = 1$ , lo que implica que la única solución posible de ésta ecuación es cuando  $\mu = 0$ , así, se concluye que  $C = \bar{\eta}^0$  y de (3.52) sigue,

$$(\beta^\mu)^\dagger = \bar{\eta}^0 \beta^\mu \bar{\eta}^0 = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu. \quad (3.59)$$

Por tanto, la matriz responsable de la conjugación hermítica de las matrices  $\beta^\mu$  es  $\bar{\eta}^0$ , con lo cual se puede concluir que  $\beta^0$  es hermítica en tanto que  $\beta^i$  son anti-hermíticas.

Si la operación de adjunto hermitiano es aplicada a la ecuación de DKP (3.36) se obtiene:

$$\psi^\dagger(x) \left( -i(\beta^\mu)^\dagger \partial_\mu - m \right) = -\psi^\dagger(x) \left( i\bar{\eta}^0 \beta^\mu \bar{\eta}^0 \partial_\mu + m \right) = 0.$$

---

Multiplicando la expresión anterior por  $\bar{\eta}^0$  por la derecha,

$$\psi^\dagger(x) \left( i\bar{\eta}^0 \beta^\mu \bar{\eta}^0 \bar{\eta}^0 \partial_\mu + m\bar{\eta}^0 \right) = \psi^\dagger(x) \bar{\eta}^0 \left( i\beta^\mu \partial_\mu + m \right) = 0.$$

Definiendo el campo conjugado a  $\psi(x)$  como siendo,

$$\bar{\psi}(x) \equiv \psi^\dagger(x) \bar{\eta}^0, \quad (3.60)$$

la ecuación de DKP conjugada se define por:

$$\bar{\psi}(x) \left( i\beta^\mu \partial_\mu + m \right) = 0. \quad (3.61)$$

Ahora, se procederá a derivar la correspondiente ecuación de continuidad asociada a la teoría. Multiplicando (3.36) por  $\bar{\psi}(x)$  por la izquierda en tanto que a la ecuación (3.61) se la multiplica por  $\psi(x)$  por la derecha, se deduce:

$$i\bar{\psi}\beta^\mu (\partial_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi = 0 \quad , \quad i(\partial_\mu\bar{\psi})\beta^\mu\psi + m\bar{\psi}\psi = 0.$$

Al sumar resulta:

$$i\bar{\psi}\beta^\mu (\partial_\mu\psi) + i(\partial_\mu\bar{\psi})\beta^\mu\psi = i\partial_\mu(\bar{\psi}\beta^\mu\psi) = 0. \quad (3.62)$$

Si se define la densidad de corriente como siendo:

$$J^\mu = \frac{1}{2}\bar{\psi}\beta^\mu\psi, \quad (3.63)$$

la ecuación de continuidad se expresa:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (3.64)$$

El factor  $\frac{1}{2}$  en (3.63) se introduce con el fin de obtener una densidad de corriente similar a aquella que resulta en la ecuación de Klein-Gordon-Fock y su límite no relativista [73]. No obstante, la componente temporal de la corriente,  $J^0$ , no es definida positiva lo que implica que ésta cantidad no puede ser interpretada como una densidad de probabilidad. Aún, es posible interpretar a  $J^0$  como una densidad de carga. Ésta carga no necesariamente debe ser considerada como una carga eléctrica, mas como una carga generalizada que resulta de la simetría asociada al sistema.

---

### 3.5. Covarianza de Lorentz de la Ecuación de DKP

Las transformaciones de Lorentz son definidas como:

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad (3.65)$$

donde  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  debe cumplir la condición:

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} \Lambda^{\alpha}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}. \quad (3.66)$$

El operador  $\partial_{\mu}$  se comporta como un vector covariante:

$$\partial'_{\mu} = \Lambda^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu}, \quad (3.67)$$

con lo cual si la ecuación de DKP es covariante bajo una transformación de Lorentz se debe cumplir que:

$$\left( i\beta'^{\mu} \partial'_{\mu} - m \right) \psi' (x') = 0, \quad (3.68)$$

Se asumirá que el campo  $\psi (x)$  transforme en la forma:

$$\psi' (x') = \psi' (\Lambda x) = U (\Lambda) \psi (x), \quad (3.69)$$

Ahora, se deberá exigir que las matrices  $\beta'^{\mu}$  también satisfagan el álgebra de DKP, es decir:

$$\beta'^{\mu} \beta'^{\nu} \beta'^{\sigma} + \beta'^{\sigma} \beta'^{\nu} \beta'^{\mu} = \eta^{\mu\nu} \beta'^{\sigma} + \eta^{\sigma\nu} \beta'^{\mu}. \quad (3.70)$$

Con el fin de conectar dos sistemas de referencia inercial se deberá encontrar una representación explícita de  $\beta'^{\mu}$  y  $U (\Lambda)$ , con la condición de que la transformación  $U^{-1} (\Lambda)$  exista. Utilizando (3.67) y (3.69) en (3.68) se obtiene:

$$\left( i\beta'^{\mu} \Lambda^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} - m \right) U (\Lambda) \psi (x) = 0.$$

Si se multiplica el lado izquierdo la expresión anterior por  $U^{-1} (\Lambda)$  resulta:

$$\left( iU^{-1} (\Lambda) \beta'^{\mu} U (\Lambda) \Lambda^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu} - m \right) \psi (x) = 0. \quad (3.71)$$

---

Por tanto, se debe cumplir que:

$$U^{-1}(\Lambda) \beta'^{\mu} U(\Lambda) = \Lambda^{\mu}_{\nu} \beta^{\nu}, \quad (3.72)$$

Una manera de encontrar una representación de  $U(\Lambda)$  es considerar las transformaciones de Lorentz infinitesimales propias, para las cuales  $\Lambda^{\mu}_{\nu}$  deberán ser de la forma:

$$\Lambda^{\mu}_{\nu} \simeq \delta^{\mu}_{\nu} + \Delta\omega^{\mu}_{\nu} + O(\Delta\omega^2). \quad (3.73)$$

Siendo que bajo transformaciones de Lorentz:

$$d^2s = \eta_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (3.74)$$

se puede mostrar que  $\Delta\omega_{\mu\nu}$  satisface:

$$\Delta\omega_{\mu\nu} = -\Delta\omega_{\nu\mu}, \quad (3.75)$$

Expandiendo la matriz  $U(\Lambda)$  en potencias de  $\Delta\omega_{\mu\nu}$  y manteniendo potencias hasta de primer orden se determina que:

$$U(\Lambda) \simeq 1 + i\alpha\Delta\omega_{\mu\nu}S^{\mu\nu}, \quad (3.76)$$

donde  $\alpha$  y  $S^{\mu\nu}$  son cantidades a ser determinadas. Substituyendo (3.76) en (3.72) y manteniendo términos hasta de primer orden en  $\Delta\omega_{\mu\nu}$  se determina que:

$$\beta^{\mu} = \beta'^{\mu}, \quad (3.77)$$

$$\Delta\omega^{\mu}_{\nu}\beta^{\nu} = i\alpha\Delta\omega_{\sigma\rho} \left[ \beta^{\mu}, S^{\sigma\rho} \right], \quad (3.78)$$

esta última será utilizada para encontrar la forma explícita del generador infinitesimal  $S^{\alpha\beta}$ . Siendo que  $\Delta\omega_{\mu\nu}$  es antisimétrico, es posible escribir:

$$\Delta\omega^{\mu}_{\nu}\beta^{\nu} = \Delta\omega_{\sigma\rho}\eta^{\mu\sigma}\beta^{\rho} = \frac{1}{2}\Delta\omega_{\sigma\rho} \left( \eta^{\mu\sigma}\beta^{\rho} - \eta^{\mu\rho}\beta^{\sigma} \right), \quad (3.79)$$

de manera que la expresión (3.78) se pueda expresar en la forma:

$$\frac{1}{2}\Delta\omega_{\sigma\rho} \left( \eta^{\mu\sigma}\beta^{\rho} - \eta^{\mu\rho}\beta^{\sigma} \right) = i\alpha\Delta\omega_{\sigma\rho} \left[ \beta^{\mu}, S^{\sigma\rho} \right], \quad (3.80)$$

---

Ahora, a partir del álgebra de las matrices DKP, es posible mostrar que:

$$\eta^{\mu\sigma}\beta^\rho - \eta^{\mu\rho}\beta^\sigma = \left[ \beta^\mu, \left[ \beta^\sigma, \beta^\rho \right] \right], \quad (3.81)$$

de manera que

$$\frac{1}{2}\Delta\omega_{\sigma\rho} \left[ \beta^\mu, \left[ \beta^\sigma, \beta^\rho \right] \right] = i\alpha\Delta\omega_{\sigma\rho} \left[ \beta^\mu, S^{\sigma\rho} \right]. \quad (3.82)$$

Así, la relación anterior permitirá inferir que,

$$\alpha = -\frac{i}{2} \quad , \quad S^{\sigma\rho} = \left[ \beta^\sigma, \beta^\rho \right]. \quad (3.83)$$

Por tanto, la transformación de Lorentz finita es completamente determinada para ser:

$$U(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}S^{\sigma\rho}\right), \quad (3.84)$$

Ahora, la transformación de Lorentz correspondiente a el campo conjugado es:

$$\bar{\psi}'(x') = \psi'^{\dagger}(x')\bar{\eta}^0 = \bar{\psi}(x) \left( \bar{\eta}^0 U^{\dagger} \bar{\eta}^0 \right), \quad (3.85)$$

donde

$$U^{\dagger}(\Lambda) = \exp\left(\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho}S^{\dagger\sigma\rho}\right). \quad (3.86)$$

De la expresión (3.59) se puede determinar que:

$$S^{\dagger\rho\sigma} = -\bar{\eta}^0 S^{\rho\sigma} \bar{\eta}^0. \quad (3.87)$$

Considerando nuevamente términos hasta de primer orden en  $\Delta\omega_{\mu\nu}$ , se deduce que:

$$\bar{\eta}^0 U^{\dagger} \bar{\eta}^0 \simeq 1 - \frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho} S^{\rho\sigma},$$

con lo que.

$$\bar{\eta}^0 U^{\dagger}(\Lambda) \bar{\eta}^0 = \exp\left(-\frac{1}{2}\omega_{\sigma\rho} S^{\rho\sigma}\right) = U^{-1}(\Lambda), \quad (3.88)$$

por lo tanto

$$\bar{\psi}'(x') = \bar{\psi}(x) U^{-1}(\Lambda). \quad (3.89)$$

A partir de la relación (3.72) es posible mostrar que:

$$U^{-1} S^{\sigma\rho} U = \Lambda^\sigma{}_\mu \Lambda^\rho{}_\nu S^{\mu\nu},$$

Lo que indica que  $S^{\sigma\rho}$  es un tensor de segundo orden en el álgebra de las matrices  $\beta^\mu$ . En general todo tensor en ésta álgebra puede ser escrito como una combinación lineal del producto de  $\beta$  y  $\delta$  [75].

La relación (3.81) indica que,

$$\eta^{\mu\sigma} \beta^\rho - \eta^{\mu\rho} \beta^\sigma = [\beta^\mu, S^{\sigma\rho}], \quad (3.90)$$

se manera que

$$[S^{\mu\nu}, S^{\sigma\rho}] = \eta^{\mu\sigma} S^{\rho\nu} + \eta^{\nu\rho} S^{\sigma\mu} - \eta^{\mu\rho} S^{\sigma\nu} - \eta^{\nu\sigma} S^{\rho\mu}. \quad (3.91)$$

Introduciendo las matrices  $\sigma_k$  de la siguiente manera:

$$\sigma_k = i\varepsilon_{klm} S_{lm}, \quad (3.92)$$

y teniendo en cuenta la expresión (3.91) se determina que:

$$\left[ \frac{\sigma_k}{2}, \frac{\sigma_l}{2} \right] = i\varepsilon_{klm} \frac{\sigma_m}{2}. \quad (3.93)$$

La expresión anterior se interpreta como las relaciones de conmutación para las matrices de momento angular, entonces  $\sigma_k$  tendrá las propiedades de momento angular y podrá tomar los autovalores:  $(f, f-1, f-2, \dots, -f+1, -f)$ , donde  $f$  es un número entero o semientero. La ecuación característica para las matrices  $\sigma_k$  es:

$$(\sigma_k - f)(\sigma_k - f + 1) \cdots (\sigma_k + f - 1)(\sigma_k + f) = 0. \quad (3.94)$$

En general la representación de las matrices de momento angular que satisfacen (3.94) pueden ser descompuestas en representaciones irreducibles  $D_{|f|}$ ,  $D_{|f-1|}$ ,

---

... del grupo de rotaciones infinitesimales. Estas representaciones irreducibles corresponden a los valores  $|f|$ ,  $|f - 1|$ , ... de momento angular. Ya que en una representación irreducible  $D_l$  la función de onda tiene  $(2l + 1)$  componentes independientes correspondientes a diferentes direcciones de momento angular, se muestra que el campo de DKP  $\psi(x)$  describe el estado de una partícula con espín  $f = 1$ . Así, se deduce que la función de onda en (3.31) describe los estados de partículas espín  $|f|$ ,  $|f - 1|$ , ... Este momento angular es una propiedad intrínseca de las partículas ya que no desaparece inclusive cuando éstas se encuentran en un estado de reposo.

### 3.6. Representaciones irreducibles de la teoría DKP

El conjunto de matrices  $\beta^\mu$  junto con el operador unidad generan un anillo con el álgebra de espín entero [76]. El álgebra expresada por (3.37) constituye un conjunto de 126 matrices independientes. Esta álgebra, por el teorema de Frobenius-Schur, debe poseer tres representaciones independientes irreducibles [67].

$$126 = 1^2 + 5^2 + 10^2. \quad (3.95)$$

Se tendrá una representación de primera orden, que es la trivial y la cual no tiene significado físico. Una representación de quinto orden que describirá partículas de espín 0, el cual se identifica como el sector escalar de la teoría DKP. Finalmente, una representación de décimo orden asociado con partículas de espín 1 que se conoce como el sector vectorial. El campo de DKP, por tanto, poseerá un exceso de componentes y la teoría deberá ser condicionada por una ecuación que permita eliminar algunas componentes redundantes. Dicha condición se deriva de la ecuación de DKP multiplicando (3.36) por  $(1 - (\beta^0)^2)$ , resultando en:

$$\begin{aligned} 0 &= (1 - (\beta^0)^2) (i\beta^\mu \partial_\mu - m) \psi \\ &= \left[ i (1 - (\beta^0)^2) \beta^0 \partial_0 + i (1 - (\beta^0)^2) \beta^k \partial_k - m (1 - (\beta^0)^2) \right] \psi. \end{aligned} \quad (3.96)$$

---

A partir de la relación (3.38) se determina que:

$$0 = \left(1 - (\beta^0)^2\right) \beta^0.$$

Ahora, de (3.42) se deduce,

$$\beta^k (\beta^0)^2 = \left(1 - (\beta^0)^2\right) \beta^k.$$

De manera que la ecuación (3.96) se reduce a:

$$i\beta^k (\beta^0)^2 \partial_k \psi = m \left(1 - (\beta^0)^2\right) \psi. \quad (3.97)$$

Como se podrá observar posteriormente, la relación (3.97) permitirá determinar que tres (cuatro) componentes del campo  $\psi(x)$  se expresan en términos de las otras dos (seis) componentes y sus derivadas en el sector escalar (vectorial) de modo que las componentes superfluas desaparecen y se mantienen solamente las componentes físicas de la teoría de DKP. Se mostrara que las ecuaciones de KGF y de Proca son obtenidas seleccionando los sectores de espín 0 y 1, respectivamente de la teoría DKP para el bosón libre.

### 3.6.1. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de KGF

En 1953, Fujiwara [77] desarrollo dos conjuntos distintos de operadores que tienen la interesante propiedad de seleccionar el sector de espín 0 o 1 de la teoría de DKP. La propuesta de Fujiwara se baso en la propuesta de Peaslee [78]. Sin embargo, el abordaje realizado por Umezawa [71] resulto siendo mucho mas didáctico y presenta de manera explícita estos operadores. Para seleccionar la función de onda de espín 0, es necesario introducir los operadores  $P$  y  $P^\mu$  definidos de la siguiente forma:

$$P \equiv - (\beta^0)^2 (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2, \quad (3.98)$$

$$P^\mu \equiv P \beta^\mu, \quad (3.99)$$

---

los cuales cumplen con las condiciones:

$$P^2 = 1, \quad (3.100)$$

$$P^\mu \beta^\nu = P \beta^\mu \beta^\nu. \quad (3.101)$$

Siendo que,  $\beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\mu$ , se determina:

$$\left( \beta^\mu \beta^\nu - \eta^{\mu\nu} \right) \beta^\mu = 0. \quad (3.102)$$

Al exigir que la identidad se cumpla para todo  $\beta^\mu$  se deduce que:

$$\beta^\mu \beta^\nu = \eta^{\mu\nu}, \quad (3.103)$$

de manera que

$$P^\mu \beta^\nu = P \eta^{\mu\nu}. \quad (3.104)$$

Los resultados anteriores conducen a la siguiente identidad:

$$PS^{\sigma\rho} = 0 = S^{\sigma\rho}P. \quad (3.105)$$

En forma similar se demuestra que:

$$P^\mu S^{\sigma\rho} = \eta^{\mu\sigma} P^\rho - \eta^{\mu\rho} P^\sigma. \quad (3.106)$$

Para una transformación infinitesimal de Lorentz, se deduce que:

$$P\psi'(x') = PU(\Lambda)\psi(x) \simeq P \left( 1 + \frac{1}{2} \delta\omega_{\sigma\rho} S^{\sigma\rho} \right) \psi(x) = P\psi(x), \quad (3.107)$$

lo que permite determinar que  $P\psi(x)$  se comporta como un escalar, de manera que el operador  $P$  selecciona el sector escalar de la teoría de DKP. En forma análoga se puede observar a partir de (3.106):

$$\begin{aligned} P^\mu \psi'(x') &= P^\mu U(\Lambda)\psi(x) \simeq P^\mu \left( 1 + \frac{1}{2} \delta\omega_{\sigma\rho} S^{\sigma\rho} \right) \psi(x) \\ &= \Lambda^\mu{}_\rho \left( P^\rho \psi(x) \right), \end{aligned} \quad (3.108)$$

---

lo que indica que  $P^\mu\psi(x)$  se transforma como un vector. Al aplicar el operador  $P$  a la ecuación de DKP se obtiene:

$$0 = i\partial_\mu \left( P^\mu\psi(x) \right) - m \left( P\psi(x) \right). \quad (3.109)$$

Ahora, si se aplica igualmente el operador  $P^\mu$  y se utiliza la expresión (3.104),

$$0 = P^\nu \left( i\beta^\mu\partial_\mu - m \right) \psi(x) = i\partial^\nu \left( P\psi(x) \right) - m \left( P^\nu\psi(x) \right),$$

de manera que:

$$P^\mu\psi(x) = \frac{i}{m}\partial^\mu \left( P\psi(x) \right). \quad (3.110)$$

Relación que al substituir en (3.109) resulta en:

$$\left( \square + m^2 \right) \left( P\psi(x) \right) = 0, \quad (3.111)$$

por lo tanto, los campos  $P\psi(x)$  son identificados con campos escalares de masa  $m$  que obedecen la ecuación de KGF para un boson libre, es decir, es una ecuación de onda para espin 0. Por lo tanto, cuando el operador de proyección  $P$  es aplicado a la ecuación de DKP, inmediatamente el sector de espin 0 de la teoría es seleccionado suministrado solamente la componente física del campo  $\psi(x)$  que satisface la ecuación de KGF libre.

Si se representa la función de onda multicomponente asociado a al campo DKP  $\psi(x)$  como:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi^0(x) \\ \varphi^1(x) \\ \varphi^2(x) \\ \varphi^3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi^\nu(x) \end{pmatrix}, \quad \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (3.112)$$

se puede encontrar la forma de las matrices  $\beta^\mu$  de manera que los operadores  $P$  y  $P^\mu$  seleccionen las componentes pertinentes. La naturaleza de los operadores

$P$  y  $P^\mu$  debe ser tal que:

$$P\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^\mu\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ \varphi^\mu(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.113)$$

Lo anterior implica que dichos operadores deberán ser de la forma:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.114)$$

De la expresión (3.110), se puede determinar que:

$$P^\mu\psi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^\mu(x) \\ \varphi^\mu(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \frac{i}{m} \partial^\mu \begin{pmatrix} \varphi(x) \\ \varphi(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{i}{m} \partial^\mu \varphi(x) \\ \frac{i}{m} \partial^\mu \varphi(x) \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix},$$

es decir:

$$\varphi^\mu(x) = \frac{i}{m} \partial^\mu \varphi(x). \quad (3.115)$$

Definiendo el siguiente campo:

$$\varphi(x) \equiv \sqrt{m} \bar{\varphi}(x), \quad (3.116)$$

se deduce que,

$$\varphi^\mu(x) = \frac{i}{\sqrt{m}} \partial^\mu \bar{\varphi}(x), \quad (3.117)$$

---

con lo cual el campo multicomponente de DKP se puede expresar de la siguiente manera:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{m}\bar{\varphi}(x) \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial^\mu\bar{\varphi}(x) \end{pmatrix}, \quad (3.118)$$

que se interpretara como la forma física de la función de onda de DKP del sector de espín 0, siendo:

$$P\psi(x) = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(x) \\ 0_{4\times 1} \end{pmatrix}, \quad P^\mu\psi(x) = \frac{i}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} \partial^\mu\bar{\varphi}(x) \\ 0_{4\times 1} \end{pmatrix}, \quad (3.119)$$

el cual satisface la condición:

$$\left(\square + m^2\right) \begin{pmatrix} P\psi(x) \\ 0_{4\times 1} \end{pmatrix} = \sqrt{m} \begin{pmatrix} (\square + m^2)\bar{\varphi}(x) \\ 0_{4\times 1} \end{pmatrix} = 0,$$

es decir:

$$\left(\square + m^2\right)\bar{\varphi}(x) = 0. \quad (3.120)$$

### 3.6.2. Equivalencia entre el formalismos de DKP y el formalismos de Proca

De forma similar, se puede seleccionar la función de onda para campos de espín 1, para ello, se introduce el siguiente conjunto de operadores [71]:

$$\begin{aligned} R^\mu &= (\beta^1)^2 (\beta^2)^2 (\beta^3)^2 \left( \beta^\mu \beta^0 - \eta^{\mu 0} \right), \\ R^{\mu\nu} &= R^\mu \beta^\nu. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Del álgebra de las matrices  $\beta$  se determina que  $R^{\mu\nu}$  cumple la siguiente propiedad de simetría:

$$R^{\mu\nu} = -R^{\nu\mu}, \quad (3.122)$$

de igual manera, se deduce que,

$$R^{\mu\nu} \beta^\theta = R^\mu \eta^{\theta\nu} - R^\nu \eta^{\mu\theta}. \quad (3.123)$$

---

Ahora, asociado al operador  $R^\mu$  se determina que:

$$R^\mu S^{\sigma\rho} = \eta^{\mu\sigma} R^\rho - \eta^{\mu\rho} R^\sigma,$$

en tanto que:

$$S^{\sigma\rho} R^\mu = \eta^{\sigma\rho} R^\mu - \eta^{\rho\sigma} R^\mu = 0. \quad (3.124)$$

De manera análoga se muestra que:

$$R^{\mu\nu} S^{\sigma\rho} = \eta^{\sigma\nu} R^{\mu\rho} - \eta^{\mu\sigma} R^{\nu\rho} - \eta^{\rho\nu} R^{\mu\sigma} + \eta^{\mu\rho} R^{\nu\sigma}.$$

Las relaciones anteriores garantizan que bajo una transformación infinitesimal se cumple que:

$$R^\mu \psi'(x') = \left( R^\mu \psi(x) \right) + \delta\omega^\mu{}_\rho \left( R^\rho \psi(x) \right), \quad (3.125)$$

lo que indica que el operador  $R^\mu$  selecciona las componentes del campo de DKP  $\psi(x)$  que transforman como las componentes de un cuadvivector. Ahora, al considerar el operador  $R^{\mu\nu}$  se determina que:

$$R^{\mu\nu} \psi'(x') = R^{\mu\nu} \psi(x) + \delta\omega^\mu{}_\sigma \left( R^{\sigma\nu} \psi(x) \right) + \delta\omega^\nu{}_\rho \left( R^{\mu\rho} \psi(x) \right). \quad (3.126)$$

Si se considera una transformación de Lorentz infinitesimal de un tensor de segundo orden, su comportamiento sería:

$$R'^{\mu\nu} \simeq R^{\mu\nu} + \delta\omega^\mu{}_\alpha R^{\alpha\nu} + \delta\omega^\nu{}_\alpha R^{\mu\alpha},$$

resultado que permite establecer de la relación (3.126) que el operador  $R^{\mu\nu}$  selecciona aquellas componentes del campo de DKP  $\psi(x)$  que transforman como un tensor de segundo orden.

Si se aplica el operador  $R^\mu$  a la ecuación de DPK se obtiene:

$$R^{\mu\nu} \partial_\nu \psi(x) = -im R^\mu \psi(x). \quad (3.127)$$

---

Sin embargo, al considerar el operador  $R^{\mu\nu}$  y la expresión (3.123) en la ecuación de DKP resulta que:

$$\partial^\nu \left( R^\mu \psi(x) \right) - \partial^\mu \left( R^\nu \psi(x) \right) = -imR^{\mu\nu} \psi(x). \quad (3.128)$$

Teniendo en cuenta que  $R^\mu \psi(x)$  transforma como un vector, se define el siguiente campo tensorial de segundo orden:

$$V^{\nu\mu} \equiv \partial^\nu \left( R^\mu \psi(x) \right) - \partial^\mu \left( R^\nu \psi(x) \right), \quad (3.129)$$

el cual satisface la propiedad de ser antisimétrico,

$$V^{\mu\nu} = -V^{\nu\mu}. \quad (3.130)$$

De esta manera, la ecuación (3.128) se expresa como:

$$R^{\mu\nu} \psi(x) = -\frac{i}{m} V^{\mu\nu}, \quad (3.131)$$

con lo cual, la relación (3.127) se escribe:

$$\partial_\nu V^{\nu\mu} + m^2 \left( R^\mu \psi \right) = 0, \quad (3.132)$$

que se interpreta como la ecuación de Proca para el campo vectorial  $R^\mu \psi(x)$  que describe una partícula de espín 1. Si se aplica el operador  $\partial_\mu$  a la ecuación (3.132) se deriva una condición subcidiaria para el campo  $R^\mu \psi(x)$ , dado (3.130),

$$\partial_\mu \left( R^\mu \psi \right) = 0. \quad (3.133)$$

Ahora, si la condición anterior es utilizado en (3.132) se obtiene que,

$$\left( \square + m^2 \right) \left( R^\mu \psi(x) \right) = 0. \quad (3.134)$$

Las ecuaciones (3.133) y (3.134) son equivalentes a las ecuaciones de proca. La ecuación (3.134) indica que son necesarias 4 coordenadas para describir la partícula de espín 1, sin embargo, la condición (3.133) elimina una de esas componentes estableciendo que 3 son independientes.

---

Al representar la función de onda multicomponente  $\psi(x)$  para el caso en consideración como siendo:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \phi^0(x) \\ \phi^1(x) \\ \phi^2(x) \\ \phi^3(x) \\ \phi^4(x) \\ \phi^5(x) \\ \phi^6(x) \\ \phi^7(x) \\ \phi^8(x) \\ \phi^9(x) \end{pmatrix}, \quad (3.135)$$

se puede encontrar la forma de las matrices  $\beta^\mu$  de manera que el operador  $R^\mu$  seleccione las componentes físicas del campo DKP para el sector de espín 1 las cuales son identificadas como siendo  $(\phi^1, \phi^2, \phi^3, \phi^4)$ . Bajo esta condición se puede esperar que el operador  $R^\mu$  realice la siguiente acción:

$$R^\mu \psi(x) = \begin{pmatrix} \phi^k(x) \\ 0_{9 \times 1} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (3.136)$$

Con el fin de garantizar (3.136), los operadores  $R^\mu$  deberán ser de la forma:

$$R^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

---


$$R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.137)$$

### 3.7. Representación de las Matrices Beta

Según la propuesta de de Broglie una manera de construir matrices  $\beta$  que garanticen que el álgebra (3.35) es si éstas se las puede expresar en la forma:

$$\beta^\mu = \frac{1}{2} \left( \gamma^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \gamma'^\mu \right), \quad (3.138)$$

donde

$$\left\{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \right\} = 2\eta^{\mu\nu} = \left\{ \gamma'^\mu, \gamma'^\nu \right\}, \quad \left[ \gamma^\mu, \gamma'^\nu \right] = 0. \quad (3.139)$$

Hay que tener en cuenta que la representación dada por (3.138) es reducible de manera que una teoría basada en la ecuación:

$$\partial_\mu \left( \gamma^\mu \otimes 1 + 1 \otimes \gamma'^\mu \right) \psi(x) + \kappa \psi(x) = 0, \quad (3.140)$$

es equivalente a la teoría DKP. A partir de la ecuación (3.140) se puede concluir que el campo  $\psi(x)$  se transforma como el producto directo de dos campos de Dirac. Se mostró que el campo de espín 0 posee cinco componentes  $(P\psi, P^\mu\psi)$ , en tanto que el campo de espín 1 tiene diez componentes  $(R^\mu\psi, V^{\mu\nu})$ . De esta forma, las representaciones irreducibles para los campos de espín 0 y espín 1 contienen 15 componentes. Debido a (3.138), las representaciones reducibles

para  $\beta^\mu$  tienen 16 componentes, por tanto, es necesario encontrar una última componente, a fin de descomponer en tres representaciones irreducibles:  $16 = 10 \oplus 5 \oplus 1$ .

Ésta última componente sera entonces una representación irreducible, de modo que ella deba ser una cantidad escalar satisfaciendo una ecuación diferencial de primer orden. Sin embargo, es imposible encontrar tal ecuación para una componente escalar que satisfaga también la ecuación de segundo orden de GKF, a menos que éste escalar sea cero. Por lo tanto, se concluye que la última componente es trivial, es decir, no tiene interés físico. Debido a la irreducibilidad de las tres representaciones, el número de matrices linealmente independientes es dado por la expresión (3.95). Se puede mostrar, usando el álgebra de las matrices  $\beta^\mu$ , que toda matriz en dicha álgebra y su producto se puede expresar como una combinación lineal de las siguientes 126 matrices [79]:

$$\begin{array}{lll}
I & \bar{\eta}^\mu & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \beta^\alpha \\
\beta^\mu & \bar{\eta}^\mu \beta^\nu & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \beta^\alpha \beta^\beta \\
\beta^\mu \beta^\nu & \bar{\eta}^\mu \beta^\nu \beta^\alpha & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \\
\beta^\mu \beta^\nu \beta^\alpha & \bar{\eta}^\mu \beta^\nu \beta^\alpha \beta^\beta & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \beta^\beta \\
\beta^\mu \beta^\nu \beta^\alpha \beta^\beta & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu & \bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \bar{\eta}^\beta
\end{array} \quad (3.141)$$

En cualquier representación que se de para las 126 matrices, solo 16 poseen traza no nula, es decir, las  $\bar{\eta}^\mu$  y todos los productos entre ellas. Las trazas de las matrices  $\beta^\mu$  y para matrices que contienen  $\bar{\eta}^\mu$  son las siguientes [80]:

$$\begin{aligned}
Tr \left( \beta^{\mu_1} \beta^{\mu_2} \dots \beta^{\mu_{2n+1}} \right) &= 0, \\
Tr \left( \beta^{\mu_1} \beta^{\mu_2} \beta^{\mu_3} \beta^{\mu_4} \dots \beta^{\mu_{2n-2}} \beta^{\mu_{2n-1}} \beta^{\mu_{2n}} \right) &= \delta^{\mu_1 \mu_2} \delta^{\mu_3 \mu_4} \dots \delta^{\mu_{2n-1}, \mu_{2n}} \\
&\quad + \delta^{\mu_2 \mu_3} \delta^{\mu_4 \mu_5} \dots \delta^{\mu_{2n-2}, \mu_{2n-1}} \delta^{\mu_1, \mu_{2n}}
\end{aligned} \quad (3.142)$$

---

Ahora, en relación a cada representación del campo de DKP se cumple:

	$s = 1$	$s = 0$	trivial	
$Tr(I)$	10	5	1	
$Tr(\bar{\eta}^\mu)$	2	-1	-1	(3.143)
$Tr(\bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu)$	-2	1	1	
$Tr(\bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha)$	-2	3	-1	
$Tr(\bar{\eta}^\mu \bar{\eta}^\nu \bar{\eta}^\alpha \bar{\eta}^\beta)$	2	-3	-1	

La traza de un número impar de matrices  $\beta^\mu$  es siempre nula. Para el calculo de diferentes observables solo es necesario conocer las propiedades de las matrices  $\beta^\mu$ , de manera que las mediciones asociadas a ellas no dependan del la representación específica de dichas matrices. Se mencionara algunas representaciones específicas para las matrices beta en los tres casos mencionados aun cuando no es la única posible. En el caso de la representación trivial, todas las matrices deben ser iguales a cero:

$$\beta^0 = \beta^1 = \beta^2 = \beta^3 = 0. \quad (3.144)$$

En el caso de la representación correspondiente a los campos de espin 0, las matrices  $\beta^\mu$  son  $5 \times 5$  y tienen la forma:

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.145)$$

Ahora, para el caso de campos de espin 1, las las matrices  $\beta^\mu$  son  $10 \times 10$  y una

posible representación es:

$$\begin{aligned}
 \beta^0 = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\beta^2 = & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}
 \tag{3.146}$$

### 3.8. Formulación Lagrangiana de la teoría de DKP

Debido a la estrecha similitud entre la forma funcional de la ecuación de Dirac y la ecuación de DKP, se propone que la densidad Lagrangiana para el campo de DKP libre es:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu (\partial_\mu \psi) - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi,
 \tag{3.147}$$

---

a partir de la cual se calculan las correspondientes ecuaciones de campo asociadas a  $(\psi, \bar{\psi})$  de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right) = 0, \quad (3.148)$$

a partir de las cuales resulta que:

$$\bar{\psi}(x) \left( \partial_\mu \beta^\mu + m \right) = 0 \quad , \quad \left( i\beta^\mu \partial_\mu - m \right) \psi(x) = 0, \quad (3.149)$$

que son las expresiones (3.36) y (3.61). Es posible observar que la densidad lagrangiana indicada en (3.147) posee una simetría global  $U(1)$ :

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{i\alpha} \psi(x) \quad , \quad \bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}'(x) = e^{-i\alpha} \bar{\psi}(x). \quad (3.150)$$

lo cual es el reflejo de la presencia de la corriente conservada indicada por la ecuación (3.63)

$$J^\mu = \frac{1}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \psi.$$

Ahora, debido a que el Lagrangiano que describe la teoría de DKP es de primer orden en las derivadas, es posible mostrar que la teoría posee vínculos. Con el fin de evidenciar lo anterior, se procede a calcular los momentos canónicos asociados a los campos  $(\psi, \bar{\psi})$  que se definen de la siguiente manera:

$$\bar{\pi}(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi(x))} = \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta_0 \quad , \quad \pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \bar{\psi}(x))} = -\frac{i}{2} \beta_0 \psi(x). \quad (3.151)$$

La expresión anterior da a entender que el Lagrangiano que describe los campos de DKP es singular, es decir, que las coordenadas que definen el espacio de fase  $(\psi, \bar{\psi}, \bar{\pi}, \pi)$  no son completamente independientes. Por lo tanto, un mecanismo apropiado deberá ser considerado con el fin de analizar consistentemente la teoría y que en nuestro caso será el método de Dirac [82]. Es así, que al sistema de ecuaciones (3.151) se le asociara el siguiente conjunto de vínculos primarios:

$$\bar{\Gamma}(x) \equiv \bar{\pi}(x) - \frac{i}{2} \bar{\psi}(x) \beta_0 \approx 0 \quad , \quad \Gamma(x) \equiv \pi(x) + \frac{i}{2} \beta_0 \psi(x) \approx 0. \quad (3.152)$$

---

El número de vínculos que resulta de (3.152) dependerá del tipo de campo que se desea describir. Siguiendo el procedimiento de Dirac se definirá la densidad Hamiltoniana canónica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_C &\equiv \bar{\pi}\partial_0\psi + \partial_0\bar{\psi}\pi - \mathcal{L} \\ &= -\frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^k\partial_k\psi + \frac{i}{2}\partial_k\bar{\psi}\beta^k\psi + m\bar{\psi}\psi,\end{aligned}$$

con lo cual el Hamiltoniano canónico asociado es:

$$H_C = \int d^3x \mathcal{H}_C = \int d^3x \left[ -\frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^k\partial_k\psi + \frac{i}{2}\partial_k\bar{\psi}\beta^k\psi + m\bar{\psi}\psi \right]. \quad (3.153)$$

Ahora, se define el Hamiltoniano primario adicionando al Hamiltoniano canónico los vínculos primarios con sus respectivos multiplicadores de Lagrange,

$$\begin{aligned}H_P &= H_C + \int d^3y \left[ \bar{\alpha}\Gamma + \bar{\Gamma}\alpha \right] \\ &= \int d^3y \left[ -\frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^k(\partial_k^y\psi) + \frac{i}{2}(\partial_k^y\bar{\psi})\beta^k\psi + m\bar{\psi}\psi + \bar{\alpha}\Gamma + \bar{\Gamma}\alpha \right],\end{aligned} \quad (3.154)$$

siendo  $(\bar{\alpha}, \alpha)$  los multiplicadores de lagrange asociados a los vínculos  $(\Gamma, \bar{\Gamma})$  respectivamente. Ahora, dado que el espacio de fase de la teoría es dado por  $(\psi, \bar{\psi}, \bar{\pi}, \pi)$ , dos variables dinámicas en dicho espacio:

$$F(x) \equiv F\left[\psi(x), \bar{\psi}(x), \bar{\pi}(x), \pi(x)\right] \quad , \quad G(x) \equiv G\left[\psi(x), \bar{\psi}(x), \bar{\pi}(x), \pi(x)\right], \quad (3.155)$$

tendrán corchetes de Poisson a tiempos iguales definidos por:

$$\begin{aligned}\left\{ F(x), G(y) \right\}_{x^0=y^0} &= \int d^3z \left[ \frac{\delta F(x)}{\delta\psi_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta\bar{\pi}_a(z)} + \frac{\delta F(x)}{\delta\bar{\psi}_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta\pi_a(z)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\delta F(x)}{\delta\bar{\pi}_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta\psi_a(z)} - \frac{\delta F(x)}{\delta\pi_a(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta\bar{\psi}_a(z)} \right].\end{aligned} \quad (3.156)$$

A partir de la cual se puede mostrar que los únicos PB diferentes de cero son:

$$\left\{ \psi_a(x), \bar{\pi}_b(y) \right\} = \delta_{ab}\delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\psi}_a(x), \pi_b(y) \right\} = \delta_{ab}\delta^3(x-y). \quad (3.157)$$

---

Utilizando las relaciones (3.157) es posible observar que el conjunto de vínculos primarios (3.152) satisface el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \Gamma_a(x), \bar{\Gamma}_b(y) \right\} = i(\beta_0)_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\Gamma}_a(x), \Gamma_b(y) \right\} = -i(\beta_0)_{ab}^T \delta^3(x-y). \quad (3.158)$$

El procedimiento de Dirac establece que los vínculos primarios se deberán preservar en el tiempo, es decir, ellos deben ser consistentes bajo la evolución temporal generada por el Hamiltoniano primario. Por lo tanto, se exige que  $(\Gamma, \bar{\Gamma})$  posean un PB débilmente igual a cero con el Hamiltoniano primario, con lo cual (utilizando (3.157)) se deduce que:

$$\dot{\bar{\Gamma}}(x) = \bar{\psi}(x) \left( i \overleftarrow{\partial}_k^x \beta^k + m \right) + i \bar{\alpha}(x) \beta_0 \approx 0. \quad (3.159)$$

$$\dot{\Gamma}(x) = \left( i \beta^k \partial_k^x - m \right) \psi(x) + i \beta_0 \alpha(x) \approx 0. \quad (3.160)$$

No obstante, a pesar que (3.159) y (3.160) establecen condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange, la singularidad de la matriz  $\beta_0$  establece que no todas las componentes de  $(\alpha, \bar{\alpha})$  consiguen ser determinados. Una manera de determinar que componentes de los multiplicadores de Lagrange son evaluados resulta de la definición de los siguientes operadores:

$$P_1 \equiv \beta_0^2 \quad , \quad P_2 \equiv 1 - \beta_0^2, \quad (3.161)$$

los cuales satisfacen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= 1, \\ P_1^2 &= P_1, \\ P_2^2 &= P_2, \\ P_1 P_2 &= 0, \end{aligned} \quad (3.162)$$

El conjunto de ecuaciones (3.162) indican que los operadores  $(P_1, P_2)$  constituyen un par de proyectores. Re escribiendo las ecuaciones (3.159) y (3.160) en

---

la forma

$$i\beta_0\alpha(x) = -\left(i\beta^k\partial_k^x - m\right)\psi(x) \approx 0, \quad (3.163)$$

$$i\bar{\alpha}(x)\beta_0 = -\bar{\psi}(x)\left(i\overleftarrow{\partial}_k^x\beta^k + m\right) \approx 0, \quad (3.164)$$

a partir de (3.163) es posible deducir que:

$$\beta_0^2\alpha(x) = P_1\alpha(x) = i\beta_0\left(i\beta^k\partial_k^x - m\right)\psi(x) \approx 0, \quad (3.165)$$

por tanto, algunas componentes del multiplicador de lagrange  $\alpha(x)$  son determinadas. Ahora, si se aplica el operador  $(1 - \beta_0^2)$  a (3.163) se obtiene:

$$i\left(1 - \beta_0^2\right)\beta_0\alpha(x) = 0 = -\left(1 - \beta_0^2\right)\left(i\beta^k\partial_k^x - m\right)\psi(x) \approx 0,$$

lo cual constituye una conjunto de relaciones entre las coordenadas del espacio de fase. Entonces, de la consistencia del vínculo primario  $\Gamma(x)$  resulta un vínculo secundario que se denotaran de la siguiente manera:

$$\Theta(x) \equiv \left(1 - \beta_0^2\right)\left(i\beta_k\overrightarrow{\partial}_x^k - m\right)\psi(x) \approx 0. \quad (3.166)$$

Un análisis similar con la ecuación (3.164) permite concluir que:

$$\bar{\alpha}(x)\beta_0^2 = \bar{\alpha}(x)P_1 = i\bar{\psi}(x)\left(i\overleftarrow{\partial}_k^x\beta^k + m\right)\beta_0 \approx 0, \quad (3.167)$$

lo que fija algunas de las componentes del multiplicando de Lagrange  $\bar{\alpha}(x)$ . Ahora, aplicando el operador  $(1 - \beta_0^2)$  por la derecha resulta que:

$$i\bar{\alpha}(x)\beta_0\left(1 - \beta_0^2\right) = 0 = -\bar{\psi}(x)\left(i\overleftarrow{\partial}_k^x\beta^k + m\right)\left(1 - \beta_0^2\right) \approx 0,$$

de manera que un nuevo conjunto de vínculos secundarios resulta de la consistencia de  $\bar{\Gamma}(x)$ . A este nuevo conjunto se lo denotara como:

$$\bar{\Theta}(x) \equiv \bar{\psi}(x)\left(i\overleftarrow{\partial}_x^k\beta_k + m\right)\left(1 - \beta_0^2\right) \approx 0. \quad (3.168)$$

---

El numero de multiplicadores de lagrange que se consiguen determinar de las relaciones (3.165) y (3.167), al igual que el numero de vínculos secundarios que resultan de la consistencia de  $(\Gamma, \bar{\Gamma})$ , dependerá de la dimensión de los operadores  $(P_1, P_2)$ , es decir, de la representación de los campos de DKP.

Debido a la existencia de vínculos secundarios, la consistencia de los mismos deberá ser considerada, es decir, se exigirá que:

$$\dot{\Theta}(x) \approx 0 \quad , \quad \dot{\bar{\Theta}}(x) \approx 0. \quad (3.169)$$

Con el fin de calcular las relaciones anteriores, se utilizará las siguientes identidades que resultan de calcular los PB entre los vínculos secundarios y las vínculos primarios:

$$\begin{aligned} \left\{ \Theta_a(x), \bar{\Gamma}_b(y) \right\} &= \left[ (1 - \beta_0^2) (i\beta_k \partial_x^k - m) \right]_{ab} \delta^3(x - y), \\ \left\{ \bar{\Theta}_a(x), \Gamma_b(y) \right\} &= \left[ \left( i \overleftarrow{\partial}_y^k \beta_k + m \right) (1 - \beta_0^2) \right]_{ab}^T \delta^3(x - y), \end{aligned} \quad (3.170)$$

donde todas las otras posibles combinaciones de PB entre dichos vínculos es cero. Así, la consistencia del vínculo secundario  $\Theta(x)$  resulta en:

$$\dot{\Theta} = \left( 1 - \beta_0^2 \right) \left( i\beta_k \partial_x^k - m \right) \alpha(x) \approx 0. \quad (3.171)$$

Igualmente, en el caso del vínculo  $\bar{\Theta}(x)$  se obtiene:

$$\dot{\bar{\Theta}} = \bar{\alpha}(x) \left( i \overleftarrow{\partial}_x^k \beta_k + m \right) \left( 1 - \beta_0^2 \right) \approx 0. \quad (3.172)$$

Se analiza de (3.165) y (3.167) que el proyector  $\beta_0^2$  selecciona unas componentes de los multiplicadores de Lagrange  $\alpha(x), \bar{\alpha}(x)$ , en tanto que las relaciones (3.171) y (3.172) indican que el proyector  $(1 - \beta_0^2)$  establece condiciones sobre las otras componentes de los multiplicadores. Una manera de verificar la anteriores afirmaciones es considerar las representación de las matrices  $\beta^\mu$ . Si consideramos en primer el caso cuando el campo de DKP esta asociado a los

campos de espín 0, es posible obtener la siguiente representación de los proyectores al utilizar (3.145):

$$\beta_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} - \beta_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.173)$$

De manera, a partir de (3.165) y (3.167) se determinan las componentes (1, 2) asociados a los multiplicadores de Lagrange  $\alpha(x), \bar{\alpha}(x)$ , mientras que de (3.171) y (3.172) se establecen relaciones para las componentes (3, 4, 5). Ahora, si el campo DKP describe partículas de espín 1, las matrices  $\beta^\mu$  podrán tener la representación (3.146), de maneras que los proyectores en consideración tendrán la siguiente forma:

$$\beta_0^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I} - \beta_0^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.174)$$

con lo cual, de (3.165) y (3.167) se calculan las componentes (2, 3, 4, 8, 9, 10), en tanto que de (3.171) y (3.172) se determinan las componentes (1, 5, 6, 7) de los multiplicadores.

Los resultados anteriores permiten garantizar que el conjunto de vínculos  $(\Gamma, \bar{\Gamma}, \Theta, \bar{\Theta})$  son de segunda clase. Estos vínculos primarios y secundarios serán agrupados y renombrados de la siguiente manera:

$$\theta_A = (\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4) \equiv (\Gamma, \Theta, \bar{\Gamma}, \bar{\Theta}), \quad (3.175)$$

de manera que podamos construir una matriz de vínculos de segunda clase con elementos definidos por:

$$G_{AB}(x, y) \equiv \left\{ \theta_A(x), \theta_B(y) \right\}. \quad (3.176)$$

A partir de los PB (3.158) y (3.170) se puede mostrar que ésta matriz tendrá la siguiente estructura:

$$G(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}(x, y) \\ \mathbf{D}(x, y) & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.177)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{C}(x, y) &\equiv \begin{pmatrix} i\beta_0 & (i\partial_x^k \beta_k - m)(1 - \beta_0^2) \\ (1 - \beta_0^2)(i\beta_k \partial_x^k - m) & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \\ \mathbf{D}(x, y) &\equiv \begin{pmatrix} -i\beta_0^T & [(1 - \beta_0^2)(i\beta_k \partial_x^k + m)]^T \\ [(i\partial_x^k \beta_k + m)(1 - \beta_0^2)]^T & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \end{aligned} \quad (3.178)$$

Con el fin de eliminar los vínculos de segunda clase de la teoría se deberá introducir los Corchetes de Dirac DB, los cuales son definidos para dos variables dinámicas  $A(x) \equiv A[\psi, \bar{\psi}, \pi, \bar{\pi}]$  y  $B(x) \equiv B[\psi, \bar{\psi}, \pi, \bar{\pi}]$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left\{ A_i(x), B_j(y) \right\}_D &= \left\{ A_i(x), B_j(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ A_i(x), \theta_A(u) \right\} \\ &\quad G_{AB}^{-1}(u, v) \left\{ \theta_B(v), B_j(y) \right\}, \end{aligned} \quad (3.179)$$

donde  $G_{AB}^{-1}(x, y)$  denota la inversa de la matriz de vínculos (3.177). Bajo la definición de los DB (3.179) el conjunto de vínculos  $(\Gamma, \bar{\Gamma}, \Theta, \bar{\Theta})$  se tornan en identidades fuertes, de manera que podemos determinar la siguiente identidad a partir de los vínculos primarios:

$$\bar{\pi} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta_0, \quad \pi = -\frac{i}{2} \beta_0 \psi, \quad (3.180)$$

es decir, los momentos canónicos  $(\pi, \bar{\pi})$  se tornan en variables dependientes en la teoría. Con el fin de calcular los correspondientes PD se debe especificar la representación del campo de DKP que se desea estudiar, en nuestro caso campos de espin 0, de manera que los campos  $(\psi, \bar{\psi})$  están definidos por cinco componentes. Por tanto, utilizando la representación matricial de las matrices  $\beta^\mu$  dadas por (3.145), los vínculos  $(\Theta_a, \bar{\Theta}_a)$  tendrán para  $a = 3, 4, 5$  las únicas componentes no triviales ya que como se menciono anteriormente, la consistencia de estos determina esas componentes de los multiplicadores de Lagrange. Así, es posible mostrar que las matrices  $\mathbf{C}(x, y)$  y  $\mathbf{D}(x, y)$  se representan como:

$$\mathbf{C}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & -i\partial_1^x & -i\partial_2^x & -i\partial_3^x \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m \\ i\partial_1^x & 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_2^x & 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

$$\mathbf{D}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & i\partial_1^x & i\partial_2^x & i\partial_3^x \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \\ -i\partial_1^x & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\partial_2^x & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y).$$

(3.181)

La matriz inversa asociada a  $G(x, y)$  se calcula a partir de:

$$\int d^3z G(x, z) G^{-1}(z, y) = \int d^3z G^{-1}(x, z) G(z, y) = \mathbf{I} \delta^3(x - y), \quad (3.182)$$

donde  $\mathbf{I}$  representa la matriz identidad de dimensión  $16 \times 16$ . A partir de la relación (3.182) y de la forma funcional de la matriz  $G(x, y)$  dada por (3.177),

---

la matriz  $G^{-1}(x, y)$ , tendrá la siguiente estructura:

$$G^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{D}^{-1}(x, y) \\ \mathbf{C}^{-1}(x, y) & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.183)$$

donde  $\mathbf{C}^{-1}(x, y)$  y  $\mathbf{D}^{-1}(x, y)$  son las matrices inversas correspondientes a  $\mathbf{C}(x, y)$  y  $\mathbf{D}(x, y)$  respectivamente y que tienen la siguiente elementos:

$$\mathbf{D}^{-1}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & \frac{1}{m}\partial_1^x & \frac{1}{m}\partial_2^x & \frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m}\partial_1^x & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m}\partial_2^x & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \\ 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

$$\mathbf{C}^{-1}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -\frac{1}{m}\partial_1^x & -\frac{1}{m}\partial_2^x & -\frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_1^x & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_2^x & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{m} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \quad (3.184)$$

Ahora, con el fin de calcular los DB correspondientes a los campos se utilizara los siguientes PB:

$$\begin{cases} \{ \psi_i(x), \theta_{3_l}(u) \} = \delta_{il} \delta^3(x - u), \\ \{ \theta_{1_l}(v), \bar{\psi}_j(y) \} = -\delta_{lj} \delta^3(v - y), \end{cases} \quad (3.185)$$

con lo cual es posible determinar que el DB correspondientes a los campos de

DKP  $(\psi(x), \bar{\psi}(x))$  es:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_i(x), \bar{\psi}_j(y) \right\}_D &= \underbrace{\left\{ \psi_i(x), \bar{\psi}_j(y) \right\}}_0 - \int d^3u d^3v \left\{ \psi_i(x), \theta_{A_l}(u) \right\} \\ &\quad G_{A_l B_m}^{-1}(u, v) \left\{ \theta_{B_m}(v), \bar{\psi}_j(y) \right\} \\ &= G_{3_i 1_j}^{-1}(x, y). \end{aligned} \quad (3.186)$$

De las relaciones (3.183) y (3.184) se determina que ésta submatriz tiene las siguientes componentes:

$$\left\{ \psi_i(x), \bar{\psi}_j(y) \right\}_D = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & -\frac{1}{m}\partial_1^x & -\frac{1}{m}\partial_2^x & -\frac{1}{m}\partial_3^x \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_1^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_2^x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m}\partial_3^x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (3.187)$$

Todas las otras posibles combinaciones de DB entre los campos  $(\psi(x), \bar{\psi}(x))$  son nulos. A partir de (3.187) es posible deducir el siguiente DB:

$$\left\{ \psi_0(x), \bar{\psi}_1(y) \right\}_D = -i\delta^3(x-y). \quad (3.188)$$

Con el fin de comparar con el resultado que se conoce para el campo escalar complejo se considerara la representación del campo  $\psi(x)$  dada por la expresión (3.118), a partir del cual es posible determinar  $\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x) \bar{\eta}^0$ , donde la matriz  $\bar{\eta}^0$  en la representación considerada para las matrices  $\beta^\mu$  tiene la forma:

$$\bar{\eta}^0 = 2\beta_0^2 - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.189)$$

De esta manera, los campos  $(\psi(x), \bar{\psi}(x))$  se expresan, en componentes, de la

siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi &= \begin{pmatrix} \sqrt{m}\bar{\varphi} \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial_0\bar{\varphi} \\ -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_1\bar{\varphi} \\ -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_2\bar{\varphi} \\ -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_3\bar{\varphi} \end{pmatrix}, \\ \bar{\psi} &= \left( \sqrt{m}\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_0\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_1\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_2\bar{\varphi}^* \quad -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_3\bar{\varphi}^* \right), \end{aligned} \quad (3.190)$$

de manera que se puede determinar que:  $\psi_0(x) = \sqrt{m}\bar{\varphi}(x)$  y  $\bar{\psi}_1 = -\frac{i}{\sqrt{m}}\partial_0\bar{\varphi}^*(x)$ , de manera que el DB (3.188) se re escribe como:

$$\left\{ \bar{\varphi}(x), \partial_0\bar{\varphi}^*(x) \right\}_D = \delta^3(x-y), \quad (3.191)$$

resultado que es coherente con la teoría que describe el campo escalar complejo. Los DB asociados a los momentos canónicos  $(\pi, \bar{\pi})$  podrán ser derivados a partir de las identidades (3.180). Un análisis equivalente deberá ser realizado si se espera que los campos de DKP describan partículas de espín 1, en éste caso se deberá considerar la representación de las matrices  $\beta^\mu$  dada por (3.146) y con la matriz de vínculos de segunda clase  $G(x, y)$  siendo de  $32 \times 32$ .

### 3.9. Interacción con Campo Electromagnético

La interacción de un campo de DKP con el campo electromagnético se estudia mediante la prescripción de acople mínimo, según el cual:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu. \quad (3.192)$$

---

Así, la correspondiente densidad Lagrangiana (3.147) se escribe,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu (D_\mu \psi) - \frac{i}{2} (\overline{D_\mu \psi}) \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\
&= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu (D_\mu \psi) - \frac{i}{2} (D_\mu^* \bar{\psi}) \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\
&= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} (\partial_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi + e \bar{\psi} \beta^\mu A_\mu \psi, \quad (3.193)
\end{aligned}$$

de donde el Lagrangiano de interacción es:

$$\mathcal{L}_I = e \bar{\psi} \beta^\mu A_\mu \psi. \quad (3.194)$$

Con el fin de comparar con el término de interacción de la teoría de KGF, se podría intentar usar la función de onda física para el campo de DKP  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  expresadas por (3.190). De la representación (3.145) de las matrices  $\beta^\mu$ , se deduce que:

$$\beta^\mu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ A_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.195)$$

de manera que:

$$\mathcal{L}_I = e \bar{\psi} \beta^\mu A_\mu \psi = ie A_\mu \left[ \bar{\varphi}^* (\partial^\mu \bar{\varphi}) - (\partial^\mu \bar{\varphi}^*) \bar{\varphi} \right]. \quad (3.196)$$

La relación anterior se diferencia del Lagrangiano de interacción de la teoría de KGF,

$$\mathcal{L}_{IKGF} = ie A^\mu \left[ \bar{\varphi}^* \partial_\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial_\mu \bar{\varphi}^* \right] + g^2 A_\mu A^\mu \bar{\varphi} \varphi^*, \quad (3.197)$$

en el término cuadrático. Éste resultado da a entender que la equivalencia entre la teoría de DKP y la teoría de KGF solo es valido en el caso libre. No obstante, se mostrará que ésta diferencia resulta de usar una incorrecta representación de la forma física del campo DKP (3.118) ya que su derivación se dio en el caso de campos libres.

Mostremos en primer lugar que la representación (3.118) para la forma física del campo es inconsistente con la invariancia de gauge que deberá poseer la teoría. Bajo una transformación de gauge local el campos de DKP debe comportarse como:

$$\psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{ie\alpha(x)}\psi(x), \quad (3.198)$$

siendo que las componentes físicas deberán transformar de la siguiente manera:

$$\bar{\varphi}(x) \rightarrow \bar{\varphi}'(x) = e^{ie\alpha(x)}\bar{\varphi}(x). \quad (3.199)$$

Usando (3.199) en la forma física del campo de DKP (3.118) se obtiene:

$$\begin{aligned} \psi' &= \left( \begin{array}{c} \sqrt{m}\bar{\varphi}' \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial^\mu\bar{\varphi}' \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \sqrt{m}e^{ie\alpha(x)}\bar{\varphi} \\ \frac{i}{\sqrt{m}}e^{ie\alpha(x)}\partial^\mu\bar{\varphi} - \frac{e}{\sqrt{m}}(\partial^\mu\alpha)e^{ie\alpha}\bar{\varphi} \end{array} \right) \\ &\neq e^{ie\alpha} \left( \begin{array}{c} \sqrt{m}\bar{\varphi} \\ \frac{i}{\sqrt{m}}\partial^\mu\bar{\varphi} \end{array} \right), \end{aligned}$$

lo que da a entender que la expresión que fue derivada en el caso libre ya no es valida en la presencia de interacción. Una manera de dar solución a éste problema consiste en cambiar la forma física del campo  $\psi(x)$  y reemplazarlo por:

$$\psi = \left( \begin{array}{c} \sqrt{m}\bar{\varphi}' \\ \frac{i}{\sqrt{m}}D^\mu\bar{\varphi} \end{array} \right), \quad (3.200)$$

donde  $D^\mu$  es la derivada covariante definida por (3.192), de manera que garantiza que:

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \left( \begin{array}{c} \sqrt{m}\bar{\varphi}' \\ \frac{i}{\sqrt{m}}D'^\mu\bar{\varphi}' \end{array} \right) = \left( \begin{array}{c} \sqrt{m}e^{ie\alpha}\bar{\varphi} \\ \frac{i}{\sqrt{m}}(\partial^\mu - ieA'^\mu)e^{ie\alpha}\bar{\varphi} \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c} \sqrt{m}e^{ie\alpha(x)}\bar{\varphi} \\ \frac{i}{\sqrt{m}}(e^{ie\alpha}\partial^\mu\bar{\varphi} + ie\partial^\mu\alpha e^{ie\alpha}\bar{\varphi} - ieA^\mu e^{ie\alpha}\bar{\varphi} + ie\partial^\mu\alpha e^{ie\alpha}\bar{\varphi}) \end{array} \right) \\ &= \left( \begin{array}{c} \sqrt{m}e^{ie\alpha(x)}\bar{\varphi} \\ \frac{i}{\sqrt{m}}e^{ie\alpha}(\partial^\mu - ieA^\mu)\bar{\varphi} \end{array} \right) = e^{ie\alpha} \left( \begin{array}{c} \sqrt{m}\bar{\varphi} \\ \frac{i}{\sqrt{m}}D^\mu\bar{\varphi} \end{array} \right) \\ &= e^{ie\alpha}\psi, \end{aligned}$$

---

donde se ha tenido en cuenta la transformación del campo gauge:  $A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \alpha$ . Por lo tanto, se puede garantizar la compatibilidad entre las dos transformaciones en (3.198) y (3.199).

Ahora, las ecuaciones de campo que resultan de la densidad Lagrangiana (3.193) son:

$$\left( i\beta^\mu D_\mu - m \right) \psi = 0. \quad (3.201)$$

$$\bar{\psi} \left( iD_\mu^* \beta^\mu + m \right) = 0. \quad (3.202)$$

Utilizando las expresiones (3.99) y (3.104), se deduce que al aplicar los operadores  $P$  y  $P^\mu$  en la ecuación de campos (3.201) se obtiene:

$$(P^\mu \psi) = \frac{i}{m} D^\mu (P\psi). \quad (3.203)$$

$$\left( D_\mu D^\mu + m^2 \right) (P\psi) = 0$$

La relación anterior muestra que todos los elementos de la matriz columna  $P\psi$  son campos escalares de masa  $m$  obedeciendo la ecuación de KGF con acoplamiento mínimo, en tanto que  $P^\mu \psi$  es  $\frac{i}{m}$  veces la derivada covariante del correspondiente elemento  $P\psi$ . Utilizando el mismo procedimiento y la representación de las matrices  $\beta^\mu$  utilizadas para derivar (3.118) en el caso libre se puede deducir que la correcta forma física para el campo de DKP  $\psi$  cuando esta presente la interacción con el campo electromagnético es dado por (3.200), siendo que

$$P\psi = \sqrt{m} \begin{pmatrix} \bar{\varphi} \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix}, \quad P^\mu \psi = \frac{i}{\sqrt{m}} \begin{pmatrix} D^\mu \bar{\varphi} \\ 0_{4 \times 1} \end{pmatrix}, \quad (3.204)$$

de manera que a partir de (3.203) se deduce:

$$\left( D_\mu D^\mu + m^2 \right) \bar{\varphi} = 0. \quad (3.205)$$

Por lo tanto, para garantizar la iteración con un campo electromagnético en la teoría de DKP de forma coherente no es suficiente tener en cuenta la derivada

---

covariante en la densidad Lagrangiana (3.193), lo cual lleva al Lagrangiano de interacción (3.194), sino que la forma física del campo de DKP  $\psi$  deberá poseer una derivada covariante entre sus componentes, como se indica en (3.200). Utilizando la versión correcta del campo DKP dada por (3.200) en la densidad Lagrangiana (3.193) permite determinar, a excepción de un término de frontera, que

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \bar{\varphi}^* \partial_\mu \bar{\varphi} - m^2 \bar{\varphi}^* \bar{\varphi} + ie A_\mu \left( \bar{\varphi}^* \partial^\mu \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial^\mu \bar{\varphi}^* \right) + e^2 A^\mu A_\mu \bar{\varphi}^* \bar{\varphi},$$

a partir del cual se puede identificar el correcto Lagrangiano de Interacción de la teoría de DKP expresada anteriormente por (3.197). Entonces, utilizando la correcta forma física del campo de DKP  $\psi$  en el caso de acoplamiento mínimo, es posible recuperar el Lagrangiano de la teoría de KGF con el apropiado término de interacción, así, la equivalencia de esas teorías se mantiene tanto en el caso libre como también cuando esta presente una interacción con campo electromagnético.

## Capítulo 4

# Teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) Libre en las Coordenadas de Plano Nulo

### 4.1. Introducción

*El éxito alcanzado por la ecuación de Dirac con el fin de describir partículas relativistas de espín  $\frac{1}{2}$  consiguió inspirar a algunos investigadores a buscar una ecuación de onda de primer orden que pudiera describir partículas de espín 0 y espín 1. Fue así que G. Petiau [83], R. Duffin [84], and N. Kemmer [85] propusieron una ecuación de primer orden que describiría ésta clase de partículas de una manera unificada y siguiendo las ideas propuestas en el trabajo de de Broglie [86]. La ecuación de primer orden es conocida como teoría DKP y su estructura es muy similar a la ecuación de Dirac pero con una álgebra matricial diferente. La característica de la teoría es que su representación, en un espacio-tiempo  $(3 + 1)$  dimensional, puede ser descompuesta en tres representaciones*

---

irreducibles: La representación  $5 \times 5$  que se asocia a las partículas de espín 0, la representación  $10 \times 10$  correspondiente a partículas de espín 1 y finalmente la representación  $1 \times 1$  que es trivial y la cual no tiene ningún significado físico.

Durante el periodo de 1939 hasta aproximadamente 1970 la mayoría de los trabajos relacionados a la ecuación de DKP fueron direccionados al desarrollo del formalismo y la investigación de partículas cargadas DKP en interacción con un campo electromagnético. Cálculos basados en las ecuaciones de KGF y DKP para diferentes procesos dieron idénticos resultados, algunos de ellos consideraban correcciones a un loop [87]. Una importante contribución para entender estas cuestiones fue hecha por A. Wightman [88], quien mostró que cuando el campo DKP tiene un acoplamiento mínimo con el campo electromagnético, la ecuación DKP para partículas de espín 0 es estable bajo una suave perturbación local de campos externos.

En este capítulo se estudiara la estructura del campo DKP libre en el formalismo de plano nulo [89] en  $3 + 1$  dimensiones.

## 4.2. Ecuación de DKP en las Coordenadas de Plano Nulo

En  $3 + 1$  dimensiones la métrica  $g^{\mu\nu}$  posee la siguiente representación en las coordenadas de plano nulo:

$$g^{\alpha\mu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.1)$$

De la relación anterior y del álgebra de las matrices  $\beta^\mu$ :

$$\beta^\mu \beta^\alpha \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\alpha \beta^\mu = \beta^\mu g^{\alpha\nu} + \beta^\nu g^{\alpha\mu},$$

---

se deducen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\beta^+ \beta^- \beta^+ &= \beta^+ \quad , \quad \beta^- \beta^+ \beta^- = \beta^- \\
\beta^+ (\beta^-)^2 + (\beta^-)^2 \beta^+ &= \beta^- \quad , \quad \beta^- (\beta^+)^2 + (\beta^+)^2 \beta^- = \beta^+ \\
(\beta^+)^3 &= 0 \quad , \quad (\beta^-)^3 = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

En  $3 + 1$  dimensiones el campo de DKP tendrá la siguiente representación matricial:

$$\psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi^+ \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^- \end{pmatrix}, \tag{4.3}$$

a partir del cual los operadores de proyección serán definidos de manera que:

$$\begin{aligned}
P\psi &= \begin{pmatrix} \varphi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^+\psi = \begin{pmatrix} \psi^+ \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^1\psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
P^2\psi &= \begin{pmatrix} \psi^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^-\psi = \begin{pmatrix} \psi^- \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

---

Así, una conveniente representación de dichos proyectores es de la forma:

$$\begin{aligned}
P &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
P^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ahora, usando el hecho que

$$P^\mu = P\beta^\mu \quad , \quad P^\mu\beta^\nu = P\eta^{\mu\nu}, \tag{4.6}$$

una conveniente representación de las matrices  $\beta$  es:

$$\begin{aligned}
\beta^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
\beta^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

---

### 4.3. Estructura de Vínculos

La densidad Lagrangiana correspondiente al campo de DKP en 3+1 dimensiones se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi \\
&= \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ (\partial_+ \psi) - \frac{i}{2} (\partial_+ \bar{\psi}) \beta^+ \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^A (\partial_A \psi) - \frac{i}{2} (\partial_A \bar{\psi}) \beta^A \psi \\
&\quad - m \bar{\psi} \psi,
\end{aligned} \tag{4.8}$$

donde  $A = -, 1, 2$ . Los correspondientes momentos canónicos  $(p, \bar{p})$  conjugados a los campos  $(\bar{\psi}, \psi)$ , respectivamente, son definidos como:

$$\bar{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \quad , \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = -\frac{i}{2} \beta^+ \psi, \tag{4.9}$$

a partir del cual se deduce el siguiente conjunto de vínculos primarios:

$$\theta \equiv p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0 \quad , \quad \bar{\theta} \equiv \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0. \tag{4.10}$$

Debido a la dimension de los campos  $(\bar{\psi}, \psi)$ , existe un conjunto total de diez vínculos primarios. Con el fin de analizar su correspondiente consistencia se debe introducir la densidad Hamiltoniana canónica de la teoría el cual se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}_C \equiv \bar{p} \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} p - \mathcal{L} = \bar{\psi} \left[ \frac{i}{2} \beta^A \left( \overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + m \right] \psi,$$

con lo cual, el correspondiente Hamiltoniano canónico se expresa:

$$H_C = \int d^3y \mathcal{H}_C, \tag{4.11}$$

con  $d^3x \equiv dx^- dx^1 dx^2$ . La consistencia del conjunto de vínculos primarios es analizados a partir del Hamiltoniano primario el cual se construye adicionando

---

al Hamiltoniano canónico una combinación de los vínculos primarios, es decir:

$$H_P = H_C + \int d^3x \left[ \bar{\lambda}\theta + \bar{\theta}\lambda \right], \quad (4.12)$$

donde  $(\lambda, \bar{\lambda})$  son multiplicadores de Lagrange a ser determinados. El espacio de fase de la teoría es definido por las coordenadas  $(\psi, \bar{\psi}, \bar{p}, p)$ , de manera que los corchetes de Poisson fundamentales a tiempos iguales ( $x^+ = y^+$ ) correspondientes a estas coordenadas son definidos por,

$$\left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} = \delta_{ab} \delta^3(x-y), \quad (4.13)$$

con la delta de Dirac en tres dimensiones definida como:

$$\delta^3(x-y) \equiv \delta(x^- - y^-) \delta(x^1 - y^1) \delta(x^2 - y^2).$$

A partir de (4.13) es posible comprobar que los vínculos primarios satisfacen las siguientes corchetes de Poisson:

$$\left\{ \theta_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} = i\beta_{ab}^+ \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\theta}_a(x), \theta_b(y) \right\} = -i\beta_{ba}^+ \delta^3(x-y). \quad (4.14)$$

Utilizando los resultados previamente establecidos, las condiciones de consistencia sobre los vínculos primarios determinan que,

$$\dot{\theta} = (i\partial_A^x \beta^A - m) \psi + i\beta^+ \lambda \approx 0. \quad (4.15)$$

$$\dot{\bar{\theta}} = \bar{\psi} (\beta^A i\partial_A^x + m) + i\bar{\lambda} \beta^+ \approx 0. \quad (4.16)$$

En principio, las expresiones (4.15) y (4.16) permiten establecer condiciones sobre los diez multiplicadores de Lagrange  $(\lambda, \bar{\lambda})$ , sin embargo, debido a la naturaleza singular de las matrices  $\beta$ , será posible intuir que algunas componentes de dichos multiplicadores mantienen indeterminadas. Con el fin de poner en evidencia la afirmación anterior, se utilizará algunas propiedades de las matrices  $\beta$  y de los proyectores definidos con anterioridad que resultan del álgebra que

---

$P\beta^+ = P^+$	$P\beta^- = P^-$	$P\beta^k = P^k$	$P^+\beta^+ = 0$
$P^-\beta^+ = P$	$P^-\beta^- = 0$	$P^-\beta^k = 0$	$P^k\beta^+ = 0$
$\beta^-P = (P^+)^\dagger$	$\beta^+P = (P^-)^\dagger$	$\beta^kP = -(P^k)^\dagger$	$\beta^- (P^+)^\dagger = 0$
$\beta^- (P^-)^\dagger = P$	$\beta^+ (P^-)^\dagger = 0$	$\beta^k (P^-)^\dagger = 0$	$\beta^- (P^k)^\dagger = 0$
$P^+\beta^k = 0$	$P^k\beta^l = \delta_l^k P$	$\beta^k (P^+)^\dagger = 0$	$\beta^l (P^k)^\dagger = \delta_l^k P$
$P^+\beta^- = P$	$P^k\beta^- = 0$	$\beta^+ (P^+)^\dagger = P$	$\beta^+ (P^k)^\dagger = 0$

Cuadro 4.1: Algunas propiedades de las matrices  $\beta$ .

satisfacen las mismas matrices y como se muestran en el cuadro 4.1. De donde se puede deducir que

$$P = P^\dagger \quad , \quad P^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = P \quad , \quad \beta^+ (\beta^-)^2 (P^-)^\dagger = P. \quad (4.17)$$

Se muestra que de la consistencia del vínculo  $\theta(x)$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
P\dot{\theta} &= i\partial_-^x (P^-\psi) + i\partial_k^x (P^k\psi) - m(P\psi) + i(P^+\lambda) \approx 0 \\
P^+\dot{\theta} &= i\partial_-^x (P\psi) - m(P^+\psi) \approx 0, \\
P^l\dot{\theta} &= i\partial_i^x (P\psi) - m(P^l\psi) \approx 0, \\
P^-\dot{\theta} &= -m(P^-\psi) + i(P\lambda) \approx 0.
\end{aligned} \quad (4.18)$$

Así, dos componentes del multiplicador de Lagrange  $\lambda(x)$  pueden ser determinadas:  $(P\lambda, P^+\lambda)$ , de manera que nuevos vínculos deberán surgir de (4.15) los cuales se podrán extraer aplicando el proyector  $(1 - \beta^+\beta^-)$ , de manera que se deduce el siguiente vínculo secundario:

$$\omega_\delta = \left[ (1 - \beta^+\beta^-) (\beta^A i\partial_A^x - m) \psi \right]_\delta \approx 0, \quad (4.19)$$

con  $\delta = 2, 3, 4$ . Al utilizar nuevamente los operadores de proyección para el

---

campo de DKP, es posible observar de la relación anterior que:

$$\begin{aligned}
P^+\omega &= P^+ (\beta^- i\partial_-^x \psi + \beta^k i\partial_k^x \psi - m\psi) = i\partial_-^x (P\psi) - m (P^+\psi) \\
&= P^+\dot{\theta} \approx 0, \\
P^l\omega &= P^l (\beta^- i\partial_-^x \psi + \beta^k i\partial_k^x \psi - m\psi) = i\partial_l^x (P\psi) - m (P^l\psi) \\
&= P^l\dot{\theta} \approx 0, \\
P\omega &= 0, \\
P^-\omega &= 0,
\end{aligned}$$

resultados que son consistentes con la ecuación (4.18).

De igual forma, al analizar la consistencia del vínculo  $\bar{\theta}(x)$ , via proyectores, es posible determinar que:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\theta}}P &= i\partial_-^x [\bar{\psi} (P^+)^\dagger] - i\partial_k^x [\bar{\psi} (P^k)^\dagger] + m (\bar{\psi}P) + i [\bar{\lambda} (P^-)^\dagger] \approx 0 \\
\dot{\bar{\theta}}(P^+)^\dagger &= m [\bar{\psi} (P^+)^\dagger] + i (\bar{\lambda}P) \approx 0, \\
\dot{\bar{\theta}}(P^l)^\dagger &= i\partial_l^x (\bar{\psi}P) + m [\bar{\psi} (P^l)^\dagger] \approx 0, \\
\dot{\bar{\theta}}(P^-)^\dagger &= i\partial_-^x (\bar{\psi}P) + m [\bar{\psi} (P^-)^\dagger] \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Entonces, en lo que corresponde al multiplicador  $\bar{\lambda}(x)$ , únicamente las componentes  $(\bar{\lambda}P, \bar{\lambda}(P^-)^\dagger)$  pueden ser fijadas y dos nuevos vínculos secundarios deberán surgir. Los vínculos secundarios son extraídos mediante la aplicación del proyector  $(1 - \beta^- \beta^+)$ , con lo cual se establece que:

$$\bar{\omega}_\delta = \left[ \bar{\psi} (i\partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_\delta \approx 0, \tag{4.21}$$

con  $\delta = 3, 4, 5$ . Con el fin de garantizar que los resultados en la ecuación (4.21)

son coherentes, apliquemos los operadores de proyección del campo de DKP:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} (P^l)^\dagger &= (i\partial_-^x \bar{\psi} \beta^- + i\partial_k^x \bar{\psi} \beta^k + m\bar{\psi}) (P^l)^\dagger = i\partial_l^x (\bar{\psi} P) + m [\bar{\psi} (P^l)^\dagger] \\
&= \dot{\bar{\theta}} (P^l)^\dagger \approx 0 \\
\bar{\omega} (P^-)^\dagger &= (i\partial_-^x \bar{\psi} \beta^- + i\partial_k^x \bar{\psi} \beta^k + m\bar{\psi}) (P^-)^\dagger = i\partial_-^x (\bar{\psi} P) + m [\bar{\psi} (P^-)^\dagger] \\
&= \dot{\bar{\theta}} (P^-)^\dagger \approx 0 \\
\bar{\omega} P &= 0, \\
\bar{\omega} (P^+)^\dagger &= 0,
\end{aligned}$$

expresiones equivalentes a aquellos derivados en (4.20). Así, La teoría posee el siguiente conjunto de seis vínculos secundarios:

$$\begin{aligned}
\omega_\delta &= \left[ (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A i\partial_A^x - m) \psi \right]_\delta \approx 0, \quad \delta = 2, 3, 4, \quad (4.22) \\
\bar{\omega}_\delta &= \left[ \bar{\psi} (i\partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_\delta \approx 0, \quad \delta = 3, 4, 5,
\end{aligned}$$

los cuales satisfacen los siguientes corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned}
\left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[ (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A i\partial_A^x - m) \right]_{ab} \delta^3(x - y), \\
\left\{ \bar{\theta}_a(x), \omega_b(y) \right\} &= \left[ (1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A i\partial_A^x + m) \right]_{ab}^T \delta^3(x - y), \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[ (i\partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{ab}^T \delta^3(x - y), \quad (4.23) \\
\left\{ \theta_a(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= \left[ (i\partial_A^x \beta^A - m) (1 - \beta^- \beta^+) \right]_{ab} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

A partir de (4.23) se muestra que la consistencia del vínculo  $\omega(x)$  implica que:

$$\dot{\omega} = (1 - \beta^+ \beta^-) [( \beta^A i\partial_A^x - m) \lambda(x)] \approx 0, \quad (4.24)$$

de donde es posible extraer los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
P\dot{\omega} &= 0, \\
P^-\dot{\omega} &= 0, \\
P^l\dot{\omega} &= i\partial_l^x (P\lambda) - m (P^l\lambda) \approx 0, \\
P^+\dot{\omega} &= i\partial_-^x (P\lambda) - m (P^+\lambda) \approx 0.
\end{aligned} \quad (4.25)$$

---

La ecuación (4.15) se puede escribir como:

$$\beta^+ \lambda \approx -\partial_-^x \beta^- \psi - \partial_k^x \beta^k \psi - im\psi.$$

Utilizando los proyectores del campo de DKP y las propiedades expresadas en la tabla 4.1 es posible deducir de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} (P^+ \lambda) &= -\partial_-^x (P^- \psi) - \partial_k^x (P^k \psi) - im (P\psi), \\ (P\lambda) &= -im (P^- \psi). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Por lo tanto, la cuarta ecuación que aparece en (4.25) se puede re escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} P^+ \dot{\omega} &= m\partial_-^x (P^- \psi) + m\partial_-^x (P^- \psi) + m\partial_k^x (P^k \psi) + im^2 (P\psi) \\ &= 2m\partial_-^x (P^- \psi) + m\partial_k^x (P^k \psi) + im^2 (P\psi) \\ &= -P \left( -2m\beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \psi. \end{aligned}$$

La relación (4.17) permite expresar el resultado anterior como:

$$\begin{aligned} P^+ \dot{\omega} &= -P^+ \left\{ (\beta^-)^2 \beta^+ \left( -2m\beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \psi \right\} \\ &\approx -P^+ \left\{ (\beta^-)^2 \beta^+ \left( -2m\beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \psi \right\}, \end{aligned}$$

de manera que hemos podido extraer un vínculo terciario definido de la siguiente manera:

$$\Omega \equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left( -2m\beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \psi \approx 0 \quad (4.27)$$

Ahora, utilizando (4.26) en la tercera ecuación de (4.25) se establece que:

$$P^l \dot{\omega} = m\partial_l^x (P^- \psi) - m (P^l \lambda), \quad (4.28)$$

lo cual determina las componentes  $l = 1, 2$  del multiplicador de Lagrange  $\lambda(x)$ , es decir:  $P^l \lambda$ .

Ahora, al estudiar la consistencia del vínculo  $\bar{\omega}(x)$  se determina que:

$$\dot{\bar{\omega}} = \bar{\lambda} (i\partial_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+) \approx 0. \quad (4.29)$$

---

Los proyectores del campo DKP indican que:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\omega}} P &= 0, \\
\dot{\bar{\omega}} (P^+)^{\dagger} &= 0, \\
\dot{\bar{\omega}} (P^l)^{\dagger} &= i\partial_l^x (\bar{\lambda} P) + m [\bar{\lambda} (P^l)^{\dagger}] \approx 0, \\
\dot{\bar{\omega}} (P^-)^{\dagger} &= i\partial_-^x (\bar{\lambda} P) + m [\bar{\lambda} (P^-)^{\dagger}] \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

La ecuación (4.16) se escribe como:

$$\bar{\lambda} \beta^+ \approx -\partial_-^x \bar{\psi} \beta^- - \partial_k^x \bar{\psi} \beta^k + im \bar{\psi}, \tag{4.31}$$

de donde se puede deducir que:

$$\begin{aligned}
(\bar{\lambda} P) &= im [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}], \\
[\bar{\lambda} (P^-)^{\dagger}] &= -\partial_-^x [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}] + \partial_k^x [\bar{\psi} (P^k)^{\dagger}] + im (\bar{\psi} P).
\end{aligned}$$

De esta manera, la cuarta ecuación en (4.30) se expresa como:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\omega}} (P^-)^{\dagger} &= -m\partial_-^x [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}] - m\partial_-^x [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}] + m\partial_k^x [\bar{\psi} (P^k)^{\dagger}] + im^2 (\bar{\psi} P) \\
&= -2m\partial_-^x [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}] + m\partial_k^x [\bar{\psi} (P^k)^{\dagger}] + im^2 (\bar{\psi} P) \\
&= \bar{\psi} [-2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_k^x \beta^k + im^2] P \\
&= \left\{ \bar{\psi} [-2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_k^x \beta^k + im^2] \beta^+ (\beta^-)^2 \right\} (P^-)^{\dagger} \\
&\approx \left\{ \bar{\psi} \left[ -2m\beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x + im^2 \right] \beta^+ (\beta^-)^2 \right\} (P^-)^{\dagger},
\end{aligned}$$

donde la relación (4.17) ha sido utilizada. Entonces, se ha deducido un vínculo terciario definido que se define de la siguiente manera:

$$\bar{\Omega} \equiv \bar{\psi} \left[ -2m\beta^- \partial_-^x - m\beta^k \partial_k^x + im^2 \right] \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0. \tag{4.32}$$

Ahora, de la tercera ecuación en (4.30) se puede verificar que:

$$\dot{\bar{\omega}} (P^l)^{\dagger} = -m\partial_l^x [\bar{\psi} (P^+)^{\dagger}] + m [\bar{\lambda} (P^l)^{\dagger}] \approx 0, \tag{4.33}$$

---

lo que resulta en condiciones para las componentes  $l = 1, 2$  del multiplicador de Lagrange  $\bar{\lambda}(x)$ , es decir:  $\bar{\lambda}(P^l)^\dagger$ . En conclusión, se han obtenido el siguiente conjunto de vínculos terciarios en la teoría:

$$\begin{aligned}\Omega &\equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left( -2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \psi \approx 0, \\ \bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} \left( -2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x + im^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0.. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Al continuar con el procedimiento de Dirac la consistencia de los vínculos terciarios (4.34) deberá ser analizada, para tal fin, será necesario considerar los corchetes de Poisson de estos vínculos con los vínculos primario que han surgido en la teoría, es decir:

$$\begin{aligned}\{\Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y)\} &= \left[ (\beta^-)^2 \beta^+ \left( -2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\ \{\bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y)\} &= \left[ \left( -2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x + im^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_{ab}^T \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (4.35)$$

La consistencia del vínculo  $\Omega(x)$  implica que:

$$\dot{\Omega} = (\beta^-)^2 \beta^+ \left( -2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \lambda. \quad (4.36)$$

Los proyectores del campos DKP muestran que:

$$\begin{aligned}P^- \dot{\Omega} &= 0, \\ P^k \dot{\Omega} &= 0, \\ P \dot{\Omega} &= 0, \\ P^+ \dot{\Omega} &= P^+ (\beta^-)^2 \beta^+ \left( -2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \lambda \\ &= P \left( -2m \beta^- \partial_-^x - m \beta^k \partial_k^x - im^2 \right) \lambda \\ &= -2m \partial_-^x (P^- \lambda) - m \partial_k^x (P^k \lambda) - im^2 (P \lambda), \end{aligned}$$

relación que permite que se derive  $P^- \lambda$ , con lo cual todas las componentes del multiplicador de Lagrange  $\lambda(x)$  consiguen ser evaluadas.

---

De manera similar, la consistencia sobre el vínculo  $\bar{\Omega}(x)$  garantiza que:

$$\dot{\bar{\Omega}} = (-2m\partial_-^x \bar{\lambda}\beta^- - m\partial_k^x \bar{\lambda}\beta^k + im^2\bar{\lambda}) \beta^+ (\beta^-)^2, \quad (4.37)$$

de la cual se puede deducir:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}}(P^k)^\dagger &= 0, \\ \dot{\bar{\Omega}}(P^+)^\dagger &= 0, \\ \dot{\bar{\Omega}}P &= 0 \\ \dot{\bar{\Omega}}(P^-)^\dagger &= (-2m\partial_-^x \bar{\lambda}\beta^- - m\partial_k^x \bar{\lambda}\beta^k + im^2\bar{\lambda}) \beta^+ (\beta^-)^2 (P^-)^\dagger \\ &= (-2m\partial_-^x \bar{\lambda}\beta^- - m\partial_k^x \bar{\lambda}\beta^k + im^2\bar{\lambda}) P \\ &= -2m\partial_-^x [\bar{\lambda}(P^+)^\dagger] - m\partial_k^x [\bar{\lambda}(P^l)^\dagger] + im^2(\bar{\lambda}P), \end{aligned}$$

lo que permite determinar la componente  $\bar{\lambda}(P^+)^\dagger$  y por tanto determinar completamente el multiplicador de Lagrange  $\bar{\lambda}$ . Entonces, se concluye que no mas vínculos se generan en la teoría de DKP libre.

Se ha podido mostrar que la teoría esta caracterizada por el siguiente conjunto de vínculos:

$$\begin{aligned} \theta &= p + \frac{i}{2}\beta^+\psi \quad , \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+ \quad (4.38) \\ \omega &= (1 - \beta^+\beta^-) \left( \beta^A i\partial_A^x - m \right) \psi \quad , \quad \bar{\omega} = \bar{\psi} \left( i\partial_A^x \beta^A + m \right) (1 - \beta^-\beta^+) , \\ \Omega &\equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left( -2m\beta^-\partial_-^x - m\beta^k\partial_k^x - im^2 \right) \psi, \\ \bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} \left( -2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_k^x \beta^k + im^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2. \end{aligned}$$

Los corchetes de Poisson (4.14), (4.23) y (4.35) permiten establecer que este conjunto de vínculos es de segunda clase siendo ésta una característica que se comparte también cuando se analiza la teoría de DKP en el sistema de coordenadas de instante forma aun cuando el conjunto de vínculos terciarios no son propios de ellas y son consecuencia directa de utilizar el sistema de coordenadas de plano nulo.

## 4.4. Ecuaciones de movimiento

Ahora, se procede a estudiar la equivalencia entre las ecuaciones deducidas en el espacio de fase, es decir, las ecuaciones de Hamilton y su contraparte en el espacio de configuración que son las ecuaciones de Euler-Lagrange. Se sabe que la dinámica de la teoría en el espacio de fase es gobernada por el Hamiltoniano primario:

$$H_E = \int d^3y \left[ \bar{\psi} \left[ \frac{i}{2} \beta^A \left( \overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + m \right] \psi + \bar{\lambda} \theta + \bar{\theta} \lambda \right],$$

de manera que la evolución temporal de los campos DKP  $(\psi, \bar{\psi})$  es:

$$\dot{\psi} = \left\{ \psi, H_E \right\} = \lambda \quad , \quad \dot{\bar{\psi}} = \left\{ \bar{\psi}, H_E \right\} = \bar{\lambda}, \quad (4.39)$$

de manera que la evolución temporal de dichos campos, en principio, estaría indeterminada por la arbitrariedad de los multiplicadores de Lagrange  $(\lambda, \bar{\lambda})$ , no obstante, siendo que los vínculos que surgen en la teoría libre son de segunda clase, dichos multiplicadores son fijados gracias a la consistencia de los mismos.

Al estudiar la evolución temporal de los momentos  $(p, \bar{p})$  se determina que:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \left\{ p, H_E \right\} = \left( \beta^A i \partial_A^x - m \right) \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda, \\ \dot{\bar{p}} &= \left\{ \bar{p}, H_E \right\} = -\bar{\psi} \left( \beta^A i \partial_A^x + m \right) - \frac{i}{2} \bar{\lambda} (y) \beta^+. \end{aligned}$$

De la definición de los vínculos primarios es posible determinar que:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \partial_+ p = \left( \beta^A i \partial_A - m \right) \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \lambda = \left( \beta^A i \partial_A - m \right) \psi + \frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi \\ &\approx -\frac{i}{2} \beta^+ \partial_+ \psi, \end{aligned}$$

que se escribe como,

$$\left( \beta^\mu i \partial_\mu - m \right) \psi \approx 0 \quad (4.40)$$

---

Igualmente,

$$\begin{aligned}\dot{\bar{p}} &= \partial_+ \bar{p} = -\bar{\psi} \left( \beta^A i \partial_A + m \right) - \frac{i}{2} \bar{\lambda} \beta^+ = -\bar{\psi} \left( \beta^A i \partial_A + m \right) - \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+ \\ &\approx \frac{i}{2} \partial_+ \bar{\psi} \beta^+, \end{aligned}$$

con lo cual

$$\bar{\psi} (\beta^\mu i \partial_\mu + m) \approx 0. \quad (4.41)$$

Las relaciones (4.40) y (4.41) indican que las ecuaciones de campo que resultan de las dos formulaciones son débilmente equivalentes.

## 4.5. Corchetes de Dirac

A fin de invertir los vínculos de segunda clase sería conveniente proyectar los mismos, de manera que se descarten los elementos triviales que surgen de estos. Para ello, se utilizarán las siguientes propiedades de las matrices  $\beta$ :

$$\begin{aligned}(\beta^+)^T &= \beta^- \quad , \quad (\beta^-)^T = \beta^+, \\ (\beta^0)^\dagger &= \beta^0 \quad , \quad (\beta^1)^\dagger = -\beta^1, \\ P &= \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) \beta^- = \beta^- (\beta^+)^2 \beta^- = \beta^+ (\beta^-)^2 \beta^+, \\ P^+ &= P \beta^+ = \beta^+ (1 - \beta^+ \beta^-) = \beta^- (\beta^+)^2, \\ P^- &= P \beta^- = \beta^+ (\beta^-)^2, \\ P^+ \beta^- &= P = P^- \beta^+ \quad , \quad P^+ \beta^+ = 0 = P^- \beta^-, \end{aligned} \quad (4.42)$$

junto con

$$P = P^\dagger \quad , \quad P^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = P \quad , \quad \beta^+ (\beta^-)^2 (P^-)^\dagger = P,$$

al igual que los resultados presentados en la tabla 4.1. Utilizando la siguiente representación de las variables  $(\psi, \bar{\psi}, p, \bar{p})$  que definen el espacio de fase:

---


$$\begin{aligned}
\psi &\equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi^+ \\ \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^- \end{pmatrix}, & \bar{\psi} &\equiv \left( \varphi^* \quad \bar{\psi}^+ \quad \bar{\psi}^1 \quad \bar{\psi}^2 \quad \bar{\psi}^- \right), \\
p &\equiv \begin{pmatrix} p_\varphi \\ p_+ \\ p_1 \\ p_2 \\ p_- \end{pmatrix}, & \bar{p} &\equiv \left( \bar{p}_\varphi \quad \bar{p}_+ \quad \bar{p}_1 \quad \bar{p}_2 \quad \bar{p}_- \right),
\end{aligned} \tag{4.43}$$

se puede establecer que para el vínculo,

$$\theta = p + \frac{i}{2}\beta^+\psi \approx 0,$$

se cumple

$$\begin{aligned}
P\theta &= Pp + \frac{i}{2}P\beta^+\psi = p_\varphi + \frac{i}{2}P^+\psi = p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ \approx 0, \\
P^+\theta &= P^+p + \frac{i}{2}P^+\beta^+\psi = p_+ \approx 0, \\
P^k\theta &= P^k p + \frac{i}{2}P^k\beta^+\psi = p_k \approx 0, \\
P^-\theta &= P^-p + \frac{i}{2}P^-\beta^+\psi = p_- + \frac{i}{2}P^-\psi = p_- + \frac{i}{2}\varphi \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.44}$$

Ahora, para el vínculo

$$\begin{aligned}
\omega &= (1 - \beta^+\beta^-) (\beta^A i\partial_A^x - m) \psi \\
&= (1 - \beta^+\beta^-) (\beta^- i\partial_-^x + \beta^k i\partial_k^x - m) \psi \approx 0,
\end{aligned}$$

---

se cumple que:

$$\begin{aligned}
P\omega &= (P - P^+\beta^-) (\beta^-i\partial_-^x - m) \psi = (P - P) (\beta^-i\partial_-^x - m) \psi \\
&= 0, \\
P^+\omega &= P^+ (\beta^-i\partial_-^x + \beta^k i\partial_k^x - m) \psi = i\partial_-^x (P\psi) - m (P^+\psi) \\
&= i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ \approx 0, \\
P^k\omega &= P^k (\beta^-i\partial_-^x + \beta^k i\partial_k^x - m) \psi = i\partial_k^x (P\psi) - m (P^k\psi) \\
&= i\partial_k^x \varphi - m\psi^k \approx 0, \\
P^-\omega &= (P^- - P^-) (\beta^-i\partial_-^x + \beta^k i\partial_k^x - m) \psi \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

En el caso de,

$$\Omega \equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left( -2m \beta^- \partial_-^x - m\beta^l \partial_l^x - im^2 \right) \psi \approx 0$$

se determina,

$$\begin{aligned}
P\Omega &= 0, \\
P^+\Omega &= P \left( -2m \beta^- \partial_-^x - m\beta^l \partial_l^x - im^2 \right) \psi \\
&= -2m \partial_-^x (P^-\psi) - m\partial_k^x (P^k\psi) - im^2 (P\psi) \\
&= -2m \partial_-^x \psi^- - m\partial_k^x \psi^k - im^2 \varphi \approx 0 \\
P^k\Omega &= 0, \\
P^-\Omega &= 0.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Un análisis sobre

$$\bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0,$$

implica:

$$\begin{aligned}
\bar{\theta}P &= \bar{p}P - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+P = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}(P^-)^\dagger = \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \approx 0, \\
\bar{\theta}(P^+)^\dagger &= \bar{p}(P^+)^\dagger - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+(P^+)^\dagger = \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\bar{\psi}P = \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \approx 0, \\
\bar{\theta}(P^k)^\dagger &= \bar{p}(P^k)^\dagger - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+(P^k)^\dagger = \bar{p}_k \approx 0, \\
\bar{\theta}(P^-)^\dagger &= \bar{p}(P^-)^\dagger - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+(P^-)^\dagger = \bar{p}_- \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Ahora, al estudiar la proyección de:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} &= \bar{\psi}(i\partial_A^x \beta^A + m)(1 - \beta^-\beta^+) \\
&= \bar{\psi}(i\partial_-^x \beta^- + i\partial_l^x \beta^l + m)(1 - \beta^-\beta^+),
\end{aligned}$$

se deduce:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega}P &= \bar{\psi}(i\partial_-^x \beta^- + i\partial_l^x \beta^l + m)(P - P) = 0, \\
\bar{\omega}(P^+)^\dagger &= \bar{\psi}(i\partial_-^x \beta^- + i\partial_l^x \beta^l + m)\left((P^+)^\dagger - (P^+)^\dagger\right) = 0, \\
\bar{\omega}(P^k)^\dagger &= (i\partial_-^x \beta^- + i\partial_l^x \beta^l + m)(P^k)^\dagger = i\partial_k^x [\bar{\psi}P] + m [\bar{\psi}(P^k)^\dagger] \\
&= i\partial_k^x \varphi^* + m\bar{\psi}^k \approx 0, \\
\bar{\omega}(P^-)^\dagger &= \bar{\psi}(i\partial_-^x \beta^- + i\partial_l^x \beta^l + m)(P^-)^\dagger = i\partial_-^x [\bar{\psi}P] + m [\bar{\psi}(P^-)^\dagger] \\
&= i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \approx 0.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

Finalmente, cuando se estudia el vínculo

$$\bar{\Omega} = \bar{\psi} \left( -2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_l^x \beta^l + im^2 \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0,$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}
\bar{\Omega}P &= \bar{\psi} \left( -2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_l^x \beta^l + im^2 \right) \beta^+ \beta^- (P^+)^\dagger = 0, \\
\bar{\Omega} (P^+)^\dagger &= \bar{\psi} \left( -2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_l^x \beta^l + im^2 \right) \beta^+ \beta^- \beta^- (P^+)^\dagger = 0, \\
\bar{\Omega} (P^k)^\dagger &= \bar{\psi} \left( -2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_l^x \beta^l + im^2 \right) \beta^+ \beta^- \beta^- (P^k)^\dagger = 0, \\
\bar{\Omega} (P^-)^\dagger &= \bar{\psi} \left( -2m\partial_-^x \beta^- - m\partial_l^x \beta^l + im^2 \right) P \tag{4.49} \\
&= -2m\partial_-^x \left[ \bar{\psi} (P^+)^\dagger \right] + m\partial_l^x \left[ \bar{\psi} (P^l)^\dagger \right] + \bar{\psi} P \\
&= -2m\partial_-^x \bar{\psi}^+ + m\partial_l^x \bar{\psi}^l + im^2 \varphi^* \approx 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, el conjunto de vínculos de segunda clase de la teoría de DKP libre son:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &\equiv p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ & , & & \Psi_8 &\equiv \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \\
\Psi_2 &\equiv p_+ & , & & \Psi_9 &\equiv \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \\
\Psi_3 &\equiv p_k & , & & \Psi_{10} &\equiv \bar{p}_k \\
\Psi_4 &\equiv p_- + \frac{i}{2}\varphi & , & & \Psi_{11} &\equiv \bar{p}_- \\
\Psi_5 &\equiv i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ & , & & \Psi_{12} &\equiv i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \\
\Psi_6 &\equiv i\partial_k^x \varphi - m\psi^k & , & & \Psi_{13} &\equiv i\partial_k^x \varphi^* + m\bar{\psi}^k \\
\Psi_7 &\equiv -2m\partial_-^x \psi^- - m\partial_k^x \psi^k - im^2 \varphi & , & & \Psi_{14} &\equiv -2m\partial_-^x \bar{\psi}^+ + m\partial_k^x \bar{\psi}^k + im^2 \varphi^*
\end{aligned} \tag{4.50}$$

a partir de los cuales se puede definir la matriz de vínculos de segunda clase donde sus elementos de matriz son dados por la siguiente relación:

$$D_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_i(x), \Psi_j(y) \right\}, \tag{4.51}$$

y se puede mostrar que tendrá la siguiente representación matricial:

$$\mathbf{D}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{7 \times 7} & \varphi(x, y) \\ \boldsymbol{\chi}(x, y) & \mathbf{0}_{7 \times 7} \end{pmatrix}, \tag{4.52}$$

donde  $\mathbf{A}(x, y)$  y  $\mathbf{B}(x, y)$  son matrices  $7 \times 7$  que tienen la siguiente forma:

$$\varphi(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & i\partial_-^x & i\partial_k^x & -im^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2m\partial_-^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\delta_{kl} & m\partial_k^x \\ i & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 \\ i\partial_-^x & -m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_k^x & 0 & -m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -im^2 & 0 & -m\partial_k^x & -2m\partial_-^x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \quad (4.53)$$

$$\chi(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & i\partial_-^x & i\partial_k^x & im^2 \\ -i & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m\delta_{kl} & -m\partial_k^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2m\partial_-^x \\ i\partial_-^x & 0 & 0 & m & 0 & 0 & 0 \\ i\partial_k^x & 0 & m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ im^2 & -2m\partial_-^x & m\partial_k^x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y),$$

donde  $\mathbf{0}_{7 \times 7}$  se interpretan como matrices nulas de  $7 \times 7$ .

A fin de deducir los corchetes de Dirac es necesario calcular la inversa de la matriz (4.52) la cual deberá satisfacer la siguiente ecuación:

$$\int d^3z \mathbf{D}(x, z) \mathbf{C}^{-1}(z, y) = \int d^3z \mathbf{C}^{-1}(x, z) \mathbf{D}(z, y) = \delta^3(x - y). \quad (4.54)$$

Es posible mostrar que la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase tiene la siguiente representación:

$$\mathbf{C}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{9 \times 9} & \psi(x, y) \\ \phi(x, y) & \mathbf{0}_{9 \times 9} \end{pmatrix}, \quad (4.55)$$

donde

$$\psi(x, y) \equiv \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{17} & B_{18} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & 0 & 0 \\ D_{10} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & 0 & D_{17} & 0 \\ E_{10} & E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & 0 & 0 & 0 \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\phi(x, y) \equiv \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & 0 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & 0 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 & 0 & R_8 & 0 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & W_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

siendo que los elementos de las submatrices  $\psi(x, y)$  y  $\phi(x, y)$  tienen la siguiente forma:

- Funciones  $A_i(x, y)$ :

$$A_{10}(x, y) = -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y),$$

$$A_{11}(x, y) = \frac{i}{2} \delta^3(x - y),$$

---


$$\begin{aligned}
A_{12}(x, y) &= \frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x - y) \right), \\
A_{13}(x, y) &= \frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_2^x \delta^3(x - y) \right), \\
A_{14}(x, y) &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
A_{15}(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

■ Funciones  $B_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
B_{10}(x, y) &= \frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
B_{11}(x, y) &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \delta^3(x - y) \right\}, \\
B_{12}(x, y) &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
B_{13}(x, y) &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
B_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \frac{1}{2} \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right] \right\}, \\
B_{15}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
B_{16}(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x - y) \right), \\
B_{17}(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_2^x \delta^3(x - y) \right), \\
B_{18}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

---

■ Funciones  $C_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
C_{10}(x, y) &= \frac{i}{2} \partial_1^x \left( \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
C_{11}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
C_{12}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
C_{13}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
C_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \partial_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
C_{15}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \partial_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
C_{16}(x, y) &= \frac{1}{m} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

■ Funciones  $D_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
D_{10}(x, y) &= \frac{i}{2} \partial_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
D_{11}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x - y), \\
D_{12}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
D_{13}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
D_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \partial_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
D_{15}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \partial_2^x \left( \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
D_{17}(x, y) &= \frac{1}{m} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

- 
- Funciones  $E_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
E_{10}(x, y) &= \frac{i}{2} \delta^3(x - y), \\
E_{11}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x - y), \\
E_{12}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
E_{13}(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x - y), \\
E_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \\
E_{15}(x, y) &= \frac{1}{2m} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

- Funciones  $F_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
F_{10}(x, y) &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y), \\
F_{11}(x, y) &= \frac{1}{2m} \delta^3(x - y), \\
F_{12}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x - y) \right), \\
F_{13}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_2^x \delta^3(x - y) \right), \\
F_{14}(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
F_{15}(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

- Funciones  $G_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
G_{12}(x, y) &= \frac{1}{m} \delta^3(x - y), \\
G_{14}(x, y) &= -\frac{1}{2m} \partial_1^x \left( \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right).
\end{aligned}$$

- 
- Funciones  $H_i(x, y)$ :

$$H_{13}(x, y) = \frac{1}{m} \delta^3(x - y),$$

$$H_{14}(x, y) = -\frac{1}{2m} \partial_2^x \left( \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right).$$

- Funciones  $K_i(x, y)$ :

$$K_{14}(x, y) = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).$$

- Funciones  $M_i(x, y)$ :

$$M_1(x, y) = -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y),$$

$$M_2(x, y) = -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right],$$

$$M_3(x, y) = -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x - y) \right),$$

$$M_4(x, y) = -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_2^x \delta^3(x - y) \right),$$

$$M_5(x, y) = -\frac{i}{2} \delta^3(x - y),$$

$$M_6(x, y) = -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y).$$

- Funciones  $P_i(x, y)$ :

$$P_1(x, y) = -\frac{i}{2} \delta^3(x - y),$$

$$P_2(x, y) = \frac{1}{4m} \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y),$$

---


$$\begin{aligned}
P_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
P_4(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x - y), \\
P_5(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x - y), \\
P_6(x, y) &= -\frac{1}{2m} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

■ Funciones  $Q_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
Q_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \partial_1^x \left( \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
Q_2(x, y) &= \frac{1}{4m} \partial_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
Q_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
Q_4(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_2^x \delta^3(x - y) \right) \right], \\
Q_5(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \delta^3(x - y), \\
Q_6(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_1^x \left( \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
Q_7(x, y) &= -\frac{1}{m} \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

■ Funciones  $R_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
R_1(x, y) &= -\frac{i}{2} \partial_2^x \left( \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right), \\
R_2(x, y) &= \frac{1}{4m} \partial_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right], \\
R_3(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x - y) \right) \right],
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
R_4(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_2^x \delta^3(x-y) \right) \right], \\
R_5(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \delta^3(x-y), \\
R_6(x, y) &= \frac{1}{2m} \partial_2^x \left( \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right), \\
R_8(x, y) &= -\frac{1}{m} \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

■ Funciones  $S_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
S_1(x, y) &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
S_2(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \frac{1}{4} \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
S_3(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x-y) \right) \right], \\
S_4(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_2^x \delta^3(x-y) \right) \right], \\
S_5(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \delta^3(x-y) \right], \\
S_6(x, y) &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x + m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
S_7(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x-y) \right), \\
S_8(x, y) &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_2^x \delta^3(x-y) \right), \\
S_9(x, y) &= -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

- 
- Funciones  $T_i(x, y)$ :

$$T_1(x, y) = -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \quad , \quad T_5(x, y) = -\frac{1}{2m} \delta^3(x - y) ,$$

$$T_2(x, y) = \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \left( \partial_k^x \partial_k^x - m^2 \right) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right] ,$$

$$T_3(x, y) = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x - y) \right) ,$$

$$T_4(x, y) = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left( \partial_1^x \delta^3(x - y) \right) ,$$

$$T_6(x, y) = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) .$$

- Funciones  $U_i(x, y)$ :

$$U_2(x, y) = -\frac{1}{2m} \partial_1^x \left( \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right) ,$$

$$U_3(x, y) = -\frac{1}{m} \delta^3(x - y) .$$

- Funciones  $W_i(x, y)$ :

$$W_2(x, y) = -\frac{1}{2m} \partial_2^x \left( \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) \right) ,$$

$$W_4(x, y) = -\frac{1}{m} \delta^3(x - y) .$$

- Funciones  $Z_i(x, y)$ :

$$Z_2(x, y) = -\frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x - y) .$$

Los resultados anteriores garantizan que se pueda definir el corchete de Dirac

---

entre dos variables dinámicas  $\mathbf{A}_a(x)$  y  $\mathbf{B}_b(y)$  de la siguiente manera:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Psi_\alpha(u) \right\} D_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}. \quad (4.56)$$

De la estructura de vínculos definidos por (4.50), que en total constituye un conjunto de 19 elementos, es posible observar que el espacio de fase expandido por  $(\psi, \bar{\psi}, p, \bar{p})$ , que tiene dimensión 20, solamente existen 2 campos independientes, que dada la forma de los mismos vínculos se pueden considerar como siendo  $(\varphi, \varphi^*)$ . Utilizando las siguientes corchetes de Poisson, diferentes de cero, entre  $(\varphi, \varphi^*)$  y los vínculos (4.50):

$$\left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\} = \delta^3(x - u) \quad , \quad \left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\} = \delta^3(x - u), \quad (4.57)$$

se deduce que el corchete de Dirac asociados al campo  $\varphi(x)$  se calcula a partir de:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int dudv \left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\} D_{8\beta}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\} \\ &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int dv D_{8\beta}^{-1}(x, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}. \end{aligned}$$

Así, se determina que el corchete de Dirac entre  $(\varphi, \varphi^*)$  es:

$$\begin{aligned} \left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D &= - \int dv D_{81}^{-1}(x, v) \left\{ \Psi_1(v), \varphi^*(y) \right\} \\ &= \int dv D_{81}^{-1}(x, v) \delta^3(v - y) \\ &= D_{81}^{-1}(x, y) \end{aligned}$$

De la representación matricial de la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase se puede deducir que

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D = M_1(x, y) = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\Gamma - y^\Gamma). \quad (4.58)$$

---

Utilizando la forma física de la función de onda del campo DKP para el sector de espín 0 indicada por la ecuación (3.118), según la cual:

$$\varphi(x) = \sqrt{m}\phi(x) \quad , \quad \varphi^*(x) = \sqrt{m}\phi^*(x), \quad (4.59)$$

se puede observar a partir de (4.58)

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_D = m \left\{ \phi(x), \phi^*(y) \right\}_D = -\frac{m}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top),$$

es decir:

$$\left\{ \phi(x), \phi^*(y) \right\}_D = -\frac{1}{4} \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top), \quad (4.60)$$

resultado que es equivalente a las relaciones derivadas en (3.62) para el caso libre.

## Capítulo 5

# Electrodinámica Escalar de primer Orden en las Coordenadas de Plano Nulo

### 5.1. Introducción

*En el periodo comprendido entre 1939 hasta 1970 los trabajos desarrollados con la ecuación de DKP se direccionaron al estudio de partículas cargadas interactuando con un campo electromagnético. Estudios de diferentes procesos tomando como base la formulación de DKP y de Klein-Gordon condujeron a resultados idénticos hasta correcciones de un loop [87]. Sin embargo, A. Wightman [88] mostró que cuando el campo de DKP se acopla al campo electromagnético, la ecuación de campo para la partícula de espín 0 es estable bajo perturbaciones locales suaves de campos externos.*

*Es bien conocido el hecho que en el caso de campos libres existe una equivalencia entre el formalismo de DKP con las ecuaciones de campo de KG y de*

---

Proca, no obstante, cuando alguna interacción es presente, como en el caso de la electromagnética, surgen ciertas dudas. Fue mostrado [91] la presencia de términos anómalos en el Hamiltoniano de la teoría y la aparente diferencia entre las descripciones no existen si se especifican cuidadosamente las componentes físicas de los campos de DKP. Ha sido probado [92] que los elementos de matriz  $S$  en las teorías de DKP y de KG coinciden en el caso de partículas de espín 0 interactuando con campos externos gauge abelianos y no abelianos incluyendo el campo gravitacional.

En este capítulo estudiaremos la estructura canónica del campo de DKP interactuando con el campo electromagnético. Se realizara el estudio de la estructura de vínculos de la teoría y la naturaleza gauge del problema y se considerara la condición de gauge mas conveniente con el fin de calcular los DB entre los grados de libertad.

## 5.2. Electrodinámica Escalar de Primer Orden en las Coordenadas de Plano Nulo

La teoría, en forma general, es descrita por la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^\mu (\bar{D}_\mu \psi) - \frac{i}{2} (D_\mu \bar{\psi}) \beta^\mu \psi - m \bar{\psi} \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

donde se ha definido las derivadas covariantes  $D_\mu \equiv i\partial_\mu - gA_\mu$  y  $\bar{D}_\mu \equiv i\partial_\mu + gA_\mu$ . Las ecuaciones de campo que correspondientes a la densidad Lagrangiana (5.1) son:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - g\bar{\psi} \beta^\nu \psi = 0 \quad , \quad \bar{\psi} (\beta^\mu \bar{D}_\mu + m) = 0 \quad , \quad (\beta^\mu D_\mu - m) \psi = 0, \quad (5.2)$$

Los momentos canónicos  $(\pi^\mu, \bar{p}, p)$  conjugados a las variables  $(A_\mu, \psi, \bar{\psi})$ , respectivamente, son definidos de la siguiente manera:

$$\pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ A_\mu)} = -F^{+\mu} \quad , \quad \bar{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\bar{\psi}}} = \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \quad , \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} = -\frac{i}{2} \beta^+ \psi \quad (5.3)$$

---

A partir de la densidad Lagrangiana (5.1) y de las relaciones asociadas a los momentos canónicos conjugados definidas por (5.3), es posible demostrar que la electrodinámica escalar de primer orden presenta el siguiente conjunto de vínculos primarios en el sector electromagnético:

$$\pi^+ \approx 0 \quad , \quad \phi^k \equiv \pi^k - \partial_- A_k + \partial_k A_- , \quad (5.4)$$

Al igual que un conjunto de vínculos correspondientes al sector escalar:

$$\theta \equiv p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \approx 0 \quad , \quad \bar{\theta} \equiv \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+ \approx 0. \quad (5.5)$$

Además de una relación dinámica definida por:

$$\partial_+ A_- = \pi^- + \partial_- A_+ \quad (5.6)$$

La Hamiltoniano canónico correspondiente a la teoría es definido por

$$H_C = \int d^3 y \mathcal{H}_C ,$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_C &= \pi^\mu \partial_+ A_\mu + \bar{p} \dot{\psi} + \dot{\bar{\psi}} p - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} \pi^{-2} + (\pi^A \partial_A^y + g \bar{\psi} \beta^+ \psi) A_+ + \bar{\psi} \left[ \frac{i}{2} \beta^A \left( \overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y \right) + g A_A \beta^A + m \right] \psi \\ &\quad + \frac{1}{4} (F^{kl})^2 , \end{aligned} \quad (5.7)$$

donde  $A = -, 1, 2$ . La evolución dinámica del sistema estará determinado por el Hamiltoniano primario, el cual se construye a partir del Hamiltoniano canónico mas una combinación lineal de los vínculos primarios vía multiplicadores de Lagrange, que para el caso será:

$$H_P = H_C + \int d^3 x \left[ u(x) \pi^+(x) + u_l(x) \phi^l(x) + \bar{\lambda}(x) \theta(x) + \bar{\theta}(x) \lambda(x) \right] , \quad (5.8)$$

---

donde  $d^3x \equiv dx^- dx^1 dx^2 = d^3x^A$ . Con el fin de complementar la evolución del sistema se introduce los PB fundamentales los cuales son definidos por:

$$\begin{aligned} \left\{ A_\mu(x), \pi^\nu(y) \right\} &= \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y), \\ \left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\} &= \delta_{ab} \delta^3(x-y), \\ \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\} &= \delta_{ab} \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (5.9)$$

Ahora, analicemos la consistencia de los vínculos primarios estudiando en primer lugar aquella correspondientes al sector electromagnético, de manera que:

$$\dot{\pi}^+ = \partial_A^x \pi^A - g \bar{\psi} \beta^+ \psi \equiv G \approx 0, \quad (5.10)$$

es decir, un vínculo secundario surge en el sector electromagnético. Ahora, con el fin de estudiar su consistencia se utilizara los siguientes PB calculados entre  $G(x)$  y los vínculos primarios:

$$\begin{aligned} \left\{ G(x), \phi^l(y) \right\} &= 0, \\ \left\{ G(x), \theta_b(y) \right\} &= -g \left[ \beta^+ \psi(x) \right]_b \delta^3(x-y), \\ \left\{ G(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= -g \left[ \bar{\psi}(x) \beta^+ \right]_b \delta^3(x-y), \end{aligned} \quad (5.11)$$

junto con las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ G(x), F^{mn}(y) \right\} &= 0, \\ \left\{ G(x), A_-(y) \right\} &= -\partial_-^x \delta^3(x-y), \\ \left\{ G(x), A_l(y) \right\} &= -\partial_l^x \delta^3(x-y). \end{aligned} \quad (5.12)$$

De manera que al analizar la consistencia de  $G(x)$  se obtiene:

$$\dot{G} = \partial_A^x \left( \bar{\psi} \beta^A \psi \right) + \bar{\lambda} \beta^+ \psi + \bar{\psi} \beta^+ \lambda \approx 0. \quad (5.13)$$

---

Ahora, con el fin de calcular la consistencia del vínculo  $\phi^k(x)$  consideremos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} \left\{ \phi^k(x), \pi^-(y) \right\} &= \partial_k^x \delta^3(x-y) \\ \left\{ \phi^k(x), \pi^A(y) \partial_A^y A_+(y) \right\} &= \left[ \partial_-^y A_+(y) \partial_k^x - \partial_k^y A_+(y) \partial_-^x \right] \delta^3(x-y), \\ \left\{ \phi^k(x), gA_A(y) \bar{\psi}(y) \beta^A \psi(y) \right\} &= -g\bar{\psi}(x) \beta^k \psi(x) \delta^3(x-y), \\ \left\{ \phi^k(x), F_{mn}(y) \right\} &= (\delta_n^k \partial_m^x - \delta_m^k \partial_n^x) \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

Entonces, la consistencia de  $\phi^k(x)$  establece que:

$$\dot{\phi}^k = \partial_k^x \pi^- - g\bar{\psi} \beta^k \psi + \partial_m^x F_{mk} - 2\partial_-^x u_k, \quad (5.14)$$

lo que indica una relación sobre el multiplicador de Lagrange  $u_k(x)$ .

Ahora, se procede a analizar la consistencia de los vínculos asociados al sector DKP, para los cuales se obtiene:

$$\dot{\theta} = (D_A^x \beta^A - m) \psi + \beta^+ (i\lambda - gA_+ \psi) \approx 0, \quad (5.15)$$

$$\dot{\bar{\theta}} = \bar{\psi} \left( \beta^A \bar{D}_A^x + m \right) + (i\bar{\lambda} + g\bar{\psi} A_+) \beta^+ \approx 0, \quad (5.16)$$

con  $D_A^x \equiv i\partial_A^x - gA_A$  y  $\bar{D}_A^x \equiv i\partial_A^x + gA_A$ . Las expresiones (5.15) y (5.16) pueden ser escritas como:

$$\begin{aligned} \beta^+ \lambda &\approx i \left( D_A^x \beta^A - m \right) \psi - igA_+ \beta^+ \psi, \\ \bar{\lambda} \beta^+ &\approx i\bar{\psi} \left( \beta^A \bar{D}_A^x + m \right) + ig\bar{\psi} \beta^+ A_+, \end{aligned}$$

que al ser substituidas en (5.13) se demuestra que:

$$\dot{G} = 0, \quad (5.17)$$

con lo cual, la ley de Gauss para la electrodinámica escalar de primer orden, identificada con la relación  $G(x)$ , es automáticamente conservada.

---

Ahora, es necesario determinar si el conjunto de relaciones (5.15) y (5.16) determina completamente los multiplicadores de Lagrange  $(\lambda, \bar{\lambda})$ . Para este fin, se utilizara el siguiente conjunto de propiedades que satisfacen las matrices beta en las coordenadas de plano nulo:

$$\begin{aligned}
P\beta^+ &= P^+, & P\beta^- &= P^-, & P\beta^k &= P^k, \\
P^-\beta^+ &= P, & P^-\beta^- &= 0, & P^-\beta^k &= 0, \\
P^+\beta^+ &= 0, & P^+\beta^- &= P, & P^+\beta^k &= 0, \\
P^k\beta^+ &= 0, & P^k\beta^- &= 0, & P^k\beta^l &= \delta_l^k P.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

además de las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\beta^- P &= (P^+)^\dagger, & \beta^+ P &= (P^-)^\dagger, & \beta^k P &= -(P^k)^\dagger, \\
\beta^- (P^-)^\dagger &= P, & \beta^+ (P^-)^\dagger &= 0, & \beta^k (P^-)^\dagger &= 0, \\
\beta^- (P^+)^\dagger &= 0, & \beta^+ (P^+)^\dagger &= P, & \beta^k (P^+)^\dagger &= 0, \\
\beta^- (P^k)^\dagger &= 0, & \beta^+ (P^k)^\dagger &= 0, & \beta^l (P^k)^\dagger &= \delta_l^k P,
\end{aligned} \tag{5.19}$$

donde los operadores de proyección son definidos de la siguiente manera:

$$P = P^\dagger \quad , \quad P^+ (\beta^-)^2 \beta^+ = P \quad , \quad \beta^+ (\beta^-)^2 (P^-)^\dagger = P. \tag{5.20}$$

De manera que al utilizar a representación matricial de las variables  $(\psi, \bar{\psi}, p, \bar{p})$  correspondientes al espacio de fase del sector DKP expresadas en la forma:

$$\begin{aligned}
\psi &\equiv \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi^+ \\ \psi^- \\ \psi^l \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{\psi} \equiv \left( \varphi^* \quad \bar{\psi}^+ \quad \bar{\psi}^- \quad \bar{\psi}^l \right) , \\
p &\equiv \begin{pmatrix} p_\varphi \\ p_+ \\ p_- \\ p_l \end{pmatrix} \quad , \quad \bar{p} \equiv \left( \bar{p}_\varphi \quad \bar{p}_+ \quad \bar{p}_- \quad \bar{p}_l \right) ,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

---

con  $l = 1, 2$ , es posible deducir de (5.15):

$$\begin{aligned}
P\dot{\theta} &= D_-^x (P^- \psi) + D_k^x (P^k \psi) - m (P\psi) + i (P^+ \lambda) - gA_+ (P^+ \psi) \approx 0, \\
P^+\dot{\theta} &= D_-^x (P\psi) - m (P^+ \psi) \approx 0, \\
P^l\dot{\theta} &= D_l^x (P\psi) - m (P^l \psi) \approx 0, \\
P^-\dot{\theta} &= -m (P^- \psi) + i (P\lambda) - gA_+ (P\psi) \approx 0,
\end{aligned} \tag{5.22}$$

con lo cual, dos condiciones sobre el multiplicador de Lagrange  $\lambda$  pueden ser determinadas y que corresponden a  $P^+ \lambda$  y  $P\lambda$ , siendo que las componentes  $P^l \lambda$  y  $P^+ \lambda$  aún mantienen indeterminadas. Lo anterior da a entender que la teoría posee vínculos secundarios, como lo dan a entender las relaciones (5.22), asociado a la consistencia de  $\theta(x)$  y el cual puede ser deducido, en analogía con el caso libre, mediante la aplicación del operador  $(1 - \beta^+ \beta^-)$ , de manera que el vínculo secundario correspondiente es dado por:

$$\omega_\delta = [(1 - \beta^+ \beta^-) (\beta^A D_A^x - m) \psi]_\delta \approx 0, \tag{5.23}$$

con  $\delta = 2, 3, 4$ . Mediante la acción de los proyectores (5.20), es posible observar que:

$$\begin{aligned}
P^+\omega &= P^+ (\beta^- D_-^x \psi + \beta^k D_k^x \psi - m\psi) \\
&= D_-^x (P\psi) - m (P^+ \psi) = P^+\dot{\theta} \approx 0 \\
P^l\omega &= P^l (\beta^- D_-^x \psi + \beta^k D_k^x \psi - m\psi) \\
&= D_l^x (P\psi) - m (P^l \psi) = P^l\dot{\theta} \approx 0 \\
P\omega &= 0 \quad , \quad P^-\omega = 0,
\end{aligned}$$

resultados que son consistentes con (5.22).

---

De forma similar, cuando la expresión (5.16) es considerada, se deduce que:

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{\theta}}P &= \bar{D}_-^x [\bar{\psi} (P^+)^\dagger] - \bar{D}_k^x [\bar{\psi} (P^k)^\dagger] + m (\bar{\psi}P) + i [\bar{\lambda} (P^-)^\dagger] \\
&\quad + gA_+ [\bar{\psi} (P^-)^\dagger] \approx 0, \\
\dot{\bar{\theta}} (P^+)^\dagger &= m [\bar{\psi} (P^+)^\dagger] + i (\bar{\lambda}P) + gA_+ (\bar{\psi}P) \approx 0, \\
\dot{\bar{\theta}} (P^l)^\dagger &= \bar{D}_l^x (\bar{\psi}P) + m [\bar{\psi} (P^l)^\dagger] \approx 0, \\
\dot{\bar{\theta}} (P^-)^\dagger &= \bar{D}_-^x (\bar{\psi}P) + m [\bar{\psi} (P^-)^\dagger] \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.24}$$

Así, las relaciones que donde se evidencia  $\bar{\lambda}P$  y  $\bar{\lambda} (P^-)^\dagger$ , dan a entender que solamente dos componentes del multiplicador  $\bar{\lambda}$  consiguen ser fijadas, en tanto que las componentes  $\bar{\lambda} (P^l)^\dagger$  y  $\bar{\lambda} (P^-)^\dagger$  aún están por ser deducidas. De la expresión anterior es posible constatar que nuevamente vínculos secundarios surgen de la consistencia de  $\bar{\theta}(x)$  y que pueden ser identificados mediante la acción del operador  $(1 - \beta^- \beta^+)$ , de manera que:

$$\bar{\omega}_\delta = [\bar{\psi} (\bar{D}_A^x \beta^A + m) (1 - \beta^- \beta^+)]_\delta \approx 0, \tag{5.25}$$

donde  $\delta = 3, 4, 5$ . Fácilmente, es posible mostrar a partir de (5.25) que:

$$\begin{aligned}
\bar{\omega} (P^l)^\dagger &= (\bar{D}_-^x \bar{\psi} \beta^- + \bar{D}_k^x \bar{\psi} \beta^k + m \bar{\psi}) (P^l)^\dagger \\
&= \bar{D}_l^x (\bar{\psi}P) + m [\bar{\psi} (P^l)^\dagger] = \dot{\bar{\theta}} (P^l)^\dagger \approx 0 \\
\bar{\omega} (P^-)^\dagger &= (\bar{D}_-^x \bar{\psi} \beta^- + \bar{D}_k^x \bar{\psi} \beta^k + m \bar{\psi}) (P^-)^\dagger \\
&= \bar{D}_-^x (\bar{\psi}P) + m [\bar{\psi} (P^-)^\dagger] = \dot{\bar{\theta}} (P^-)^\dagger \approx 0 \\
\bar{\omega}P &= 0 \quad , \quad \bar{\omega} (P^+)^\dagger = 0,
\end{aligned}$$

lo que resulta compatible con (5.24). Entonces, la teoría posee un conjunto de vínculos secundarios asociados al sector DKP identificados con (5.23) y (5.25)

y que satisfacen los siguientes PB:

$$\begin{aligned}
\left\{ \omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[ \left( 1 - \beta^+ \beta^- \right) \left( \beta^A D_A^x - m \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\
\left\{ \bar{\theta}_a(x), \omega_b(y) \right\} &= \left[ \left( 1 - \beta^+ \beta^- \right) \left( \beta^A \bar{D}_A^x + m \right) \right]_{ba} \delta^3(x-y), \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[ \left( \bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \left( 1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{ba} \delta^3(x-y), \\
\left\{ \theta_a(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= \left[ \left( D_A^x \beta^A - m \right) \left( 1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\
\left\{ \omega_a(x), \phi^k(y) \right\} &= -g \left[ \left( 1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^k \psi(x) \right]_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \phi^k(x), \omega_a(y) \right\} &= g \left[ \left( 1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^k \psi(x) \right]_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \phi^k(y) \right\} &= g \left[ \bar{\psi}(x) \beta^k \left( 1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \phi^k(x), \bar{\omega}_a(y) \right\} &= -g \left[ \bar{\psi}(x) \beta^k \left( 1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \delta^3(x-y).
\end{aligned} \tag{5.26}$$

Utilizando los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
\left\{ \omega_a(x), \pi^-(y) \right\} &= -g \left[ \left( 1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) \right]_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \omega_a(x), \pi^A(y) \partial_A^y A_+(y) \right\} &= -g \delta^3(x-y) \left[ \left[ \left( 1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^- \psi(x) \right]_a \partial_-^x A_+(x) \right. \\
&\quad \left. + \left[ \left( 1 - \beta^+ \beta^- \right) \beta^k \psi(x) \right]_a \partial_k^x A_+(x) \right], \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \pi^-(y) \right\} &= g \left[ \bar{\psi}(x) \beta^- \left( 1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \bar{\omega}_a(x), \pi^A(y) \partial_A^y A_+(y) \right\} &= g \delta^3(x-y) \left[ \left[ \bar{\psi}(x) \beta^- \left( 1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \partial_-^x A_+(x) \right. \\
&\quad \left. + \left[ \bar{\psi}(x) \beta^k \left( 1 - \beta^- \beta^+ \right) \right]_a \partial_k^x A_+(x) \right],
\end{aligned}$$

se determina que:

$$\begin{aligned}
\dot{\omega} &= \left( 1 - \beta^+ \beta^- \right) \left[ -g \pi^- \beta^- \psi - g \beta^- \psi \partial_-^x A_+ - g \beta^k \psi \partial_k^x A_+ \right. \\
&\quad \left. - g u_l \beta^l \psi + \left( \beta^A D_A^x - m \right) \lambda \right] \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

Ahora, es necesario establecer si la expresión (5.27) garantiza fijar todas las componentes del multiplicador de Lagrange  $\lambda(x)$ , para ello, se utiliza los operadores (5.20), de manera que se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned} P\dot{\omega} &= 0 \quad , \quad P^-\dot{\omega} = 0, \\ P^l\dot{\omega} &= -g \left( \partial_l^x A_+ + u_l \right) (P\psi) + D_l^x (P\lambda) - m (P^l\lambda) \approx 0, \\ P^+\dot{\omega} &= -g \left( \pi^- + \partial_-^x A_+ \right) (P\psi) + D_-^x (P\lambda) - m (P^+\lambda) \approx 0, \end{aligned}$$

entonces, utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} (P^+\lambda) &= iD_-^x (P^-\psi) + iD_k^x (P^k\psi) - im (P\psi) - igA_+ (P^+\psi), \\ (P\lambda) &= -im (P^-\psi) - igA_+ (P\psi), \end{aligned}$$

deducidas con anterioridad de la consistencia del vínculos  $\theta(x)$ , es posible mostrar el siguiente resultado:

$$P^+\dot{\omega} \approx -P^+ \left\{ (\beta^-)^2 \beta^+ \left( 2im \beta^- D_-^x + im\beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \psi \right\}.$$

Así, se concluye que un vínculo terciario resulta y que se define como:

$$\Omega \equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left( 2im \beta^- D_-^x + im\beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \psi \approx 0. \quad (5.28)$$

Si la condición de consistencia del vínculo  $\bar{\omega}(x)$  es estudiada se determina que:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\omega}} &= \left[ g\pi^- \bar{\psi}\beta^- + g\bar{\psi} \beta^- \partial_-^x A_+ + g\bar{\psi}\beta^k \partial_k^x A_+ + gu_l \bar{\psi} \beta^l + \bar{\lambda} \left( \bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \right] \\ &\quad \left( 1 - \beta^- \beta^+ \right) \approx 0. \end{aligned} \quad (5.29)$$

De la relación anterior es posible deducir que,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\omega}} P &= 0 \quad , \quad \dot{\bar{\omega}} (P^+)^\dagger = 0, \\ \dot{\bar{\omega}} (P^l)^\dagger &= g \left( \partial_l^x A_+ + u_l \right) (\bar{\psi} P) + \bar{D}_l^x (\bar{\lambda} P) + m \left[ \bar{\lambda} (P^l)^\dagger \right], \\ \dot{\bar{\omega}} (P^-)^\dagger &= g \left( \pi^- + \partial_-^x A_+ \right) (\bar{\psi} P) + \bar{D}_-^x (\bar{\lambda} P) + m \left[ \bar{\lambda} (P^-)^\dagger \right]. \end{aligned}$$

---

De las expresiones que resultan de la consistencia de  $\bar{\theta}(x)$ , es posible verificar que:

$$\begin{aligned}(\bar{\lambda}P) &= im \left[ \bar{\psi}(P^+)^\dagger \right] + igA_+ (\bar{\psi}P), \\ \left[ \bar{\lambda}(P^-)^\dagger \right] &= i\bar{D}_-^x \left[ \bar{\psi}(P^+)^\dagger \right] - i\bar{D}_k^x \left[ \bar{\psi}(P^k)^\dagger \right] + im(\bar{\psi}P) + igA_+ \left[ \bar{\psi}(P^-)^\dagger \right],\end{aligned}$$

de manera que:

$$\dot{\bar{\omega}}(P^-)^\dagger \approx \left\{ \bar{\psi} \left( 2im\bar{D}_-^x\beta^- + im\bar{D}_k^x\beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \right\} (P^-)^\dagger,$$

entonces, un vinculo terciario resulta y que se define en la forma:

$$\bar{\Omega} \equiv \bar{\psi} \left( 2im\bar{D}_-^x\beta^- + im\bar{D}_k^x\beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \approx 0. \quad (5.30)$$

Con el fin de calcular la consistencia del conjunto de vínculos terciarios que han surgido en la teoría correspondiente al sector escalar, es necesario utilizar los siguientes PB:

$$\begin{aligned}\left\{ \Omega_a(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &= \left[ (\beta^-)^2 \beta^+ \left( 2im\beta^- D_-^x + im\beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \right]_{ab} \delta^3(x-y), \\ \left\{ \Omega_a(x), \phi^k(y) \right\} &= -g \left[ (\beta^-)^2 \beta^+ \left( im\beta^k \psi(x) - \psi(x) \partial_k^x \right) \right]_a \delta^3(x-y), \\ \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \theta_b(y) \right\} &= \left[ \left( 2im\bar{D}_-^x\beta^- + im\bar{D}_k^x\beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_{ba} \delta^3(x-y), \\ \left\{ \bar{\Omega}_a(x), \phi^k(y) \right\} &= g \left\{ \left( im\bar{\psi}(x) \beta^k + \bar{\psi}(x) \partial_k^x \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \right\}_a \delta^3(x-y),\end{aligned} \quad (5.31)$$

al igual que las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Omega_a(x), \pi^-(y) \right\} &= -2img \left[ (\beta^-)^2 \beta^+ \beta^- \psi(x) \right]_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \Omega_a(x), \pi^A(y) \partial_A^y A_+(y) \right\} &= -img \left\{ (\beta^-)^2 \beta^+ \left( 2\beta^- \psi(x) \partial_-^x A_+(x) + \beta^l \psi(x) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \partial_l^x A_+(x) \right) \right\}_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \Omega_a(x), A_-(y) \right\} &= -g \left[ (\beta^-)^2 \beta^+ \psi(x) \right]_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \bar{\Omega}_a(x), \pi^-(y) \right\} &= 2img \left[ \bar{\psi}(x) \beta^- \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \bar{\Omega}_a(x), \pi^A(y) \partial_A^y A_+(y) \right\} &= img \left\{ \left( 2\partial_-^x A_+(x) \bar{\psi}(x) \beta^- + \partial_l^x A_+(x) \bar{\psi}(x) \beta^l \right) \right. \\
&\quad \left. \beta^+ (\beta^-)^2 \right\}_a \delta^3(x-y), \\
\left\{ \bar{\Omega}_a(x), A_-(y) \right\} &= -g \left[ \bar{\psi}(x) \beta^+ (\beta^-)^2 \right]_a \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

Es posible mostrar que la consistencia de los vínculos  $\Omega(x)$  resulta en:

$$\begin{aligned}
\dot{\Omega} &= (\beta^-)^2 \beta^+ \left\{ -g \left[ 2im \left( \pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \beta^- \psi + im \left( \partial_l^x A_+ + u_l \right) \beta^l \psi - \psi \partial_l^x u_l \right] \right. \\
&\quad \left. -g^2 \left[ \bar{\psi} \beta^- \psi \right] \psi + \left( 2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \lambda \right\}.
\end{aligned}$$

De la relación anterior se puede deducir que:

$$\begin{aligned}
P^- \dot{\Omega} &= 0 \quad , \quad P^k \dot{\Omega} = 0 \quad , \quad P \dot{\Omega} = 0 \\
P^+ \dot{\Omega} &= -g \left[ 2im \left( \pi^- + \partial_-^x A_+ \right) (P^- \psi) + im \left( \partial_l^x A_+ + u_l \right) (P^l \psi) - (P \psi) \partial_l^x u_l \right] \\
&\quad -g^2 \left[ \bar{\psi} \beta^- \psi \right] (P \psi) + \left[ 2im D_-^x (P^- \lambda) + im D_k^x (P^k \lambda) - im^2 (P \lambda) + g\pi^- (P \lambda) \right],
\end{aligned}$$

fijando la última componente del multiplicador de Lagrange  $\lambda$  y garantizando que no mas vínculos son generados a partir de  $\theta$ .

De manera similar, al estudiar la consistencia de  $\bar{\Omega}(x)$  se deduce que:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}} = & \left\{ g \left[ 2im \left( \pi^- + \partial_-^x A_+ \right) \bar{\psi} \beta^- + im \left( \partial_l^x A_+ + u_l \right) \bar{\psi} \beta^l + \bar{\psi} \partial_l^x u_l \right] \right. \\ & \left. - g^2 [\bar{\psi} \beta^- \psi] \bar{\psi} + \left( 2im \bar{D}_-^x \bar{\lambda} \beta^- + im \bar{D}_k^x \bar{\lambda} \beta^k + im^2 \bar{\lambda} + g \pi^- \bar{\lambda} \right) \right\} \beta^+ (\beta^-)^2, \end{aligned}$$

a partir de la cual es posible verificar:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\Omega}}(P^k)^\dagger &= 0 \quad , \quad \dot{\bar{\Omega}}(P^+)^\dagger = 0 \quad , \quad \dot{\bar{\Omega}}P = 0, \\ \dot{\bar{\Omega}}(P^-)^\dagger &= g \left[ 2im \left( \pi^- + \partial_-^x A_+ \right) [\bar{\psi}(P^+)^\dagger] - im \left( \partial_l^x A_+ + u_l \right) [\bar{\psi}(P^l)^\dagger] + (\bar{\psi}P) \partial_l^x u_l \right] \\ &\quad - g^2 [\bar{\psi} \beta^- \psi] (\bar{\psi}P) + 2im \bar{D}_-^x [\bar{\lambda}(P^+)^\dagger] - im \bar{D}_k^x [\bar{\lambda}(P^l)^\dagger] \\ &\quad + im^2 (\bar{\lambda}P) + g \pi^- (\bar{\lambda}P), \end{aligned}$$

resultados que indican que el multiplicador de Lagrange  $\bar{\lambda}$  es completamente determinado y asegurando simultáneamente que la cadena de vínculos asociados a  $\bar{\theta}$  queda truncado.

### 5.3. Clasificación de los Vínculos

En resumen, la teoría esta constituida por el siguiente conjunto de vínculos asociados al sector electromagnético:

$$\pi^+ \approx 0 \quad , \quad \phi^k \equiv \pi^k - \partial_-^x A_k + \partial_k^x A_- \quad , \quad G = \partial_A^x \pi^A - g \bar{\psi} \beta^+ \psi, \quad (5.32)$$

junto con un conjunto de vínculos asociados al sector DKP:

$$\begin{aligned} \theta &= p + \frac{i}{2} \beta^+ \psi \quad , \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2} \bar{\psi} \beta^+, \quad (5.33) \\ \omega &= \left( 1 - \beta^+ \beta^- \right) \left( \beta^A D_A^x - m \right) \psi \quad , \quad \bar{\omega} = \bar{\psi} \left( \bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \left( 1 - \beta^- \beta^+ \right) \\ \Omega &\equiv (\beta^-)^2 \beta^+ \left( 2im \beta^- D_-^x + im \beta^k D_k^x - im^2 + g \pi^- \right) \psi \\ \bar{\Omega} &\equiv \bar{\psi} \left( 2im \bar{D}_-^x \beta^- + im \bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g \pi^- \right) \beta^+ (\beta^-)^2 \end{aligned}$$

---

Fácilmente se puede verificar que  $\pi^+(x)$  satisface la condición de que posee PB cero con cualquier otro vínculo de la teoría, por tanto, se identifica a  $\pi^+(x)$  como un vínculo de primera clase. Sin embargo, dado que se estudia una teoría gauge se debe mostrar que existe un vínculo adicional de primera clase, similar a lo que se pudo mostrar en la electrodinámica cuántica escalar (SQED). De lo aprendido con SQED, el segundo vínculo de primera clase debe resultar de una combinación lineal del segundo vínculo asociado al sector electromagnético y un conjunto de vínculos del sector DKP. Mostremos ahora, que el segundo vínculo de primera clase es dado por la siguiente expresión:

$$\Sigma \equiv G - ig \left( \bar{\psi}\theta - \bar{\theta}\psi \right) = \partial_-^x \pi^- + \partial_k^x \pi^k - ig \left( \bar{\psi}p - \bar{p}\psi \right) \quad (5.34)$$

En primer lugar, se sabe que al considerar los PB con los vínculos correspondientes al sector electromagnético se determina que:

$$\left\{ \Sigma(x), \phi^k(y) \right\} = \left\{ G(x), \phi^k(y) \right\} = 0,$$

de igual manera:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), G(y) \right\} &= -ig^2 \left[ \bar{\psi}(x) \beta^+ \psi(x) - \bar{\psi}(x) \beta^+ \psi(x) \right] \delta^3(x-y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ahora, cuando el análisis es realizado con los vínculos del sector DKP se obtiene que:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \theta_b(y) \right\} &\approx -g \left[ \beta^+ \psi(x) \right]_b \delta^3(x-y) + g \left[ \beta^+ \psi(x) \right]_b \delta^3(x-y) \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

En forma similar:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \bar{\theta}_b(y) \right\} &\approx -g \left[ \bar{\psi}(x) \beta^+ \right]_b \delta^3(x-y) + g \left[ \bar{\psi}(x) \beta^+ \right]_b \delta^3(x-y) \\ &\approx 0. \end{aligned}$$

Cuando los vínculos secundarios del sector DKP son considerados se obtiene que:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma(x), \omega_b(y) \right\} &= -ig \delta^3(x-y) \omega_b(x) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), \bar{\omega}_b(y) \right\} &= ig \delta^3(x-y) \bar{\omega}_b(x) \approx 0. \end{aligned}$$

---

Finalmente, si se tiene en cuenta los vínculos terciarios del sector DKP se deduce:

$$\begin{aligned}\left\{ \Sigma(x), \Omega_b(y) \right\} &= -ig\Omega_b(x) \delta^3(x-y) \approx 0, \\ \left\{ \Sigma(x), \bar{\Omega}_b(y) \right\} &= ig\bar{\Omega}_b(x) \delta^3(x-y) \approx 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se determina que el conjunto de vínculos deducidos para la teoría se pueden clasificar de la siguiente manera:

- Vínculos de primera clase:

$$\pi^+ \approx 0 \quad , \quad \Sigma \equiv G - ig \left( \bar{\psi}\theta - \bar{\theta}\psi \right) = \partial_A^x \pi^A - ig \left( \bar{\psi}p - \bar{p}\psi \right). \quad (5.35)$$

- Vínculos de segunda clase:

$$\begin{aligned}\theta &= p + \frac{i}{2}\beta^+\psi \quad , \quad \bar{\theta} = \bar{p} - \frac{i}{2}\bar{\psi}\beta^+, \\ \omega &= \left( 1 - \beta^+\beta^- \right) \left( \beta^A D_A^x - m \right) \psi \quad , \quad \bar{\omega} = \bar{\psi} \left( \bar{D}_A^x \beta^A + m \right) \left( 1 - \beta^-\beta^+ \right) \\ \Omega &= \left( \beta^- \right)^2 \beta^+ \left( 2im\beta^- D_-^x + im\beta^k D_k^x - im^2 + g\pi^- \right) \psi, \\ \bar{\Omega} &= \bar{\psi} \left( 2im\bar{D}_-^x \beta^- + im\bar{D}_k^x \beta^k + im^2 + g\pi^- \right) \beta^+ \left( \beta^- \right)^2, \\ \phi^k &= \pi^k - \partial_-^x A_k + \partial_k^x A_-.\end{aligned} \quad (5.36)$$

Ahora, con el fin de eliminar los vínculos de primera clase y tornarlos de segunda se considerarán las condiciones de gauge de cono de plano nulo, definidas como:

$$A_- \approx 0 \quad , \quad \pi^- + \partial_-^x A_+ \approx 0, \quad (5.37)$$

lo anterior con el fin de garantizar la equivalencia de los resultados que se deducirán con aquellos derivados en la electrodinámica escalar.

---

## 5.4. Ecuaciones de Movimiento

Una vez establecida la completa libertad de gauge de la teoría al momento de identificar todos los vínculos de primera y de segunda, se esta en posición de especificar la dinámica de los campos que sea compatible con estos vínculos. Para ello, se utilizara el Hamiltoniano extendido  $H_E$  que resulta de adicionar al Hamiltoniano canónico todos los vínculos de primera clase que del problema resulten, por tanto, para el caso en consideración  $H_E$  se define como:

$$\begin{aligned}
H_E &= H_P + \int d^3y u_2 \Sigma \\
&= \int d^3y \left[ \frac{1}{2} \pi^{-2} + (\pi^A \partial_A^y + g \bar{\psi} \beta^+ \psi) A_+ + \bar{\psi} \left[ \frac{i}{2} \beta^A (\overleftarrow{\partial}_A^y - \overrightarrow{\partial}_A^y) + g A_A \beta^A + m \right] \psi \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} (F_{mn})^2 + u_1 \pi^+ + u_l \phi^l + \bar{\lambda} \theta + \bar{\theta} \lambda + u_2 \Sigma \right]. \tag{5.38}
\end{aligned}$$

Al estudiar la dinámica de los campos asociados al sector electromagnético se deduce que:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_+ &= u_1, \\
\dot{A}_- &= \pi^- + \partial_- A_+ - \partial_- u_2, \\
\dot{A}_s &= \partial_s A_+ + u_s - \partial_s u_2.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Ahora, si la dinámica de los momentos canónicos asociados a los campos  $A_\mu(x)$  es considerada, resulta que:

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}^+ &= G \approx 0, \\
\dot{\pi}^- &= -g \bar{\psi} \beta^- \psi + \partial_l u_l, \\
\dot{\pi}^s &= -g \bar{\psi} \beta^s \psi + \partial_m F_{ms} - \partial_- u_s.
\end{aligned} \tag{5.40}$$

Ahora se procede a garantizar la equivalencia de éstas ecuaciones de movimiento con su contraparte Lagrangiano, combinando las relaciones (5.39) y (5.40) se

---

obtiene:

$$\begin{aligned}
\partial_\mu F^{\mu+} - g\bar{\psi}\beta^+\psi &\approx 0, \\
\partial_\mu F^{\mu-} - g\bar{\psi}\beta^-\psi + \partial_l\partial_l u_2 &= 0, \\
\partial_\mu F^{\mu s} - g\bar{\psi}\beta^s\psi - \partial_- \partial_s u_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

La equivalencia con la ecuación de movimiento para el campo electromagnético derivada en el espacio de configuración exigirá que se deba cumplir la condición  $u_2 = 0$ .

Ahora, al estudiar la dinámica de los campos asociados al sector DKP se obtiene que:

$$\dot{\psi} = \lambda + igu_2\psi \quad , \quad \dot{\bar{\psi}} = \bar{\lambda} - igu_2\bar{\psi}. \tag{5.42}$$

En el caso de los momentos canónicos conjugados a los campos  $(\psi, \bar{\psi})$  se obtiene que:

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= -gA_+\beta^+\psi + \left[ \beta^A \left( i\partial_A^x - gA_A \right) - m \right] \psi + \frac{i}{2}\beta^+\lambda \\
&\quad + igu_2p, \\
\dot{\bar{p}} &= -gA_+\bar{\psi}\beta^+ - \bar{\psi} \left[ \beta^A \left( i\partial_A^x + gA_A \right) + m \right] - \frac{i}{2}\bar{\lambda}\beta^+ \\
&\quad - igu_2\bar{p}.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

De (5.42) y (5.43) se deduce que:

$$\begin{aligned}
\left( \beta^\mu D_\mu - m \right) \psi &\approx -gu_2\beta^+\psi, \\
\bar{\psi} \left( \beta^\mu \bar{D}_\mu + m \right) &\approx gu_2\bar{\psi}\beta^+.
\end{aligned} \tag{5.44}$$

que al exigir la equivalencia con las ecuaciones de DKP confirman que el hecho de escoger  $u_2 = 0$  es válida.

---

## 5.5. Eliminación de los Vínculos de Primera Clase

Con el fin de eliminar los vínculos de segunda clase que la teoría posee, procederemos a aplicar el método iterativo, con lo cual se considerará en primer lugar el conjunto de vínculos correspondiente a los vínculos de primera clase y las condiciones de gauge. De manera que definiremos las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\Theta_1 &\equiv \pi^+, \\
\Theta_2 &\equiv \partial_-^x \pi^- + \partial_k^x \pi^k - ig \left( \bar{\psi} p - \bar{p} \psi \right), \\
\Theta_3 &\equiv A_-, \\
\Theta_4 &\equiv \pi^- + \partial_-^x A_+,
\end{aligned} \tag{5.45}$$

a partir de los cuales se procede a definir la primera matriz de vínculos cuyos elementos se calculan por:

$$C_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Phi_i(x), \Phi_j(y) \right\}, \tag{5.46}$$

y que posee la siguiente representación:

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \tag{5.47}$$

La inversa de la matriz (5.47) se calcula de la siguiente identidad que debe satisfacer:

$$\int dz^- C(x, z) C^{-1}(z, y) = \int dz^- C^{-1}(x, z) C(z, y) = \mathbf{I} \delta(x^- - y^-), \tag{5.48}$$

---

siendo que  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad de  $3 \times 3$ . Es posible mostrar por cálculo directo que la matriz  $C^{-1}(x, y)$  tiene la siguiente representación:

$$C^{-1}(x, y) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -|x^- - y^-| & 0 & \epsilon(x^- - y^-) \\ |x^- - y^-| & 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 \\ 0 & -\epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 \\ \epsilon(x^- - y^-) & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(x^\top - y^\top). \quad (5.49)$$

Se procede a definir el primer conjunto de DB, identificados con  $D1$ , que para dos variables dinámicas  $\mathbf{A}_a(x)$  y  $\mathbf{B}_b(y)$  se calculan de la siguiente manera:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_c(u) \right\} C_{ij}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}. \quad (5.50)$$

Utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= ig\psi_a(x) \delta^3(x - u), & \left\{ \bar{\psi}_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= -ig\bar{\psi}_a(x) \delta^3(x - u), \\ \left\{ p_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= igp_a(x) \delta^3(x - u), & \left\{ \bar{p}_a(x), \Theta_2(u) \right\} &= -ig\bar{p}_a(x) \delta^3(x - u), \\ \left\{ \Theta_1(v), A_+(y) \right\} &= -\delta^3(v - y), & \left\{ A_k(x), \Theta_2(u) \right\} &= -\partial_k^x \delta^3(x - u), \\ \left\{ \pi^k(x), \Theta_i(u) \right\} &= 0, \end{aligned}$$

se puede deducir para el caso cuando  $\mathbf{A}_a(x)$  es una variable asociada al sector  $DKP$  se cumple:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_2(u) \right\} C_{2j}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}.$$

Ahora, si  $\mathbf{B}_b(y)$  es también un campo DKP se determina:

$$\begin{aligned} \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} &= \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_2(u) \right\} C_{22}^{-1}(u, v) \\ &\quad \left\{ \Theta_2(v), \mathbf{B}_b(y) \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}, \end{aligned}$$

con lo cual se puede concluir que:

$$\left\{ \psi_a(x), \bar{p}_b(y) \right\}_{D1} = \delta_{ab} \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \bar{\psi}_a(x), p_b(y) \right\}_{D1} = \delta_{ab} \delta^3(x-y). \quad (5.51)$$

Cuando  $\mathbf{B}_b(y) = A_+(y)$  se determina:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} = \frac{1}{2} \int d^3u \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_2(u) \right\} |u^- - y^-| \delta^2(u^\top - y^\top),$$

a partir de lo cual se infiere:

$$\begin{aligned} \left\{ \psi_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{ig}{2} \psi_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top), \\ \left\{ p_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{ig}{2} p_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top), \\ \left\{ \bar{\psi}_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{ig}{2} \bar{\psi}_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top), \\ \left\{ \bar{p}_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{ig}{2} \bar{p}_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top). \end{aligned} \quad (5.52)$$

Ahora, si  $\mathbf{A}_a(x) = A_k(x)$ , se determina,

$$\left\{ A_k(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} = \left\{ A_k(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} + \partial_k^x \int d^3v C_{2d}^{-1}(x, v) \left\{ \Theta_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\},$$

de manera que los únicos DB no nulos son:

$$\begin{aligned} \left\{ A_k(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top), \\ \left\{ A_k(x), \pi^-(y) \right\}_{D1} &= -\frac{1}{2} \epsilon(x^- - y^-) \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top). \end{aligned} \quad (5.53)$$

---

Fácilmente se puede mostrar que:

$$\{A_k(x), \pi^l(y)\}_{D_1} = \{A_k(x), \pi^l(y)\} = \delta_k^l \delta^3(x-y). \quad (5.54)$$

## 5.6. Inversión de los Vínculos asociados al Sector DKP

Con el objeto de eliminar los vínculos asociados al sector escalar representados por los campos de DKP es fundamental extraer las componentes no redundantes de los mismos, para tal fin será necesario utilizar las propiedades asociadas a los proyectores de los campos de DKP indicadas por la ecuación (4.42), junto con las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} P\beta^+ &= P^+ & P\beta^- &= P^- & P\beta^k &= P^k \\ P^-\beta^+ &= P & P^-\beta^- &= 0 & P^-\beta^k &= 0 \\ \beta^-P &= (P^+)^\dagger & \beta^+P &= (P^-)^\dagger & \beta^kP &= -(P^k)^\dagger \\ \beta^- (P^-)^\dagger &= P & \beta^+ (P^-)^\dagger &= 0 & \beta^k (P^-)^\dagger &= 0 \end{aligned}$$

además de:

$$\begin{aligned} P^+\beta^+ &= 0 & P^+\beta^- &= P & P^+\beta^k &= 0 \\ P^k\beta^+ &= 0 & P^k\beta^- &= 0 & P^k\beta^l &= \delta_l^k P \\ \beta^- (P^+)^\dagger &= 0 & \beta^+ (P^+)^\dagger &= P & \beta^k (P^+)^\dagger &= 0 \\ \beta^- (P^k)^\dagger &= 0 & \beta^+ (P^k)^\dagger &= 0 & \beta^l (P^k)^\dagger &= \delta_l^k P \end{aligned}$$

Utilizando la representación física de los campos DKP indicados por la ecuación (4.43), es posible extraer de los vínculos asociados a los campos DKP los

elementos no triviales los cuales resultan ser:

$$\begin{aligned}
\Psi_1 &\equiv p_\varphi + \frac{i}{2}\psi^+ \approx 0 \quad , \quad \Psi_2 \equiv p_+ \approx 0 \quad , \quad \Psi_3 \equiv p_k \approx 0, \\
\Psi_4 &\equiv p_- + \frac{i}{2}\varphi \approx 0 \quad , \quad \Psi_5 \equiv i\partial_-^x \varphi - m\psi^+ \approx 0, \\
\Psi_6 &\equiv \left( i\partial_k^x - gA_k \right) \varphi - m\psi^k \approx 0, \\
\Psi_7 &\equiv 2m\partial_-^x \psi^- - im \left( i\partial_k^x - gA_k \right) \psi^k + \left( im^2 - g\pi^- \right) \varphi \approx 0, \\
\Psi_8 &\equiv \bar{p}_\varphi - \frac{i}{2}\bar{\psi}^- \approx 0 \quad , \quad \Psi_9 \equiv \bar{p}_+ - \frac{i}{2}\varphi^* \approx 0 \quad , \quad \Psi_{10} \equiv \bar{p}_k \approx 0, \\
\Psi_{11} &\equiv \bar{p}_- \approx 0 \quad , \quad \Psi_{12} \equiv i\partial_-^x \varphi^* + m\bar{\psi}^- \approx 0, \\
\Psi_{13} &\equiv \left( i\partial_k^x + gA_k \right) \varphi^* + m\bar{\psi}^k, \\
\Psi_{14} &\equiv 2m\partial_-^x \bar{\psi}^+ + im \left( i\partial_k^x + gA_k \right) \bar{\psi}^k - \left( im^2 + g\pi^- \right) \varphi^* \approx 0.
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Sobre la base de conjunto de vínculos (5.55) es posible construir una segunda matriz con elementos definidos de la siguiente manera:

$$D_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_i(x), \Psi_j(y) \right\}_{D_1}, \tag{5.56}$$

y que posee la siguiente representación:

$$D(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbb{A}(x, y) & \mathbb{B}(x, y) \\ \mathbb{C}(x, y) & \mathbb{D}(x, y) \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \tag{5.57}$$

donde se han introducido las siguientes submatrices:

$$\mathbb{A}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha(x) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

---


$$\mathbb{B}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & i\partial_-^x & D_k^x & \lambda(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -m\delta_{kl} & imD_k^x \\ i & 0 & 0 & 0 & -m & 0 & 0 \\ i\partial_-^x & -m & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta(x) \\ D_k^x & 0 & -m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \theta(x) & 0 & -imD_k^x & 2m\partial_-^x & \beta(x) & 0 & -\xi(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{C}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i & i\partial_-^x & \bar{D}_k^x & -\theta(x) \\ -i & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m\delta_{kl} & -im\bar{D}_k^x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2m\partial_-^x \\ i\partial_-^x & 0 & 0 & m & 0 & 0 & -\beta(x) \\ \bar{D}_k^x & 0 & m\delta_{kl} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda(x) & 2m\partial_-^x & im\bar{D}_k^x & 0 & -\beta(x) & 0 & \xi(x) \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{D}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma(x) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma(x) & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y se han fijado los siguientes elementos:

$$\begin{aligned} \alpha(x) &\equiv g^2\varphi(x)\varphi(x) \quad , \quad \beta(x) \equiv g^2\varphi(x)\varphi^*(x) \quad , \quad \gamma(x) \equiv g^2\varphi^*(x)\varphi^*(x), \\ \theta(x) &\equiv \left[ im^2 - g\pi^-(x) \right] \quad , \quad \lambda(x) \equiv \left[ im^2 + g\pi^-(x) \right], \\ \xi(x) &\equiv 2img^2 \left[ \varphi^*(x)\psi^-(x) + \varphi(x)\bar{\psi}^+(x) \right]. \end{aligned} \quad (5.58)$$

La matriz inversa  $C^{-1}(x, y)$  asociada a  $D(x, y)$  es calculada de la siguiente relación:

$$\int d^3y D(x, y) C^{-1}(x, z) = \mathbf{I}\delta^3(x - z), \quad (5.59)$$

---

Es posible mostrar que la matriz  $C^{-1}(x, y)$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$C^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}(x, y) & \mathbb{F}(x, y) \\ \mathbb{G}(x, y) & \mathbb{D}(x, y) \end{pmatrix},$$

con

$$\mathbb{E}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & A_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{F}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} A_{10} & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & 0 & 0 & 0 \\ B_{10} & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{17} & B_{18} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & 0 & 0 \\ D_{10} & D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} & D_{15} & 0 & D_{17} & 0 \\ E_{10} & E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & 0 & 0 & 0 \\ F_{10} & F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_{14} & F_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & G_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{13} & H_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{G}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & M_4 & M_5 & M_6 & 0 & 0 & 0 \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 & P_6 & 0 & 0 & 0 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & 0 & 0 \\ R_1 & R_2 & R_3 & R_4 & R_5 & R_6 & 0 & R_8 & 0 \\ S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 & S_7 & S_8 & S_9 \\ T_1 & T_2 & T_3 & T_4 & T_5 & T_6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & U_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & W_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

---


$$\mathbb{H}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & M_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S_{10} & S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con los siguientes valores:

■

■ Funciones  $A_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned} A_2 &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], & A_{10} &= -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\ A_{11} &= \frac{i}{2} \delta^3(x-y), & A_{12} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_1^x \delta^3(x-y)], \\ A_{13} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_2^x \delta^3(x-y)], & A_{14} &= \frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\ A_{15} &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y). \end{aligned}$$

■ Funciones  $B_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\ B_2 &= \frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ \bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right. \\ &\quad \left. + \gamma(x) \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[ D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \right\}, \end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
B_3 &= \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} [D_1^x \delta^3(x-y)] \right\}, \\
B_4 &= \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} [D_2^x \delta^3(x-y)] \right\}, \\
B_5 &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \gamma(x) \delta^3(x-y) \right], \\
B_6 &= -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
B_{10} &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ \bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\
B_{11} &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ \bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \delta^3(x-y) \right\}, \\
B_{12} &= \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ \bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_1^x \delta^3(x-y)] \right\}, \\
B_{13} &= \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ \bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_2^x \delta^3(x-y)] \right\} \\
\\
B_{14} &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \frac{1}{m} \left\{ \xi(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) - \frac{\gamma(x)}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left[ \bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ \bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \right\}, \\
B_{15} &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ \bar{D}_k^x \bar{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\
B_{16} &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_1^x \delta^3(x-y)], \\
B_{17} &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_2^x \delta^3(x-y)], \\
B_{18} &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

---

■ Funciones  $C_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
C_2 &= \frac{i}{4m^2} \bar{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
C_{10} &= \frac{1}{2} \bar{D}_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
C_{11} &= -\frac{i}{2m} \bar{D}_1^x \delta^3(x-y), \\
C_{12} &= -\frac{1}{2m} \bar{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_1^x \delta^3(x-y)] \right\}, \\
C_{13} &= -\frac{1}{2m} \bar{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_2^x \delta^3(x-y)] \right\}, \\
C_{14} &= -\frac{i}{4m} \bar{D}_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\
C_{15} &= \frac{i}{2m} \bar{D}_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
C_{16} &= \frac{1}{m} \delta^3(x-y),
\end{aligned}$$

■ Funciones  $D_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
D_2 &= \frac{i}{4m^2} \bar{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\}, \\
D_{10} &= \frac{1}{2} \bar{D}_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
D_{11} &= -\frac{i}{2m} \bar{D}_2^x \delta^3(x-y), \\
D_{12} &= -\frac{1}{2m} \bar{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_1^x \delta^3(x-y)] \right\},
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
D_{13} &= -\frac{1}{2m} \overline{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} [\overline{D}_2^x \delta^3(x-y)] \right\}, & D_{15} &= \frac{i}{2m} \overline{D}_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \\
D_{14} &= -\frac{i}{4m} \overline{D}_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \overline{D}_k^x \overline{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\
D_{17} &= \frac{1}{m} \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

■ Funciones  $E_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
E_2 &= \frac{\gamma(x)}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
E_{10} &= \frac{i}{2} \delta^3(x-y), \\
E_{11} &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
E_{12} &= -\frac{i}{2m} \overline{D}_1^x \delta^3(x-y), \\
E_{13} &= -\frac{i}{2m} \overline{D}_2^x \delta^3(x-y), \\
E_{15} &= \frac{1}{2m} \delta^3(x-y), \\
E_{14} &= \frac{1}{4m} \left[ \overline{D}_k^x \overline{D}_k^x + \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

■ Funciones  $F_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
F_2 &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
F_{10} &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
F_{11} &= \frac{1}{2m} \delta^3(x-y), \\
F_{12} &= \frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} [\overline{D}_1^x \delta^3(x-y)],
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
F_{13} &= \frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} [\bar{D}_2^x \delta^3(x-y)], \\
F_{14} &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ \bar{D}_k^x \bar{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\
F_{15} &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y).
\end{aligned}$$

- Funciones  $G_i(x, y)$ :

$$G_{12} = \frac{1}{m} \delta^3(x-y) \quad , \quad G_{14} = \frac{i}{2m} \bar{D}_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right].$$

- Funciones  $H_i(x, y)$ :

$$H_{13} = \frac{1}{m} \delta^3(x-y) \quad , \quad H_{14} = \frac{i}{2m} \bar{D}_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right].$$

- Funciones  $K_i(x, y)$ :

$$K_{14} = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y).$$

- Funciones  $M_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
M_1 &= -\frac{m}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
M_2 &= \frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\
M_3 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\partial_-^x} [D_1^x \delta^3(x-y)], \\
M_4 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{\partial_-^x} [D_2^x \delta^3(x-y)], \\
M_5 &= -\frac{i}{2} \delta^3(x-y), \\
M_6 &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
M_{14} &= \frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right].
\end{aligned}$$

- 
- Funciones  $P_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
P_1 &= -\frac{i}{2}\delta^3(x-y), \\
P_2 &= -\frac{1}{4m} \left[ D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
P_3 &= -\frac{i}{2m} D_1^x \delta^3(x-y), \\
P_4 &= -\frac{i}{2m} D_2^x \delta^3(x-y), \\
P_5 &= \frac{1}{2m} \partial_-^x \delta^3(x-y), \\
P_6 &= -\frac{1}{2m} \delta^3(x-y), \\
P_{14} &= \frac{\alpha(x)}{4m^2} \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right].
\end{aligned}$$

- Funciones  $Q_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
Q_1 &= -\frac{1}{2} D_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
Q_2 &= \frac{i}{4m} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[ D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\}, \\
Q_3 &= -\frac{1}{2m} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} [D_1^x \delta^3(x-y)] \right\}, \\
Q_4 &= -\frac{1}{2m} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} [D_2^x \delta^3(x-y)] \right\}, \\
Q_5 &= -\frac{i}{2m} D_1^x \delta^3(x-y), \\
Q_6 &= -\frac{i}{2m} D_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \\
Q_7 &= -\frac{1}{m} \delta^3(x-y), \\
Q_{14} &= \frac{i}{4m^2} D_1^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

- Funciones  $R_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
R_1 &= -\frac{1}{2}D_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] , \quad R_3 = -\frac{1}{2m}D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} [D_1^x \delta^3(x-y)] \right\} , \\
R_2 &= \frac{i}{4m}D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[ D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} , \\
R_4 &= -\frac{1}{2m}D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} [D_2^x \delta^3(x-y)] \right\} , \quad R_5 = -\frac{i}{2m}D_2^x \delta^3(x-y) , \\
R_6 &= -\frac{i}{2m}D_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] , \quad R_8 = -\frac{1}{m} \delta^3(x-y) , \\
R_{14} &= \frac{i}{4m^2}D_2^x \left\{ \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

- Funciones  $S_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
S_1 &= -\frac{i}{4} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} \\
S_2 &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \frac{1}{2} \left[ D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} - \frac{1}{m} \left\{ \xi(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) + \frac{\alpha(x)}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \gamma(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right] \right\} \right\} , \\
S_3 &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} [D_1^x \delta^3(x-y)] \right\} , \\
S_4 &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} [D_2^x \delta^3(x-y)] \right\} , \\
S_5 &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \delta^3(x-y) \right\} , \\
S_6 &= \frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_-^x} \left\{ \left[ D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right\} ,
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
S_7 &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_x^-} [D_1^x \delta^3(x-y)], \\
S_8 &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_x^-} [D_2^x \delta^3(x-y)], \\
S_9 &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y), \\
S_{10} &= -\frac{i}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left[ \alpha(x) \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{11} &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_x^-} [\alpha(x) \delta^3(x-y)], \\
S_{12} &= \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \alpha(x) \frac{1}{\partial_x^-} [\overline{D}_1^x \delta^3(x-y)] \right\} \\
S_{13} &= \frac{i}{4m^2} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \alpha(x) \frac{1}{\partial_x^-} [\overline{D}_2^x \delta^3(x-y)] \right\}, \\
S_{14} &= -\frac{1}{8m^2} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left\{ \left[ D_k^x D_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \left[ \alpha(x) \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right] \right\} \right. \\
&\quad \left. + \alpha(x) \left\{ \frac{1}{\partial_x^-} \left[ \overline{D}_k^x \overline{D}_k^x - \frac{\beta(x)}{m} + i\theta(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right\} \right\}, \\
S_{15} &= \frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_x^-} \left[ \alpha(x) \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right].
\end{aligned}$$

■ Funciones  $T_i(x, y)$ :

$$\begin{aligned}
T_1 &= -\frac{i}{2} \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y), \\
T_2 &= -\frac{1}{4m} \frac{1}{\partial_x^-} \left\{ \left[ D_k^x D_k^x + \frac{\beta(x)}{m} - i\lambda(x) \right] \frac{1}{\partial_x^-} \delta^3(x-y) \right\}, \\
T_3 &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_x^-} [D_1^x \delta^3(x-y)],
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
T_4 &= -\frac{i}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} [D_2^x \delta^3(x-y)], \\
T_5 &= -\frac{1}{2m} \delta^3(x-y), \\
T_6 &= \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
T_{14} &= -\frac{1}{4m^2} \frac{1}{\partial_-^x} \left[ \alpha(x) \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right].
\end{aligned}$$

■ Funciones  $U_i(x, y)$ :

$$U_2 = \frac{i}{2m} D_1^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \quad U_3 = -\frac{1}{m} \delta^3(x-y).$$

■ Funciones  $W_i(x, y)$ :

$$W_2 = \frac{i}{2m} D_2^x \left[ \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y) \right], \quad W_4 = -\frac{1}{m} \delta^3(x-y).$$

■ Funciones  $Z_i(x, y)$ :

$$Z_2 = \frac{1}{2m} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y).$$

Después de calcular la matriz  $D^{-1}(x, y)$  se procede a definir el segundo conjunto de DB, para dos variables dinámicas  $\mathbf{A}_a(x)$  y  $\mathbf{B}_b(y)$ , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Psi_\alpha(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{\alpha\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1}. \tag{5.60}
\end{aligned}$$

De la definición del conjunto de vínculos de segunda clase asociados al sector escalar (5.55), es posible caracterizar a  $(\varphi, \varphi^*)$  como variables independientes en

la teoría. Ahora, de la definición de los corchetes de Dirac  $D1$ , se puede considerar inicialmente como coordenadas independientes del sector electromagnético a  $(A_+, A_k)$ . Entonces, con la finalidad de calcular los correspondientes corchetes de Dirac  $D2$ , se utilizarán las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\}_{D1} &= \delta^3(x - u), \\
\left\{ \varphi(x), \bar{\Psi}_{14}(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \varphi(x) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top), \\
\left\{ \psi^+(x), \bar{\Psi}_7(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \psi^+(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top), \\
\left\{ \varphi(x), \bar{\Psi}_7(u) \right\}_{D1} &= -\frac{ig^2}{2} \varphi(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top), \\
\left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\}_{D1} &= \delta^3(x - y), \\
\left\{ \varphi^*(x), \bar{\Psi}_7(u) \right\}_{D1} &= \frac{ig^2}{2} \varphi^*(x) \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top), \\
\left\{ \varphi^*(x), \bar{\Psi}_{14}(u) \right\}_{D1} &= \frac{ig^2}{2} \varphi^*(x) \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top), \\
\left\{ \bar{\psi}^+(x), \Psi_2(u) \right\}_{D1} &= \delta^3(x - y),
\end{aligned} \tag{5.61}$$

junto con:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Psi_5(v), A_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{g}{2} \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top), \\
\left\{ \Psi_7(v), A_+(y) \right\}_{D1} &= img \psi^-(v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top), \\
\left\{ \Psi_{12}(v), A_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{g}{2} \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top), \\
\left\{ \Psi_{14}(v), A_+(y) \right\}_{D1} &= -igm \bar{\psi}^+(v) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top), \\
\left\{ \psi_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= \frac{ig}{2} \psi_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top),
\end{aligned}$$

---


$$\begin{aligned}
\left\{ \bar{\psi}_a(x), A_+(y) \right\}_{D1} &= -\frac{ig}{2} \bar{\psi}_a(x) |x^- - y^-| \delta^2(x^\top - y^\top), \quad (5.62) \\
\left\{ A_k(x), \Psi_7(u) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} g \varphi(u) \epsilon(x^- - u^-) \partial_k^x \delta^2(x^\top - u^\top), \\
\left\{ A_k(x), \Psi_{14}(u) \right\}_{D1} &= \frac{1}{2} g \varphi^*(u) \epsilon(x^- - u^-) \partial_k^x \delta^2(x^\top - u^\top).
\end{aligned}$$

De esta manera, los DB que pueden ser asociados al campo  $\varphi(x)$ , se calcula a partir de (5.60) y (5.61) con los siguientes términos relevantes:

$$\begin{aligned}
\left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D2} &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi(x), \Psi_7(u) \right\}_{D1} D_{7\beta}^{-1}(u, v) \\
&\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi(x), \Psi_8(u) \right\}_{D1} D_{8\beta}^{-1}(u, v) \\
&\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi(x), \Psi_{14}(u) \right\}_{D1} D_{14\beta}^{-1}(u, v) \\
&\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D1}.
\end{aligned}$$

De manera que se establece que los únicos D2 con las variables que se consideran independientes son :

$$\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D2} = -\frac{m}{4} \epsilon(x - y) \delta^2(x^\top - x^\top). \quad (5.63)$$

$$\begin{aligned}
\left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_{D2} &= \frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[ \varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\
&\quad \left. \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right], \quad (5.64)
\end{aligned}$$

De manera similar, los corchetes de Dirac D2 correspondientes al campo  $\varphi^*(x)$

se deducen de:

$$\begin{aligned}
\left\{ \varphi^*(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ \varphi^*(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi^*(x), \Psi_1(u) \right\}_{D_1} D_{1\beta}^{-1}(u, v) \\
&\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi^*(x), \Psi_7(u) \right\}_{D_1} D_{7\beta}^{-1}(u, v) \\
&\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ \varphi^*(x), \Psi_{14}(u) \right\}_{D_1} D_{14\beta}^{-1}(u, v) \\
&\quad \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1},
\end{aligned}$$

resultando que el únicos DB diferentes de cero serán con los campos  $\varphi(y)$  y  $A_+(y)$ , con lo cual:

$$\begin{aligned}
\left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= -\frac{ig}{2} \delta^2(x^\top - y^\top) \left[ \varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \varphi^*(v) \right. \\
&\quad \left. \epsilon(x^- - v^-) \epsilon(v^- - y^-) \right]. \tag{5.65}
\end{aligned}$$

Ahora, los restantes corchetes de Dirac  $D_2$  relacionados con el campo  $A_+(x)$  se derivan de:

$$\begin{aligned}
\left\{ A_+(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} &= \left\{ A_+(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_5(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{5,\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_7(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{7,\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_{12}(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{12,\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1} - \int d^3u d^3v \left\{ A_+(x), \Psi_{14}(u) \right\}_{D_1} \\
&\quad D_{14\beta}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_\beta(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_1},
\end{aligned}$$

---

a partir del cual resulta:

$$\left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_{D2} = \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v [\varphi(u) \varphi^*(v) + \varphi^*(u) \varphi(v)] \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - u^\top) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) \quad (5.66)$$

$$\left\{ A_+(x), A_k(y) \right\}_{D2} = \frac{1}{2} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top). \quad (5.67)$$

En el caso que se consideren los campos  $A_k(x)$ , es posible mostrar que los corchetes de Dirac diferentes de cero con ésta variable son:

$$\left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_{D2} = \delta_k^l \delta^3(x - y). \quad (5.68)$$

## 5.7. Conjunto Final de Corchetes de Dirac

Finalmente, el conjunto de vínculos que restan por ser invertidos bajo la definición de los corchetes de Dirac  $D2$  son:

$$\phi^p \equiv \pi^p - \partial_-^x A_p, \quad (5.69)$$

a partir de los cuales se construye la última matriz de vínculos, cuyos elementos son definidos por:

$$F_{kl}(x, y) \equiv \left\{ \phi^k(x), \phi^l(y) \right\}_{D2} = -2\delta_k^l \partial_-^x \delta^3(x - y),$$

donde su correspondiente tiene la forma:

$$F_{kl}^{-1}(x, y) = -\frac{1}{4} \delta_k^l \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top). \quad (5.70)$$

De acuerdo con (5.70), es posible introducir el conjunto final de corchetes de Dirac entre dos variables dinámicas  $\mathbf{A}_a(x)$  y  $\mathbf{B}_b(y)$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\{\mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y)\}_D &= \{\mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y)\}_{D2} - \int d^3u d^3v \{\mathbf{A}_a(x), \phi^p(u)\}_{D2} F_{pq}^{-1}(u, v) \\
&\quad \{\phi^q(v), \mathbf{B}_b(y)\}_{D2} \\
&= \{\mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y)\}_{D2} + \frac{1}{4} \int d^3u d^3v \{\mathbf{A}_a(x), \phi^p(u)\}_{D2} \\
&\quad \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \{\phi^p(v), \mathbf{B}_b(y)\}_{D2}. \tag{5.71}
\end{aligned}$$

Bajo la definición de los corchetes de Dirac  $D2$  y el conjunto de vínculos (5.69) se puede considerar como variables independientes a los campos  $(A_k, A_+, \varphi, \varphi^*)$ . Entonces, con el propósito de calcular los DB finales entre ellas se utilizarán las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\{A_k(x), \phi^p(u)\}_{D2} &= \delta_k^p \delta^3(x - u), \\
\{A_+(x), \phi^p(u)\}_{D2} &= -\frac{1}{2} \epsilon(x^- - u^-) \partial_p^x \delta^2(x^\top - u^\top), \\
\{\varphi(x), \phi^p(u)\}_{D2} &= 0, \quad \{\varphi^*(x), \phi^p(u)\}_{D2} = 0. \tag{5.72}
\end{aligned}$$

En el caso que se considere el campo  $A_k(x)$ , los términos relevantes de la relación (5.71) son:

$$\begin{aligned}
\{A_k(x), \mathbf{B}_b(y)\}_D &= \{A_k(x), \mathbf{B}_b(y)\}_{D2} + \frac{1}{4} \int d^3v \epsilon(x^- - v^-) \delta^2(x^\top - v^\top) \\
&\quad \{\phi^k(v), \mathbf{B}_b(y)\}_{D2},
\end{aligned}$$

Con base en (5.73) es posible mostrar que:

$$\{A_k(x), A_l(y)\}_D = -\frac{1}{4} \delta_k^l \epsilon(x^- - y^-) \delta^2(x^\top - y^\top), \tag{5.73}$$

$$\{A_k(x), A_+(y)\}_D = -\frac{1}{4} |x^- - y^-| \partial_k^x \delta^2(x^\top - y^\top). \tag{5.74}$$

---


$$\begin{aligned}\left\{ A_k(x), \varphi(y) \right\}_D &= 0, \\ \left\{ A_k(x), \varphi^*(y) \right\}_D &= 0.\end{aligned}\tag{5.75}$$

De la relación (5.71) se puede verificar que cuando  $\mathbf{A}_a(x) = \varphi(x)$  ó  $\mathbf{A}_a(x) = \varphi^*(x)$ , se cumple:

$$\begin{aligned}\left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2}, \\ \left\{ \varphi^*(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D &= \left\{ \varphi(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2},\end{aligned}\tag{5.76}$$

de manera que los corchetes de Dirac asociados a los campos  $\varphi(x)$  y  $\varphi^*(x)$  son:

$$\begin{aligned}\left\{ \varphi(x), \varphi^*(y) \right\}_{D_2} &= -\frac{m}{4}\epsilon(x-y)\delta^2(x^\top - y^\top), \\ \left\{ \varphi(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= \frac{ig}{2}\delta^2(x^\top - y^\top) \left[ \varphi(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\ &\quad \left. \varphi(v) \epsilon(v^- - y^-) \right], \\ \left\{ \varphi^*(x), A_+(y) \right\}_{D_2} &= -\frac{ig}{2}\delta^2(x^\top - y^\top) \left[ \varphi^*(x) |x^- - y^-| - \frac{1}{4} \int dv^- \epsilon(x^- - v^-) \right. \\ &\quad \left. \varphi^*(v) \epsilon(v^- - y^-) \right].\end{aligned}\tag{5.77}$$

Finalmente, cuando se estudia el caso  $\mathbf{A}_a(x) = A_+(x)$ , se concluye que los términos a considerar de la expresión (5.71) son:

$$\begin{aligned}\left\{ A_+(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D &= \left\{ A_+(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2} - \frac{1}{8} \partial_p^x \int du^- d^3v \epsilon(x^- - u^-) \delta^2(x^\top - v^\top) \\ &\quad \epsilon(u^- - v^-) \left\{ \phi^p(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}_{D_2},\end{aligned}$$

a partir del cual se infiere que:

$$\begin{aligned}\left\{ A_+(x), A_+(y) \right\}_D &= \frac{g^2}{16m} \int d^3u d^3v [\varphi(u) \varphi^*(v) + \varphi^*(u) \varphi(v)] \epsilon(x^- - u^-) \\ &\quad \delta^2(x^\top - u^\top) \epsilon(u^- - v^-) \delta^2(u^\top - v^\top) \epsilon(v^- - y^-) \delta^2(v^\top - y^\top) \\ &\quad - \frac{1}{8} \frac{1}{2} \nabla_x^2 \delta^2(x^\top - y^\top) \int du^- \epsilon(x^- - u^-) |u^- - y^-|.\end{aligned}\tag{5.78}$$

---

*Utilizando, nuevamente la forma física de la función de onda del campo DKP para el sector de espín 0, es posible nuevamente mostrar la equivalencia entre los resultados derivados en  $SQED_4$  y la electrodinámica escalar de primer orden.*

# Capítulo 6

## Conclusiones

*En este trabajo consideramos los aspectos clásicos mas importantes de la electrodinámica escalar de primer orden en las coordenadas de plano nulo. Se sabe que una teoría de campos en las coordenadas de plano nulo será siempre descrito por un Lagrangiano singular, lo cual requiere que un tratamiento adecuado sea utilizado de manera de lograr un análisis consistente con los vínculos que resulten en una teoría particular. Debido al carácter singular de la teoría, la formulación de Dirac para estudiar sistemas con vínculos fue utilizada.*

*En el capitulo 2 del trabajo se realizo una análisis consistente de la electrodinámica escalar,  $SQED_4$ , en las coordenadas de plano nulo y varias características se presentaron que contrastan con su contraparte desarrollada en las coordenadas de instante forma. Después de obtener y clasificar todos los vínculos correspondientes a la teoría se observo que uno de los primera clase, que se identifica como la ley de Gauss, resulta de una combinación lineal de los vínculos del sector electromagnético y escalar. Éste vínculo es el resultado de la existencia de vínculos asociados al sector escalar. Cuando el análisis de la teoría se realiza en las coordenadas del instante forma es posible mostrar que la ley de Gauss no tiene contribución escalar ya que éste sector está libre de vínculos.*

---

Después de seleccionar las condiciones de gauge de plano nulo, los vínculos de primera clase se tornan de segunda, no en tanto, fue necesario importar apropiadas condiciones de frontera sobre los campos con el fin de eliminar el subconjunto oculto de vínculos de primera clase, lo que garantiza que la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase este bien definida. Los corchetes de Dirac de la teoría fueron derivados de manera consistente y se cuantizaron via principio de correspondencia. Las relaciones de conmutación obtenidas son consistente con aquellos resultados reportados en la literatura [93]. Sin embargo, las relaciones de conmutación que involucran al operador de campo  $A_+$  nu fueron derivados por Neville and Rohrlich, quienes afirmaron que dichas expresiones podrían ser obtenidas resolviendo las ecuaciones de vínculo a nivel cuántico.

En el capítulo 3 se introdujo la teoría de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) que es una formulación relativista en primer orden para describir partículas de espín 0 y 1. Se estudio las propiedades generales de la ecuación de DKP y el álgebra de las matrices  $\beta$  que la identifican. Posteriormente, se analizo la covarianza de la ecuación de DKP y la ley de transformación de los campos fundamentales. En seguida, se examino las representaciones irreducibles de la teoría d DKP y se mostró la equivalencia entre éste formalismo y el formalismo de Klein-Gordon-Fock cuando se selecciona el sector de espín 0 ó con el formalismo de Proca cuando se considera el sector de spin 1. Debido a la dependencia lineal en la derivada de los campos, la densidad Lagrangiana asociada a la teoría de DKP se caracterizar por ser singular. Por tanto, el método de Dirac fue necesario utilizar con el fin de dar un manejo apropiado a la estructura de vínculos que la teoría presenta y encontrar los apropiados grados de libertad y corchetes de Poisson consistente con ellos. Finalmente, se discutió el acoplamiento mínimo electromagnético en la teoría de DKP.

En el capítulo 4 se analizo la teoría de DKP libre en las coordenadas de plano nulo. La naturaleza singular de la teoría resulto más evidente en este sistema de coordenadas, ya que a diferencia de su contraparte, en las coordenadas de instante forma, la teoría posee un nuevo conjunto de vínculos secundarios y terciarios. Su presencia pone de manifiesto que los multiplicadores de lagrange

---

que se deben considerar para estudiar la dinámica de los campos no se pueden fijar completamente y el número de componentes a determinar depende de la representación de los campos a considerar. Con el fin de poner en evidencia los vínculos secundarios que resultan fue necesario introducir un nuevo conjunto de proyectores, los cuales se identifican por ser los que extraen las componentes de los campos de DKP. Ya definidos éste conjunto de vínculos, se procedió a determinar los grados de libertad correspondientes a la teoría y los corchetes de Dirac asociados a estas cantidades. Se pudo observar que las expresiones que resultaron eran equivalentes a aquellas que se derivan para el campo escalar de KGF complejo en las coordenadas de plano nulo que se derivaron en el capítulo 3.

En el último capítulo, se estudio la electrodinámica escalar de primer orden que se interpreta como la interacción de un campo escalar descrito por el campo DKP con el campo electromagnético. Como era de esperar, la estructura funcional de los vínculos es completamente diferente de aquella que se obtuvo en el formalismo de segundo orden de la  $SQED_4$ . Se mostró con detalle la estructura de vínculos que el sistema posee y se pudo visualizar directamente, que en el límite cuando la constante de acople tiende a cero se reproduce los resultados que se conocen en las teorías libres, lo que garantizó la coherencia de los resultados derivados. Se pudo mostrar, cuando los vínculos fueron clasificados, que uno de los vínculos de primera clase, que se identifica como el equivalente de la ley de Gauss para la teoría en interacción, resulta de una combinación de lineal de los vínculos del sector electromagnético con los vínculos primarios del sector DKP. Un análisis detallado, permite identificar a los campos  $(\varphi, \varphi^*, A_+)$  como las coordenadas independientes de la teoría. Los corchetes de Dirac entre estas variables fueron calculadas y se mostró que son equivalentes a los resultados obtenidos en el formalismo de segundo orden, cuando la representación física de los campos DKP es considerada.



# Apéndice A

## Coordenadas de Plano Nulo

### A.1. Notación

Las coordenadas de plano nulo se interpretan en términos del tiempo de plano nulo  $x^+$  y la coordenada longitudinal  $x^-$  las cuales se relacionan a las coordenadas  $x^0$  y  $x^3$  a partir de las siguientes ecuaciones de transformación:

$$x^+ \equiv \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}} \quad , \quad x^- \equiv \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}} \quad , \quad (\text{A.1})$$

con las coordenadas transversales  $x^\perp \equiv (x^1, x^2)$  manteniéndose las mismas. Así, el cuadrivector de posición es denotado como  $x^\mu = (x^+, x^\perp, x^-) \equiv (x^+, x^1, x^2, x^-)$ , de manera que la métrica tendrá la siguiente representación:

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{A.2})$$

En forma explícita, es posible deducir las siguientes relaciones,

$$x^+ = x_- \quad , \quad x^- = x_+ \quad , \quad x \cdot y = x^+ y^- + x^- y^+ - x^\perp \cdot y^\perp \quad , \quad (\text{A.3})$$

---

donde las derivadas en relación a las variables  $x^+$  y  $x^-$  son definidas por:

$$\partial_+ \equiv \frac{\partial}{\partial x^+} \quad , \quad \partial_- \equiv \frac{\partial}{\partial x^-} \quad (\text{A.4})$$

con  $\partial^+ = \partial_-$ .

## A.2. Problema de Valores Inicias Sobre el Plano Nulo

Considérese el campo escalar real libre masivo clásico  $\phi(x)$  que satisface la ecuación de Klein-Gordon-Fock:

$$(\square_x + m^2) \phi(x) = 0. \quad (\text{A.5})$$

Es conocido que sobre una superficie tipo espacio  $\Sigma$ , un conjunto completo de condiciones iniciales se establecen si se especifica el campo y sus derivadas sobre dicha superficie. Ahora, la cuestión sería saber cual es el valor del campo en un punto arbitrario y fuera de la superficie. La solución a este problema parte del siguiente teorema [44]:

**Teorema 1** *En un punto y fuera de la superficie tipo espacio  $\Sigma$  el campo es dado por:*

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \int_{\Sigma} d^4x [\Delta(y-x) \partial_{\mu}^x \phi(x) - \phi(x) \partial_{\mu}^x \Delta(y-x)] \\ &= \int_{\Sigma} d^4x \Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu}^x \phi(x), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

donde  $\Delta(y-x)$  es la función de Schwinger que tiene las siguientes propiedades: es solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon-Fock (KGF), es real, nula fuera del cono de luz y es antisimétrica. Por tanto, el campo así determinado corresponde a la propagación causal o sea,  $\phi(y)$  es solo influenciada por puntos  $x \in \Sigma$  que están atrás o delante del cono de luz asociado a  $y$ , dependiendo de si  $y$  está después o antes de  $\Sigma$  (ver Figura A.1)

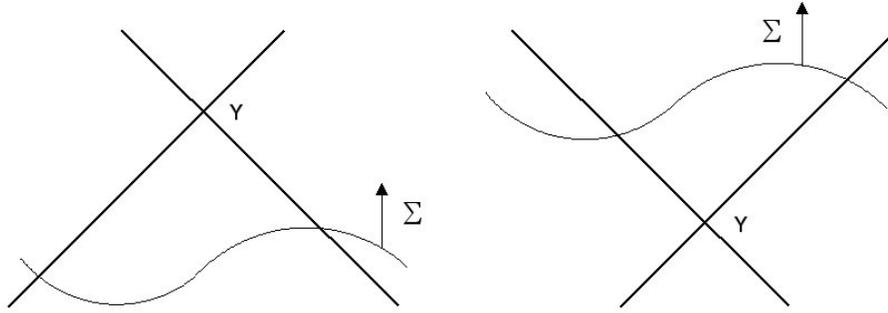


Figura A.1: En la primera figura el punto  $y$  es influenciado causalmente por puntos que están en  $\Sigma$ . En la segunda figura  $y$  influencia causalmente aquellos puntos que están dentro de su cono de luz en  $\Sigma$ .

Si es seleccionada  $\Sigma$  como una superficie plana con tiempo constante  $x^0 = cte$ , la solución apropiada del problema de valores iniciales se escribe como:

$$\phi(y) = \int_{\Sigma} d^3x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_t^x \phi(x). \quad (\text{A.7})$$

La solución tradicional de teoría de campos es basada en la bien entendida teoría de Cauchy-Kowalewski de las ecuaciones hiperbólicas [45], que proporciona teoremas para la existencia y unicidad de las soluciones cuando el campo y sus derivadas temporales son conocidas sobre una hiper-superficie tipo espacio.

Ahora, surge la controversia sobre la existencia y unicidad de las soluciones para condiciones impuestas sobre el plano nulo. Con el fin de responder a ello, la ecuación diferencial (A.5) se expresará en términos de las coordenadas de plano nulo

$$(\partial^+ \partial^- + \partial_i \partial_i + m^2) \phi = 0. \quad (\text{A.8})$$

En término de las coordenadas de plano nulo, la ecuación de KGF se expresa en la forma canónica de una ecuación diferencial hiperbólica [45] y  $x^\pm$  son denominadas superficies características de la ecuación diferencial. En la teoría de ecuaciones diferenciales parciales se demuestra que especificar el valor del

---

campo y un número finito de derivadas sobre una característica no determina una solución única de la ecuación diferencial [46]. Así que se está tratando con un problema de valores iniciales característicos cuando se desea resolver (A.8), lo que implicará que se deben precisar condiciones sobre ambas características  $x^\pm = cte$ . El problema de valores iniciales característicos se formula de la siguiente manera: Determinar una solución  $\phi(x^+, x^-)$  que satisfaga las siguientes condiciones iniciales <sup>1</sup>,

$$\phi(x^+, x_0^-) = f(x^+) \quad , \quad \phi(x_0^+, x^-) = g(x^-) \quad , \quad (\text{A.9})$$

y la condición de continuidad

$$\phi(x_0^+, x_0^-) = f(x_0^+) = g(x_0^-) \quad . \quad (\text{A.10})$$

Las funciones  $f$  y  $g$  que especifican  $\phi$  sobre ambas características son llamados de datos característicos. De acuerdo con Neville e Rohrlich [47], la solución del problema de valores iniciales característicos se obtiene de la relación (A.7) y de utilizar el teorema de Gauss. Entonces, es posible mostrar que:

$$\partial_x^\mu \left[ \Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0 \quad , \quad (\text{A.11})$$

recordando que tanto  $\phi$  como  $\Delta$  satisfacen la ecuación de KGF. Integrando la relación (A.11) en el volumen limitado por  $ABC$  (ver Figura A.2), donde el plano  $x^0 = 0$  intercepta la parte de posterior del cono de luz del punto  $P$ ,  $AB : x^0 = 0$ ,  $BC : x^+ = x_0^+$  y  $AC : x^- = x_0^-$ . Por el teorema de Gauss resulta:

$$\int d^4x \partial_x^\mu \left[ \Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0$$

o, explícitamente

$$\left( \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right) d\Sigma(x) n^\mu \left[ \Delta(y-x) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0 \quad , \quad (\text{A.12})$$

---

<sup>1</sup>Se considerará el caso en dos dimensiones por simplicidad.

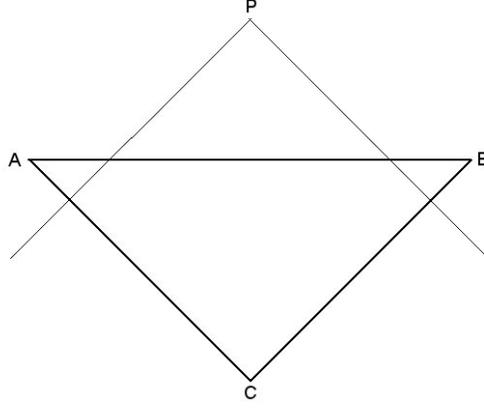


Figura A.2: Contorno de integración usado en la derivación de (A.12).

donde  $d\Sigma$  es un elemento de superficie apropiado y  $n^\mu$  es un vector normal a la superficie. De (A.7) se deriva que,

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \int d^3x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_0^x \phi(x) \\ &= \int_{CB} dy^+ \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_+^x \phi(x) + \int_{CA} dy^- \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_-^x \phi(x). \quad (\text{A.13})\end{aligned}$$

Debido a que la normal a un plano nulo se encuentra en el mismo plano, el conocimiento de  $\phi$  sobre el plano nulo implica su derivada normal. Así, se establece el siguiente teorema [47]:

**Teorema 2** *La solución de la ecuación de KGF (A.8) para  $m \geq 0$  es únicamente determinada por (A.12) en la región conexa limitada por la cuña formada por los planos  $x^\pm = \text{cte}$  si  $\phi$  se especifica sobre esos planos.*

Utilizando el hecho que  $\Delta$  desaparece sobre argumentos de tipo espacio,  $(x-y)^2 < 0$ , las integrales en (A.12) se extienden desde la cuña (punto C na Fig. (A.2)) hasta  $+\infty$ , por lo tanto, esas partes que están fuera del cono característico de P no contribuyen a la integral. Si se compara (A.12) con (A.7) se determina que el lado derecho de la solución del problema de Cauchy, que

---

en término de las condiciones iniciales (A.9), se expresa:

$$\begin{aligned} \phi(x^+, x^-) = & \int_{x_0^+}^{\infty} dy^+ \left[ \Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-) \frac{\partial f}{\partial y^+} - f(y^+) \frac{\partial}{\partial y^+} \Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-) \right] \\ & + \int_{x_0^+}^{\infty} dy^- \left[ \Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-) \frac{\partial g}{\partial y^-} - g(y^-) \frac{\partial}{\partial y^-} \Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Esta es la solución del problema de valores característicos para la ecuación de KGF en el plano nulo en términos de las condiciones iniciales  $f$  y  $g$  y la función de Schwinger  $\Delta$ . Entonces, con el fin de obtener una solución única es necesario especificar condiciones iniciales sobre las dos características y no solamente sobre una.

Para una teoría cuántica de campos en  $d = 1 + 1$  dimensiones, la relación (A.14) implica que se debe cuantizar sobre el plano nulo [48]. Con el fin de entender mejor esta afirmación, se sabe que el conmutador de dos campos escalares libres se puede expresar en términos de la función de Schwinger de la siguiente forma [49]:

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x - y) . \quad (\text{A.15})$$

De ésta relación se puede determinar los siguientes conmutadores a tiempos iguales entre los campos en las coordenadas tradicionales:

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = 0 \quad , \quad \left[ \dot{\phi}(x), \phi(y) \right]_{x^0=y^0} = -i\delta(x - y). \quad (\text{A.16})$$

De la expresión (A.7) se puede deducir que:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int dz \left\{ \left[ \dot{\phi}(z), \phi(y) \right] \Delta(x - z) - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^0} \Delta(x - z) \right\}_{x^0=z^0} . \quad (\text{A.17})$$

Insertando en esta relación la expresión (A.16) se obtiene la identidad (A.15). Así, la ecuación (A.17) es una condición de consistencia que expresa el conmutador para tiempos diferentes  $x^0 > y^0$  a través de las condiciones de Cauchy a tiempos iguales  $x^0 = y^0$  [50].

---

Con el fin de derivar una condición de consistencia análoga a (A.17), se escogerá  $x^\pm = 0$ ; por lo tanto, usando (A.14) se obtiene que el conmutador de campos a tiempos diferentes es dado por:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int_0^\infty dz^+ \left[ \Delta(x-z) \frac{\partial}{\partial z^+} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^+} \Delta(x-z) \right]_{x^- = z^-} \\ + \int_0^\infty dz^- \left[ \Delta(x-z) \frac{\partial}{\partial z^-} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^-} \Delta(x-z) \right]_{x^+ = z^+} \quad (\text{A.18})$$

lo que implica que para todo  $x^\pm$  dos conmutadores independientes deben ser especificados,

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^\pm = y^\pm} = -\frac{i}{4} \epsilon(x^\mp - y^\mp), \quad (\text{A.19})$$

es decir, el problema de valores iniciales característicos corresponde a cuantizar en el plano nulo. En la literatura los conmutadores son especificados sobre una sola característica, usualmente  $x^+ = 0$ , lo cual es indispensable si se desea una formulación Hamiltoniana con un solo parámetro de evolución temporal  $x^+$ , lo que estaría en contradicción con los resultados obtenidos. Por tanto, la cuantización sobre una sola característica es posible si condiciones sobre la segunda característica son impuestas [47, 50]. Un caso interesante resulta si se mueve el plano nulo  $x^- = cte$  hacia el pasado distante y sobre este imponer  $\phi = 0$ ; explícitamente,

$$\lim_{x^- \rightarrow -\infty} \phi = 0, \quad \forall \mathbf{x}, \quad x^+ \geq x_0^+, \quad (\text{A.20})$$

obteniéndose de (A.14) la solución:

$$\phi(x) = \int_{x^+ = x_0^+} dy^- \Delta(x-y) \overset{\leftrightarrow x}{\partial}_- \phi(y). \quad (\text{A.21})$$

Consecuentemente, se establece el siguiente teorema:

**Teorema 3** *Especificado  $\phi$  sobre el plano  $x^+ = x_0^+$  y la condición asintótica (A.20), la ecuación de KGF, para  $m \geq 0$ , tendrá una única solución dada por (A.21) en el plano  $x^+ \geq x_0^+$  [47].*

---

Corolário: *Cualquier solución de la ecuación de KGF que satisfaga (A.20) y que se anule sobre el plano nulo definido por  $x^+ = x_0^+$ , también se anula para  $x^+ \geq x_0^+$ .*

En (A.21) la integración sobre  $y^-$  se extiende de  $-\infty$  hasta  $+\infty$ , aun cuando el conjunto abierto  $y^- \in (x^-, \infty)$  no contribuya, ya que  $\Delta$  desaparece para argumento tipo espacio. Los puntos del cono característico deberán ser todos internos al dominio de integración,  $\phi$  será correctamente dada por ésta ecuación para algún  $x^+ > x_0^+$ , pero en el limite cuando  $x^+$  se aproxima de  $x_0^+$  una condición de convergencia para  $x^- \rightarrow +\infty$  sobre la integral (A.21) se hace necesaria. Así, se impone la siguiente restricción adicional:

$$\lim_{x^- \rightarrow \infty} \phi = 0 \quad , \quad \text{sobre } x^+ = x_0^+, \quad (\text{A.22})$$

y, con esto, se verifica la consistencia de (A.21) tomando  $P$  sobre el plano nulo  $x_0^+$  [47].

# Bibliografía

- [1] G. Petiau, Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect. **16** (1936).
- [2] R. Y. Duffin, Phys. Rev. **54**, 1114 (1938).
- [3] N. Kemmer, Proc. Roy. Soc. **A173**, 91 (1939).
- [4] L. de Broglie, Compt. Rend. **199**, 445 (1934).
- [5] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetski, Quantum Electrodynamics, 2<sup>nd</sup> ed. Inter., New York, 1965.
- [6] A. Wightman, Aspects of Quantum Theory, p. 95. Edited by A. Salam and E. P. Wigner, Cambridge, University Press (1972).
- [7] P. A. M. Dirac, Rev. Mod. Phys. **21**, 392 (1949).
- [8] P. P. Srivastava, *Light front quantized field theory (an introduction): Spontaneous symmetry breaking. Phase transition in  $\phi^4$  theory*. Invited article for: Saga of Field CBPF-NF-075-93, Sep 1993. 31pp. Lecture at Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambu, Brazil, Sep 1993. e-Print Archive: hep-th/9312064.
- [9] P. P. Srivastava, *Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model*. Talk given at the 1st U.S.-Brazil Workshop on Topology, Geometry, and Physics, UNICAMP, Campinas, Brazil, Jul 1996. hep-th/9610149.  
*P. P. Srivastava, Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results*. Invited article for: Saga of Field Theory, From Points to Strings, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India. hep-ph/9908492.

- 
- [10] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.
- [11] M. Nowakowski, *Phys. Lett. A* **244**, 329 (1998).  
J. T. Lunardi et al., *Phys. Lett. A* **268**, 165 (2000).
- [12] E. Fischbach, M. M. Nieto e C. K. Scott, *J. Math. Phys.* **14**, 1760 (1973).  
M. Riedel, *Relativistische Gleichungen fuer Spin-1 Teilchen*, Diplomarbeit, Institute for Theoretical Physics, JohannWolfgang Goethe-University, Frankfurt/Main (1979).
- [13] G. Köalbermann, *Phys. Rev. C* **34** , 2240 (1986).  
R. E. Kozack et al., *Phys. Rev. C* **37** , 2898 (1988).  
R. E. Kozack, *Phys. Rev. C* **40** , 2181 (1989).  
L. J. Kurth et al., *Phys. Rev. C* **50**, 2624 (1994).  
R. C. Barret e Y. Nedjadi, *Nucl. Phys. A* **585**, 311c (1995).  
L. J. Kurth et al., *Nucl. Phys. A* **585**, 335c (1995).
- [14] V. Ya. Fainberg e B. M. Pimentel, *Braz. J. Phys.* **30** (2000) 275.  
*Phys. Lett. A* **271** (2000) 16.
- [15] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira e J. S. Valverde, *Phys. Lett. A* **268** (2000) 165.
- [16] Y. Nedjadi e R. C. Barrett, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27** (1994) 4301.
- [17] M. Falekl, M. Merad, *Commun. Theor. Phys. (Beijing-China)* **50** (2008) 587.
- [18] V. Gribov, *Eur. Phys. J. C.* **10** (1999) 71.
- [19] I. V Kanatchikov, hep-th/9911175.
- [20] R. Casana, V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel e J. S. Valverde, *Phys. Lett. A* **316** (2003) 33.

- 
- [21] R. Casana, B. M. Pimentel e J. S. Valverde *J. Phys. A*: **370** (2006) 441.
- [22] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Nuovo Cimento*, **A1** , 625 (1971).  
F. Rohrlich, *Acta Phys. Austriaca*, Suppl. VIII, 277(1971).
- [23] G. Mc Cartor, *Z. Phys*, **C41**, 271 (1988).
- [24] P. J. Steinhardt, *Ann. Phys* **128**, 425 (1980).
- [25] R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboin, *Nucl. Phys.* **B122**, 61 (1976).
- [26] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A modern perspective*, John Wiley and Sons (1974).  
K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics, Vol. 169*. Berlin, Heidelberg New York: Springer 1982.  
A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim: *Constrained Hamiltonian systems*. Rome: Academic Nazionale dei Lincei 1976  
K. Sundermeyer: *Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics, Vol. 169*. Berlin, Heidelberg New York: Springer 1982.
- [27] R. A. Neville and F. Rohrch, *Phys. Rev.* **D3**, 692(1971).
- [28] R. Casana, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Braz. J. Phys.* **44**, 398 (2014).
- [29] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Phys. Rev.* **D3**, 1692(1971).
- [30] R, Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Int. J. Mod. Phys.*, **E16**, 2993 (2007).  
R, Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Rev. Col. Fis.*, **41**, 220 (2009).  
R, Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Rev. Col. Fis.*, **41**, 206 (2009).  
M.C. Bertin, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *J. Math. Phys.* **52** (2011) 102902.

- 
- C.A. Bonin, R. Bufalo, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Phys.Rev.* **D81** (2010) 025003.
- R. Casana, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **199** (2010) 219-222.
- Rodrigo Bufalo, Bruto Max Pimentel, German Enrique Ramos Zambrano, *Phys. Rev.* **D83** (2011) 045007.
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcarcel, G.E.R. Zambrano, *AIP Conf. Proc.* **1296** (2010) 402-405.
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *AIP Conf. Proc.* **1296** (2010) 398-401.
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcarcel, G.E.R. Zambrano, *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 175015.
- R. Bufalo, B.M. Pimentel, G.E. Zambrano, *AIP Conf. Proc.* **1520** (2013) 394-396.
- B.M. Pimentel, A.T. Suzuki, G.E.R. Zambrano, *Few Body Syst.* **52** (2012) 437-442.
- R. Bufalo, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Phys. Rev.* **D86** (2012) 125023.
- R. Casana, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Braz. J. Phys.* **44**, 398 (2014).
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcárcel, G.E.R. Zambrano, *J. Math. Phys.* **55** (2014) 042902.
- [31] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).
- [32] T. Heinzl, *Light-Cone Dynamics of Particles and Field*, hep-th/9812190.  
T. Heinzl, *Light-Cone Quantization: Fundamentation and Applications*, hep-th/0008096.
- [33] H. Leutwyler and J. Stern, *Ann. Phys.*, **112**, 94 (1978).
- [34] H. Bacry, P. Combe and P. Sorba, *Rep. Math. Phys.* **5**, 145 (1974); **5**, 361 (1974).

- 
- J. Patera, P. Winternitz and H Zassenhaus, *J. Math. Phys.* **16**, 1597 (1975).
- J. Patera, R. Sharp, P. Winternitz and H Zassenhaus, *J. Math. Phys.* **17**, 977 (1976);
- [35] L. Parker and G. Schmieg, *Am. J. Phys.* **38**, 218 (1970).  
Y. S. Kim and M. E. Noz, *Am. J. Phys.* **50**, 721 (1982).  
E. N. Glass, *Am. J. Phys.* **43**, 1013 (1975).
- [36] P. P. Srivastava, *Light-Front Quantization of Field Theory*, Topics in Theoretical Physics, pp. 206 - 217, eds, V.C. Aguilera-Navarro, D. Galetti, B. M. Pimentel and L. Tomio, IFT - São Paulo, SP, 1995.
- [37] P. E. Soper, *Field Theories in the Infinite Momentum Frame*, SLAC-137, UC-34, Sep. 1971.  
J. B. Kagut and D. E. Soper, *Quantum Electrodynamics in the Infinite Momentum Frame*, SLAC-PUB-680, Oct. 1969.
- [38] P. P. Srivastava, *Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results*. Saga of Field Theory, From Points to Strings, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India. hep-ph/9908492.
- [39] P. P. Srivastava, *Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model*. Brazil Workshop on Topology, Geometry, and Physics, UNICAMP, Campinas, Brazil, Jul 1996. hep-th/9610149.
- [40] Th. Heinzl, St. Krusche and E. Werner, *Phys. Lett.*, **B272**, 54 (1991); **B256**, 55 (1991).
- [41] P. P. Srivastava, *Light-Front Quantized Field Theory: (an introduction) Spontaneous Symmetry Breaking. Phase transition in  $\phi^4$  Theory*, XIV Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambu, MG, September 1993, CBPF-NF-075/93.
- [42] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, Vol. 169, Springer, New York, 1982.

- 
- [43] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New-York, 1964.
- P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950).
- P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **3**, 1 (1951).
- P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 236 (1958).
- P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 333 (1958).
- [44] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1969.
- [45] J. Mathews and R. Walker, *Mathematical Method of Physics*, Benjamin, New York, 1965.
- J. Irving and N. Mullineux, *Mathematical in Physics and Engineering*, Academic Press, New York, 1962.
- T. Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier, New York, 1973.
- [46] N. E. Ligterink and B. L. G. Bakker, *Vrije Universiteit Amsterdam*, preprint 1993.
- [47] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Nuovo Cimento*, **A1**, 625 (1971).
- [48] G. Domokos, in *Boulder Lectures, Vol. XIV, 1971*. Eds. A. O. Barut and W. E. Brittin, Boulder: Colorado University Press, 1972.
- [49] J. W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Germany, 1986.
- [50] T. Heinzl and E. Werner, *Z. Phys.* **C62**, 521 (1994).
- [51] G. McCartor, *Z. Phys.* **C41**, 271 (1988).
- [52] J. W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Germany, 1986.

- 
- [53] P. P. Srivastava, *Light front quantized field theory (an introduction): Spontaneous symmetry breaking. Phase transition in  $\phi^4$  theory*. Invited article for: Saga of Field CBPF-NF-075-93, Sep 1993. 31pp. Lecture at Encontro Nacional de Particulas e Campos, Caxambu, Brazil, Sep 1993. e-Print Archive: hep-th/9312064.
- P. P. Srivastava, *Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model*. Talk given at the 1st U.S.-Brazil Workshop on Topology, Geometry, and Physics, UNICAMP, Campinas, Brazil, Jul 1996. hep-th/9610149.
- P. P. Srivastava, *Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results*. Invited article for: Saga of Field Theory, From Points to Strings, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India. hep-ph/9908492.
- [54] G. McCartor, *Z. Phys*, **C41**, 271 (1988).
- [55] P. J. Steinhardt, *Ann. Phys* **128**, 425 (1980).
- [56] R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboin, *Nucl. Phys.* **B122**, 61 (1976).
- [57] E. Tomboulis, *Phys. Rev.* **D8**, 2736(1971).
- [58] F. Rohrlich, *Acta Phys. Austriaca, Suppl.* VIII, 277(1971).
- [59] S. B. Pereslegin and V. A. Franke, *Theor. Math. Phys.* **59**, 365 (1984).
- [60] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Phys. Rev.* **D3**, 1692(1971).
- [61] P. A. M. Dirac, *Proceeding of the Royal Society of London*, **117**, 610 (1828).
- [62] W. Pauli and W. F. Weisskopf, *Helvetica Physica Acta*, **1**, 709 (1934).
- [63] H. Yukawa, *Proc. Phys.. Math. Soc. Japan*, **17**, 48 (1935).
- [64] S.H. Neddermeyer and C.D. Anderson *Phys. Rev.*, **51**, 884 (1937).
- [65] M. Conversi, E. Pancini and O. Piccioni, *Phys. Rev.*, **71**, 209 (1947).  
C.M.G. Lattes, H. Muirhead, G.P.S. Occhialini and C.F. Powell, *Nature*, **59**, 694 (1947).

- 
- [66] L. de Broglie, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, **199**, 445 (1934).
- [67] N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc. London*, **A 166**, 127 (1938).
- [68] R.J. Duffin, *Phys. Rev.*, **54**, 1114 (1938).
- [69] J. Géhéniau, *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect*, **18**, 8 No. 1(1938).
- [70] R. A. Krajcik and M. M. Nieto, *Am. J. Phys.*, **45**, 818 (1977).
- [71] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1956.
- [72] Hans A. Bethe and Roman Jackiw, *Intermediate Quantum Mechanics*, 3a Edi., *Advanced Books Classics*, Westview Press, 1997.
- [73] H. M. Pilkuhn, *Relativistic Quantum Mechanics*, Berlin, Springer (2000).
- [74] W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics*, Berlin, Springer (2000).
- [75] Harish-Chandra, *Phys. Rev.*, **71**, 793 (1947).  
E. M. Corson, *Introduction to Tensors, Spinors and Relativistic Wave Equations*, Blackie and Son Limited, London and Glasgow, 1953.
- [76] R. A. Krajcik and N. M. Nieto, *Phys. Rev.* **D 10**, 4049 (1974).
- [77] I. Fijiwara, *Prog. Theor. Phys*, **10**, 589 (1953).
- [78] D. C. Peaslee, *Prog. Theor. Phys*, **6**, 639 (1951).
- [79] Y. Nedjadi and R. C. Barret. *J. Phys*, **G 19**, 87, 1993.  
N. Debergh, J. Ndimubandi and D. Strivay, *Z. Phys*, **C 56**, 421 (1992).
- [80] Y. Nedjadi and R. C. Barret. *J. Mhat. Phys*, **35**,4517, 1993.
- [81] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, *Lectures Notes in Physics*, Vol. 169, Springer, New York, 1982.

- 
- [82] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New-York, 1964.  
P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950).  
P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **3**, 1 (1951).
- [83] G. Petiau, *Acad. Roy. de Belg., A. Sci. Mem. Collect.* **16** (1936).
- [84] R. Y. Duffin, *Phys. Rev.* **54**, 1114 (1938).
- [85] N. Kemmer, *Proc. Roy. Soc. London*, **A 166**, 127 (1938). (1935).
- [86] L. de Broglie, *Compt. Rend.* **199**, 445 (1934).
- [87] A. I. Akhiezer and V. B. Berestetski, *Quantum Electrodynamics*, 2<sup>nd</sup> ed. Inter., New York, 1965.
- [88] A. Wightman, *Aspects of Quantum Theory*, p. 95. Edited by A. Salam and E. P. Wigner, Cambridge, University Press (1972).
- [89] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).
- [90] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics* (Benjamin, New York, 1964).
- [91] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Texeira and J. S. Valverde, *Phys. Lett* **A268**, 165 (2000).
- [92] V. Ya. Fainberg, B. M. Pimentel, *Phys. Lett.* **A271**, 16 (2000).
- [93] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Phys. Rev.* **D3**, 1692(1971).