

# Teoría de Fotones Masivos en las Coordenadas de Plano Nulo

Informe Final

Investigadores:

Prof. Dr. German Enrique Ramos Zambrano

Departamento de Física

Universidad de Nariño

Prof. Dr. B. M. Pimentel

Instituto de Física Teórica

Universidade Estadual Paulista

## Agradecimientos

Este trabajo fue desarrollado gracias al apoyo del Comité Curricular del Departamento de Física de la Universidad de Nariño. Agradecemos la hospitalidad y colaboración brindada por el Prof. Dr. Juan Carlos Montero director del Theoretical Physics Institute de la São Paulo State University donde gran parte de este trabajo fue elaborado. De igual manera queremos agradecer al Prof. Dr. Roberto André Kraenkel director de postgrados del Theoretical Physics Institute de la São Paulo State University por el apoyo logístico y computacional que nos brindó para finalizar esta investigación.

## Resmen

Una manera alternativa de generar masa a los campos gauge consiste en romper simetría a través de mecanismo de Higgs. En QED es posible atribuir una masa al fotón y aun mantener una teoría renormalizable y unitaria. Tal posibilidad no ocurre en teorías de gauge no abelianas, sin embargo, existe un mecanismo de rompimiento dinámico de simetría donde los campos de la teoría se reorganizan generando el equivalente del boson de Higgs y campos de gauge masivos. Un ejemplo clásico de este tipo de teorías es el modelo de Nambu-Jona-Lasinio y el mecanismo es denominado rompimiento dinámico de simetría. En este proyecto se estudiara la estructura canónica de la densidad Lagrangiana propuesta por Cornwall que le da masa al campo electromagnético y aun garantiza la invariante de gauge de la teoría. Para cumplir este propósito, se utilizara la formulación de Dirac y de Faddeev-Jackiw que permite deducir en forma natural la estructura simplética del espacio de fase y los paréntesis generalizados de la teoría.

### Palabras Clave:

Teoría Clásica de Campos. Electrodinámica de Proca. Invariancia de Gauge. Formulación de Dirac. Formulación Simplética de Faddeev-Jackiw.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>7</b>
<b>2. Plano Nulo</b>	<b>21</b>
2.1. Álgebra de Poincaré . . . . .	29
2.2. Problema de Valores Iniciales Sobre el Plano Nulo . . . . .	31
Bibliografía . . . . .	37
<b>3. Método de Dirac para Sistemas Singulares</b>	<b>43</b>
3.1. Estructura de Vínculos . . . . .	43
3.2. Condiciones de Consistencia . . . . .	49
3.3. Vínculos de primera e segunda clase . . . . .	51
3.4. Corchetes de Dirac (PD) . . . . .	54
3.5. Condiciones de Gauge . . . . .	57
3.6. Ejemplos . . . . .	61
Bibliografía . . . . .	86
<b>4. Método de Faddeev-Jackiw</b>	<b>89</b>
4.1. Formalismo de Faddeev-Jackiw sin Vínculos . . . . .	91
4.2. Formalismo de Faddeev-Jackiw con Vínculos . . . . .	98
4.3. Formalismo de Faddeev-Jackiw en Teoría de campos . . . . .	101
4.4. Ejemplos . . . . .	109
Bibliografía . . . . .	125
<b>5. Teoría de Fotones Masivos en las Coordenadas de Instante Forma</b>	<b>129</b>

---

5.1. <i>Formulación de Dirac</i> . . . . .	130
5.2. <i>Formulación de Faddeev-Jackiw</i> . . . . .	140
<i>Bibliografía</i> . . . . .	150
<b>6. <i>Teoría de Fotones Masivos en las Coordenadas de Plano Nulo</i></b>	<b>153</b>
6.1. <i>Introducción</i> . . . . .	153
6.2. <i>Formulación de Dirac</i> . . . . .	154
6.3. <i>Formulación de Faddeev-Jackiw</i> . . . . .	165
<i>Bibliografía</i> . . . . .	176
<b>7. <i>Conclusiones</i></b>	<b>179</b>

# Capítulo 1

## Introducción

*Uno de los mayores triunfos del siglo diecinueve fue la formulación de Maxwell para describir matemáticamente de una manera unificada los fenómenos electromagnéticos. Su principal implicación fue el hecho que toda radiación electromagnética se propaga en el vacío con velocidad constante. Las evidencias experimentales confirman que toda la radiación electromagnética se propaga con la velocidad de la luz en un amplio rango de frecuencias, lo que implica que el cuanto de luz, es decir el fotón, parece no tener masa [1]. Ahora, el éxito de la electrodinámica cuántica (QED) ha dado lugar a una total aceptación de este concepto, sin embargo, experimentos han sido realizados con el fin de probar directa o indirectamente si el fotón tiene masa o no. De un punto de vista teórico, si la masa del fotón fuera diferente de zero, la teoría electromagnética clásica y la QED mantendrían siendo validas a pesar de la perdida de invariancia de gauge. Por otra parte, una masa del fotón finita seria compatible con los principios de la física de partículas y su valor solo podría ser determinada a partir de experimentos y observaciones.*

*La formulación relativista de la electrodinámica cuántica de Tomonaga aclara el hecho que la electrodinámica cuántica covariante y su prescripción de renormalización puede conducir exitosamente con todos los problemas asociados con la masa del electrón, la carga del electrón,*

las variables de campos del electrón y el fotón. Sin embargo, encuentra dificultades con la masa del fotón ya que su substracción no se podría realizar en una forma natural y verosímil como ocurre con los infinitos asociados a la carga y a la masa del electrón. La substracción de la masa del fotón que se considero, fue considerada como arbitraria, lo cual podría resultar en drásticos cambios en las ecuaciones de Maxwell para la radiación. Así, se sugería que no se podría manejar simultáneamente una teoría de fotones masivos y el principio de invariancia de gauge [2].

Surgieron así propuestas de teorías efectivas que intentaban mantener estos dos principios, fotones sin masa e invariancia de gauge. La primera, fue formulada por Podolsky, Schwed and Bopp [3] y es descrita por la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}a^2\partial_\lambda F^{\mu\lambda}\partial^\gamma F_{\mu\gamma},$$

donde el tensor de campo electromagnético es definido en la manera usual de la siguiente forma:  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Este modelo, por lo tanto, propone considerar derivadas de orden superior en los campos. La teoría electromagnética de Podolsky, como se la conoce, resuelve el problema de la energía infinita en el caso de la electrostática y da la correcta expresión para la auto fuerza de las partículas cargadas a cortas distancias [4]. Además, se demostró que el Lagrangiano anterior es la única posible generalización del campo electromagnético que preserva invariancia de gauge por el grupo de simetría  $U(1)$  y produce ecuaciones de campo que aun son lineales en los mismos. Una predicción importante del modelo, es la existencia de fotones masivos cuya masa es proporcional al inverso del parámetro de Podolsky  $a$ . La determinación de un valor superior para la masa del fotón es actualmente de interés [5, 6].

Una manera alternativa de generar masa a los campos gauge consiste en romper simetría a través de mecanismo de Higgs. En QED es posible atribuir una masa al fotón y aun mantener una teoría renormalizable y unitaria [7]. Tal posibilidad no ocurre en teorías de gauge no abelianas,

sin embargo, existe un mecanismo de rompimiento dinámico de simetría donde los campos de la teoría se reorganizan generando el equivalente del boson de Higgs y campos de gauge masivos. Un ejemplo clásico de este tipo de teorías es el modelo de Nambu-Jona-Lasinio [8] y el mecanismo es denominado rompimiento dinámico de simetría.

Analicemos como en el caso abeliano es posible construir una Lagrangiana masiva invariante de gauge. Consideremos la densidad Lagrangiana para un modelo dinámico con un término de masa para un campo vectorial  $A^\mu$  propuesto por Cornwall que es descrito por [9]:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu,$$

donde  $M \neq 0$ . Esta Lagrangiana corresponderá a una teoría con un bosón vectorial masivo y es denominada de electrodinámica masiva o Lagrangiana de Stueckelberg. Esta Lagrangiana no es invariante de gauge, sin embargo, para garantizar esta simetría, se re escribirá de la siguiente forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 \left[ A_\mu + \frac{i}{e}(\partial_\mu U)U^{-1} \right]^2, \quad (1.1)$$

donde  $e$  es una constante de acoplamiento y

$$U(x) = \exp[-i\theta(x)].$$

Esta Lagrangiana es invariante por las siguientes transformaciones

$$U \rightarrow VU \quad , \quad A_\mu \rightarrow V A_\mu V^{-1} + \frac{i}{e}V \partial_\mu V^{-1},$$

donde  $V$  es una matriz de transformación del grupo de simetría  $U(1)$ . Básicamente, éste modelo pertenece al mismo grupo de simetría de la electrodinámica de Maxwell con la diferencia que posee un término de masa.

A la mitad del siglo pasado, Dirac impuso dos requerimientos sobre sistemas dinámicos relativistas: relatividad espacial y que las ecuaciones

de movimiento deban ser expresadas en forma Hamiltoniana. Estas condiciones no definen el sistema dinámico pero limitan las posibles formas que éste pueda tener. Una completa descripción de la dinámica implica que se especifique todas las posibles interacciones que el sistema pueda tener. La evolución de un sistema en mecánica no relativista es determinada por el Hamiltoniano: el estado del sistema en un instante  $t = cte$  permite calcular su comportamiento en un instante posterior. Dirac propuso tres diferentes formas de dinámica relativista dependiendo del tipo de superficies donde las condiciones iniciales fueran especificadas [10]. La primera forma, identificada como *instante forma*, es aquella cuando se selecciona una superficie tipo espacio y es la que frecuentemente se utiliza. La segunda, *punto forma*, consistente de una rama de la superficie hiperbólica  $x^\mu x_\mu = \kappa^2$ ,  $x_0 > 0$  y finalmente, el *frente forma* o *plano nulo*, es una superficie asociada a una onda de luz.

En el instante forma dos puntos a tiempos iguales poseen separación tipo espacio y por tanto los campos definidos en esos puntos son cantidades independientes. Sin embargo, en el plano nulo la situación difiere porque el principio de micro-causalidad conduce a un requerimiento de localidad en las componentes transversales y de no localidad en la coordenada longitudinal [11]. Las coordenadas de plano nulo no son relacionadas por una transformación de Lorentz a las coordenadas tradicionales utilizadas en el instante forma y como tal las descripción del mismo contenido físico en una teoría dinámica sobre el plano nulo podría resultar diferente del aquella descrita en el tratamiento convencional [12].

Una importante ventaja señalada por Dirac de la formulación de plano nulo es que siete de los generadores del grupo de Poincare son cinemáticos mientras que en el tratamiento convencional solo seis tiene esta característica. Otra interesante particularidad de una teoría relativista descrito en el plano nulo es que da origen a Lagrangianos singulares, es decir, a sistemas dinámicos con vínculos [13]. Esto en general conduce a una reducción en el número de operadores de campo independientes en el

correspondiente espacio de fase.

Neville and Rohrlich [17] observaron que la cuantización sobre el plano nulo significa cuantizar sobre las superficies características de las ecuaciones de campo clásicas, es decir, se debe especificar condiciones sobre ambas características,  $x^+ = cte$ ,  $x^- = cte$ , y no solo sobre un plano nulo. No obstante, McCartor [18] demostró que al cuantizar fermiones sin masa en  $(1+1)$  en ambas características implica que existan conmutadores a iguales  $x^+$  y  $x^-$  en la descripción Hamiltoniana y así dos parámetros de evolución temporal dificultará determinar una única formulación Hamiltoniana. Con todo, Steinhardt [19] destacó un importante problema asociado al procedimiento de cuantización sobre el plano nulo. Después que la condición de gauge ha sido introducida y los vínculos han sido eliminados de la misma de tal manera que no existan más transformaciones de gauge propias, existen transformaciones de gauge impropias que son consecuencia de no definir apropiadamente las condiciones de frontera y que por ende no se pueden suprimir introduciendo condiciones de gauge adicionales ya que pueden excluir posibles estados físicos [20]. Además, la presencia de las transformaciones de gauge impropias no permite definir coherentemente los conmutadores de la teoría.

Se ha observado que una característica fundamental de una teoría relativista sobre las coordenadas de plano nulo es el hecho que el Lagrangiano que la describe se torna singular, es decir, que ésta se torna un sistema dinámico con vínculos, por ende, un procedimiento apropiado deberá ser utilizado con el fin de cuantizar la teoría correspondiente.

Dirac [13] desarrolló un formalismo canónico generalizado que permite establecer un procedimiento sistemático para estudiar cualquier Lagrangiano singular e incorporar de manera consistente los vínculos, logrando escribir las ecuaciones de movimiento en forma canónica en términos de un Hamiltoniano generalizado conocido como Hamiltoniano primario [21]. El formalismo de Dirac constituye el punto de partida para cuantizar canónicamente teorías gauge ya que el método permite

deducir de manera natural los grados de libertad la teoría y deducir un conjunto de corchetes generalizados, conocidos como *corchetes de Dirac*, los cuales se cuantizan via principio de correspondencia [22].

El formalismo de Dirac clasifica los vínculos en primera y segunda clase los cuales tienen la siguiente interpretación: los vínculos de segunda clase permiten reducir el espacio de fase de manera única en cuanto que los de primera clase poseen la propiedad fundamental de estar asociados con las simetrías de gauge de la teoría [22]. Uno de los aspectos más discutidos del formalismo Hamiltoniano para sistemas singulares ha sido la conjetura de Dirac [23], según el cual todos los vínculos de primera clase, primarios y secundarios, actúan como generadores independientes de transformaciones canónicas infinitesimales que no alteran el estado físico del sistema. Si la hipótesis es correcta, la dinámica del sistema se describe en forma alternativa en términos del denominado Hamiltoniano extendido el cual se obtiene adicionando al Hamiltoniano primario todos los vínculos secundarios de primera clase acompañados por multiplicadores de Lagrange. La importancia de la conjetura de Dirac radica en el hecho que solo el Hamiltoniano extendido conduce a procedimientos consistentes para cuantizar teorías gauge e incorpora la máxima libertad de gauge que la teoría posea. Sin embargo, una dinámica basada en el Hamiltoniano extendido ha sido cuestionada por muchos autores [24] por el hecho que las ecuaciones de movimiento en este formalismo no son estrictamente equivalentes a su contraparte Lagrangiana.

Al final de la década de los ochenta, Faddeev y Jackiw [25] desarrollaron una nueva formulación alternativa para cuantizar sistemas dinámicos con vínculos siguiendo un tratamiento geométrico básico basado en la estructura simpléctica del espacio de fase [26] y apareció como una opción al tradicional y exitoso método propuesto por Dirac. El método consideraba Lagrangianos de primer orden en las derivadas temporales, no obstante, aun cuando inicialmente parecería que restringe el tipo de sistemas físicos a los cuales puede ser aplicado, se debe recordar que una

teoría descrita por lagrangianos de segundo orden se puede transformar en uno de primer orden expandiendo el espacio de configuración. Esta nueva formulación para analizar sistemas singulares es conocido como método de Faddeev-Jackiw y consiste en diagonalizar, por medio de una transformación de Darboux, la matrix 2-forma simpléctica asociada al Lagrangiano. Si la matriz es singular se obtiene nuevos vínculos los cuales se incorporan al Lagrangiano. El procedimiento continua a través de una nueva diagonalización y finaliza cuando una matrix simpléctica no singular es obtenida y que que estará asociada a los paracentesis generalizados en el espacio de fase reducido. El método pone en evidencia las variables cíclicas lo que permite identificar fácilmente las ecuaciones de los vínculos que serán usadas para eliminar las variables superfluas, reduciendo de este modo el espacio de fase.

La importancia de método de Faddeev-Jackiw radica en el hecho que no surge la necesidad de clasificar los vínculos en primera y segunda clase y permite obtener los corchetes generalizados apropiados para cuantizar el sistema físico sin seguir paso a paso el método de Dirac. Además, evita procedimientos engorrosos y complicados que surgen en el método de Dirac.

La equivalencia entre estos dos métodos no esta bien establecido pues cada una de ellos tienen sus propias características que se mantienen durante su aplicación. A pesar de ello, la principal diferencia entre estos métodos radica en el hecho que en Faddeev-Jackiw la reducción del espacio de fase conduce directamente a los grados de libertad del sistema en cuanto que en Dirac aun cuando se puede eliminar variables redundantes mediante la implementación de los corchetes de Dirac calculados con los vínculos de segunda clase, aun permanecerán grados de libertad superfluos asociados a los vínculos de primera clase los cuales sola serán eliminados hasta hasta que se fijen las condiciones de gauge. En el método de Faddeev-Jackiw la reducción del espacio de fase, cuando vínculos de primera clase están presentes, se puede realizar sin afectar el conte-

nido físico de la teoría. Esto significa que el método de Faddeev-Jackiw fija la condición de gauge implícitamente durante la ejecución del propio método, lo que dará origen a los grados de libertad físicos.

El idea del presente proyecto es realizar un estudio canónico de la teoría descrita por la densidad Lagrangiana (6.1) que describe fotones masivos en las coordenadas de instante forma y de plano nulo. Para ello, se utilizara el método de Dirac y el de Faddeev-Jackiw. Se pretende deducir el espacio de fase reducido y los paréntesis generalizados los cuales se cuantizaran aplicando el principio de correspondencia. Finalmente, se pretende encontrar la equivalencia entre estas dos formulaciones.

# Bibliografía

- [1] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2ed. Cambridge University Press (1996).
- [2] K. Fujikawa and H. Suzuki, *Path Integrals and Quantum Anomalies*, Cramendon Prees (2004).
- [3] B. Podolsky, *Phys. Rev.*, **62** 68 (1942).  
B. Podolsky and C. Kikuchy, *Phys. Rev.*, **65** 228 (1944).  
B. Podolsky, P. Schwed, *Rev. Mod. Phys.* **20** 40 (1948).  
F. Bopp, *Ann. der Physik*, **38** 345 (1940).
- [4] J. Frenkel, *Phys. Rev.* **E54**, 5859 (1996).
- [5] R. R. Cuzinatto, C. A. M. de Melo, L. G. Medeiros, P. J. Pompeia, Preprint IFT-P.021/2008 (2008).
- [6] C.A. Bonin, R. Bufalo, B.M. Pimentel and G.E.R. Zambrano, *Phys. Rev.*, **D81**, 025003 (2010).
- [7] e. de Rafael, *Lectures on Quantum Electrodynamics*, 1st Part Center de Physique Theorique (1976).
- [8] Y. Nambu and G. Jona Lasinio, *Phys. Rev.*, **122**, 245 (1961).
- [9] J. M. Cornwall, *Phys. Rev.*, **D10**, 500 (1974).  
J. M. Cornwall, *Phys. Rev.*, **D26**, 1453 (1982).

- [10] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).
- [11] P. P. Srivastava, *Light front quantized field theory (an introduction): Spontaneous symmetry breaking. Phase transition in  $\phi^4$  theory*. Invited article for: *Saga of Field CBPF-NF-075-93*, Sep 1993. 31pp. Lecture at Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambu, Brazil, Sep 1993. e-Print Archive: hep-th/9312064.
- [12] P. P. Srivastava, *Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model*. Talk given at the 1st U.S.-Brazil Workshop on Topology, Geometry, and Physics, UNICAMP, Campinas, Brazil, Jul 1996. hep-th/9610149.  
P. P. Srivastava, *Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results*. Invited article for: *Saga of Field Theory, From Points to Strings*, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India. hep-ph/9908492.
- [13] P. A. M. Dirac, *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York, (1964).  
P. A. M. Dirac, *Canad. J. Math.*, **2**, 129 (1950).
- [14] B.M. Pimentel and G.E.R. Zambrano, *Nucl.Part.Phys.Proc.* **267**, 183 (2015).
- [15] B.M. Pimentel and G.E.R. Zambrano, *Canonical Structure of gauge invariance Proca's electrodynamics theory*, aceptado para ser publicado en : *MOMENTO, Revista de Física*. (2017)  
(2003) 33.
- [16] R. Casana, B. M. Pimentel e J. S. Valverde *J. Phys. A:* **370** (2006) 44<sup>1</sup>.
- [17] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Nuovo Cimento*, **A1** , 625 (1971).  
F. Rohrlich, *Acta Phys. Austriaca, Suppl.* VIII, 277(1971).

- [18] G. Mc Cartor, *Z. Phys*, **C41**, 271 (1988).
- [19] P. J. Steinhardt, *Ann. Phys* **128**, 425 (1980).
- [20] R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboim, *Nucl. Phys.* **B122**, 61 (1976).
- [21] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim: *Constrained Hamiltonian systems*. Rome: Academic Nazionale dei Lincei 1976  
K. Sundermeyer: *Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics*, Vol. 169. Berlin, Heidelberg New York: Springer 1982
- [22] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag (1990).
- [23] C. Becchi, A. Rouet and S. Stora, *Ann. Phys*, **98**, 287 (1976).  
C. Becchi, A. Rouet and S. Stora, *Phys. Lett.*, **B52**, 344 (1974).  
I. V. Tyutin, *Levedev*, preprint 39 (1975).
- [24] R. Cawley, *Phys. Rev. Lett.*, **42**, 413 (1979).  
R. Cawley, *Phys. Rev.*, **D21**, 2988 (1980).  
A. Frenkel, *Phys. Rev.* **D21**, 2986 (1980).  
N. Mukunda, *Phys. Scr.*, **21**, 783 (1980).  
I. Castellani, *Ann. Phys.*, **143**, 357 (1982).  
R. Sugano, *Prog. Theor. Phys.*, **67**, 1966 (1972). R. Sugano and H. Kamo, *Prog. Theor. Phys.*, **69**, 1966 (1972).  
R. Sugano and T. Kimura, *Prog. Theor. Phys.*, **69**, 252 (1983).  
R. Sugano and T. Kimura, *J. Phys.* **A16**, 252 (1983).
- [25] L. Faddeev and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 1692 (1988).
- [26] V. I. Arnold, *Mathematical Methods in Classical Mechanics*, Springer-Verlag (1978).  
R. Abraham and J. E. Marsden, *Fundation of Mechanics*, 2ed, The Benjamin Cummings Publishing Company (1978).

- [27] R, Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Int. J. Mod. Phys.*, **E16**, 2993 (2007).
- R, Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Rev. Col. Fis.*, **41**, 220 (2009).
- R, Casana, B. M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Rev. Col. Fis.*, **41**, 206 (2009).
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *J. Math. Phys.* **52** (2011) 102902.
- C.A. Bonin, R. Bufalo, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Phys.Rev.* **D81** (2010) 025003.
- R. Casana, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* **199** (2010) 219-222.
- Rodrigo Bufalo, Bruto Max Pimentel, German Enrique Ramos Zambrano, *Phys. Rev.* **D83** (2011) 045007.
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcarcel, G.E.R. Zambrano, *AIP Conf. Proc.* **1296** (2010) 402-405.
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *AIP Conf. Proc.* **1296** (2010) 398-401.
- M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcarcel, G.E.R. Zambrano, *Class. Quant. Grav.* **28** (2011) 175015.
- R. Bufalo, B.M. Pimentel, G.E. Zambrano, *AIP Conf. Proc.* **1520** (2013) 394-396.
- B.M. Pimentel, A.T. Suzuki, G.E.R. Zambrano, *Few Body Syst.* **52** (2012) 437-442.
- R. Bufalo, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Phys. Rev.* **D86** (2012) 125023.
- R. Casana, B.M. Pimentel, G.E.R. Zambrano, *Braz. J. Phys.* **44**, 398 (2014).

M.C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcárcel, G.E.R. Zambrano, *J. Math. Phys.* **55** (2014) 042902.

B.M. Pimentel and G.E.R. Zambrano, *Nucl.Part.Phys.Proc.* **267**, 183 (2015).

R. Bufalo, B.M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Nucl.Part.Phys.Proc.* **267**, 180 (2015).

M. C. Bertin, B.M. Pimentel, C.E. Valcárcel and G.E.R. Zambrano, *Jor. .Math. Phys.*, **58** no.8, 082902 (2017).



# Capítulo 2

## Plano Nulo

*Dirac estableció que un sistema relativista debería cumplir con dos requisitos [1]:*

- *La relatividad exige que las leyes de la física se expresen en términos de un sistema de coordenadas curvilínea en el espacio-tiempo y que además ellas deban ser invariantes por transformaciones de un sistema de coordenadas a otro.*
- *Según la mecánica cuántica, las ecuaciones de movimiento tienen que ser expresadas en forma Hamiltoniana.*

*Estos requerimientos no definen un sistema dinámico pero si limitan las posibles formas que este puede tener. Una completa descripción de la dinámica del sistema implica que se deba especificar todas las posibles interacciones. Por tanto, es de vital importancia considerar nuevos sistemas dinámicos y verificar si ellos describen el mundo atómico de una manera mas adecuada [1]. Después de todo, estos nuevos sistemas dinámicos deberán cumplir con los requisitos de relatividad general y las ecuaciones de Hamilton de movimiento.*

*Por otra parte, la dinámica no relativista tiene una única forma posible ya que las interacciones deben estar contenidas en el Hamiltoniano*

y todos los otros generadores del grupo de Galileo son independientes de la interacción. De acuerdo a Dirac, el problema central para una general formulación Hamiltoniana es proporcionar una representación particular de los diez generadores del grupo de Poincare los cuales son definidos por las siguientes relaciones de corchetes de Poisson:

$$\begin{aligned} \left\{ P^\mu, P^\nu \right\} &= 0 \\ \left\{ M^{\mu\nu}, P^\rho \right\} &= g^{\nu\rho} P^\mu - g^{\mu\rho} P^\nu \\ \left\{ M^{\mu\nu}, M^{\rho\sigma} \right\} &= g^{\mu\sigma} M^{\nu\rho} - g^{\mu\rho} M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} M^{\mu\rho} + g^{\nu\rho} M^{\mu\sigma} , \end{aligned} \quad (2.1)$$

en términos de un conjunto de variables dinámicas independientes, tales como las coordenadas, los momentos, el espín, etc. Por lo tanto, alguna teoría dinámica invariante de Poincare que describe por ejemplo la interacción de partículas deberá proporcionar una realización particular del álgebra de Poincare (2.1).

Una realización elemental de (2.1) consiste en escoger un punto del espacio-tiempo  $x^\mu$  y su respectivo momento conjugado  $p^\nu$  como variables canónicas de tal manera que satisfagan la siguiente álgebra:

$$\left\{ x^\mu, p^\nu \right\} = -g^{\mu\nu} \quad , \quad \left\{ x^\mu, x^\nu \right\} = 0 \quad , \quad \left\{ p^\mu, p^\nu \right\} = 0 \quad , \quad (2.2)$$

de tal manera que los correspondientes generadores de Poincare tienen la siguiente estructura:

$$P^\mu = p^\mu \quad , \quad M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \quad , \quad (2.3)$$

con lo cual se puede mostrar que (2.1) es satisfecha. Sin embargo, a pesar de que (2.3) es una representación covariante sufre de varias deficiencias. Por ejemplo, ésta no describe ninguna interacción; para un sistema de partículas los generadores son simplemente la suma de los generadores de una simple partícula. Además, la representación (2.3) no lleva en consideración las condición on-shell  $p^2 = m^2$  que garantiza la causalidad relativista.

Con el fin de solucionar ésta situación se procede a elegir una variable de tiempo, es decir, una foliación del espacio-tiempo  $\Sigma$  con normal tipo luz o tipo tiempo. La superficie  $\Sigma$  deberá ser escogida de tal manera que ésta cruce todas las posibles líneas de mundo una y solo una vez. A parte de esta necesaria consistencia con causalidad, la foliación parece arbitraria. A pesar de ello, dada una particular foliación uno puede preguntar por los generadores de Poincare que dejan la hiper-superficie  $\Sigma$  invariante. El conjunto de tales generadores definen un subgrupo de grupo de Poincare llamado grupo de estabilidad  $G_\Sigma$  de  $\Sigma$ . Los generadores asociados son llamados cinemáticos en tanto que los otros son denominados dinámicos. Los generadores dinámicos mapean  $\Sigma$  en otra hiper-superficie  $\Sigma'$  y por tanto involucran la evolución temporal. Por tanto, se espera que éste tipo de generadores dependan del Hamiltoniano y en consecuencia de la interacción, ya que es una cantidad dinámica.

Se espera que el grupo de estabilidad que corresponde a una hiper-superficie irregular y que no tenga un alto grado de simetría sea vacío. Por ende, se exigirá que el grupo  $G_\Sigma$  actúe transitivamente sobre  $\Sigma$ , es decir, que dos puntos sobre  $\Sigma$  se puedan conectar por una transformación que pertenece a  $G_\Sigma$ .

La construcción de una teoría dinámica se realiza en dos pasos:

- Primero se especifica los generadores del grupo de estabilidad, es decir, se determina la cinemática en la superficie  $\Sigma$ . La característica principal de estos generadores es su independencia de la interacción con lo cual las variables dinámicas y los estados físicos se transforman, bajo el grupo de estabilidad, de un manera simple.
- Se tienen en cuenta los generadores de Poincare que no pertenecen al grupo de estabilidad y que transforman la superficie  $\Sigma$  en alguna otra superficie  $\Sigma'$ . En particular, estos generadores describirán la evolución del sistema como una función del tiempo. Estos generadores contienen toda la información de la dinámica del sistema, y

por ende se conocen como *formas Hamiltonianas según Dirac*.

El mismo procedimiento puede ser aplicado a la dinámica no relativista, para la cual el grupo a considerar es el de Galileo. Para este caso existe una única superficie inicial con la propiedad de interceptar cada línea de mundo una sola vez; ésta es la superficie  $x^0 = cte$ . Por lo tanto, hay una manera posible de dividir el grupo de Galileo en una parte cinemática y otra dinámica. El subgrupo de Galileo que mantiene invariante el instante  $x^0 = cte$  posee nueve generadores, y además, se presenta un simple Hamiltoniano que genera desplazamientos en el tiempo. Dirac estableció que la unicidad del Hamiltoniano no relativista es perdida en el caso no relativista. La razón es que la causalidad restringe la familia de líneas de mundo y permite un gran número de superficies  $\Sigma$  [1, 3]. En principio, alguna superficie que no presenta direcciones tipo tiempo podría ser considerada.

Si la hiper-superficie  $\Sigma$  no posee simetrías, el grupo de estabilidad es nulo, en este caso, la descripción no contiene la parte cinemática y cada uno de los diez generadores del grupo de Poincare es un Hamiltoniano. Por tanto, se considera superficies  $\Sigma$  para las cuales el grupo de estabilidad  $G_\Sigma$  puede por lo menos ser transitivo con lo cual todos los puntos sobre  $\Sigma$  son equivalentes. Con éste requerimiento adicional existen cinco clases in equivalentes de superficies [3]. Tres de ellas fueron identificadas por Dirac [1]:

- El instante de tiempo  $\tau \equiv x^0 = 0$  conocido como *instante forma (i)*.
- Una superficie del hiperboloide  $\tau \equiv x^2 = a^2 > 0, x^0 > 0$  al que se denomina *punto forma (ii)*.
- La superficie definida por  $\tau \equiv x^0 + x^3 = 0$ , conocida como *plano nulo (iii)*.

Una reciente clasificación de todos los subgrupos del grupo de Poincare tiene en cuenta dos clases posibles y adicionales de superficies iniciales

con sus respectivos grupos de estabilidad [4]. Una de ellas consiste en considerar una de las superficies del hiperboloide  $\tau \equiv x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = a^2 > 0$ ,  $x^0 > 0$  (iv) en tanto que la otra es definida por:  $\tau \equiv x_0^2 - x_3^2 = a^2 > 0$ ,  $x^0 > 0$  (v). Así, la unicidad de la descripción Hamiltoniana no relativista resulta ser cinco veces ambigua en el caso relativista. Es importante tener en cuenta que si en todas las formas se toma  $\lim_{c \rightarrow \infty} \tau = t$ , existe solo una posible foliación conduciendo al tiempo absoluto Galileano. Esto es consistente con el hecho de que no existe una velocidad limite en el caso no relativista y por tanto la hiper-superficie  $\Sigma_{nr} : t = cte$  es la única que corta todas las posibles líneas de mundo.

Con el fin de determinar cual de los generadores del grupo de Poincare son cinemáticos, se utiliza el hecho que la acción del grupo de Poincare sobre alguna función  $F(x)$  es dada por:

$$\delta F(x) = \left\{ F(x), \delta G \right\} = \delta a_\mu \partial^\mu F - \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) F \quad , \quad (2.4)$$

donde  $\delta G = \delta a_\mu P^\mu - \frac{1}{2} \delta \omega_{\mu\nu} M^{\mu\nu}$  es el generador de las transformaciones infinitesimales de Poincare. Considerando que  $\Sigma$  es de la forma  $\Sigma : \tau = F(x)$  y que  $P^\mu$  y  $M^{\mu\nu}$  son generadores cinemáticos para algún valor de  $\mu$  o  $\nu$ , entonces, se deberá cumplir que:

$$\partial^\mu F = 0 \quad , \quad (x^\mu \partial^\nu - x^\nu \partial^\mu) F = 0 \quad , \quad (2.5)$$

es decir, el gradiente y la "derivada angular" de  $F(x)$  deben ser nulos.

Según Dirac [1], las diez cantidades fundamentales para un sistema dinámico son tales que algunas de ellas son simples y otras tienen una estructura mas compleja. Las cantidades complejas son identificadas con los Hamiltonianos y tienen el mismo papel de un Hamiltoniano en la dinámica no relativista. En tanto que las cantidades simples serán identificadas como los generadores cinemáticos.

La elección del tiempo Galileano  $\tau = t$  es generalmente la mas común, aun en el caso relativista, por tanto, se construirá la representación asociada de los generadores del grupo de Poincare sobre la hiper-superficie

$\Sigma : t = 0$ . La idea es usar el vínculo  $p^2 = m^2$  para eliminar la variable conjugada a  $t$  y que es:  $p^0 = N \cdot p = (p^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ , siendo  $N$  un vector normal al hiper-plano y posteriormente elegir  $x^0 = 0$  en (2.3). Utilizando la idea de Dirac [1], se adiciona el vínculo on-shell a los generadores de Poincare (2.3) mediante multiplicadores de Lagrange,

$$P^\mu = p^\mu + \lambda^\mu (p^2 - m^2) \quad (2.6)$$

$$M^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu + \lambda^{\mu\nu} (p^2 - m^2). \quad (2.7)$$

Ahora, se impone la condición de que el lado derecho sea independiente de  $p^0$ . Derivando la parte derecha de (2.6) y (2.7) con relación a  $p^0$  y resolviendo se determina los siguientes valores para los multiplicadores de Lagrange:

$$\lambda^0 = -\frac{1}{2p^0}, \quad \lambda^i = 0, \quad \lambda^{0i} = -\frac{x^i}{2p^0}, \quad \lambda^{ij} = 0, \quad (2.8)$$

De esta manera, los generadores de Poincare, por su estructura simple, de carácter cinemático son:

$$P^i = p^i, \quad M^{ij} = x^i p^j - x^j p^i, \quad (2.9)$$

en tanto que los de carácter dinámico tienen la siguiente forma:

$$P^0 = \omega_p, \quad M^{i0} = x^i \omega_p, \quad (2.10)$$

con  $\omega_p \equiv (p^i p^i + m^2)^{\frac{1}{2}}$ . Comparando con (2.3),  $p^0$  fue substituido por  $\omega_p$  y  $x^0$  se torna nulo.

Como regla se puede observar que los generadores que contienen  $p^0$  en la representación (2.6) y (2.7) tienen en cuenta los multiplicadores de Lagrange que no desaparecen. Ellos se identifican como los generadores dinámicos, que en el caso del instante forma son dados por el Hamiltoniano  $P^0$  y los generadores boosts  $M^{i0}$ . De acuerdo con la relación (2.5), para  $\Sigma : \tau = F(x) = t = cte$ , se deduce que:

$$\partial^i F(x) = 0, \quad (x^i \partial^j - x^j \partial^i) F(x) = 0. \quad (2.11)$$

de tal manera que  $\Sigma : t = cte$  es invariante por rotaciones y traslaciones, con lo cual se establece que el grupo de estabilidad tiene dimensión seis. De otra manera,

$$\partial^0 F(x) = 1 \neq 0 \quad , \quad (x^0 \partial^j - x^j \partial^0) F(x) = -x^j \neq 0 . \quad (2.12)$$

A parte del Hamiltoniano, los boost son generadores dinámicos por tanto  $\Sigma : t = cte$  no es invariante por transformaciones generadas por este tipo de elementos ya que éstos generadores mezclan las coordenadas de espacio y tiempo. Las representaciones (2.9) y (2.10) garantizan que el álgebra de Poincare sea compatible con el vínculo  $x^0 = 0$ . Utilizando la relación  $\{x^i, p^j\} = \delta^{ij}$  es posible mostrar que los generadores (2.9) y (2.10) obedecen los corchetes de Poisson (2.1).

Tal como ocurre en el instante forma, se puede construir la representación asociada a los generadores de Poincare sobre el plano nulo  $\Sigma : \tau = x^+ \equiv x^0 + x^3 = 0$  el cual se identifica como un plano tangente al cono de luz. Esta hiper-superficie puede equivalentemente ser vista como el frente de onda de una onda de luz plana viajando en la dirección  $z$  positiva. Por ello, la hiper-superficie  $\Sigma := x^+ = 0$  es también denominada frente de luz.

Ahora, con el fin de eliminar la variable canónica conjugada a  $x^+$ , que es  $p^-$  y posteriormente seleccionar  $x^+ = 0$  en (2.3), se considera que el lado derecho de las ecuaciones (2.6) y (2.7) sean independientes de  $p^-$ . Se puede mostrar los siguientes valores para los multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{aligned} \lambda^+ = \lambda^i = 0 \quad , \quad \lambda^- = -\frac{1}{2p^+} \\ \lambda^{+-} = -\frac{x^+}{2p^+} = 0 \quad , \quad \lambda^{i-} = -\frac{x^i}{2p^+} \quad , \quad \lambda^{+i} = 0 . \end{aligned} \quad (2.13)$$

Así, se obtiene la siguiente representación de los generadores de Poincare

de carácter cinemático:

$$\begin{aligned} P^i &= p^i \quad , \quad P^+ = p^+ \quad , \quad M^{+i} = -x^i p^+ , \\ M^{+-} &= -x^- p^+ \quad , \quad M^{12} = x^1 p^2 - x^2 p^1 . \end{aligned} \quad (2.14)$$

En tanto que los generadores dinámico se puede expresar en la forma:

$$P^- = \frac{p^i p^i + m^2}{p^+} \quad , \quad M^{-i} = x^- p^i - x^i p^- , \quad i = 1, 2 . \quad (2.15)$$

Sietes de los generadores de Poincare son cinemáticos así que el plano nulo conduce al grupo de estabilidad de mayor dimensión. La dimensión de los grupos de estabilidad para hiper-superficies (i), (ii), (iv) e (v) son 6, 6, 4, 4, respectivamente. Además, los grupos de estabilidad de las superficies (i) hasta (v) no son isomórficos, con lo cual ellos no pueden ser deformados uno en otro por difeomorfismos [2]. De esta manera, de las teorías Hamiltonianas invariantes de Poincare basadas sobre superficies in-equivalentes iniciales en un instante de referencia difieren de la manera por la cual los dies generadores de Poincare son divididos en cinemáticos y en dinámicos [3]. El cuestionamiento que surge es si la diferencia es solo formal o existen consecuencias físicas inherentes, hasta el momento no surgen respuestas desde el trabajo de Dirac [1].

Es importante destacar que el Hamiltoniano  $P^-$  no contiene una raíz cuadrada como ya lo había señalado Dirac. Sin embargo, existe una singularidad en  $p^+ = 0$  que resulta peculiar y que en el lenguaje de teorías gauge corresponde a que la matriz de Faddeev-Popov desaparezca. También, se puede destacar que para un valor positivo de  $p^+$  el signo del Hamiltoniano  $P^-$  es también positivo, con lo cual no existe ambigüedad en el signo de la energía en la formulación del plano nulo. No obstante, para una partícula de masa cero y  $p^i = 0$ , el valor de  $p^+ = 0$  conduce a un valor indeterminado de  $P^-$ . Aun, para partículas masivas, se debe dar una prescripción para desplazarse alrededor de la singularidad  $p^+ = 0$ .

## 2.1. Álgebra de Poincaré

Se considera un boost en la dirección  $z$  con rapidez  $\omega$ , que expresado en el sistema de coordenadas del instante forma, se escribe de la siguiente forma:

$$t' = t \cosh \omega + z \sinh \omega \quad , \quad z' = z \cosh \omega + t \sinh \omega \quad . \quad (2.16)$$

Se sabe que las transformaciones de boost mezclan coordenadas espaciales y temporales, de la relación (2.16) se puede determinar que la acción del boost en el plano nulo tienen la forma:

$$x'^+ = e^\omega x^+ \quad , \quad x'^- = e^{-\omega} x^- \quad , \quad (2.17)$$

entonces, las transformaciones de Lorentz tienen una forma muy simple en este sistema de coordenadas, donde la característica más notable es que las variables  $x^+$  y  $x^-$  no llegan a ser mezcladas bajo esta transformación [4]. Éstas simplemente sufren una transformación de escala manteniendo el producto  $x^+ x^-$  invariante. Las coordenadas de plano nulo diagonalizan el boost en la dirección  $z$ . Se debe notar que los puntos sobre la hipersuperficie  $\Sigma : x^+ = 0$  son mapeados sobre ella misma, con lo cual, el generador  $M^{+-} = 2M^{30} = -2K^3$ , es cinemático. No obstante, los otros generadores cinemáticos  $M^{+i}$  actúan sobre las coordenadas transversales manteniéndolas inalterables [2, 3].

Las relaciones de corchetes de Poisson no nulos de los siete generadores de Poincare son:

$$\begin{aligned} \{M^{12}, M^{+-}\} &= \epsilon^{ij} M^{+j} \\ \{M^{12}, P^i\} &= \epsilon^{ij} P^j \\ \{M^{+i}, P^-\} &= -2P^i \\ \{M^{+i}, P^j\} &= -\delta^{ij} P^+ \quad , \end{aligned} \quad (2.18)$$

con  $i = 1, 2$ , en tanto que el restante conjunto de corchetes de Poisson son nulos. Es interesante considerar el grupo de Galileo bidimensional donde los generadores, para una partícula libre de masa  $m$ , son: dos

momentos  $k^i$ , un momento angular  $L = \epsilon^{ij} x^i p^j$ , dos transformaciones de boost de Galileo  $G^i = m x^i$ , un Hamiltoniano  $H = \frac{k^i k^i}{2m}$  y la masa  $m$  que es el operador de Casimir. Utilizando  $\{x^i, k^j\} = \delta^{ij}$  e identificando  $P^i \leftrightarrow k^i$ ,  $M^{12} \leftrightarrow L$ ,  $M^{+i} \leftrightarrow -2G^i$ ,  $P^+ \leftrightarrow 2m$  y  $P^- \leftrightarrow H$ , se puede mostrar que (2.18) es una subálgebra del álgebra de Poincaré isomorfa al álgebra de Lie del grupo de Galileo bidimensional [6]. Las primeras dos relaciones en (2.18) establecen que  $M^{+i}$  y  $P^i$  se transforman en vectores bidimensionales. Por tanto, se espera que la cinemática del plano nulo muestre un comportamiento no relativista que es asociado a la dimensión transversa y gobernada por el grupo de Galileo bidimensional [7].

Es importante destacar algunas características fundamentales de las coordenadas de plano nulo:

- Las coordenadas de plano nulo  $x^\mu : (x^+, x^\perp, x^-)$ , donde  $x^\pm = \frac{x^0 \pm x^3}{\sqrt{2}}$  y  $x^\perp = (x^1, x^2)$  no están relacionadas por una transformación de Lorentz con las coordenadas tradicionales  $x^\mu : (x^0 = t, x^1, x^2, x^3)$  [8], por lo tanto, la descripción del contenido físico de una teoría dinámica sobre el plano nulo, que estudia la evolución temporal del sistema en  $x^+$  en lugar de  $x^0$ , podría ser diferente de aquel determinado por el tratamiento convencional. Este es el caso de la descripción del rompimiento de simetría y del estudio de los modelos de teorías gauge en dos dimensiones, en donde fue demostrado que la cuantización sobre el plano nulo es apropiada para la exhibición de los grados de libertad relevantes, lo cual conduce a un espacio de Hilbert físico [9, 10].
- En general, se conoce que dos puntos que pertenecen al hiperplano  $x^0 = cte$  son separados por distancias tipo espacio  $(x - y)^2 = (x^0 - y^0)^2 - (\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 = -(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 < 0$  y la separación se torna tipo luz cuando los dos puntos coinciden. Sin embargo, los puntos en el hiperplano  $x^+ = cte$ , también tienen una separación tipo espacio cuando  $x^i \neq y^i$ ,  $(x - y)^2 = (x^+ - y^+)(x^- - y^-) - (x^i - y^i)^2 =$

$-(x^i - y^i)^2 < 0$  y se torna tipo luz en el caso  $x^i = y^i$ , no obstante, con la diferencia de que los puntos no necesitan coincidir ya que  $(x^- - y^-)$  no requiere ser nulo. Éste observación, combinada con el principio de micro-causalidad, establece que la dinámica en el plano nulo puede llegar a ser no local con respecto a las coordenadas longitudinales  $x^-$  [11].

- Una teoría dinámica en las coordenadas de plano nulo poseen una característica fundamental, es descrita por Lagrangianos singulares [12] y la construcción de una formulación Hamiltoniana consistente no es simple. El procedimiento de Dirac [13] o métodos análogos para el estudio de sistemas dinámicos con vínculos deberán ser utilizados. Una formulación Hamiltoniana clásica autoconsistente es la mas conveniente para cuantizar las teorías via principio de correspondencia de los corchetes de Dirac con los conmutadores/anti-conmutadores de los correspondientes operadores.

## 2.2. Problema de Valores Inicias Sobre el Plano Nulo

Con el fin de iniciar la discusión se considerará el campo escalar real libre masivo clásico  $\phi(x)$  que satisface la ecuación de campo de Klein-Gordon-Fock (KGF):

$$(\square_x + m^2)\phi(x) = 0. \quad (2.19)$$

Es conocido que sobre una superficie tipo espacio  $\Sigma$ , un conjunto completo de condiciones iniciales consiste en especificar el campo y sus derivadas sobre dicha superficie. Ahora, la cuestión seria saber cual es el valor del campo en un punto arbitrario y fuera de la superficie. La solución a este problema resulta de la solución covariante de campo libre con lo cual se introduce el siguiente teorema [14]:

*Teorema 1* En un punto  $y$  fuera de la superficie tipo espacio  $\Sigma$  el campo es dado por:

$$\begin{aligned}\phi(y) &= \int_{\Sigma} d^4x \left[ \Delta(y-x) \partial_{\mu}^x \phi(x) - \phi(x) \partial_{\mu}^x \Delta(y-x) \right] \\ &= \int_{\Sigma} d^4x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_{\mu}^x \phi(x),\end{aligned}\quad (2.20)$$

donde  $\Delta(y-x)$  es la función de Schwinger que satisface las siguientes propiedades: es solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon-Fock, es real, nula fuera del cono de luz y es antisimétrica.

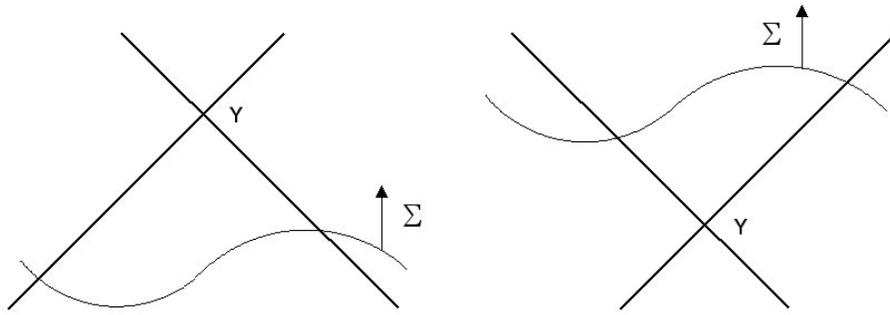


Figura 2.1: En la primera figura el punto  $y$  es influenciado causalmente por puntos que están en  $\Sigma$ . En la segunda figura  $y$  influencia causalmente aquellos puntos que están dentro de su cono de luz en  $\Sigma$ .

El campo así determinado corresponde a la propagación causal o sea,  $\phi(y)$  es solo influenciada por puntos  $x \in \Sigma$  que están atrás o delante del cono de luz asociado a  $y$ , dependiendo de si  $y$  está después o antes de  $\Sigma$  (ver Figura 2.1)

Si se selecciona a  $\Sigma$  como siendo una superficie plana a tiempo constante  $x^0 = cte$ , la solución apropiada del problema de valores iniciales se escribe como:

$$\phi(y) = \int_{\Sigma} d^3x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_t^x \phi(x). \quad (2.21)$$

La solución tradicional de teoría de campos es basada en la bien entendida teoría de Cauchy-Kowalewski de las ecuaciones hiperbólicas [15], que proporciona teoremas para la existencia y unicidad de las soluciones cuando el campo y sus derivadas temporales son conocidas sobre una hiper-superficie tipo espacio.

Ahora, surge la controversia sobre las condiciones para la existencia y unicidad de las soluciones para datos impuestos sobre el plano nulo. Con el fin de responder a ello, la ecuación diferencial (2.19) se expresará en términos de las coordenadas de plano nulo \*:

$$(\partial^+ \partial^- + m^2)\phi = 0 . \quad (2.22)$$

En término de las coordenadas de plano nulo, la ecuación de KGF se expresa en la forma canónica de la ecuación diferencial hiperbólica [15] y  $x^\pm$  son denominadas como superficies características de la ecuación diferencial. En la teoría de ecuaciones diferenciales parciales se demuestra que la especificación del campo y un número finito de derivadas sobre una característica no determina una solución única de la ecuación diferencial [16]. Así que se esta tratando con un problema de valores iniciales característicos cuando se desea resolver ésta ecuación, lo que implicará que se deben especificar condiciones sobre ambas características  $x^\pm = cte$ .

El problema de valores iniciales característicos se formula de la siguiente manera: Determinar una solución  $\phi(x^+, x^-)$  que satisfaga:

- Condiciones iniciales,

$$\phi(x^+, x_0^-) = f(x^+) \quad , \quad \phi(x_0^+, x^-) = g(x^-). \quad (2.23)$$

- Condición de continuidad

$$\phi(x_0^+, x_0^-) = f(x_0^+) = g(x_0^-). \quad (2.24)$$

Las funciones  $f$  y  $g$  son denominadas de datos característicos.

---

\*Se considerará el caso en dos dimensiones por simplicidad.

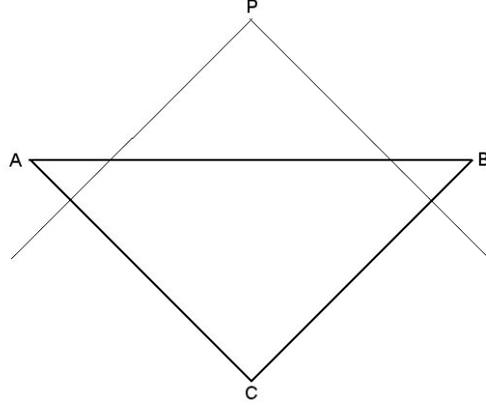


Figura 2.2: Contorno de integración usado en la derivación de (2.26).

De acuerdo con Neville e Rohrlich [17], la solución del problema de valores iniciales característicos se obtiene de la relación (2.21) y del teorema de Gauss. Es posible mostrar que:

$$\partial_x^\mu \left[ \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0, \quad (2.25)$$

donde  $\phi$  como  $\Delta$  son soluciones de la ecuación de KGF. Integrando (2.25) en el volumen limitado por ABC (ver Figura 2.2) con:  $AB : x^0 = 0$  siendo el plano que intercepta la parte de atrás del cono de luz generado en el punto P;  $BC : x^+ = x_0^+$  y  $AC : x^- = x_0^-$ . Integrando la relación (2.25),

$$\int d^4x \partial_x^\mu \left[ \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0,$$

por el teorema de Gauss se obtiene,

$$\left( \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CA} \right) d\Sigma(x) n^\mu \left[ \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu^x \phi(x) \right] = 0, \quad (2.26)$$

donde  $d\Sigma$  es el elemento de superficie apropiado y  $n^\mu$  es un vector normal a la superficie. De (2.21) se deriva que,

$$\begin{aligned} \phi(y) &= \int d^3x \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_0^x \phi(x) \\ &= \int_{CB} dy^+ \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_+^x \phi(x) + \int_{CA} dy^- \Delta(y-x) \overleftrightarrow{\partial}_-^x \phi(x), \end{aligned} \quad (2.27)$$

debido a que la normal a un plano nulo se encuentra en el mismo plano, el conocimiento de  $\phi$  sobre el plano nulo implica su derivada normal. Así, se establece el siguiente teorema [17]:

*Teorema 2* La solución de la ecuación de KGF (2.22) para  $m \geq 0$  es únicamente determinada por (2.26) en la región conexa limitada por la cuña formada por los planos  $x^\pm = cte$  si  $\phi$  se especifica sobre esos planos.

Utilizando el hecho que  $\Delta$  desaparece sobre argumentos de tipo espacio,  $(x - y)^2 < 0$ , las integrales en (2.26) se extienden desde la cuña (punto  $C$  na Fig. (2.2)) hasta  $+\infty$ , por lo tanto, esas partes que están fuera del cono característico de  $P$  no contribuyen a la integral. Si se compara (2.26) con (2.21) se determina que el lado derecho de la solución del problema de Cauchy, que en término de las condiciones iniciales (2.23), se expresa:

$$\begin{aligned} \phi(x^+, x^-) = & \int_{x_0^+}^{\infty} dy^+ \left[ \Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-) \frac{\partial f}{\partial y^+} - f(y^+) \frac{\partial}{\partial y^+} \Delta(x^+ - y^+, x^- - x_0^-) \right] \\ & + \int_{x_0^+}^{\infty} dy^- \left[ \Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-) \frac{\partial g}{\partial y^-} - g(y^-) \frac{\partial}{\partial y^-} \Delta(x^+ - x_0^+, x^- - y^-) \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Esta es la solución del problema de valores característicos para la ecuación de KGF en el plano nulo en términos de las condiciones iniciales  $f$ ,  $g$  y la función de Schwinger  $\Delta$ . Así, con el fin de obtener una solución única es necesario especificar condiciones iniciales sobre las dos características y no solamente sobre una.

Para una teoría cuántica de campos en  $d = 1 + 1$  dimensiones, la relación (2.28) implica que se debe cuantizar sobre el plano nulo [18]. Para entender mejor esta afirmación, se sabe que el conmutador de dos campos escalares libre se puede expresar en términos de la función de Schwinger de la siguiente forma [19]:

$$[\phi(x), \phi(y)] = i\Delta(x - y), \quad (2.29)$$

del cual se puede determinar los siguientes conmutadores a tiempos iguales entre los campos en las coordenadas tradicionales:

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = 0 \quad , \quad [\dot{\phi}(x), \phi(y)]_{x^0=y^0} = -i\delta(x-y). \quad (2.30)$$

De la relación (2.21) se puede determinar que:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int dz \left\{ [\dot{\phi}(z), \phi(y)] \Delta(x-z) - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^0} \Delta(x-z) \right\}_{x^0=z^0}. \quad (2.31)$$

Insertando en esta relación la expresión (2.30) se obtiene la identidad (2.29). La ecuación (2.31) es una condición de consistencia que expresa el conmutador para tiempos arbitrarios diferentes  $x^0 > y^0$  a través de las condiciones de Cauchy a tiempo iguales  $x^0 = y^0$  [20].

Con el fin de derivar una condición de consistencia análoga a (2.31), se escogerá  $x^\pm = 0$ ; por lo tanto, usando (2.28) se obtiene que el conmutador de campos a tiempos diferentes es dado por:

$$[\phi(x), \phi(y)] = \int_0^\infty dz^+ \left[ \Delta(x-z) \frac{\partial}{\partial z^+} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^+} \Delta(x-z) \right]_{x^- = z^-} \\ + \int_0^\infty dz^- \left[ \Delta(x-z) \frac{\partial}{\partial z^-} [\phi(z), \phi(y)] - [\phi(z), \phi(y)] \frac{\partial}{\partial z^-} \Delta(x-z) \right]_{x^+ = z^+} \quad (2.32)$$

lo que implica que para todo  $x^\pm$  dos conmutadores independientes deben ser especificados,

$$[\phi(x), \phi(y)]_{x^\pm=y^\pm} = -\frac{i}{4}\epsilon(x^\mp - y^\mp), \quad (2.33)$$

es decir, el problema de valores iniciales característicos corresponde a cuantizar en el plano nulo.

En la literatura los conmutadores son especificados sobre una sola característica, usualmente  $x^+ = 0$ , lo cual es indispensable si se desea una formulación Hamiltoniana con un solo parámetro de evolución temporal, lo que estaría en contradicción con los resultados obtenidos. Por

tanto, la cuantización sobre una sola característica es posible si condiciones sobre la segunda son impuestas [17, 20]. Un caso interesante se obtiene si se mueve el plano nulo  $x^- = cte$  hacia el pasado distante y sobre este se impone  $\phi = 0$ ; explícitamente,

$$\lim_{x^- \rightarrow -\infty} \phi = 0 \quad , \quad \forall \mathbf{x} \quad , \quad x^+ \geq x_0^+ \quad , \quad (2.34)$$

resultando de (2.28) la solución:

$$\phi(x) = \int_{x^+ = x_0^+} dy^- \Delta(x - y) \overset{\leftrightarrow x}{\partial}_- \phi(y) \quad . \quad (2.35)$$

Consecuentemente, se establece el siguiente teorema:

*Teorema 3* Especificado  $\phi$  sobre el plano  $x^+ = x_0^+$  y la condición asintótica (2.34), la ecuación de KGF, para  $m \geq 0$ , tendrá una única solución dada por (2.35) en el plano  $x^+ \geq x_0^+$  [17].

*Corolário:* Cualquier solución de la ecuación de KGF que satisfaga (2.34) y que se anule sobre el plano nulo definido por  $x^+ = x_0^+$ , también se anula para  $x^+ \geq x_0^+$ .

En (2.35) la integración sobre  $y^-$  se extiende de  $-\infty$  hasta  $+\infty$ , aun cuando el conjunto abierto  $y^- \in (x^-, \infty)$  no contribuya, ya que  $\Delta$  desaparece para argumento tipo espacio. Los puntos del cono característico deberán ser todos internos al dominio de integración,  $\phi$  será correctamente dada por ésta ecuación para algún  $x^+ > x_0^+$ , pero en el limite cuando  $x^+$  se aproxima de  $x_0^+$  una condición de convergencia para  $x^- \rightarrow +\infty$  sobre la integral (2.35) se hace necesaria. Así, se impone la siguiente restricción adicional:

$$\lim_{x^- \rightarrow \infty} \phi = 0 \quad , \quad \text{sobre } x^+ = x_0^+ \quad , \quad (2.36)$$

y, con esto, se verifica la consistencia de (2.35) tomando  $P$  sobre el plano nulo  $x_0^+$  [17].



# Bibliografía

- [1] P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).
- [2] T. Heinzl, *Light-Cone Dynamics of Particles and Field*, hep-th/9812190.  
T. Heinzl, *Light-Cone Quantization: Fundamentation and Applications*, hep-th/0008096.
- [3] H. Leutwyler and J. Stern, *Ann. Phys.*, **112**, 94 (1978).
- [4] H. Bacry, P. Combe and P. Sorba, *Rep. Math. Phys.* **5**, 145 (1974);  
**5**, 361 (1974).  
J. Patera, P. Winternitz and H Zassenhaus, *J. Math. Phys.* **16**, 1597 (1975).  
J. Patera, R. Sharp, P. Winternitz and H Zassenhaus, *J. Math. Phys.* **17**, 977 (1976);
- [5] L. Parker and G. Schmieg, *Am. J. Phys.* **38**, 218 (1970).  
Y. S. Kim and M. E. Noz, *Am. J. Phys.* **50**, 721 (1982).  
E. N. Glass, *Am. J. Phys.* **43**, 1013 (1975).
- [6] P. P. Srivastava, *Light-Front Quantization of Field Theory*, *Topics in Theoretical Physics*, pp. 206 - 217, eds, V.C. Aguilera-Navarro, D. Galetti, B. M. Pimentel and L. Tomio, IFT - São Paulo, SP, 1995.
- [7] P. E. Soper, *Field Theories in the Infinite Momentum Frame*, SLAC-137, UC-34, Sep. 1971.

- J. B. Kagut and D. E. Soper, *Quantum Electrodynamics in the Infinite Momentum Frame*, SLAC-PUB-680, Oct. 1969.
- [8] P. P. Srivastava, *Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results*. *Saga of Field Theory, From Points to Strings*, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India. hep-ph/9908492.
- [9] P. P. Srivastava, *Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model*. *Brazil Workshop on Topology, Geometry, and Physics*, UNICAMP, Campinas, Brazil, Jul 1996. hep-th/9610149.
- [10] Th. Heinzl, St. Krusche and E. Werner, *Phys. Lett.*, **B272**, 54 (1991); **B256**, 55 (1991).
- [11] P. P. Srivastava, *Light-Front Quantized Field Theory: (an introduction) Spontaneous Symmetry Breaking*. *Phase transition in  $\phi^4$  Theory*, XIV Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambu, MG, September 1993, CBPF-NF-075/93.
- [12] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, *Lectures Notes in Physics*, Vol. 169, Springer, New York, 1982.
- [13] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New-York, 1964.  
P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950).  
P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **3**, 1 (1951).  
P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 236 (1958).  
P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 333 (1958).
- [14] P. Roman, *Introduction to Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons, New York, 1969.
- [15] J. Mathews and R. Walker, *Mathematical Method of Physics*, Benjamin, New York, 1965.

- J. Irving and N. Mullineux, *Mathematical in Physics and Engineering*, Academic Press, New York, 1962.
- T. Myint-U, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier, New York, 1973.
- [16] N. E. Ligterink and B. L. G. Bakker, Vrije Universiteit Amsterdam, preprint 1993.
- [17] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Nuovo Cimento*, **A1**, 625 (1971).
- [18] G. Domokos, in *Boulder Lectures*, Vol. XIV, 1971. Eds. A. O. Barut and W. E. Brittin, Boulder: Colorado University Press, 1972.
- [19] J. W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Germany, 1986.
- [20] T. Heinzl and E. Werner, *Z. Phys.* **C62**, 521 (1994).
- [21] G. McCartor, *Z. Phys.* **C41**, 271 (1988).
- [22] J. W. Greiner and J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer-Verlag, Germany, 1986.
- [23] P. P. Srivastava, *Light front quantized field theory (an introduction): Spontaneous symmetry breaking. Phase transition in  $\phi^4$  theory*. Invited article for: Saga of Field CBPF-NF-075-93, Sep 1993. 31pp. Lecture at Encontro Nacional de Partículas e Campos, Caxambu, Brazil, Sep 1993. e-Print Archive: hep-th/9312064.
- P. P. Srivastava, *Theta Vacua in the Light Front Quantized Schwinger Model*. Talk given at the 1st U.S.-Brazil Workshop on Topology, Geometry, and Physics, UNICAMP, Campinas, Brazil, Jul 1996. hep-th/9610149.
- P. P. Srivastava, *Perspectives of Light Front Quantized Field Theory: Some New Results*. Invited article for: Saga of Field Theory, From Points to

- Strings*, ed., A.N. Mitra, Indian National Science Academy (INSA), New Delhi, India. hep-ph/9908492.
- [24] G. McCartor, *Z. Phys*, **C41**, 271 (1988).
- [25] P. J. Steinhardt, *Ann. Phys* **128**, 425 (1980).
- [26] R. Benguria, P. Cordero and C. Teitelboin, *Nucl. Phys.* **B122**, 61 (1976).
- [27] E. Tomboulis, *Phys. Rev.* **D8**, 2736(1971).
- [28] F. Rohrlich, *Acta Phys. Austriaca, Suppl.* VIII, 277(1971).
- [29] S. B. Pereslegin and V. A. Franke, *Theor. Math. Phys.* **59**, 365 (1984).
- [30] R. A. Neville and F. Rohrlich, *Phys. Rev.* **D3**, 1692(1971).

# Capítulo 3

## Método de Dirac para Sistemas Singulares

### 3.1. Estructura de Vínculos

Consideremos un sistema con un número finito de grados de libertad cuya dinámica puede ser derivada de una acción

$$S = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q^k, \dot{q}^k, t), \quad (3.1)$$

donde  $L$  es la función de Lagrange que describe el sistema y que depende de las coordenadas generalizadas  $q^k$  ( $k = 1, 2, \dots, N$ ), las velocidades generalizadas  $\dot{q}^k = \frac{d}{dt}q^k$  y del tiempo. El Lagrangiano asociado al sistema se dice ser regular si la matriz Hessiana, con elementos de matriz,

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \quad (3.2)$$

no es idénticamente nulo como una función de  $q^k$ ,  $\dot{q}^k$  y  $t$ , donde la regularidad es una propiedad del Lagrangiano y no del sistema que éste describe [1].

Siendo que la acción es una funcional de las coordenadas  $q^k$ , el principio de Hamilton establece que las trayectorias clásicas  $q_c^k$  seguidas por

el sistema son puntos estacionarios de la acción. Una condición para su existencia es que la primera variación de (3.2) sea cero, lo que conduce a las ecuaciones de movimiento o mejor conocidas como ecuaciones de Euler-Lagrange (EL), (para  $t_1 \leq t \leq t_2$ )

$$L_k \equiv \frac{\partial L}{\partial q^k} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k} = 0 \quad \text{para} \quad q^k = q_c^k. \quad (3.3)$$

$L_k$  es denominada derivada de Euler de  $L$  con respecto a  $q^k$ . Las ecuaciones de EL se pueden re escribir de la siguiente forma

$$L_i = V_i(q^k, \dot{q}^k, t) - W_{ij}(q^k, \dot{q}^k, t) \ddot{q}^j = 0, \quad (3.4)$$

donde  $W_{ij}$  es la matriz Hessiana y

$$V_i(q^k, \dot{q}^k, t) \equiv \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial t} - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} \dot{q}^j. \quad (3.5)$$

En el caso de un sistema regular donde  $\det |W_{ij}| \neq 0$  todas las ecuaciones son de segundo orden y funcionalmente independientes. Bajo esta condición, existen soluciones en el intervalo  $t_1 \leq t \leq t_2$  y son únicas después de que  $2N$  constantes de integración ( $q^k(t_1), \dot{q}^k(t_1)$ ) son especificadas.

Además de la formulación Lagrangiana de la mecánica clásica, existe el formalismo Hamiltoniano el cual se construye definiendo los momentos canónicos conjugados a las coordenadas  $q^k$  de la siguiente forma:

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^k}. \quad (3.6)$$

La función de Hamilton es definido a partir del Lagrangiano por medio de la siguiente transformación de Legendre,

$$H \equiv p_k \dot{q}^k - L, \quad (3.7)$$

la cual será función de  $(q, p, t)$  que especifican el espacio de fase. Ahora, solo en el caso regular, las ecuaciones asociadas a los momentos canónicos

(3.6) pueden ser resueltos únicamente para las velocidades generalizadas  $\dot{q}^k$ , es decir, siendo

$$W_{ij} = \frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^j}, \quad (3.8)$$

si  $\det |W_{ij}| \neq 0$  el teorema de función inversa garantiza que exista una única solución  $\dot{q}^k = \dot{q}^k(q, p, t)$  [2]. Solo en este caso, se puede realizar un cambio del conjunto de variables  $(q, p, t)$  para  $(q, \dot{q}, t)$  de una forma única. Ahora, si el Lagrangiano que describe el sistema es singular,  $\det |W_{ij}| = 0$ , las ecuaciones que definen los momentos canónicos no se pueden resolver de modo que puedan expresar todas las velocidades en términos de  $(q, p, t)$ , una vez que  $\det |W_{ij}|$  es justamente el Jacobiano de la transformación (3.8), donde  $q$ 's hacen el papel de los parámetros.

La formulación canónica de la dinámica de sistemas singulares fue desarrollada por Dirac [3], posteriormente Bergmann, Goldberg y colaboradores refinaron el método original [4]. En el caso que el Lagrangiano es singular, con  $(N - M)$  el rango de la matriz Hessiana, entonces  $(N - M)$  velocidades se pueden expresar como funciones independientes de las coordenadas, de los momentos canónicos y de las  $M$  restantes velocidades indeterminadas. Existen por tanto  $M$  relaciones independientes entre los  $(q, p)$ . Estas expresiones que son consecuencia de las ecuaciones (3.6) se pueden escribir de la siguiente forma

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad m = 1, 2, \dots, M < N. \quad (3.9)$$

Ellas muestran que de las  $2N$  variables Hamiltonianas  $q^k$  e  $p_k$ , apenas  $2N - M$  son realmente independientes. Las relaciones (3.9) fueron denominadas por Bergmann [4] como *vínculos primarios*, que resaltan del hecho que ellas son el resultado de la definición (3.6) sin hacer uso de las ecuaciones de movimiento.

Cuando se trata con sistemas singulares se introduce el concepto de Hamiltoniano canónico  $H_C$  del sistema, el cual es definido de manera usual

por la transformación de Legendre

$$H_C(q, p) \equiv p_k \dot{q}^k - L. \quad (3.10)$$

Es posible mostrar que  $H_C$  es función únicamente de las variables del espacio de fase  $(q, p)$ , es decir,  $H_C = H_C(q, p)$ , a pesar del hecho que las velocidades no pueden ser completamente eliminadas en favor de los momentos [5, 6]. Debido a la presencia de los vínculos primarios (3.9) el Hamiltoniano canónico (3.10) no es determinado únicamente como una función de las coordenadas  $q$  y los momentos canónicos  $p$ . Se establece, que la dinámica del sistema mantiene inalterable si se adiciona al Hamiltoniano canónico una combinación lineal de los vínculos primarios, es decir:

$$H_C(q, p) \rightarrow H_C(q, p) + c^m(q, p)\phi_m(q, p), \quad (3.11)$$

donde  $c^m(q, p)$  son funciones arbitrarias y regulares de  $(q, p)$ .

El principio de Hamilton se puede expresar en términos del Hamiltoniano canónico como

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ p_k \dot{q}^k - H_C(q, p) \right] = 0 \quad (3.12)$$

con variaciones en  $q$ 's y  $p$ 's sujetas a las condiciones

$$\delta q^k(t_1) = \delta q^k(t_2) = 0, \quad \phi_m(q, p) = 0, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (3.13)$$

Las restricciones (3.13) se pueden tener en cuenta introduciendo multiplicadores de Legendre  $\lambda^m(t)$  los cuales deberán ser considerados como variables independientes, de manera tal que se modifique (3.12) por

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt \left[ p_k \dot{q}^k - H_C(q, p) - \lambda^m(t)\phi_m(q, p) \right] = 0 \quad (3.14)$$

con las restricciones (3.13). Las ecuaciones de movimiento derivadas de (3.14) se escriben de la siguiente forma

$$\dot{q}^k = \frac{\partial H_C}{\partial p_k} + \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k}, \quad \dot{p}^k = -\frac{\partial H_C}{\partial q^k} - \lambda^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^k}. \quad (3.15)$$

Es posible demostrar que los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^m$ , coinciden con las  $M$  restantes velocidades [1, 5]. Las ecuaciones (3.15) son validas cuando se consideran en conjunto con los vínculos primarios. Por este motivo, es conveniente denominar  $\Gamma$  el espacio de fase de  $2N$  dimensión cuyas coordenadas independientes son  $(q^k, p_k)$  y se define el hiperespacio de vínculos  $\Sigma$  como siendo un subespacio de  $\Gamma$  de dimensión  $2N - M$ , en el cual son válidos los vínculos primarios. Las ecuaciones (3.15) se cumplen en  $\Sigma$ , lo que implica que las derivadas que en ellas aparecen deben ser primero calculadas en  $\Gamma$  y después su valor evaluado en  $\Sigma$ . Por ello, las ecuaciones de movimiento serán escritas de la siguiente forma:

$$\dot{q}^k|_{\Sigma} = \left. \frac{\partial H_C}{\partial p_k} \right|_{\Sigma} + \lambda^m \left. \frac{\partial \phi_m}{\partial p_k} \right|_{\Sigma}, \quad \dot{p}^k|_{\Sigma} = - \left. \frac{\partial H_C}{\partial q^k} \right|_{\Sigma} - \lambda^m \left. \frac{\partial \phi_m}{\partial q^k} \right|_{\Sigma}. \quad (3.16)$$

Las ecuaciones de movimiento Hamiltonianas obtenidas a partir de (3.14), para una variable dinámica  $g(q, p)$  se expresan en la forma

$$\begin{aligned} \dot{g}(q, p) &= \left\{ g(q, p), H_C \right\} + \lambda^m \left\{ g(q, p), \phi_m(q, p) \right\}, \\ \phi_m(q, p) &= 0 \quad m = 1, 2, \dots, M; \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde los corchetes de Poisson (PP) para dos variables dinámicas  $f(q, p)$  y  $g(q, p)$  son definidos de la siguiente manera:

$$\left\{ f(q, p), g(q, p) \right\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q^k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial g}{\partial p_k} \frac{\partial f}{\partial q^k}. \quad (3.18)$$

Es conveniente definir la cantidad conocida como Hamiltoniano primario  $H_P$  del sistema como:

$$H_P \equiv H_C + \lambda^m \phi_m, \quad (3.19)$$

a partir del cual se puede verificar que las ecuaciones de movimiento (3.16) pueden ser escritas de la siguiente forma [3, 8]:

$$\dot{q}^k|_{\Sigma} = \left. \left\{ q^k, H_P \right\} \right|_{\Sigma}, \quad \dot{p}^k|_{\Sigma} = \left. \left\{ p_k, H_P \right\} \right|_{\Sigma}. \quad (3.20)$$

Sin embargo, los PP de los multiplicadores de Lagrange con funciones del espacio de fase no están definidos, pero el hecho de que ellos este multiplicados por los vínculos primarios los cuales se anulan en  $\Sigma$ , da sentido a las ecuaciones de movimiento (3.17). Para una función arbitraria  $g(q, p)$  definida en el espacio de fase se puede escribir

$$\dot{g}(q, p)|_{\Sigma} = \left\{ g(q, p), H_P \right\} \Big|_{\Sigma}. \quad (3.21)$$

Como las ecuaciones de movimiento se restringen a la hipersuperficie  $\Sigma$ , se puede afirmar que si una función  $g(q, p)$  se anula en  $\Sigma$ , ésta es débilmente igual a cero,  $g(q, p) \approx 0$ , para caracterizar que su PP con otras variables dinámicas, en general, no se anulan en  $\Sigma$  [3]. Se utiliza el símbolo "  $\approx$  " con el fin de diferenciar igualdades débiles de las igualdades usuales o fuertes. De ahora en adelante se expresaran los vínculos de la siguiente forma

$$\phi_m(q, p) \approx 0 \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad (3.22)$$

para recordar que en ecuaciones como (3.17), los PP deberán ser calculados antes de hacer uso de las ecuaciones de vínculos. Se asumirá que (3.22) constituye un conjunto completo de ecuaciones independientes lo que garantizara que ninguno de los vínculos  $\phi_m(q, p)$  se puede expresar como una combinación lineal de los demás con funciones regulares de  $(q, p)$  como coeficientes. La anterior condición, también conocida como condición de irreducibilidad [1, 5], garantizará que cualquier función  $g(q, p)$  que se anule débilmente es fuertemente una combinación lineal de los vínculos, es decir:

$$g(q, p) \approx 0 \quad , \quad g(q, p) = c^m(q, p) \phi_m(q, p). \quad (3.23)$$

Ésta condición equivale a exigir que los gradientes de los vínculos sean bien definidos y linealmente independientes en  $\Sigma$ , así, la matriz de  $2N \times J$  componentes:

$$\left\| \begin{array}{c} -\frac{\partial \phi_m}{\partial q^k} \Big|_{\Sigma} \\ -\frac{\partial \phi_m}{\partial p_l} \Big|_{\Sigma} \end{array} \right\|, \quad (3.24)$$

será finita y de rango  $J$  [1, 5].

### 3.2. Condiciones de Consistencia

Éstas condiciones exigen que los vínculos primarios se mantengan durante la evolución temporal del sistema lo que matemáticamente se traduce a través de (3.17) de la siguiente manera:

$$\dot{\phi}_m(q, p) = \left\{ \phi_m(q, p), H_c \right\} + \lambda^n \left\{ \phi_m(q, p), \phi_n(q, p) \right\} \approx 0, \quad n = 1, 2, \dots, M. \quad (3.25)$$

Estas relaciones pueden implicar:

1. Que las ecuaciones (3.25) se satisfacen idénticamente en  $\Sigma$ .
2. Que (3.25) resulte en un conjunto de relaciones en el espacio de fase independientes de los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^n$ .
3. Que (3.25) imponga condiciones sobre algunos o todos los multiplicadores de Lagrange.

Las relaciones asociadas al ítem 2 y que son independientes de los vínculos primarios constituyen un nuevo conjunto de vínculos entre las variables dinámicas Hamiltonianas. Este nuevo conjunto de vínculos es denominado: *vínculos secundarios* los cuales, a diferencia de los vínculos primarios, son consecuencia de las ecuaciones de movimiento definidas en el espacio de fase. Este nuevo conjunto de vínculos restringen la dinámica del sistema en el espacio de fase a una hipersuperficie  $\Sigma'$  de menor dimensión que  $\Sigma$  definido por (3.26). Se representara el nuevo conjunto de vínculos asociados el ítem 2 por:

$$\chi_s(q, p) \approx 0, \quad s = 1, 2, \dots, R'. \quad (3.26)$$

Ahora, al nuevo conjunto de vínculos se les exigirá que sean consistentes con lo que se repite el procedimiento anterior. El algoritmo continua con

los vínculos subsiguientes y finalizará cuando no resulten mas vínculos independientes o se obtenga condiciones sobre el mayor número de multiplicadores de Lagrange  $\lambda^n$ . Al final, se obtendrá un total de  $S$  vínculos secundarios, que se denominan así por que ellos son consecuencia de las dinámica definida en el espacio de fase y que se denotan por:

$$\chi_r(q, p) \approx 0 \quad , \quad r = M + 1, M + 2, \dots, M + S. \quad (3.27)$$

El conjunto total de vínculos, donde se incluyen los primarios y secundarios, se identifican como:

$$\phi_j(q, p) \approx 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, M + S \equiv J. \quad (3.28)$$

Después de exigir consistencia sobre todos los vínculos secundarios (3.27) se obtendrá un cierto número de ecuaciones asociadas al item 3 y que en forma general se escriben como:

$$\left\{ \phi_j(q, p), H_c \right\} + \lambda^n(t) \left\{ \phi_j(q, p), \phi_n(q, p) \right\} \approx 0, \quad n = 1, 2, \dots, M. \quad (3.29)$$

Estas ecuaciones se pueden interpretar como un sistema de ecuaciones lineales en  $\lambda^m(t)$ , con coeficientes que dependen de  $(q, p)$ . La solución mas general de (3.29) será de la forma:

$$\lambda^m(t) = \varphi^m(q, p) + \xi^a(t) \psi_a^m(q, p), \quad (3.30)$$

donde  $\varphi^m(q, p)$  es la solución particular de (3.29) y  $\psi_a^m(q, p)$ ;  $a = 1, 2, \dots, A \leq S$  es un a base de soluciones del sistema homogéneo asociado

$$\psi_a^m(q, p) \left\{ \phi_j(q, p), \phi_n(q, p) \right\} \approx 0, \quad (3.31)$$

con  $\xi^a(t)$  funciones completamente arbitrarias de  $t$ . Con esto, se separa de los  $\lambda^m(t)$  aquellos multiplicadores de Lagrange que están determinados por las condiciones de consistencia de aquellos que permanecen totalmente arbitrarios. Usando (3.30) y el siguiente conjunto de relaciones

$$H' \equiv H_c + \varphi^m \phi_m \quad , \quad \phi_a \equiv \psi_a^m \phi_m, \quad (3.32)$$

las ecuaciones de movimiento se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\dot{g}(q, p) = \left\{ g(q, p), H' + \xi^a \phi_a \right\}, \quad (3.33)$$

donde se puede considerar a las  $\xi^a$  como funciones del espacio de fase. La función  $H_T = H' + \xi^a \phi_a$ , fue denominada por Dirac [3] como *Hamiltoniana total*. En términos de  $H_T$ , las ecuaciones de movimiento para una variable dinámica  $g(q, p)$  asume la forma:

$$\dot{g}(q, p) = \left\{ g(q, p), H_T \right\}. \quad (3.34)$$

El contenido de estas ecuaciones es idéntico al de las ecuaciones de Euler-Lagrange [3, 5, 7].

### 3.3. Vínculos de primera e segunda clase

La presencia de las funciones arbitrarias  $\xi^a(t)$  en la solución de las ecuaciones de movimiento (3.34) muestra que los valores de las coordenadas  $(q, p)$  en un instante futuro permanecen completamente indeterminados por sus valores iniciales. A partir de un estado inicial  $(q_0, p_0)$  sobre  $\Sigma'$ , el sistema podrá evolucionar en diferentes trayectorias, todas contenidas en  $\Sigma'$  y cada una de ellas asociada a un miembro del conjunto de funciones  $\{\xi^a(t)\}$ .

En teoría de campos gauge se dice que cada una de estas trayectorias corresponde a un gauge del sistema y la arbitrariedad en la elección de los  $\xi^a(t)$  es llamada *libertad de gauge*. Todos los puntos sobre  $\Sigma'$  en los cuales puede evolucionar el sistema después de un determinado intervalo de tiempo a partir del mismo estado inicial, siguiendo cada una de los posibles gauge, representará necesariamente el mismo estado físico. Además, cuando a cada punto de  $\Sigma'$  corresponde apenas un estado físico, a cada estado físico le corresponde una clase de equivalencia de puntos sobre  $\Sigma'$ .

Si se considera una función  $g(q, p)$  con un valor inicial  $g_0 \equiv g(q_0, p_0)$  y se calcula su valor después de un intervalo infinitesimal de tiempo  $\Delta t$ , asumiendo que el sistema evoluciona según la libertad de gauge  $\xi^a(t)$ , se tendrá que

$$g_\xi(t + \Delta t) \simeq g_0 + \left\{ g, H' \right\} + \xi^a(t) \left\{ g, \phi_a \right\} \Delta t. \quad (3.35)$$

Ahora, si el mismo análisis es considerado con la libertad de gauge  $\xi'^a(t)$ , se obtendrá que

$$\delta g \equiv g_\xi(t + \Delta t) - g_{\xi'}(t + \Delta t) \simeq \varepsilon^a(t) \left\{ g, \phi_a \right\}, \quad (3.36)$$

donde  $\varepsilon^a(t) \equiv (\xi^a(t) - \xi'^a(t)) \Delta t$ , son funciones infinitesimales y arbitrarias. La transformación (3.36) que conectará puntos de la misma clase de equivalencia y no alteran el estado físico del sistema es denominada *transformación de equivalencia*. De (3.36) se concluye que los vínculos  $\phi_a$  son generadores de transformaciones infinitesimales de equivalencia.

Las transformaciones de equivalencia son conocidas en la literatura como *transformaciones de gauge* [3, 6]. Con el fin de trabajar con transformaciones de equivalencia se introduce la siguiente terminología [1]: Una función  $F(q, p)$  se dice ser de *primera clase* si:

$$\left\{ F(q, p), \phi_j(q, p) \right\} \approx 0 \quad , \quad j = 1, 2, \dots, J \quad . \quad (3.37)$$

Una función que no es de primera clase se dice que es de *segunda clase*. Utilizando la irreducibilidad de los vínculos, (3.23), es posible mostrar que el PP de dos funciones de primera clase es también de primera clase. Se puede verificar que  $H'$  y  $\phi_a$  son funciones de primera clase [3] y por consiguiente  $H_T$  es de primera clase. Además, como  $\psi_a^m(q, p)$  es una base de soluciones de (3.31),  $\phi_a(q, p)$  constituye un conjunto completo de vínculos de primera clase independientes. De tal manera que los vínculos  $\phi_a(q, p) \approx 0$ , que aparecen en las ecuaciones de movimiento (3.33), desempeñan el papel de generadores de transformaciones de equivalencia.

En virtud del carácter de primera clase de los vínculos  $\phi_a(q, p)$ , la transformación de equivalencia preserva los vínculos, es decir,  $\delta\phi_j(q, p) \approx 0$ , ( $j = 1, 2, \dots, J$ ). Así, las transformaciones de equivalencia no conducen a puntos fuera de  $\Sigma'$ , propiedad que debe ser satisfecha por cualquier transformación de equivalencia [3, 5]. Además, se puede mostrar que las funciones de primera clase  $\phi_b(q, p)$  [1, 7]

$$\left\{ \phi_a(q, p), \phi_b(q, p) \right\} \approx 0 \quad , \quad \left\{ \phi_a(q, p), H' \right\} \approx 0 \quad , \quad a, b = 1, 2, \dots, A, \quad (3.38)$$

también son generadores de transformaciones canónicas infinitesimales que no alteran el estado físico del sistema. Por tanto, las cantidades (3.38) pueden incluir tanto vínculos de primera clase primarios como secundarios. Se concluye que pueden existir vínculos secundarios de primera clase que generan transformaciones de equivalencia. Este argumento no afirma que todos los vínculos secundarios de primera clase sean transformaciones de equivalencia, sin embargo, no se conoce ejemplos que posean vínculos secundarios de primera clase que no genere transformaciones de equivalencia [1, 3]. Por este motivo Dirac [3, 7] conjeturo que todos los vínculos secundarios de primera clase actúan como generadores independientes de transformaciones infinitesimales de equivalencia. Para sistemas que posean solo vínculos de primera clase es posible mostrar que la conjetura es cierta como teorema [9].

Para relacionar las transformaciones generadas por los vínculos de primera clase con las transformaciones de equivalencia es necesario considerar todos los vínculos de primera clase y no solo los vínculos primarios de primera clase que surgen inicialmente en la definición del Hamiltoniano primario. Dirac [3] no conocía de algún caso en el cual el generador de transformaciones de equivalencia dependiese únicamente de los vínculos primarios de primera clase, por tanto, él considero en sus lecturas [3] ampliar el Hamiltoniano primario para

$$H_E = H_P + \mu^b \phi_b \quad , \quad b = 1, 2, \dots, A \quad (3.39)$$

con multiplicadores arbitrarios  $\mu^b$  acompañando a todos los vínculos secundarios de primera clase.  $H_E$  es llamado de *Hamiltoniano extendido* y es el que de ahora en adelante determinara la dinámica del sistema. El Hamiltoniano primario también describe la dinámica mas no tiene en cuenta la completa libertad de gauge del sistema. En conclusión, el Hamiltoniano extendido es mas general que el Hamiltoniano primario.

### 3.4. Corchetes de Dirac (PD)

La distinción entre vínculos primarios y secundarios depende del Lagrangiano de partida y en general no es única, sin embargo, la clasificación de los vínculos en primera clase,

$$\Psi_\alpha(q, p) \approx 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, C, \quad (3.40)$$

y vínculos de segunda clase

$$\Theta_\beta(q, p) \approx 0 \quad , \quad \beta = 1, 2, \dots, D, \quad (3.41)$$

donde  $(C + D = J)$ , es mas trascendente por el hecho que los vínculos de primera clase no cambien el estado físico en tanto que las transformaciones generadas por los vínculos de segunda clase no presentan interés físico ya que ellos no conservan la hipersuperficie los vínculos  $\Sigma'$ .

En principio, la separación en vínculos de primera y segunda clase es ambigua ya que ciertas combinaciones lineales de vínculos de segunda clase puede resultar en vínculos de primera clase. Así, se elige nuevos vínculos como una combinación lineal de los antiguos, se puede pasar de vínculos de segunda clase en primera. Se asumirá que (3.40) e (3.41) constituye el mayor número de vínculos de primera y segunda clase y que por tanto ninguna combinación de vínculos de segunda clase podrá resultar en un vínculo de primera clase. Esto implica que la siguiente matriz

$$C_{\beta\gamma}(q, p) \equiv \left\{ \Theta_\beta(q, p), \Theta_\gamma(q, p) \right\} \quad , \quad \beta, \gamma = 1, 2, \dots, D, \quad (3.42)$$

es regular y por ende invertible en  $\Sigma'$  [3, 13], es decir,

$$\det \left\| \left\{ \Theta_\beta(q, p), \Theta_\gamma(q, p) \right\} \Big|_{\Sigma'} \right\| \neq 0. \quad (3.43)$$

Como la matriz  $C(q, p)$  es antisimétrica, la condición (3.43) garantiza que el número de vínculos de segunda clase es siempre par ( $D = 2L$ ). La presencia de vínculos de segunda clase implica la existencia de coordenadas que no son independientes y que pueden ser eliminadas de la teoría expresando éstas en términos de las coordenadas independientes. Para esto, se eliminarán los vínculos de segunda clase construyendo un nuevo conjunto de corchetes que son definidos en términos de las variables independientes de la teoría.

Con el fin de eliminar de manera sistemática los vínculos de segunda clase, Dirac introdujo el siguiente conjunto de corchetes entre dos variables dinámicas  $f(q, p)$  y  $g(q, p)$  [3]

$$\left\{ f, g \right\}_D \equiv \left\{ f, g \right\} - \left\{ f, \Theta_\beta \right\} D^{\beta\gamma} \left\{ \Theta_\gamma, g \right\}, \quad (3.44)$$

donde  $D$  es la inversa de la matriz  $C$  (3.42). Los corchetes (3.44) se conocen en la literatura como *Corchetes de Dirac (PD)* [1, 5, 6]. Se puede mostrar que los PD tienen las mismas propiedades de los corchetes de Poisson [3, 4, 5], es decir:

$$\begin{aligned} \left\{ f, g \right\}_D &= - \left\{ g, f \right\}_D, \\ \left\{ f, c_1 g + c_2 h \right\}_D &= c_1 \left\{ f, g \right\}_D + c_2 \left\{ f, h \right\}_D, \\ \left\{ f, gh \right\}_D &= g \left\{ f, h \right\}_D + \left\{ f, g \right\}_D h, \\ \left\{ f, \left\{ g, h \right\}_D \right\}_D + \left\{ g, \left\{ h, f \right\}_D \right\}_D + \left\{ h, \left\{ f, g \right\}_D \right\}_D &= 0. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Si  $f(q, p)$  o  $g(q, p)$  son de primera clase, se puede demostrar fácilmente la siguiente propiedad:

$$\left\{ f, g \right\}_D \approx \left\{ f, g \right\}, \quad (3.46)$$

y para cualquier función  $F(q, p)$  se cumple

$$\left\{ F, \Theta_\beta \right\}_D = 0 \quad , \quad \beta = 1, 2, \dots, D. \quad (3.47)$$

Esto garantiza que bajo la definición de PD todos los vínculos de segunda clase son fuertemente nulos ya que según (3.47), el PD de alguna variable dinámica con un vínculo de segundo clase es cero. La propiedad (3.46) permite expresar las ecuaciones de movimiento (3.34) en términos de los PD de la siguiente forma:

$$\dot{g}(q, p) \approx \left\{ g(q, p), H_T \right\}_D. \quad (3.48)$$

Debido a la propiedad (3.47), la ecuaciones débiles se pueden considerar como igualdades fuertes, es decir:

$$\Theta_\beta(q, p) = 0 \quad , \quad \beta = 1, 2, \dots, D, \quad (3.49)$$

por lo tanto, se puede utilizar (3.49) para eliminar totalmente  $2L$  de las coordenadas  $(q, p)$  que definían el espacio de fase original  $\Sigma$  en función de las restantes variables canónicas. De esta manera, las ecuaciones de movimiento (3.48) involucrarán apenas  $2(N - L)$  coordenadas independientes con lo que los únicos vínculos que se mantendrán en la teoría son los vínculos de primera clase. El símbolo de igualdad débil en la relación (3.48) hace referencia a estas cantidades. El en caso particular que el sistema posea únicamente vínculos de segunda clase, la expresión (3.48) se considerará como una ecuación fuerte y ésta sera útil para cuantizar el sistema.

Un estudio sistemático de la estructura de vínculos puede ser realizado para un sistema mecánico clásico descrito por variables de Grassmann [10]. Este mecánica fue denominada de Pseudo-mecánica [11] y es el límite clásico de una teoría cuántica fermiónica. Una característica del Lagrangiano que describe un sistema relativista que utiliza variables de Grassmann es que éste es singular [1, 12].

Si el número de vínculos de segunda clase es muy numeroso, existe un método iterativo para calcular los PD que evita invertir la matriz asociada a el conjunto de vínculos de segunda clase. El método consiste en considerar un subconjunto del conjunto de vínculos de segunda clase  $\{\Theta'_\beta\} \subset \{\Theta_\beta\}$ , con los cuales se construye la matriz  $C'_{\beta\gamma} \equiv \{\Theta'_\beta, \Theta'_\gamma\}$ , la cual satisface la condición:  $\det C' \neq 0$ . Ahora, se define un primer conjunto de PD asociados a  $\{\Theta'_\beta\}$  de la siguiente manera:

$$\left\{ f, g \right\}_{D(C')} \equiv \left\{ f, g \right\} - \left\{ f, \Theta'_\beta \right\} D'^{\beta\gamma} \left\{ \Theta'_\gamma, g \right\}. \quad (3.50)$$

Después, se elige otro subconjunto de vínculos:  $\{\Theta''_\beta\} \subset \{\Theta_\beta\}$ , y se define la matriz  $C''_{\beta\gamma} \equiv \{\Theta''_\beta, \Theta''_\gamma\}_{D(C'')}$ , que satisface  $\det C'' \neq 0$ . Asociado al sistema de vínculos  $\{\Theta''_\beta\}$  se forma un nuevo conjunto de PD:

$$\left\{ f, g \right\}_{D(C'')} \equiv \left\{ f, g \right\}_{D(C')} - \left\{ f, \Theta''_\beta \right\}_{D(C')} D''^{\beta\gamma} \left\{ \Theta''_\gamma, g \right\}_{D(C')}. \quad (3.51)$$

El algoritmo continua hast que todos los vínculos de segunda clase del conjunto  $\{\Theta_\beta\}$  hayan sido considerados. El resultado obtenido de esta manera es equivalente a calcular los PD en un solo paso [1, 6].

### 3.5. Condiciones de Gauge

Como se ha podido observar, los vínculos de segunda clase se pueden eliminar de la teoría usando los PD, sin embargo, aun persisten los vínculos de primera clase. Estos vínculos y la libertad de gauge asociados a ellos indica que aun persiste un conjunto de variables canónicas correspondientes al mismo estado físico. Esta ambigüedad se elimina introduciendo condiciones adicionales sobre las variables canónicas con el fin de obtener una correspondencia uno a uno entre los estados físicos y los valores de las variables canónicas que se mantienen independientes

después de que las condiciones adicionales son impuestas. Estas condiciones extras son conocidas como *condiciones de gauge* y no son una consecuencia de la teoría pero si relaciones externas a la misma con el fin de evitar un multiple conteo de estados [14].

Asumiendo que todos los vínculos de primera clase son independientes, las propiedades que un conjunto de condiciones de gauge

$$\Omega_\beta(q, p) \approx 0 \quad (3.52)$$

deberá satisfacer son [1, 14, 15]:

1. Las condiciones de gauge deberán ser atingibles, lo que significa que dado un conjunto de variables canónicas, deberá existir una transformación de gauge que transporte un conjunto de  $(q', p')$  que no satisfacen la condición de gauge en un conjunto  $(q, p)$  que si. Esta transformación debe ser obtenida por iteración de transformaciones infinitesimales de la forma  $\delta u^\beta \{F, \Psi_\alpha\}$ . El número de parámetros independientes  $\delta u^\beta$  es igual a el número de vínculos de primera clase independientes  $\Psi_\alpha$ . De esta manera, el número de condiciones de gauge independientes (3.52) no puede ser mayor que el número de independientes  $\Psi_\alpha$ .
2. Las condiciones (3.52) deberán fijar el gauge completamente, es decir, una vez que (3.52) sea establecido no existirá ninguna transformación de gauge que conduzca a alguna otra condición que satisfaga  $\tilde{\Omega}_\beta(q, p) \approx 0$ , excepto la identidad. En otras palabras, la ecuación

$$\delta u^\beta \left\{ \Omega_\alpha, \Psi_\beta \right\} \approx 0 \quad (3.53)$$

deberá implicar que

$$\delta u^\beta = 0. \quad (3.54)$$

La relación (3.53) resulta en (3.54) solo si el número de ecuaciones independientes fuera igual o mayor que los  $\delta u^\beta$  desconocidos. Las condiciones (1) y (2) garantizan que para poder fijar el gauge

completamente el número de condiciones de gauge independientes debe ser igual al número de vínculos de primera clase independientes. Así que  $\{\Omega_\alpha, \Psi_\beta\}$  constituye una matriz cuadrada e invertible con la condición:

$$\det \left\{ \Omega_\alpha, \Psi_\beta \right\} \neq 0. \quad (3.55)$$

La última relación establece que el conjunto de vínculos  $\Omega_\alpha$  y  $\Psi_\beta$  forman un conjunto de segunda clase. Como consecuencia, después de fijar el gauge los vínculos de primera clase desaparecen.

3. Las condiciones de gauge deberán ser preservadas por la evolución dinámica del sistema, es decir, ecuaciones de movimiento mas condiciones iniciales.
4. La invariancia de Lorentz de la teoría no deberá ser destruida por las condiciones de gauge.

Lo anterior permite concluir que por cada vínculo de primera clase se debe introducir una condición de gauge. A partir de ahora, todos los vínculos de la teoría son de segunda clase. Por lo tanto, si se agrupa todos los vínculos en un vector:  $\{\Phi_r\} = \{\Theta_\gamma, \Psi_\beta, \Omega_\alpha\}$ , se puede definir la matriz no singular formada por los corchetes de Poisson entre las diferentes componentes del vector, es decir:

$$G_{rs} \equiv \left\{ \Phi_r, \Phi_s \right\}, \quad (3.56)$$

y como tal, la ecuación de movimiento sera de la siguiente forma

$$\dot{g} = \left\{ g, H_C \right\}_{D(G)}. \quad (3.57)$$

Utilizando nuevamente la propiedad iterativa para calcular los corchetes de Dirac, (3.50) y (3.51), se determina que

$$\left\{ g, H_C \right\}_{D(G)} = \left\{ g, H_C \right\}_{D(C)} - \left\{ g, \Lambda_I \right\}_{D(C)} G_{IJ}^{-1} \left\{ \Lambda_J, H_C \right\}_{D(C)}, \quad (3.58)$$

con  $\Lambda_I$  representando un elemento del conjunto  $\{\Psi_\beta, \Omega_\alpha\}$  por los vínculos de primera clase y las condiciones de gauge. Siendo que

$$G_{IJ}^{-1} \equiv \left\{ \Lambda_I, \Lambda_J \right\}_{D(\Delta)}, \quad (3.59)$$

es la inversa de la matriz de vínculos definida en términos de los corchetes de Dirac formados solo por los vínculos de segunda clase. Ahora, bajo la definición de estos corchetes de Dirac, todos los vínculos de la teoría, incluyendo las condiciones de gauge, son fuertemente nulos.

Ahora, el número de grados físicos de libertad son determinada a partir de la siguiente relación:

$$K = 2N - L - M - M = 2N - L - 2M. \quad (3.60)$$

$K$  = número de variables canónicas independientes (Espacio de fase reducido).

$2N$  = número total de variables canónicas.

$L$  = número de vínculos de segunda clase.

$M$  = número de vínculos de primera clase.

$M$  = número de condiciones de gauge.

Sin embargo, la elección de las condiciones de gauge (llamado también de método implícito) permite describir la teoría en términos de los corchetes de Dirac, en general, no es posible encontrar una representación para el espacio de fase reducido. En la mayoría de los sistemas de interés físico, la dimensión del espacio de fase reducido es determinado por (3.60). El método explícito de reducción de gauge intenta aislar e identificar los pares canónicos del espacio de fase reducido. Este método se explica en las referencias [1, 16].

## 3.6. Ejemplos

### Partícula puntual no relativista moviéndose sobre una $N - 1$ esfera

Considérese una partícula puntual no relativista que se mueve sobre la superficie de una  $(N - 1)$  esfera de longitud unidad sumergida en un espacio  $N$  dimensional. La función de Lagrange del modelo es descrito por:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{\lambda}{2}(q^2 - 1) = \frac{1}{2}\dot{q}_k\dot{q}_k + \frac{\lambda}{2}(q_kq_k - 1), \quad (3.61)$$

donde  $q \equiv (q_1, q_2, \dots, q_N)$  son las coordenadas de la partícula y  $N$  la dimensión del espacio. Aquí  $\lambda$  es un multiplicador de Lagrange que permitirá incorporar la ligadura mecánica  $q_kq_k - 1 = 0$  a la dinámica del sistema. Las correspondientes ecuaciones de Euler Lagrange para las coordenadas introducidas tienen la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = \ddot{q}_k - \lambda q_k = 0, \quad (3.62)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} - \frac{\partial L}{\partial \lambda} = q_kq_k - 1 = 0. \quad (3.63)$$

Como se puede observar la relación (3.62) corresponde a una ecuación dinámica asociada a la coordenada  $q_k$  en tanto que (3.63) es una expresión independiente de las aceleraciones y se interpreta como un vínculo Lagrangiano. Una manera de evidenciar la existencia de este vínculo resulta de calcular la correspondiente matriz Hessiana la cual es definida por las siguientes componentes:

$$W_{ab} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{Q}_a \partial \dot{Q}_b}, \quad (3.64)$$

donde se denota  $Q_a = (q_1, q_2, \dots, q_N, \lambda)$ . La correspondiente matriz  $(N + 1) \times (N + 1)$  tiene la forma,

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

Es posible verificar que dicha matriz es singular, con un autovalor cero y siendo su correspondiente autovector dado por (3.63).

La estructura canónica de la teoría implica conocer los momentos canónicos conjugados a las coordenadas  $(q_k, \lambda)$  los cuales son definidos de la siguiente manera:

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}_k, \quad (3.66)$$

$$p_\lambda \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}} = 0. \quad (3.67)$$

La relación (3.67) se interpreta como un vínculo primario que se definirá de la siguiente manera:

$$\phi_1 \equiv p_\lambda \approx 0. \quad (3.68)$$

El Hamiltoniano canónico asociado es definido en la manera estándar:

$$\begin{aligned} H_C &\equiv \dot{q}_k p_k + \dot{\lambda} p_\lambda - L \\ &= \frac{1}{2} p_k p_k - \frac{\lambda}{2} (q_k q_k - 1) \end{aligned} \quad (3.69)$$

Para un sistema con vínculos la dinámica del sistema en el espacio de fase es gobernada por el Hamiltoniano primario el cual es definido de la siguiente manera:

$$H_P \equiv H_C + \alpha_1 \phi_1 \quad (3.70)$$

donde  $\alpha_1$  es el multiplicador de Lagrange asociado al vínculo primario  $\phi_1$ . Ahora, se procede a calcular la consistencia  $\phi_1$ , es decir, se deberá evaluar

la siguiente ecuación:

$$\dot{\phi}_1 = \left\{ \phi_1, H_P \right\} \approx 0. \quad (3.71)$$

Con el fin de resolver la expresión (3.71) se debe introducir los paréntesis de Poisson (PP) entre las coordenadas que definen el espacio de fase  $(Q_a, P_a)$ , siendo  $P_a \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_a}$  los momentos canónicos conjugados a las coordenadas  $Q_a$ . Los PP para dos variables dinámicas  $A(Q, P)$  y  $B(Q, P)$  en este espacio de fase están definidos por:

$$\left\{ A, B \right\} = \frac{\partial A}{\partial Q_a} \frac{\partial B}{\partial P_a} - \frac{\partial A}{\partial P_a} \frac{\partial B}{\partial Q_a}, \quad (3.72)$$

a partir de los cuales se pueden deducir que los únicos PP no nulos entre las coordenadas son:

$$\left\{ q_k, p_l \right\} = \delta_{kl} \quad , \quad \left\{ \lambda, p_\lambda \right\} = 1. \quad (3.73)$$

De (3.71) y (3.73) se puede determinar que:

$$\dot{\phi}_1 = \frac{1}{2} (q_k q_k - 1) \approx 0,$$

que es una expresión que muestra relaciones entre las coordenadas del espacio de fase, por tanto, un vínculo secundario que se definirá de la siguiente forma:

$$\phi_2 \equiv q_k q_k - 1 \approx 0. \quad (3.74)$$

La expresión anterior muestra como la hipersuperficie esférica sobre la cual se mueve la partícula puntual surge naturalmente como un vínculo en la teoría. Ahora, dada la existencia del vínculo secundario  $\phi_2$  su consistencia debe ser analizada, lo que implica:

$$\dot{\phi}_2 = \left\{ \phi_2, H_P \right\} = 2q_k p_k \approx 0,$$

resultando en un nuevo vínculo secundario que se definirá en la forma:

$$\phi_3 \equiv q_k p_k \approx 0. \quad (3.75)$$

Al proceder con el método de Dirac, se debe garantizar la consistencia de éste vínculo con lo cual resulta:

$$\dot{\phi}_3 = \left\{ \phi_3, H_P \right\} = p_k p_k + \lambda q_k q_k \approx 0,$$

con lo cual un nuevo vínculo secundario surge que se denotara de la siguiente manera:

$$\phi_4 \equiv p_k p_k + \lambda q_k q_k \approx p_k p_k + \lambda \approx 0, \quad (3.76)$$

donde se ha utilizado el vínculo secundario (3.74). Ahora, se debe garantizar que (3.76) se mantenga con el tiempo, es decir, se debe cumplir:

$$\dot{\phi}_4 = \left\{ \phi_4, H_P \right\} = 2\lambda q_k p_k + \alpha_1 \approx 0.$$

Este resultado establece una condición sobre el multiplicador de Lagrange asociado al vínculo primario  $\phi_1$  y por ende la teoría no posee más vínculos. Así, se determina que el conjunto completo de vínculos asociados al sistema son:

$$\begin{aligned} \phi_1 &\equiv p_\lambda \approx 0, \\ \phi_2 &\equiv q_k q_k - 1 \approx 0, \\ \phi_3 &\equiv q_k p_k \approx 0, \\ \phi_4 &\equiv p_k p_k + \lambda \approx 0. \end{aligned} \quad (3.77)$$

Procediendo con el método de Dirac se procede a clasificar los vínculos en primera y segunda clase. Para ello, se define una matriz con todos los vínculos de la teoría con los siguientes elementos:

$$G_{ij} \equiv \left\{ \phi_i, \phi_j \right\}. \quad (3.78)$$

con lo cual se determina la siguiente representación:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2q^2 & 0 \\ 0 & -2q^2 & 0 & 2p^2 \\ -1 & 0 & -2p^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

Es posible mostrar que el determinante de la matriz tiene un valor de  $4q^4$ , es decir, es una matriz regular, lo cual garantiza que el conjunto de vínculos definidos en (3.77) son de segunda clase.

Ahora, se procede a definir un conjunto de corchetes que sean consistentes con los vínculos de segunda clase que la teoría posee, es decir, los paréntesis de Dirac (PD) que en el caso de dos variables dinámicas  $A$  y  $B$  se definen de la siguiente manera:

$$\left\{ A, B \right\}_D = \left\{ A, B \right\} - \left\{ A, \phi_i \right\} C_{ij}^{-1} \left\{ \phi_j, B \right\}, \quad (3.80)$$

donde  $C_{ij}^{-1}$  identifica los elementos de matriz asociada a la inversa de  $C$ . Es posible mostrar que  $C^{-1}$  tiene la forma:

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{p^2}{q^2} & 0 & -1 \\ \frac{p^2}{q^2} & 0 & -\frac{1}{2q^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2q^2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.81)$$

La relación (3.80) garantiza que si se calcula el PD de cualquier viable dinámica  $A$  con alguno de los vínculos de segunda clase (3.77) se cumple que:

$$\begin{aligned} \left\{ A, \phi_k \right\}_D &= \left\{ A, \phi_k \right\} - \left\{ A, \phi_i \right\} C_{ij}^{-1} \left\{ \phi_j, \phi_k \right\} \\ &= \left\{ A, \phi_k \right\} - \left\{ A, \phi_i \right\} C_{ij}^{-1} C_{jk} \\ &= \left\{ A, \phi_k \right\} - \left\{ A, \phi_i \right\} \delta_{ik} \\ &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, los vínculos de segunda clase son consistente con los PD y bajo la definición (3.80) se pueden asumir como identidades de manera

que se cumple las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 p_\lambda &= 0, \\
 q_k q_k - 1 &= 0, \\
 q_k p_k &= 0, \\
 p_k p_k + \lambda &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

Las relaciones anteriores establecen que del espacio de fase original de dimensión 8, existen únicamente 4 grados de libertad. Inicialmente se puede concluir que

$$p_\lambda = 0 \quad , \quad \lambda = -p^2$$

No obstante, a partir de (3.82) no se puede determinar directamente las otras dos coordenadas dependientes y por ende los grados de libertad que definen el espacio de fase reducido. Por tanto, se calcularán los PD entre las siguientes variables del espacio de fase  $(q_k, p_k)$ . Para ello, se considerarán los siguientes PP:

$$\begin{aligned}
 \{q_k, \phi_3\} &= q_l \{q_k, p_l\} = q_k, \\
 \{q_k, \phi_4\} &= 2p_l \overset{\delta_{kl}}{\{q_k, p_l\}} = 2p_k, \\
 \{\phi_2, p_l\} &= 2q_k \overset{\delta_{kl}}{\{q_k, p_l\}} = 2q_l, \\
 \{\phi_3, p_l\} &= p_k \overset{\delta_{kl}}{\{q_k, p_l\}} = p_l.
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

Del conjunto de relaciones anteriores se puede determinar que el PD asociado a la coordenada  $q_k$  implicara que se deba evaluar la siguiente

expresión:

$$\begin{aligned}
\left\{q_k, B\right\}_D &= \left\{q_k, B\right\} - \left\{q_k, \phi_i\right\} C_{ij}^{-1} \left\{\phi_j, B\right\} \\
&= \left\{q_k, B\right\} - \left\{q_k, \phi_3\right\} C_{3j}^{-1} \left\{\phi_j, B\right\} \\
&\quad - \left\{q_k, \phi_4\right\} C_{4j}^{-1} \left\{\phi_j, B\right\} \\
&= \left\{q_k, B\right\} - q_k C_{3j}^{-1} \left\{\phi_j, B\right\} \\
&\quad - 2p_k C_{4j}^{-1} \left\{\phi_j, B\right\}.
\end{aligned} \tag{3.84}$$

Por lo tanto, se puede determinar los siguientes PD asociados a las coordenadas  $q_k$ :

$$\begin{aligned}
\left\{q_k, p_l\right\}_D &= \left\{q_k, p_l\right\} - q_k C_{3j}^{-1} \left\{\phi_j, p_l\right\} - 2p_k C_{4j}^{-1} \left\{\phi_j, p_l\right\} \\
&= \left\{q_k, p_l\right\} - q_k C_{32}^{-1} \left\{\phi_2, p_l\right\} - q_k C_{33}^{-1} \left\{\phi_3, p_l\right\} \\
&\quad - 2p_k C_{42}^{-1} \left\{\phi_2, p_l\right\} - 2p_k C_{43}^{-1} \left\{\phi_3, p_l\right\}.
\end{aligned}$$

Utilizando (3.83) y la representación de la inversa de la matriz de vínculos se determina que:

$$\begin{aligned}
\left\{q_k, p_l\right\}_D &= \delta_{kl} - q_k \left(\frac{1}{2q^2}\right) (2q_l) \\
&= \delta_{kl} - \frac{q_k q_l}{q^2}.
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Un cálculo similar permite deducir que:

$$\begin{aligned}
\left\{q_k, q_l\right\}_D &= \left\{q_k, q_l\right\} - q_k C_{3j}^{-1} \left\{\phi_j, q_l\right\} - 2p_k C_{4j}^{-1} \left\{\phi_j, q_l\right\} \\
&= -q_k C_{33}^{-1} \left\{\phi_3, q_l\right\} - q_k C_{34}^{-1} \left\{\phi_4, q_l\right\} \\
&\quad - 2p_k C_{43}^{-1} \left\{\phi_3, q_l\right\} - 2p_k C_{44}^{-1} \left\{\phi_4, q_l\right\} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{3.86}$$

Ahora, para calcular el PD correspondiente a la coordenada  $p_k$  implica que se considere la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\left\{ p_k, B \right\}_D &= \left\{ p_k, B \right\} - \left\{ p_k, \phi_i \right\} C_{ij}^{-1} \left\{ \phi_j, B \right\} \\
&= \left\{ p_k, B \right\} - \left\{ p_k, \phi_2 \right\} C_{2j}^{-1} \left\{ \phi_j, B \right\} \\
&\quad - \left\{ p_k, \phi_3 \right\} C_{3j}^{-1} \left\{ \phi_j, B \right\} \\
&= \left\{ p_k, B \right\} + 2q_k C_{2j}^{-1} \left\{ \phi_j, B \right\} + p_k C_{3j}^{-1} \left\{ \phi_j, B \right\}.
\end{aligned}$$

De la relación anterior se puede deducir que:

$$\begin{aligned}
\left\{ p_k, p_l \right\}_D &= \left\{ p_k, p_l \right\} + 2q_k C_{2j}^{-1} \left\{ \phi_j, p_l \right\} + p_k C_{3j}^{-1} \left\{ \phi_j, p_l \right\} \\
&= 2q_k C_{22}^{-1} \left\{ \phi_2, p_l \right\} + 2q_k C_{23}^{-1} \left\{ \phi_3, p_l \right\} \\
&\quad + p_k C_{32}^{-1} \left\{ \phi_2, p_l \right\} + p_k C_{33}^{-1} \left\{ \phi_3, p_l \right\} \\
&= 2q_k \left( -\frac{1}{2q^2} \right) (p_l) + p_k \left( \frac{1}{2q^2} \right) (2q_l) \\
&= \frac{1}{q^2} \left( p_k q_l - q_k p_l \right). \tag{3.87}
\end{aligned}$$

Finalmente, se puede concluir que los corchetes de Dirac asociados a una partícula puntual no relativista que se mueve sobre la superficie de una  $(N - 1)$  esfera de longitud unidad inmersa en un espacio  $N$  dimensional son:

$$\begin{aligned}
\left\{ q_k, q_l \right\}_D &= 0, \\
\left\{ q_k, p_l \right\}_D &= \delta_{kl} - \frac{q_k q_l}{q^2}, \\
\left\{ p_k, p_l \right\}_D &= \frac{1}{q^2} \left( p_k q_l - q_k p_l \right). \tag{3.88}
\end{aligned}$$

Ahora, bajo la definición de los PD la dinámica de la partícula es gover-

nada por el siguiente Hamiltoniano:

$$H \equiv \frac{1}{2} p_l p_l, \quad (3.89)$$

con lo cual las ecuaciones de movimiento son:

$$\begin{aligned} \dot{q}_k &= \left\{ q_k, H \right\}_D = \left\{ q_k, \frac{1}{2} p_l p_l \right\}_D = p_l \left\{ q_k, p_l \right\}_D \\ &= \left( \delta_{kl} - \frac{q_k q_l}{q^2} \right) p_l = p_k - \frac{q_k (q_l p_l)}{q^2} = p_k. \\ \dot{p}_k &= \left\{ p_k, H \right\}_D = p_l \left\{ p_k, p_l \right\}_D = \frac{p_l}{q^2} (p_k q_l - q_k p_l) \\ &= \frac{1}{q^2} \left[ p_k (q_l p_l) - q_k (p_l p_l) \right] = -\frac{q_k}{q^2} p^2 \end{aligned} \quad (3.90)$$

## Campo de Proca Abeliano

Este tipo de campo es descrito por la siguiente densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu. \quad (3.91)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  es definido de la siguiente manera

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (3.92)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a los campos  $A_\mu$  son calculadas a partir de:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} = 0, \quad (3.93)$$

de manera que de la densidad Lagrangiana (3.91) se determina que:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = \square A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu + m^2 A^\nu = 0, \quad (3.94)$$

donde el operador  $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu$  se identifica como el operador d'Alambertiano. Ahora, es posible verificar de la ecuación de campo (3.94) que al aplicar a ella el operador diferencial  $\partial_\nu$  se obtiene que:

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 \partial_\nu A^\nu = m^2 \partial_\nu A^\nu = 0. \quad (3.95)$$

La relación anterior es consecuencia de la antisimetría del tensor  $F_{\mu\nu}$  y de la simetría del operador  $\partial_\mu\partial_\nu$ . Sin embargo, del hecho de que el parámetro  $m^2 \neq 0$ , la relación establece que el campo vectorial deberá satisfacer el siguiente restricción:

$$\partial_\nu A^\nu = 0. \quad (3.96)$$

El análisis canónico de la teoría implica que se definan los momentos canónicos  $\Pi^\nu$  asociados a los campos  $A_\nu$  de la siguiente manera:

$$\Pi^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} = F^{\nu 0}. \quad (3.97)$$

La relación anterior establece que existe un vínculo primario definido como:

$$\Sigma_1(x) \equiv \Pi^0(x) \approx 0, \quad (3.98)$$

al igual que una ecuación dinámica:

$$\Pi^i = F^{i0} = \partial^i A^0 - \partial^0 A^i = \partial_0 A_i - \partial_i A_0. \quad (3.99)$$

En el espacio de fase  $(A_\nu, \Pi^\nu)$  los corchetes de Poisson para dos variables dinámicas  $F[A(x), \Pi(x)] \equiv F(x)$  y  $G[A(x), \Pi(x)] \equiv G(x)$  a tiempos iguales se definen como:

$$\left\{ F(x^0, \mathbf{x}), G(y^0, \mathbf{y}) \right\}_{x^0=y^0} \equiv \int d^3z \left[ \frac{\delta F(x)}{\delta A_\alpha(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \Pi^\alpha(z)} - \frac{\delta G(y)}{\delta A_\alpha(z)} \frac{\delta F(x)}{\delta \Pi^\alpha(z)} \right], \quad (3.100)$$

a partir de los cuales se puede determinar el siguiente conjunto de corchetes fundamentales de Poisson diferentes de cero:

$$\left\{ A_\mu(t, \mathbf{x}), \Pi^\nu(y^0, \mathbf{y}) \right\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.101)$$

La existencia del vínculo primario (3.98) implica que el método de Dirac será aplicado. Para ello, primero se deberá introducir en la densidad

Hamiltoniana canónica de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_c &= \Pi^\nu \partial_0 A_\nu - L \\
&\approx \Pi^i \partial_0 A_i + \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \\
&= \Pi^i \Pi^i + \Pi^i \partial_i A_0 - \frac{1}{2} \frac{F^{i0} F^{i0}}{\Pi^i} + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \\
&= \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \Pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu,
\end{aligned}$$

con lo cual el Hamiltoniano canónico se expresa:

$$\begin{aligned}
H_c &= \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \Pi^i \partial_i A_0 + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \right] \\
&= \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - A_0 \partial_i \Pi^i + \frac{1}{4} F_{ij} F_{ij} - \frac{m^2}{2} A_\mu A^\mu \right], \quad (3.102)
\end{aligned}$$

donde que el último resultado es consecuencia de una integración por partes y de las condiciones de frontera de los campos. La consistencia del vínculo primario será evaluada a partir del Hamiltoniano primario que resulta de sumar al Hamiltoniano canónico una combinación lineal de los vínculos primarios, es decir:

$$H_p = H_c + \int d^3x \lambda_1(x) \Sigma_1(x), \quad (3.103)$$

siendo  $\lambda_1(x)$  el multiplicador de lagrange asociado a  $\Sigma_1(x)$ .

La evolución temporal del vínculo primario deberá cumplir que,

$$\dot{\Sigma}_1(x) = \left\{ \Sigma_1(x), H_p \right\} \approx 0. \quad (3.104)$$

Con el fin de calcular la anterior expresión, se deberá utilizar las siguien-

tes relaciones que se derivan de los corchetes fundamentales (3.101):

$$\begin{aligned}
\left\{ \Sigma_1(x), H_c \right\} &= \int d^3 y \left\{ \Pi^0(x), -A_0(y) \partial_k^y \Pi^k(y) - \frac{m^2}{2} A_\mu(y) A^\mu(y) \right\} \\
&= - \int d^3 y \partial_k^y \Pi^k(y) \left\{ \Pi^0(x), A_0(y) \right\} \\
&\quad - \delta^3(x-y) \\
&\quad - m^2 \int d^3 y A^\mu(y) \left\{ \Pi^0(x), A_\mu(y) \right\} \\
&\quad - \delta_\mu^0 \delta^3(x-y) \\
&= \partial_k^x \Pi^k(x) + m^2 \delta_\mu^0 A^\mu(x) \\
&= \partial_k^x \Pi^k(x) + m^2 A^0(x). \tag{3.105}
\end{aligned}$$

De igual forma, se puede mostrar que,

$$\left\{ \Sigma_1(x), \Sigma_1(y) \right\} = 0 \tag{3.106}$$

A partir de las relaciones anteriores se determina que la consistencia del vínculo primario  $\Sigma_1$  implica:

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma}_1(x) &\approx \left\{ \Sigma_1(x), H_c \right\} + \int d^3 y \lambda_1(y) \left\{ \Sigma_1(x), \Sigma_1(y) \right\} \\
&= \partial_k^x \Pi^k(x) + m^2 A^0(x) \approx 0 \tag{3.107}
\end{aligned}$$

Es decir, un vínculo secundario surge al cual se denotara de la siguiente forma:

$$\Sigma_2(x) \equiv \partial_i^x \Pi^i(x) + m^2 A^0(x) \approx 0. \tag{3.108}$$

Continuando con el procedimiento de Dirac, la consistencia del vínculo secundario deberá ser analizada. Para ello, se utilizara las siguientes

expresiones:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Sigma_2(x), H_c \right\} &= \partial_i^x \int d^3 y \left\{ \Pi^i(x), \frac{1}{4} F_{kl}(y) F_{kl}(y) - \frac{m^2}{2} A_\mu(y) A^\mu(y) \right\} \\
&= \frac{1}{2} \partial_i^x \int d^3 y F_{kl}(y) \left\{ \Pi^i(x), F_{kl}(y) \right\} \\
&\quad - m^2 \partial_i^x \int d^3 y A^\mu(y) \left\{ \Pi^i(x), A_\mu(y) \right\} \\
&\quad \quad \quad - \delta_\mu^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{1}{2} \partial_i^x \int d^3 y F_{kl}(y) \left[ \begin{array}{c} \partial_k^y \left\{ \Pi^i(x), A_l(y) \right\} - \partial_l^y \left\{ \Pi^i(x), A_k(y) \right\} \\ - \delta_i^j \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \quad \quad \quad - \delta_\mu^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \end{array} \right] \\
&\quad + m^2 \delta_\mu^i \partial_i^x A^\mu(x) \\
&= -\frac{1}{2} \partial_i^x \int d^3 y F_{kl}(y) \left( \begin{array}{cc} \delta_l^i \partial_k^y & - \delta_k^i \partial_l^y \\ - \partial_k^x & - \partial_l^x \end{array} \right) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&\quad + m^2 \delta_j^i \partial_j^x A^j(x) \\
&= \frac{1}{2} \partial_i^x \left( \delta_l^i \partial_k^x - \delta_k^i \partial_l^x \right) \int d^3 y F_{kl}(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) + m^2 \partial_i^x A^i(x) \\
&= \frac{1}{2} \left( \partial_i^x \partial_k^x F_{ki}(x) - \partial_i^x \partial_l^x F_{il}(x) \right) - m^2 \partial_i^x A_i(x) \\
&= \partial_i^x \partial_k^x F_{ki}(x) - m^2 \partial_i^x A_i(x) \\
&= -m^2 \partial_i^x A_i(x),
\end{aligned}$$

siendo que el último término consecuencia de la antisimetría del tensor  $F_{ki}$ . De igual manera, resulta:

$$\left\{ \Sigma_2(x), \Sigma_1(y) \right\} = m^2 \int_{\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \left\{ A^0(x), \Pi^0(y) \right\} = m^2 \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}). \quad (3.109)$$

Por tanto, la consistencia del vínculo secundario  $\Sigma_2(x)$  implica:

$$\begin{aligned}\dot{\Sigma}_2(x) &\approx \left\{ \Sigma_2(x), H_c \right\} + \int d^3x \lambda_1(y) \left\{ \Sigma_2(x), \Sigma_1(y) \right\} \\ &\qquad\qquad\qquad m^2 \delta^3(x-y) \\ &= -m^2 \partial_i^x A_i(x) + m^2 \lambda_1(x) \approx 0,\end{aligned}$$

con lo cual se garantiza la siguiente condición sobre el multiplicador de Lagrange  $\lambda_1(x)$  asociado al vínculo primario:

$$\lambda_1(x) \approx \partial_i^x A_i(x). \quad (3.110)$$

La expresión anterior indica que no existe mas vínculos asociados a la teoría. Además, la relación (3.109) garantiza que los vínculos son de segunda clase, con lo cual se pueden eliminar al introducir los paréntesis de Dirac correspondientes.

Bajo la definición de los PD los vínculos primarios (3.98) y (3.108) se convierten en igualdades fuertes con lo cual se puede determinar que los grados de libertad que describen la teoría y que definen el espacio de fase reducido son:  $(A_i, \Pi^i)$ . Así, los corchetes de Dirac para dos variables dinámicas  $F[A_i(x), \Pi^i(x)] \equiv F(x)$  y  $G[A_i(x), \Pi^i(x)] \equiv G(x)$  en este espacio de fase son definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\left\{ F(x), G(y) \right\}_D &\equiv \left\{ F(x), G(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ F(x), \Sigma_a(u) \right\} \\ &\qquad\qquad\qquad C_{ab}^{-1}(u, v) \left\{ \Sigma_b(v), G(y) \right\},\end{aligned} \quad (3.111)$$

donde  $C^{-1}$  denota la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase, la cual se construye a partir de los siguientes elementos de matriz:

$$C_{ab}(x, y) = \left\{ \Sigma_a(x), \Sigma_b(y) \right\}. \quad (3.112)$$

A partir de (3.98), (3.108) y de los PP (3.109) se puede determinar que ésta matriz tiene la siguiente representación:

$$C(x, y) = m^2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (3.113)$$

Ahora, la matriz  $C(x, y)$  y su inversa deberán satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\int d^3z C_{ab}(x, z) C_{bc}^{-1}(z, y) = \int d^3z C_{ab}^{-1}(x, z) C_{bc}(z, y) = \delta_{ac} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.114)$$

Fácilmente se puede mostrar que  $C^{-1}$  posee la siguiente forma:

$$C^{-1}(x, y) = \frac{1}{m^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.115)$$

Utilizando las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \left\{ A_i(x), \Sigma_2(u) \right\} &= \partial_k^u \left\{ A_i(x), \Pi^k(u) \right\} = \partial_i^u \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \\ &\quad \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \quad -\partial_i^x \\ &= -\partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}), \\ \left\{ \Sigma_a(v), \Pi^i(y) \right\} &= 0 \quad , a = 1, 2, \end{aligned}$$

se puede mostrar, a partir de las relaciones (3.111) y (3.115), que el PD asociado al campo  $A_i(x)$  se calculan de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \left\{ A_i(x), G(y) \right\}_D &= \left\{ A_i(x), G(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ A_i(x), \Sigma_2(u) \right\} \\ &\quad -\partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \\ &\quad C_{2b}^{-1}(u, v) \left\{ \Sigma_b(v), G(y) \right\} \\ &= \left\{ A_i(x), G(y) \right\} + \partial_i^x \int d^3v C_{21}^{-1}(x, v) \left\{ \Sigma_1(v), G(y) \right\}, \end{aligned}$$

con lo cual se deduce que el único PD diferente de cero es:

$$\left\{ A_i(x), \Pi^j(y) \right\}_D = \left\{ A_i(x), \Pi^j(y) \right\} = \delta_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.116)$$

La dinámica del sistema se puede evaluar re escribiendo el Hamilto-

niano canónico de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
H_c &= \int d^3 y \left[ \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i - A_0 \partial_k^y \Pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} - \frac{m^2}{2} A_0 A_0 + \frac{m^2}{2} A_i A_i \right] \\
&\quad - \frac{1}{m^2} \partial_l^y \Pi^l \\
&= \int d^3 y \left[ \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{m^2} \partial_l^y \Pi^l \partial_k^y \Pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} - \frac{1}{2m^2} \partial_l^y \Pi^l \partial_k^y \Pi^k + \frac{m^2}{2} A_i A_i \right] \\
&= \int d^3 y \left[ \frac{1}{2} \Pi^i \Pi^i + \frac{1}{2m^2} \partial_l^y \Pi^l \partial_k^y \Pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} + \frac{m^2}{2} A_i A_i \right].
\end{aligned}$$

Entonces, la dinámica del sistema en el espacio de fase reducido, bajo la definición de los PD, es dada por el siguiente Hamiltoniano:

$$H = \int d^3 y \left[ \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k + \frac{1}{2m^2} \partial_l^y \Pi^l \partial_k^y \Pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} + \frac{m^2}{2} A_k A_k \right]. \quad (3.117)$$

Así, la evolución de las variables  $A_i$  es:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_i(x) &= \left\{ A_i(x), H \right\}_D = \frac{1}{2} \int d^3 y \left\{ A_i(x), \Pi^k(y) \Pi^k(y) \right\}_D \\
&\quad + \frac{1}{2m^2} \int d^3 y \left\{ A_i(x), \partial_l^y \Pi^l(y) \partial_k^y \Pi^k(y) \right\}_D \\
&= \int d^3 y \Pi^k(y) \left\{ A_i(x), \Pi^k(y) \right\}_D \\
&\quad \delta_i^k \delta^3(x-y) \\
&\quad + \frac{1}{m^2} \int d^3 y \partial_l^y \Pi^l(y) \partial_k^y \left\{ A_i(x), \Pi^k(y) \right\}_D \\
&\quad \delta_i^k \delta^3(x-y) \\
&= \Pi^i(x) + \frac{1}{m^2} \int d^3 y \partial_l^y \Pi^l(y) \partial_i^y \delta^3(x-y) \\
&\quad - \partial_i^x \\
&= \Pi^i(x) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \int d^3 y \partial_l^y \Pi^l(y) \delta^3(x-y) \\
&= \Pi^i(x) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_l^x \Pi^l(x),
\end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{A}_i(x) = \Pi^i(x) - \frac{1}{m^2} \partial_i^x \partial_l^x \Pi^l(x). \quad (3.118)$$

En forma similar, para el momento canónico  $\Pi^i(x)$  se deriva la siguiente ecuación de Hamilton:

$$\begin{aligned}
\dot{\Pi}^i(x) &= \left\{ \Pi^i(x), H \right\}_D = \left\{ \Pi^i(x), \int d^3 y \frac{1}{4} F_{kl}(y) F_{kl}(y) \right\}_D \\
&\quad + \left\{ \Pi^i(x), \int d^3 y \frac{m^2}{2} A_k(y) A_k(y) \right\}_D \\
&= \frac{1}{2} \int d^3 y F_{kl}(y) \left\{ \Pi^i(x), F_{kl}(y) \right\}_D + m^2 \int d^3 y A_k(y) \left\{ \Pi^i(x), A_k(y) \right\}_D \\
&\hspace{20em} - \delta_k^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \\
&= \frac{1}{2} \int d^3 y F_{kl}(y) \left[ \begin{array}{cc} \partial_k^y \left\{ \Pi^i(x), A_l(y) \right\}_D & - \partial_l^y \left\{ \Pi^i(x), A_k(y) \right\}_D \\ -\delta_l^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & -\delta_k^i \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \end{array} \right] \\
&\quad - m^2 A_i(x) \\
&= -\frac{1}{2} \int d^3 y F_{kl}(y) \begin{pmatrix} \delta_l^i \partial_k^y & -\delta_k^i \partial_l^y \\ -\partial_k^x & -\partial_l^x \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - m^2 A_i(x) \\
&= \frac{1}{2} \left( \delta_l^i \partial_k^x - \delta_k^i \partial_l^x \right) \int d^3 y F_{kl}(y) \delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - m^2 A_i(x) \\
&= \frac{1}{2} \left( \partial_k^x F_{ki}(x) - \partial_l^x F_{il}(x) \right) - m^2 A_i(x) \\
&= \partial_k^x F_{ki}(x) - m^2 A_i(x),
\end{aligned}$$

ó:

$$\dot{\Pi}^i(x) = \partial_k^x F_{ki}(x) - m^2 A_i(x). \quad (3.119)$$

Por tanto, las relaciones (3.118) y (3.119) establecen la dinámica del campo de Proca en el espacio de fase reducido.

## Campo masivo de Yang-Mills

Aplicaremos la formulación de Dirac para el caso de campos masivos de Yang-Mills el cual es descrito por la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu^a A_a^\mu. \quad (3.120)$$

donde  $A_\mu^a$  son los potenciales para los cuales  $a = 1, 2, 3, \dots, d$ , que representan los grados internos de libertad con  $d$  la dimensión del grupo. El tensor  $F_{\mu\nu}^a$  es definido en termino de los potenciales de la siguiente manera:

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad (3.121)$$

siendo  $g$  la constante de acoplamiento y  $f^{abc}$  la constante de estructura del grupo. Las ecuaciones de campo correspondientes son:

$$D_\mu^{ad} F_d^{\mu\nu} + m^2 A_a^\nu = 0, \quad (3.122)$$

donde ha introducido la derivada covariante

$$D_\mu^{ad} \equiv \delta^{ad} \partial_\mu - g f^{ade} A_\mu^e. \quad (3.123)$$

Ahora, para realizar el análisis canónico de la teoría se debe introducir los momentos canónicos conjugados a los campos  $A_a^\nu$  definidos por:

$$\Pi_a^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial (\partial_0 A_a^\nu)} = F_a^{\nu 0}, \quad (3.124)$$

del cual se puede deducir el siguiente conjunto de vínculos primarios

$$\Sigma_1^a(x) \equiv \Pi_a^0(x) \approx 0, \quad (3.125)$$

junto con la siguiente relación dinámica,

$$\Pi_a^i = F_a^{i0} = F_{0i}^a = \partial_0 A_i^a - \partial_i A_0^a + g f^{deg} A_0^e A_i^g. \quad (3.126)$$

El espacio de fase es determinado por el par canónico  $(A_\nu^a, \Pi_\nu^a)$  con lo cual el PP para dos variables dinámicas  $F[A(x), \Pi(x)] \equiv F(x)$  y  $G[A(x), \Pi(x)] \equiv G(x)$  a tiempos iguales se definen como:

$$\left\{ F(x^0, \mathbf{x}), G(y^0, \mathbf{y}) \right\}_{x^0=y^0} \equiv \int d^3z \left[ \frac{\delta F(x)}{\delta A_\alpha^c(z)} \frac{\delta G(y)}{\delta \Pi_c^\alpha(z)} - \frac{\delta G(y)}{\delta A_\alpha^c(z)} \frac{\delta F(x)}{\delta \Pi_c^\alpha(z)} \right], \quad (3.127)$$

de esta manera, los PP fundamentales diferentes de cero son:

$$\left\{ A_\mu^a(t, \mathbf{x}), \Pi_\nu^b(y^0, \mathbf{y}) \right\} = \delta_b^a \delta_\mu^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.128)$$

Con el fin de analizar la consistencia de los vínculos primarios se debe, en primer lugar, introducir el Hamiltoniano canónico asociado a la teoría de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \Pi_a^\nu \partial_0 A_\nu^a - \mathcal{L} \\ &\approx \Pi_a^i \partial_0 A_i^a + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta}^d F_d^{\alpha\beta} - \frac{m^2}{2} A_\alpha^d A_d^\alpha \\ &= \Pi_a^i \Pi_a^i + \Pi_a^i \partial_i A_0^a - g f^{aeg} \Pi_a^i A_0^e A_i^g - \frac{1}{2} F_d^{i0} F_d^{i0} + \frac{1}{4} F_{ij}^d F_d^{ij} - \frac{m^2}{2} A_\alpha^d A_d^\alpha \\ &= \Pi_a^i \Pi_a^i + \Pi_a^i \partial_i A_0^a - g f^{aeg} \Pi_a^i A_0^e A_i^g - \frac{1}{2} \Pi_a^i \Pi_a^i + \frac{1}{4} F_{ij}^d F_d^{ij} - \frac{m^2}{2} A_\alpha^d A_d^\alpha \\ &= \Pi_a^i \Pi_a^i + \Pi_a^i \partial_i A_0^a - g f^{aeg} \Pi_a^i A_0^e A_i^g - \frac{1}{2} \Pi_a^i \Pi_a^i + \frac{1}{4} F_{ij}^d F_{ij}^d - \frac{m^2}{2} A_\alpha^d A_d^\alpha \\ &= \frac{1}{2} \Pi_a^i \Pi_a^i + \partial_i (\Pi_a^i A_0^a) - A_0^e (\delta^{ea} \partial_i - g f^{eag} A_i^g) \Pi_a^i + \frac{1}{4} F_{ij}^d F_{ij}^d - \frac{m^2}{2} A_\alpha^d A_d^\alpha \\ &= \frac{1}{2} \Pi_a^i \Pi_a^i - A_0^e D_i^{ea} \Pi_a^i + \frac{1}{4} F_{ij}^d F_{ij}^d - \frac{m^2}{2} A_\alpha^d A_d^\alpha + \partial_i (\Pi_a^i A_0^a), \end{aligned}$$

de tal manera que el Hamiltoniano canónico se puede expresar de la forma

$$H_c = \int d^3x \left[ \frac{1}{2} \Pi_a^i \Pi_a^i - A_0^e D_i^{ea} \Pi_a^i + \frac{1}{4} F_{ij}^d F_{ij}^d - \frac{m^2}{2} A_\alpha^d A_d^\alpha \right], \quad (3.129)$$

donde el término de frontera se ha descartado. La consistencia del vínculo primario se estudia a partir del Hamiltoniano primario el cual se define

adicionando al Hamiltoniano canónico una combinación de los vínculos primarios (3.125), es decir:

$$H_p = H_c + \int d^3x \lambda_1^a(x) \Sigma_1^a(x), \quad (3.130)$$

siendo  $\lambda_1^a(x)$  el conjunto de multiplicadores de Lagrange asociados a  $\Sigma_1^a(x)$ . La consistencia de éste vínculo implica que la evolución temporal del mismo deberá ser establecida por la siguiente expresión:

$$\dot{\Sigma}_1^a(x) = \left\{ \Sigma_1^a(x), H_p \right\} \approx 0. \quad (3.131)$$

Con el fin de calcular (3.131) se utilizara las siguientes relaciones que son consecuencia de los PP fundamentales:

$$\begin{aligned} \left\{ \Sigma_1^a(x), H_c \right\} &= \int d^3y \left\{ \Pi_a^0(x), \left[ -A_0^e(y) D_k^{ec}(y) \Pi_c^k(y) - \frac{m^2}{2} A_0^d(y) A_0^d(y) \right] \right\} \\ &= - \int d^3y \left\{ \Pi_a^0(x), A_0^e(y) \right\} D_k^{ec}(y) \Pi_c^k(y) \\ &\quad - \delta_a^e \delta^3(x-y) \\ &\quad - m^2 \int d^3y A_0^d(y) \left\{ \Pi_a^0(x), A_0^d(y) \right\} \\ &\quad - \delta_a^d \delta^3(x-y) \\ &= D_k^{ac}(x) \Pi_c^k(x) + m^2 A_0^a(x), \end{aligned}$$

igualmente

$$\left\{ \Sigma_1^a(x), \Sigma_1^b(y) \right\} = 0.$$

De esta manera, la evolución temporal del vínculo primero implica:

$$\begin{aligned} \dot{\Sigma}_1^a(x) &\approx \left\{ \Sigma_1^a(x), H_c \right\} + \int d^3y \lambda_1^b(y) \left\{ \Sigma_1^a(x), \Sigma_1^b(y) \right\} \\ &= D_i^{ab}(x) \Pi_b^i(x) + m^2 A_0^a(x) \approx 0. \end{aligned} \quad (3.132)$$

Así, un nuevo vínculo surge al cual se denotara por:

$$\Sigma_2^a(x) \equiv D_i^{ab}(x) \Pi_b^i(x) + m^2 A_0^a(x) \approx 0. \quad (3.133)$$

Ahora, la consistencia de este vínculo secundario deberá ser analizada, para lo cual se utilizara las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\left\{ \Sigma_2^a(x), H_c \right\} &= D_i^{ab}(x) \left\{ \Pi_b^i(x), H_c \right\} \\
&= g f^{ecg} D_i^{ab}(x) \int d^3 y A_0^e(y) \left\{ \Pi_b^i(x), A_k^g(y) \right\} \Pi_c^k(y) \\
&\quad - \delta_b^g \delta_k^i \delta^3(x-y) \\
&\quad + \frac{1}{2} D_i^{ab}(x) \int d^3 y F_{kl}^d(y) \left[ \partial_k^y \left\{ \Pi_b^i(x), A_l^d(y) \right\} - \partial_l^y \left\{ \Pi_b^i(x), A_k^d(y) \right\} \right. \\
&\quad \quad \left. - \delta_b^d \delta_l^i \delta^3(x-y) \quad \quad - \delta_b^d \delta_k^i \delta^3(x-y) \right] \\
&\quad + g f^{deg} \left\{ \Pi_b^i(x), A_k^e(y) \right\} A_l^g(y) + g f^{deg} A_k^e(y) \left\{ \Pi_b^i(x), A_l^g(y) \right\} \\
&\quad \quad - \delta_b^e \delta_k^i \delta^3(x-y) \quad \quad - \delta_b^g \delta_l^i \delta^3(x-y) \\
&= -g f^{ecb} D_i^{ab}(x) \left[ A_0^e(x) \Pi_c^i(x) \right] - m^2 D_i^{ab}(x) A_i^b(x) \\
&\quad - \frac{1}{2} D_i^{ab}(x) \left[ \delta_k^i D_l^{bd}(x) - \delta_l^i D_k^{bd}(x) \right] F_{kl}^d(x) \\
&= -g f^{ecb} D_i^{ab}(x) \left[ A_0^e(x) \Pi_c^i(x) \right] - m^2 D_i^{ab}(x) A_i^b(x) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[ D_k^{ab}(x) D_l^{bd}(x) F_{kl}^d(x) - D_l^{ab}(x) D_k^{bd}(x) F_{kl}^d(x) \right].
\end{aligned}$$

De igual manera, se determina que:

$$\left\{ \Sigma_2^a(x), \Sigma_1^b(y) \right\} = m^2 \left\{ A_0^a(x), \Pi_b^0(y) \right\} = m^2 \delta_b^a \delta^3(x-y) \quad (3.134)$$

$$\delta_b^a \delta^3(x-y)$$

Entonces, la consistencia del vínculos secundario  $\Sigma_2^a(x)$  establece que:

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma}_2^a(x) &\approx \left\{ \Sigma_2^a(x), H_c \right\} + \int d^3x \lambda_1^b(y) \left\{ \Sigma_2^a(x), \Sigma_1^b(y) \right\} \\
&\quad - m^2 \delta_b^a \delta^3(x-y) \\
&= -g f^{ecb} D_i^{ab}(x) \left[ A_0^e(x) \Pi_c^i(x) \right] - m^2 D_i^{ab}(x) A_i^b(x) \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[ D_k^{ab}(x) D_l^{bd}(x) F_{kl}^d(x) - D_l^{ab}(x) D_k^{bd}(x) F_{kl}^d(x) \right] \\
&\quad + m^2 \lambda_1^a(x) \\
&\approx 0,
\end{aligned}$$

que es una condición sobre el multiplicador de Lagrange  $\lambda_1^a(x)$  asociado al vínculo primario, implicando que no existen mas vínculos en la teoría y también que el conjunto de vínculos encontrados son de segunda clase.

El conjunto de vínculos encontrados determinan que es posible considerar como el espacio de fase reducido aquel que es expandido por el siguiente conjunto de variables:  $(A_i^a, \Pi_a^i)$ . Ahora, con el fin de garantizar la afirmación anterior y encontrar un conjunto de corchetes consistentes con los vínculos de segunda clase, se introducirán los paréntesis de Dirac que para dos variables dinámicas  $F[A_i^a(x), \Pi_a^i(x)] \equiv F(x)$  y  $G[A_i^a(x), \Pi_a^i(x)] \equiv G(x)$  se definen de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\left\{ F(x), G(y) \right\}_D &\equiv \left\{ F(x), G(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ F(x), \Sigma_m(u) \right\} \\
&\quad C_{mn}^{-1}(u, v) \left\{ \Sigma_n(v), G(y) \right\}, \quad (3.135)
\end{aligned}$$

donde  $C^{-1}$  es la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase la cual se define a partir de los siguientes elementos de matriz:

$$C_{ab}(x, y) = \left\{ \Sigma_a(x), \Sigma_b(y) \right\}, \quad m, n = 1, 2 \quad (3.136)$$

y que posee la representación matricial:

$$C(x, y) = m^2 \delta_b^a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y). \quad (3.137)$$

Un procedimiento análogo al utilizado en el problema anterior, permite mostrar que la matriz inversa correspondiente es dada por:

$$G^{-1}(x, y) = \frac{1}{m^2} \delta_b^a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.138)$$

A partir de los siguientes resultados,

$$\begin{aligned} \left\{ A_i^a(x), \Sigma_2^m(u) \right\} &= \left\{ A_i^a(x), D_k^{mn}(u) \Pi_n^k(u) \right\} = D_k^{mn}(u) \left\{ A_i^a(x), \Pi_n^k(u) \right\} \\ &= D_i^{ma}(u) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \delta^{ma} \partial_i^u - g f^{mae} A_i^e(u) & \delta_n^a \delta_i^b \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \\ -\partial_i^x & A_i^e(x) \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \\ &= \left( -\delta^{ma} \partial_i^x + g f^{ame} A_i^e(x) \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}) = -D_i^{am}(x) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \\ \left\{ \Sigma_m^a(v), \Pi_b^i(y) \right\} &= 0 \quad , m = 1, 2, \end{aligned}$$

se puede mostrar que el PD asociado al campo  $A_i^a(x)$  se calcula a partir de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \left\{ A_i^a(x), G(y) \right\}_D &= \left\{ A_i^a(x), G(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ A_i^a(x), \Sigma_2(u) \right\} \\ &\quad - D_i^{am}(x) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{u}) \\ &\quad G_{2b}^{-1}(u, v) \left\{ \Sigma_b(v), G(y) \right\} \\ &= \left\{ A_i(x), G(y) \right\} + \partial_i^x \int d^3v G_{21}^{-1}(x, v) \left\{ \Sigma_1(v), G(y) \right\}. \end{aligned}$$

La relación anterior permite determinar fácilmente que los únicos PD diferentes de cero entre las variables que definen el espacio de fase reducido para el campo de Yang-Mills no masivo son:

$$\left\{ A_i^a(x), \Pi_b^j(y) \right\}_D = \left\{ A_i^a(x), \Pi_b^j(y) \right\} = \delta_b^a \delta_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (3.139)$$

Ahora, con el fin de determinar la dinámica del sistema en el espacio de fase descrito por la variables  $(A_i^a, \Pi_a^i)$ , se deberá reescribir el Hamiltoniano (3.130) utilizando la identidad asociada al vínculo secundario

(3.133). De esta manera se deduce que:

$$\begin{aligned}
H_p &= \int d^3 y \left[ \frac{1}{2} \Pi_a^k(y) \Pi_a^k(y) - \frac{A_0^e(y)}{-\frac{1}{m^2} D_l^{eb}(x) \Pi_b^l(x)} D_k^{ec}(y) \Pi_c^k(y) + \frac{1}{4} F_{kl}^d(y) F_{kl}^d(y) \right. \\
&\quad \left. - \frac{m^2}{2} \frac{A_0^d(y)}{-\frac{1}{m^2} D_l^{db}(x) \Pi_b^l(x)} A_0^d(y) + \frac{m^2}{2} A_k^d(y) A_k^d(y) \right] \\
&= \int d^3 y \left[ \frac{1}{2} \Pi_a^k(y) \Pi_a^k(y) + \frac{1}{2m^2} D_l^{eb}(x) \Pi_b^l(x) D_k^{ec}(y) \Pi_c^k(y) + \frac{1}{4} F_{kl}^d(y) F_{kl}^d(y) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2}{2} A_k^d(y) A_k^d(y) \right],
\end{aligned}$$

es decir, la evolución temporal de las variables del espacio de fase reducido es gobernada por el siguiente Hamiltoniano:

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3 y \left[ \frac{1}{2} \Pi_a^k(y) \Pi_a^k(y) + \frac{1}{2m^2} D_l^{eb}(y) \Pi_b^l(y) D_k^{ec}(y) \Pi_c^k(y) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} F_{kl}^d(y) F_{kl}^d(y) + \frac{m^2}{2} A_k^d(y) A_k^d(y) \right]. \tag{3.140}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la dinámica asociada a el campo  $A_i^a(x)$  es:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_i^a(x) &= \left\{ A_i^a(x), H \right\}_D = \int d^3 y \Pi_b^k(y) \left\{ A_i^a(x), \Pi_b^k(y) \right\}_D \\
&\quad \frac{\delta^a \delta_i^k \delta^3(x-y)}{\delta_c^a \delta_i^k \delta^3(x-y)} \\
&\quad + \frac{1}{m^2} \int d^3 y D_l^{eb}(y) \Pi_b^l(y) D_k^{ec}(y) \left\{ A_i^a(x), \Pi_c^k(y) \right\}_D \\
&\quad \frac{\delta_c^a \delta_i^k \delta^3(x-y)}{\delta_c^a \delta_i^k \delta^3(x-y)} \\
&= \Pi_a^i(x) + \frac{1}{m^2} \int d^3 y D_l^{eb}(x) \Pi_b^l(x) D_i^{ea}(y) \delta^3(x-y) \\
&\quad - D_i^{ae}(x) \\
&= \Pi_a^i(x) - \frac{1}{m^2} D_i^{ae}(x) D_l^{eb}(x) \Pi_b^l(x),
\end{aligned}$$

es decir:

$$\dot{A}_i^a(x) = \Pi_a^i(x) - \frac{1}{m^2} D_i^{ae}(x) D_l^{eb}(x) \Pi_b^l(x). \tag{3.141}$$



de tal manera que:

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_a^i(x) = & \frac{g}{m^2} f^{aec} \Pi_c^i(x) \left( D_l^{\epsilon b}(x) \Pi_b^l(x) \right) - m^2 A_i^a(x) \\ & + D_k^{ad}(x) F_{ki}^d(x). \end{aligned} \quad (3.142)$$

# Bibliografía

- [1] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics*, Vol. 169, Springer, New York, 1982.
- [2] A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Introductory real analysis*, Dover Publications, New York, 1975.
- [3] P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **2**, 129 (1950).  
P. A. M. Dirac, *Can. J. Math.* **3**, 1 (1951).  
P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 236 (1958).  
P. A. M. Dirac, *Proc. Roy. Soc.* **A246**, 333 (1958).  
P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.
- [4] P. G. Bergmann and J. H. M. Brunnings, *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 480 (1949).  
P. G. Bergmann, R. Penfield, R. Schiller and H. Zatzkis, *Phys. Rev.*, **80**, 81 (1950).  
P. G. Bergmann and R. Schiller, *Phys. Rev.*, **89**, 4 (1953).  
P. G. Bergmann and I. Goldberg, *Phys. Rev.*, **98**, 531 (1955).  
P. G. Bergmann, *Nuovo Cim.*, **3**, 1177 (1956).  
P. G. Bergmann, I. Goldberg, A. Janis and E. Newman, *Phys. Rev.*, **103**, 807 (1956).  
P. G. Bergmann, *Rev. Mod. Phys.*, **33**, 510 (1961).

- P. G. Bergmann, *Phys. Rev.*, **144**, 1078 (1966).
- [5] E. C. G. Sudarshan and N. Mukunda, *Classical Dynamics: A Modern Perspective*, Wiley, New York, 1974.
- [6] A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1976.
- [7] C. Teitelboim, *Ann. of Phys.*, **79**, 542 (1973).
- [8] H. O. Girotti, *V<sup>th</sup> Summer School Jorge Andre Swieca, Section: Particles and Fields. Campos de Jordão, SP, Brazil, (1989)*, pp. 1.
- [9] M. E. V. Costa, H. Girotti and T. J. S. Simões, *Phys. Rev.*, **D32**, 405 (1985).
- [10] F. A. Berezin, *The Method of Second Quantization*, Academic Press, New York, 1966.
- F. A. Berezin, *Introduction to Superanalysis, Series Mathematical Physics and Applied Mathematics, Vol. D*, Reidel Publishing Company, 1987.
- [11] R. Casalbouni, *Nuovo Cim.* **33A**, 115 (1976).
- R. Casalbouni, *Nuovo Cim.* **33A**, 389 (1976).
- [12] D. M. Gitman and I. V. Tyutin, *Quantization of Fields with Constraints*, Springer-Verlag, 1990.
- [13] P. Senjanovic, *Ann. of Phys.*, **100**, 227 (1976).
- [14] M. Henneux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, New Jersey, 1992.
- [15] C. A. Galvão and B. M. Pimentel, *Can. J. Phys.* **66**, 460 (1988).
- [16] S. A. Gogilidze, A. M. Khvedelidze and V. N. Pervushin, hep-th/9504154.

# Capítulo 4

## Método de Faddeev-Jackiw

Estudiaremos un formalismo alternativo al método de Dirac para sistemas con vínculos el cual fue desarrollado por Faddeev-Jackiw [1]. Éste método es aplicado a Lagrangianos de primer orden en la derivadas temporales y se fundamenta en la estructura simpléctica geométrica haciendo uso del teorema de Darboux [2] el cual permitirá obtener los paréntesis generalizados y el Hamiltonianos sin necesidad de seguir a rigor la formulación de Dirac [3].

Existen varias características que se resaltan en el formalismo de Faddeev-Jackiw en relación al método de Dirac. La primera, surge del carácter lineal en las velocidades  $\dot{\xi}^i$  con lo cual el Lagrangiano deberá ser escrito de la forma:

$$L(\xi^i, \dot{\xi}^i) = f_i(\xi) \dot{\xi}^i + C. \quad (4.1)$$

De la definición del momento canónico  $\pi_i$  asociado a la variable  $\xi^i$  se determina que

$$\pi_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} = f_i(\xi), \quad (4.2)$$

de donde se resalta que no es posible expresar las velocidades  $\dot{\xi}^i$  en fun-

ción de los momentos  $\pi_i$ . La relación (4.2) en el método de Dirac se considera como vínculos, sin embargo, en el formalismo de Faddeev-Jackiw esta interpretación ya no es introducida.

El formalismo de Faddeev-Jackiw es un método Lagrangiano, de esta manera, introduzcamos algunos elementos que serán utilizados para el desarrollo de éste capítulo. Consideremos un sistema físico descrito por un número finito  $N$  de grados de libertad donde la dinámica se deriva de una acción  $A[q_i]$  que escrita en términos del Lagrangiano  $L(q_i, \dot{q}_i)$  se expresa como,

$$A[q_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i) \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.3)$$

El principio de Hamilton establece que el movimiento real descrito por el sistema será aquel que minimiza la acción, es decir  $\delta A[q_i] = 0$ . De esta manera, las trayectorias que tornan un extremo (4.3) deberán ser solución del siguiente sistema de ecuaciones,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.4)$$

que son las ecuaciones de Euler-Lagrange y determinarán la dinámica del sistema. El Lagrangiano  $L(q_i, \dot{q}_i)$  describe el movimiento del sistema en el espacio de configuración  $(q_i, \dot{q}_i)$ , de igual manera, es posible establecer una formulación equivalente según la cual la dinámica será gobernada por una nueva función  $H(q_i, p_i)$  conocida como Hamiltoniano y que dependerá las coordenadas generalizadas  $q_i$  y de los momentos canónicos conjugados  $p_i$  asociados a dichas coordenadas los cuales son definidos de la siguiente manera:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (4.5)$$

Asumiendo, inicialmente, que el Lagrangiano que describe el sistema no es singular, a partir de (4.5) es posible expresar las velocidades generalizadas  $\dot{q}_i$  en términos de  $(q_i, p_i)$ , de tal manera que se deducen el siguiente

sistema de relaciones:

$$\dot{q}_i = g_i(q, p). \quad (4.6)$$

Cuando este ocurre, se puede conectar el Lagrangiano  $L(q_i, \dot{q}_i)$  con el Hamiltoniano  $H(q_i, p_i)$  a partir de la siguiente transformación de Legendre

$$H(q_i, p_i) = p_i \dot{q}_i - L(q_i, \dot{q}_i)|_{\dot{q}_i=g_i(q,p)}, \quad (4.7)$$

de donde se puede mostrar que el lado derecho es independiente de las velocidades generalizadas. De la relación (4.6) y (4.7) se puede deducir que el Lagrangiano se puede expresar como

$$L_C(q_i, p_i) \equiv L(q_i, \dot{q}_i)|_{\dot{q}_i=g_i(q,p)} = p_i \dot{q}_i - H(q_i, p_i), \quad (4.8)$$

donde  $L_C(q_i, p_i)$  es denominado como Lagrangiano canónico y a diferencia de  $L(q_i, \dot{q}_i)$ ,  $L_C(q_i, p_i)$  esta definido en el espacio de fase  $(q_i, p_i)$ . La principal diferencia que existe entre estas dos cantidades es el hecho que mientras  $L(q_i, \dot{q}_i)$  determina las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange, de  $L_C(q_i, p_i)$  se derivan las ecuaciones de Hamilton [4].

La ventaja de expresar el Lagrangiano en su forma canónica es el hecho de que se puede expresar un Lagrangiano de cualquier orden en las velocidades en un Lagrangiano lineal en las mismas lo que permitirá desarrollar el método de Faddeev-Jackiw pues esta formulación, como destacamos, se aplica a Lagrangianos de primer orden.

## 4.1. Formalismo de Faddeev-Jackiw sin Vínculos

Se identificara con  $\xi^i$  cualquiera de las  $2n$  variables canónicas  $(q_i, p_i)$  que definen el espacio de fase, tal que:

$$\begin{aligned} \xi^1 &= q_1, & \xi^2 &= q_2, & \dots, & \xi^n &= q_n \\ \xi^{n+1} &= p_1, & \xi^{n+2} &= p_2, & \dots, & \xi^{2n} &= p_n \end{aligned} \quad (4.9)$$

de tal manera que

$$\xi^i = (q_1, q_2, \dots, q_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad , \quad i = 1, 2, 3, \dots, N = 2n \quad (4.10)$$

No necesariamente existirá una correspondencia entre  $\xi^i = q_i$  con cada  $\xi^j = p_j$ , es decir, no siempre existirá para cada variable  $q_i$  su correspondiente momento canónico  $p_i$ , de esta manera,  $N$  no es por lo general un número par a menos que dicha correspondencia exista. Por lo tanto, de ahora en adelante la formulación y descripción del sistema será realizada en términos de la variable  $\xi^i$  que se conocen como *variables simpléticas*.

Consideremos un Lagrangiano de primer orden, es decir, lineal en  $\dot{\xi}^i$  que en forma general se expresará de la siguiente forma,

$$L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) = a_i(\xi) \dot{\xi}^i - V(\xi), \quad (4.11)$$

donde  $a_i(\xi)$  se conocen como las componentes de la *uno forma canónica*  $a(\xi) = a_i(\xi) d\xi^i$  y  $V(\xi)$  se lo define como el *potencial simplético*. Esta representación de la teoría se conoce en la literatura como *no estándar* ya que, como posteriormente observaremos, las ecuaciones de movimiento no involucrarán aceleraciones. Una característica de las componentes de la *uno forma canónica*, es el hecho de que si  $a_i(\xi)$  se modifica por la derivada de una función arbitraria  $g(\xi)$  que depende únicamente de las variables simpléticas  $\xi^i$ , es decir,

$$a_i(\xi) \rightarrow a'_i(\xi) = a_i(\xi) + \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi^i}, \quad (4.12a)$$

esto no modificara las ecuaciones de movimiento. Con el fin de probar la anterior afirmación, escribamos

$$\begin{aligned} L^{(0)'}(\xi, \dot{\xi}) &= a'_i(\xi) \dot{\xi}^i - V(\xi) = \left[ a_i(\xi) + \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi^i} \right] \dot{\xi}^i - V(\xi) \\ &= \left[ a_i(\xi) \dot{\xi}^i - V(\xi) \right] + \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^i \\ &= L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) + \frac{\partial g(\xi)}{\partial \xi^i} \frac{d\xi^i}{dt} = L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) + \frac{dg(\xi)}{dt}. \end{aligned}$$

Debido a que los Lagrangianos  $L^{(0)'}(\xi, \dot{\xi})$  y  $L^{(0)}(\xi, \dot{\xi})$  se diferencian a penas en la derivada total de la función  $g(\xi)$ , se sabe que son equivalentes, esto quiere decir, que ellos generarán las mismas ecuaciones de movimiento.

Es posible observar que el Hamiltoniano definido a partir de una transformación de Legendre del Lagrangiano  $L^{(0)}(\xi, \dot{\xi})$ , es decir,

$$H^{(0)} = \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \dot{\xi}^i} \dot{\xi}^i - L^{(0)}, \quad (4.13)$$

dependerá únicamente de la variables simpléticas  $\xi$  y no de  $\dot{\xi}$  ya que

$$\begin{aligned} H^{(0)} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}^i} \dot{\xi}^i - L = \dot{\xi}^i \frac{\partial}{\partial \dot{\xi}^i} [a_j(\xi) \dot{\xi}^j - V(\xi)] - [a_i(\xi) \dot{\xi}^i - V(\xi)] \\ &= \dot{\xi}^i a_j(\xi) \frac{\partial \dot{\xi}^j}{\partial \dot{\xi}^i} - a_i(\xi) \dot{\xi}^i + V(\xi) = \dot{\xi}^i a_j(\xi) \delta_i^j - a_i(\xi) \dot{\xi}^i + V(\xi) \\ &= V(\xi) = H^{(0)}(\xi). \end{aligned}$$

Así, se deduce que el Hamiltoniano es exactamente el potencial simplético con lo cual (4.11) se escribe,

$$L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) = a_i(\xi) \dot{\xi}^i - H^{(0)}(\xi), \quad (4.14)$$

De (4.14) se puede derivar las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L^{(0)}}{\partial \xi^i} = \frac{\partial a_j(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^j - \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i}, \quad \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \dot{\xi}^i} = a_i(\xi),$$

de manera que,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \xi^i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L^{(0)}}{\partial \dot{\xi}^i} &= \frac{\partial a_j(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^j - \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{d}{dt} a_i(\xi) \\ &= \frac{\partial a_j(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^j - \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i(\xi)}{\partial \xi^j} \dot{\xi}^j \\ &= \left( \frac{\partial a_j(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i(\xi)}{\partial \xi^j} \right) \dot{\xi}^j - \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i} = 0. \end{aligned}$$

Definiendo

$$f_{ij}(\xi) = \frac{\partial a_j(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i(\xi)}{\partial \xi^j} = -f_{ji}(\xi), \quad (4.15)$$

las ecuaciones de movimiento se expresan como,

$$f_{ij}(\xi) \dot{\xi}^j = \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i}. \quad (4.16)$$

Calculando la derivada exterior de la uno forma canónica  $a(\xi) = a_i(\xi) d\xi^i$  se determina que,

$$f(\xi) \equiv da(\xi) = \left( \frac{\partial a_j(\xi)}{\partial \xi^i} - \frac{\partial a_i(\xi)}{\partial \xi^j} \right) d\xi^i \wedge d\xi^j = f_{ij} d\xi^i \wedge d\xi^j, \quad (4.17)$$

donde  $f(\xi)$  se denomina la dos forma canónica con  $f_{ij}$  representando sus componentes y que de ahora en adelante identificaremos como la matriz simplética.

Un análisis de la ecuación (4.16) permitirá establecer dos casos:

- $\det f_{ij} \neq 0$ . Este caso identificará a los sistemas regulares.
- $\det f_{ij} = 0$ . Se asocia a sistemas singulares, es decir con vínculos.

Consideremos en primer lugar los sistemas regulares, si multiplicamos la ecuación (4.16) por  $f^{ij}$ , que denota la inversa de  $f_{ij}$ , se obtendrá:

$$\dot{\xi}^i = f^{ij} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^j} \quad (4.18)$$

Ahora, teniendo en cuenta que la variable simplética  $\xi^i$  esta asociada a las coordenadas del espacio de fase  $(q_i, p_i)$ , la evolución temporal de la misma es dada a partir de las ecuaciones de Hamilton que en términos de los paréntesis de Poisson se expresa como:

$$\dot{\xi}^i = \{\xi^i, H^{(0)}(\xi)\} = \{\xi^i, \xi^j\} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^j}. \quad (4.19)$$

Comparando las relaciones (4.18) y (4.19) se deduce,

$$\{\xi^i, \xi^j\} = f^{ij}. \quad (4.20)$$

Para el caso de un sistema regular, las relaciones (4.20) representarán los paréntesis fundamentales de Poisson entre las variables  $(q_i, p_i)$  del espacio de fase, de esta manera  $f^{ij}$  tendrá la siguiente representación matricial

$$(f^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad  $n \times n$ . Es posible mostrar que en el caso de dos variables dinámicas  $A(\xi)$  y  $B(\xi)$ , los paréntesis de Poisson se expresan de la siguiente manera:

$$\{A(\xi), B(\xi)\} = \frac{\partial A(\xi)}{\partial \xi^i} f^{ij}(\xi) \frac{\partial B(\xi)}{\partial \xi^j}. \quad (4.22)$$

Mostremos que (4.20) satisface las propiedades de los paréntesis de Poisson:

- **Antisimetría:** de (4.20) se obtiene que

$$\{\xi^i, \xi^j\} = f^{ij} = -f^{ji} = -\{\xi^j, \xi^i\}. \quad (4.23)$$

- **Linealidad:** Utilizando (4.19) se deduce que si  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  constantes:

$$\{\xi^i, \alpha_1 \xi^j\} = \alpha_1 \{\xi^i, \xi^j\} = \alpha_1 \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi^k} \delta_k^j = \alpha_1 \{\xi^i, \xi^j\}. \quad (4.24)$$

De igual forma:

$$\begin{aligned} \{\xi^i, \alpha_1 \xi^j + \alpha_2 \xi^j\} &= \alpha_1 \{\xi^i, \xi^j\} \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi^k} + \alpha_2 \{\xi^i, \xi^k\} \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi^k} \\ &= \alpha_1 \{\xi^i, \xi^j\} \delta_k^j + \alpha_2 \{\xi^i, \xi^k\} \delta_k^j \\ &= \alpha_1 \{\xi^i, \xi^j\} + \alpha_2 \{\xi^i, \xi^j\}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

- *Identidad de Jacobi*: Esta relación implica que se deberá cumplir:

$$\mathbf{IJ} \equiv \{\xi^k, \{\xi^i, \xi^j\}\} + \{\xi^i, \{\xi^j, \xi^k\}\} + \{\xi^j, \{\xi^k, \xi^i\}\} = 0. \quad (4.26)$$

En el caso mas general, la inversa de la matriz simpléctica podrá ser función de las variables del espacio de fase, en este caso la expresión (4.20) se escribe en la forma:

$$\{\xi^i, \xi^j\} = f^{ij}(\xi). \quad (4.27)$$

De esta manera, utilizando (4.19) y (4.27) se obtendrá que

$$\begin{aligned} \mathbf{IJ} &= \{\xi^k, f^{ij}(\xi)\} + \{\xi^i, f^{jk}(\xi)\} + \{\xi^j, f^{ki}(\xi)\} \\ &= \{\xi^k, \xi^l\} \frac{\partial f^{ij}(\xi)}{\partial \xi^l} + \{\xi^i, \xi^l\} \frac{\partial f^{jk}(\xi)}{\partial \xi^l} + \{\xi^j, \xi^l\} \frac{\partial f^{ki}(\xi)}{\partial \xi^l} \\ &= f^{kl}(\xi) \frac{\partial f^{ij}(\xi)}{\partial \xi^l} + f^{il}(\xi) \frac{\partial f^{jk}(\xi)}{\partial \xi^l} + f^{jl}(\xi) \frac{\partial f^{ki}(\xi)}{\partial \xi^l} \end{aligned}$$

Sin embargo, teniendo en cuenta que  $f^{ij}(\xi)$  y  $f_{ij}(\xi)$  deben satisfacer la siguiente identidad matricial,

$$f^{ij}(\xi) f_{jk}(\xi) = \delta_k^i, \quad (4.28)$$

se determina que:

$$\frac{\partial f^{ij}(\xi)}{\partial \xi^l} f_{jk}(\xi) + f^{ij}(\xi) \frac{\partial f_{jk}(\xi)}{\partial \xi^l} = 0,$$

de manera que

$$\frac{\partial f^{ij}(\xi)}{\partial \xi^l} f_{jk}(\xi) f^{km}(\xi) = \frac{\partial f^{ij}(\xi)}{\partial \xi^l} \delta_j^m = \frac{\partial f^{im}(\xi)}{\partial \xi^l} = -f^{ij}(\xi) \frac{\partial f_{jk}(\xi)}{\partial \xi^l} f^{km}(\xi),$$

es decir:

$$\frac{\partial f^{im}(\xi)}{\partial \xi^l} = -f^{ij}(\xi) \frac{\partial f_{jk}(\xi)}{\partial \xi^l} f^{km}(\xi). \quad (4.29)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} &= - \left[ f^{kl}(\xi) f^{in}(\xi) \frac{\partial f_{nm}(\xi)}{\partial \xi^l} f^{mj}(\xi) + f^{il}(\xi) f^{jn}(\xi) \frac{\partial f_{nm}(\xi)}{\partial \xi^l} f^{mk}(\xi) \right. \\
 &\quad \left. + f^{jl}(\xi) f^{kn}(\xi) \frac{\partial f_{nm}(\xi)}{\partial \xi^l} f^{mi}(\xi) \right] \\
 &= f^{kl}(\xi) f^{in}(\xi) f^{jm}(\xi) \left[ \frac{\partial f_{nm}(\xi)}{\partial \xi^l} + \frac{\partial f_{ml}(\xi)}{\partial \xi^n} + \frac{\partial f_{ln}(\xi)}{\partial \xi^m} \right]
 \end{aligned}$$

Ahora, de (4.15) se deduce:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{nm}(\xi)}{\partial \xi^l} &= \frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^n} - \frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^m}, \\
 \frac{\partial f_{ml}(\xi)}{\partial \xi^n} &= \frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^m} - \frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^l}, \\
 \frac{\partial f_{ln}(\xi)}{\partial \xi^m} &= \frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^l} - \frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^n}.
 \end{aligned}$$

De esta manera, si las componentes de la uno forma  $a_m(\xi)$  son funciones continuas se cumple que:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I} &= f^{kl}(\xi) f^{in}(\xi) f^{jm}(\xi) \left[ \frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^n} - \frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^m} + \frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^m} - \frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^l} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^l} - \frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^n} \right] \\
 &= f^{kl}(\xi) f^{in}(\xi) f^{jm}(\xi) \left[ \left( \frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^n} - \frac{\partial^2 a_m(\xi)}{\partial \xi^l \partial \xi^n} \right) + \left( \frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^l} - \frac{\partial^2 a_n(\xi)}{\partial \xi^m \partial \xi^l} \right) \right. \\
 &\quad \left. + \left( \frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^m} - \frac{\partial^2 a_l(\xi)}{\partial \xi^n \partial \xi^m} \right) \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

## 4.2. Formalismo de Faddeev-Jackiw con Vínculos

Consideremos el caso cuando la matriz simpléctica, que denotaremos por  $f_{ij}(\xi) \equiv f_{ij}^{(0)}(\xi)$ , es singular [5]. Esto implica que de (4.18) no es posible determinar todas las derivadas temporales de las coordenadas simplécticas. Como consecuencia si  $m$  es el rango de  $f_{ij}^{(0)}(\xi)$ , existen  $m$  ( $m < n$ ) modos ceros  $v_\alpha^{(0)}$  (con  $\alpha = 1, 2, \dots, m$ ) que satisfacen la siguiente relación:

$$v_\alpha^{(0) i} f_{ij}^{(0)}(\xi) = 0. \quad (4.30)$$

Si se multiplica la ecuación de movimiento (4.18) por la izquierda con los vectores  $v_\alpha^{(0) i}$ , es posible mostrar que estas cantidades satisfacen una serie de identidades, es decir:

$$v_\alpha^{(0) i} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i} = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, m, \quad (4.31)$$

que constituye en un conjunto de  $m$  relaciones entre las variables simplécticas. Por tanto, la relación (4.31) indica que  $H^{(0)}(\xi)$  impondrá restricciones específicas sobre las variables de tal manera que se definirán un conjunto de  $m$  vínculos que de ahora en adelante se denotaran por  $\Omega_\alpha^{(0)}(\xi)$ , de tal manera que (4.31) se expresa de la siguiente forma:

$$\Omega_\alpha^{(0)}(\xi) \equiv v_\alpha^{(0) i} \frac{\partial H^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i} = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2, \dots, m. \quad (4.32)$$

Al igual que su contraparte Hamiltoniana, es necesario de que éstas condiciones proporcionen una consistente descripción del sistema. Para tal fin, se deberá exigir que la subvariedad de vínculos definida por  $\Omega_\alpha^{(0)}$  sea estable bajo la evolución temporal del sistema lo cual es garantizado si,

$$\frac{d}{dt} \Omega_\alpha^{(0)}(\xi) = \frac{\partial \Omega_\alpha^{(0)}(\xi)}{\partial \xi^i} \dot{\xi}^i = 0, \quad (4.33)$$

donde se observa que esta relación depende linealmente de la derivada temporal de la variable simpléctica. Ahora, la condición anterior deberá ser incorporada a la parte canónica de la acción original por medio de multiplicadores de Lagrange,  $\lambda^{(0) \alpha}$ , los cuales deberán ser adicionados al conjunto de variables dinámicas originales lo que implicara que se amplié el espacio de configuración. Éste requisito es introducido con el fin de deformar la dos forma simpléctica  $f_{ij}^{(0)}(\xi)$  y tornarla regular. De esta manera, el primer Lagrangiano en el proceso iterativo, que denotaremos por  $L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0) \alpha})$ , se expresará de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0) \alpha}) &= L^{(0)}(\xi, \dot{\xi}) - \lambda^{(0) \alpha} \dot{\Omega}_\alpha^{(0)}(\xi) \\ &= a_i(\xi) \dot{\xi}^i - \lambda^{(0) \alpha} \dot{\Omega}_\alpha^{(0)}(\xi) - H^{(0)}(\xi). \end{aligned}$$

Sin embargo, la última relación podrá ser modificada de la siguiente manera:

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0) \alpha}) = a_i(\xi) \dot{\xi}^i + \Omega_\alpha^{(0)}(\xi) \dot{\lambda}^{(0) \alpha} - H^{(0)}(\xi) - \frac{d}{dt} [\lambda^{(0) \alpha} \Omega_\alpha^{(0)}(\xi)], \quad (4.34)$$

donde el último término no modifica las ecuaciones de movimiento de tal manera que puede ser descartado.

Teniendo en cuenta que se ha extendido el espacio de configuración, podemos definir una nueva variable simpléctica que incluya a los multiplicadores de Lagrange  $\lambda^{(0) \alpha}$ . Ésta nueva variable será definida de la siguiente forma  $\xi^{(1) i} \equiv (\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0) \alpha})$ . En términos de ésta nueva variable el Lagrangiano  $L^{(1)}$ , el cual deberá incorporar los vínculos, se define de la siguiente forma:

$$L^{(1)}(\xi, \dot{\xi}, \lambda^{(0) \alpha}) = a_i^{(1)}(\xi^{(1)}) \dot{\xi}^{(1) i} - H^{(1)}(\xi) \quad (4.35)$$

donde

$$H^{(1)}(\xi) \equiv H^{(0)}(\xi) \Big|_{\Omega_\alpha^{(0)}(\xi)=0} \quad (4.36)$$

La correspondiente dos forma simpléctica expresada en términos del nue-

vo conjunto de variables se define como:

$$f_{ij}^{(1)}(\xi^{(1)}) = \frac{\partial a_j^{(1)}(\xi^{(1)})}{\partial \xi^{(1) i}} - \frac{\partial a_i^{(1)}(\xi^{(1)})}{\partial \xi^{(1) j}}. \quad (4.37)$$

La matriz  $f_{ij}^{(1)}(\xi^{(1)})$  se caracteriza por contener  $f_{ij}^{(0)}(\xi)$  como una submatriz. Por tanto, en cada paso después de incluirlos vínculos, el número de variables simplética, y como consecuencia, la dimensión de la matriz simplética deberá cambiar.

Ahora, si  $\det f_{ij}^{(1)} \neq 0$ , entonces exitosamente se han eliminado los vínculos y se ha obtenido la estructura geométrica básica la cual es dada por la inversa de la dos forma simplética. Sin embargo, en caso contrario, se deberá repetir el procedimiento anteriormente mencionado tantas veces como sea necesario hasta tornar la matriz simplética inversible. En este algoritmo dos posibles resultados se pueden presentar:

- Que después de un cierto número de pasos, es decir  $N$ , la matriz  $f_{ij}^{(N)}$  es inversible. En este caso, la básica estructura geométrica se deduce directamente de los elementos  $(f_{ij}^{(N)})^{-1}$ . Es posible mostrar que ellos coincidirán con los corchetes de Dirac. Si no existe problema en el ordenamiento de los operadores, los conmutadores cuánticos se pueden obtener directamente de la inversa de  $f_{ij}^{(N)}$ . Lo importante que se debe destacar es que muchos de los pasos que se desarrollan en el formalismo de Dirac desaparecen con éste proceso geométrico y para algunos problemas, los paréntesis generalizados se derivan de una manera mas rápida y simple.
- En algunos casos es posible que se llegue a un punto donde la matriz simplética es singular y ningún nuevo vínculo se obtiene de los correspondientes modos cero, es decir, cuando el lado izquierdo de (4.31) desaparece idénticamente. Esto generalmente ocurre cuando se trabaja con teorías que son invariantes por reparametrización o teorías gauge. En este punto, un término de gauge fixing deberá

ser introducido en el potencial simplético

$$H(\xi) \rightarrow \bar{H}(\xi) = H(\xi) + H_{gf}(\xi) \quad (4.38)$$

y se procederá de la misma forma como el algoritmo lo menciona. La matriz simplética llegara a ser inversible con la introducción de  $H_{gf}(\xi)$ .

En éste formalismo se debe destacar que los vínculos pueden ser siempre considerados como relaciones fuertes en la parte del potencial simplético de Lagrangiano. De (4.31) se puede observar que los vínculos ya están incorporados en el potencial. Esto difiere significativamente de la formulación de Dirac donde la noción de igualdades fuertes y débiles deben ser introducidas ya que los vínculos son inconsistentes con los paréntesis de poisson originales.

### 4.3. Formalismo de Faddeev-Jackiw en Teoría de campos

Se introducirá la formulación de Faddeev-Jackiw en teoría de campos [6]. La mas general acción conteniendo derivadas de primer orden en los campos es definida por una densidad Lagrangiana expresada en términos de dos funciones arbitrarias de los campos:  $[K_A(\varphi^A), V(\varphi^A)]$ , tal que

$$L^{(0)}(\varphi^A, \dot{\varphi}^A) = \dot{\varphi}^A K_A(\varphi^A) - V(\varphi^A). \quad (4.39)$$

Las funcionales  $K_A(\varphi^A)$  son componentes de la una forma canónica  $K(\varphi^A) = K_A(\varphi^A) d\varphi^A$ , en cuanto que la funcional  $V(\varphi^A)$  se identifica con el potencial simplético. El índice  $A$  correrá sobre los diferentes rangos del conjunto completo de variables de campo que incluirá: el conjunto original de campos mas un conjunto de campos auxiliares necesarios para transformar el Lagrangiano que describe el sistema en una cantidad de primer

orden en las derivadas temporales, es decir, en la forma (4.39). El conjunto de variables  $\varphi^A$  definirán el espacio de configuración extendido asociado al sistema.

Las ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\frac{\delta L}{\delta \varphi^A} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^A} = 0,$$

para el Lagrangiano (4.39) se determina:

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \varphi^A} &= \frac{\delta K_B(\varphi)}{\delta \varphi^A} \dot{\varphi}^B - \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A}, \\ \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^A} &= K_B(\varphi) \frac{\delta \dot{\varphi}^B}{\delta \dot{\varphi}^A} = K_A(\varphi) \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} \frac{\delta L}{\delta \varphi^A} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\delta L}{\delta \dot{\varphi}^A} &= \frac{\delta K_B(\varphi)}{\delta \varphi^A} \dot{\varphi}^B - \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A} - \frac{\partial}{\partial t} K_A(\varphi) \\ &= \frac{\delta K_B(\varphi)}{\delta \varphi^A} \dot{\varphi}^B - \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A} - \frac{\delta K_A(\varphi)}{\delta \varphi^B} \dot{\varphi}^B \\ &= \left( \frac{\delta K_B(\varphi)}{\delta \varphi^A} - \frac{\delta K_A(\varphi)}{\delta \varphi^B} \right) \dot{\varphi}^B - \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A} = 0 \end{aligned}$$

que finalmente se expresa en la forma:

$$M_{AB}(\varphi) \dot{\varphi}^B = \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A}. \quad (4.40)$$

donde  $M_{AB}(\varphi)$  indica los elementos de la matriz simpléctica que son componentes de la dos forma  $M(\varphi) = dK(\varphi)$ , que es la derivada exterior de la una forma canónica  $K(\varphi)$  escrita como un rotor generalizado construido con las derivadas funcionales:

$$M_{AB}(\varphi) = M_{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B(\mathbf{y})}{\delta \varphi^A(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A(\mathbf{x})}{\delta \varphi^B(\mathbf{y})}, \quad (4.41)$$

Cuando la matriz simplética  $M_{AB}$  no es singular, de la ecuación de movimiento (4.40) se puede deducir que

$$\dot{\varphi}^A(\mathbf{x}) = \int d^3y [M^{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^{-1} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^B(\mathbf{y})}. \quad (4.42)$$

Ahora, el potencial simplético coincidirá con el Hamiltoniano el cual se puede expresar en términos de una densidad Hamiltoniana  $\mathcal{H}(\varphi)$  en la forma,

$$V(\varphi) = \int d^3x \mathcal{H}(\varphi). \quad (4.43)$$

La ecuación (4.42) escrita en término de corchetes de Poisson asociado al sistema se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^A(\mathbf{x}) &= \{\varphi^A(\mathbf{x}), V(\varphi)\} = \int d^3y \{\varphi^A(\mathbf{x}), \varphi^B(\mathbf{y})\} \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^B(\mathbf{y})} \\ &= \int d^3y [M^{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^{-1} \frac{\delta V}{\delta \varphi^B(\mathbf{y})}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

a partir del cual se puede deducir que,

$$\{\varphi^A(\mathbf{x}), \varphi^B(\mathbf{y})\} = [M^{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y})]^{-1}, \quad (4.45)$$

que son los corchetes generalizados del formalismo de Faddeev-Jackiw para teoría de campos. Los elementos de  $(M^{AB})^{-1}$  corresponderán a los corchetes de Dirac de la teoría.

La transición a una teoría cuántica es obtenida de la manera usual según la cual se reemplazan los campos clásicos por operadores de campo cuántico que actúan sobre un espacio de Hilbert. Por lo tanto, en este caso los métodos de Faddeev-Jackiw y de Dirac serán equivalentes. Sin embargo, si la teoría es invariante de gauge, además de los verdaderos grados de libertad también habrá grados gauge de libertad y como consecuencia surgirán vínculos de primera clase lo que implicará que la matriz  $M_{AB}$  sea singular.

En el formalismo de Faddeev-Jackiw los vínculos aparecen como relaciones algebraicas las cuales deberán ser necesarias con el fin de garantizar la consistencia de las ecuaciones de campo. En el caso que existan  $m$  ( $m < n$ ) (siendo  $n$  el número de variables de campo) modos ceros  $v_{(\alpha)}^A(\mathbf{x})$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, m$ ) de la matriz  $M_{AB}$ , se satisface la siguiente ecuación,

$$\int d^3x v_{(\alpha)}^A(\mathbf{x}) M_{AB}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (4.46)$$

Como consecuencia de las ecuaciones de movimiento (4.40) y de (4.46) se obtiene el siguiente conjunto de  $m$  vínculos en el formalismo de Faddeev-Jackiw:

$$\begin{aligned} \Omega_{(\alpha)} &\equiv \int d^3x v_{(\alpha)}^A(\mathbf{x}) \frac{\delta V(\varphi)}{\delta \varphi^A(\mathbf{x})} \\ &= \int d^3x v_{(\alpha)}^A(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \varphi^A(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}(\varphi), \quad \alpha = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Las cantidades  $\Omega_{(\alpha)}$  son introducidas en el Lagrangiano usando multiplicadores de Lagrange  $\Lambda^{(\alpha)}$  de manera conveniente

$$L^{(1)}(\varphi, \dot{\varphi}) = \dot{\varphi}^i K_i(\varphi) - \Lambda^{(\alpha)} \Omega_{(\alpha)} - V(\varphi) \quad (4.48)$$

lo que definirá el primer Lagrangiano en el proceso de iteración. En la ecuación (4.48) se ha asumido que  $\varphi^i(\mathbf{x})$  representa algún campo que pertenece al conjunto simplético, de tal manera que la submatriz  $\bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  de la matriz (4.41) no es singular. Si se redefine la variable  $\Lambda^{(\alpha)}$  de la siguiente manera

$$\Lambda^{(\alpha)} \rightarrow -\zeta,$$

se puede expresar  $L^{(1)}$  en la forma:

$$L^{(1)} = \dot{\varphi}^i K_i(\varphi) + \zeta \Omega_{(\alpha)} - V(\varphi) \quad (4.49)$$

En este punto el algoritmo simplético se aplica nuevamente usando el hecho de que ahora se ha expandido el espacio de configuración

al conjunto de variables  $\xi^{(A)} = (\varphi^i, \dot{\zeta})$  con lo cual se expresa el primer Lagrangiano iterado en la forma

$$L^{(1)}(\varphi, \dot{\varphi}, \zeta, \dot{\zeta}) = \dot{\varphi}^i K_i(\varphi) + \dot{\zeta} \Omega_{(a)} - V^{(1)}(\varphi), \quad (4.50)$$

donde

$$V^{(1)}(\varphi) = V(\varphi) \Big|_{\Omega_{(a)}=0} \quad (4.51)$$

En término de este nuevo conjunto de variables, la matriz simpléctica se expresa:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B(\mathbf{y})}{\delta \xi^A(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A(\mathbf{x})}{\delta \xi^B(\mathbf{y})}, \quad (4.52)$$

con la siguientes componentes:

$$\begin{aligned} M_{ij}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_j(\mathbf{y})}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_i(\mathbf{x})}{\delta \xi^j(\mathbf{y})} = \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \bar{M}_{ij} \\ M_{i\zeta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_\zeta(\mathbf{y})}{\delta \xi^i(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_i(\mathbf{x})}{\delta \xi^\zeta(\mathbf{y})} = \frac{\delta \Omega_{(a)}(\mathbf{y})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} = \frac{\delta \Omega_{(a)}}{\delta \varphi^i} \\ M_{\zeta i}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\delta K_i(\mathbf{y})}{\delta \xi^\zeta(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_\zeta(\mathbf{x})}{\delta \xi^i(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Omega_{(a)}(\mathbf{x})}{\delta \varphi^i(\mathbf{y})} = -\left(\frac{\delta \Omega_{(a)}}{\delta \varphi^i}\right)^T \\ M_{\zeta\zeta}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0 \end{aligned}$$

de manera que,

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \bar{M}_{ij} & \frac{\delta \Omega_{(a)}}{\delta \varphi^i} \\ -\left(\frac{\delta \Omega_{(a)}}{\delta \varphi^i}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.53)$$

con  $\bar{M}_{ij}$  siendo la matriz cuadrada no singular construida del conjunto simpléctico original de variables de campo  $\varphi^i(\mathbf{x})$ . En la notación  $\frac{\delta \Omega_{(a)}}{\delta \varphi^i}$  representara una matriz rectangular.

En el procedimiento simpléctico se deberá modificar la matriz simpléctica con el fin de eliminar todos los modos cero. Esto implica que el algoritmo deberá ser repetido hasta que ningún nuevo vínculo sea generado. En el caso de que el Lagrangiano describa una teoría gauge, éste algoritmo no será capas de generar una matriz simpléctica inversible. De

esta manera, a fin de obtener los corchetes generalizados, condiciones de gauge deberán ser introducidas.

La inversa  $(M^{AB})^{-1}$  de la matriz simpléctica  $M_{AB}$  deberá satisfacer la condición de ser única. Así, para garantizar este criterio, se deben cumplir las siguientes identidades,

$$\begin{aligned} \int d^3z M_{AC}(\mathbf{x}, z)(M^{CB})^{-1}(z, \mathbf{y}) &= \delta_A^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ \int d^3z (M^{AC})^{-1}(\mathbf{x}, z)M_{CB}(z, \mathbf{y}) &= \delta_B^A \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Definiendo la inversa de la matriz simpléctica por las siguiente componentes,

$$(M^{AB})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} A^{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & B^{j\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ C^{\beta k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & G^{\beta\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

del sistema de ecuaciones (4.54) se deduce que,

$$\begin{aligned} &\int d^3z M_{AC}(\mathbf{x}, z)(M^{CB})^{-1}(z, \mathbf{y}) = \\ &= \int d^3z \begin{pmatrix} \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, z) & \frac{\delta\Omega_{(a)}(z)}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} \\ -\frac{\delta\Omega_{(a)}(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(z)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{jk}(z, \mathbf{y}) & B^{j\rho}(z, \mathbf{y}) \\ C^{\alpha k}(z, \mathbf{y}) & G^{\alpha\rho}(z, \mathbf{y}) \end{pmatrix} \\ &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{I}$  es la submatriz identidad asociada al espacio definida por  $\bar{M}_{ij}$ . De la anterior expresión se obtiene el siguiente conjunto de relaciones,

$$\int d^3z \left[ \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, z) A^{jk}(z, \mathbf{y}) + \frac{\delta\Omega_{(a)}(z)}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} C^{\alpha k}(z, \mathbf{y}) \right] = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.55)$$

$$\int d^3z \left[ \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, z) B^{j\rho}(z, \mathbf{y}) + \frac{\delta\Omega_{(a)}(z)}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} G^{\alpha\rho}(z, \mathbf{y}) \right] = 0 \quad (4.56)$$

$$-\int d^3z \frac{\delta\Omega_{(a)}(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(z)} A^{jk}(z, \mathbf{y}) = 0 \quad (4.57)$$

$$-\int d^3z \frac{\delta\Omega_{(a)}(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(z)} B^{j\rho}(z, \mathbf{y}) = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.58)$$

Usando el hecho que la inversa de una matriz antisimétrica debe ser antisimétrica se deberá cumplir que,

$$B^{j\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -C^{\rho j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}). \quad (4.59)$$

De la ecuación (4.56) se determina que,

$$\int d^3 z \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = - \int d^3 z \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}).$$

Recordando que la matriz  $\bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  no es singular, si multiplicamos la anterior relación por su inversa  $(\bar{M}^{ij})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  se obtendrá que:

$$\begin{aligned} & \int d^3 x (\bar{M}^{ki})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \int d^3 z \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \\ & = \int d^3 z \left[ \int d^3 x (\bar{M}^{ki})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right] B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ & = \int d^3 z \delta_j^k \delta^3(\mathbf{v} - \mathbf{z}) B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = B^{k\rho}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) \\ & = - \int d^3 x \int d^3 z (\bar{M}^{ki})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^i(\mathbf{x})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

de tal manera que se determina la siguiente componente:

$$B^{j\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -C^{\rho j}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = - \int d^3 v \int d^3 z (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^k(\mathbf{v})} G^{\alpha\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \quad (4.60)$$

Ahora, de la relación (4.58) se determina que

$$\begin{aligned} - \int d^3 z \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta \varphi^j(\mathbf{z})} B^{j\rho}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) & = \int d^3 z \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta \varphi^j(\mathbf{z})} \int d^3 v \int d^3 u (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \\ & \quad \frac{\delta \Omega_{(\beta)}(\mathbf{u})}{\delta \varphi^k(\mathbf{v})} G^{\beta\rho}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ & = \int d^3 u \left[ \int d^3 z \int d^3 v \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{x})}{\delta \varphi^j(\mathbf{z})} (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) \frac{\delta \Omega_{(\beta)}(\mathbf{u})}{\delta \varphi^k(\mathbf{v})} \right] \\ & \quad G^{\beta\rho}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \\ & = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Definiendo

$$\int d^3u d^3v \frac{\delta\Omega_{(a)}(\mathbf{x})}{\delta\varphi^j(\mathbf{u})} (\bar{M}^{jk})^{-1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \frac{\delta\Omega_{(\beta)}(\mathbf{y})}{\delta\varphi^k(\mathbf{v})} \equiv \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (4.61)$$

se determina que se debe cumplir la siguiente identidad:

$$\int d^3u \Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) G^{\beta\rho}(\mathbf{u}, \mathbf{y}) = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.62)$$

Finalmente, de la ecuación (4.55) se obtiene:

$$\int d^3z \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int d^3z \frac{\delta\Omega_{(a)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} G^{ak}(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

multiplicando nuevamente por  $(\bar{M}^{ij})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  se determina que

$$\begin{aligned} & \int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \int d^3z \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \\ &= \int d^3z \left[ \int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \right] A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ &= \int d^3z \delta_j^l \delta^3(\mathbf{v} - \mathbf{z}) A^{jk}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = A^{lk}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) \\ &= \int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \delta_i^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \\ & \quad \int d^3z \frac{\delta\Omega_{(a)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} G^{ak}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) \\ &= (\bar{M}^{lk})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) + \int d^3x d^3z (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \frac{\delta\Omega_{(a)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} B^{ka}(\mathbf{y}, \mathbf{z}) \\ &= (\bar{M}^{lk})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) - \int d^3x d^3z (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \frac{\delta\Omega_{(a)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} \\ & \quad \left[ \int d^3w d^3u (\bar{M}^{km})^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \frac{\delta\Omega_{(\sigma)}(\mathbf{u})}{\delta\varphi^m(\mathbf{w})} G^{\sigma\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \right] \\ &= (\bar{M}^{lk})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{y}) - \int d^3z d^3u \left[ \int d^3x (\bar{M}^{li})^{-1}(\mathbf{v}, \mathbf{x}) \frac{\delta\Omega_{(a)}(\mathbf{z})}{\delta\varphi^i(\mathbf{x})} \right] \\ & \quad \left[ \int d^3w (\bar{M}^{km})^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \frac{\delta\Omega_{(\sigma)}(\mathbf{u})}{\delta\varphi^m(\mathbf{w})} \right] G^{\sigma\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \end{aligned}$$

de manera que la última componente es dada por:

$$A^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\bar{M}^{ij})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int d^3z d^3u \left[ \int d^3v (\bar{M}^{ik})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^k(\mathbf{v})} \right] \left[ \int d^3w (\bar{M}^{jm})^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \frac{\delta \Omega_{(\sigma)}(\mathbf{u})}{\delta \varphi^m(\mathbf{w})} \right] G^{\sigma\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{z}). \quad (4.63)$$

Lo anterior, permite concluir que los corchetes generalizados entre las variables de campo simpléticas originales  $\varphi^i(\mathbf{x})$  es dada por

$$\left\{ \varphi^i(\mathbf{x}), \varphi^j(\mathbf{y}) \right\} = A^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\bar{M}^{ij})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \int d^3z d^3u \left[ \int d^3v (\bar{M}^{ik})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \frac{\delta \Omega_{(\alpha)}(\mathbf{z})}{\delta \varphi^k(\mathbf{v})} \right] \left[ \int d^3w (\bar{M}^{jm})^{-1}(\mathbf{y}, \mathbf{w}) \frac{\delta \Omega_{(\sigma)}(\mathbf{u})}{\delta \varphi^m(\mathbf{w})} \right] G^{\sigma\alpha}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \quad (4.64)$$

Las relaciones anteriores garantizan que los corchetes generalizados de Faddeev-Jackiw pueden ser calculados solo si  $\Phi_{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  y  $\bar{M}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  son inversibles. De esta manera, toda la manipulación algebraica se reduce a calcular las matrices  $(\bar{M}^{ij})^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  y  $G^{\alpha\beta}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ .

## 4.4. Ejemplos

### Partícula puntual no relativista moviéndose sobre una $N - 1$ esfera

Considérese una partícula puntual no relativista que se mueve sobre la superficie de una  $(N - 1)$  esfera de longitud unidad sumergida en un espacio  $N$  dimensional. Este ejemplo se caracteriza por ser un sistema que posee vínculos hasta de 4 nivel cuando se analiza en la formulación de Dirac. La función de Lagrange del modelo es descrito por:

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 + \frac{\lambda}{2} (q^2 - 1) = \frac{1}{2} \dot{q}_k \dot{q}_k + \frac{\lambda}{2} (q_k q_k - 1), \quad (4.65)$$

donde  $q \equiv (q_1, q_2, \dots, q_N)$  son las coordenadas de la partícula y  $N$  la dimensión del espacio. Con el fin de linealizar el Lagrangiano, se introducirá el momento canónico  $p_k$  definido por:

$$p_k \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} = \dot{q}_k, \quad (4.66)$$

de esta manera se tendrá que,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{q}_k \dot{q}_k &= \frac{1}{2} p_k p_k = p_k \dot{q}_k - p_k \dot{q}_k + \frac{1}{2} p_k p_k \\ &= p_k \dot{q}_k - p_k p_k + \frac{1}{2} p_k p_k \\ &= p_k \dot{q}_k - \frac{1}{2} p_k p_k, \end{aligned}$$

De esta manera si interpretamos a  $p_k$  como una variable auxiliar, podemos linealizar el Lagrangiano realizando el cambio  $\frac{1}{2} \dot{q}_k \dot{q}_k \rightarrow p_k \dot{q}_k - \frac{1}{2} p_k p_k$ , de tal manera que nos permitirá ampliar el espacio de configuración incluyendo las variables  $(q_k, p_k)$ . Así, el Lagrangiano de primer orden llega a ser:

$$L^{(0)} = p_k \dot{q}_k - \frac{1}{2} p_k p_k + \frac{\lambda}{2} (q_k q_k - 1). \quad (4.67)$$

La variable  $\lambda$  se la identifica con el multiplicador de Lagrange que se debe considerar dentro de las variables del espacio de configuración. Por lo tanto, la variable simpléctica que define el espacio de configuración es definida por las siguientes componentes:  $\xi_k^{(0)} = (q_k, p_k, \lambda)$ , de esta manera, la matriz simpléctica se construye de la siguiente forma:

$$f_{ij}^{(0)} = \frac{\partial a_j^{(0)}}{\partial \xi_i^{(0)}} - \frac{\partial a_i^{(0)}}{\partial \xi_j^{(0)}}. \quad (4.68)$$

Con el fin de identificar  $a_j^{(0)}$ , el Lagrangiano (4.67) tendrá que ser expresado en la forma:

$$L^{(0)} = a_i^{(0)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(0)} - H(\xi). \quad (4.69)$$

Entonces,

$$\xi_q^{(0)} \rightarrow q_k \quad , \quad \xi_p^{(0)} \rightarrow p_k \quad , \quad \xi_\lambda^{(0)} \rightarrow \lambda, \quad (4.70)$$

se deduce que al comparar (4.67) y (4.69) que:

$$a_q^{(0)} \rightarrow p_k \quad , \quad a_p^{(0)} \rightarrow 0 \quad , \quad a_\lambda^{(0)} \rightarrow 0, \quad (4.71)$$

con lo cual podemos deducir los elementos de la matriz  $f_{ij}^{(0)}$ . Siendo que esta cantidad es antisimétrica, solo tres elementos son independientes y son necesarios calcular, ellos son:

$$\begin{aligned} f_{qp}^{(0)} &= \frac{\partial a_p^{(0)}}{\partial \xi_q^{(0)}} - \frac{\partial a_q^{(0)}}{\partial \xi_p^{(0)}} = -\frac{\partial p_k}{\partial p_l} = -\delta_{kl}, \\ f_{q\lambda}^{(0)} &= \frac{\partial a_\lambda^{(0)}}{\partial \xi_q^{(0)}} - \frac{\partial a_q^{(0)}}{\partial \xi_\lambda^{(0)}} = -\frac{\partial p_k}{\partial \lambda} = 0, \\ f_{p\lambda}^{(0)} &= \frac{\partial a_\lambda^{(0)}}{\partial \xi_p^{(0)}} - \frac{\partial a_p^{(0)}}{\partial \xi_\lambda^{(0)}} = 0. \end{aligned}$$

De esta manera, la matriz  $f^{(0)}$  se expresa como:

$$f_{ij}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{ij} & 0 \\ \delta_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Fácilmente se puede observar que esta matriz es singular y por ende tendrá un modo cero dado por:

$$\tilde{v}_i^{(0)} \equiv \left( \tilde{v}_q^{(0)} \quad \tilde{v}_p^{(0)} \quad \tilde{v}_\lambda^{(0)} \right) = \left( 0 \quad 0 \quad 1 \right). \quad (4.73)$$

Esta elemento va a general el siguiente vínculo:

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega^{(0)} \equiv \tilde{v}_i^{(0)} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi_i^{(0)}} = \tilde{v}_q^{(0)} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi_q^{(0)}} + \tilde{v}_p^{(0)} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi_p^{(0)}} + \tilde{v}_\lambda^{(0)} \frac{\partial H(\xi)}{\partial \xi_\lambda^{(0)}} \\ &= \frac{\partial H(\xi)}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Ahora, el factor  $H(\xi)$  se deduce de comparar (4.67) y (4.69) resultando ser,

$$H(\xi) = \frac{1}{2} p_k p_k - \frac{\lambda}{2} (q_k q_k - 1). \quad (4.74)$$

De esta manera, se determina que el vínculo tiene la siguiente forma:

$$\Omega^{(0)} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{1}{2} p_k p_k - \frac{\lambda}{2} (q_k q_k - 1) \right) = -\frac{1}{2} (q_k q_k - 1) = 0$$

que lo re expresamos como

$$\Omega^{(0)} = \frac{1}{2} (q_k q_k - 1) = 0 \quad (4.75)$$

Este vínculo tendrá que ser incluido en el sector canónico del Lagrangiano. Para ello, se incluye en la forma  $\alpha \dot{\Omega}^{(0)}$  o  $\dot{\alpha} \Omega^{(0)}$  donde  $\alpha$  es un multiplicador de Lagrange. Sin embargo, es más práctico simplificar reemplazando  $\lambda \rightarrow \dot{\alpha}$ . Este procedimiento solo introduce una derivada temporal, además, hay que tener en cuenta que esta variable es arbitraria. Por tanto, se tendrá que

$$L^{(1)} = p_k \dot{q}_k + \frac{\dot{\alpha}}{2} (q_k q_k - 1) - \frac{1}{2} p_k p_k = a_i^{(1)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(1)} - H^{(1)}(\xi). \quad (4.76)$$

Ahora, podemos considerar que la variable simplética se exprese en la forma  $\xi_k^{(1)} = (q_k, p_k, \alpha)$ , de esta manera, de (4.76) se puede observar que la un forma canónica tendrá las siguientes componentes:

$$a_q^{(1)} \rightarrow p_k \quad , \quad a_p^{(1)} \rightarrow 0 \quad , \quad a_\alpha^{(1)} \rightarrow \frac{1}{2} (q_k q_k - 1), \quad (4.77)$$

con lo que la matriz simplética  $f^{(1)}$ , que se calcula a partir de:

$$f_{ij}^{(1)} = \frac{\partial a_j^{(1)}}{\partial \xi_i^{(1)}} - \frac{\partial a_i^{(1)}}{\partial \xi_j^{(1)}},$$

tendrá la siguiente representación:

$$f_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{kl} & q_k \\ \delta_{kl} & 0 & 0 \\ -q_k & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.78)$$

Se puede observar fácilmente que esta matriz es singular y que tiene un modo cero  $\tilde{v}_i^{(1)}$ , el cual deberá satisfacer:

$$\tilde{v}_i^{(1)} f_{ij}^{(1)} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{kl} & q_k \\ \delta_{kl} & 0 & 0 \\ -q_k & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b\delta_{kl} - cq_k & -a\delta_{kl} & aq_k \end{pmatrix} = 0,$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son elementos a determinar. Por tanto, se debe cumplir las siguientes relaciones:

$$a = 0 \quad , \quad b\delta_{kl} - cq_k = 0$$

El autovector asociado al autovalor cero es:

$$\tilde{v}_i^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & q_k & 1 \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

Este vector cuando se contrae con la ecuación de movimiento genera otro vínculo:

$$0 = \Omega^{(1)} \equiv \tilde{v}_i^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_i^{(0)}}$$

con

$$H^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2} p_k p_k,$$

por lo tanto se determinara que:

$$\begin{aligned} \Omega^{(1)} &= \tilde{v}_i^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_i^{(1)}} = \tilde{v}_q^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_q^{(1)}} + \tilde{v}_p^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_p^{(1)}} + \tilde{v}_\alpha^{(1)} \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \xi_\alpha^{(1)}} \\ &= q_k \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial p_k} + \frac{\partial H^{(1)}(\xi)}{\partial \alpha} = q_k \frac{\partial}{\partial p_k} \left( \frac{1}{2} p_l p_l \right) = q_k p_k = 0 \end{aligned}$$

de tal manera que el nuevo vínculo se escribe en la siguiente forma,

$$\Omega^{(1)} \equiv q_k p_k = 0 \quad (4.80)$$

Nuevamente, este vínculo deberá ser incorporado en la formulación original con el uso de un nuevo multiplicador de Lagrange que denominaremos  $\beta$ . De esta manera, la nueva variable simplética se expresará

como:  $\xi_k^{(2)} = (q_k, p_k, \alpha, \beta)$  y el Lagrangiano de primer orden es:

$$L^{(2)} = p_k \dot{q}_k + \frac{\dot{\alpha}}{2} (q_k q_k - 1) + \dot{\beta} q_k p_k - \frac{1}{2} p_k p_k = a_i^{(2)}(\xi) \dot{\xi}_i^{(2)} - H^{(2)}(\xi), \quad (4.81)$$

con lo que es posible identificar las componentes de la un forma canónica,

$$a_q^{(2)} \rightarrow p_k \quad , \quad a_p^{(2)} \rightarrow 0 \quad , \quad a_\alpha^{(2)} \rightarrow \frac{1}{2} (q_k q_k - 1) \quad , \quad a_\beta^{(2)} \rightarrow q_k p_k.$$

De esta manera, se define la matriz simplética en el siguiente orden de iteración,

$$f_{ij}^{(2)} = \frac{\partial a_j^{(2)}}{\partial \xi_i^{(2)}} - \frac{\partial a_i^{(2)}}{\partial \xi_j^{(2)}},$$

que en forma matricial se representa por: donde las componentes se calculan de la siguiente forma:

$$f_{ij}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_{kl} & q_l & p_l \\ \delta_{kl} & 0 & 0 & q_l \\ -q_l & 0 & 0 & 0 \\ -p_l & -q_l & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.82)$$

Es posible mostrar que ésta matriz es regular y por lo tanto se puede invertir. La inversa de (4.82) es dada por,

$$f_{kl}^{(2)-1} = \begin{pmatrix} 0 & \delta_{kl} - \frac{q_k q_l}{q^2} & -\frac{q_k}{q^2} & 0 \\ -\delta_{kl} + \frac{q_k q_l}{q^2} & \frac{q_k p_l - q_l p_k}{q^2} & \frac{p_k}{q^2} & \frac{q_k}{q^2} \\ \frac{q_l}{q^2} & -\frac{p_l}{q^2} & 0 & -\frac{1}{q^2} \\ 0 & -\frac{q_l}{q^2} & \frac{1}{q^2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.83)$$

Los corchetes generalizados son determinados directamente de ésta inversa, es decir,

$$\{\xi_i^{(2)}, \xi_j^{(2)}\} = f_{kl}^{(2)-1}, \quad (4.84)$$

a partir del cual se puede identificar:

$$\begin{aligned}\{\xi_q^{(2)}, \xi_q^{(2)}\} &= 0, \\ \{\xi_q^{(2)}, \xi_p^{(2)}\} &= \{q_l, p_k\} = \delta_{kl} - \frac{q_k q_l}{q^2}, \\ \{\xi_p^{(2)}, \xi_p^{(2)}\} &= \{p_l, p_k\} = \frac{q_k p_l - q_l p_k}{q^2}.\end{aligned}$$

que coinciden con los corchetes de Dirac reportados en el capítulo anterior. Diferente a lo que ocurre con los cálculos de los corchetes de Dirac, no es necesario invertir la matriz completa para obtener los corchetes generalizados. El procedimiento de cuantización del método de Faddeev-Jackiw se encuentra un vínculo no trivial en cuanto que con el método de Dirac se deducen cuatro.

## Campo de Proca Abeliano

Este tipo de campo es descrito por la siguiente densidad Lagrangiana

$$L^{(0)} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}A_\mu A^\mu. \quad (4.85)$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

Recordando que  $L^{(0)}$  es una expresión de segundo orden en las derivadas temporales, la tornaremos lineal definiendo el momento canónico conjugado el cual es definido por:

$$\Pi^\nu \equiv \frac{\partial L^{(0)}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} = F^{\nu 0}. \quad (4.86)$$

Con este término es posible la densidad Lagrangiana

$$\begin{aligned}
L^{(0)} &= -\frac{1}{4}F_{0k}F^{0k} - \frac{1}{4}F_{k0}F^{k0} - \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl} + \frac{m^2}{2}A_\alpha A^\alpha \\
&= -\frac{1}{2}F_{0k}F^{0k} - \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl} + \frac{m^2}{2}A_0A^0 + \frac{m^2}{2}A_kA^k \\
&= \frac{1}{2}F^{k0}F^{k0} - \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl} + \frac{m^2}{2}A_0A_0 - \frac{m^2}{2}A^kA^k \\
&= \frac{1}{2}\Pi^k\Pi^k - \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl} + \frac{m^2}{2}A_0A_0 - \frac{m^2}{2}A^kA^k.
\end{aligned}$$

Sumando el siguiente cero en la relación anterior

$$\dot{A}_k\Pi^k - \dot{A}_k\Pi^k = \dot{A}_k\Pi^k - \partial_0 A_k\Pi^k.$$

se obtendrá que:

$$L^{(0)} = \dot{A}_k\Pi^k - \partial_0 A_k\Pi^k + \frac{1}{2}\Pi^k\Pi^k - \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl} + \frac{m^2}{2}A_0A_0 - \frac{m^2}{2}A^kA^k.$$

Ahora, teniendo en cuenta que

$$\Pi^k = F^{k0} = F_{0k} = \partial_0 A_k - \partial_k A_0$$

se obtiene que,

$$\begin{aligned}
L^{(0)} &= \dot{A}_k\Pi^k - (\Pi^k + \partial_k A_0)\Pi^k + \frac{1}{2}\Pi^k\Pi^k - \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl} + \frac{m^2}{2}A_0A_0 - \frac{m^2}{2}A^kA^k \\
&= \dot{A}_k\Pi^k - \Pi^k\Pi^k + \frac{1}{2}\Pi^k\Pi^k - \Pi^k\partial_k A_0 - \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl} + \frac{m^2}{2}A_0A_0 - \frac{m^2}{2}A^kA^k \\
&= \dot{A}_k\Pi^k - \frac{1}{2}\Pi^k\Pi^k - \Pi^k\partial_k A_0 - \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl} + \frac{m^2}{2}A_0A_0 - \frac{m^2}{2}A^kA^k
\end{aligned}$$

Integrando por partes el tercer término de la relación anterior e descartando la contribución de frontera se obtendrá:

$$L^{(0)} = \dot{A}_k\Pi^k - \frac{1}{2}\Pi^k\Pi^k + A_0\partial_k\Pi^k - \frac{1}{4}F_{kl}F_{kl} + \frac{m^2}{2}A_0A_0 - \frac{m^2}{2}A^kA^k \quad (4.87)$$

que en forma compacta expresamos

$$L^{(0)} = \dot{A}_k\Pi^k - \mathcal{H}^{(0)} \quad (4.88)$$

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{A}_k \Pi^k - \left[ \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k - A_0 \partial_k \Pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} - \frac{m^2}{2} A_0 A_0 + \frac{m^2}{2} A^k A^k \right],$$

donde se ha definido el potencial simplético en la forma

$$\mathcal{H}^{(0)} = \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} - A_0 \partial_k \Pi^k - \frac{m^2}{2} A_0 A_0 + \frac{m^2}{2} A^k A^k \quad (4.89)$$

Con el fin de calcular la matriz simplética, definiremos las variables simpléticas de la siguiente forma  $\xi_k^{(0)} = (A_i^a, \Pi_a^i, A_0^a)$ . De (4.88) se puede identificar,

$$K_{A_i}^{(0)} \rightarrow \Pi^i \quad , \quad K_{\Pi^i}^{(0)} \rightarrow 0 \quad , \quad K_{A_0}^{(0)} \rightarrow 0.$$

Con el cual, podremos calcular la matriz

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})},$$

con los siguientes elementos,

$$M_{A_i, \Pi^j}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{\Pi^j}^{(0)}(\mathbf{y})} = -\frac{\delta \Pi^i(\mathbf{x})}{\delta \Pi^j(\mathbf{y})} = -\eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$M_{A_i, A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta a_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta a_{A_i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})} = 0,$$

$$M_{\Pi^i, A_0}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta a_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta a_{\Pi^i}^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_{A_0}^{(0)}(\mathbf{y})} = 0.$$

De tal manera que la matriz  $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  se puede escribir:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Se observa que esta matriz es singular con un autovalor cero. El autovalor correspondiente a esta matriz es dada por

$$\tilde{v}^{A(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^{A_0}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

donde  $v^{A_0}(\mathbf{x})$  es una función arbitraria. El vínculo asociado a este autovalor es:

$$\begin{aligned}
\Omega_\alpha &= \int d^3x \tilde{v}_a^{A(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_A(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} = \int d^3x v^{A_0}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_0}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)} \\
&= - \int d^3x v^{A_0}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[ \partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}) + m^2 A_0(\mathbf{y}) \right] \frac{\delta A_0(\mathbf{y})}{\delta A_0(\mathbf{x})} \\
&= - \int d^3x v^{A_0}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[ \partial_k^y \Pi^k(\mathbf{y}) + m^2 A_0(\mathbf{y}) \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\
&= - \int d^3x v^{A_0}(\mathbf{x}) \left[ \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}) + m^2 A_0(\mathbf{x}) \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Debido a que la función  $v^{A_0}(\mathbf{x})$  es completamente arbitraria, se puede escoger como vínculo Lagrangiano primario la siguiente relación:

$$\Omega^{(0)} = \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}) + m^2 A_0(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.90)$$

El primer Lagrangiano del proceso de iteración se obtiene adicionando el vínculo anterior a la parte canónica de  $L^{(0)}$  con lo que se obtendrá,

$$L^{(1)} = \dot{A}_k \Pi^k + \dot{\lambda} \Omega^{(0)} - \mathcal{H}^{(1)}, \quad (4.91)$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(1)} &= \mathcal{H}_{\Omega^{(0)}=0}^{(0)} = \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k + m^2 A_0 A_0 + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} - \frac{m^2}{2} A_0 A_0 + \frac{m^2}{2} A^k A^k \\
&= \frac{1}{2} \Pi^k \Pi^k + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} + \frac{m^2}{2} A_0 A_0 + \frac{m^2}{2} A^k A^k \quad (4.92)
\end{aligned}$$

Con el fin de simplificar los cálculos, se considerará el siguiente cambio de variable

$$\lambda^e \rightarrow \frac{1}{m^2} \Pi_e^0$$

de tal manera que,

$$L^{(1)} = \dot{A}_k \Pi^k + \frac{1}{m^2} \dot{\Pi}^0 \left( \partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}) + m^2 A_0(\mathbf{x}) \right) - \mathcal{H}^{(1)} \quad (4.93)$$

Si introducimos la nueva variable simplética  $\xi_k^{(1)} = (A_i, \Pi^i, A_0, \Pi^0)$ , podemos identificar las siguientes componentes de la uno forma canónica:

$$K_{A_i}^{(1)} \rightarrow \Pi^i \quad , \quad K_{\Pi^i}^{(1)} \rightarrow 0 \quad , \quad K_{A_0}^{(1)} \rightarrow 0 \quad , \quad K_{\Pi^0}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{m^2} (\partial_k^x \Pi^k(\mathbf{x}) + m^2 A_0(\mathbf{x})).$$

a partir del cual podremos calcular los elementos de matriz:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})},$$

la cual se representa,

$$M_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\eta_j^i & 0 & 0 \\ \eta_i^j & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_i^x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{m^2} \partial_i^x & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.94)$$

Esta matriz es no singular y con una inversa que se deriva de,

$$\int d^3 z M_{AC}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) [M^{CB(1)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Si se propone que  $[M^{CB(1)}]^{-1}$  tiene la siguiente representación,

$$[M^{CB(1)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \beta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \gamma_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \theta_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

siendo que sus componentes están por determinar de la relación:

$$\int d^3 z M^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) [M^{(1)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es posible mostrar que  $[M^{AB(1)}]^{-1}$  tiene la siguiente forma:

$$[M^{AB(1)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \eta_j^i & \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 \\ -\eta_j^i & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{m^2} \partial_i^x & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.95)$$

De (4.95) se puede determinar los corchetes generalizados entre las componentes de la variable simplética  $\xi_k^{(1)} = (A_i^a, \Pi_a^i, A_0^a, \Pi_a^0)$  obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \left\{ \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^j}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ A_i(\mathbf{x}), \Pi^j(\mathbf{y}) \right\} = \eta_i^j \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \left\{ \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{A_0}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ A_i(\mathbf{x}), A_0(\mathbf{y}) \right\} = \frac{1}{m^2} \partial_i^x \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \left\{ \xi_{A_i}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^0}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ A_i(\mathbf{x}), \Pi^0(\mathbf{y}) \right\} = 0, \\ \left\{ \xi_{\Pi^i}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{A_0}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ \Pi^i(\mathbf{x}), A_0(\mathbf{y}) \right\} = 0, \\ \left\{ \xi_{A_0}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{A_0}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ A_0(\mathbf{x}), A_0(\mathbf{y}) \right\} = 0, \\ \left\{ \xi_{A_0}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi^0}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ A_0(\mathbf{x}), \Pi^0(\mathbf{y}) \right\} = -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.96)$$

## Campo masivo de Yang-Mills

Aplicaremos la formulación de Faddeev-Jackiw para el caso de campos masivo de Yang-Mills el cual, según el método de Dirac, solo presenta vínculos de segunda clase. La teoría a considerar es descrita por la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L}^{(0)} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} + \frac{m^2}{2} A_\mu^a A_a^\mu. \quad (4.97)$$

Expresemos el Lagrangiano (4.97) en primer orden utilizando el momento canónico asociado al campo que es definido por:

$$\Pi_a^\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}^{(0)}}{\partial (\partial_0 A_a^\nu)} = F_a^{\nu 0}. \quad (4.98)$$

Con este término podemos expandir la densidad Lagrangiana

$$\begin{aligned}
L^{(0)} &= -\frac{1}{4}F_{0k}^d F_d^{0k} - \frac{1}{4}F_{k0}^d F_d^{k0} - \frac{1}{4}F_{kl}^d F_d^{kl} + \frac{m^2}{2}A_\alpha^d A_d^\alpha \\
&= -\frac{1}{2}F_{0k}^d F_d^{0k} - \frac{1}{4}F_{kl}^d F_{kl}^d + \frac{m^2}{2}A_0^d A_d^0 + \frac{m^2}{2}A_k^d A_d^k \\
&= \frac{1}{2}F_d^{k0} F_d^{k0} - \frac{1}{4}F_{kl}^d F_{kl}^d + \frac{m^2}{2}A_0^d A_0^d - \frac{m^2}{2}A_d^k A_d^k \\
&= \frac{1}{2}\Pi_d^k \Pi_d^k - \frac{1}{4}F_{kl}^d F_{kl}^d + \frac{m^2}{2}A_0^d A_0^d - \frac{m^2}{2}A_d^k A_d^k
\end{aligned}$$

Sumamos el siguiente cero,

$$\dot{A}_k^d \Pi_d^k - \dot{A}_k^d \Pi_d^k = \dot{A}_k^d \Pi_d^k - \partial_0 A_k^d \Pi_d^k,$$

en la relación anterior se obtendrá que

$$L^{(0)} = \dot{A}_k^d \Pi_d^k - \partial_0 A_k^d \Pi_d^k + \frac{1}{2}\Pi_d^k \Pi_d^k - \frac{1}{4}F_{kl}^d F_{kl}^d + \frac{m^2}{2}A_0^d A_0^d - \frac{m^2}{2}A_d^k A_d^k.$$

Teniendo en cuenta que,

$$\Pi_d^k = F_d^{k0} = F_{0k}^d = \partial_0 A_k^d - \partial_k A_0^d + g f^{def} A_0^e A_k^f$$

se obtiene,

$$\begin{aligned}
\partial_0 A_k^d &= \Pi_d^k + \partial_k A_0^d - g f^{def} A_0^e A_k^f \\
&= \Pi_d^k + \delta^{de} \partial_k A_0^e + g f^{dfe} A_k^f A_0^e \\
&= \Pi_d^k + \left( \delta^{de} \partial_k + g f^{dfe} A_k^f \right) A_0^e,
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado la antisimetría de la constante de estructura. De la definición de derivada covariante

$$D_k^{de}(\mathbf{x}) A_0^e = \left( \delta^{de} \partial_k + g f^{dfe} A_k^f \right) A_0^e = \partial_k A_0^d + g f^{dfe} A_k^f A_0^e \quad (4.99)$$

se deduce,

$$\partial_0 A_k^d = \Pi_d^k + D_k^{de} A_0^e$$

Por tanto, se puede expresar la densidad Lagrangiana como,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(0)} &= \dot{A}_k^d \Pi_d^k - (\Pi_d^k + D_k^{de} A_0^e) \Pi_d^k + \frac{1}{2} \Pi_d^k \Pi_d^k - \frac{1}{4} F_{kl}^d F_{kl}^d + \frac{m^2}{2} A_0^d A_0^d - \frac{m^2}{2} A_d^k A_d^k \\
&= \dot{A}_k^d \Pi_d^k - \Pi_d^k D_k^{de} A_0^e - \Pi_d^k \Pi_d^k + \frac{1}{2} \Pi_d^k \Pi_d^k - \frac{1}{4} F_{kl}^d F_{kl}^d + \frac{m^2}{2} A_0^d A_0^d - \frac{m^2}{2} A_d^k A_d^k \\
&= \dot{A}_k^d \Pi_d^k - \Pi_d^k \left( \delta^{de} \partial_k + g f^{df e} A_k^f \right) A_0^e - \frac{1}{2} \Pi_d^k \Pi_d^k - \frac{1}{4} F_{kl}^d F_{kl}^d \\
&\quad + \frac{m^2}{2} A_0^d A_0^d - \frac{m^2}{2} A_d^k A_d^k \\
&= \dot{A}_k^d \Pi_d^k - \delta^{de} \Pi_d^k \partial_k A_0^e - g f^{df e} \Pi_d^k A_k^f A_0^e - \frac{1}{2} \Pi_d^k \Pi_d^k - \frac{1}{4} F_{kl}^d F_{kl}^d \\
&\quad + \frac{m^2}{2} A_0^d A_0^d - \frac{m^2}{2} A_d^k A_d^k
\end{aligned}$$

Integrando por partes en el segundo término y eliminando el término de frontera resulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{(0)} &= \dot{A}_k^d \Pi_d^k - \partial_k \left( \delta^{de} \Pi_d^k A_0^e \right) + \delta^{de} A_0^e \partial_k \Pi_d^k - g f^{df e} \Pi_d^k A_k^f A_0^e \\
&\quad - \frac{1}{2} \Pi_d^k \Pi_d^k - \frac{1}{4} F_{kl}^d F_{kl}^d + \frac{m^2}{2} A_0^d A_0^d - \frac{m^2}{2} A_d^k A_d^k \\
&= \dot{A}_k^d \Pi_d^k + A_0^e \left( \delta^{de} \partial_k \Pi_d^k - g f^{df e} A_k^f \Pi_d^k \right) - \frac{1}{2} \Pi_d^k \Pi_d^k - \frac{1}{4} F_{kl}^d F_{kl}^d \\
&\quad + \frac{m^2}{2} A_0^d A_0^d - \frac{m^2}{2} A_d^k A_d^k \\
&= \dot{A}_k^d \Pi_d^k + A_0^e \left( \delta^{de} \partial_k + g f^{ef d} A_k^f \right) \Pi_d^k - \frac{1}{2} \Pi_d^k \Pi_d^k - \frac{1}{4} F_{kl}^d F_{kl}^d \\
&\quad + \frac{m^2}{2} A_0^d A_0^d - \frac{m^2}{2} A_d^k A_d^k \\
&= \dot{A}_k^d \Pi_d^k - \left[ \frac{1}{2} \Pi_d^k \Pi_d^k + \frac{1}{4} F_{kl}^d F_{kl}^d - A_0^e D_k^{ed} \Pi_d^k - \frac{m^2}{2} A_0^d A_0^d + \frac{m^2}{2} A_d^k A_d^k \right]
\end{aligned}$$

Esta expresión se puede escribir en forma compacta,

$$\mathcal{L}^{(0)} = \dot{A}_k^d \Pi_d^k - \mathcal{H}^{(0)} \quad (4.100)$$

donde se ha definido el potencial simplético en la forma

$$\mathcal{H}^{(0)} = \frac{1}{2} \Pi_d^k \Pi_d^k + \frac{1}{4} F_{kl}^d F_{kl}^d - A_0^e \left[ D_k^{ed} \Pi_d^k + \frac{m^2}{2} A_0^e \right] + \frac{m^2}{2} A_k^d A_k^d \quad (4.101)$$

Si se define las variables simpléticas en la forma  $\xi_k^{(0)} = (A_i^a, \Pi_a^i, A_0^a)$ , de (4.100) se determina,

$$K_{A_i^a}^{(0)} \rightarrow \Pi_a^i \quad , \quad K_{\Pi_a^i}^{(0)} \rightarrow 0 \quad , \quad K_{A_0^a}^{(0)} \rightarrow 0. \quad (4.102)$$

Con el cual la matriz

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})},$$

tiene la siguiente representación:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^{ab} \eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Se observa que esta matriz es singular y el correspondiente autovector nulo asociado es dada por:

$$\tilde{v}^{A(0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & v^{A_0^a}(\mathbf{x}) \end{pmatrix},$$

donde  $v^{A_0^a}(\mathbf{x})$  es una función arbitraria. El vínculo asociado a este autovector es:

$$\begin{aligned} \Omega_\alpha &= \int d^3x \tilde{v}_a^{A(0)} \frac{\delta}{\delta \xi_A(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(\phi) \\ &= \int d^3x v^{A_0^a}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_0^a}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(\phi) \\ &= - \int d^3x v^{A_0^a}(\mathbf{x}) \int d^3y \frac{\delta A_0^e(\mathbf{y})}{\delta A_0^a(\mathbf{x})} (D_k^{ed} \Pi_d^k(\mathbf{y}) + m^2 A_0^e(\mathbf{y})) \\ &= - \int d^3x v^{A_0^a}(\mathbf{x}) \int d^3y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) (D_k^{ed} \Pi_d^k(\mathbf{y}) + m^2 A_0^e(\mathbf{y})) \\ &= - \int d^3x v^{A_0^a}(\mathbf{x}) (D_k^{ed} \Pi_d^k(\mathbf{x}) + m^2 A_0^e(\mathbf{x})) = 0, \end{aligned}$$

de donde se puede escoger como vínculo Lagrangiano primario la siguiente relación:

$$\Omega^{e(0)} = D_k^{ed} \Pi_d^k(\mathbf{x}) + m^2 A_0^e(\mathbf{x}) = 0 \quad (4.103)$$

El primer Lagrangiano del proceso de iteración se obtiene adicionando el vínculo anterior a la parte canónica de  $L^{(0)}$  con lo que se obtendrá,

$$L^{(1)} = \dot{A}_k^d \Pi_d^k + \dot{\lambda}^e \Omega^{e(0)} - \mathcal{H}^{(1)}, \quad (4.104)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(1)} &= \mathcal{H}_{\Omega^{e(0)}=0}^{(0)} = \frac{1}{2} \Pi_d^k \Pi_d^k + \frac{1}{4} F_{kl}^d F_{kl}^d - A_0^e \left[ -m^2 A_0^e + \frac{m^2}{2} A_0^e \right] + \frac{m^2}{2} A_k^d A_k^d \\ &= \frac{1}{2} \Pi_d^k \Pi_d^k + \frac{1}{4} F_{kl}^d F_{kl}^d + \frac{m^2}{2} A_0^e A_0^e + \frac{m^2}{2} A_k^d A_k^d \end{aligned} \quad (4.105)$$

Se considerará el siguiente cambio de variable

$$\lambda^e \rightarrow \frac{1}{m^2} \Pi_e^0$$

la expresión (4.104) se escribe,

$$L^{(1)} = \dot{A}_k^d \Pi_d^k + \frac{1}{m^2} \dot{\Pi}_e^0 (D_k^{ed} \Pi_d^k(\mathbf{x}) + m^2 A_0^e(\mathbf{x})) - \mathcal{H}^{(1)} \quad (4.106)$$

Introduciendo un nuevo conjunto de variables simpléticas  $\xi_k^{(1)} = (A_i^a, \Pi_a^i, A_0^a, \Pi_a^0)$ , es posible identificar las siguientes componentes de la uno forma canónica:

$$K_{A_i^a}^{(1)} \rightarrow \Pi_a^i, \quad K_{\Pi_a^i}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_{A_0^a}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_{\Pi_a^0}^{(1)} \rightarrow \frac{1}{m^2} (D_k^{ad} \Pi_d^k(\mathbf{x}) + m^2 A_0^a(\mathbf{x})) \quad (4.107)$$

a partir de los cuales la matriz

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})},$$

se expresa,

$$M_{ab}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta^{ab} \eta_j^i & 0 & -\frac{g}{m^2} f^{abd} \Pi_d^i(\mathbf{x}) \\ \delta^{ab} \eta_j^i & 0 & 0 & -\frac{1}{m^2} D_i^{ab}(\mathbf{x}) \\ 0 & 0 & 0 & \delta^{ab} \\ -\frac{g}{m^2} f^{abd} \Pi_d^i(\mathbf{x}) & -\frac{1}{m^2} D_i^{ab}(\mathbf{x}) & -\delta^{ab} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (4.108)$$

Se determina que esta matriz es no singular y su inversa se calcula utilizando la siguiente ecuación funcional:

$$\int d^3 z M_{AC}^{(1)}(\mathbf{x}, z) [M^{CB(1)}]^{-1}(z, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.109)$$

Considerando que  $[M^{CB(1)}]^{-1}$  tiene las siguientes componentes

$$[M^{CB(1)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_2^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_3^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_4^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \beta_1^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_2^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_3^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_4^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \gamma_1^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_2^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_3^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_4^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \theta_1^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_2^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_3^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_4^{ad}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

a partir de (4.109) se puede mostrar que la inversa para la matriz simpléctica tiene las siguientes componentes

$$[M^{AB(1)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & \delta^{ab} \eta_j^i & \frac{1}{m^2} D_i^{ab}(\mathbf{x}) & 0 \\ -\delta^{ab} \eta_j^i & 0 & -\frac{g}{m^2} f^{abd} \Pi_d^i(\mathbf{x}) & 0 \\ \frac{1}{m^2} D_i^{ac}(\mathbf{x}) & -\frac{g}{m^2} f^{acd} \Pi_d^i(\mathbf{x}) & \frac{g}{m^4} f^{abc} D_i^{cd}(\mathbf{x}) \Pi_d^i(\mathbf{x}) & -\delta^{ab} \\ 0 & 0 & \delta^{ab} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (4.110)$$

De (4.110) se puede determinar los corchetes generalizados entre las componentes de la variable simpléctica  $\xi_k^{(1)} = (A_i^a, \Pi_a^i, A_0^a, \Pi_a^0)$  obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \left\{ \xi_{A_i^a}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi_b^j}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ A_i^a(\mathbf{x}), \Pi_b^j(\mathbf{y}) \right\} = \delta^{ab} \eta_j^i \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \left\{ \xi_{A_i^a}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{A_0^b}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ A_i^a(\mathbf{x}), A_0^b(\mathbf{y}) \right\} = \frac{1}{m^2} D_i^{ab}(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \left\{ \xi_{A_i^a}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi_b^0}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ A_i^a(\mathbf{x}), \Pi_b^0(\mathbf{y}) \right\} = 0, \\ \left\{ \xi_{\Pi_a^i}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{A_0^b}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ \Pi_a^i(\mathbf{x}), A_0^b(\mathbf{y}) \right\} = -\frac{g}{m^2} f^{abd} \Pi_d^i(\mathbf{x}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ \left\{ \xi_{A_0^a}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{A_0^b}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ A_0^a(\mathbf{x}), A_0^b(\mathbf{y}) \right\} = \frac{g}{m^4} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f^{abc} D_i^{cd}(\mathbf{x}) \Pi_d^i(\mathbf{x}), \\ \left\{ \xi_{A_0^a}^{(1)}(\mathbf{x}), \xi_{\Pi_b^0}^{(1)}(\mathbf{y}) \right\} &= \left\{ A_0^a(\mathbf{x}), \Pi_b^0(\mathbf{y}) \right\} = -\delta^{ab} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned} \quad (4.111)$$



# Bibliografía

- [1] L. Faddeev and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 1692 (1988).  
R. Jackiw, *Quantization Without Tears*, hep-th/9306075.
- [2] P.J. Oliver, *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Graduate Text in Mathematics 107, Springer-Verlag, New York (1996).
- [3] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.  
K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, Vol. **169**, Springer, New York, 1982.  
A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1976.
- [4] H. Golstein, *Classical Mechanics*, Second Edition, Addison-Wesley (1980).  
L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mechanics*, Vol. 1, Pergamon Press (1969).
- [5] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett.*, **A7**, 1737 (1992).  
J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett.*, **A7**, 4981 (1992).  
H. Montani and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett.*, **A8**, 3387 (1993).
- [6] A. Foussats, G. Repetto, O. P. Zandron and O. S. Zandron, *Int. J. Mod. Phys*, **36**, 2923 (1997).



## Capítulo 5

# Teoría de Fotones Masivos en las Coordenadas de Instante Forma

*La electrodinámica de Proca describe una teoría de fotones masivos la cual no es invariante de gauge. En este capítulo se mostrará que la invariancia de gauge es recuperada si un campo escalar es apropiadamente incorporado en la teoría. Se utilizara el método de Dirac para describir sistemas con vínculos con el fin de realizar detallado análisis de la estructura de vínculos que la teoría posee. Condiciones de gauge apropiadas serán derivadas con el objetivo de eliminar los vínculos de primera clase. Finalmente, se deducirán los corchetes de Dirac asociados a las variables dinámicas independientes.*

## 5.1. Formulación de Dirac

La electrodinámica cuántica (QED) establece una ligadura sobre la masa en reposos del fotón la cual es propuesta para ser cero. Sin embargo, fotones no masivos pueden existir a bajos niveles de energía que los actuales experimentos no pueden detectar. Ahora, el principio de incertidumbre indica que la masa del fotón puede ser estimada como  $M_\gamma \approx \frac{\hbar}{\Delta t c^2}$  en una magnitud del orden de  $10^{-66}$  g. Aunque tal masa infinitesimal es extremadamente difícil de ser detectada, una masiva QED no sólo es más sencillo teóricamente que la teoría estándar [1], sino que también proporciona un estructura sólida para el análisis de las implicaciones de la existencia de un fotón masivo tendría para la física. En realidad, algunos de estos posibles efectos, como la variación de la velocidad de la luz [2], la desviación de la ley de Coulomb [4] y la ley de Ampere [5], la existencia de ondas electromagnéticas longitudinales [6], y el adicional potencial de Yukawa del campo dipolar magnético [7], se estudiaron con detalle.

La electrodinámica masiva de Proca es el modelo mas simple en el que el fotón tienen una masa pequeña. La teoría del campo electromagnético de proca en una única manera adicionando un término de masa al Lagrangiano del campo electromagnético, es decir, el campo de Proca es descrito por la siguiente densidad lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu, \quad (5.1)$$

donde  $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . El parámetro  $M$  puede ser interpretado como la masa del fotón siendo que la longitud de escala  $M^{-1}$  llega a ser la longitud de onda de Compton reducida del fotón el cual es el rango efectivo de la interacción electromagnética. No obstante, el término de masa viola la invariancia de gauge de la teoría.

Sin embargo, Cornwall [8] mostró que en el modelo de Jackiw-Johnson [9] no es posible adicionar una término de masa que rompa simetría sin

destruir la renormalizabilidad ya que éste factor viola las identidades de Ward-Takahashi. Por otra parte, la invariancia de gauge puede ser recuperada si un término no local y no polinómico es adicionado al Lagrangiano el cual es invariante de gauge en el sentido estricto. En este capítulo, se seguirá el procedimiento Cornwall con el fin de restaurar la invariancia de gauge de la teoría de Proca. En seguida, se estudiara de manera consistente la estructura canónica de vínculos de la teoría determinando el Hamiltoniano que genera la dinámica del sistema y tiene en cuenta la completa libertad de gauge. Finalmente, se determinaran apropiadas condiciones de gauge a fin de calcular los correspondientes corchetes de Dirac.

El campo de Proca que es descrito por la densidad Lagrangiana (5.1) no es invariante de gauge, sin embargo, adicionar un cierto término no local y no polinómico a (5.1) restaurará la invariancia de gauge. Si la transformación

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x),$$

es realizada sobre el término de masa, se obtiene que

$$\frac{1}{2}M^2 A_\mu A^\mu \rightarrow \frac{1}{2}M^2 (A_\mu + \partial_\mu \Lambda)(A^\mu + \partial^\mu \Lambda).$$

Ahora, se reemplazará el parámetro gauge de la siguiente manera

$$\Lambda \rightarrow \theta \equiv -\frac{1}{e} \frac{1}{\square} \partial_\mu A^\mu.$$

Así, se definirá el término de masa en la forma

$$\frac{1}{2}M^2 \left[ A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right]^2, \quad (5.2)$$

el cual será invariante de gauge si se realiza la siguiente transformación:

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \Lambda(x) \quad , \quad \theta(x) \rightarrow \theta(x) - e\Lambda(x), \quad (5.3)$$

siempre que  $\square\theta \neq 0$ . Aquí,  $\theta(x)$  es un campo escalar auxiliar y  $e$  es una constante de acople. De esta manera, se obtienen la siguiente densidad

Lagrangiana de gauge efectiva:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 \left[ A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta \right]^2. \quad (5.4)$$

De (5.4), es posible derivar las correspondientes ecuaciones de Euler-Lagrange,

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + M^2 A^\mu = -\frac{1}{e}M^2 \partial^\mu\theta \quad , \quad \partial_\nu \left[ A^\nu + \frac{1}{e}\partial^\nu\theta \right] = 0. \quad (5.5)$$

De la densidad Lagrangiana (5.4), se determina que los correspondientes momentos canónico  $(\pi^\mu, p_\theta)$  conjugados a los campos  $(A_\mu, \theta)$ , respectivamente, son definidos por:

$$\pi^\mu \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \quad , \quad p_\theta \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\theta)} = \frac{M^2}{e} \left[ A_0 + \frac{1}{e}\partial_0\theta \right]. \quad (5.6)$$

Entonces, de (5.6) se deduce el siguiente conjunto de relaciones dinámicas

$$\partial_0 A_k = \pi^k + \partial_k A_0 \quad , \quad \partial_0\theta = \frac{e^2}{M^2} p_\theta - e A_0, \quad (5.7)$$

junto con el siguiente vínculo primario [10],

$$\Omega_1 \equiv \pi^0 \approx 0. \quad (5.8)$$

A fin de realizar un estudio canónico de la teoría que resulte consistente con el vínculo (5.8) se utilizara el procedimiento de Dirac [10]. Para ello, en primer lugar se define el Hamiltoniano canónico,  $H_C$ , a partir de la siguiente relación:

$$H_C = \int d^3y \mathcal{H}_C = \int d^3y \left[ \pi^\mu \partial_0 A_\mu + p_\theta \partial_0\theta - \mathcal{L} \right], \quad (5.9)$$

donde  $\mathcal{H}_C$  se interpreta como la densidad Hamiltoniana canónica asociada. Utilizando la relación  $\pi^k = F^{k0}$  que resulta de (5.6), la densidad Lagrangiana se escribe de la siguiente manera:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 - \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} - \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e}\partial_k\theta \right]^2 \quad (5.10)$$

Al substituir (5.10) en (5.9) se obtiene la siguiente expresión para el Hamiltoniano canónico:

$$H_C = \int d^3y \left[ \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 + \pi^k \partial_k A_0 - e A_0 p_\theta + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right]^2 \right]. \quad (5.11)$$

Ahora, la consistencia del vínculo primario [10] requiere introducir el Hamiltoniano primario  $H_P$  el cual resulta de adicionar al Hamiltoniano canónico los vínculos con sus respectivos multiplicadores de Lagrange [10],

$$H_P \equiv H_C + \int d^3y u^1(y) \Omega_1(y), \quad (5.12)$$

donde  $u^1$  es el multiplicador de lagrange asociado al vínculo electromagnético. Siendo que el espacio de fase es definido por las coordenadas generalizadas  $(A_\mu, \theta, \pi^\nu, p_\theta)$ , los corchetes fundamentales de Poisson (PB) no nulos entre ellas son dados por las siguientes relaciones:

$$\left\{ A_\mu(x), \pi^\nu(y) \right\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \theta(x), p_\theta(y) \right\} = \delta^3(x-y). \quad (5.13)$$

El procedimiento de Dirac [10] establece que los vínculos primarios deben ser preservados en el tiempo bajo la evolución generada por el Hamiltoniano primario (5.12). Dicha consistencia es determinada exigiendo el PB entre los vínculos primarios y el  $H_P$  sea débilmente igual a cero. Utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \left\{ A_\mu(x), H_C \right\} &= \delta_\mu^k \left[ \pi^k(x) + \partial_k^x A_0(x) \right], \\ \left\{ \pi^\nu(x), H_C \right\} &= \delta_0^\nu \left[ \partial_k^x \pi^k(x) + e p_\theta(x) \right] + \delta_k^\nu \left\{ \partial_l^x F_{lk}(x) - M^2 \left[ A_k(x) + \frac{1}{e} \partial_k^x \theta(x) \right] \right\}, \\ \left\{ \theta(x), H_C \right\} &= \frac{e^2}{M^2} p_\theta(x) - e A_0(x), \\ \left\{ p_\theta(x), H_C \right\} &= \frac{M^2}{e} \partial_k^x \left[ A_k(x) + \frac{1}{e} \partial_k^x \theta(x) \right], \end{aligned} \quad (5.14)$$

se puede demostrar que el requerimiento de consistencia sobre el vínculo primario resulta en:

$$\dot{\Omega}_1(x) = \left\{ \pi^0(x), H_P \right\} = \partial_k^x \pi^k + e p_\theta \equiv \Omega_2(x) \approx 0, \quad (5.15)$$

La expresión (5.15) se interpreta afirmando que la consistencia de  $\Omega_1$  implica en un vínculo secundario  $\Omega_2$  que sera el equivalente de la ley de Gauss.

El método de Dirac establece que la consistencia del nuevo vínculo deberá ser analizada, sin embargo, es posible mostrar que

$$\begin{aligned} \partial_0 \Omega_2(x) &= \left\{ \Omega_2(x), H_P \right\} \\ &= \partial_k^x \partial_l^x F_{lk}(x) - M^2 \partial_k^x \left[ A_k(x) + \frac{1}{e} \partial_k^x \theta(x) \right] \\ &\quad + M^2 \partial_k^x \left[ A_k(x) + \frac{1}{e} \partial_k^x \theta(x) \right] \\ &= 0, \end{aligned}$$

por tanto, no hay mas vínculos generados de la condición de consistencia de la ley de Gauss, lo que implica que ésta es automáticamente conservada. Así, las relaciones (5.8) y (5.15) constituyen el conjunto máximo de vínculos que la teoría posee.

A partir de (5.13) es posible mostrar que los vínculos  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$  tienen corchetes de Poisson nulos entre ellos, por tanto, constituyen un conjunto de vínculos de primera clase [11]. De esta manera, con el fin de obtener una dinámica que resulte compatible con la libertad de gauge completa de la teoría se deberá introducir lo que se conoce como el Hamiltoniano extendido  $H_E$  el cual es definido por,

$$H_E \equiv H_C + \int d^3 y \left[ u^1(y) \Omega_1(y) + u^2(y) \Omega_2(y) \right], \quad (5.16)$$

siendo  $u^2$  el multiplicador de lagrange asociado al vínculo de primera clase secundario  $\Omega_2$ . Con el Hamiltoniano extendido es posible calcular

las ecuaciones canónicas de las variables  $(A_\mu, \theta, \pi^\nu, p_\theta)$  que es compatible con la completa libertad de gauge de la teoría. Por tanto, a partir de (5.16) es posible mostrar que para el campo  $A_\mu$  se obtiene la siguiente ecuación:

$$\dot{A}_\mu = \delta_\mu^k [\pi^k + \partial_k A_0] - \delta_\mu^k \partial_k u^2, \quad (5.17)$$

que implica que la dinámica de la variable canónica  $A_\mu$  es definida como una combinación lineal del multiplicador de Lagrange que esta aun por determinar. De igual manera, la ecuación de Hamilton asociada al momentum  $\pi^\mu$  es dada por

$$\dot{\pi}^\nu = \delta_0^\nu [\partial_k \pi^k + e p_\theta] + \delta_k^\nu \left\{ \partial_l F_{lk} - M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right] \right\}. \quad (5.18)$$

La evolución temporal de las variables dinámicas correspondiente al campo escalar es:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{e^2}{M^2} p_\theta - e A_0 + e u^2, \\ \dot{p}_\theta &= \frac{M^2}{e} \partial_k \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right] \end{aligned} \quad (5.19)$$

Combinando las relaciones (5.17), (5.18) y (5.19) es posible mostrar que

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} + M^2 \left[ A^\nu + \frac{1}{e} \partial^\nu \theta \right] &\approx 0, \\ \partial_\mu \left[ A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta \right] &\approx \partial_0 u^2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Así, las ecuaciones (5.20) que se interpretan como las ecuaciones de campo a nivel Hamiltoniano son compatibles con las ecuaciones de campo obtenidas a nivel Lagrangiano (5.5) solo si convenientes condiciones de gauge son elegidas con el fin de fijar el multiplicador de lagrange  $u^2$ .

Ahora, el objetivo es utilizar la libertad de gauge que existe en el sistema de estudio con el fin de fijar dos componentes del campo  $A^\nu$  de tal manera que se pueda transformar los vínculos de primera clase en un

conjunto de vínculos de segunda clase. Por tanto, el problema de elegir apropiadas condiciones de gauge deberá ser tenido en cuenta y resuelto a fin de eliminar las variables redundantes de la teoría a nivel clásico.

De acuerdo al método de Dirac, el número de condiciones de gauge a introducir es determinado por el número de vínculos de primera clase que la teoría presente. Por tanto, la teoría en consideración requerirá de dos condiciones de gauge para así transformar los dos vínculos de primera clase en vínculos de segunda clase [11, 12]. Una manera natural de derivar condiciones de gauge apropiadas es observar nuevamente a la estructura de vínculos que la teoría presenta. Siendo que  $\pi^0 \approx 0$ , una lógica condición de gauge a escoger que sea consistente con los PB de la teoría es:

$$\Delta_1 \equiv A_0 \approx 0. \quad (5.21)$$

La segunda condición de gauge se puede deducir de las ecuaciones de Euler-Lagrange obtenidas al sistema a nivel Hamiltoniano [12]. Por lo tanto, si se elige la componente  $\nu = 0$  de la ecuación (5.20) se obtiene que

$$\partial_\mu F^{\mu 0} + M^2 \left[ A^0 + \frac{1}{e} \partial^0 \theta \right] \approx \partial_0 \left[ \partial_k A_k + \frac{M^2}{e} \theta \right] \approx 0. \quad (5.22)$$

Entonces, la ecuación (5.22) se mantendrá válida durante la evolución dinámica del sistema solo si:

$$\Delta_2 \equiv \partial_k A_k + \frac{M^2}{e} \theta \approx 0. \quad (5.23)$$

Así, la ecuación (5.23) es similar a un vínculo secundario que resulta de la condición de gauge (5.21), por tanto, la expresión (5.23) se puede considerar como la segunda condición de gauge que se requiere.

El siguiente paso es calcular los corchetes de Dirac (DB) asociados al conjunto completo de vínculos que la teoría posee, es decir, el conjunto constituido por los vínculos de primera clase y las condiciones de gauge

que se renombrarán de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 \Psi_1 &\equiv \pi^0 \approx 0, \\
 \Psi_2 &\equiv \partial_k \pi^k + e p_\theta \approx 0, \\
 \Psi_3 &\equiv A_0 \approx 0, \\
 \Psi_4 &\equiv \partial_k A_k + \frac{M^2}{e} \theta \approx 0,
 \end{aligned} \tag{5.24}$$

y que conforman un conjunto de vínculos de segunda clase. De (5.24) se puede construir definir una matriz con los PP calculados entre ellos y cuyos elementos se definen de la siguiente manera:

$$G_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Psi_i(x), \Psi_j(y) \right\}, \tag{5.25}$$

La matriz asociada a (5.25) tiene la siguiente forma:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -D_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y), \tag{5.26}$$

donde se ha introducido el operador diferencial  $D_x \equiv \nabla_x^2 - M^2$ .

Para calcular los correspondientes PD la inversa de la matriz (5.26) deberá ser calculada y deberá ser solución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \int d^3 z G_{ik}^{-1}(x, z) G_{kj}(z, y) &= \delta_{ij} \delta^3(x - y), \\
 \int d^3 z G_{ik}(x, z) G_{kj}^{-1}(z, y) &= \delta_{ij} \delta^3(x - y).
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Se propondrá que  $G^{-1}(x, y)$  tiene la siguiente forma:

$$G^{-1}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1(x, y) & \alpha_2(x, y) & \alpha_3(x, y) & \alpha_4(x, y) \\ \beta_1(x, y) & \beta_2(x, y) & \beta_3(x, y) & \beta_4(x, y) \\ \gamma_1(x, y) & \gamma_2(x, y) & \gamma_3(x, y) & \gamma_4(x, y) \\ \eta_1(x, y) & \eta_2(x, y) & \eta_3(x, y) & \eta_4(x, y) \end{pmatrix}, \tag{5.28}$$

donde los elementos de matriz son completamente desconocidos y necesarios de determinar. Al substituir (5.26) y (5.28) en (5.27) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-\gamma_1(x, y) &= \delta^3(x - y) \quad , \quad -\gamma_i(x, y) = 0, \quad i = 2, 3, 4, \\
D_x \eta_2(x, y) &= \delta^3(x - y) \quad , \quad D_x \eta_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 3, 4, \\
\alpha_3(x, y) &= \delta^3(x - y) \quad , \quad \alpha_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, 4, \\
-D_x \beta_4(x, y) &= \delta^3(x - y) \quad , \quad -D_x \beta_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, 3.
\end{aligned}
\tag{5.29}$$

Imponiendo las condiciones de frontera de que los campos desaparezca en el infinito, se puede mostrar que la solución de (5.29) es,

$$\begin{aligned}
\alpha_3(x, y) &= \delta^3(x - y) \quad , \quad \alpha_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, 4, \\
\beta_4(x, y) &= -\frac{1}{D_x} \delta^3(x - y) \quad , \quad \beta_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
\gamma_1(x, y) &= -\delta^3(x - y) \quad , \quad \gamma_i(x, y) = 0, \quad i = 2, 3, 4, \\
\eta_2(x, y) &= \frac{1}{D_x} \delta^3(x - y) \quad , \quad \eta_i(x, y) = 0, \quad i = 1, 3, 4.
\end{aligned}
\tag{5.30}$$

Por tanto, se muestra que la inversa de (5.26) existe y tiene la siguiente forma:

$$G_{ij}^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{D_x} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{D_x} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y). \tag{5.31}$$

Con la inversa dada por (5.31), es posible definir los PD para dos variables dinámicas  $\mathbf{A}(x)$  y  $\mathbf{B}(x)$  [11] de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\left\{ \mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y) \right\}_D &= \left\{ \mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}(x), \Psi_i(u) \right\} \\
&\quad G_{ij}^{-1}(u, v) \left\{ \Psi_j(v), \mathbf{B}(y) \right\}
\end{aligned}
\tag{5.32}$$

La anterior definición implica eliminar los vínculos de segunda clase (5.24) de la teoría y de la dinámica definida a partir del Hamiltoniano extendido (5.16). Bajo la definición de los PD, los vínculos (5.24) son fuertemente nulos, es decir, se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned} \pi^0 = 0 \quad , \quad A_0 = 0, \\ p_\theta = -\frac{1}{e} \partial_k \pi^k \quad , \quad \theta = -\frac{e}{M^2} \partial_k A_k. \end{aligned} \quad (5.33)$$

Las relaciones (5.33) establecen que  $A_k$  y  $\pi^k$  son los grados de libertad de la teoría, es decir, las variables independientes y constituyen el espacio de fase reducido. Por tanto, los PD asociados a ellas deben ser calculados a partir de (5.32), de tal manera que los PD asociados al campo  $A_k$  son dados por:

$$\left\{ A_k(x), \mathbf{B}(y) \right\}_D = \left\{ A_k(x), \mathbf{B}(y) \right\} + \partial_k^x \int d^3v C_{24}^{-1}(x, v) \left\{ \Psi_4(v), \mathbf{B}(y) \right\}, \quad (5.34)$$

de la cual es posible mostrar que los PD no nulo entre los grados de libertad son:

$$\left\{ A_k(x), \pi^l(y) \right\}_D = \left[ \delta_k^l - \frac{\partial_k^x \partial_l^x}{D_x} \right] \delta^3(x - y) \quad (5.35)$$

Ahora, usando las relaciones (5.33) se puede determinar que los restantes PD correspondientes a las coordenadas generalizadas son:

$$\begin{aligned} \left\{ \theta(x), p_\theta(y) \right\}_D &= \left( 1 + \frac{M^2}{D_x} \right) \delta^3(x - y), \\ \left\{ A_k(x), p_\theta(y) \right\}_D &= -\frac{M^2}{e} \frac{\partial_k^x}{D_x} \delta^3(x - y), \\ \left\{ \pi^l(x), \theta(y) \right\}_D &= -e \frac{\partial_l^x}{D_x} \delta^3(x - y). \end{aligned} \quad (5.36)$$

Bajo la definición de los PD y las relaciones (5.35), el Hamiltoniano (5.16) que determino la evolución temporal con la completa libertad de gauge se transforma en el espacio de fase reducido a una expresión de la

siguiente forma:

$$H = \int d^3y \left\{ \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{M^2} (\partial_k^y \pi^k)^2 + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k - \frac{1}{M^2} \partial_k^y \partial_l^y A_l \right]^2 \right\}. \quad (5.37)$$

## 5.2. Formulaci3n de Faddeev-Jackiw

Un tratamiento can3nico consistente de la teor3a fue realizado mediante la utilizaci3n de la formulaci3n de Dirac [1]. En 3sta secci3n se utilizara la propuesta geom3trica de Faddeev-Jackiw [2] para un an3lisis simpl3ctico de la teor3a. La densidad Lagrangiana efectiva invariante de gauge que describe el campo de Proca es dado por:

$$L = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \theta \right]^2, \quad (5.38)$$

Con el fin de describir la teor3a bajo la formulaci3n simpl3ctica de Faddeev-Jackiw es necesario introducir los momentos can3nicos  $\pi^\mu$  y  $p_\theta$  asociados a los campos  $A_\mu$  y  $\theta$ , respectivamente,

$$\pi^\mu = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -F^{0\mu} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \theta)} = \frac{M^2}{e} \left[ A_0 + \frac{1}{e} \partial_0 \theta \right]. \quad (5.39)$$

De esta manera, es posible expresar la densidad Lagrangiana (5.38) de la siguiente manera:

$$L^{(0)} = \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 - \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} - \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right]^2. \quad (5.40)$$

Considerando el siguiente t3rmino cero

$$\begin{aligned} \dot{A}_k \pi^k + \dot{\theta} p_\theta - (\partial_0 A_k) \pi^k - (\partial_0 \theta) p_\theta &= \dot{A}_k \pi^k + \dot{\theta} p_\theta - (\pi^k + \partial_k A_0) \pi^k \\ &\quad - \left( \frac{e^2}{M^2} p_\theta - e A_0 \right) p_\theta \\ &= \dot{A}_k \pi^k + \dot{\theta} p_\theta - (\pi^k)^2 - \pi^k \partial_k A_0 - \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 \\ &\quad + e A_0 p_\theta, \end{aligned}$$

se puede re escribir la densidad Lagrangiana (5.40) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 L^{(0)} &= \dot{A}_k \pi^k + \dot{\theta} p_\theta - (\pi^k)^2 - \pi^k \partial_k A_0 - \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 + e A_0 p_\theta + \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 \\
 &\quad - \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} - \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right]^2 \\
 &= \dot{A}_k \pi^k + \dot{\theta} p_\theta - \left\{ \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 + \pi^k \partial_k A_0 - e A_0 p_\theta + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right]^2 \right\}, \tag{5.41}
 \end{aligned}$$

que en forma compacta se puede expresar de la siguiente manera:

$$L^{(0)} = \dot{A}_k \pi^k + \dot{\theta} p_\theta - \mathcal{H}^{(0)}, \tag{5.42}$$

donde

$$\mathcal{H}^{(0)} \equiv \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 + \pi^k \partial_k A_0 - e A_0 p_\theta + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right]^2, \tag{5.43}$$

denota el potencial simplético de orden cero en el proceso de interacción.

De acuerdo a (5.42) el conjunto inicial de variables simpléticas es denotado por  $\xi_k^{(0)} = (A_k, \pi^k, \theta, p_\theta, A_0)$ . Se determina a partir de (5.42) los siguientes momentos:

$$K_{A_k}^{(0)} = \pi^k, \quad K_{\pi^k}^{(0)} = 0, \quad K_\theta^{(0)} = p_\theta, \quad K_{p_\theta}^{(0)} = 0, \quad K_{A_0}^{(0)} = 0, \tag{5.44}$$

con los cuales se puede definir la matriz dos forma simplética de orden cero en el proceso de iteración de la siguiente manera:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi^{(0)A}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi^{(0)B}(\mathbf{y})}. \tag{5.45}$$

La matrix  $M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  tiene la siguiente forma:

$$M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.46)$$

Es posible observar que la matriz simpléctica es singular y fácilmente se puede mostrar que su correspondiente modo cero es:

$$\tilde{v}^{A(0)} = \left( 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v^{A_0}(\mathbf{x}) \right), \quad (5.47)$$

donde  $v^{A_0}(\mathbf{x})$  es una función arbitraria. De este no trivial modo cero se puede deducir el siguiente vínculo:

$$\begin{aligned} \Omega^{(0)} &= \int d^3x v^{A_0}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_0}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(\xi_k^{(0)}) \\ &= \int d^3x v^{A_0}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_0(\mathbf{x})} \int d^3y \left[ \pi^k(\mathbf{y}) \partial_k^y A_0(\mathbf{y}) - e A_0(\mathbf{y}) p_\theta(\mathbf{y}) \right] \\ &= \int d^3x v^{A_0}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[ \pi^k(\mathbf{y}) \partial_k^y - e p_\theta(\mathbf{y}) \right] \frac{\delta A_0(\mathbf{y})}{\delta A_0(\mathbf{x})} \\ &= \int d^3x v^{A_0}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[ \pi^k(\mathbf{y}) \partial_k^y - e p_\theta(\mathbf{y}) \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= - \int d^3x v^{A_0}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[ \pi^k(\mathbf{y}) \partial_k^x + e p_\theta(\mathbf{y}) \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \\ &= - \int d^3x v^{A_0}(\mathbf{x}) \left[ \partial_k^x \pi^k(\mathbf{x}) + e p_\theta(\mathbf{x}) \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Sin embargo, dado que  $v^{A_0}(\mathbf{x})$  es completamente arbitrario, es posible elegir como un vínculo primario Lagrangiano la siguiente relación:

$$\Omega^{(0)} \equiv \partial_k \pi^k + e p_\theta = 0. \quad (5.48)$$

De acuerdo al algoritmo simplético, el vínculo (5.48) es introducido a la densidad Lagrangiana usando multiplicadores de Lagrange, así, la

densidad Lagrangiana de orden uno en el proceso de iteración es:

$$L^{(1)} = \pi^k \dot{A}_k + p_\theta \dot{\theta} + \Omega^{(0)} \dot{\lambda} - \mathcal{H}^{(1)}, \quad (5.49)$$

donde el potencial simplético de primer orden de iteración es:

$$\mathcal{H}^{(1)} \equiv \mathcal{H}_{\Omega^{(0)}=0}^{(0)}. \quad (5.50)$$

Siendo que  $\mathcal{H}^{(0)}$  se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)} &= \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 + \pi^k \partial_k A_0 - e A_0 p_\theta + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 - A_0 \left[ \partial_k \pi^k + e p_\theta \right] + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 - A_0 \Omega^{(0)} + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right]^2, \end{aligned}$$

se puede determinar que

$$\mathcal{H}^{(1)} \equiv \mathcal{H}_{\Omega^{(0)}=0}^{(0)} = \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right]^2. \quad (5.51)$$

Se extenderá el espacio con el conjunto de variables simplética resultado del primer proceso de iteración. Este nuevo conjunto de variables es definido por:  $\xi_k^{(1)} = (A_k, \pi^k, \theta, p_\theta, \lambda)$ . La nueva una forma canónica es:

$$K_{A_k}^{(1)} \rightarrow \pi^k, \quad K_{\pi^k}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_\theta^{(1)} \rightarrow p_\theta, \quad K_{p_\theta}^{(1)} \rightarrow 0, \quad K_\lambda^{(1)} \rightarrow \partial_k \pi^k + e p_\theta, \quad (5.52)$$

con los cuales se podrá definir la matriz simplética en el primer proceso de iteración para ser definida en la forma:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \equiv \frac{\delta K_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi^{A(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi^{B(1)}(\mathbf{y})}, \quad (5.53)$$

y que se expresa como:

$$M^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_l^k & 0 & 0 & 0 \\ \delta_k^l & 0 & 0 & 0 & -\partial_k^x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e \\ 0 & -\partial_l^x & 0 & -e & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.54)$$

Es posible mostrar que la matriz (5.54) es nuevamente singular, por tanto, existe un nuevo modo cero asociada a ella y que deberá satisfacer la siguiente ecuación:

$$\int d^3\mathbf{x} \tilde{v}^{A(1)}(\mathbf{x}) M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (5.55)$$

Asumiendo que el autovector  $\tilde{v}^{(1)}(\mathbf{x})$  tiene la forma

$$\tilde{v}^{(1)}(\mathbf{x}) = \left( \alpha_i(\mathbf{x}) \quad \beta_i(\mathbf{x}) \quad \gamma(\mathbf{x}) \quad \delta(\mathbf{x}) \quad \theta(\mathbf{x}) \right), \quad (5.56)$$

donde  $i = 1, 2, 3$ , de (5.56) se puede mostrar que se debe satisfacer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \beta_k(\mathbf{y}) &= 0, \\ -\alpha_k(\mathbf{y}) + \partial_k^y \theta(\mathbf{y}) &= 0, \\ \delta(\mathbf{y}) &= 0, \\ -\gamma(\mathbf{y}) - e\theta(\mathbf{y}) &= 0, \\ \partial_i^y \beta_i(\mathbf{y}) + e\delta(\mathbf{y}) &= 0. \end{aligned}$$

La solución de ellas permite determinar que el vector nulo tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \tilde{v}^{A(1)}(\mathbf{x}) &= \left( \partial_k^y \theta(\mathbf{y}) \quad 0 \quad -e\theta(\mathbf{y}) \quad 0 \quad \theta(\mathbf{y}) \right) \\ &= \left( \partial_k^y \alpha(\mathbf{y}) \quad 0 \quad -e\alpha(\mathbf{y}) \quad 0 \quad \alpha(\mathbf{y}) \right), \end{aligned} \quad (5.57)$$

en la última relación se ha hecho el cambio  $\theta(\mathbf{x}) \rightarrow \alpha(\mathbf{x})$  y con  $\alpha(\mathbf{x})$  una cantidad arbitraria. Un nuevo vínculo resulta de (5.57), el cual será

consecuencia de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\Omega^{(1)} &= \int d^3x \tilde{v}^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_A(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\
&= \int d^3x \partial_i^x \alpha(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_i(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) - e \int d^3x \alpha(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \theta(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\
&\quad + \int d^3x \alpha(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \lambda(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\
&= \int d^3x \int d^3y \left\{ \partial_i^x \alpha(\mathbf{x}) \left[ \frac{1}{2} F_{kl}(\mathbf{y}) \left( \partial_k^y \frac{\delta A_l(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} - \partial_l^y \frac{\delta A_k(\mathbf{y})}{\delta A_i(\mathbf{x})} \right) + M^2 \left[ A_i(\mathbf{y}) \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{e} \partial_i^y \theta(\mathbf{y}) \right] \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - M^2 \alpha(\mathbf{x}) \left[ A_k(\mathbf{y}) + \frac{1}{e} \partial_k^y \theta(\mathbf{y}) \right] \partial_k^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ -\frac{1}{2} \partial_i^x \alpha(\mathbf{x}) \left( \delta_l^i \partial_k^x - \delta_k^i \partial_l^x \right) F_{kl}(\mathbf{x}) + M^2 \partial_i^x \alpha(\mathbf{x}) \left[ A_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{e} \partial_i^x \theta(\mathbf{x}) \right] \right. \\
&\quad \left. + M^2 \alpha(\mathbf{x}) \partial_k^x \left[ A_k(\mathbf{x}) + \frac{1}{e} \partial_k^x \theta(\mathbf{x}) \right] \right\} \\
&= \int d^3x \left\{ -\partial_i^x \alpha(\mathbf{x}) \partial_k^x F_{ki}(\mathbf{x}) + M^2 \partial_i^x \alpha(\mathbf{x}) \left[ A_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{e} \partial_i^x \theta(\mathbf{x}) \right] \right. \\
&\quad \left. + M^2 \alpha(\mathbf{x}) \partial_k^x \left[ A_k(\mathbf{x}) + \frac{1}{e} \partial_k^x \theta(\mathbf{x}) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Integrando por partes la última relación se obtiene que

$$\begin{aligned}
\Omega^{(1)} &= \int d^3x \left\{ \alpha(\mathbf{x}) \partial_i^x \partial_k^x F_{ki}(\mathbf{x}) - M^2 \alpha(\mathbf{x}) \partial_i^x \left[ A_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{e} \partial_i^x \theta(\mathbf{x}) \right] \right. \\
&\quad \left. + M^2 \alpha(\mathbf{x}) \partial_k^x \left[ A_k(\mathbf{x}) + \frac{1}{e} \partial_k^x \theta(\mathbf{x}) \right] \right\} \\
&= \int d^3x \alpha(\mathbf{x}) \left\{ \partial_i^x \partial_k^x F_{ki}(\mathbf{x}) - M^2 \partial_i^x \left[ A_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{e} \partial_i^x \theta(\mathbf{x}) \right] \right. \quad (5.58) \\
&\quad \left. + M^2 \partial_k^x \left[ A_k(\mathbf{x}) + \frac{1}{e} \partial_k^x \theta(\mathbf{x}) \right] \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora,  $\Omega^{(1)}$  es idénticamente cero, entonces, la relación (5.58) indica que no hay mas vínculos Lagrangianos asociados en la teoría y como conse-

cuencia la matriz simpléctica mantiene singular, un hecho característico de una teoría de gauge.

Con el objetivo de tornar regular la matriz simpléctica una condición de gauge deberá ser adicionada al potencial simpléctico. Se escogerá el gauge de Coulomb  $\Theta = \partial_k A_k + \frac{M^2}{e}\theta = 0$  deducido naturalmente por el método de Dirac. Usando el multiplicador de Lagrange  $\eta(\mathbf{x})$ , el cual incrementará la dimensión del espacio de configuración, se obtendrá el segundo Lagrangiano iterativo:

$$\mathcal{L}^{(2)} = \dot{A}_k \pi^k + \dot{\theta} p_\theta + \Omega^{(0)} \dot{\lambda} + \Theta \dot{\eta} - \mathcal{H}^{(2)} \quad (5.59)$$

donde

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_{\Theta=0}^{(1)} = \frac{1}{2} (\pi^k)^2 + \frac{1}{2} \frac{e^2}{M^2} p_\theta^2 + \frac{1}{4} F_{kl} F_{kl} + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_k + \frac{1}{e} \partial_k \theta \right]^2. \quad (5.60)$$

Se escogerá el nuevo conjunto de variables simplécticas como siendo:  $\xi_k^{(2)} = (A_k, \pi^k, \theta, p_\theta, \lambda, \eta)$  y de (5.60) se determinara los siguientes elementos de la uno forma canónica:

$$\begin{aligned} K_{A_k}^{(2)} &\rightarrow \pi^k & , & & K_{\pi^k}^{(2)} &\rightarrow 0 & , & & K_{\theta}^{(2)} &\rightarrow p_\theta & , & & K_{p_\theta}^{(2)} &\rightarrow 0, \\ K_{\lambda}^{(2)} &\rightarrow \partial_k \pi^k + e p_\theta & , & & K_{\eta}^{(2)} &\rightarrow \partial_k A_k + \frac{M^2}{e} \theta. \end{aligned} \quad (5.61)$$

De (5.61) se determina la matriz dos-forma simpléctica en el segundo orden del proceso de iteración con los siguientes elementos de matriz:

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi^{A(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi^{B(2)}(\mathbf{y})}, \quad (5.62)$$

que se representa en la forma:

$$M^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\delta_l^k & 0 & 0 & 0 & -\partial_k^x \\ \delta_k^l & 0 & 0 & 0 & -\partial_k^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \frac{M^2}{e} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & e & 0 \\ 0 & -\partial_l^x & 0 & -e & 0 & 0 \\ -\partial_l^x & 0 & -\frac{M^2}{e} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (5.63)$$

Siendo que  $M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  no es singular, la inversa de ésta cantidad es calculada a partir de:

$$\int d^3z M_{AC}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) [M^{CB(2)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (5.64)$$

Considerando que  $[M^{CB(2)}]^{-1}$  tiene la siguiente forma:

$$[M^{AB(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_{1_{lm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_{2_{lm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_{3_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_{4_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_{5_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \alpha_{6_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \beta_{1_{lm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_{2_{lm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_{3_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_{4_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_{5_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \beta_{6_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \gamma_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \gamma_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \theta_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \theta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \zeta_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \zeta_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \zeta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \zeta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \zeta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \zeta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ \rho_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \rho_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \rho_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \rho_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \rho_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \rho_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{pmatrix},$$

donde sus componentes están por determinar. A partir de (5.64) se puede mostrar que dichas componentes satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\partial_l^x \alpha_{1_{lm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{M^2}{e} \gamma_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_l^x \alpha_{2_{lm}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{M^2}{e} \gamma_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_l^x \alpha_{3_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{M^2}{e} \gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_l^x \alpha_{4_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{M^2}{e} \gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_l^x \alpha_{5_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{M^2}{e} \gamma_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -\partial_l^x \alpha_{6_i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \frac{M^2}{e} \theta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\partial_l^x \beta_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\theta_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_l^x \beta_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\theta_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_l^x \beta_{3_l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\theta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_l^x \beta_{4_l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\theta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_l^x \beta_{5_l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\theta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
-\partial_l^x \beta_{6_l}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - e\theta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e\zeta_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\gamma_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e\zeta_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\gamma_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e\zeta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\gamma_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e\zeta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\gamma_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e\zeta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\gamma_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + e\zeta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\theta_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{M^2}{e} \rho_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\theta_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{M^2}{e} \rho_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\theta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{M^2}{e} \rho_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
-\theta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{M^2}{e} \rho_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\theta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{M^2}{e} \rho_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\theta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \frac{M^2}{e} \rho_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{1_{km}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \zeta_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\alpha_{2_{km}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \zeta_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta_m^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
\alpha_{3_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \zeta_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\alpha_{4_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \zeta_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\alpha_{5_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \zeta_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
\alpha_{6_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \zeta_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\beta_{1_{km}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \rho_{1_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta_m^k \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
-\beta_{2_{km}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \rho_{2_m}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\beta_{3_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \rho_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\beta_{4_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \rho_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\beta_{5_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \rho_5(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\beta_{6_k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_k^x \rho_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

Resolviendo éstas, se puede mostrar que,

$$[M^{AB(2)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \quad (5.65)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \left( \delta_{kl} - \frac{\partial_k^x \partial_l^x}{D_x} \right) & 0 & -\frac{M^2}{e} \frac{\partial_k^x}{D_x} & 0 & -\frac{\partial_k^x}{D_x} \\ -\left( \delta_{kl} - \frac{\partial_k^x \partial_l^x}{D_x} \right) & 0 & e \frac{\partial_k^x}{D_x} & 0 & -\frac{\partial_k^x}{D_x} & 0 \\ 0 & e \frac{\partial_l^x}{D_x} & 0 & \left( 1 + \frac{M^2}{D_x} \right) & 0 & \frac{e}{D_x} \\ -\frac{M^2}{e} \frac{\partial_l^x}{D_x} & 0 & -\left( 1 + \frac{M^2}{D_x} \right) & 0 & \frac{M^2}{e} \frac{1}{D_x} & 0 \\ 0 & -\frac{\partial_l^x}{D_x} & 0 & -\frac{M^2}{e} \frac{1}{D_x} & 0 & -\frac{1}{D_x} \\ -\frac{\partial_l^x}{D_x} & 0 & -\frac{e}{D_x} & 0 & \frac{1}{D_x} & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (5.66)$$

donde se ha definido el operador diferencial  $D_x \equiv \nabla_x^2 - M^2$ . Con esta matriz se puede determinar los corchetes generalizados entre las componentes de la variable simplética  $\xi_k^{(2)} = (A_k, \pi^k, \theta, p_\theta, \lambda, \eta)$  obteniendo los

siguientes resultados relevantes:

$$\begin{aligned}
 \left\{ A_i(\mathbf{x}), \pi^j(\mathbf{y}) \right\} &= \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i^x \partial_j^x}{\partial_i^x \partial_i^x} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 \left\{ \theta(\mathbf{x}), p_\theta(\mathbf{y}) \right\} &= \left( 1 + \frac{M^2}{D_x} \right) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 \left\{ A_i(\mathbf{x}), p_\theta(\mathbf{y}) \right\} &= -\frac{M^2}{e} \frac{\partial_i^x}{D_x} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
 \left\{ \pi^k(\mathbf{x}), \theta(\mathbf{y}) \right\} &= e \frac{\partial_k^x}{D_x} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
 \end{aligned} \tag{5.67}$$

que comparados con su contraparte, los corchetes de Dirac se observa su equivalencia.

# Bibliografía

- [1] A. Ignatiev and G. Joshi, *Phys. Rev.* **D53**, 984 (1996).
- [2] A. Goldhaber and M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.* **43**, 277 (1971).
- [3] Liang-Cheng Tu, J. Luo, and G. Gilles, *Rep. Prog. Phys.* **68**, 77 (2005).
- [4] E. R. Williams, J. E. Faller, and H. Hill, *Phys. Rev. Lett.* **26**, 721 (1971).
- [5] M. A. Chernikov, C. J. Gerber, H. R. Ott, and H. J. Gerber, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3383 (1992).
- [6] L. Bass and E. Schroödinger, *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **232**, 1 (1955).
- [7] J. D. Barrow and R. R. Burman, *Nature (London)* **307**, 14 (1984). // E. Fischbach et al., *Phys. Rev. Lett.* **73**, 514 (1994).
- [8] J. M. Cornwall, *Phys. Rev.* **D10**, 500, (1974).
- [9] R. Jackiw and K. Johnson, *Phys. Rev.* **D8**, 2386, (1973).
- [10] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.
- [11] K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics, Lectures Notes in Physics*, Vol. **169**, Springer, New York, 1982.

- [12] A. Hanson, T. Regge and G. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1976.
- [13] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.
- [14] L. Faddeev and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 1692 (1988).
- [15] R. Jackiw, *Quantization Without Tears*, hep-th/9306075.
- [16] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett.*, **A7**, 1737 (1992).  
J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett.*, **A7**, 4981 (1992).  
H. Montani and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett.*, **A8**, 3387 (1993).
- [17] J. M. Cornwall, *Phys. Rev.* **D10**, 500, (1974).
- [18] B.M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Gauge Invariance of Proca Electrodynamics*, work presented in SILAFAE 2014.
- [19] A. Foussats, C. Repetto, O. P. Zandron and O. S. Zandron, *Int. J. Mod. Phys*, **36**, 2923 (1997).

## Capítulo 6

# Teoría de Fotones Masivos en las Coordenadas de Plano Nulo

### 6.1. Introducción

*Se procederá a realizar un estudio de la teoría de fotones masivos en las coordenadas de plano nulo. Inicialmente se realizará un análisis canónico de la teoría utilizando la formulación de Dirac con el fin de deducir la estructura de vínculos de la teoría y comparar ésta con los resultados derivados con aquellos que resultan del análisis de la teoría en las coordenadas de instante forma. Dada la libertad de gauge de la teoría se pretende deducir los corchetes de Dirac para los grados de libertad utilizando la condición de gauge de plano nulo.*

*Posteriormente se procederá a realizar un estudio de la teoría utilizando la formulación de Faddeev-Jackiw. Se pretende deducir todos los vínculos d Lagrangianos y mostrar que la libertad de gauge también se*

hace manifiesta en este formalismo. Con el fin de deducir los corchetes generalizados, nuevamente, se impondrá la condición de gauge d plano nulo. La equivalencia de los dos resultados se pretende demostrar.

## 6.2. Formulación de Dirac

La teoría electromagnética masiva es descrita por la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 \left[ A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta \right]^2, \quad (6.1)$$

a partir del cual es posible deducir las siguientes relaciones:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} = -F^{\nu\mu} \quad , \quad \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu\theta)} = \frac{M^2}{e} \left[ A^\nu + \frac{1}{e}\partial^\nu\theta \right].$$

De la última expresión, se determina que los momentos canónicos  $(\pi^\mu, p_\theta)$  conjugados a los campos  $(A_\mu, \theta)$  son:

$$\pi^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_+ A_\mu)} = F^{\mu+} \quad , \quad p_\theta = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_+\theta)} = \frac{M^2}{e} \left[ A_- + \frac{1}{e}\partial_-\theta \right] \quad (6.2)$$

de donde es posible deducir el siguiente conjunto de vínculos primarios:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &\equiv \pi^+ \approx 0, \\ \Omega_{2_a} &\equiv \pi^a - \partial_- A_a + \partial_a A_- \approx 0, \quad a = 1, 2 \\ \Omega_3 &\equiv p_\theta - \frac{M^2}{e} \left[ A_- + \frac{1}{e}\partial_-\theta \right] \approx 0, \end{aligned} \quad (6.3)$$

Con el fin de establecer la consistencia de los vínculos primarios es necesario introducir, inicialmente, la densidad Hamiltoniana canónica la cual es definida por:

$$\mathcal{H}_C = \pi^\mu \partial_+ A_\mu + p_\theta \partial_+ \theta - \mathcal{L}$$

Ahora, expresando la densidad Lagrangiana en las coordenadas de plano nulo,

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}M^2 \left[ A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\theta \right]^2 \\
&= \frac{1}{2}\pi^-\pi^- + \pi^a\partial_+A_a - \pi^a\partial_aA_+ - \frac{1}{4}F_{ab}F_{ab} + eA_+p_\theta + p_\theta\partial_+\theta \quad (6.4) \\
&\quad + \frac{1}{2}M^2 \left[ A_a + \frac{1}{e}\partial_a\theta \right] \left[ A^a + \frac{1}{e}\partial^a\theta \right],
\end{aligned}$$

se deduce

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_C &= \frac{1}{2}\pi^-\pi^- + \pi^-\partial_-A_+ + \pi^a\partial_aA_+ + \frac{1}{4}F_{ab}F_{ab} - eA_+p_\theta \\
&\quad + \frac{1}{2}M^2 \left( A_a + \frac{1}{e}\partial_a\theta \right) \left( A_a + \frac{1}{e}\partial_a\theta \right)
\end{aligned}$$

Así, el Hamiltoniano canónico tendrá la forma:

$$\begin{aligned}
H_C &= \int d^3x \left[ \frac{1}{2}\pi^-\pi^- + \pi^-\partial_-A_+ + \pi^a\partial_aA_+ + \frac{1}{4}F_{ab}F_{ab} - eA_+p_\theta \quad (6.5) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}M^2 \left( A_a + \frac{1}{e}\partial_a\theta \right) \left( A_a + \frac{1}{e}\partial_a\theta \right) \right]
\end{aligned}$$

Para una teoría que posee vínculos la dinámica de la misma es gobernada por el Hamiltoniano primario que para nuestro caso será definido como:

$$H_P \equiv H_C + \int d^3y \left[ u^1(y)\Omega_1(y) + u^{2a}(y)\Omega_{2a}(y) + u^3(y)\Omega_3(y) \right], \quad (6.6)$$

donde  $u^1$ ,  $u^{2a}$  y  $u^3$  son multiplicadores de Lagrange a ser determinados. Así, la evolución temporal de cualquier variable dinámica  $F(x)$  definida en el espacio de fase  $(A_\mu, \theta, \pi^\mu, p_\theta)$  es dada por:

$$\partial_+F = \left\{ F(x), H_P \right\}.$$

En este espacio de fase los corchetes fundamentales de Poisson no nulos entre las coordenadas fundamentales  $(A_\mu, \theta, \pi^\mu, p_\theta)$  son definidos por:

$$\left\{ A_\mu(x), \pi^\nu(y) \right\} = \delta_\mu^\nu \delta^3(x-y) \quad , \quad \left\{ \theta(x), p_\theta(y) \right\} = \delta^3(x-y) \quad (6.7)$$

Utilizando (6.6) y (6.7) es posible mostrar las siguientes relaciones:

$$\left\{ A_\mu(x), H_C \right\} = \delta_\mu^- \pi^-(x) + \delta_\mu^- \partial_-^x A_+(x) + \delta_\mu^a \partial_a^x A_+(x). \quad (6.8)$$

$$\left\{ \pi^\nu(x), H_C \right\} = \delta_+^\nu \left[ \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \right] - \delta_a^\nu \left[ \partial_b^x F_{ab}(x) + M^2 \left( A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) \right]. \quad (6.9)$$

$$\left\{ \theta(x), H_C \right\} = -e A_+(x), \quad (6.10)$$

$$\left\{ p_\theta(x), H_C \right\} = \frac{M^2}{e} \partial_a^x \left( A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right). \quad (6.11)$$

De igual manera, se deduce que los únicos corchetes de Poisson no nulos entre los vínculos primarios son:

$$\left\{ \Omega_{2_a}(x), \Omega_{2_b}(y) \right\} = -2 \delta_a^b \partial_-^x \delta^3(x-y), \quad (6.12)$$

$$\left\{ \Omega_3(x), \Omega_3(y) \right\} = -\frac{2M^2}{e^2} \partial_-^x \delta^3(x-y).$$

Así, la consistencia de vínculo primario  $\Omega_1(x)$  determina:

$$\begin{aligned} \partial_+^x \Omega_1(x) &= \left\{ \Omega_1(x), H_P \right\} = \left\{ \pi^+(x), H_C \right\} \\ &= \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \approx 0, \end{aligned}$$

que resulta en la existencia de un vínculo secundario que se denotara por:

$$\Omega_4(x) \equiv \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \approx 0. \quad (6.13)$$

De forma similar, al estudiar la consistencia de los vínculos  $\Omega_{2_a}$  y  $\Omega_3$  se deduce:

$$\begin{aligned} \partial_+^x \Omega_{2_a}(x) &= - \left[ \partial_b^x F_{ab}(x) + M^2 \left( A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) \right] + \partial_a^x \pi^-(x) \\ &\quad - 2 \partial_-^x u^{2_a}(x) \approx 0, \end{aligned} \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} \partial_+^x \Omega_3(x) &= \frac{M^2}{e} \partial_a^x \left( A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) - \frac{M^2}{e} \pi^-(x) \\ &\quad - \frac{2M^2}{e^2} \partial_-^x u^3(x) \approx 0, \end{aligned} \quad (6.15)$$

relaciones que se interpretan como condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange  $u^{2_a}$  y  $u^3$  implicando que no mas vínculos son generados a partir de  $\Omega_{2_a}$  y  $\Omega_3$ .

Ahora, dada la presencia del vínculo secundario  $\Omega_4$ , su consistencia deberá ser analizada, para ello se utilizaran las siguientes PP:

$$\begin{aligned} \left\{ \Omega_4(x), \Omega_1(y) \right\} &= 0, \\ \left\{ \Omega_4(x), \Omega_{2_b}(y) \right\} &= 0, \\ \left\{ \Omega_4(x), \Omega_3(y) \right\} &= 0. \end{aligned} \quad (6.16)$$

de manera que resulta:

$$\partial_+^x \Omega_4(x) = \left\{ \Omega_4(x), H_P \right\} = 0, \quad (6.17)$$

por lo tanto, no mas vínculos son generados en la teoría y con lo cual se identifica a  $(\Omega_1, \Omega_{2_a}, \Omega_3, \Omega_4)$  como el conjunto máximo de vínculos del campo de Maxwell masivo en las coordenadas de plano nulo. De las relaciones (6.12) y (6.16) es posible concluir que  $(\Omega_1, \Omega_4)$  constituye un conjunto de vínculo de primera clase en tanto que  $(\Omega_{2_a}, \Omega_3)$  se identifican como vínculos de segunda clase.

Dada la libertad de gauge consecuencia de la presencia de los vínculos de primeras clase, la correcta evolución temporal de los campos deberá ser considerada. Esta será mediada por el Hamiltoniano extendido que se define por:

$$\begin{aligned} H_E \equiv H_C + \int d^3 y \left[ u^1(y) \Omega_1(y) + u^{2_b}(y) \Omega_{2_b}(y) \right. \\ \left. + u^3(y) \Omega_3(y) + u^4(y) \Omega_4(y) \right], \end{aligned} \quad (6.18)$$

a partir del cual es posible deducir:

$$\begin{aligned} \partial_+ A_\mu(x) &= \delta_\mu^+ u^1(x) + \delta_\mu^- \left[ \pi^-(x) + \partial_-^x A_+(x) - \partial_-^x u^4(x) \right] \\ &\quad + \delta_\mu^a \left[ \partial_a^x A_+(x) + u^{2a}(x) - \partial_a^x u^4(x) \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

$$\begin{aligned} \partial_+ \pi^\nu(x) &= \delta_+^\nu \left[ \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \right] \\ &\quad + \delta_-^\nu \left[ \partial_b^x u^{2b}(x) + \frac{M^2}{e} u^3(x) \right] \\ &\quad - \delta_a^\nu \left[ \partial_b^x F_{ab}(x) + M^2 \left( A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) + \partial_-^x u^{2a}(x) \right] \end{aligned} \quad (6.20)$$

$$\partial_+ \theta(x) = -e A_+(x) + u^3(x) + e u^4(x). \quad (6.21)$$

$$\partial_+ p_\theta(x) = \frac{M^2}{e} \partial_a^x \left( A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) - \frac{M^2}{e^2} \partial_-^x u^3(x). \quad (6.22)$$

De (6.19) y (6.20) se determina que:

$$u^3 = e \left( A_+ + \frac{1}{e} \partial_+ \theta \right) - e u^4, \quad (6.23)$$

$$u^{2a} = F^{a-} + \partial_a u^4. \quad (6.24)$$

de manera que,

$$\begin{aligned} \partial_+ \pi^\nu &= \partial_+ F^{\nu+} = \delta_+^\nu \left[ \partial_- \pi^- + \partial_a \pi^a + e p_\theta \right] \\ &\quad + \delta_-^\nu \left[ \partial_b u^{2b} + \frac{M^2}{e} u^3 \right] \\ &\quad - \delta_a^\nu \left[ \partial_b F_{ab} + M^2 \left( A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) + \partial_- u^{2a} \right], \end{aligned}$$

a partir de la cual se deduce:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + M^2 A^\mu = -\frac{M^2}{e} \partial^\mu \theta + \delta_-^\mu \left( -\partial_a \partial_a u^4 + M^2 u^4 \right) + \delta_a^\mu \left( \partial_- \partial_a u^4 \right). \quad (6.25)$$

En forma similar, combinando (6.21) y (6.22) se obtiene:

$$\partial_\mu \left( A^\mu + \frac{1}{e} \partial^\mu \theta \right) = \partial_-^x u^4(x). \quad (6.26)$$

La consistencia de las ecuaciones compatibles con la completa libertad de gauge de la teoría y aquellas derivadas a nivel Lagrangiano se dará si.

La arbitrariedad en la dinámica de la teoría debido a la presencia de los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase será subsanada cuando dos condiciones de gauge son introducidas. Inicialmente, se considerarán las condiciones de gauge de plano nulo las cuales son definidas por:

$$A_- \approx 0 \quad , \quad \pi^- + \partial_-^x A_+ \approx 0. \quad (6.27)$$

Así, se introducirá la siguiente notación con el fin de incluir todos los vínculos junto con las condiciones de gauge que caracterizan la teoría:

$$\begin{aligned} \Theta_1(x) &\equiv \pi^+(x) \approx 0, \\ \Theta_{2_b}(x) &\equiv \pi^b(x) - \partial_-^x A_b(x) + \partial_b^x A_-(x) \approx 0, \quad a = 1, 2 \\ \Theta_3(x) &\equiv p_\theta(x) - \frac{M^2}{e} \left[ A_-(x) + \frac{1}{e} \partial_-^x \theta(x) \right] \approx 0, \\ \Theta_4(x) &\equiv \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \approx 0 \\ \Theta_5(x) &\equiv A_-(x) \approx 0 \\ \Theta_6(x) &\equiv \pi^-(x) + \partial_-^x A_+(x) \approx 0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

A partir de los corchetes de Poisson entre ellos es posible construir la matriz de vínculos de segunda clase  $G(x, y)$  donde sus elementos son definidos en la forma:

$$G_{ij}(x, y) \equiv \left\{ \Theta_i(x), \Theta_j(y) \right\},$$

que en forma explícita se expresa como:

$$C(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & -2\delta_a^b \partial_-^x & 0 & 0 & 0 & \partial_a^x \\ 0 & 0 & -\frac{2M^2}{e^2} \partial_-^x & 0 & 0 & -\frac{M^2}{e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & \partial_b^x & \frac{M^2}{e} & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x - y) \quad (6.29)$$

El método de Dirac requiere calcular la inversa de la matriz (6.29), para lo cual se propondrá que ésta sea de la forma:

$$C^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} A_1(x, y) & A_{2_b}(x, y) & A_3(x, y) & A_4(x, y) & A_5(x, y) & A_6(x, y) \\ B_{1_a}(x, y) & B_{2_{ab}}(x, y) & B_{3_a}(x, y) & B_{4_a}(x, y) & B_{5_a}(x, y) & B_{6_a}(x, y) \\ D_1(x, y) & D_{2_b}(x, y) & D(x, y) & D_4(x, y) & D_5(x, y) & D_6(x, y) \\ E_1(x, y) & E_{2_b}(x, y) & E_3(x, y) & E_4(x, y) & E_5(x, y) & E_6(x, y) \\ F_1(x, y) & F_{2_b}(x, y) & F_3(x, y) & F_4(x, y) & F_5(x, y) & F_6(x, y) \\ G_1(x, y) & G_{2_b}(x, y) & G_3(x, y) & G_4(x, y) & G_5(x, y) & G_6(x, y) \end{pmatrix} \quad (6.30)$$

Las matrices (6.29) y (6.30) deberán satisfacer la siguiente identidad:

$$\int d^3z C(x, z) C^{-1}(z, y) = \mathbf{I} \delta^3(x - y), \quad (6.31)$$

Al solucionar la ecuación (6.31), se determina las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \partial_-^x G_1(x, y) &= \delta^3(x - y), \\ \partial_-^x G_{2_b}(x, y) &= 0, \\ \partial_-^x G_3(x, y) &= 0, \\ \partial_-^x G_4(x, y) &= 0, \\ \partial_-^x G_5(x, y) &= 0, \\ \partial_-^x G_6(x, y) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2\partial_-^x B_{1_a}(x, y) + \partial_a^x G_1(x, y) &= 0, \\
-2\partial_-^x B_{2_{ab}}(x, y) + \partial_a^x G_{2_b}(x, y) &= \delta_{ab}\delta^3(x - y), \\
-2\partial_-^x B_{3_a}(x, y) + \partial_a^x G_3(x, y) &= 0, \\
-2\partial_-^x B_{4_a}(x, y) + \partial_a^x G_4(x, y) &= 0, \\
-2\partial_-^x B_{5_a}(x, y) + \partial_a^x G_5(x, y) &= 0, \\
-2\partial_-^x B_{6_a}(x, y) + \partial_a^x G_6(x, y) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{2M^2}{e^2}\partial_-^x D_1(x, y) - \frac{M^2}{e}G_1(x, y) &= 0, \\
-\frac{2M^2}{e^2}\partial_-^x D_{2_b}(x, y) - \frac{M^2}{e}G_{2_b}(x, y) &= 0, \\
-\frac{2M^2}{e^2}\partial_-^x D_3(x, y) - \frac{M^2}{e}G_3(x, y) &= \delta^3(x - y), \\
-\frac{2M^2}{e^2}\partial_-^x D_4(x, y) - \frac{M^2}{e}G_4(x, y) &= 0, \\
-\frac{2M^2}{e^2}\partial_-^x D_5(x, y) - \frac{M^2}{e}G_5(x, y) &= 0, \\
-\frac{2M^2}{e^2}\partial_-^x D_6(x, y) - \frac{M^2}{e}G_6(x, y) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\partial_-^x F_1(x, y) &= 0, \\
-\partial_-^x F_{2_b}(x, y) &= 0, \\
-\partial_-^x F_3(x, y) &= 0, \\
-\partial_-^x F_4(x, y) &= \delta^3(x - y), \\
-\partial_-^x F_5(x, y) &= 0, \\
-\partial_-^x F_6(x, y) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\partial_-^x E_1(x, y) + G_1(x, y) &= 0, \\
-\partial_-^x E_{2_b}(x, y) + G_{2_b}(x, y) &= 0, \\
-\partial_-^x E_3(x, y) + G_3(x, y) &= 0, \\
-\partial_-^x E_4(x, y) + G_4(x, y) &= 0, \\
-\partial_-^x E_5(x, y) + G_5(x, y) &= \delta^3(x - y), \\
-\partial_-^x E_6(x, y) + G_6(x, y) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_-^x A_1(x, y) + \partial_b^x B_{1_b}(x, y) + \frac{M^2}{e} D_1(x, y) - F_1(x, y) &= 0, \\
\partial_-^x A_{2_b}(x, y) + \partial_c^x B_{2_{cb}}(x, y) + \frac{M^2}{e} D_{2_b}(x, y) - F_{2_b}(x, y) &= 0, \\
\partial_-^x A_3(x, y) + \partial_b^x B_{3_b}(x, y) + \frac{M^2}{e} D_3(x, y) - F_3(x, y) &= 0, \\
\partial_-^x A_4(x, y) + \partial_b^x B_{4_b}(x, y) + \frac{M^2}{e} D_4(x, y) - F_4(x, y) &= 0, \\
\partial_-^x A_5(x, y) + \partial_b^x B_{5_b}(x, y) + \frac{M^2}{e} D_5(x, y) - F_5(x, y) &= 0, \\
\partial_-^x A_6(x, y) + \partial_b^x B_{6_b}(x, y) + \frac{M^2}{e} D_6(x, y) - F_6(x, y) &= \delta^3(x - y).
\end{aligned}$$

La solución de éste sistema de ecuaciones establece que la matriz  $C^{-1}(x, y)$  admite la siguiente forma:

$$C^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} A_1(x, y) & A_{2_b}(x, y) & A_3(x, y) & A_4(x, y) & 0 & A_6(x, y) \\ B_{1_c}(x, y) & B_{2_{cb}}(x, y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D_1(x, y) & 0 & D_3(x, y) & 0 & 0 & 0 \\ E_1(x, y) & 0 & 0 & 0 & E_5(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_4(x, y) & 0 & 0 \\ G_1(x, y) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.32}$$

con,

$$A_1(x, y) = -\frac{1}{2}(\partial_b^x \partial_b^x - M^2) \frac{1}{\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y)$$

$$A_{2_b}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial_b^x}{\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y)$$

$$A_3(x, y) = \frac{e}{2} \frac{1}{\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y)$$

$$A_4(x, y) = -\frac{1}{\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y)$$

$$A_6(x, y) = \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y)$$

$$B_{1_a}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial_a^x}{\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}}} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y) \quad , B_{2_{ab}}(x, y) = -\frac{\delta_{ab}}{2} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y)$$

$$D_1(x, y) = -\frac{e}{2} \frac{1}{\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y) \quad , D_3(x, y) = -\frac{e^2}{2M^2} \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y)$$

$$E_1(x, y) = \frac{1}{\partial_{\underline{x}} \partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y) \quad , E_5(x, y) = -\frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y)$$

$$F_4(x, y) = -\frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y),$$

$$G_1(x, y) = \frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(x - y).$$

A partir de (6.32) es posible construir los PD entre dos variables dinámicas  $\mathbf{A}(x)$  y  $\mathbf{B}(y)$  en la siguiente forma:

$$\left\{ \mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y) \right\}_D = \left\{ \mathbf{A}(x), \mathbf{B}(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}(x), \Theta_k(u) \right\} G_{kl}^{-1}(u, v) \left\{ \Theta_l(u), \mathbf{B}(y) \right\}. \quad (6.33)$$

Bajo la definición (6.33) se cumplen las siguientes identidades:

$$\begin{aligned}
\pi^+(x) &= 0, \\
\pi^b(x) - \partial_-^x A_b(x) &= 0, \quad a = 1, 2 \\
p_\theta(x) - \frac{M^2}{e^2} \partial_-^x \theta(x) &= 0, \\
\partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) &= 0, \\
A_-(x) &= 0, \\
\pi^-(x) + \partial_-^x A_+(x) &= 0.
\end{aligned} \tag{6.34}$$

De esta manera, se puede considerar como variables independientes los campos  $(A_+, A_a, \theta)$ , con lo cual se procede a calcular los PD entre ellos. Utilizando las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\left\{ A_+(x), \Theta_1(u) \right\} &= \delta^3(x-u), \\
\left\{ A_a(x), \Theta_{2_c}(u) \right\} &= \delta_a^c \delta^3(x-u), \\
\left\{ A_a(x), \Theta_4(u) \right\} &= -\partial_a^x \delta^3(x-u), \\
\left\{ \theta(x), \Theta_3(u) \right\} &= \delta^3(x-u), \\
\left\{ \theta(x), \Theta_4(u) \right\} &= e \delta^3(x-u),
\end{aligned} \tag{6.35}$$

se deduce, a partir de las expresiones (6.33) y (6.35), que los PD no nulos entre los campos  $(A_+, A_a, \theta)$  son:

$$\begin{aligned}
\left\{ A_+(x), A_b(y) \right\}_D &= -\frac{1}{2} \frac{\partial_b^x}{\partial_-^x \partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
\left\{ A_+(x), \theta(y) \right\}_D &= -\frac{e}{2} \frac{1}{\partial_-^x \partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
\left\{ A_a(x), A_b(y) \right\}_D &= -\frac{\delta_{ab}}{2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y), \\
\left\{ \theta(x), \theta(y) \right\}_D &= -\frac{e^2}{2M^2} \frac{1}{\partial_-^x} \delta^3(x-y).
\end{aligned} \tag{6.36}$$

### 6.3. Formulación de Faddeev-Jackiw

Con el fin de realizar un estudio de la teoría de fotones masivos en las coordenadas de plano nulo utilizando la formulación de Faddeev-Jackiw se expresará la ecuación (6.3) en la forma:

$$\begin{aligned} \pi^+ &= 0, \\ \pi^a - \partial_- A_a + \partial_a A_- &= 0, \quad a = 1, 2 \\ p_\theta - \frac{M^2}{e} \left[ A_- + \frac{1}{e} \partial_- \theta \right] &= 0, \end{aligned} \quad (6.37)$$

de manera que la relación (6.4) se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \pi^- \pi^- + \pi^a \partial_+ A_a - \pi^a \partial_a A_+ - \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} + e A_+ p_\theta + p_\theta \partial_+ \theta \\ &\quad + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right] \left[ A^a + \frac{1}{e} \partial^a \theta \right] \\ &= \pi^- \partial_+ A_- + \pi^a \partial_+ A_a + p_\theta \partial_+ \theta + \frac{1}{2} \pi^- \pi^- - \pi^- \partial_+ A_- - \pi^a \partial_a A_+ \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} + e A_+ p_\theta + \frac{1}{2} M^2 \left[ A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right] \left[ A^a + \frac{1}{e} \partial^a \theta \right] \end{aligned}$$

siendo que

$$\partial_+ A_- = \pi^- + \partial_- A_+.$$

Resulta que la densidad Lagrangiana se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \pi^- \partial_+ A_- + \pi^a \partial_+ A_a + p_\theta \partial_+ \theta - \left\{ \frac{1}{2} \pi^- \pi^- + \pi^- \partial_- A_+ + \pi^a \partial_a A_+ \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} - e A_+ p_\theta - \frac{1}{2} M^2 \left[ A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right] \left[ A^a + \frac{1}{e} \partial^a \theta \right] \right\}. \end{aligned}$$

con lo cual es posible identificar el primer Lagrangiano iterativo de la teoría como siendo:

$$\mathcal{L}^{(0)} = \pi^- \partial_+ A_- + \pi^a \partial_+ A_a + p_\theta \partial_+ \theta - \mathcal{H}^{(0)} \quad (6.38)$$

donde se define el potencial simpléctico por:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{(0)} = & \frac{1}{2}\pi^-\pi^- + \pi^-\partial_-A_+ + \pi^a\partial_aA_+ + \frac{1}{4}F_{ab}F_{ab} - eA_+p_\theta \\ & - \frac{1}{2}M^2\left(A_a + \frac{1}{e}\partial_a\theta\right)\left(A_a + \frac{1}{e}\partial_a\theta\right). \end{aligned} \quad (6.39)$$

El primer conjunto de variable simplécticas es identificadas como siendo:  $\xi_k^{(0)} = (A_-, \pi^-, A_a, \pi^a, \theta, p_\theta, A_+)$ , con lo cual es posible reconocer:

$$\begin{aligned} K_{A_-}^{(0)} & \rightarrow \pi^- \quad , \quad K_{A_a}^{(0)} \rightarrow \pi^a \quad , \quad K_{\theta}^{(0)} \rightarrow p_\theta \\ K_{\pi^-}^{(0)} & \rightarrow 0 \quad , \quad K_{\pi^a}^{(0)} \rightarrow 0 \quad , \quad K_{p_\theta}^{(0)} \rightarrow 0 \quad , \quad K_{A_+}^{(0)} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Los elementos de matriz de la matriz simpléctica se calcula de la siguiente expresión:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(0)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(0)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(0)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(0)}(\mathbf{y})}.$$

Utilizando las expresiones (6.40) se puede deducir que la matriz  $M^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  tendrá la siguiente representación:

$$M_{AB}^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b^a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (6.41)$$

Fácilmente, es posible observar que (6.41) es singular con el siguiente autovector con autovalor nulo:

$$\tilde{v}^{1(0)}(\mathbf{x}) = \left( 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ v(\mathbf{x}) \right), \quad (6.42)$$

donde  $v(\mathbf{x})$  es una función arbitraria. El vínculo asociado al autovector

$\tilde{\nu}^{1(0)}(\mathbf{x})$  es:

$$\begin{aligned}
\Omega_1^{(0)} &= \int d^3x v(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_{A_+}(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(0)}(y) \\
&= \int d^3x v(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_+(\mathbf{x})} \int d^3y \left[ \pi^-(y) \partial_-^y A_+(y) + \pi^a(y) \partial_a^y A_+(y) \right. \\
&\quad \left. - e A_+(y) p_\theta(y) \right] \\
&= - \int d^3x v(\mathbf{x}) \int d^3y \left[ \pi^-(y) \partial_-^x + \pi^a(y) \partial_a^x + e p_\theta(y) \right] \delta^3(y - \mathbf{x}) \\
&= - \int d^3x v(\mathbf{x}) \left[ \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) \right].
\end{aligned}$$

Dada la arbitrariedad de la función  $v(\mathbf{x})$ , es posible seleccionar el primer vínculo Lagrangiano para ser:

$$\Omega_1^{(0)} = \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x) = 0. \quad (6.43)$$

El primer Lagrangiano en el proceso de iteración se obtiene adicionando este vínculo a la parte canónica de  $L^{(0)}$  de la siguiente forma:

$$L^{(1)} = \pi^- \partial_+ A_- + \pi^a \partial_+ A_a + p_\theta \partial_+ \theta + \Omega_3^{(0)} \dot{\beta} - \mathcal{H}^{(1)} \quad (6.44)$$

donde se ha identificado  $A_+ \rightarrow \beta$  y:

$$\mathcal{H}^{(1)} = \mathcal{H}_{\Omega_1^{(0)}=0}^{(0)}. \quad (6.45)$$

El potencial simplectico  $\mathcal{H}^{(0)}$ , a menos de un termino de frontera, se puede expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^{(0)} &= \frac{1}{2} \pi^- \pi^- - A_+ \left[ \partial_- \pi^- + \partial_a \pi^a + e p_\theta \right] + \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} \\
&\quad - \frac{1}{2} M^2 \left( A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) \left( A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right),
\end{aligned} \quad (6.46)$$

de manera que la relación (6.45) toma la forma:

$$\mathcal{H}^{(1)} = \frac{1}{2} \pi^- \pi^- + \frac{1}{4} F_{ab} F_{ab} - \frac{1}{2} M^2 \left( A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) \left( A_a + \frac{1}{e} \partial_a \theta \right) \quad (6.47)$$

En este momento es necesario introducir un segundo conjunto de variables simplécticas  $\xi_k^{(1)}$ , las cuales se identifican como:  $\xi_1^{(1)} \equiv \xi_{A_-}^{(1)} = A_-$ ,  $\xi_2^{(1)} \equiv \xi_{A_a}^{(1)} = A_a$ ,  $\xi_3^{(1)} \equiv \xi_\theta^{(1)} = \theta$ ,  $\xi_4^{(1)} \equiv \xi_{\pi^-}^{(1)} = \pi^-$ ,  $\xi_5^{(1)} \equiv \xi_{\pi^a}^{(1)} = \pi^a$ ,  $\xi_6^{(1)} \equiv \xi_{p_\theta}^{(1)} = p_\theta$  y  $\xi_7^{(1)} \equiv \xi_\beta^{(1)} = \beta$ . De la expresión (6.44) se puede establecer que:

$$\begin{aligned} K_1^{(1)} &\equiv K_{A_-}^{(1)} = \pi^-, & K_2^{(1)} &\equiv K_{A_a}^{(1)} = \pi^a, & K_3^{(1)} &\equiv K_\theta^{(1)} = p_\theta, \\ K_4^{(1)} &\equiv K_{\pi^-}^{(1)} = 0, & K_5^{(1)} &\equiv K_{\pi^a}^{(1)} = 0, & K_6^{(1)} &\equiv K_{p_\theta}^{(1)} = 0, \\ K_7^{(1)} &\equiv K_\beta^{(1)} = \Omega_1^{(0)} = \partial_-^x \pi^-(x) + \partial_a^x \pi^a(x) + e p_\theta(x). \end{aligned}$$

Las componentes de la segunda matriz simpléctica  $M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  son determinadas por:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta a_B^{(1)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(1)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta a_A^{(1)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(1)}(\mathbf{y})},$$

a partir del cual se puede mostrar que  $M^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  se expresa como:

$$M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x \\ 0 & \delta_b^a & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_a^x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x & -\partial_b^x & -e & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (6.48)$$

Mostremos que la matriz (6.48) aún se mantiene singular. Vamos a proponer que la naturaleza singular de la matriz se debe a la existencia de un vector nulo el cual se considerará como siendo de la forma:

$$\tilde{v}^{A(1)}(\mathbf{x}) = \left( \alpha_1(\mathbf{x}) \quad \alpha_{2_a}(\mathbf{x}) \quad \alpha_3(\mathbf{x}) \quad \alpha_4(\mathbf{x}) \quad \alpha_{5_a}(\mathbf{x}) \quad \alpha_6(\mathbf{x}) \quad \alpha_7(\mathbf{x}) \right), \quad (6.49)$$

donde las cantidades  $\alpha_i(\mathbf{x})$  son funciones desconocidas que se deben determinar. Si (6.49) es un autovector de (6.48) se debe satisfacer la siguiente relación,

$$\int d^3x \tilde{v}^{A(1)}(\mathbf{x}) M_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0. \quad (6.50)$$

Al substituir (6.48) y (6.49) en (6.50) se puede deducir que el conjunto de funciones  $\alpha_i(\mathbf{x})$  satisfacen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_4(\mathbf{y}) &= 0, \\ \alpha_{5_b}(\mathbf{y}) &= 0, \\ \alpha_6(\mathbf{y}) &= 0, \\ -\alpha_1(\mathbf{y}) + \partial_-^y \alpha_7(\mathbf{y}) &= 0, \\ -\alpha_{2_b}(\mathbf{y}) + \partial_b^y \alpha_7(\mathbf{y}) &= 0, \\ -\alpha_3(\mathbf{y}) - e\alpha_7(\mathbf{y}) &= 0, \\ \partial_-^y \alpha_4(\mathbf{y}) + \partial_a^y \alpha_{5_a}(\mathbf{y}) + e\alpha_6(\mathbf{y}) &= 0,\end{aligned}$$

que al resolver establece:

$$\begin{aligned}\alpha_4(\mathbf{y}) &= 0, & \alpha_{5_b}(\mathbf{y}) &= 0, & \alpha_6(\mathbf{y}) &= 0 \\ \alpha_1(\mathbf{y}) &= \partial_-^y \alpha_7(\mathbf{y}), & \alpha_{2_b}(\mathbf{y}) &= \partial_b^y \alpha_7(\mathbf{y}), & \alpha_3(\mathbf{y}) &= -e\alpha_7(\mathbf{y}).\end{aligned}$$

De manera que el autovector  $\tilde{v}^{A(1)}(\mathbf{x})$  tendrá la forma:

$$\tilde{v}^{A(1)}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \partial_-^x \alpha_7(\mathbf{x}) & \partial_a^x \alpha_7(\mathbf{x}) & -e\alpha_7(\mathbf{x}) & 0 & 0 & 0 & \alpha_7(\mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

Entonces, si existe un vínculo adicional, este deberá ser consecuencia de la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}\Omega^{(1)} &= \int d^3x \tilde{v}^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \xi_A(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &= \int d^3x \tilde{v}_{A_-}^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_-(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) + \int d^3x \tilde{v}_{A_a}^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta A_a(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int d^3x \tilde{v}_\theta^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \theta(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y}) + \int d^3x \tilde{v}_\beta^{A(1)}(\mathbf{x}) \frac{\delta}{\delta \beta(\mathbf{x})} \int d^3y \mathcal{H}^{(1)}(\mathbf{y})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int d^3x \tilde{v}_{A_a}^{A(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[ \frac{1}{2} F_{bc}(y) \left( \delta_c^a \partial_b^y - \delta_b^a \partial_c^y \right) - M^2 \left( A_a(y) + \frac{1}{e} \partial_a^y \theta(y) \right) \right] \\
&\quad \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \int d^3x \tilde{v}_\theta^{A(1)}(\mathbf{x}) \int d^3y \left[ -\frac{M^2}{e} \left( A_a(y) + \frac{1}{e} \partial_a^y \theta(y) \right) \partial_a^y \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \right] \\
&= \int d^3x \partial_a^x \alpha_7(\mathbf{x}) \left[ -\frac{1}{2} \left( \partial_b^x F_{ba}(x) - \partial_c^x F_{ac}(x) \right) - M^2 \left( A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) \right] \\
&\quad - M^2 \int d^3x \alpha_7(\mathbf{x}) \partial_a^x \left[ A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right]
\end{aligned}$$

Integrando por partes se deduce que:

$$\begin{aligned}
\Omega^{(1)} &= - \int d^3x \alpha_7(\mathbf{x}) \partial_a^x \left[ \partial_b^x F_{ab}(x) - M^2 \left( A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right) \right] \\
&\quad - M^2 \int d^3x \alpha_7(\mathbf{x}) \partial_a^x \left[ A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right] \\
&= - \int d^3x \alpha_7(\mathbf{x}) \left[ \partial_a^x \partial_b^x F_{ab}(x) - M^2 \partial_a^x \left[ A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right] \right. \\
&\quad \left. + M^2 \partial_a^x \left[ A_a(x) + \frac{1}{e} \partial_a^x \theta(x) \right] \right] \\
&= 0
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Este resultado indica que el modo cero no dará un nuevo vínculo Lagrangiano y como consecuencia la matriz simpléctica continua siendo singular lo que caracteriza a la teoría de Maxwell como una teoría gauge.

Con el fin de obtener una matriz simpléctica no singular se deberá adicionar un término de gauge fixing al potencial simpléctico. Se escogerá el gauge de plano nulo  $\Theta = A_-(x) = 0$ . Usando la condición de consistencia por medio del multiplicador de Lagrange  $\eta(\mathbf{x})$ , lo cual aumentará la dimensión del espacio de configuración, obtendremos el segundo Lagrangiano iterativo, es decir:

$$L^{(2)} = \pi^- \partial_+ A_- + \pi^a \partial_+ A_a + p_\theta \partial_+ \theta + \Omega_3^{(0)} \dot{\beta} + \Theta \dot{\eta} - \mathcal{H}^{(2)} \tag{6.53}$$

donde

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathcal{H}_{\Omega_{it}^{(0)}, \Theta=0}^{(1)}$$

El potencial simpléctico  $\mathcal{H}^{(2)}$ , se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathcal{H}^{(2)} = \frac{1}{2}\pi^-\pi^- + \frac{1}{4}F_{ab}F_{ab} - \frac{1}{2}M^2 \left( A_a + \frac{1}{e}\partial_a\theta \right) \left( A_a + \frac{1}{e}\partial_a\theta \right) \quad (6.54)$$

Ahora, vamos a introducir las nuevas variables simplécticas  $\xi_k^{(2)}$ , las cuales se definen como:  $\xi_1^{(2)} \equiv \xi_{A_-}^{(2)} = A_-$ ,  $\xi_2^{(2)} \equiv \xi_{A_a}^{(2)} = A_a$ ,  $\xi_3^{(2)} \equiv \xi_\theta^{(2)} = \theta$ ,  $\xi_4^{(2)} \equiv \xi_{\pi^-}^{(2)} = \pi^-$ ,  $\xi_5^{(2)} \equiv \xi_{\pi^a}^{(2)} = \pi^a$ ,  $\xi_6^{(2)} \equiv \xi_{p_\theta}^{(2)} = p_\theta$ ,  $\xi_7^{(2)} \equiv \xi_\beta^{(2)} = \beta$ ,  $\xi_8^{(1)} \equiv \xi_\eta^{(1)} = \eta$ .

De la expresión (6.53) se identifica:

$$\begin{aligned} K_1^{(2)} &\equiv K_{A_-}^{(2)} = \pi^-, & K_2^{(2)} &\equiv K_{A_a}^{(2)} = \pi^a, & K_3^{(2)} &\equiv K_\theta^{(2)} = p_\theta, \\ K_4^{(2)} &\equiv K_{\pi^-}^{(2)} = 0, & K_5^{(2)} &\equiv K_{\pi^a}^{(2)} = 0, & K_6^{(2)} &\equiv K_{p_\theta}^{(2)} = 0, \\ K_7^{(2)} &\equiv K_\beta^{(2)} = \Omega_1^{(0)} = \partial_-^x \pi^- (\mathbf{x}) + \partial_a^x \pi^a (\mathbf{x}) + e p_\theta (\mathbf{x}) \\ K_8^{(2)} &\equiv K_\eta^{(2)} = \Theta (\mathbf{x}) = A_- (\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Las componentes de la matriz simpléctica  $M^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  son calculadas a partir de:

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\delta K_B^{(2)}(\mathbf{y})}{\delta \xi_A^{(2)}(\mathbf{x})} - \frac{\delta K_A^{(2)}(\mathbf{x})}{\delta \xi_B^{(2)}(\mathbf{y})}. \quad (6.55)$$

De la relación (6.55) se deducen que la matriz  $M^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  tendrá la siguiente estructura:

$$M_{AB}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta_b^a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & \delta_b^a & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_a^x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_-^x & -\partial_b^x & -e & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (6.56)$$

Esta matriz no es singular y por ende su inversa deberá ser calculada con el fin de determinar los corchetes generalizados. La inversa de la

matriz  $M^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  deberá se consecuencia de la siguiente identidad:

$$\int d^3z M_{AC}^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) [M^{CB(2)}]^{-1}(\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \delta_A^B \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (6.57)$$

donde se propondrá que  $[M^{AB(2)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  se puede expresar en la forma:

$$[M^{CB(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} A_1(z, y) & A_{2_b}(z, y) & A_3(z, y) & A_4(z, y) & A_{5_b}(z, y) & A_6(z, y) \\ B_{1_c}(z, y) & B_{2_{cb}}(z, y) & B_{3_c}(z, y) & B_{4_c}(z, y) & B_{5_{cb}}(z, y) & B_{6_c}(z, y) \\ C_1(z, y) & C_{2_b}(z, y) & C_3(z, y) & C_4(z, y) & C_{5_b}(z, y) & C_6(z, y) \\ D_1(z, y) & D_{2_b}(z, y) & D_3(z, y) & D_4(z, y) & D_{5_b}(z, y) & D_6(z, y) \\ E_{1_c}(z, y) & E_{2_{cb}}(z, y) & E_{3_c}(z, y) & E_{4_c}(z, y) & E_{5_{cb}}(z, y) & E_{6_c}(z, y) \\ F_1(z, y) & F_{2_b}(z, y) & F_3(z, y) & F_4(z, y) & F_{5_b}(z, y) & F_6(z, y) \\ G_1(z, y) & G_{2_b}(z, y) & G_3(z, y) & G_4(z, y) & G_{5_b}(z, y) & G_6(z, y) \\ H_1(z, y) & H_{2_b}(z, y) & H_3(z, y) & H_4(z, y) & H_{5_b}(z, y) & H_6(z, y) \\ A_7(z, y) & A_8(z, y) \\ B_{7_c}(z, y) & B_{8_c}(z, y) \\ C_7(z, y) & C_8(z, y) \\ D_7(z, y) & D_8(z, y) \\ E_{7_c}(z, y) & E_{8_c}(z, y) \\ F_7(z, y) & F_8(z, y) \\ G_7(z, y) & G_8(z, y) \\ H_7(z, y) & H_8(z, y) \end{pmatrix} \quad (6.58)$$

Al substituir (6.56) y (6.58) en (6.57) se deducen el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -D_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\ -D_{2_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H_{2_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -D_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -D_{5_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H_{5_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -D_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -D_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\ -D_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-E_{1_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-E_{2_{ab}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
-E_{3_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-E_{4_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-E_{5_{ab}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-E_{6_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-E_{7_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-E_{8_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-F_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-F_{2_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-F_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
-F_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-F_{5_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-F_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-F_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-F_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
A_{2_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x G_{2_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
A_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x G_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
A_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x G_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
A_{5_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x G_{5_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
A_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x G_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
A_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x G_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
A_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_-^x G_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{1_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_a^x G_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
B_{2_{ab}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_a^x G_{2_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
B_{3_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_a^x G_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
B_{4_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_a^x G_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
B_{5_{ab}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_a^x G_{5_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
B_{6_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_a^x G_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
B_{7_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_a^x G_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
B_{8_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_a^x G_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + eG_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
C_{2_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + eG_{2_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
C_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + eG_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
C_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + eG_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
C_{5_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + eG_{5_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
C_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + eG_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
C_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + eG_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
C_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + eG_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\partial_-^x D_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_c^x E_{1_c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - eF_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_-^x D_{2_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_c^x E_{2_{cb}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - eF_{2_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_-^x D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_c^x E_{3_c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - eF_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_-^x D_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_c^x E_{4_c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - eF_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_-^x D_{5_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_c^x E_{5_{cb}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - eF_{5_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_-^x D_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_c^x E_{6_c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - eF_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-\partial_-^x D_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_c^x E_{7_c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - eF_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
-\partial_-^x D_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \partial_c^x E_{8_c}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - eF_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-A_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-A_{2_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-A_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-A_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-A_{5_b}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-A_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-A_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= 0, \\
-A_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).
\end{aligned}$$

La solución de éstas ecuaciones determina que las únicas componentes diferentes de cero son:

$$\begin{aligned}
A_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
G_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad G_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
C_4(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{e}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad C_6(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
C_8(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{e}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
B_{4_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{\partial_a^x}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad B_{5_{ab}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
B_{8_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{\partial_a^x}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
F_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
E_{2_{ab}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
D_{2_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial_a^x}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad D_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \\
D_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= -\frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),
\end{aligned}$$

$$H_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad H_{2_a}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\partial_a^x}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$H_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{e}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad H_7(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{1}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

Así, la matriz  $[M^{(2)}]^{-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  se puede expresar como:

$$[M^{CB(2)}]^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{4_a}(z, \mathbf{y}) & B_{5_{ab}}(z, \mathbf{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_4(z, \mathbf{y}) & 0 & C_6(z, \mathbf{y}) \\ 0 & D_{2_b}(z, \mathbf{y}) & D_3(z, \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_{2_{ab}}(z, \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_3(z, \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4(z, \mathbf{y}) & 0 & 0 \\ H_1(z, \mathbf{y}) & H_{2_b}(z, \mathbf{y}) & H_3(z, \mathbf{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_8(z, \mathbf{y}) & & & & \\ 0 & B_{8_a}(z, \mathbf{y}) & & & & \\ 0 & C_8(z, \mathbf{y}) & & & & \\ D_7(z, \mathbf{y}) & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ 0 & G_8(z, \mathbf{y}) & & & & \\ H_7(z, \mathbf{y}) & 0 & & & & \end{pmatrix}. \quad (6.59)$$

De la expresión (6.59) se deduce el siguiente conjunto de corchetes generalizados:

$$\left\{ A_a(\mathbf{x}), \pi^-(\mathbf{y}) \right\} = -\frac{\partial_a^x}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$\left\{ A_a(\mathbf{x}), \pi^b(\mathbf{y}) \right\} = \delta_b^a \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$\left\{ \theta(\mathbf{x}), \pi^-(\mathbf{y}) \right\} = \frac{e}{\partial_{\underline{x}}} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$\left\{ \theta(\mathbf{x}), p_\theta(\mathbf{y}) \right\} = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}).$$

# Bibliografía

- [1] P. A. M. Dirac, *Lectures in Quantum Mechanics*, Benjamin, New York, 1964.  
K. Sundermeyer, *Constrained Dynamics*, Lectures Notes in Physics, Vol. 169, Springer, New York, 1982.  
A. Hanson, T. Regge and C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1976.
- [2] L. Faddeev and R. Jackiw, *Phys. Rev. Lett.*, **60**, 1692 (1988).
- [3] R. Jackiw, *Quantization Without Tears*, hep-th/9306075.
- [4] J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett.*, **A7**, 1737 (1992).  
J. Barcelos-Neto and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett.*, **A7**, 4981 (1992).  
H. Montani and C. Wotzasek, *Mod. Phys. Lett.*, **A8**, 3387 (1993).
- [5] J. M. Cornwall, *Phys. Rev.* **D10**, 500, (1974).
- [6] B.M. Pimentel and G. E. R. Zambrano, *Gauge Invariance of Proca Electrodynamics*, work presented in SILAFAE 2014.
- [7] A. Foussats, C. Repetto, O. P. Zandron and O. S. Zandron, *Int. J. Mod. Phys*, **36**, 2923 (1997).



# Capítulo 7

## Conclusiones

*Se observo que la invariancia de gauge de la electrodinámica de Proca es restaurada si un término de masa es adicionado con el soporte de un campo auxiliar el cual deberá cambiar apropiadamente bajo una transformación de gauge. Dada la simetría que posee la teoría, el Lagrangiano que la describe es singular, por tanto, métodos apropiados debieron ser implementados para estudiar consistentemente los vínculos que surgen en el problema.*

*Inicialmente se realizo un estudio canónico el problema en las coordenadas de instante forma utilizando el método de Dirac. Se determino, consistentemente, todos los vínculos de la teoría y el álgebra correspondiente y se demostró que ellos son de primera clase, lo que refleja la libertad de gauge que la teoría posee. Se construyo el Hamiltoniano que establece, apropiadamente, la dinámica del espacio de fase que garantizo la compatibilidad de las ecuaciones a nivel Lagrangiano y Hamiltoniano. Se pudo observar que a partir de las ecuaciones de movimiento se puede deducir un adecuado conjunto de condiciones de gauge que tornaron los vínculos de primera clase en segunda clase. Un conjunto de corchetes de Poisson consistentes con los vínculos fueron deducidos, permitiendo definir el espacio de fase reducido y la dinámica del mismo.*

*En seguida se estudio la invariancia de gauge de la electrodinámica*

ca de Proca utilizando el método de Faddeev-Jackiw. Se observó que el número de vínculos es menor que aquel obtenido a partir de la formulación de Dirac. La naturaleza de estos vínculos resultó ser más simple ya que no fue necesario realizar una clasificación en vínculos primarios o secundarios al igual que en vínculos de primera y de segunda clase. La simetría de gauge de la teoría se vio reflejada en la singularidad de la dos forma  $f_{AB}^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  que dio como consecuencia un nuevo modo cero  $\Omega^{(1)}$  que resultó idénticamente nulo. Con el fin de tornar ésta matriz simpléctica regular se introdujo la condición de gauge de Coulomb  $\Theta = \partial_k A_k + \frac{M^2}{e}\theta = 0$  via multiplicador de Lagrange al Lagrangiano.

Los paréntesis generalizados entre las variables relevantes del problema se determinaron de las componentes de la matriz  $[f^{AB(2)}]^{-1}$ . Se observó la equivalencia de estos con aquellos derivados por el método de Dirac. Finalmente, se pudo observar que el potencial simpléctico obtenido al final del proceso de iteración es exactamente el mismo Hamiltoniano que se resulta a través de varios pasos en el ortodoxo método de Dirac.

Posteriormente, la electrodinámica de Proca se estudió en las coordenadas del plano nulo. Inicialmente, el análisis canónico de la teoría se realizó utilizando el método de Dirac. Se dedujo los vínculos de primera clase que la teoría debe tener, no obstante, la estructura de los mismos es completamente diferente a aquella que se obtuvo en las coordenadas de instante forma. Además, un conjunto de vínculos de segunda clase resultaron, una característica propia de los Lagrangianos descritos en las coordenadas de plano nulo. Para tornar los vínculos de segunda de primera clase en segunda se introdujo las condiciones de gauge de plano nulo, lo que permitió deducir los paréntesis de Dirac que son compatibles con los mismos.

Finalmente, el método simpléctico fue utilizado para estudiar el problema en las coordenadas de plano nulo. Consistentemente se dedujeron los vínculos Lagrangianos correspondientes y se mostró al final de todo el proceso iterativo que la dos forma  $f^{(1)}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  se mantenía singular.

*Dicha singularidad fue eliminada implementando el gauge de plano nulo  $\Theta = A_-(x) = 0$ . Esto, permitió calcular la inversa de las dos forma  $[f^{AB(2)}]^{-1}(x, y)$  y se observó que sus componentes son equivalentes a los corchetes de Dirac anteriormente deducidos.*