Fundamentos de Matemáticas Generales

$$(a+b)^2$$

Segundo Javier Caicedo Zambrano
Héctor Jairo Portilla Obando

Editorial
Universidad de Nariño

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Editorial
Universidad de Nariño

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS GENERALES

FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICAS GENERALES

Segundo Javier Caicedo Zambrano

Héctor Jairo Portilla Obando

Editorial
Universidad de Nariño

Caicedo Z, Segundo Javier

Fundamento de Matemáticas Generales/ Segundo Javier Caicedo Z, Héctor Jairo Portilla.-San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2020.

250p.

Referencias

ISBN 978-958-5123-22-9 (digital)

1. Fundamentos de matemática. 2. Matemáticas Generales. 3. Matemáticas - - problemas, ejercicios. 4. Enseñanza de las matemáticas. 5. Principios generales de matemáticas.

511 C133 – SCDD ed. 22 Biblioteca Alberto Quijano Guerrero

Fundamentos de Matemáticas Generales
Talleres y Evaluaciones

ISBN: 978-958-5123-22-9
Primera Edición

Diseño y diagramación:
Segundo Javier Caicedo Zambrano
Diana Sofía Salas Chalapud
Nathaly Johana Rivadeneira

*A mis hijos Karen Yojana y Mario Camilo,
razón de ser y prolongación de mi existencia.*

Segundo Javier Caicedo Zambrano

*A mi esposa María Eugenia, mis hijos
Jairo, Oscar y Mario, por su apoyo y
cederme el tiempo dedicado al hogar
para la realización de esta obra.*

Héctor Jairo Portilla Obando

INTRODUCCIÓN

El mérito principal de esta publicación y del trabajo realizado, radica en la selección de las temáticas, de los ejemplos y el lenguaje sencillo que, sin restarle rigor a los conceptos, se presentan de forma clara y precisa, con la profundidad que corresponde, de modo que los puede entender cualquier estudiante que empieza sus estudios universitarios y quienes deseen recordar los principios del cálculo. Vale decir que la experiencia de más de 35 años de docencia en el área de matemáticas de sus autores, ha posibilitado la elaboración de este libro que, sin duda alguna, puede ser adoptado como libro de texto en cualquier programa profesional que tenga en su formación los fundamentos de matemáticas, particularmente, en los programas de las disciplinas de ciencias económicas y administrativas, de ciencias exactas y naturales y de ingeniería, de la Universidad de Nariño, Institución donde laboran sus autores, quienes se complacen de poner a su disposición esta importante obra y esperan contar con su retroalimentación. Confiamos que este libro sea de utilidad, no para ser reproducido en forma exacta en el aula de clases, sino para ser adaptado a su propia realidad y experiencia; contiene todas las temáticas de la asignatura de Matemáticas Generales que se ofrecen en la Universidad de Nariño.

Esta obra es un producto derivado del libro Introducción a los fundamentos de matemáticas generales (Portilla y Caicedo, 2019), producido por los mismos autores; obviamente, ha sido revisado, mejorado y ampliado y contiene nuevos ejercicios de aplicación. En este libro se desarrolló el capítulo de funciones trigonométricas, de modo que se pueda adoptar como un libro de texto, con lo cual, no sólo orienta a los profesores de fundamentos de matemáticas, sino, principalmente, ayuda a los estudiantes a mejorar su conocimiento, la comprensión y aplicación de los conceptos.

El libro está organizado en cuatro capítulos. El primero, Elementos de lógica matemática y de teoría de conjuntos, aborda temáticas relacionadas con proposiciones y aplicaciones, elementos de la teoría de conjuntos y propiedades, que inducen al estudiante al rigor de la matemática y de las demostraciones, finalizando con una sección de ejercicios. El segundo capítulo, Conjuntos numéricos, trata temas relacionados con los conjuntos de los números naturales, los números enteros, racionales y reales, propiedades y aplicaciones, equivalencias y conversiones de unidades de medida, entre otros aspectos. El capítulo tercero, Introducción al álgebra, aborda el estudio de polinomios, productos y cocientes notables, factorización, racionalización, solución de ecuaciones e inecuaciones, intervalos reales, problemas resueltos y propuestos. Finalmente, en el cuarto capítulo, Funciones, se estudia las funciones reales, algunas funciones destacadas, aplicación de las funciones y ecuaciones, relación entre grados y radianes, funciones trigonométricas directas e inversas y finaliza con la aplicación de las funciones trigonométricas a la resolución de triángulos.

Los autores

Octubre de 2020

CAPÍTULO 1.

Elementos de Lógica Matemática y de Teoría de Conjuntos

CAPÍTULO 1.
ELEMENTOS DE LÓGICA MATEMÁTICA Y DE TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1 ELEMENTOS DE LÓGICA MATEMÁTICA

Una de las mayores dificultades que tienen los estudiantes para asimilar, comprender los conocimientos matemáticos, analizar, deducir procesos matemáticos, radica en el uso y escaso manejo del lenguaje y la simbología propia de esta ciencia. Teniendo en cuenta lo anterior, los autores plantean elementos básicos y necesarios tanto de la lógica matemática como de la teoría de conjuntos. Con estos temas se pretende que los estudiantes se apropien de estos contenidos para su uso y aplicación durante el desarrollo de un curso de matemáticas básicas en Educación Superior.

1.1.1 Proposiciones

Una proposición es un enunciado que tiene un solo valor de verdad: Verdadero o Falso.

Una proposición se designa o denota con una letra; por ejemplo, $p, q, r, s, t; P, Q, R, S, T$ u otras.

En el lenguaje común, en la cotidianidad, el valor de verdad de una proposición depende de ciertas circunstancias, factores, conveniencias, tales como: tiempo, lugar, lenguaje convenido, contexto, entre otros.

Ejemplos:

Las siguientes declaraciones o expresiones, son ejemplos de proposiciones.

p: Cinco es un número natural

q: 0,75 es un número irracional

r: 10 no es número entero

s: Hoy es día lunes

t: Hace mucho calor

w: Jaime no es inteligente

De las propiedades de los conjuntos numéricos, se sabe que la proposición p es verdadera, q y r son falsas; sin embargo, el valor de verdad de las proposiciones s, t, w queda sujeto a circunstancias o factores como los descritos anteriormente. En efecto, para s, depende del día en que se enuncia la afirmación; para t, de las condiciones del estado del tiempo, estado climatológico.

En adelante, se utiliza esencialmente proposiciones matemáticas, excepto en algunos ejemplos donde se requiera ilustrar con otros casos.

1.1.2 Negación de una proposición

Operador $\sim$ (NO; NOT)

La negación de una proposición p se indica por $\sim p$, en la cual se lee: no p. Así, $\sim p$ es otra proposición llamada negación de p.

Si p es falsa, entonces, $\sim p$ es verdadera; y si p es verdadera, entonces, $\sim p$ es falsa.

Ejemplos:

Negando las proposiciones de los ejemplos anteriores, se tiene:

$\sim p$: cinco no es un número natural. $\sim q$: 0,75 no es un número irracional.

$\sim r$: 10 es número entero. $\sim s$: hoy no es día lunes.

$\sim t$: no hace mucho calor. $\sim w$: Jaime es inteligente.

Nota:

La negación de la negación de una proposición dada, equivale a la misma proposición.

Ejemplos:

$\sim(\sim p)$: Cinco es un número natural.

$\sim(\sim q)$: 0,75 es un número irracional.

$\sim(\sim r)$: 10 no es número entero.

Como se puede observar, la negación de la negación de una proposición, produce la proposición original; en este caso, se obtienen, respectivamente, las proposiciones iniciales p, q, r.

1.1.3 Proposición simple

Una proposición es simple (aislada) cuando no tiene operadores binarios; es decir, cuando existe una sola unidad de afirmación.

Ejemplos:

p: un número par es divisible por 2; q: los números naturales son infinitos.

1.1.4 Proposición compuesta

Una proposición es compuesta cuando tiene al menos un operador (conectivo) binario.

De aquí se deduce que la conjunción, disyunción y disyunción excluyente son proposiciones compuestas.

Una proposición compuesta, también se denomina molecular y, una simple, atómica.

1.1.4.1 Conjunción

Operador $\wedge$ (Y; AND)

Si p, q son proposiciones, entonces $p \wedge q$ es otra proposición llamada conjunción de p con q. En la expresión $p \wedge q$, se lee: p y q; también p and q.

Valor de verdad de una conjunción

Una conjunción es verdadera, únicamente cuando son verdaderas las dos proposiciones que la constituyen; en cualquier otro caso, la conjunción es falsa.

1.1.4.2 Disyunción

Operador $\vee$ (O; OR)

Si p, q son proposiciones, entonces, $p \vee q$ es otra proposición que se denomina disyunción de p con q. En la expresión $p \vee q$, se lee: p o q; o también p or q.

Valor de verdad de una disyunción

Una disyunción es verdadera, cuando es verdadera al menos una de las dos proposiciones que la constituyen; por tanto, una disyunción es falsa, únicamente cuando son falsas las dos proposiciones que la constituyen.

1.1.4.3 Disyunción excluyente o exclusiva

Operador $\underline{\vee}$ (ó; XOR)

Si p, q son proposiciones, entonces, $p \ \underline{\vee} \ q$ es otra proposición llamada disyunción excluyente de p con q. En la expresión $p \ \underline{\vee} \ q$ se lee p ó q, o también $p \ xor \ q$ pero no ambas ($p \ xor \ q$; $p \ or \ q$ but not both)

Valor de verdad de una disyunción exclusiva

Una disyunción excluyente es verdadera, cuando es verdadera únicamente una de las proposiciones que la constituyen; por lo tanto, la una excluye a la otra; es decir, una disyunción excluyente es verdadera cuando las dos proposiciones que la constituyen tienen diferente valor de verdad.

Tabla 1. Tablas de verdad de negación, conjunción, disyunción y disyunción excluyente

Negación		Conjunción			Disyunción			Disyunción excluyente		
p	$\sim p$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \vee q$	p	q	$p \underline{\vee} q$
v	f	v	v	v	v	v	v	v	v	f
		v	f	f	v	f	v	v	f	v
f	v	f	v	f	f	v	v	f	v	v
		f	f	f	f	f	f	f	f	f

Observando los valores de verdad de las tablas anteriores, se podría decir que una disyunción no es exigente, puesto que, para que sea verdadera, no es necesario que las proposiciones que la conforman sean verdaderas; pues, basta que sea verdadera una de ellas; en cambio, una conjunción es exigente, puesto que, para que sea verdadera, es decir, para que se cumpla, es necesario que las dos proposiciones que la constituyen, sean verdaderas.

Los símbolos $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, son operadores lógicos.

El símbolo $\sim$ es operador unario, porque se aplica o actúa sobre una proposición; en cambio, los operadores $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$ son operadores binarios, porque unen dos proposiciones. Estos operadores son conectivos lógicos fundamentales.

Ejemplos:

p: 100 es número natural. q: 0.85 es número entero. r: –120 es número entero.

La proposición $p \vee q$: 100 $es\ número\ natural$ $\boldsymbol{o}$ 0.85 $es\ número\ entero$; es verdadera, porque p es verdadera. Observe que no importa el valor de verdad de la proposición q que, para este ejemplo, es falsa.

$p \wedge q$: 100 $es\ un\ número\ natural$ $\boldsymbol{y}$ $0,85$ $es\ un\ número\ entero$, es falsa¸ porque q es falsa. Note que no importa el valor de verdad de p que, para este ejemplo es verdadera.

$p \wedge r$: $100\ es\ número\ natural\ \boldsymbol{y} - 120\ es\ número\ entero$ es verdadera porque, tanto p como r son verdaderas.

Sean las proposiciones siguientes:

s: $x\ es\ número\ racional.$ $\quad t$: $x\ es\ número\ irracional.$

$s\ \underline{\vee}\ t$: $x\ es\ número\ racional\ \ ó\ \ x\ es\ número\ irracional$

La proposición $s\ \underline{\vee}\ t$ es una disyunción excluyente porque, si x es racional, no puede ser irracional; o si x es irracional, entonces, x no es racional. En realidad, la proposición s excluye a la proposición t, y viceversa.

Así pues, si s es verdadera, entonces t es falsa; y si t es verdadera, s es falsa. En este ejemplo, la proposición $s\ \underline{\vee}\ t$ es verdadera.

1.1.4.4 Proposición implicación

Operador $\rightarrow$ (Si … entonces …; If … then …)

Sean las proposiciones arbitrarias p, q.

La expresión $p \rightarrow q$ es otra proposición, llamada implicación, la cual, puede constituir un enunciado condicional, hipotético o implicativo.

La expresión $p \rightarrow$ q se lee: p implica q; si p entonces q; p solamente si q; p sólo si q; q si p.

En la proposición $p \rightarrow$ q, p es el antecedente y q es el consecuente. Esta proposición es la de mayor aplicación en los procesos matemáticos deductivos, inclusive, en el lenguaje común.

Vale anotar que en procesos de demostración matemática de una proposición de la forma $p \rightarrow q$, se asume que p es una proposición verdadera; es decir, se asume que p es una verdad hipotética. En realidad, no tiene sentido considerar que la proposición p sea falsa, porque en este caso, la implicación es verdadera. Por esto, la proposición $p \rightarrow q$ constituye un enunciado hipotético.

La proposición p es la condición que se impone y, si se concluye que q es verdadera, entonces, la proposición implicación $(p \rightarrow q)$ es verdadera. Por esto, a la proposición $p \rightarrow q$ también se denomina enunciado condicional.

Ejemplos:

Un estudiante afirma lo siguiente ante sus compañeros:

Si apruebo las asignaturas del primer semestre, entonces, en vacaciones me voy a las playas de Cartagena.

Si terminado el semestre, el estudiante aprueba todas las asignaturas (antecedente verdadero) y, efectivamente, en vacaciones va a las playas de Cartagena (consecuente verdadero), entonces, el estudiante no miente; es decir, el estudiante cumple lo que promete; en este caso, la implicación es verdadera.

Pero si el estudiante aprueba todas las asignaturas (antecedente verdadero) y en vacaciones no viaja a las playas de Cartagena (consecuente falso), entonces, el estudiante no dice la verdad; es decir, no cumple lo que promete; en este caso, la implicación es falsa.

Ahora bien, si terminado el semestre, el estudiante no aprueba todas las asignaturas (antecedente falso), entonces el estudiante no está obligado a viajar a Cartagena; en este caso, si viaja a Cartagena (consecuente verdadero) o si no lo hace (consecuente falso), el estudiante no miente; ya que, si no se cumple la condición que él mismo se impuso, queda libre de tomar la decisión que desee. En consecuencia, en estos dos últimos casos, la implicación sería verdadera.

Valor de verdad de una implicación

Una implicación es falsa únicamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso, ya que, cuando el antecedente es falso, no interesa el valor de verdad del consecuente, puesto que, en cualquier caso, la implicación es verdadera.

Tabla 2. Tabla de verdad de la implicación

p	q	$p \rightarrow q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

1.1.4.5 Proposiciones recíprocas, contrarias y contra recíprocas.

Las proposiciones. $p \rightarrow q$ y $q \rightarrow p$ son recíprocas; se dice que la una es la recíproca de la otra.

Las proposiciones. $p \rightarrow q$ y $\sim p \rightarrow \sim q$ son contrarias; la una es la contraria de la otra.

Las proposiciones. $p \rightarrow q$ y $\sim q \rightarrow \sim p$ son contra recíprocas; la una es la contraria y recíproca de la otra.

Ejemplos:

Según lo anterior, se tiene las siguientes afirmaciones:

La recíproca de $r \rightarrow \sim q$ es la proposición: $\sim q \rightarrow\ r$.

La contraria de $\sim q \rightarrow\ r$ es la proposición: $\sim (\sim q) \rightarrow \sim\ r$ o sea $q \rightarrow \sim\ r$.

La contra recíproca de $r \rightarrow \sim q$ es la proposición: $q \rightarrow \sim\ r$.

En proposiciones recíprocas, el antecedente de la una, es el consecuente de la otra.

En proposiciones contrarias, el antecedente de la una, es la negación del antecedente de la otra, y el consecuente de una, es la negación del consecuente de la otra.

En proposiciones contra recíprocas, el antecedente de la una, es la negación del consecuente de la otra.

Cuando una proposición $p \rightarrow q$ es verdadera, se dice que p es condición suficiente para q, y que q es condición necesaria para p.

Cuando una implicación es verdadera, independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que figuran en ella, se dice que la implicación es tautológicamente verdadera, y en este caso se emplea el símbolo $\Longrightarrow$ para expresar en forma simbólica la implicación.

Nota:

También se puede utilizar el símbolo $\rightarrow$ para la implicación en general y el símbolo $\Longrightarrow$ para la implicación tautológica.

1.1.4.6 Proposición doble implicación

Operador: $\longleftrightarrow$ (p si y solo si q)

La proposición $p \longleftrightarrow q$ se lee: p si y solo si q; p solamente si q; y representa o es la "abreviación" o "notación" de la conjunción: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

La doble implicación, también se denomina bicondicional.

En la Tabla 3, se puede observar que una proposición bicondicional es verdadera, cuando las dos proposiciones que la constituyen tienen el mismo valor de verdad; y es falsa, cuando los valores de verdad de las dos proposiciones que la conforman son contrarios.

Tabla 3. Tabla de verdad de la doble implicación

p	p	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
				$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
v	v	v	v	v
v	f	f	v	f
v	v	v	f	f
f	f	v	v	v

Ejemplos:

1. *Una conjunción es verdadera, si y solo si, las proposiciones que la constituyen son verdaderas.*

   La anterior proposición es verdadera, porque si una conjunción es verdadera, implica o se concluye que, las proposiciones que la constituyen son verdaderas. Ahora bien, si las dos proposiciones que constituyen una conjunción son verdaderas, entonces, se concluye que dicha conjunción es verdadera; es decir, la una afirmación conlleva la otra.

2. *Una disyunción es verdadera, si y solo si, las proposiciones que la constituyen son verdaderas.*

   La anterior proposición es falsa, porque si una disyunción es verdadera, no implica o no se concluye que las dos proposiciones que la constituyen sean verdaderas, porque puede suceder que una de ellas sea verdadera y la otra sea falsa.

Ahora bien, si las dos proposiciones que conforman una disyunción son verdaderas, entonces, se puede concluir que dicha disyunción es verdadera.

En este ejemplo, la primera afirmación no implica la segunda, pero la segunda afirmación sí implica la primera.

Nota:

Si $p \rightarrow \mathrm{q}$ es falsa y $q \rightarrow \mathrm{p}$ es verdadera, entonces, la proposición $(p \rightarrow \mathrm{q}) \wedge (q \rightarrow \mathrm{p})$ es falsa; por lo tanto, la proposición $p \leftrightarrow \mathrm{q}$ es falsa.

Generalmente en matemáticas las definiciones se expresan como una proposición de doble implicación. Por ejemplo, si $p \Leftrightarrow q$ es una definición, entonces, en la proposición p se enuncia lo que se define, y en la proposición q se establece la condición o condiciones que se deben cumplir.

Ejemplos:

Sea n un número entero.

n es número par, si y solo si, existe un número entero k tal que $n = 2k$.

n es número impar, si y solo si, existe un número entero h tal que $n = 2h + 1$.

En las afirmaciones anteriores, se dan las definiciones de número par y de número impar; también se establece la condición que se debe cumplir para que un número entero sea par o sea impar.

Cuando una proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera, se dice que la una proposición es condición necesaria y suficiente para la otra.

Cuando una doble implicación es verdadera independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples, entonces, se dice que la doble implicación es tautológicamente verdadera; en este caso se utiliza el símbolo $\Leftrightarrow$ para expresar en forma simbólica la doble implicación. El símbolo $\Leftrightarrow$ se lee: equivalente; en este caso, las dos proposiciones que la constituyen son equivalentes.

Nota:

Se puede utilizar el símbolo $\leftrightarrow$ para la doble implicación en general, y el símbolo $\Leftrightarrow$ para la doble implicación tautológica.

1.1.5 Combinación de valores de verdad para n proposiciones

Para un número n de proposiciones simples, en total se obtiene, 2^n combinaciones de valores de verdad.

Para la primera proposición se asigna bien en fila o columna, $\frac{2^n}{2}$ valores verdaderos (v) y a continuación $\frac{2^n}{2}$ valores falsos $(\mathbf{f})$; para la segunda proposición, se asigna en forma alternada: $\frac{2^n}{4}$ valores verdaderos y $\frac{2^n}{4}$ valores falsos; para la tercera proposición, se asigna en forma alternada: $\frac{2^n}{8}$ verdaderos y $\frac{2^n}{8}$ falsos hasta completar 2^n valores. Se continúa así, en forma sucesiva, hasta llegar a la última proposición, para la cual se asigna alternadamente un valor verdadero y un valor falso hasta completar 2^n valores de verdad.

Ejemplo:

Para tres proposiciones simples p, q, r se obtiene un total de $2^3 = 8$, combinaciones de valores de verdad.

A la proposición p se asigna 4 valores **v** y a continuación 4 valores **f**; a q se asigna en forma alternada, 2 valores **v** y a continuación, 2 valores **f**, hasta completar 8 valores; a r se asigna alternadamente una **v** y una **f** (ver Tabla 4).

Tabla 4. Tabla de valores de verdad para tres proposiciones

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$
v	v	v
v	v	f
v	f	v
v	f	f
f	v	v
f	v	f
f	f	v
f	f	f

1.1.6 Fórmula bien formada F.B.F.

Intuitivamente, una proposición compuesta es una F.B.F. cuando se puede determinar de qué proposición se trata; a la vez, las dos proposiciones que la constituyen son F.B.F. Así, en forma sucesiva, hasta "llegar" a las proposiciones simples.

Cuando la proposición inicial es una negación, aquello que se niega, debe ser una F.B.F.

Mediante las siguientes reglas, se definen fórmulas bien formadas:

- Una proposición simple, es una F.B.F.
- La negación de una F.B.F, es también una F.B.F.
- Cuando se compone una F.B.F con los conectivos: $\wedge$, $\vee$, $\longrightarrow, \longleftrightarrow$, se obtiene una F.B.F.

- Una cadena de proposiciones simples, es una F.B.F, cuando el hecho de serlo, se deduce de un número finito de aplicaciones de las reglas anteriores.

Signos de agrupación, como el paréntesis, llaves, corchetes, se emplean para determinar una F.B.F. o bien para obtener o establecer la proposición deseada, puesto que se considera una sola proposición aquello que se asocia. La prioridad de los signos de agrupación, se toma de afuera hacia adentro.

Cuando no hay signos de agrupación, la prioridad de los conectivos para determinar la proposición es la siguiente: $\longleftrightarrow, \longrightarrow, \underline{\vee}, \vee, \wedge, \sim$.

Ejemplos:

La Tabla 5, contiene ejemplos de fórmulas bien formadas con la respectiva justificación.

Tabla 5. Ejemplos de expresiones de fórmulas bien formadas - FBF

EXPRESIONES DE F.B.F.	JUSTIFICACIÓN
p, q, r	Son proposiciones simples, por lo cual son F.B.F.
$\sim p, \sim q, \sim r$	Son negaciones de F.B.F.
$\sim p \wedge q$	Es una conjunción
$p \vee \sim q$	Es una disyunción.
$\sim p \rightarrow \sim r$	Es una implicación.
$\sim r \leftrightarrow \sim q$	Es una proposición bicondicional.
$(\sim r \leftrightarrow \sim q) \wedge r$	Es una conjunción de las proposiciones $(\sim r \leftrightarrow \sim q)$ y r.
$\sim p \rightarrow \sim r \wedge q$	Es una implicación; la prioridad es el conector$\rightarrow$sobre $\sim$. Se la puede escribir así: $\sim p \rightarrow (\sim r \wedge q)$

EXPRESIONES DE F.B.F.	JUSTIFICACIÓN
$p \wedge q \vee r$	Es una disyunción porque $\vee$ prima sobre $\wedge$; se la puede escribir así $(p \wedge q) \vee r$.
$p \wedge q \wedge r$	Se la puede expresar como $(p \wedge q) \wedge r$ o así: $p \wedge (q \wedge r)$. En cualquier caso, se obtiene el mismo valor de verdad. Cuando se elabora la tabla de verdad de $(p \wedge q) \wedge r$, primero se debe obtener los valores de $p \wedge q$ y luego para el segundo conectivo. Para la tabla de $p \wedge (q \wedge r)$, primero se obtiene los valores de $q \wedge r$ y luego para el primer conectivo.
$p \vee q \vee r$	Es una disyunción; se la puede expresar como $p \vee (q \vee r)$ o así: $(p \vee q) \vee r$; pues, con cualquiera se obtiene la misma tabla de verdad.
$p \rightarrow q \wedge (q \rightarrow p)$	Es una implicación; la prioridad es $\rightarrow$ sobre $\wedge$. El consecuente es la conjunción $q \wedge (q \rightarrow p)$ y ésta es conjunción porque la implicación está agrupada, lo cual hace una sola proposición.
$(p \rightarrow q) \wedge q \rightarrow p$	Es una implicación; el antecedente es $(p \rightarrow q) \wedge q$ y el consecuente es p.
$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	Es una conjunción; la primera proposición es $p \rightarrow q$ y la segunda es $q \rightarrow p$; las dos proposiciones están agrupadas. Recordar que la anterior proposición se la expresa así: $p \leftrightarrow q$, la cual es un bicondicional; por lo tanto, la conjunción de una implicación con su recíproca, es un bicondicional.
$p \leftrightarrow q \leftrightarrow r$	Es una bicondicional, ya sea por el primer $\leftrightarrow$ o por el segundo. Se la puede expresar así: $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$ o $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$. En cualquier caso, se obtiene el mismo valor de verdad. Cuando se elabora la tabla de verdad de $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$, primero se deben obtener los valores de $p \leftrightarrow q$ y luego para el segundo

EXPRESIONES DE F.B.F.	JUSTIFICACIÓN
	conectivo; y para la tabla de $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)$, primero se obtiene los valores de $q \leftrightarrow r$ y luego para el primer conectivo. En conclusión, es una F.B.F. puesto que, no importa cómo se agrupen las proposiciones, siempre se obtiene el mismo valor de verdad.

La Tabla 6 contiene ejemplos de expresiones no constituyen F.B.F.

Tabla 6. Ejemplos de expresiones que no son FBF

EXPRESIONES QUE NO SON F.B.F.	JUSTIFICACIÓN
$p \rightarrow q \rightarrow \mathrm{r}$	NO es una F.B.F., porque $p \rightarrow (\mathrm{q} \rightarrow \mathrm{r})$ es implicación por el primer conectivo; $(p \rightarrow \mathrm{q}) \rightarrow \mathrm{r}$ es implicación por el segundo conectivo y las tablas de verdad de ellas son diferentes.
$p \rightarrow q \wedge q \rightarrow p$	La implicación prima sobre la conjunción, hay dos conectivos de implicación y las tablas de verdad dependen de cuál implicación se tome primero.

Nota:

Para elaborar la tabla de verdad de una proposición en la cual no hay signos de agrupación, se debe tener en cuenta las siguiente la prioridad: $\sim$, $\wedge$, $\vee$, $\underline{\vee}$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Es decir, en una cadena de proposiciones primero se aplica $\sim$, luego $\wedge$, posteriormente $\vee$, y así sucesivamente.

Ejemplo:

En una única tabla, obtener los valores de verdad de las siguientes proposiciones:

$p \rightarrow q$; $(p \rightarrow q) \wedge r$; $q \wedge r$; $p \rightarrow (q \wedge r)$; $(p \rightarrow q) \rightarrow r$; $q \rightarrow r$; $p \rightarrow (q \rightarrow r)$.

Tabla 7. Tablas de verdad de proposiciones compuestas con tres proposiciones simples

p	q	r	$p \to q$	$(p \to q) \wedge r$	$q \wedge r$	$p \to (q \wedge r)$	$(p \to q) \to r$	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
v	v	v	v	v	v	v	v	v	v
v	v	f	v	f	f	f	f	f	f
v	f	v	f	f	f	f	v	v	v
v	f	f	f	f	f	f	v	v	v
f	v	v	v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	v	f	f	v	f	f	v
f	f	v	v	v	f	v	v	v	v
f	f	f	v	f	f	v	f	v	v
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**

Según la Tabla 7 los valores obtenidos en las columnas 8 y 10, se concluye que la proposición $(p \to q) \to r$, no es equivalente con $p \to (q \to r)$.

1.1.7 Proposiciones equivalentes

Dos proposiciones compuestas con las mismas proposiciones simples, son lógicamente equivalentes, si asignando los mismos valores de verdad a las proposiciones simples, las proposiciones compuestas resultan con el mismo valor de verdad. Sus respectivas tablas de verdad, son idénticas.

Ejemplos:

Como se puede observar en la Tabla 8, asignando los mismos valores de verdad a p y q en ambas tablas, los valores de verdad de las proposiciones compuestas $(p \to q)$ y $(\sim p \vee q)$ tienen los mismos valores de verdad; en consecuencia, las proposiciones $(p \to q)$ y $(\sim p \vee q)$ son equivalentes, lo cual se simboliza así: $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$.

Tabla 8. Equivalencia de la implicación con la disyunción

p	q	$p \to q$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$
v	v	f	v
v	f	f	f
f	v	v	v
f	f	v	v

La proposición: Carlos es estudiante y es futbolista, es equivalente a la proposición: Carlos es futbolista y es estudiante; ya que expresan lo mismo; no importa qué se mencione primero, bien sea la palabra estudiante o la palabra futbolista.

De igual manera, la proposición: Diana estudia inglés o Diana estudia matemáticas, es equivalente a la proposición: Diana estudia matemáticas o Diana estudia inglés.

Según lo anterior, la proposición $(p \wedge q)$ es equivalente a la proposición $(q \wedge p)$; lo mismo ocurre con las proposiciones: $(p \vee q)$ y $(q \vee p)$; es decir: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$; $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

En algunos casos de dos proposiciones equivalentes, una de ellas puede ser simple, por ejemplo: $(p \vee p) \Leftrightarrow p$.

También se puede afirmar lo siguiente: una proposición $\boldsymbol{p}$ es lógicamente equivalente con otra proposición $\boldsymbol{q}$, cuando para cada asignación de valor de verdad a las proposiciones simples que la componen, p y q tienen el mismo valor de verdad.

Nota:

Toda proposición, es equivalente con sí mismo: $p \Leftrightarrow p$.

También se puede usar el símbolo $\equiv$ para indicar equivalencia, o el signo $=$. Por ejemplo: $(p \vee p) \equiv p$; $(p \vee p) = p$.

1.1.8 Leyes de la lógica proposicional

En el álgebra de proposiciones, se utiliza equivalencias, las cuales se constituyen en leyes lógicas porque su empleo es muy frecuente. Se establece algunas de ellas.

En las siguientes expresiones, el símbolo $\Leftrightarrow$ se lee equivalente a; y es análogo al signo igual $(=)$ que representa igualdad en aritmética y en álgebra. Se emplea el símbolo, $\Rightarrow$, para indicar que la implicación es verdadera.

1. Involutiva

   La negación de la negación de una proposición es equivalente a la misma proposición.

   $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

2. Conmutativa

   La conjunción y la disyunción de proposiciones son conmutativas.

   $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ $\quad$ $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ $\quad$ $(p \veebar q) \Leftrightarrow (q \veebar p)$

3. Idempotencia

   La conjunción y la disyunción son idempotentes.

   $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ $\quad$ $(p \vee p) \Leftrightarrow p$

4. Identidad

   Si T es una proposición verdadera y C es cualquier proposición falsa, entonces, T y C actúan como elementos neutros (módulos), en la conjunción y la disyunción de proposiciones, respectivamente. Por esto también se llaman leyes modulativas.

   $(p \wedge T) \Leftrightarrow p$ $\quad$ $(p \vee C) \Leftrightarrow p$

5. Leyes de D'Morgan

   La negación de la disyunción de dos proposiciones, es equivalente a la conjunción de las negaciones de estas; y la negación de la conjunción de dos proposiciones, es equivalente a la disyunción de las negaciones de estas dos proposiciones. En símbolos se tiene:

   $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ $\quad$ $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$

   A la negación de una disyunción se la llama anti disyunción: en inglés NOT OR o simplemente NOR.

Además, a la proposición $\sim(p \vee q)$ o a su equivalente $(\sim p \wedge \sim q)$, se la denota por $p \downarrow q$.

El símbolo$\downarrow$es la flecha de Pierce.

A la negación de una conjunción se la llama anti conjunción: en inglés NOT AND o simplemente NAND.

Además, a la proposición $\sim(p \wedge q)$ o a su equivalente, $(\sim p \vee \sim q)$, se la denota por $p \uparrow q$.

El símbolo $\uparrow$ es el trazo de Sheffer.

En la proposición $(\sim p \wedge \sim q)$, (no p y no q), en el lenguaje común se lee: ni p ni q.

6. Asociativa

La conjunción, disyunción y disyunción excluyente, son asociativas.

$$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \qquad (p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r) \qquad (p \veebar q) \veebar r \Leftrightarrow p \veebar (q \vee r)$$

7. Distributiva

La conjunción se distribuye respecto a disyunción, y la disyunción respecto a la conjunción.

Distributiva por izquierda:

$$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Distributiva por derecha:

$$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r) \qquad (p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

8. Ley del tercio excluido

Como $p \vee \sim p$ es una tautología, se obtiene la siguiente equivalencia: $(p \vee \sim p) \Leftrightarrow T$

9. Leyes del complemento

$$(p \vee \sim p) \Leftrightarrow T \qquad (p \wedge \sim p) \Leftrightarrow C \qquad \sim C \Leftrightarrow T$$

10. Ley de la contracción conjuntiva o simplificación

$$(p \wedge q) \Rightarrow p \qquad (p \wedge q) \Rightarrow q$$

Una conjunción implica (tautológicamente) cualquiera de las dos proposiciones que la constituyen.

11. Silogismo hipotético

$[(p \to q) \wedge ((q \to r)] \Longrightarrow (p \to r)$

Según lo anterior, se dice que la implicación cumple con la ley transitiva.

12. Modus ponendo ponens -MPP

$[(p \to q) \wedge p] \Longrightarrow q$

Si una implicación es verdadera y su antecedente es verdadero, entonces, su consecuente es verdadero.

13. Modus tollendo tollens -MTT

$[(p \to q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$

Si una implicación es verdadera y su consecuente es falso, entonces, su antecedente es falso.

14. Modus tollendo ponens -MTP o silogismo disyuntivo

$[(p \vee q) \wedge \sim q] \Longrightarrow p$ $\qquad$ $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Longrightarrow q$

Si una disyunción es verdadera y una de sus dos proposiciones que la constituyen, es falsa, entonces, la otra proposición es verdadera.

Nota:

Tener presente que en las leyes 10, 11, 12, 13 y 14, el símbolo $\Rightarrow$ representa una implicación tautológica.

15. Leyes de absorción

Absorción total

$[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$ $\qquad$ $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$

Absorción parcial

$[p \vee (\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow p \vee q$ $\qquad$ $[p \wedge (\sim p \vee q)] \Leftrightarrow p \wedge q$

16. Ley de la adición

$p \Longrightarrow p \vee q$

17. Ley transitiva de la doble implicación (Bicondicional)

$$[(p \leftrightarrow q) \wedge ((q \leftrightarrow r)] \Longrightarrow (p \leftrightarrow r)$$

Se establecen otras tautologías, algunas de ellas también tienen aplicación o uso dentro de la matemática.

18. Equivalencia del bicondicional y de la negación del bicondicional.

$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$ $\quad$ $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \veebar q)$

$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow q)$ $\quad$ $\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow \sim q)$

Se observa que: $(\sim p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow \sim q)$

Ejemplos:

Sean las siguientes proposiciones p y q:

p: ABC *es un triángulo equilátero* $\quad$ $q: AB = BC = AC$

$p \leftrightarrow q$: ABC es triángulo equilátero, si y solo si, $AB = BC = AC$. La proposición $p \leftrightarrow q$ es verdadera; en realidad es la definición de triángulo equilátero.

$\sim p \leftrightarrow \sim q$: ABC no es triángulo equilátero, si y solo si, $AB \neq BC$ o $BC \neq AC$ o $AB \neq BC$. La proposición $\sim p \leftrightarrow \sim q$ es verdadera.

$\sim p \leftrightarrow q$: ABC no es triángulo equilátero, si y solo si, $AB = BC = AC$. La proposición $\sim p \leftrightarrow q$ es falsa.

$p \leftrightarrow \sim q$: ABC es triángulo equilátero, si y solo si, $AB \neq BC$ o $BC \neq AC$ o $AB \neq BC$. La proposición $p \leftrightarrow \sim q$ es falsa.

19. Equivalencia de la implicación

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$$

Esta equivalencia corresponde a la contrarrecíproca; es decir, una implicación es equivalente con su contrarrecíproca.

20. Equivalencia de la disyunción excluyente y de su negación.

$(p \veebar q) \Leftrightarrow \sim(p \leftrightarrow q)$ $\quad$ $\sim (p \veebar q) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q)$

$\sim (p \veebar q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ $\quad$ $\sim (p \veebar q) \Leftrightarrow (p \veebar \sim q)$

Se observa que: $(\sim p \veebar q) \Leftrightarrow (p \veebar \sim q)$

21. Valor de verdad de las proposiciones de una doble implicación verdadera

$[(p \leftrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$ $\quad$ $[(p \leftrightarrow q) \wedge q] \Longrightarrow p$

$[(p \leftrightarrow q) \wedge \sim p] \Longrightarrow \sim q$ $\quad$ $[(p \leftrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$

Se observa que, si una doble implicación es verdadera y una de las dos proposiciones que la forman, es verdadera, entonces la otra proposición también es verdadera; y si una doble implicación es verdadera y una de las dos proposiciones que la forman, es falsa, entonces la otra proposición también es falsa.

22. Valor de verdad de las proposiciones de una disyunción excluyente verdadera

$[(p \veebar q) \wedge p] \Longrightarrow \sim q$ $\quad$ $[(p \veebar q) \wedge q] \Longrightarrow \sim p$

$[(p \veebar q) \wedge \sim p] \Longrightarrow q$ $\quad$ $[(p \veebar q) \wedge \sim q] \Longrightarrow p$

Se observa que, si una disyunción excluyente es verdadera y una de las dos proposiciones que la forman, es verdadera, entonces la otra proposición es falsa; y si una disyunción excluyente es verdadera y una de las dos proposiciones que la forman, es falsa, entonces la otra proposición es verdadera.

Tanto las equivalencias del numeral 21 y las de este numeral, como sus conclusiones, se deducen de los valores de verdad que se obtienen en las respectivas tablas de verdad.

Contradicciones

Son contradicciones:

$p \wedge \sim p$ $\quad$ $\sim [(p \wedge q) \rightarrow p\,]$ $\quad$ $(p \wedge q) \;\wedge \sim q$

Las tautologías y las contradicciones se emplean para probar la consistencia interna de las argumentaciones.

Contingencias

Son contingencias: $p \wedge q$ $\quad$ $p \vee q$ $\quad$ $q \Longrightarrow p$ $\quad$ $(q \rightarrow p) \wedge r$ $\quad$ $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$

Las contingencias se utilizan en la construcción de los circuitos de control y automatismo.

Negación de una tautología y de una contradicción

La negación de una tautología es una contradicción, y la negación de una contingencia, es otra contingencia.

En el desarrollo de las unidades que siguen, se establecerán ejercicios, problemas de aplicación, definiciones, conjunciones, disyunciones, implicaciones, negación de proposiciones, tanto en la teoría como en los ejemplos; temas que están relacionados con los elementos de lógica matemática estudiados.

1.1.9 Circuitos asociados a las proposiciones.

A una proposición simple, se le asocia un circuito eléctrico elemental, con un interruptor (ver Gráfico 1). Para el circuito con un valor de verdad de la proposición, interesa únicamente la línea de corriente que tiene el interruptor. Para un valor verdadero, el circuito se cierra, como en el Gráfico 2, y para falso, el circuito se abre, como en el Gráfico 1.

A la salida de un circuito cerrado se asigna el 1 y al abierto el 0; por lo tanto, la salida de un circuito puede estar en estado 1 o estado 0 (ver Gráfico 2 y 3).

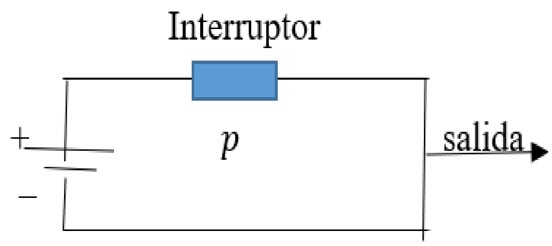


Gráfico 1. Circuito asociado a una proposición simple

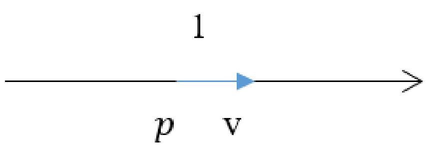


Gráfico 2. Circuito cerrado con una proposición simple

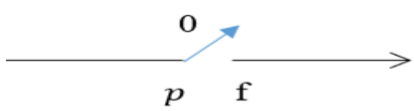


Gráfico 3. Circuito abierto con una proposición simple

A una conjunción $p \wedge q$, le corresponde un circuito con dos interruptores en serie, tal como se ilustra en el Gráfico 4.

Gráfico 4. Circuito de una conjunción

A una disyunción $p \vee q$, le corresponde un circuito con dos interruptores en paralelo, como se muestra en el Gráfico 5.

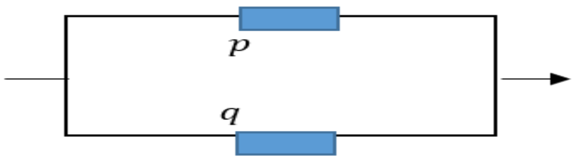


Gráfico 5. Circuito de una disyunción

Los circuitos asociados a $p \wedge q$, y $p \vee q$, para p verdadera y q falsa, son los Gráficos 6 y 7, respectivamente. Se puede observar que, en el Gráfico 6, el estado del circuito en la salida es 0, puesto que la proposición $p \wedge q$ es falsa; en cambio, el Gráfico 7 muestra que, en la salida el estado del circuito es 1, dado que la proposición $p \vee q$ es verdadera.

Gráfico 6. Salida del circuito de la conjunción p verdadero y q falso

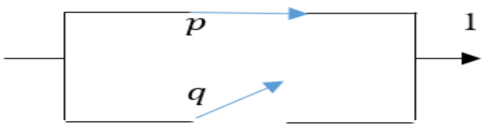


Gráfico 7. Salida del circuito de la disyunción p verdadero y q falso

Para construir el circuito de una proposición compuesta, se transforma la proposición aplicando leyes lógicas hasta obtener una proposición la cual sólo contenga operadores de conjunción, disyunción o negación. Si se obtiene la negación de proposiciones compuestas negadas, se aplica las leyes de D'Morgan u otra ley lógica.

Ejemplos:

1. Dibujar el circuito asociado a la proposición $p \veebar q$.

$$p \veebar q \Leftrightarrow \sim(p \leftrightarrow q)$$

$$\Leftrightarrow \sim[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$$

$$\Leftrightarrow \sim[(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]$$

$$\Leftrightarrow [\sim(\sim p \vee q) \vee \sim(\sim q \vee p)]$$

$$\Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$$

Nota:

En la cadena de equivalencias anterior, se aplicó la ley transitiva de $\leftrightarrow$. En la primera equivalencia, es decir para pasar de $p \underline{\vee} q$ a $\sim(p \leftrightarrow q)$, se usó la equivalencia de la disyunción excluyente. En la segunda equivalencia, se aplicó la equivalencia del bicondicional; en la tercera, se utilizó la equivalencia de la implicación; en la cuarta, la Ley de D'Morgan; en la quinta y última equivalencia, nuevamente se aplicó la ley de D'Morgan.

Conclusión:

Como $p \underline{\vee} q \Leftrightarrow [(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$; entonces, en ésta última proposición, se cumple la condición para dibujar el circuito, el cual, dada la equivalencia de proposiciones, también corresponde a la proposición $p \underline{\vee} q$.

El circuito de $[(p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)]$ representado en el Gráfico 8, es un circuito en paralelo porque se trata de una disyunción; a la vez, el circuito de la primera proposición, $p \wedge \sim q$, es un circuito en serie; de igual manera para $(q \wedge \sim p)$.

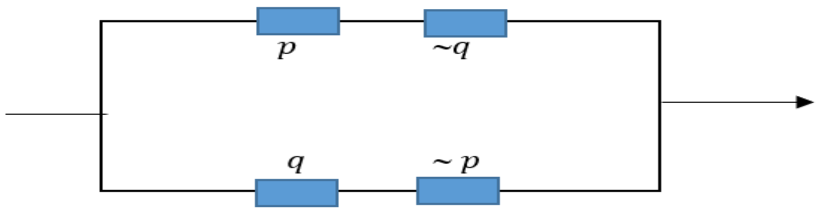


Gráfico 8. Circuito de la Disyunción Exclusiva

El circuito asociado a $p \underline{\vee} q$ con los siguientes valores de verdad, p verdadera y q falsa, queda como indica el Gráfico 9.

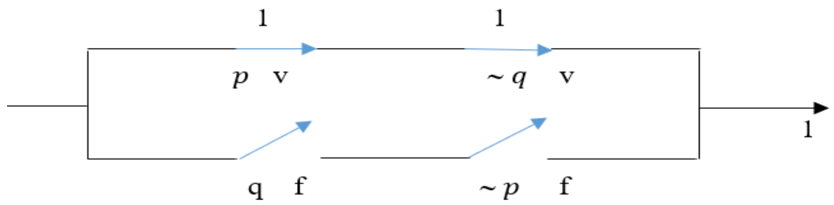


Gráfico 9. Circuito Disyunción Exclusiva con p verdadero y q falso

Se puede observar que, si p verdadera y q falsa, entonces, $p \vee q$ es verdadera; en el circuito, la salida está en 1; es decir, indica que hay paso de corriente.

1. Dibujar el circuito general asociado a las proposiciones $p \rightarrow q$; $p \leftrightarrow q$

$(p \to q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$, entonces el circuito tiene dos interruptores en paralelo, como se indica en el Gráfico 10.

$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \to q) \wedge (q \to p)] \Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)]$

En el circuito de $(p \leftrightarrow q)$, hay dos interruptores en paralelo que se conectan es serie con otros dos circuitos en paralelo, tal como se muestra en el Gráfico 11.

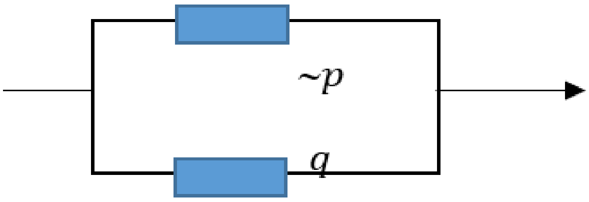


Gráfico 10. Circuito asociado a la implicación de p y q

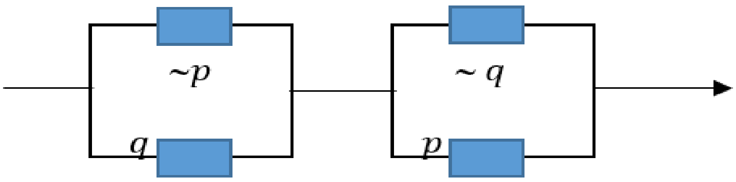


Gráfico 11. Circuito asociado a la doble implicación de p y q

Los circuitos asociados a $p \to q$ y a $p \leftrightarrow q$ para p falsa y para q falsa, se representan en los Gráficos 12 y 13, respectivamente. Se puede observar que para p falsa y q falsa, $p \to q$ y $p \leftrightarrow q$ son verdaderas. El estado de los circuitos es 1 en cada caso. Estos valores de verdad coinciden con los indicados en sus respectivas tablas de verdad.

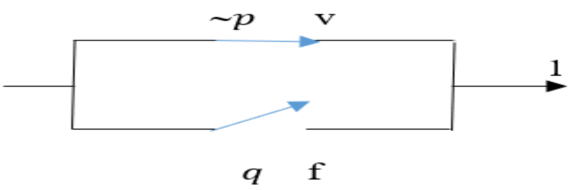


Gráfico 12. Circuito de la implicación de p y q con valores de verdad falsos

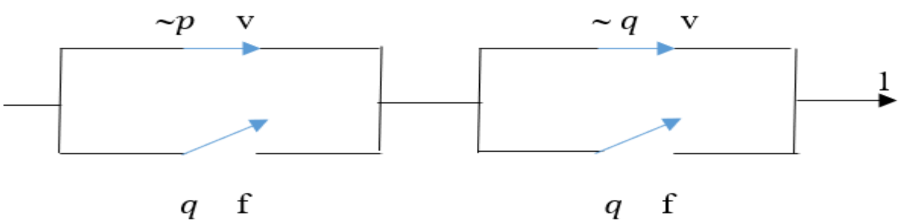


Gráfico 13. Circuito de la doble implicación de p y q con valores de verdad falsos

1.1.10 Ejercicios sobre proposiciones.

a. Analizar el valor de verdad de las proposiciones que se indican en seguida:

1. Una disyunción excluyente es falsa, *únicamente cuando* las proposiciones que la componen son falsas.
2. Si *una* de las proposiciones que constituyen una disyunción es verdadera, entonces la disyunción es verdadera.
3. Si *una* de las proposiciones que constituyen una conjunción es falsa, entonces la conjunción es falsa.
4. *Suficiente* con saber que una de las dos proposiciones que constituyen una conjunción sea falsa, para afirmar que la conjunción es falsa.
5. *Suficiente* con que una de las proposiciones que constituyen una disyunción sea verdadera, para afirmar que la disyunción es verdadera.
6. Si una implicación es verdadera y el antecedente es verdadero, entonces el consecuente es verdadero.

b. Seleccionar proposiciones que sean equivalentes.

1. Un triángulo ABC es equilátero, si y solo si, $AB = BC = AC$.
2. Dos vectores $v = (a, b)$ y $u = (c, d)$ son linealmente independientes. sí y solo si, $ad - bc = 0$.
3. Un triángulo ABC no es equilátero, si y solo si, $AB = BC = AC$.
4. Si x es número racional, entonces x es número real.
5. Dos vectores $v = (a, b)$ y $u = (c, d)$ no son linealmente independientes, si y solo si, $ad - bc \neq 0$.
6. Un triángulo ABC es equilátero, si y solo si, $AB \neq BC \neq AC$.
7. x no es número racional, o x es número real.
8. Un triángulo ABC no es equilátero, si y solo si, $AB \neq BC \neq AC$.
9. Si r es número redondo, entonces r es múltiplo de 10.
10. Si r es múltiplo de 10, entonces r es número redondo.
11. Si no r es número redondo, entonces r no es múltiplo de 10.

12. Si r no es múltiplo de 10, entonces r no es número redondo

c. Establecer o enunciar la recíproca, la contrarrecíproca y la contraria de la proposición:

Si z en múltiplo de 3, entonces z es múltiplo de 6.

d. Dibujar el circuito general asociado a cada proposición y el circuito para los valores de verdad asignados en la Tabla 9.

Tabla 9. Ejemplos de valores de verdad para el circuito de una proposición compuesta

Proposición compuesta	Valor de verdad de p	Valor de verdad de q	Valor de verdad de r
$[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$	f	v	v
	v	f	v
$[(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$	f	f	v
	v	v	v
$[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$	v	f	v
	v	v	v
$[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$	f	f	v
	v	f	v
$p \Rightarrow p \vee (q \wedge r)$	v	f	v

1.1.11 Funciones proposicionales.

Expresiones como: $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Q}$; $x^2 \geq 0$; $x + y = z$; $x < 5$; $x + y \in \mathbb{Q}$; entre muchas otras, son funciones proposicionales o proposiciones abiertas, porque el valor de verdad, depende de los valores que tomen las variables; en estos ejemplos, x, y, z.

A una proposición abierta con una variable x, se la denota por $P(x)$; con dos variables x, y, se denota por $F(x,y)$, y con tres variables x, y , z se la simboliza por $P(x,y,z)$ o también por $F(x,y,z)$.

Ejemplos:

$P(x)$: $x \in \mathbb{R}$ $R(x)$: $x \in \mathbb{Q}$ $S(x,y,z)$: $x + y = z$

$T(x)$: $x < 5$ $F(x,y)$: $x < y$ $G(x,y)$: $x + y \in \mathbb{Q}$

Cuando se asigna un valor a una variable en una proposición abierta, entonces se obtiene una proposición; esto porque, en este caso, toma un valor de verdad determinado.

Ejemplos:

$P(10)$: $10 \in \mathbb{R}$, es verdadera. $P(\sqrt{-8})$: $\sqrt{-8} \in \mathbb{R}$, es falsa.

$R(0.5)$: $0.5 \in \mathbb{Q}$, es verdadera. $R(\sqrt{2})$: $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, es falsa.

$S(1,4,3)$: $1 + 4 = 3$, es falsa. $T(4)$: $4 < 5$, es verdadera.

En muchos casos, cuando se emplea conectivos con proposiciones abiertas, se obtienen proposiciones, es decir adquieren un valor de verdad (ver Tabla 10).

Tabla 10. Ejemplos de conectivos lógicos con proposiciones abiertas

Proposición	Valor de verdad
$x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \geq 0$	Verdadero
$x \in \mathbb{R} \longrightarrow x \in \mathbb{Q}$	Falso
$x + y = z \leftrightarrow x = z - y$	Verdadero

1.1.12 Conjunto de referencia.

Como se observa, en proposiciones abiertas, el valor de verdad depende de cada valor específico que la variable o las variables toman en un determinado conjunto. Este conjunto, cuyos elementos están representados con una o más variables, se llama conjunto de referencia. En una determinada teoría o en algunos procesos, este conjunto es el conjunto de contexto, llamado también universal. Por ejemplo, en el desarrollo o estudio aritmético de los números reales, el conjunto universal o de contexto, es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$. En la teoría abstracta o general de conjuntos, se denota al conjunto universal con la letra U. esto es, cualquier conjunto que se considere en dicha teoría, es un subconjunto de U y cualquier elemento de un conjunto, es elemento de U.

Cuando se establece un conjunto de referencia en una proposición abierta, ésta queda más direccionada o más específica.

Ejemplo:

En $F(x): x < 5$, se sabe que se debe tomar números para obtener proposiciones, pero no se precisa en qué conjunto o qué clase de números. Pueden ser positivos, negativo, enteros, racionales, entre otros.

En cambio, en la proposición abierta $F(x): x < 5$, para $x \in \mathbb{N}$, sólo se debe considerar números naturales.

1.1.12.1 Conjunto solución.

El conjunto para cuyos elementos, se obtiene proposiciones verdaderas a partir de una proposición abierta, es el conjunto solución de la proposición abierta. El conjunto solución es un subconjunto del conjunto de referencia.

Ejemplos:

El conjunto solución de: $x < 5$, para $x \in \mathbb{N}$ es $S = \{1, 2, 3, 4\} \subset \mathbb{N}$.

El conjunto solución de: $x^2 \geq 0$, donde $x \in \mathbb{R}$ es $\mathbb{R}$; es decir, es el mismo conjunto de referencia. En estos casos, se dice que la proposición es universalmente verdadera.

1.1.12.2 Producto cartesiano.

Para dos conjuntos A y B, el producto cartesiano de A con B se denota por: $A \times B$.

$$A \times B = \{(x, y)/x \in A;\ y \in B\}.$$

Se puede observar que los elementos de $A \times B$ son pares ordenados de la forma (x, y).

Según la definición:

$$(x, y) \in A \times B \leftrightarrow\ x \in A\ \wedge\ y \in B\ \ y\ \ (x, y) \notin A \times B \leftrightarrow\ x \notin A \vee y \notin B$$

Ejemplo:

Para $A = \{1, 3, -5\}$ y $B = \{-1, 2, 5\}$, el producto cartesiano $A \times B$ es:

$$A \times B = \{(1, -1), (1, 2), (1, 5), (3, -1), (3, 2), (3, 5), (-5, -1), (-5, 2), (-5, 5)\}.$$

En general, si A tiene n elementos y B tiene m elementos, entonces $A \times B$ tiene $n \times m$ elementos.

En una proposición con dos variables x, y estas variables pueden representar elementos de conjuntos arbitrarios, que inclusive, pueden ser iguales.

Ejemplo:

El conjunto solución de la proposición $P(x, y)$: $x + y = 0$, para $x \in A \ \wedge \ y \in B$, dados en el ejemplo anterior, es: $S = \{(1, -1), (-5, 5)\}$ el cual es subconjunto de $A \times B$.

Nota:

Se puede realizar el producto cartesiano de un conjunto consigo mismo.

$$A \times A = \{(x, y)/x \in A \ \ y \ \ y \in A\}$$

Al producto cartesiano $A \times A$ se lo puede simbolizar por A^2.

Según lo anterior: $(x, y) \in A^2 \leftrightarrow \ x \in A \ \ \wedge \ \ y \in A$ y $(x, y) \notin A^2 \leftrightarrow \ x \notin A \vee y \notin A$.

La proposición $x \in A \ \wedge \ y \in A$, se puede denotar por $x, y \in A$. Luego. La forma extendida de la proposición $x, y \notin A$ es $x \notin A \vee y \notin A$.

1.1.12.3 Ejercicios de producto cartesiano.

Determinar el valor de verdad de cada proposición:

1. $x \notin A \wedge y \in A \rightarrow (x, y) \notin A^2$
2. $x \in A \wedge y \notin A \rightarrow (x, y) \notin A^2$
3. $(x, y) \notin A^2 \rightarrow x \notin A \wedge y \in A$
4. $(x, y) \notin A^2 \rightarrow x \in A \wedge y \notin A$
5. $x \notin A \wedge y \in A \leftrightarrow (x, y) \notin A^2$
6. $x \in A \wedge y \notin A \leftrightarrow (x, y) \notin A^2$
7. $x \notin A \wedge y \in B \rightarrow (x, y) \notin A \times B$
8. $x \in A \wedge y \notin B \rightarrow (x, y) \notin A \times B$
9. $(x, y) \notin A \times B \rightarrow x \notin A \wedge y \in B$
10. $(x, y) \notin A \times B \rightarrow x \in A \wedge y \notin B$
11. $(x, y) \notin A \times B \leftrightarrow x \notin A \wedge y \in B$
12. $(x, y) \notin A \times B \leftrightarrow x \in A \wedge y \notin B$

1.1.13 Cuantificadores

Una manera de obtener proposiciones en forma general a partir de funciones lógicas o proposiciones abiertas, es usando los cuantificadores y conjuntos de referencia.

1.1.13.1 Cuantificador universal.

En el símbolo ∀ se lee: para todo, para cada, cualquier, cualquiera, o cualquier otra expresión que indique generalidad o totalidad.

Ejemplos:

$\forall\, x \in A: P(x)$

$\forall\, x, y \in A: P(x, y)$

$\forall\, (x, y) \in A^2: P(x, y)$

$\forall\, (x, y) \in A \times B: P(x, y)$

$P(x): \forall x \in A$

$P(x, y): \forall\, x, y\ \in A$

$P(x, y): \forall (x, y)\ \in A^2$

$P(x, y): \forall\, (x, y)\ \in A \times B$

Ejemplos:

Usando cuantificadores, expresar simbólicamente las siguientes proposiciones:

- El cuadrado de cualquier número real, es mayor o igual a cero: $\forall x \in \mathbb{R}: x^2\ \geq 0$
- Los elementos del conjunto $A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 5\}$, son números naturales: $\forall x \in A: x \in \mathbb{N}$
- Cada elemento de $B = \{-7, 0, 1, -\ 8, 4, 10\}$, es número entero: $\forall x \in B: x \in\ \mathbb{Z}$
- La suma de cualquier par de números enteros, es otro número entero: $\forall x, y \in \mathbb{Z}: x + y\ \in \mathbb{Z}$
- El producto de números enteros, es otro entero: $\forall x, y \in \mathbb{Z}: x \times y\ \in \mathbb{Z}$.
- La proposición $\forall x \in A: P(x)$, equivale a la implicación, así: $x \in A\ \longrightarrow P(x)$
- De igual manera, $\forall x, y \in A: P(x, y)$ equivale a la implicación, así: $x, y \in A\ \longrightarrow P(x, y)$
- $\forall x, y \in A^2: P(x, y)$ equivale a la implicación: $(x, y) \in A^2 \longrightarrow P(x, y)$

Ejemplos:

Utilizando la implicación, simbolizar las siguientes expresiones

$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0$ Respuesta: $x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \geq 0$

$\forall x \in A: x \in \mathbb{N}$ Respuesta:$x \in A \longrightarrow x \in \mathbb{N}$

$\forall x, y \in \mathbb{Z}: x + y \in \mathbb{Z}$ Respuesta: $x, y \in \mathbb{Z} \longrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$

1.1.13.2 Cuantificador existencial, existencia y unicidad.

El símbolo del cuantificador existencial es ∃, en el cual se lee, existe un, una, hay, para por lo menos un, una, algún, alguna; existen o cualquier otra expresión que indique existencia de elementos.

En el símbolo ∃! se lee: existe un único, o existe un solo o hay un solo.

Estructuras:

$\exists\, x \in A/P(x)$; $\exists x, y \in A/P(x, y)$; $\exists\, x, y \in A^2/P(x, y)$; $\exists\, (x, y) \in A \times B/P(x, y)$.

El símbolo "/" se lee tal que.

Ejemplos:

Usando el cuantificador existencial, expresar simbólicamente las proposiciones:

Tabla 12. Ejemplos de uso del cuantificador existencial

Proposición en lenguaje natural	Proposición simbólica
Existe un número entero, tal que su cuadrado es igual a 20:	$\exists\, x \in \mathbb{Z}\ / x^2 = 20$
El cubo de algún número real es igual a – 10:	$\exists\, x \in \mathbb{R} / x^3 = -10$
Hay elementos de A que son elementos de B:	$\exists\, x \in A / x \in B$
La diferencia de algún par de números naturales es igual a 2:	$\exists\, x, y \in \mathbb{N}/x - y = 2$
La suma de algún par de números naturales es igual a – 3:	$\exists\, (x, y) \in \mathbb{N}^2/x + y = -3$
Algunos elementos de B, son elementos de A:	$\exists\, x \in B / x \in A$

Existen elementos de A que pertenecen a B y elementos de B que son elementos de A:	$\exists\, x \in A/x \in B \;\wedge \exists x \in B \;/\; x \in A$
Existe un número del conjunto A, tal que, si su cuadrado es igual a dos, entonces el número pertenece a B:	$\exists x \in A \;/\; x^2 = 2 \rightarrow x \in B$
Para cada elemento de A, existe un elemento de B, tales que la suma de éstos, es igual a cero:	$\forall\, x \in A\colon \exists\, y \in B \;/ x + y = 0$
Existe un único número entero, tal que elevado al cuadrado es igual a 9:	$\exists!\, x \in \mathbb{Z} \;/\; x^2 = 9$
El cuadrado de un único número entero, es igual a 9:	$\exists!\, x \in \mathbb{Z}/x^2 = 9$

1.1.13.3 Negación de proposiciones cuantificadas.

$\sim[\forall x \in A\colon P(x)]$ es equivalente a lo siguiente: $\exists x \in A \,/ \sim P(x)$.

También se expresa así: $\sim[\forall x \in A\colon P(x)] \Leftrightarrow \exists\, x \in A \,/ \sim P(x)$

$\sim[\exists x \in A \;/\; P(x)]$ es equivalente a la proposición: $\forall x \in A\colon \sim P(x)$

$\sim[\exists x \in A\colon P(x)]$ es equivalente a la proposición: $\exists x \in A \,/ \sim P(x)$.

También se expresa así: $\sim[\exists \mathrm{x} \in \mathrm{A} \,/\, \mathrm{P(x)}] \Leftrightarrow \forall \in A\colon \sim P(x)$

Las anteriores equivalencias son teoremas de D'Morgan.

Ejemplos:

Negar las siguientes proposiciones:

- p: Todos los estudiantes son mayores de edad.

  $\sim p$: algún estudiante no es mayor de edad; o también, hay estudiantes que no son mayores de edad.

- p: Todos los números reales, son números racionales.

  $\sim p$: Algunos números reales, no son números racionales; o también, existen números reales, que no son números racionales.

- $p: \exists x \in \mathbb{Z} \ / \ x^2 = 20;$

  $\sim p: \forall x \in \mathbb{Z}: \ x^2 \neq 20.$

- $p: \exists x \in A \ / \ x \in B;$

  $\sim p: \forall x \in A: x \notin B.$

- $p: \exists (x, y) \in \mathbb{N}^2 \ / \ x + y = -3;$

  $\sim p: \forall (x, y) \in \mathbb{N}^2: x + y \neq -3.$

- $p: \forall x \in \mathbb{Z} \ \exists \ e \in \mathbb{Z} \ / \ x + e = 0;$

  $\sim p: \exists x \in \mathbb{Z} \ \forall \ e \in \mathbb{Z}: x + e \neq 0.$

- $p: \exists x \in A \ / \ P(x)$

  $\sim p: \nexists x \in A \ / \ P(x).$

  Observe que, en este caso, no se está aplicando la Ley de D'Morgan.

- p: Existe un número real, tal que elevado al cubo es igual a – 8.

  $\sim p$: No existe un número real, tal que elevado al cubo es igual a – 8.

- Una proposición $\exists! \, x \in A \ / \ P(x)$, puede ser falsa porque no existe ni un solo elemento a de A, para el cual P(a) sea verdadera o porque existen al menos, dos elementos a y b de A para los cuales P(a) y P(b) sean verdaderas.

  Tal es el caso de la proposición $\exists! \, x \in \mathbb{Z} \ / \ x^2 = 9$, la cual es falsa, porque hay dos números enteros que cumplen con la proposición $x^2 = 9$, que son el 3 y el – 3.

1.1.14 Demostración de tautologías

Con las tablas de verdad se puede demostrar o comprobar si una proposición es una tautología, una contingencia o una contradicción. Pero en cierta forma, es un proceso mecánico, aunque ayuda a reafirmar los valores de verdad de una conjunción, de una disyunción, disyunción excluyente, implicación y doble implicación. También contribuye a la identificación de la proposición en cuestión.

Otra manera de demostrar o comprobar proposiciones, es mediante procesos deductivos y aplicando leyes lógicas. Estos procesos contribuyen a desarrollar la capacidad para deducir, analizar y comprender mejor el sentido y utilidad de estas leyes. Adicionalmente, una ley lógica se puede comprobar mediante la aplicación de otras leyes.

A continuación, se realizan demostraciones, indicando la respectiva justificación, de modo que sirvan de guía.

En el símbolo $\Leftrightarrow$ se debe leer: es equivalente a, y funciona tal como el signo $=$ en la aritmética o en el álgebra, donde lee es igual a.

En los procesos de demostración se establece una cadena de equivalencias; es decir, una cadena de proposiciones conectadas con el símbolo $\Leftrightarrow$.

En la demostración de una equivalencia, se parte de una proposición, generalmente de la primera, para llegar a la otra; y en las implicaciones, se parte del antecedente para llegar al consecuente.

Nota:

T es una tautología o proposición verdadera y, C es una contradicción o proposición falsa.

Ejemplos:

Demostrar que son tautologías las siguientes equivalencias e implicaciones:

1. $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$
2. $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$
3. $[p \wedge (\sim p \vee q)] \Leftrightarrow (p \wedge q)$
4. $[p \vee (\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow (p \vee q)$
5. $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$
6. $[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
7. $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
8. $[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$
9. $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

Demostraciones:

1. $[p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p] \Leftrightarrow [(p \wedge \boldsymbol{T}) \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow [\mathrm{p} \wedge (\mathbf{T} \vee \mathrm{q})] \Leftrightarrow [p \wedge \boldsymbol{T}] \Leftrightarrow \mathrm{p}$

   En la primera equivalencia, se aplicó ley de identidad de la conjunción: $(p \wedge \boldsymbol{T}) \Leftrightarrow p$

   En la segunda equivalencia, se aplicó la ley distributiva (proceso contrario de distribución).

   En la tercera equivalencia, se aplicó la siguiente tautología: $(\boldsymbol{T} \vee q) \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$.

   En la cuarta y última, se aplicó nuevamente la ley de identidad de la conjunción.

3. $[p \wedge (\sim p \vee q)] \Leftrightarrow [(p \wedge (\sim p)) \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow [\boldsymbol{C} \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow (p \wedge q)$

   En la primera equivalencia, se aplicó la propiedad distributiva de la conjunción respecto a la disyunción; en la segunda equivalencia se aplicó la ley del complemento: $(p \wedge (\sim p) \Leftrightarrow \boldsymbol{C}$;

en la tercera (última), se aplicó ley de identidad de la disyunción, llamada también, ley modulativa de la disyunción.

5. $(p \leftrightarrow q) \;\Leftrightarrow [(p \rightarrow q) \;\wedge (q \rightarrow p)]$

$\Leftrightarrow [(\sim p \vee q) \;\wedge\; (\sim q \vee p)]$

$\Leftrightarrow\; [(\,p\; \vee \sim q) \wedge\; (q \vee\; \sim p)]$

$\Leftrightarrow\; [(\sim(\sim p) \vee \sim q) \;\wedge\; (\sim(\sim q) \vee\; \sim p)]$

$\Leftrightarrow [(\sim p \rightarrow \sim q) \wedge (\sim q \rightarrow \sim p)]$

$\Leftrightarrow\; (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

Justificación:

En la primera equivalencia, se tomó la notación abreviada de la conjunción de una implicación con su recíproca.

En la segunda equivalencia, se aplicó la equivalencia de una implicación.

En la tercera, se aplicó la propiedad conmutativa de la conjunción y luego la conmutatividad de la disyunción.

En la cuarta, se tuvo en cuenta la ley involutiva: $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ y $\sim(\sim q) \Leftrightarrow q$.

En la quinta; se aplicó nuevamente la equivalencia de la implicación.

En la sexta y última equivalencia, se aplicó nuevamente la “notación” del bicondicional.

Otro proceso para demostrar la equivalencia $(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$, es el siguiente:

$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow\; [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)]$

$\Leftrightarrow\; [(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge\; (\sim p \rightarrow \sim q)]$

$\Leftrightarrow\; [(\sim p\; \rightarrow \sim q)\; \wedge (\sim q \rightarrow \sim p)]$

$\Leftrightarrow\; (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

En la segunda equivalencia, se tiene en cuenta que una implicación es equivalente con su contrarrecíproca; en la tercera equivalencia, se aplicó la propiedad conmutativa de la conjunción.

7. $[(p \rightarrow q) \;\wedge\; \sim q\,] \Leftrightarrow [(\sim p \;\vee\; q) \wedge\; \sim q\,]$

$\Leftrightarrow [(\sim p \;\wedge\; \sim q) \;\vee\; (q \;\wedge\; \sim q)]$

$$\Leftrightarrow [(\sim p \ \wedge \ \sim q) \ \vee \ \boldsymbol{C}\,]$$

$$\Leftrightarrow (\sim p \ \wedge \ \sim q) \Rightarrow \sim p$$

Justificación:

En la primera equivalencia, se aplicó equivalencia de la implicación.

En la segunda, se aplicó la propiedad distributiva de la conjunción respecto a la disyunción.

En la tercera, se aplicó ley del complemento: $(q \wedge \sim q) \Leftrightarrow \boldsymbol{C}$.

En la cuarta, se aplicó ley modulativa de la disyunción.

En el último paso, el cual es una implicación, se aplicó ley de la contracción conjuntiva.

1. $[(p \vee q) \wedge \sim p\,] \Leftrightarrow [(p \wedge \sim p\,) \vee (q \ \wedge \ \sim p)] \Leftrightarrow [\boldsymbol{C} \ \vee \ (q \ \wedge \ \sim p\,)] \Leftrightarrow (q \wedge \ \sim p) \Rightarrow q$

En el proceso anterior se aplicó en su orden: ley distributiva, complemento, ley modulativa y en el último paso, que es una implicación, ley de la contracción conjuntiva.

Las proposiciones de los numerales 2, 4, 6 y 8, se dejan para que el lector realice las demostraciones, siguiendo pasos similares a los empleados en las demostraciones anteriores.

Es posible realizar otros procesos para pasar de una proposición a otra equivalente; los cuales pueden resultar más cortos o bien más extensos de los que se efectuaron anteriormente, siempre y cuando se apliquen las leyes correctamente. Las demostraciones realizadas sirven como modelos de demostración.

Finalmente, es conveniente asimilar las leyes lógicas u otra expresión; no tanto en su forma, sino en su contenido; se recomienda, si es posible, enunciarla textualmente sin mencionar las proposiciones que intervienen en ella.

Ejemplo:

La Ley de D'Morgan $\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$ textualmente se enuncia así: "La negación de una disyunción, es equivalente a una conjunción constituida por las negaciones de las proposiciones que forman la disyunción".

De igual manera, de una conjunción se puede pasar a la negación de una disyunción. Teniendo en cuenta la anterior Ley de D'Morgan, esto corresponde a pasar de la segunda proposición a la primera, esto es, de derecha a izquierda.

La equivalencia $(p \to q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$ se enuncia textualmente, así:

Una implicación es equivalente a una disyunción, constituida por la negación del antecedente, y la otra, es el consecuente.

También se puede interpretar que, de una disyunción se puede obtener una implicación; de este modo, se pueden aplicar las leyes en diversas expresiones y situaciones.

Ejemplos:

1. Aplicando las leyes de D'Morgan, establecer la proposición equivalente a cada proposición:

a. $(\sim m \vee \sim n)$ b. $(m \vee \sim n)$ c. $(\sim m \vee n)$

d. $(\sim m \vee \sim n)$ e. $(m \wedge \sim n)$ f. $(\sim m \wedge n)$

g. $\sim [m \vee (n \wedge p)]$ h. $\sim [\sim m \vee (n \wedge p)]$ i. $\sim [(m \vee \sim n) \wedge p]$

Solución:

a. $(\sim m \vee \sim n) \Leftrightarrow \sim(m \wedge n)$ b. $(m \vee \sim n) \Leftrightarrow \sim(\sim m \wedge n)$

c. $(\sim m \vee n) \Leftrightarrow \sim(m \wedge \sim n)$ d. $(\sim m \vee \sim n) \Leftrightarrow \sim(m \vee n)$

g. $\sim[m \vee (n \wedge p)] \Leftrightarrow [\sim m \wedge \sim(n \wedge p)]$ h. $\sim [\sim m \vee (n \wedge p)] \Leftrightarrow [m \wedge \sim(n \wedge p)]$

Se deja al lector obtener las proposiciones para los literales e, f, i.

2. De las implicaciones obtener disyunciones equivalentes y de las disyunciones obtener implicaciones equivalentes.

$(\sim a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \vee b)$ $(\sim b \Rightarrow a) \Leftrightarrow (\quad \vee \quad)$

$(b \Rightarrow \sim a) \Leftrightarrow (\sim b \vee \sim a)$ $(\sim m \vee n) \Leftrightarrow (m \rightarrow n)$

$(n \vee \sim m) \Leftrightarrow (\sim n \rightarrow \sim m)$ $(n \vee m) \Leftrightarrow (\quad \rightarrow \quad)$

$(m \vee n) \Leftrightarrow (\sim m \rightarrow n)$ $(m \vee n) \Leftrightarrow (\sim m \rightarrow n)$

$(\sim m \vee \sim n) \Leftrightarrow (\quad \rightarrow \quad)$ $\qquad$ $(\sim n \vee \sim m) \Leftrightarrow (n \rightarrow \quad)$

Se deja al lector la tarea de completar la respectiva proposición o completarla, en los correspondientes espacios en blanco.

3. Establecer una implicación equivalente con cada implicación indicada.

$(\sim \mathrm{a} \rightarrow b) \Leftrightarrow (\quad \rightarrow \quad)$ $\qquad$ $(a \rightarrow \sim b) \Leftrightarrow (\quad \rightarrow \quad)$

$(\sim a \rightarrow \sim b) \Leftrightarrow (\quad \rightarrow \quad)$ $\qquad$ $(a \Rightarrow \sim b) \Leftrightarrow (b \rightarrow \quad)$

$(\sim a \rightarrow b) \Leftrightarrow (\quad \rightarrow a)$ $\qquad$ $(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\sim b \rightarrow \sim a)$

1.2 ELEMENTOS DE TEORÍA DE CONJUNTOS.

1.2.1 Conceptualización

Un conjunto es una “agrupación”, “colección”, “reunión”, “grupo” de objetos, llamados en general elementos del conjunto.

Letras mayúsculas, tales como A, B, C, D, X, Y, Z, etc. se las emplea para denotar o representar conjuntos.

Letras minúsculas como: x, y, z, u, v, etc. se emplean para representar los elementos de un conjunto; por esto se las denomina variables.

Para indicar que x representa los elementos de un conjunto A, se expresa así: $x \in A$ y se lee:

x pertenece a A, o también, x es un elemento de A.

En la expresión $x \notin A$ se lee: x no es elemento de A o también x no pertenece al conjunto A. Por tanto, la proposición $x \notin A$ es la negación de la proposición $x \in A$.

1.2.2 Correspondencia entre conjuntos y proposiciones.

A un conjunto M se le asocia, o se le asigna, o le corresponde la proposición $x \in M$, lo cual, se expresa como sigue:

$$M \leftrightarrow x \in M.$$

De lo anterior, se tiene lo siguiente: $A \leftrightarrow x \in A$; $B \leftrightarrow x \in B$; $C \leftrightarrow x \in C$.

1.2.3 Formas de expresar un conjunto.

Un conjunto está expresado en forma extensiva cuando entre llaves se listan todos sus elementos o parte de ellos, pero que identifican, definen o representan a todo el conjunto.

Ejemplos:

Los siguientes conjuntos están expresados de manera extensiva:

$A = \{2, 8, 20, 30, 45, 3\}$ y $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$, donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales.

$2 \in A$; $45 \in A$; $3 \in A$; $5 \notin A$.

$1 \in \mathbb{N}$; $8 \in \mathbb{N}$; $20 \in \mathbb{N}$; $-1 \notin \mathbb{N}$.

Un conjunto está expresado en forma comprensiva, cuando entre llaves, sus elementos se representan mediante una o más letras variables, la cual o las cuales, cumplen con una determinada condición o proposición abierta.

Ejemplos:

En forma general y abstracta:

$S = \{x / P(x)\}$;

$S = \{x \in A / P(x)\}$;

$S = \{(x, y) \in A \times B / P(x, y)\}$;

$S = \{(x, y) \in A^2 / P(x, y)\}$.

Según lo anterior:

$x \in S$, si y solo si, $P(x)$;

$x \in S$ si y solo si $x \in A$ y $P(x)$;

$(x, y) \in S$ si y solo si, $(x, y) \in A \times B$ y $P(x, y)$.

En cada caso, S es el conjunto solución de la proposición abierta $P(x)$ o $P(x, y)$, teniendo en cuenta el conjunto de referencia.

Los siguientes conjuntos están expresados en forma comprensiva:

$M = \{x / x \in A \vee x \in B\}$ $\quad$ $N = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$ $\quad$ $C = \{x \in \mathbb{N} / x < 10\}$

El conjunto C, en forma extensiva, se expresa así: $C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; y corresponde al conjunto solución de la proposición abierta $x < 10$ con $x \in \mathbb{N}$.

1.2.4 Subconjuntos.

Sean los conjuntos A y B, entonces, la expresión $A \subset B$ denota que A es subconjunto de B; A está contenido en B o que A está incluido en B.

El símbolo $\subset$ se utiliza para indicar inclusión de conjuntos.

1.2.4.1 Definición

A es subconjunto de B, si y solo si todos los elementos de A, son elementos de B.

En forma simbólica: $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A: x \in \mathrm{B})$; además, $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \rightarrow x \in B)$.

Según la última expresión, al símbolo de la inclusión $\subset$, le corresponde el símbolo de la implicación $\longrightarrow$.

Ejemplo:

$\{2, 4, 5, 6, 10, 12\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 16\}$.

Sea el conjunto $A = \{\, a, b, c, d\}$

Son subconjuntos de A:

$B = \{a\}$ $\quad$ $C = \{a, b\}$ $\quad$ $D = \{a, b, d\}$ $\quad$ $E = \{b, c, d\}$

1.2.4.2 Propiedades de la inclusión de conjuntos.

Reflexiva

$A \subset A$: todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

Transitiva

Si $A \subset B \wedge B \subset C$, entonces, $A \subset C$.

Nota:

Algunos autores de libros usan el símbolo $\subset$ para indicar subconjunto propio; lo cual definen así:

A es subconjunto propio de B $(A \subset B)$ si y solo si, todos los elementos de A son elementos de B y existe al menos un elemento de B que no es elemento de A.

Para definir la inclusión de conjuntos, tal como se define en este texto, usan el símbolo $\subseteq$.

Por tanto, es subconjunto de B $(A \subseteq B)$ si y solo si, para todo $x \in A$: $x \in B$.

1.2.5 Conjunto vacío

Es el conjunto que no tiene elementos; se lo representa con la letra $\emptyset$ o también $\{\ \}$.

El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto; por lo tanto, si A es cualquier conjunto, entonces $\emptyset \subset A$.

Ejemplos:

$\{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 0\}$; $\{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 20 \ \wedge \ x > 20\}$; $\{x \,/\, P(x) \ \wedge \ \sim P(x)\}$.

1.2.6 Conjunto unitario

Es todo conjunto constituido por un solo elemento.

Ejemplos:

$\{30\}$; $\{m\}$; $\{44\}$; $\{222\}$.

1.2.7 Conjunto universal.

Es aquel conjunto que se toma como referencia en alguna teoría, en procesos o en el estudio de algún tema específico.

Por ejemplo, en el desarrollo de una aritmética o teoría de números naturales, el conjunto universal o de referencia, es el conjunto $\mathbb{N}$. Cualquier conjunto que se considere dentro de esta teoría, es subconjunto de $\mathbb{N}$.

En el estudio "abstracto" (o en general) de la teoría de conjuntos, muchos autores representan con $\boldsymbol{U}$ el conjunto universal; así que, cualquier conjunto que se tome dentro de esta teoría, es subconjunto de $\boldsymbol{U}$.

1.2.8 Partes de un conjunto.

Dado un conjunto A, el conjunto $\boldsymbol{P}(A)$ se lee "partes de A", y se define como sigue:

$$\boldsymbol{P}(A) = \{X \,/\, X \subset A\}.$$

Según la definición, los elementos de $\boldsymbol{P}(A)$, son todos los subconjuntos de A; de modo que,

$X \in \boldsymbol{P}(A)$ si y solo si $X \subset A$.

Ejemplo:

Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$.

Los subconjuntos de A son: $\{a\}$; $\{b\}$; $\{ c\}$; $\{a, b\}$; $\{a , c\}$; $\{ b, c\}$; $\{a, b, c\} = A \;\; y \;\; \emptyset$.

Entonces, $\boldsymbol{P}(A) \;=\; \{\{a\};\; \{b\};\; \{ c\};\; \{a, b\};\; \{a , c\}, \{ b, c\}, A ,\;\; \emptyset \}$.

El conjunto A tiene 3 elementos y $\boldsymbol{P}(A)$ tiene $2^3 = 8$ elementos que son subconjuntos de A.

En general, si un conjunto A tiene $\boldsymbol{n}$ elementos, entonces hay 2^n subconjuntos de A, por lo tanto, $\boldsymbol{P}(A)$ tiene 2^n elementos.

En teoría de conjuntos, si $A, B, C, D, \cdots$, son conjuntos, entonces, $A, B, C, D, \cdots \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{U})$.

1.2.9 Igualdad de conjuntos:

$A \;=\; B$ sí y solo si, $\forall x \in A\colon\; x \in$B $\;\wedge\; \forall x \in B\colon\; x \in A$.

Lo anterior es equivalente a lo siguiente:

$$A \;=\; B \Leftrightarrow A \subset B \;\;\wedge\;\; B \subset A.$$

$$A \;=\; B \;\;\Leftrightarrow\;\; (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \;(x \in B \Rightarrow\; x \in A).$$

Finalmente, de la última expresión, se tiene que,

$$A \;=\; B \Leftrightarrow \;(x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

1.2.9.1 Correspondencia.

Según la última expresión y teniendo en cuenta que $A \leftrightarrow x \in A$; $B \leftrightarrow x \in B$, entonces, al símbolo $=$, igualdad de conjuntos, le corresponde el símbolo de la equivalencia $\Leftrightarrow$ .Esta correspondencia se indica así: $= \leftrightarrow \Leftrightarrow$.

Para comprobar que dos conjuntos M y N son iguales, se debe demostrar la proposición $x \in M \Leftrightarrow x \in N$.

De modo que, dos conjuntos son iguales, cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen al otro.

Ejemplo:

$\{2, 7, 9\} \;=\; \{2, 9, 7\} \;=\; \{9, 7, 2\}$.

$\{1, 4, 5, 1, 5, 2\} \;=\; \{1, 2, 4, 5\} \;=\; \{5, 4, 2, 1\}$.

$\{4, 4\} \;=\; \{4\}$.

$\{2, 2, 2\} = \;\{2\}$.

Observe que los conjuntos, $\{4,4\}$; $\{2,2,2\}$ son unitarios.

Nota:

En conjuntos que se expresen en forma extensiva, no importa el orden de escritura de sus elementos; además, basta con escribir un elemento una sola vez; es decir, no es necesario repetir los elementos.

Por ejemplo, el conjunto $\{4,8,8,4\}$ tiene dos elementos, 4 y 8.

1.2.9.2 Propiedades de la igualdad de conjuntos.

Reflexiva

Todo conjunto es igual a sí mismo: $A = A$.

Simétrica

Si $A = B$, entonces, $B = A$.

Transitiva

Si $A = B \wedge B = C$, entonces: $A = C$.

1.2.10 Operaciones entre conjuntos.

Para todo $A, B, C \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{U})$, se define:

- Unión: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$.
- Intersección: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$.
- Diferencia. $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$.
- Diferencia Simétrica: $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

Según lo anterior, se tienen las siguientes equivalencias:

$$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B \qquad x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$$

$$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \qquad x \in (A \triangle B) \Leftrightarrow x \in A \,\underline{\vee}\, x \in B$$

1.2.11 Correspondencias.

Según las 4 últimas expresiones, se obtienen las siguientes correspondencias:

$\cup \leftrightarrow \vee$ $\cap \leftrightarrow \wedge$ $- \leftrightarrow \sim$ $\triangle \leftrightarrow \underline{\vee}$

La equivalencia de la cuarta expresión se la obtendrá más adelante.

1.2.12 Propiedades y expresiones particulares.

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cap A = A$.
3. $A \cup B = B \cup A$.
4. $A \cap B = B \cap A$.
5. $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \boldsymbol{U} = A$.
6. $A \cap \emptyset = \emptyset$ y $A \cup \boldsymbol{U} = U$.
7. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Por las propiedades 1. y 2, se dice que la unión y la intersección de conjuntos son *idempotentes.*

De las propiedades 3 y 4, se tiene que la unión y la intersección de conjuntos son *conmutativas.*

Según la propiedad 5, la unión es *modulativa*; ϕ es el módulo o elemento neutro.

De las propiedades 7 y 8, se afirma que la unión e intersección de conjuntos son *asociativas.*

Según 9 y 10, la intersección se *distribuye* respecto a la unión, y la unión se *distribuye* respecto a la intersección.

Nota 1:

Teniendo en cuenta las definiciones se presentan las siguientes afirmaciones:

- La unión de A con B, está constituido por todos los elementos de A y todos los de B. Si hay elementos comunes, se los escribe una sola vez.
- La intersección de A con B, está formada por todos los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al B, es decir, por los elementos comunes.

- $A - B$ es constituido por todos los elementos que pertenecen al conjunto A (primer conjunto) y que no pertenezcan a B.(segundo conjunto); de modo que, el conjunto $B - A$ es constituido por todos los elementos que pertenecen a B que no pertenezcan al conjunto A.

- $A \Delta B$ es constituido por todos los elementos de A que no estén en B, y por todos los elementos de B que no estén en A.

Nota 2:

Cuando $A \cap B = \emptyset$, se afirma que A y B son conjuntos disyuntos.

Nota 3:

Si $A \subset B$, entonces,

$$A \cup B = B \qquad A \cap B = A \qquad A - B = \emptyset \qquad A \Delta B = B - A$$

Ejemplos:

Sean los conjuntos: $A = \{5, 7, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 50\}$; $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18\}$.

Determinar los conjuntos: $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$ y $A \Delta B$.

Respuesta:

$A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 15, 18, 20, 30, 50\}$.

$A \cap B = \{5, 7, 12, 15\}$.

$A - B = \{8, 10, 20, 30, 50\}$.

$B - A = \{2, 4, 6, 9, 14, 18\}$.

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{2, 4, 6, 8, 9, 14, 18, 20, 30, 50\}$.

Se puede observar que: $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Como ejemplo de aplicación de las propiedades y definiciones de conjuntos en procesos de relaciones entre conjuntos, se ilustra el proceso completo y necesario, en las igualdades que siguen.

1. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.
2. $A \cap (A \cup B) = A$.
3. $A \cup (A \cap B) = A$.

En el proceso se aplica las definiciones establecidas en operaciones con conjuntos y las leyes lógicas establecidas en la sección de "Álgebra Proposicional". Una proposición verdadera o tautología se la denota con la letra T y una proposición falsa o contradicción se la denota con la letra C.

Demostración 1:

$$x \in (A \Delta B) \iff x \in [(A - B) \cup (B - A)] \quad (1)$$

$$\iff x \in (A - B) \vee x \in (B - A) \quad (2)$$

$$\iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \quad (3)$$

$$\iff [(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \in B] \wedge [(x \in A \wedge x \notin B) \vee x \notin A] \quad (4)$$

$$\iff [(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in B)] \wedge [(x \in A \vee x \notin A) \wedge (x \notin B \vee x \notin A)] \quad (5)$$

$$\iff [(x \in A \vee x \in B) \wedge \boldsymbol{T}] \wedge [(\boldsymbol{T} \wedge (x \notin B \vee x \notin A)] \quad (6)$$

$$\iff [(x \in A \vee x \in B)] \wedge [\sim(x \in B \wedge x \in A)] \quad (7)$$

$$\iff [x \in (A \cup B)] \wedge [\sim(x \in (A \cap B)] \quad (8)$$

$$\iff [x \in (A \cup B)] \wedge [x \notin (A \cap B)] \quad (9)$$

$$\iff x \in [(A \cup B) - (A \cap B)] \quad (10)$$

Por definición de igualdad de conjuntos, se concluye que $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

Justificaciones:

$(\mathbf{1})$. Por la definición establecida de diferencia simétrica.

$(\mathbf{2})$. Por la definición de unión de conjuntos.

$(\mathbf{3})$. Definición de diferencia de conjuntos.

$(\mathbf{4})$. Propiedad distributiva de $\vee$ respecto a $\wedge$.

$(\mathbf{5})$. Propiedad distributiva de $\vee$ respecto a $\wedge$.

$(\mathbf{6})$. Ley del tercio excluido. $[(\mathrm{x} \notin \mathrm{B} \vee \mathrm{x} \in \mathrm{B})$; $(\mathrm{x} \in \mathrm{A} \vee \mathrm{x} \notin \mathrm{A})$, son verdaderas, las cual se las reemplaza por T].

$(\mathbf{7})$ Leyes de identidad $[\,\mathrm{p} \wedge \mathbf{T} \iff \mathrm{p}\,]$ y teorema de D'Morgan para la segunda proposición:

$[(\sim p \vee \sim q) \iff \sim(p \wedge q)]$.

$(\mathbf{8})$. Definición de unión y de intersección de conjuntos.

$(\mathbf{9})$. Se aplica la negación en la segunda proposición.

$(\mathbf{10})$. Definición de diferencia de conjuntos.

Por otra parte, partiendo de $(\mathbf{3})$:

$$x \in (A \,\Delta\, B) \iff (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A) \qquad (3)$$

$$\iff \sim(x \in A \rightarrow x \in B) \vee \sim(x \in B \rightarrow x \in A) \qquad (3a)$$

$$\iff \sim[(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \rightarrow x \in A)] \qquad (3b)$$

$$\iff \sim[(x \in A \leftrightarrow x \in B)] \qquad (3c)$$

$$\iff [(x \in A \veebar x \in B)] \qquad (3d)$$

Así, $x \in (A \,\Delta\, B) \iff [(x \in A \veebar x \in B)]$, lo cual, permite establecer el conjunto en forma comprensiva.

$$A \,\Delta\, B = \{x \,/\, x \in A \veebar x \in B\}.$$

Además, al operador Δ le "corresponde" el operador lógico $\veebar$, como se había afirmado anteriormente, es decir, $\Delta \leftrightarrow \veebar$.

Justificaciones:

$(\mathbf{3}$a). Equivalencia de la negación de una implicación.

$\sim(p \rightarrow q) \iff (p \wedge \sim q)$, aplicada de derecha a izquierda.

$(\mathbf{3}$b). Ley de D'Morgan, aplicada de derecha a izquierda.

($\mathbf{3}$c). Equivalencia del bicondicional. Más exactamente, por notación:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \Leftrightarrow (p \leftrightarrow q).$$

($\mathbf{3}$d). Equivalencia de la negación de un bicondicional:

$$\sim(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \veebar q).$$

Nota:

En las demostraciones anteriores, además de las justificaciones dadas mencionando la definición aplicada, las leyes lógicas utilizadas, se adiciona la forma simbólica de las leyes, lo cual no es necesario hacerlo; sin embargo, se lo hace en esta primera demostración con el fin de facilitar mejor comprensión del lector. En este sentido, es necesario tener presentes dichas leyes y las tautología estudiadas en la primera sección.

Demostración 2:

$x \in [A \cup (A \cap B)]$	$\Leftrightarrow$	$[x \in A \vee x \in (A \cap B)]$	Definición de unión
	$\Leftrightarrow$	$[(x \in A \wedge \boldsymbol{T} \vee (x \in A \wedge x \in B)]$	Definición de intersección
	$\Leftrightarrow$	$[(x \in A \wedge \boldsymbol{T}) \vee (x \in A \wedge x \in B)]$	Ley de identidad de ∧ (T es el neutro)
	$\Leftrightarrow$	$[x \in A \wedge (\boldsymbol{T} \vee x \in B)]$	Propiedad distributiva de ∧ respecto a ∨
	$\Leftrightarrow$	$[x \in A \wedge \boldsymbol{T}]$	Tautología: $(\boldsymbol{T} \vee p) \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$
	$\Leftrightarrow$	$x \in A$	Ley de identidad de ∧.

Por tanto, por definición de igualdad de conjuntos, se cumple que: $A \cup (A \cap B) = A$.

Del paso 3 al paso 4, se aplicó la propiedad distributiva de ∧ respecto a ∨, de derecha a izquierda ("factorización").

Demostración 3:

$x \in [A \cap (A \cup B)]$	$\Leftrightarrow$	$[x \in A \wedge x \in (A \cup B)]$	Definición de intersección

$\Leftrightarrow$	$[x \in A \vee (x \in A \ \vee \ x \ \in \ B)]$	Definición de unión
$\Leftrightarrow$	$[(x \in \ A \vee \ C) \wedge (x \in A \vee x \in B)]$	Ley de identidad de $\vee$ (C es el neutro)
$\Leftrightarrow$	$[x \in A \ \vee (C \wedge x \in B)]$	Propiedad distributiva de $\vee$ respecto a $\wedge$
$\Leftrightarrow$	$[\, x \, A \ \vee \ C \,]$	Tautología: $(C \ \wedge \ p) \Leftrightarrow C$
$\Leftrightarrow$	$x \in A$	Ley de identidad de $\vee$

Luego, por definición de igualdad de conjuntos: $A \cap (A \cup B) = A$.

Nota:

En algunas demostraciones se deben establecer ciertos "artificios" para obtener o llegar a la expresión deseada; tal es el caso de las dos demostraciones anteriores, donde se aplicó leyes de identidad para luego aplicar las propiedades distributivas.

1.2.13 Complemento de un conjunto.

Si $A \ \subset \ B$, entonces el complemento de A respecto a B se indica así: C_B^A.

$C_B^A = \{\, \mathrm{x} \,/\, \mathrm{x} \ \in \mathrm{B} \ \wedge \ \mathrm{x} \ \notin \ \mathrm{A}\}$.

De la definición se deduce que: $C_B^A = B - A$.

C_B^A está constituido por todos los elementos que le "faltan" a A para ser "igual" a B.

1.2.14 Complemento respecto al conjunto universal.

Recordar que si $\boldsymbol{U}$ es el conjunto de referencia (universal) en una determinada teoría; por ejemplo, en la teoría de conjuntos, entonces, cuando se considera en general conjuntos A, B, C, D , todos son subconjuntos de $\boldsymbol{U}$.

En este caso, el conjunto C_U^A se indica así: A'. Luego, $C_U^A = A' = U - A$.

Además, $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$; esto es equivalente a $x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$.

Es decir, si un elemento pertenece a un conjunto, dicho elemento no pertenece al complemento del conjunto; y recíprocamente, si un elemento no pertenece a un conjunto, dicho elemento pertenece al complemento del conjunto.

Otras notaciones para C_U^A son las siguientes: $\mathrm{A^c}, \overline{\mathrm{A}}$.

1.2.15 Propiedades y casos especiales del complemento de un conjunto.

Leyes de D'Morgan:

$$(A \cup B)' = (A' \cap B') \qquad\qquad (A \cap B)' = (A' \cup B')$$

Ley Involutiva:

$$(A')' = A$$

Leyes de Complemento

$$A \cup A' = \boldsymbol{U} \qquad A \cap A' = \emptyset \qquad \boldsymbol{U}' = \emptyset \qquad \emptyset' = \boldsymbol{U}$$

Ejemplos:

Sean los conjuntos A y B definidos como sigue:

$$A = \{5, 9, 10, 12, 40, 50, 80\};\ B = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}.$$

Dado que $A \subset B$, entonces $C_B^A = \{2, 3, 6, 8, 11, 15, 30, 60, 70\} = B - A$.

Tomando como conjunto de referencia el conjunto $\boldsymbol{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 12, 14, 15\}$, se tiene que:

Si $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, entonces $A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$.

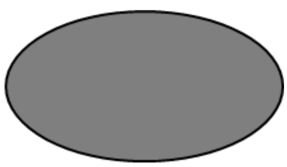
Si $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, entonces $B' = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

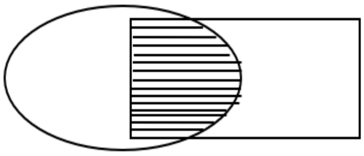
Si $C = \{1, 4, 7, 10, 12, 15\}$, entonces $C' = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14\}$.

1.2.15 Diagramas de Venn Euler.

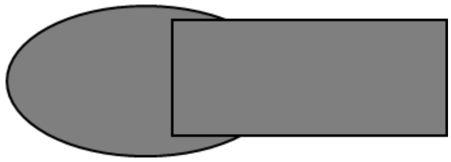
En la Tabla 13, región sombreada representa al conjunto que se indica debajo de la región.

Tabla 13. Ejemplos de diagramas de Venn-Euler

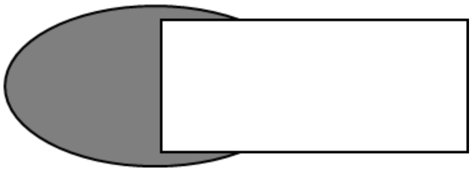
 A	 B



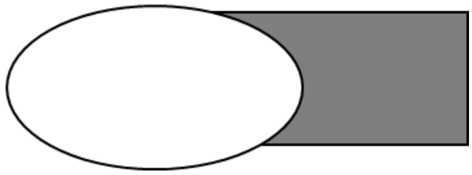
$A \cap B$



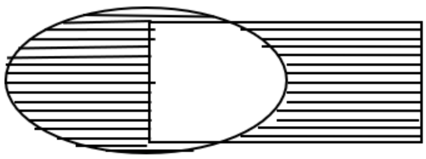
$A \cup B$



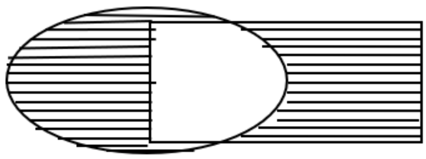
$A - B$



$B - A$



$A \triangle B$



$B \triangle A$

1.2.16 Resumen de correspondencia entre la teoría de conjuntos y el álgebra proposicional

La Tabla 14, contiene la relación entre la teoría de los conjuntos y el álgebra proposicional

Tabla 14. Correspondencia entre teoría de conjuntos y álgebra proposicional

Teoría de Conjuntos	Lógica proposicional
Conjunto A	Proposición $x \in A$
Conjunto universal U	T Tautología o proposición verdadera: $x \in \mathbf{U}$)
Conjunto vacío ϕ	C (contradicción o proposición falsa: $x \in \phi$)
Inclusión $\subset$	Implicación $\rightarrow$
Igualdad $=$	Equivalencia $\Leftrightarrow$

Unión ∪	Disyunción ∨
Intersección ∩	Conjunción ∧
Diferencia −	Negación de implicación ∼(→)
Diferencia Simétrica Δ	Disyunción Excluyente $\underline{\vee}$
Complemento ′	Negación ∼
2^n es el número de combinaciones de valores de verdad para n proposiciones simples	2^n es el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos.

1.2.17 Álgebra de Boole.

Si sobre un conjunto A , se ha definido dos operaciones binarias, ⊕ y ⊗, así:

$\forall x, y \in A: x \oplus y \in A \wedge x \otimes y \in A$, entonces $(A,\oplus,\otimes)$ es una estructura algebraica.

1.2.17.1 Definición.

$(A,\oplus, \otimes)$ es un álgebra de Boole si y solo si:

a. Las dos operaciones binarias cumplen con las siguientes propiedades: asociativa, conmutativa, modulativa (identidad), la una se distribuye respecto a la otra.

b. Para cada $x \in A$, existe un respectivo elemento $x' \in A$ tal que:

   $x \oplus x' = e_1$ y $x \otimes x' = e_2$, donde e_1 es el elemento neutro de la operación ⊕ y e_2 es el elemento neutro de la operación ⊗.

Se dice x' que es el complemento del elemento x.

En el álgebra proposicional y en la Teoría de Conjuntos, se cumplen las condiciones de la anterior definición, por esto se afirma que las estructuras algebraicas $(P, \vee, \wedge)$ y $(P(U), \cup, \cap)$ son álgebras de Boole; donde P es el conjunto de proposiciones.

En este texto no se desarrolla un estudio general de álgebra de Boole, pero los conocimientos adquiridos en las dos unidades tratadas, sirven mucho para comprender los temas tratados en general y es abstracto en álgebra de Boole; inclusive, muchas demostraciones se desarrollan siguiendo los procesos realizados con proposiciones y con conjuntos.

1.2.17.2 Equivalencias entre expresiones con conjuntos y expresiones con proposiciones

A continuación, se presenta ejemplos de equivalencias entre expresiones que incluyen conjuntos y expresiones que incluyen proposiciones (ver Tabla 15).

- En el símbolo $\leftrightarrow$ no se lee si y solo si, simplemente se lo usa para relacionar o hacer corresponder expresiones equivalentes.
- Las proposiciones son verdaderas o tautologías y la mayoría de ellas tienen nombre propio.
- Las proposiciones $x \in A, x \in B, x \in C$, se las indica respectivamente con p, q, r. Luego, al conjunto A le corresponde la proposición p, al conjunto B la proposición q y al conjunto C, la proposición r.

Tabla 15. Equivalencia entre teoría de conjuntos y álgebra proposicional

Expresión con conjuntos	Es equivalente a	Expresión con proposiciones
$A \subset A$	$\leftrightarrow$	$p \rightarrow p$
$Si\ A \subset B \wedge B \subset C, entonces\ A \subset C$	$\leftrightarrow$	$Si\ p \rightarrow q \wedge q \rightarrow r, entonces\ p \rightarrow r$
$Si\ A = B \wedge B = C, entonces\ A = C$	$\leftrightarrow$	$Si\ p \Leftrightarrow q \vee q \Leftrightarrow r, entonces\ p \Leftrightarrow r$
$Si\ A = B, entonces, B = A$	$\leftrightarrow$	$Si\ (p \Leftrightarrow q), entonces\ (q \Leftrightarrow p)$
$A = B$	$\leftrightarrow$	$(p \Leftrightarrow q)$
$A = A$	$\leftrightarrow$	$(p \Leftrightarrow p)$
$A \cup B$	$\leftrightarrow$	$p \vee q$
$A \cap B$	$\leftrightarrow$	$p \wedge q$
$A \Delta B$	$\leftrightarrow$	$p \vee q$
$A - B$	$\leftrightarrow$	$p \wedge \sim q$
$A - B$	$\leftrightarrow$	$\sim (p \rightarrow q)$

$B - A$	$\leftrightarrow$	$\sim(q \rightarrow p)$
$A \cup A = A$	$\leftrightarrow$	$(p \vee p) \Leftrightarrow p$
$A \cap A = A$	$\leftrightarrow$	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
$A \cup \emptyset = A$	$\leftrightarrow$	$(p \vee C) \Leftrightarrow p$
$A \cup B = B \cup A$	$\leftrightarrow$	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
$A \cap B = B \cap A$	$\leftrightarrow$	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$\leftrightarrow$	$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$\leftrightarrow$	$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$	$\leftrightarrow$	$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$\leftrightarrow$	$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$(A \cup B)' = (A' \cap B')$	$\leftrightarrow$	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$
$(A \cap B)' = (A' \cup B')$	$\leftrightarrow$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$
$(A')' = A$	$\leftrightarrow$	$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$
$A \cup A' = \boldsymbol{U}$	$\leftrightarrow$	$(p \vee \sim p) \Leftrightarrow T$
$A \cap A' = \emptyset$	$\leftrightarrow$	$(p \wedge \sim p) \Leftrightarrow C$
$\boldsymbol{U}' = \emptyset$	$\leftrightarrow$	$\sim T \Leftrightarrow C$
$\emptyset' = U$	$\leftrightarrow$	$\sim C \Leftrightarrow T$

Para demostrar una expresión o una propiedad mediante conjuntos, se aplica la propiedad equivalente con proposiciones. Por ejemplo, para demostrar que la unión se distribuye con respecto a la intersección, se aplica la propiedad distributiva de disyunción con respecto a la conjunción.

1.3 EJERCICIOS DE ELEMENTOS DE LÒGICA MATEMÁTICA Y DE TEORÌA DE CONJUNTOS

1.3.1 Ejercicios de lógica matemática

En los siguientes ejercicios, por favor indique si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

1. Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa.

   El valor de verdad de la proposición $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $\boldsymbol{p} \rightarrow \mathbf{q}$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $\boldsymbol{p} \veebar \boldsymbol{q}$ es: __

2. Sea p una proposición verdadera, q una proposición falsa, r una proposición falsa.

   El valor de verdad de la proposición $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}) \vee \boldsymbol{r}$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r}$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \wedge \boldsymbol{r}$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $(\boldsymbol{p} \veebar \boldsymbol{q}) \rightarrow \boldsymbol{r}$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $\sim(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $\sim(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $\sim\boldsymbol{p}$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $\boldsymbol{p} \veebar \sim\boldsymbol{q}$ es: __

   El valor de verdad de la proposición $\sim\boldsymbol{p} \leftrightarrow \boldsymbol{q}$ es: __

1.3.2 Ejercicios de teoría de conjuntos

1.3.2.1 Ejercicios de selección múltiple

1. El conjunto A = $\{x \in \mathbb{N} / x < 6\}$ en forma extensiva es:

a. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

b. $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$

c. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2. El conjunto $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/ -3 < x \wedge x < 3\}$ en forma extensiva es:

   a. $B = \{-3, -2, 2, -1, 0, 1, 2\}$

   b. $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

   c. $B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

3. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/ -3 < x \wedge x < 3\}$.

   El conjunto $A \cup B$ en forma extensiva es:

   a. $A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

   b. $A \cup B = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4, 5\}$

   c. $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

4. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/ -3 < x \wedge x < 3\}$.

   El conjunto $A \cap B$ en forma extensiva es:

   a. $A \cap B = \phi$

   b. $A \cap B = \{0, 1,2,3\}$

   c. $A \cap B = \{1, 2, 3\}$

5. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/ -3 < x \wedge x < 3\}$.

   El conjunto $A - B$ en forma extensiva es:

   a. $A - B = \{3, 4, 5\}$

   b. $A - B = \{4, 5\}$

   c. $A - B = \{-3, 4, 5\}$

6. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{N} \,/\, x < 6\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z} \,/ -3 < x \wedge x < 3\}$.

   El conjunto $B - A$ en forma extensiva es:

a. B – A = {– 2, – 1, 0}

b. B – A = {– 2, – 1, 0,1}

c. B – A = {– 2, – 1, 0,4}

7. Sean los conjuntos A = {x $\in \mathbb{N}$ / x < 6} y B = {x $\in \mathbb{Z}$ / – 3< x $\wedge$ x < 3}.

   El conjunto A Δ B en forma extensiva es:

   a. A Δ B = {– 2, – 1, 0, 4, 3,5}

   b. A Δ B = {– 2, – 1, 4, 5}

   c. A Δ B = {– 2, – 1, 0, 4, 5}

8. Sean los conjuntos C = {x $\in \mathbb{Z}$ / x 2 = 9 $\vee$ x 2 = 16 $\vee$ x 2 = 25} y D = {x $\in \mathbb{Z}$ / x 2 = 6 $\vee$ x 2 = 12}.

   El conjunto $C \cup D$ en forma extensiva es:

   a. $C \cup D = \{-3, -4, -5, 3, 4\}$

   b. $C \cup D = \{-3, -5, 3, 4, 5\}$

   c. $C \cup D = \{-3, -4, -5, 3, 4, 5\}$

9. Sean los conjuntos C = {x $\in \mathbb{Z}$ / x 2 = 9 $\vee$ x 2 = 16 $\vee$ x 2 = 25} y D = {x $\in \mathbb{Z}$ / x 2 = 6 $\vee$ x 2 = 12}.

   El conjunto $C \cap D$ en forma extensiva es:

   a. $C \cap D = \{-3, -4, -5, 3, 4\}$

   b. $C \cap D = \phi$

   c. $C \cap D = \{-3, -4, -5, 3, 4, 5\}$

1.3.2.2 Ejercicios con respuesta verdadero (V) o falso (F)

1. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Entonces, $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$

2. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Entonces, el complemento de $\mathbb{Z}_p$ (conjunto de los enteros pares) es $\mathbb{Z}_i$ (conjunto de los enteros impares)

3. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Entonces, el complemento de $\mathbb{Z}^+$ es $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.

4. Sea $\mathbb{Z}$ el conjunto de los números enteros. Entonces, el complemento de $\mathbb{Z}^-$ es $\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$.

5. Sea el conjunto E = {x $\in \mathbb{Z}$ / x < – 4}. Entonces, el conjunto E’ = {– 3, – 2, – 1, 0, 1, 3, 4 ,5, ...}

I.3.3 Ejercicios varios

1. Expresar cada conjunto en forma extensiva

$A = \{ x \in N \,/\, x < 5 \}$ $\qquad$ $B = \{ x \in Z \,/ -3 < x \wedge x < 2 \}$

$C = \{ x \in Z \,/\, x^2 = 4 \vee x^2 = 25 \vee x^2 = 81 \}$

$D = \{ x \in Z \,/\, x^2 = 5 \vee x^2 = 10\}$

$A \cup B \qquad A \cap B \qquad A - B \qquad B - A \qquad A \Delta B \qquad C \cup D \qquad C \cap D$

2. Obtener el conjunto complemento respecto al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$, (referencia, universal), de cada conjunto: $\mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_i, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-$ de $E = \{ x \in Z \,/\, x < -3 \wedge 2 < x \}$; $F = \{ 0 \}$ donde:

$Z = \{\ldots -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \}$

$\mathbb{Z}^* = \{\ldots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \ldots \} = \mathbb{Z} - \{0]$

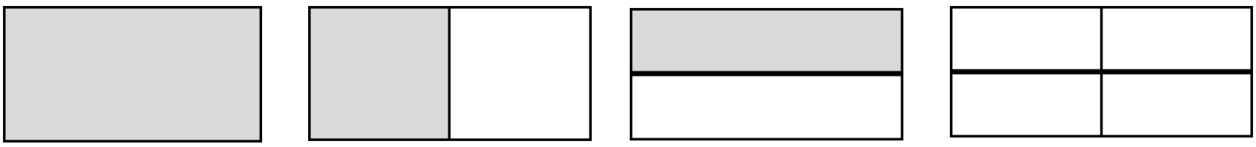
$\mathbb{Z}_p = \{\ldots, -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots \}$

$\mathbb{Z}_i = \{\ldots, -11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots \}$

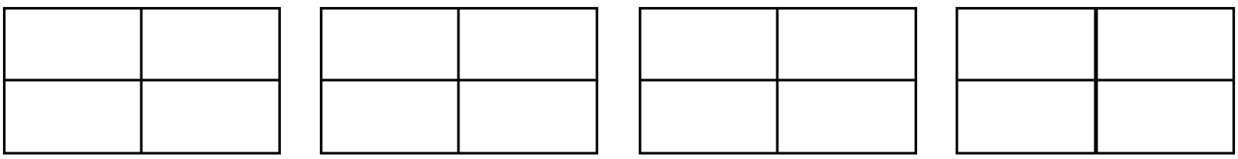
$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \ldots \}$

$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, -14, \cdots \}$

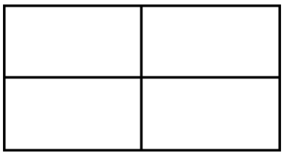
3. La región rectangular es el conjunto de referencia $\boldsymbol{U}$. Las regiones rectangulares pequeñas son los conjuntos A y B. Sombrear los conjuntos que se indica debajo de cada diagrama.



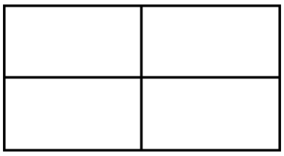
$\boldsymbol{U} \qquad \boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{B} \qquad \boldsymbol{A \cup B}$



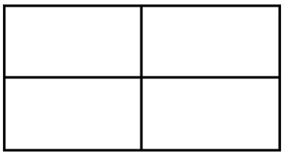
$\boldsymbol{A \cap B} \qquad \boldsymbol{A - B} \qquad \boldsymbol{B - C} \qquad \boldsymbol{A \triangle B}$



$\boldsymbol{A'}$



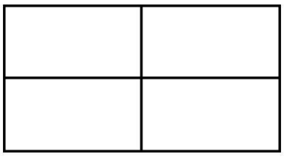
$\boldsymbol{B'}$



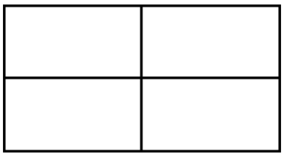
$(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B})'$

$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})'$

$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})'$



$(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C})'$



$(\boldsymbol{A} \triangle \boldsymbol{B})'$

$\boldsymbol{A'} \cup \boldsymbol{B'}$

4. Se asigna respectivamente a los conjuntos A, B, C, las proposiciones: $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$. Asignar a cada expresión con conjuntos la correspondiente e "inmediata" proposición; y a cada proposición, la correspondiente expresión con conjuntos.

$A \not\subset B \ \leftrightarrow$ __________

$(p \rightarrow q) \leftrightarrow$ _________

$A - B \leftrightarrow$ _________

$A' \triangle C \leftrightarrow$ ______

$p \wedge (\sim p) \ \leftrightarrow$ __________

$(B \cup C)' \leftrightarrow$ ___________

$(p \Leftrightarrow q) \leftrightarrow$ __________

$B' \leftrightarrow$ ________

$\sim[\sim(q \vee r)] \leftrightarrow$ ______________

$[(A = B) \wedge (B = C)] \Leftrightarrow (A = C) \leftrightarrow$ _____________________

$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) \leftrightarrow$ ___________________________

$A \cap (A \cup B) = A \leftrightarrow$ ____________________

$A \cup (A \cap B) = A \leftrightarrow$ ____________________

$A \cap \emptyset = \emptyset \ \leftrightarrow$ ______________

$A' \triangle A = \emptyset \leftrightarrow$ ____________

5. Teniendo en cuenta el enunciado inicial, completar cada expresión para obtener una proposición verdadera.

$x \notin (E' - D) \Leftrightarrow$ _____ $\vee$ _____

$(E' \cap D)' =$ __________

$x \notin (D \cup E) \Leftrightarrow$ __________

$x \notin E \vee x \notin D \Leftrightarrow x \in ($___________$)$

$x \in E \vee x \notin D \Leftrightarrow x \in ($___________$)$

$(E' \cap D')' =$ __________

Teniendo en cuenta que: $E - D = E \cap D'$, *entonces* $(E - D)' =$ _________

Teniendo en cuenta que: $E \triangle D = (E \cup D) - (E \cap D)$, *entonces:*

$(E \triangle D)' =$ ___________ $\cup$ ___________

$E = D \Leftrightarrow$ _______ $\Leftrightarrow$ ______

$E \neq D \Leftrightarrow$ _______ $\Leftrightarrow$ ______

6. Demostrar las igualdades de conjuntos. Justificar cada paso del proceso.

$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$	$(A \cup C')' = A' \cap C$	$A' - B' = B - A$
$(M - N) - R = M \cap (N \cup R)'$	$(D \cup E')' = D' \cap E$	$F' - G' = G - F$
$M - (N \cup R) = (M - N) \cap (M - R)$	$(H \triangle K)' = H' \triangle K$	$H' \triangle K = H \triangle K'$
$A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$	$(B - A')' = (A \cap B)'$	$A' \triangle A = \boldsymbol{U}$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$F \triangle G = F' \triangle G'$	$D - E = E' - D'$

Se propone al lector, demostrar otras propiedades o igualdades entre conjuntos planteadas en esta unidad

CAPÍTULO 2.
Conjuntos Numéricos

CAPÍTULO 2.
CONJUNTOS NUMÉRICOS

2.1 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS NATURALES

El conjunto de los números naturales es $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9{,}10, \cdots\}$.

Si a, b es cualquier par de números naturales, entonces $a + b$ y $a \times b$ son números naturales; es decir, la suma y el producto de dos (o más) números naturales, es otro número natural; por lo tanto, la suma y el producto de números naturales cumple la Ley de Composición Interna.

La diferencia y el cociente de dos números naturales, no siempre resulta número natural; es decir, $a - b$ y $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ no siempre son números naturales; por lo tanto, la sustracción y la división de números naturales, no cumplen la Ley de Composición Interna.

2.2 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros es $\mathbb{Z} = \{\cdots, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$

Si a, b es cualquier par de números enteros, entonces, $a + b$, $\mathrm{a} \times \mathrm{b}$, $a - b$ son números enteros; es decir, la suma, el producto y la diferencia de dos (o más) números enteros, es otro número entero; por lo tanto, estas operaciones cumplen la Ley de Composición Interna.

El cociente de dos números enteros, no siempre resulta número entero; es decir, $\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$ no siempre es número entero.

Ejemplos:

$10 + 90 = 100$	$10 + (-90) = -80$	$-10 + 90 = 80$
$-10 - 90 = -100$	$10 - 90 = -80$	$-10 + (-90) = -100$
$450 + (-30) = 420$	$-10 - (-90) = -10 + 90 = 80$	$\frac{10}{7} \notin \mathbb{Z}$
$4 - (-30) = 4 + 30 = 34$	$5 + 3 + (-2) = 8 + (-2) = 6$	

2.2.1 Subconjuntos de $\mathbb{Z}$

Enteros positivos: $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots\}$.

Enteros negativos: $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, -5, \cdots\}$.

Enteros pares: $\mathbb{Z}_p = \{x \in Z \,/\, x = 2k, \text{donde } k \in \mathbb{Z}\}$

Enteros impares: $\mathbb{Z}_i = \{x \in Z \,/\, x = 2k + 1, \text{donde } k \in \mathbb{Z}\}$

Según lo anterior:

$$\mathbb{Z}_p = \{\cdots, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \cdots\}$$

$$\mathbb{Z}_i = \{\cdots, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$$

Conjunto de enteros, menos el cero:

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$$

$\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ es el conjunto de enteros no-negativos.

$\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$ es el conjunto de enteros no-positivos.

Según lo anterior, el entero cero, no es positivo, ni es negativo; es neutro.

Entonces, $-0 = +0 = 0$.

2.2.2 Algoritmo de la división

Dado un entero no-negativo m y un entero positivo n, existe un único entero positivo q, llamado cociente entre m y n, y un entero r, llamado resto o residuo de dicho cociente, tales que $m = nq + r$, donde $0 \leq r < n$.

Ejemplos:

$100 = 30 \times 3 + 10$; así que, el cociente de dividir $m = 100$ entre $n = 30$, es $q = 3$ y el resto es $r = 10$. (Observe que $10 < 30$).

$100 = 3 \times 33 + 1$; luego, el cociente de dividir 100 entre 3, es 33 y el resto es 1. (Note que $1 < 3$).

$215 = 20 \times 10 + 15$; entonces, el cociente de dividir 215 entre 20, es 10 y el residuo es 15. (Observe que $15 < 20$).

$215 = 10 \times 21 + 5$: el resto de dividir 215 entre 10, es 5 y el cociente es 21. (Note que $5 < 10$).

Observe que $100 = 30 \times 2 + 40$, pero el resto de dividir 100 entre 30 no es 2, ni el cociente es 40, porque 40 no es menor que 30; y el resto r debe ser menor que n, que en este caso es 30.

Como $50 = 25 \times 2 + 0$, entonces el cociente de dividir 50 entre 25, es 2 y el resto es 0. También, se puede afirmar que, el cociente de dividir 50 entre 2 es 25 y el residuo es 0.

El cociente de dividir 50 entre 10, es 5 y el resto es 0; igualmente, el cociente de dividir 50 entre 5 es 10 y el resto es 0.

2.2.3 Divisibilidad en los enteros

Un entero positivo a divide a un entero positivo b, si y sólo si, existe un entero k, tal que $b = ak$.

Si $b = ak$, entonces, el resto de dividir a entre b, es 0, por lo cual, el entero k es el cociente.

En este caso, se afirma que el entero a es un factor o divisor del entero b, y que b es múltiplo de a.

También se afirma que a divide a b o que b es divisible por a. Además, k es otro factor de b, y también es cofactor de a.

Observación:

En la divisibilidad, es suficiente considerar enteros positivos; aunque también se puede considerar enteros negativos, pero el signo menos (–), se lo trata de otra manera o por aparte, como se verá más adelante.

Notas:

Para efectos de divisibilidad de números, es pertinente recordar que:

- Un número es múltiplo de 2, cuando la última cifra es número par.
- Un número es múltiplo de 3, cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
- Un número es divisible por 4, cuando las dos últimas cifras forman un número múltiplo de 4.
- Un número es divisible por 5, cuando termina en 0 o en 5.
- Un número es múltiplo de 9, cuando la suma de sus cifras resulta un número múltiplo de 9.

Ejemplos:

Los divisores positivos de 40 son: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 y 40.

Algunos múltiplos positivos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, $\cdots$.

Nota:

1. Dado que $\boldsymbol{m = 1 \times m}$, entonces se concluye que $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de $\boldsymbol{m}$ y al mismo tiempo es divisor de $\boldsymbol{m}$.

   Todo número entero es múltiplo y divisor de sí mismo.

El número 1 es divisor de todo número entero.

2. Todo número entero positivo, tiene como mínimo dos divisores positivos, el 1 y el mismo número.

2.2.4 Número primos

Un entero positivo $\boldsymbol{p}$ diferente de 1, es número primo, si y solo si, los únicos divisores positivos de $\boldsymbol{p}$, son $\mathbf{1}$ y $\boldsymbol{p}$.

Son números primos: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, \cdots$.

2.2.5 Número compuestos

Un entero positivo $\boldsymbol{q}$ diferente de $\mathbf{1}$, es número compuesto, si y solo si, tiene al menos un divisor diferente de $\mathbf{1}$ y de $\boldsymbol{q}$. En consecuencia, un entero positivo diferente de 1 es compuesto, cuando no es número primo.

Ejemplo:

Los siguientes números son compuestos:
$4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, \cdots$.

Nota:

Todo número compuesto, se lo puede expresar (o descomponer) como un producto de factores primos.

Ejemplos:

$100 = 2 \times 50 = 2 \times 2 \times 25 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2$.

$210 = 2 \times 105 = 2 \times 3 \times 35 = 2 \times 3 \times 5 \times 7$

2.2.6 Máximo común divisor (MCD) y mínimo común múltiplo (MCM)

Un entero positivo $\boldsymbol{d}$ es el MCD de dos enteros positivos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, si y solo si, $\boldsymbol{d}$ es el mayor de todos los divisores comunes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Se expresa así: $MCD\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{d}$.

Un entero positivo $\boldsymbol{m}$ es el MCM de dos enteros positivos $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$, si y solo si, $\boldsymbol{m}$ es el menor de todos los múltiplos comunes de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$. Se expresa así: $MCM\ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{m}$.

Los divisores positivos de 16 son: $1, 2, 4, 8$ y 16.

Los divisores positivos de 40 son: $1, 2, 4, 5, 8, 10, 20$ y 40.

Por lo tanto, los divisores comunes de 16 y 40 son: $1, 2, 4, 8$ y el mayor es 8; luego, $MCD(16,40) = 8$.

De igual manera, $MCD\ (20, 60)\ =\ 20$; $MCD\ (35, 14)\ =\ 7$; $MCD(100,80) = 20$

Algunos múltiplos positivos de 30 son:

$30, 60, 90, 120, \mathbf{150}, 180, 210, 240, 270, \mathbf{300}, 330, 360, 390, 420, \mathbf{450}, \ldots$

Algunos múltiplos positivos de 50 son: $50, 100, \mathbf{150}, 200, 250, \mathbf{300}, 350, 400, \mathbf{450}, 500, \cdots$

Múltiplos positivos comunes de 30 y 50 son: $150, 300, 450, 600, \cdots$.

El menor múltiplo común de 30 y 50 es 150; por lo tanto, $MCM\ (30, 50)\ =\ 150$.

Nota:

Dos o más enteros positivos son coprimos o primos relativos, cuando su MCD es igual a 1.

Ejemplos:

$MCD(10,9) = 1$ $\qquad$ $MCD(5,12) = 1$ $\qquad$ $MCD(10,9,5) = 1$ $\qquad$ $MCD(2,3,5) = 1$

Entonces, los pares de números $10\ y\ 9, 5\ y\ 12$, son coprimos; lo mismo sucede con las ternas $10, 9\ y\ 15$; $2, 3\ y\ 5$.

2.2.6.1 Propiedades de MCM y MCD, y algunos casos especiales

Si $MCD(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{d}$, entonces, $MCD\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right) = \frac{d}{t}$ donde $\boldsymbol{t}$ es un divisor positivo de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$

De lo anterior, se obtiene la siguiente expresión:

$$t \times MCD\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right) = d$$

Si $MCD(a, b) = d$, entonces, $MCM(ka, k\ b) = kd$ donde k es un entero positivo.

Si $MCM(a, b) = m$, entonces, $MCD\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right) = \frac{m}{t}$, donde $\boldsymbol{t}$ es un divisor positivo de $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

De lo anterior se obtiene la siguiente expresión:

$$t \times MCM\left(\frac{a}{t}, \frac{b}{t}\right) = m$$

Si $MCM(a, b) = m$, entonces, $MCM(ka, k\ b) = km$, k es un entero positivo.

Además, si $\boldsymbol{a}$ es un divisor positivo de $\boldsymbol{b}$, entonces: $MCD(a, b) = a$ y $MCM(a, b) = b$.

Ejemplos:

$MCD(100, 200) = 100$ $MCD(30, 90) = 30$ $MCD(5, 35) = 5$

$MCM(100, 200) = 200$ $MCM(30, 90) = 90$ $MCM(5, 35) = 35$

2.2.6.2 Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de varios enteros

Para calcular el MCD de dos o más enteros, se descompone los enteros en factores primos comunes. El producto de estos factores primos comunes, constituye el máximo común divisor.

Para calcular el MCM de dos o más enteros, se descompone los enteros en factores primos comunes y no comunes. El producto de todos estos factores primos, es el mínimo común múltiplo.

Para ello, se dispone los números en columna y a la derecha, separados por una línea, se escribe los factores primos y debajo de cada número, los respectivos y sucesivos cofactores (el otro divisor), es decir, los cocientes.

Ejemplos:

Obtener el MCD y el MCM de los siguientes enteros: $420, 330, 390\ y\ 300$.

420	330	390	300	2
210	165	195	150	3
70	55	65	50	5
14	11	13	10	

420	330	390	300	2
210	165	195	150	2
105	165	195	75	3
35	55	65	25	5
7	11	13	5	5
7	11	13	1	7
1	11	13	1	11
1	1	13	1	13
1	1	1	1	

Según la descomposición anterior, se tiene que:

$MCD(420, 330, 390, 300) = 2 \times 3 \times 5 = 30;$

$MCM(420, 330, 390, 300) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 300.300.$

Nota:

Para calcular el MCM y el MCD de varios enteros, cuando sea posible, es de gran utilidad aplicar sus propiedades.

En los ejemplos anteriores, se tiene que los números $2, 3, 5, 10$, son divisores comunes de los enteros dados.

Por tanto,

$MCD(420,330,390,300) = 10 \times MCD(42,33,39,30) = 10 \times 3 \times MCD(14,11,13,10) = 10 \times 3 \times 1 = 30.$

Se puede observar que, $MCD(14,11,13,10) = 1.$

$MCM(420,330,390,300) = 10 \times MCM(42,33,39,30) = 10 \times 3 \times MCM(14,11,13,10).$

Dado que, no hay un divisor común para $14, 11, 13$ y 10, se los descompone en factores primos comunes y no comunes, así:

14	11	13	10	2
7	11	13	5	5
7	11	13	1	7
1	11	13	1	11
1	1	13	1	13
1	1	1	1	

Entonces, $MCM(14,11,13,10) = 2 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13 = 10.010.$

Por tanto, $MCM(420,330,390,300) = 10 \times 3 \times 10.010 = 300.300.$

2.3 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES

En notación fraccionaria, el conjunto de los números racionales es: $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \ / \ \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^*\}$.

Conjunto de racionales positivos $\mathbb{Q}^+ = \{\frac{a}{b} \ /(\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^+ y \ \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^+) \text{ o } (\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^- y \ \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^-)\}$.

Conjunto de racionales negativos $\mathbb{Q}^- = \{\frac{a}{b} \ / \ (a \in \mathbb{Z}^+ \ y \ \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^-) \ o \ (\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}^- \ y \ \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}^+)\}$.

$\mathbb{Q}^*$ es el conjunto de todos los números racionales a excepción del 0: $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- = \mathbb{Q} - \{0\}$.

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$

$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^* \cup \{0\}$

Ejemplos:

Son números racionales:

$$\frac{5}{4}, \frac{-7}{2}, \frac{10}{-3}, \frac{1}{15}, \frac{0}{32}, \frac{-24}{-12}, \frac{17}{1}, \frac{100}{100}.$$

Son racionales positivos:

$$\frac{14}{27}, -\frac{320}{-419}, \frac{-60}{-17}.$$

Son racionales negativos:

$$\frac{-17}{27}, \frac{120}{-211}, -\frac{86}{19}.$$

2.3.1 Igualdad de racionales

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \ \ si \ y \ solo \ si \ ad = bc.$$

Ejemplos:

$$\frac{5}{4} = \frac{10}{8} \ \ porque \ 5 \times 8 = 10 \times 4 .$$

$$\frac{5}{4} = \frac{-10}{-8} \ \ porque \ 5{\times}(-8) = (-10){\times}(4) .$$

Otros ejemplos:

$$\frac{-7}{2} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}.$$

$$\frac{100}{200} = \frac{50}{100} = \frac{25}{50} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

$$\frac{-20}{-80} = \frac{20}{80} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

Nota:

Si a es un número entero, entonces, como $\boldsymbol{a} = \frac{a}{1}$, se sigue que $\boldsymbol{a}$ es un número racional. Así: $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

Conclusión:

Todo número entero, es número racional, por tanto, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

2.3.2 Operaciones básicas con racionales

$$Adición\ y\ Sustracción: \frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm \mathrm{bc}}{bd}.$$

$$Multiplicación: \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

$$División: \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, c \neq 0.$$

Ejemplos:

$$\frac{7}{3} + \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5 + 3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{35 + 6}{15} = \frac{41}{15}.$$

$$\frac{-11}{2} + \frac{13}{4} = \frac{-44 + 26}{8} = \frac{-18}{8} = -\frac{9}{4}.$$

$$\frac{7}{3} - \frac{2}{5} = \frac{7 \times 5 - 3 \times 2}{3 \times 5} = \frac{35 - 6}{15} = \frac{29}{15}.$$

$$\frac{-11}{2} - \frac{13}{4} = \frac{-44 - 26}{8} = \frac{-70}{8}$$
$$= -\frac{35}{4}.$$

Nota:

Simplificar una fracción $\frac{a}{b}$, consiste en dividir $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ entre un divisor común a ellos.

Ejemplos:

$$\frac{100}{70} = \frac{100 \div 10}{70 \div 10} = \frac{10}{7}.$$

$$\frac{-18}{8} = \frac{-18 \div 2}{8 \div 2} = \frac{-9}{4}.$$

$$\frac{30}{42}=\frac{15}{21}=\frac{5}{7}\,.\qquad\qquad \frac{162}{45}=\frac{18}{5}\,.$$

Cuando los fraccionarios que se suman o se restan tienen el mismo denominador (fraccionarios homogéneos), se suma o resta los numeradores y se deja el mismo denominador.

Ejemplos:

$$\frac{25}{7}+\frac{4}{7}=\frac{29}{7}.\qquad\qquad \frac{31}{6}+\frac{5}{6}=\frac{36}{6}=6\,.$$

$$\frac{-75}{4}+\frac{5}{4}=-\frac{70}{4}=-\frac{35}{2}\,.\qquad\qquad \frac{16}{5}-\frac{12}{5}=\frac{16-12}{5}=\frac{4}{5}.$$

Para obtener la suma o diferencia de varios fraccionarios, se multiplica cada numerador por los denominadores de los demás fraccionarios y se suma o resta estos productos para obtener el numerador del fraccionario resultante. Para el denominador, se multiplica todos los denominadores. Si los fraccionarios que se operan son homogéneos, se opera únicamente con los numeradores y se deja el mismo denominador.

Ejemplos:

$$\frac{12}{5}+\frac{-2}{3}-\frac{3}{4}=\frac{12\times 3\times 4+(-2)\times 5\times 4-3\times 3\times 5}{5\times 3\times 4}=\frac{144-40-45}{60}=\frac{59}{60}.$$

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{18+12+6}{36}=\frac{36}{36}=1\,.$$

$$\frac{7}{4}+\frac{-3}{4}+\frac{5}{4}-\frac{9}{4}-\frac{-6}{4}=\frac{7-3+5-9+6}{4}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}.$$

También se puede transformar los racionales a fraccionarios homogéneos, es decir, que tengan un común denominador. Para ello, se busca un múltiplo común de los denominadores; para lo cual, el más conveniente es el MCM. Cada numerador se debe multiplicar por el mismo número por el cual se multiplicó su denominador.

Ejemplos:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1\times 3+1\times 2+1}{6}=\frac{6}{6}=1\,.$$

$$\frac{7}{6}+\frac{-3}{5}+\frac{5}{3}-\frac{7}{10}=\frac{35-18+50-21}{30}=\frac{46}{30}=\frac{23}{15}.$$

Multiplicaciones

$$\frac{21}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{21\times 3}{5\times 4}=\frac{63}{20} \qquad \frac{10}{-3}\times\frac{6}{5}=\frac{60}{-35}=-\frac{12}{7}$$

$$\frac{-9}{7}\times\frac{-5}{2}\times\frac{10}{3}=\frac{(-9)(-5)(10)}{7\times 2\times 3}=\frac{450}{42}=\frac{75}{7} \qquad \frac{10}{-3}\times\frac{-6}{5}=\frac{-60}{-35}=\frac{12}{7}$$

Divisiones

$$\frac{8}{5}\div\frac{2}{3}=\frac{8\times 3}{5\times 2}=\frac{24}{10}=\frac{12}{5} \qquad \frac{14}{9}\div\frac{-3}{2}=\frac{28}{-27}$$

$$\frac{36}{-15}\div\frac{-4}{3}=\frac{36\times 3}{-15\times(-4)}=\frac{108}{60}=\frac{27}{15}=\frac{9}{5} \qquad \frac{-9}{4}\div\frac{-2}{3}=\frac{-9\times 3}{4\times(-2)}=\frac{-27}{-8}=\frac{27}{8}$$

$$\frac{\frac{-9}{4}}{\frac{-2}{3}}=\frac{-9\times 3}{4\times(-2)}=\frac{-27}{-8}=\frac{27}{8} \qquad \frac{10}{\frac{3}{4}}=\frac{\frac{10}{1}}{\frac{3}{4}}=\frac{10\times 4}{1\times 3}=\frac{40}{3}$$

$$\frac{5}{9}\div 8=\frac{5}{9}\div\frac{8}{1}=\frac{5\times 1}{9\times 8}=\frac{5}{72} \qquad \frac{4}{9}\div -8=\frac{4}{9}\div\frac{-8}{1}=\frac{4\times 1}{9\times(-8)}=\frac{4}{-72}=-\frac{1}{18}$$

2.3.3 Operaciones combinadas

Primero se realiza las operaciones que están agrupadas; después las multiplicaciones y al final las sumas y restas.

$$\left(\frac{15}{4}+\frac{9}{5}\right)\times\frac{-10}{3}-\left(\frac{12}{7}\div\frac{8}{21}\right)\times\frac{14}{9}=\left(\frac{111}{20}\times\frac{-10}{3}\right)-\left(\frac{252}{56}\times\frac{14}{9}\right)$$

$$=\frac{-1110}{60}-\frac{3.528}{504}=\frac{-37}{2}-\frac{392}{56}=\frac{-37}{2}-\frac{196}{28}=\frac{-37}{2}-\frac{98}{14}=\frac{-37}{2}-\frac{49}{7}$$

$$=\frac{-37}{2}-7=\frac{-37-14}{2}=\frac{-51}{2}$$

Nota:

Dado que 3 y 10 son divisores de 1.110 y 60, entonces, 30 es divisor común; por lo cual, se simplifica el número racional $\frac{1110}{60}$ dividiendo numerador y denominador por 30, resultando $\frac{37}{2}$

De igual manera, 9 es divisor de 3.528 y de 504; entonces, se simplifica $\frac{3.528}{504}$ dividiendo numerador y denominador por 9. Se continúa simplificando las sucesivas fracciones entre 2. (Observe que se puede simplificar dividiendo por 4).

2.3.4 Números mixtos

La suma de un número entero positivo $\boldsymbol{a}$ con un fraccionario positivo menor que uno, $\boldsymbol{\frac{c}{b}}$, esto es $a+\boldsymbol{\frac{c}{b}}$ se lo expresa así: $a\,\frac{c}{b}$

Este número se denomina mixto porque está formado por una parte entera y una parte fraccionaria.

Ejemplos:

$1\,\frac{1}{4}$ el cual equivale a $1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4}$.

$$3\,\frac{1}{2}=3+\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.$$

$$1\,\frac{1}{8}=1+\frac{1}{8}=\frac{9}{8}.$$

Pasando de fraccionario a mixto:

$$\frac{7}{4}=\frac{4+3}{4}=\frac{4}{4}+\frac{3}{4}=1+\frac{3}{4}=1\,\frac{3}{4}.$$

$$\frac{5}{2}=\frac{4+1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=2+\frac{1}{2}=2\,\frac{1}{2}.$$

2.3.5 Porcentajes

Un número racional $\frac{\boldsymbol{a}}{100}$, se lo puede expresar así: $\boldsymbol{a}$ % que se lee: $\boldsymbol{a}$ por ciento. ($\frac{\boldsymbol{a}}{100} = a\ \%$)

Ejemplos:

$\frac{3}{100} = 3\ \%$ $\qquad \frac{50}{100} = 50\ \%$ $\qquad \frac{0{,}8}{100} = 0{,}8\ \%$ $\qquad \frac{125}{100} = 125\ \%$

$$\frac{\frac{3}{4}}{100} = \frac{3}{4}\% = 0{,}75\ \%$$

2.3.5.1 Conversión de fraccionarios y decimales a porcentajes

$$\frac{3}{4} = 0{,}75 = \frac{0{,}75 \times 100}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$$

$$\frac{1}{2} = 0{,}5 = \frac{50}{100} = 50\%$$

$$0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{80}{100} = 80\%$$

$$0{,}1 = \frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 10\%$$

$$1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{120}{100} = 120\%$$

$$\frac{3}{8} = 0{,}375 = 37{,}5\%$$

2.3.5.2 Conversión de porcentajes a fraccionarios y decimales

$$35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}.$$

$$62\% = \frac{62}{100} = 0{,}62\,.$$

$$80\% = \frac{80}{100} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = 0{,}8\,.$$

$$El\ 9\%\ de\ 9\ es\ 0{,}81\ porque\ 9\% \times 9 = \frac{9}{100} \times 9 = \frac{81}{100} = 0{,}81\,.$$

$$El\ 25\%\ de\ 200\ es\ 50\ porque\ 25\% \times 200 = \frac{25}{100} \times 200 = \frac{5000}{100} = 50\,.$$

El 40% de la mitad de 800 es igual a 160 porque,

$$40\% \times \frac{1}{2} \times 800 = \frac{40}{100} \times \frac{1}{2} \times 800 = \frac{40 \times 800}{100 \times 200} = 160\,.$$

2.3.6 Relación de orden en $\mathbb{Q}$

Para dos racionales $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ donde b y d son enteros positivos, se tiene que:

$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ si y solo si $ad < bc$.

Ejemplos:

$\frac{7}{4} < \frac{9}{5}$ $porque\ 35 < 36$

$\frac{-11}{3} < \frac{-13}{4}$ $porque\ -44 < -39$

$Como\ 3 \times 2 < 1 \times 7, entonces\ \frac{3}{7} < \frac{1}{2}$

$\frac{11}{3} > \frac{-13}{4}$ $porque\ 44 > -39$

Propiedad

$$Si\ \frac{a}{b}\ y\ \frac{c}{d}\ son\ racionales\ tales\ que\ \frac{a}{b} < \frac{c}{d}, entonces\ \frac{a}{b} < \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) < \frac{c}{d}$$

Ejemplos:

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right) < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}} < \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} + \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{12}}\right) < \frac{5}{12} \rightarrow \frac{1}{3} < \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{8}} < \frac{5}{12}$$

Nota:

Dados dos racionales diferentes, (el uno menor que el otro), la semisuma de ellos, es otro racional, mayor que el menor y menor que el mayor de los dos racionales dados.

La afirmación anterior se la puede aplicar las veces que se desee, para obtener racionales entre dos racionales diferentes.

De lo anterior se obtiene las siguientes afirmaciones:

Entre dos números racionales diferentes, siempre existe otro número racional.

Entre dos números racionales diferentes, existen infinitos números racionales.

El conjunto de los números racionales es denso, pero no completo.

El conjunto es denso, porque entre cualquier par de números racionales diferentes, existen infinitos racionales; y no es completo, porque al representar en una recta los números racionales, a cada uno le corresponde un punto en la recta, pero hay puntos de la recta a los cuales no les corresponde un número racional; es decir, hay vacíos en la recta cuando en esa solo se ubican los números racionales.

2.3.7 Notación decimal

Un número decimal consta de dos partes, una entera y otra decimal. Así: $E, c_1c_2c_3c_4c_5\cdots$

E es la parte entera y $c_1c_2c_3c_4c_5\cdots$ es la parte decimal. Cada c_i es una cifra decimal.

Un decimal periódico es de la forma:
$E, a_1a_2a_3a_4\cdots a_mb_1b_2b_3b_4\cdots b_nb_1b_2b_3b_4\cdots b_nb_1b_2b_3b_4\cdots b_n\cdots$

$a_1a_2a_3a_4\cdots a_m$ es la parte decimal no periódica y el grupo $b_1b_2b_3b_4\cdots b_n$ es el período.

Si $N = a_1a_2a_3a_4\cdots a_m$ (la cual no siempre existe) y $P = b_1b_2b_3b_4\cdots b_n$, el racional periódico queda así: E, N$\overparen{P}$.

Todo decimal periódico se lo puede expresar de la forma fraccionaria $\frac{a}{b}$ donde a y b son enteros, $b \neq 0$

$$E, N\overparen{P} = \frac{ENP - EN}{\underbrace{9}_{n}\underbrace{0}_{m}}$$

ENP y EN son números enteros; $\overset{n}{\underbrace{9}}\overset{m}{\underbrace{0}}$ es el número formado por n nueves, seguido de m ceros; n es el número de cifras que tiene el periodo, m es el número de cifras que tiene la parte no periódica.

Conclusión: *Todo número decimal periódico es número racional.*

Ejemplos:

$$3{,}25\overparen{4} = \frac{3254 - 325}{\underbrace{9}_{1}\underbrace{0}_{2}} = \frac{2.929}{900}$$

$$5{,}12\overparen{32} = \frac{51.232 - 512}{\underbrace{9}_{2}\underbrace{0}_{2}} = \frac{50.720}{9900} = \frac{5.072}{990} = \frac{2.536}{495}$$

$$1{,}5\overparen{3} = \frac{153 - 15}{\underbrace{9}_{1}\underbrace{0}_{1}} = \frac{138}{90} = \frac{69}{45} = \frac{23}{15}$$

$$15{,}3\overparen{78} = \frac{15.378 - 153}{\underbrace{9}_{2}\underbrace{0}_{1}} = \frac{15.225}{990} = \frac{3.045}{198} = \frac{1.015}{66}$$

Cuando el decimal periódico carece de parte no-periódica, entonces m = 0, y en este caso, la fórmula queda así:

$$E,\overparen{P} = \frac{EP - E}{\underbrace{n}_{9}}$$

Ejemplos:

$$12,\overparen{5} = \frac{125 - 12}{\underbrace{1}_{9}} = \frac{113}{9} \qquad 3,\overparen{90} = \frac{390 - 3}{\underbrace{2}_{9}} = \frac{387}{99} = \frac{43}{11} \qquad 2,\overparen{3} = \frac{23 - 2}{\underbrace{1}_{9}} = \frac{21}{9} = \frac{7}{3}$$

Nota:

Cuando el decimal periódico es negativo, se aplica las mismas fórmulas, anteponiendo el signo menos (–).

$$-12,\overparen{5} = -\frac{125 - 12}{\underbrace{1}_{9}} = -\frac{113}{9} \qquad -3,\overparen{90} = -\frac{390 - 3}{\underbrace{2}_{9}} = -\frac{387}{99} = -\frac{43}{11}$$

Afirmación. *Todo número racional es decimal periódico.*

Ejemplos:

Los siguientes números reales son decimales periódicos (racionales) con periodo 0.

124,5 –25,78 0,75 –1,80 58 72

2.4 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

Todo número decimal *no-periódico* e infinito es número *irracional.*

Un número irracional no se puede expresar de la forma $\frac{a}{b}$ donde a y b sean enteros.

El conjunto de los números irracionales se lo simboliza con I y es el complemento de $\mathbb{Q}$ respecto a $\mathbb{R}$; luego $\mathbb{Q}^C = \mathbb{Q}'$ =I.

Las raíces cuadradas inexactas de números positivos; raíces cúbicas inexactas de racionales, son irracionales.

Por ejemplo, son números irracionales: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{5}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, -\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{9}, \pm\sqrt[3]{20}$

Dos números irracionales muy importantes en la Matemática, debido a su gran aplicación, son los siguientes:

El número pi, $\boldsymbol{\pi} = 3{,}141592653 \ldots$

El número de Euler, $\boldsymbol{e} = 2{,}71828182845 \ldots$

2.5 CONJUNTO DE LOS NÚMEROS REALES

El conjunto $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$ es el conjunto de los números reales.

De modo que, todo número decimal y todo número que se lo pueda expresar en notación decimal, es número real; por lo cual, todo número real es un decimal o se lo puede expresar en notación decimal.

De la definición se deduce que: $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$; $I \subset \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \cap \mathrm{I} = \phi$.

Un número real es un decimal con infinitas cifras decimales, periódicas o no periódicas.

Un número entero es un número racional, por lo cual es un número real, con periodo cero.

Afirmaciones. Sean las proposiciones p, q y r, como sigue:

p: x es un número racional q: x es un número real r: x es número irracional

Se establece las afirmaciones que siguen, con su respectivo valor de verdad, lo cual ayuda a recordar el valor de verdad de una proposición en conjunción con lo estudiado hasta el momento sobre el conjunto de los números reales.

La Tabla 16, contiene ejemplos de equivalencia entre proposiciones en notación simbólica y enunciados en lenguaje natural sobre números reales.

Tabla 16. Ejemplos de proposiciones con números reales

Símbolos	Enunciado textual	Valor de verdad
$p \to q$	*Si x es un número racional, entonces x es un número real*	Verdadero
$r \to q$	*Si x es un número irracional, entonces x es un número real*	Verdadero
$q \to p$	*Si x es un número real, entonces x es un número racional*	Falso
$q \to r$	*Si x es un número real, entonces x es un número irracional*	Falso

$p \leftrightarrow q$	*Si x es un número racional, si y solo si x es un número real*	Falso
$q \leftrightarrow p \veebar r$	*x es un número real, si y solo si x es un número racional ó x es irracional*	Verdadero
$p \rightarrow \sim r$	*Si x es un número racional, entonces x no es un número irracional*	Verdadero

Ejemplos:

Los siguientes números pertenecen a los números reales.

3	-5	$\frac{3}{4}$	$-\frac{8}{7}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$-\sqrt{5}$	$\sqrt{8}$	$-\sqrt[3]{7}$	$\sqrt[3]{9}$	$\pm\sqrt[3]{24}$	2π
$2e$	$129{,}4$	$-21{,}678$	$0{,}850$	$450{,}2\overparen{38}$	$-450{,}71\overparen{125}$

La suma, diferencia y producto de números reales, es un número real. El cociente de dos números reales es un número real siempre que se divida por un número diferente de cero.

Sean x, y números reales, entonces: $x + y \in \mathbb{R}$; $x \times y = xy \in \mathbb{R}$; $x - y \in \mathbb{R}$; $\frac{x}{y} \in \mathbb{R}\ si\ y \neq 0$.

Propiedades

Asociativa para la adición y multiplicación	$(x + y) + z = x + (y + z)$	$(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$
Conmutativa para la adición y multiplicación	$x + y = y + x$	$x \times y = y \times x$
Ley modulativa para la adición y multiplicación	$x + 0 = 0 + x = x$	$x \times 1 = 1 \times x = x.$
Ley invertible en la adición y multiplicación	$x + (-x) = (-x) + x = 0$	$x \times \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \times x = 1; x \neq 0$

Los números 0 y 1 son los respectivos módulos o elementos neutros de la adición y la multiplicación.

2.5.1 Relación de orden en $\mathbb{R}$

Para dos números reales a, b; en la expresión $a < b$ se lee: "$a\ es\ menor\ que\ b$". En $a \leq b$ se lee: "$a\ es\ menor\ o\ igual\ a\ b$".

En la expresión $b > a$, se lee: b es mayor que a, la cual es "equivalente" o indica lo "mismo" que la anterior.

Nota:

Las expresiones $a < b$ y $b > a$, son desigualdades equivalentes, indican lo mismo, ya que expresar que "$a\ es\ menor\ que\ b$", es lo mismo que decir que "$b\ es\ mayor\ que\ a$".

Definición

$a < b$ si y solo, existe un número real "positivo" c, tal que $a + c = b$.

$a \leq b$ si y solo, existe un número real "positivo" o cero c, tal que $a + c = b$.

2.5.2 Subconjuntos de $\mathbb{R}$

Un número real x es positivo, si y solo, si $x > 0$. El conjunto de reales positivos se denota por $\mathbb{R}^+$.

Un número real x es negativo, si y sólo si, x < 0. El conjunto de reales negativos se denota por $\mathbb{R}^-$.

El conjunto de reales positivos y negativos se denota por $\mathbb{R}^*$; esto es: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^- = \mathbb{R} - \{0\}$.

Ejemplos:

$20 < 23$ porque $20 + 3 = 23$.

$1{,}24 < 1.25$ porque $1{,}24 + 0{,}01 = 1{,}25$.

– $55.690 < 0{,}001$ porque todo número negativo es menor que todo número positivo.

Nota:

Todo número real negativo, es menor que cualquier número real positivo.

2.5.3 Propiedades del orden en los reales

Para números reales a, b, c, d; se plantea las siguientes propiedades.

1. Ley transitiva:

   $Si\ a < b\ \ y\ \ b < c, entonces\ a < c.$

2. Ley de monotonía: si se suma miembro a miembro dos desigualdades del "mismo" sentido, se obtiene otra desigualdad de sentido "idéntico":

$Si\ a < b\ \ y\ \ c < d, entonces\ a + c < b + d$.

3. Si se suma a los dos miembros de una desigualdad, un número real, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido:

   $Para\ cualquier\ real\ k, si\ a\ <\ b\ , entonces\ a\ +\ k\ <\ b\ +\ k$.

4. Si a los dos miembros de una desigualdad se los multiplica por un mismo número real positivo, entonces se obtiene otra desigualdad de idéntico sentido:

   $Si\ a\ <\ b\ \ y\ \ h\ es\ positivo, entonces\ ah\ <\ bh$.

5. Si a los dos miembros de una desigualdad se los multiplica por un mismo número real negativo, entonces se obtiene otra desigualdad de sentido contrario:

   $Si\ a\ <\ b\ \ y\ \ t\ es\ negativo, entonces\ at\ >\ bt$.

6. Si se multiplica miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido de reales positivos, se obtiene otra desigualdad de idéntico sentido:

   $Si\ \ 0\ <\ a\ <\ b\ \ y\ \ 0\ <\ c\ <\ d, entonces\ ac\ <\ bd$.

7. Si se multiplica miembro a miembro dos desigualdades del mismo sentido de reales negativos, se obtiene otra desigualdad de sentido contrario:

   $Si\ \ a\ <\ b\ <\ 0\ \ y\ c\ <\ d\ <\ 0, entonces\ ac\ >\ bd$.

8. El producto de reales positivos, es real positivo:

   $Si\ a\ >\ 0\ y\ b\ >\ 0, entonces\ ab\ >\ 0$.

9. El producto de reales negativos, es real positivo:

   $Si\ a\ <\ 0\ y\ b\ <\ 0, entonces\ ab\ >\ 0$.

10. El producto de un real positivo con un real negativo, es real negativo:

    $Si\ a\ >\ 0\ y\ b\ <\ 0, entonces\ ab\ <\ 0$.

11. El producto de un real negativo con un real positivo es real negativo:

    $Si\ a\ <\ 0\ y\ b\ >\ 0, entonces\ ab\ <\ 0$.

12. $Si\ a^2 < b^2\ \ y\ \ a, b \in \mathbb{R}^+, entonces\ a < b$.

13. $Si\ a^2 < b^2\ \ y\ \ a, b \in \mathbb{R}^-, entonces\ a > b$.

14. Si se eleva al cuadrado los dos miembros de una desigualdad de reales positivo, se obtiene otra desigualdad del mismo sentido. (La desigualdad "no cambia")

    $Si\ 0 < a < b\ entonces\ a^2 < b^2$.

15. Si se eleva al cuadrado los dos miembros de un desigualdad de reales negativo, se obtiene otra desigualdad de sentido contrario. (La desigualdad "cambia de sentido")

    $Si\ a < b < 0\ entonces\ a^2 > b^2$.

16. $a < b\ si\ y\ sólo\ si\ a - b < 0$.

17. $a < b\ si\ y\ sólo\ si\ 0 < b - a$.

18. $Si\ a^3 < b^3\ entones\ a < b$.

19. $a < b\ si\ y\ sólo\ si\ -b < -a$.

20. Ley de la Tricotomía: para cualquier par de números reales a y b, se cumple una y sólo una de las tres expresiones siguientes: $a = b$ ó $a < b$ ó $a > b$.

Nota.

Las propiedades 8, 9, 10 y 11, se conocen como ley de los signos en la multiplicación de reales.

Ejemplos.

$Si\ 10 < a\ y\ a < c$ entonces $10 < c$ (Propiedad 1).

$Si\ a < -8\ y\ b < 12$ entonces $a + b < -8 + 12 \longrightarrow a + b < 4$ (Propiedad 2).

$Si\ 20 < a$ entonces $20 - 9 < a - 9 \rightarrow 11 < a - 9$. (Propiedad 3).

$Si\ 10 < a\ y\ k \in \mathbb{R}^+$ entonces $10k < ak$. (Propiedad 4).

$Si\ a < -80$, entonces $7a < (-80)7 \rightarrow 7a < -560$. (Propiedad 4).

Como $-12 > -45$, entonces $(-12)(20) > (-45)(20) \longrightarrow -240 > -900$. (Propiedad 4).

$Si\ 10 < a\ y\ k \in \mathbb{R}^-$ entonces $10k > ak$. (Propiedad 5).

$Si\ a < -80$, entonces $-7a > (-80)(-7) \longrightarrow -7a > 560$. (Propiedad 5).

Como $-12 > -45$ entonces $(-12)(-20) < (-45)(-20) \rightarrow 240 < 900$. (Propiedad 5).

$Si\ 3 < a\ y\ 7 < b$ entonces $(3)(7) < ab \longrightarrow 21 < ab$. (Propiedad 6).

Como $15 < 20$ y $0{,}2 < 0{,}3$ entonces $(15)(0{,}2) < (20)(0{,}3) \longrightarrow 3 < 6$. (Propiedad 6).

$Si\ a\ <-\ 15\ \ y\ b\ <-\ 0{,}2$ entonces $ab\ >\ (-\ 15)(-\ 0{,}2) \rightarrow\ ab\ >\ 3$. (Propiedad 7).

Como $-\ 20\ <-\ 15\ \ y-\ 0{,}3\ <-\ 0{,}2$ entonces: $(-\ 20)(-\ 0{,}3)\ >\ (-\ 15)(-\ 0{,}2)\ \longrightarrow\ 6\ >\ 3$ (Propiedad 7).

Como $-1{,}2\ <\ 0\ \ y-1{,}02\ <\ 0$, entonces $(-1{,}2)(-1{,}02\ )>\ 0$; es decir, $1{,}224\ >\ 0$. (Propiedad 8: $-\times-\ =\ +$)

Como $0\ <\ 2.5\ \ y\ 0\ <\ 5,\ entonces\ \ 0\ <\ (2{,}5)(5)\ \ \ \longrightarrow\ \ 0\ <\ 12{,}5$. (Propiedad 9: $+\times+=+$).

Como $0<\ 30\ \ y-2{,}08\ <\ 0\ \ entonces\ (30)(-2{,}08\ )\ <\ 0\ \ \ \longrightarrow-\ 62{,}4\ <\ 0$.

(Propiedad 10: $+\ \times-\ =\ -$).

Como $-\ 0{,}4\ <\ 0\ \ y\ 0\ <\ 10\ \ entonces\ (-\ 0{,}4)(\ 10\ )\ <\ 0\ \ \ \ \longrightarrow-\ 4\ <\ \ 0$.

(Propiedad 11: $-\times\ +\ =\ -$).

$Si\ a\in\mathbb{R}^{+}$ y $a^2\ <\ 5^2$ entonces $a\ <\ 5$. (Propiedad 12).

$Si\ b\in\mathbb{R}^{+}$ y $b^2\ >\ 100$ entonces $b\ >\ 10$. (Propiedad 12).

Si a $\in\mathbb{R}^{-}$ y $a^2<\ (-\ 5)^2$ entonces: $a\ >-\ 5$. (Propiedad 13. En este ejemplo: $-5\ <\ a\ <\ 0$).

$Si\ b\in\mathbb{R}\ \ y\ \ b^2>(-10\ )^2\ \ entonces\ b<-10$ (Propiedad 13).

Si c $\in\mathbb{R}^{-}$ y $c^2<144$ entonces $c\ >-\ 12$. (Propiedad 13. En este ejemplo:$-\ 12\ <\ c\ <\ 0$).

Si $15\ <\ a$ entonces: $(15)^2\ <\ a^2\ \longrightarrow 225\ <\ a^2$.(Propiedad 14).

Si $b\ >\ 11$ entonces: $b^2\ \ >\ 121$. (Propiedad 14).

Si $a\ <-15$ entonces: $a^2\ >\ \ (-15)^2\longrightarrow a^2\ >\ 225$ (Propiedad 15).

Si $-11\ >\ b$ entonces: $121\ <\ b^2$ (Propiedad 15.

Como $1{,}6\ <\ 1{,}7$ entonces: $1{,}6-\ 1{,}7\ <\ 0\longrightarrow-\ 0{,}1\ <\ 0$ (Propiedad 16).

Como $-2\ <-\ 1$ entonces $-\ 2\ +\ 1\ <\ 0\longrightarrow\ -1\ <\ 0$. (Propiedad 16).

Como $1{,}6\ <\ 1{,}7$ entonces: $0\ <\ 1{,}7-\ 1{,}6\ \ \longrightarrow 0\ <\ 0{,}1$ (Propiedad 17).

Como $-2\ <-\ 1$ entonces: $0\ <-\ 1\ +\ 2\ \longrightarrow\ 0\ <\ 1$. (Propiedad 17).

2.5.4 Densidad de $\mathbb{R}$

Se afirma que el conjunto $\mathbb{R}$ $\boldsymbol{es\ denso}$, porque entre dos números reales diferentes, existen infinitos números reales.

Una manera de obtener números reales entre dos números reales diferentes $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{y}$ es la siguiente:

Si $\boldsymbol{x} < \boldsymbol{y}$, entonces por la propiedad 3, se tiene que:

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}<\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\,;\;\; \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}<\boldsymbol{y}+\boldsymbol{y} \longrightarrow 2\boldsymbol{x}<\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y};\;\; \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}<2\boldsymbol{y} \longrightarrow x<\frac{x+y}{2}\;\; y\;\; \frac{x+y}{2}<y$$

Conclusión: la semisuma de los números reales diferentes, en un real que está entre ellos; es decir, es un número que es mayor que el menor y menor que el mayor de ellos.

Otra manera de obtener números entre dos reales diferentes en notación decimal, es la siguiente:

Si los dos decimales son positivos, mayor es aquel que tiene la parte entera mayor. Cuando las partes enteras son iguales, se compara las "correspondientes" cifras decimales hasta obtener el primer par de cifras diferentes. En este caso, mayor es el decimal que tiene la cifra mayor. Exactamente lo mismo se hace con decimales negativos, pero en este caso, mayor es aquel que tiene la parte entera menor, o en el primer par de cifras correspondientes diferentes, el que tenga la menor de ellas.

Ejemplos

$3{,}987 < 4{,}001$ $\qquad$ $3{,}987 < 3{,}991$ $\qquad$ $3{,}991 < 3{,}992$

$5{,}8976543 < 5{,}897660002$ $\qquad$ $7{,}003571 > 7{,}00299999$ $\qquad$ $-4{,}89765 < -3{,}89105$

$-4{,}89765 < -4{,}89105$ $\qquad$ $-4{,}89105 < -4{,}89005$ $\qquad$ $-4{,}89105 > -4{,}892059$

Como $1{,}1 < 1{,}2$; entonces:

$1{,}1 < 1{,}11 < 1{,}2$ $\qquad$ $1{,}1 < 1{,}11 < 1{,}12 < 1{,}2$ $\qquad$ $1{,}1 < 1{,}11 < 1{,}12 < 1{,}13 < 1{,}2$

2.5.5 La recta real

En la representación geométrica de los números racionales en una recta, hay "vacíos" en ella, es decir puntos a los cuales no le corresponde un número racional. Ahora, si dichos vacíos se los "llena" con los números irracionales, entonces a cada punto P de la recta, le corresponde un decimal, ya sea periódico o no periódico, es decir, racional o irracional. En síntesis: a cada punto P de la recta le corresponde un número real $\boldsymbol{x}$ y a cada número real $\boldsymbol{x}$ le corresponde un punto P de la recta.

De esta manera, se establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto $\mathbb{R}$ y una recta. Por lo anterior, se afirma que $\mathbb{R}$ es un conjunto completo.

En la expresión $P(\boldsymbol{x})$ se lee: punto P de ordenada $\boldsymbol{x}$.

Sea X es una recta real, entonces OX es un sistema unidimensional, donde O es un punto de X con ordenada 0 (ver Gráfico 14).

Gráfico 14. Recta real

2.5.6 Intervalos reales.

Sea $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ números reales, tales que $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$.

El conjunto $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{n}\} = [\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\,]$ es un intervalo cerrado. Se lee: intervalo cerrado $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$.

El conjunto $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{m} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{n}\} = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\,)$ es un intervalo abierto. Se lee: intervalo abierto $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$

El conjunto $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{x} < \boldsymbol{n}\} = [\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\,)$ es un intervalo semiabierto. Se lee: intervalo semiabierto $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$. Abierto a la derecha

El conjunto $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{m} < \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{n}\} = (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}\,]$ es un intervalo semiabierto. Se lee: intervalo semiabierto $\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}$. Abierto a la izquierda.

Los siguientes conjuntos, se denominan intervalos infinitos:

$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{n}\} = (-\infty, \boldsymbol{n}]$.

$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{x} < \boldsymbol{n}\} = (-\infty, \boldsymbol{n})$.

$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{x}\} = [\boldsymbol{m}, +\infty)$.

$\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R} \,/\, \boldsymbol{m} < \boldsymbol{x}\} = (\boldsymbol{m}, +\infty) = (\boldsymbol{m}, \infty)$.

Los valores $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ se los llama extremos. La gráfica de intervalos abiertos, cerrados, semiabiertos, son segmentos de recta en una recta real.

En los puntos extremos de los segmentos, se ubica un corchete o punto relleno •, cuando el valor extremo pertenece al conjunto; y se ubica un paréntesis o un punto “vacío” o, cuando el extremo del segmento no pertenece al conjunto (ver Gráfico 15).

La gráfica de un intervalo infinito, tal como se lo define, es una semi-recta.

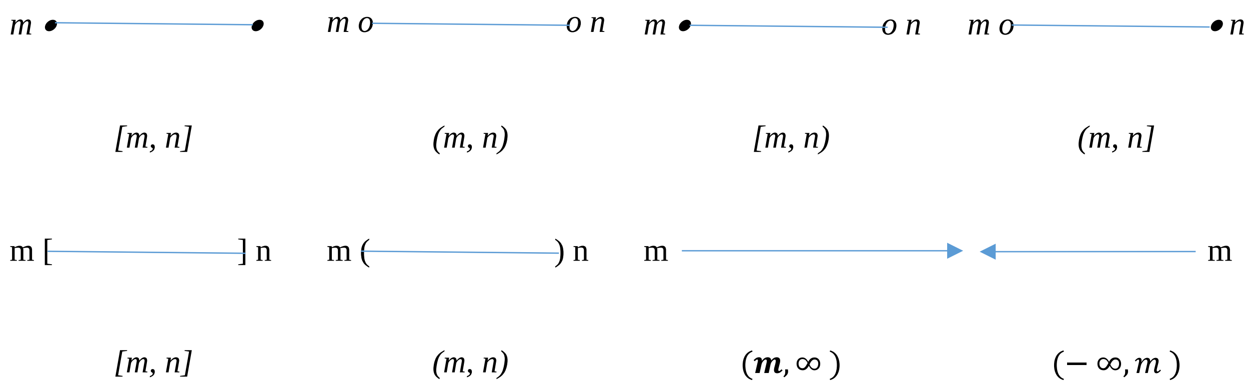


Gráfico 15. Representación gráfica de intervalos y su notación simbólica

Según las definiciones de intervalos, se tiene las siguientes proposiciones:

$\boldsymbol{m} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{n}$ *si y sólo si* $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}]$

$\boldsymbol{m} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{n}$ *si y solo si* $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$

$\boldsymbol{m} \leq x < n$ *si y sólo si* $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})$

$\boldsymbol{m} < \boldsymbol{x} \leq n$ *si y solo si* $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}]$

$\boldsymbol{m} \leq x$ si y solo si $\boldsymbol{x} \in [\boldsymbol{m}, \infty)$

$\boldsymbol{x} \leq n$ si y solo si $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \boldsymbol{n}]$

$\boldsymbol{m} < \boldsymbol{x}$ si y solo si $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{m}, \infty)$

$\boldsymbol{x} < \boldsymbol{n}$ si y solo si $\boldsymbol{x} \in (-\infty, \boldsymbol{n})$

En esta teoría de número reales, el conjunto de referencia o universal es $\mathbb{R}$; por lo tanto, el complemento de subconjuntos se obtiene respecto a $\mathbb{R}$. De esta manera se tiene:

$[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}]' = (-\infty, \boldsymbol{m}) \cup (\boldsymbol{n}, \infty)$

$(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})' = (-\infty, \boldsymbol{m}] \cup [\boldsymbol{n}, \infty)$

$[\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n})' = (-\infty, \boldsymbol{m}) \cup [\boldsymbol{n}, \infty)$

$(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}]' = (-\infty, \boldsymbol{m}] \cup (\boldsymbol{n}, \infty)$

$[\boldsymbol{m}, \infty)' = (-\infty, \boldsymbol{m})$

$(-\infty, \boldsymbol{m})' = [\boldsymbol{m}, \infty)$

$((-\infty, \boldsymbol{m}) \cup (\boldsymbol{n}, \infty))' = [\boldsymbol{m}, \boldsymbol{n}]$

$[-50, 50]' = (-\infty, -50) \cup (50, \infty)$

$(-\infty, 4)' = [4, \infty)$

2.5.7 Valor absoluto.

Para un número real x, el valor absoluto de x se indica así: $|\boldsymbol{x}|$.

2.5.7.1 Definición

$|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{x}$ si y solo si $\boldsymbol{x} \geq 0$ y $|\boldsymbol{x}| = -\boldsymbol{x}$ si y solo si $\boldsymbol{x} < 0$. También, se cumple que: $|x| = \sqrt{x^2}$.

Ejemplos:

$|10| = 10$ $\quad |8{,}9| = 8{,}9$ $\quad |-8{,}9| = 8{,}9$ $\quad |0| = 0$ $\quad |-3| = 3$ $\quad |-10| = -(-10) = 10$

$Si\ |\boldsymbol{x}| = 20$ entonces $\boldsymbol{x} = 20\ o\ \boldsymbol{x} = -20$.

$Si\ |2\boldsymbol{x}| = 14$ entonces $2\boldsymbol{x} = 14$ o $2\boldsymbol{x} = -14 \longrightarrow \boldsymbol{x} = \pm 7$.

$Si\ |\boldsymbol{x} + 4| = 20$, entonces $\boldsymbol{x} + 4 = 20\ o\ \boldsymbol{x} + 4 = -20 \longrightarrow \boldsymbol{x} = 16\ o\ \boldsymbol{x} = -24$.

2.5.7.2 Propiedades

Para todo par de números reales x, y se cumple que:

1. $x \leq |x|$.
2. $|x| \geq 0$.
3. $|x - y| = |y - x|$.
4. $|x\, y| = |x||y|$.
5. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$; $y \neq 0$.
6. Si $|x| = |y|$ entonces $x = y$ o $x = -y$.
7. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Desigualdad triangular).

   En la desigualdad triangular, se cumple la igualdad cuando los valores de x y y son positivos, o bien, son negativos, o son iguales a 0.

Ejemplos:

$|3 + 6| = |9| = 9$.

Por otra parte:

$|3| = 3$ y $|6| = 6$, por tanto, $|3| + |6| = 9$; $así\ que$: $|3 + 6| = |3| + |6|$.

$|-14 + (-8)| = |-22| = 22 = |-14| + |-8|$.

$|-20 + 8| = |-12| = 12 < |-20| + |8|$.

$|15 - 9| = |15 + (-9)| = |-6| = 6 < |15| + |-9|$ porque $|15| + |-9| = 15 + 9 = 24$.

$|-10 + 18| = |\ 8\ | = 8\ y\ |-10| + |18| = 10 + 18 = 28$; así que $|-10 + 18| < |-10| + |18|$.

Para un número real positivo k, se tiene:

1. $|x| \leq k$ si y solo si $-k \leq x \leq k$.
2. $|x| \geq k$ si y solo si $x \leq -k$ o $k \leq x$.
3. $-k \leq x \leq k$ si y solo si x ∈ $[-k, k]$.
4. $x \leq -k$ o $k \leq x$ si y solo si:

   $x \in (-\infty, -k]$ o $x \in [k, \infty)$ si y solo si $x \in (-\infty, -k] \cup [k, \infty)$.
5. $|x| < k$ *si y solo si* $-k < x < k$.
6. $|x| > k$ *si y solo si* $x < -k$ *o* $k < x$.
7. $-k < x < k$ *si y solo si* $x \in (-k, k)$.
8. $x < -k$ *o* $k < x$ *si y solo si* $x \in (-\infty, -k)$ *o* $x \in (k, \infty)$ si y solo si $x \in (-\infty, -k) \cup (k, \infty)$.

2.5.8 Ejercicios

Tener en cuenta el enunciado indicado y llenar los espacios convenientemente para obtener una proposición verdadera.

$Si\ x > 20, entonces\ 10\,x$ ______

$Si\ y > 15, entonces\ -10y$ ______

$Si\ 7 < x, entonces\ 14$ ______

$Si\ 5 < y,\ entonces\ -20$ _______

$Si\ x < -5\ entonces\ 7x$ _______

$Si\ y < -3\ entonces\ -4y$ _____

$-10 < x \longrightarrow 20$ ______

$5 < x \longrightarrow x^2$ ______

$2 < y \longrightarrow y^2$ ______

$x < -y \longrightarrow -x$ ______

$x < 0 \wedge y < 0 \longrightarrow x\,y$ ______

$x < 0 \wedge y > 0 \longrightarrow x\,y$ _____

$x < -1 \longrightarrow -x$ ______

$1 < -x \longrightarrow x$ ______

$2 < \frac{14}{x} \longrightarrow x$ _____ _________

$|x| < 3 \longrightarrow -3$ _________ $\wedge\ x \in$

$|y| < 7 \longrightarrow -7$ _________ $\wedge\ y \in$ _______

$-10 < x < 10 \longrightarrow |x|$ _____ $\wedge\ x \in$ ________

$-7 < y < 7 \longrightarrow |y|$ _____ $\wedge\ y \in$ ______

$x \in [-20\,,20] \longrightarrow |\,x\,|$ _____ $\wedge$ -20 _________

$y \in (-4\,,4) \longrightarrow |y|$ _____ $\wedge$ -10 ________

$Si\,|\,x\,| > 4\; entonces\; x$ ______ o ______

$Si\,|y| > 6\; entonces\; y$ ______ o ______

$|x\,| > 4 \longrightarrow x \in$ ___________________

$|y| > 6 \longrightarrow y \in$ _________________

$A = [-4\,,4\,] \longrightarrow A' =$ ________________

$B = (-6\,,6\,) \longrightarrow B' =$ _______________

$C = (-\infty\,,-4) \cup (\,4\,,+\infty\,) \longrightarrow C\,' =$ ________

$D = (-\infty\,,-6] \cup [\,6\,,+\,\infty\,) \longrightarrow D\,' =$ ______

2.6 PROBLEMAS DE APLICACIÓN DE MCD Y MCM

Un problema de MCD y de MCM, muchas veces, se lo identifica por la misma pregunta que se formula; por ejemplo, obtener el mayor o máximo valor o cantidad de ciertos valores o cantidades (MCD); o bien, obtener el menor o mínimo valor o cantidad (MCM).

1. Tres entidades bancarias A, B, C disponen respectivamente de \$240.000.000, \$180.000.000, \$360.000.000 para realizar préstamos de igual valor en cada una de las tres entidades. Para que el préstamo sea el mayor posible, ¿cuál debe ser su valor? ¿Para cuántas personas alcanza el préstamo en cada entidad?

   Solución:

   Según el planteamiento del problema y la pregunta que se debe responder, se debe calcular el MCD de los tres valores.

   $MCD(240.000.000{,}180.000.000{,}360.000.000) =$

   $= 10.000.000 \times MCD(24{,}18{,}36)$

   $= 10.000.000 \times 6 \times MCD(4{,}3{,}6)$

   $= 60.000.000 \times 1$

   $= 60.000.000$

   Para obtener el número de personas para las cuales alcanza el préstamo, se divide los valores dados entre 60.000.000 y se obtiene respectivamente, 4, 3, 6.

Respuesta. El mayor valor del préstamo es de \$60.000.000. El número de personas para las cuales alcanza el préstamo en las entidades A, B y C, son respectivamente: 4, 3 y 6.

2. Se debe comprar igual cantidad de tres tipos de fertilizantes A, B, C. Cada bulto de fertilizante tipo A contiene 10,5 Kg, del tipo B 16,5 Kg. y el bulto del tipo C contiene 22,5 Kg. ¿Cuántos Kg de fertilizante de cada tipo se puede comprar como mínimo? En este caso, ¿Cuántos bultos de cada tipo se debe comprar?

Solución:

Según el planteamiento, se debe de calcular el MCM.

Se observa que los números dados no son enteros. En este caso, multiplicando por 10 se obtiene números enteros; no interesa qué unidades se obtenga. Una vez obtenido el MCM se divide entre 10.

$$MCM(105,165,225) = 5 \times MCM(21,33,45) = 5 \times 3 \times MCM(7,11,15) = 15 \times MCM(7,11,15)$$

7	11	15	3
7	11	5	5
7	11	1	7
1	11	1	11
1	1	1	

$$MCM(7,11,15) = 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 1.155$$

$$MCM(105,165,225) = 15 \times 1.155 = 17.325$$

$$17.325/10 = 1.732,5$$

Respuesta 1. Se debe comprar como mínimo de cada tipo de fertilizante 1.732,5 Kg.

Para obtener el número de bultos que se debe comprar de cada tipo, se divide 1.732,5 entre 10,5; 16,5; y 22,5; con lo cual, se obtiene 165, 105 y 77, respectivamente.

Respuesta 2. Se debe comprar 165, 105 y 77 bultos de los fertilizantes tipo A, B, C, respectivamente.

3. Se desea dividir un terrero rectangular de 500 x 350 m. en lotes cuadrados de igual área. Obtener la longitud del lado de cada lote de máxima área. ¿Cuántos lotes se obtiene con esta área máxima? Calcular el área de cada lote (ver Gráfico 16).

Solución:

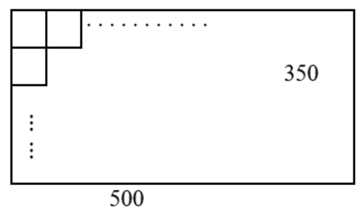


Gráfico 16. Lote rectangular 500 x 350

$MCD(500{,}350) = 50 \times MCD(10{,}7) = 50 \times 1 = 50$

Número de lotes a lo largo: 500 ÷ 50 = 10; a lo ancho: 350 ÷ 50 = 7

Número de lotes: 10 × 7 = 70; área de cada lote:

$$50\ m \times 50\ m = 2500 m^2$$

Respuestas:

- La longitud del lado de cada lote cuadrado de máxima área es de 50 m
- El número total de lotes es 70
- El área de cada lote es 2.500 m^2

4. Se desea dividir 4 lotes rectangulares de terreno, de 5.000 m^2, 4.500 m^2, 3.500 m^2, 4.000 m^2, respectivamente, en lotes rectangulares de igual área en todos los terrenos. Calcular la mayor área posible de los lotes. Obtener el número de lotes de área máxima que se obtiene en cada lote (ver Gráfico 17).

Solución:

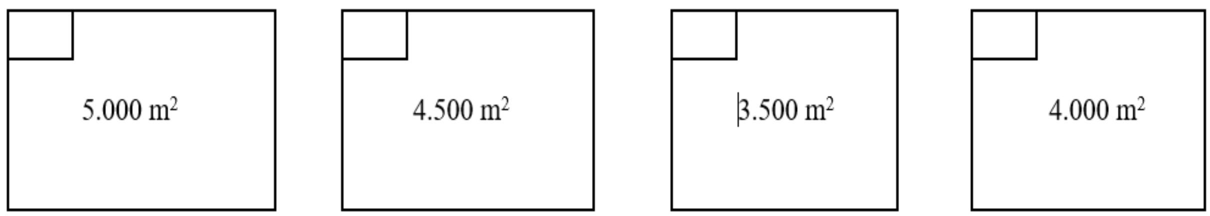


Gráfico 17. Lotes rectangulares de un área determinada en m^2

Como se debe dividir cada superficie (rectangular) en superficies rectangulares de igual área, y esta área debe ser la máxima, se debe calcular el MCD de las cuatro áreas dadas, las cuales tienen a 500 como divisor común; así:

$$MCD(5.000; 4.500; 3.500; 4.000) = 500 \times MCD(10; 9; 7; 8) = 500 \times 1 = 500$$

$$5.000 \div 500 = 10;\ 4.500 \div 500 = 9; 3.500 \div 500 = 7;\ \ 4.000 \div 500 = 8$$

Respuestas:

- La mayor área posible de los lotes es de $500\ m^2$
- El número de lotes que se obtiene de los terrenos en el orden dado son: 10, 9, 7 y 8 respectivamente.

Nota

Los lotes de 500 m2 pueden tener diferentes dimensiones.

Por ejemplo, $10 \times 50;\ 20 \times 25;\ 4 \times 125.$

5. Se llena una caja, en forma completa y exacta con cubos de igual tamaño. La caja tiene las siguientes dimensiones interiores: 50×40×30 cm. Obtener la longitud de las aristas de los cubos de mayor tamaño que se puede disponer en la caja. Calcular el número de dichos cubos que llenan la caja.

Solución:

Se debe calcular el mayor divisor común de 50, 40 y 30; pues, las aristas de un cubo tienen igual longitud (ver Gráfico 18).

$$MCD\ (50, 40, 30) \ = \ 10 \times MCD\ (5, 4, 3) \ = \ 10 \times 1 \ = \ 10$$

Si se afirma que las dimensiones de la caja son: 50 de largo, 40 de alto y 30 cm. de fondo, entonces, el cociente de dividir 50, 40 y 30 entre 10, es el número de cubos a lo largo, a lo alto, y de fondo.

$50 \div 10 = 5$ $\quad 40 \div 10 = 4$ $\quad 30 \div 10 = 3$ $\quad 5 \times 4 \times 3 = 60$

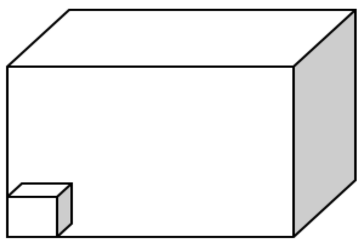


Gráfico 18. Caja de 50 x 40 x 30 cm^3

Respuestas. La longitud de las aristas de los cubos es de 10 cm.

El número de cubos que llenan la caja es de 60

Nota. El volumen de cada cubo es: 10 × 10 ×10 = 1000 cm^3.

El volumen de la caja es 50×40×30 cm^3 = 60.000 cm^3.

60.000 $cm^3 \div$ 1.000 cm^3 = 60 cubos

6. Tres obreros A, B, C pegan (instalan) respectivamente al día 20, 25 y 15 metros de tubo. Obtener el primer tramo de igual longitud que pegan los obreros. Hallar el número de días que necesitan los obreros para pegar la longitud de dicho tramo.

	1 día	2 días	3 días	4 días . . . .
A:	20 m.	40 m.	30 m.	80 m. . . . .
B:	25 m.	50 m.	75 m.	100 m. . . . .
C:	15 m.	30 m.	45 m.	60 m. . . . .

Solución:

Como se puede observar, el problema consiste en hallar un múltiplo común y, a la vez mínimo, entre ellos.

$$\begin{array}{ccc|c} 4 & 5 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

$MCM(20,25,15) = 5 \times MCM(4,5,3) = 5 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 300$

$300 \div 20 = 15; 300 \div 25 = 12; 300 \div 15 = 20$

Respuestas. El primer tramo de igual longitud que instalan es de 300 m.

Los Obreros A, B, C necesitan respectivamente de 15, 12 y 20 días para pegar cada uno el tramo de tubería de 300 m.

2.7 EQUIVALENCIAS Y CONVERSIONES

Sean U_1 y U_2 unidades de medida, por ejemplo, de longitud, área, volumen, capacidad, peso, corriente, capacidad y resistencia eléctrica; de fuerza, potencia, memoria del computador, unidades monetarias, y otros.

Si una unidad de medida U_1, equivale a $\boldsymbol{m}$ unidades de medida U_2, lo cual se expresa así: $U_1 = \boldsymbol{m}U_2$, entonces, $\boldsymbol{n}$ unidades de medida U_1 equivalen a $\boldsymbol{nm}$ unidades de medida U_2; es decir,

$$\boldsymbol{n}U_1 = \boldsymbol{nm}\,U_2 \qquad \text{(I).}$$

Ahora bien, $\frac{1}{\boldsymbol{m}}U_1 = U_2$, entonces, $\boldsymbol{k}$ unidades de medida U_2, equivale a $\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}$ unidades U_1; esto es,

$$\mathrm{k}U_2 = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}U_1 \qquad \text{(II)}$$

La Tabla 17, contiene la relación entre prefijos y unidades enteras o partes decimales.

Tabla 17. Relación prefijos y unidades enteras o partes decimales

Prefijo	Unidades	Prefijo	Unidades
Kilo (K)	Mil	Hecto (H)	Cien
Deca (D)	Diez	Deci (d)	Décima parte ($\frac{1}{10}$)
Centi (c):	Centésima parte ($\frac{1}{100} = 0{,}01$)	Mili (m)	Milésima parte ($\frac{1}{1.000} = 0{,}001$)

Ejemplos:

Un Kilociclo = 1.000 ciclos.

Un Hectómetro (1 Hm) = 100 metros.

Un Decalitro (1 Dl) = 10 litros.

Un decibel (1 db) = 0.1 de Bel.

Un centígrado = 0,01 de grado.

Un miliplak = 0,001 de plak.

En el Gráfico 19 se presenta el paso de unidades en un sistema decimal, tomando una unidad base.

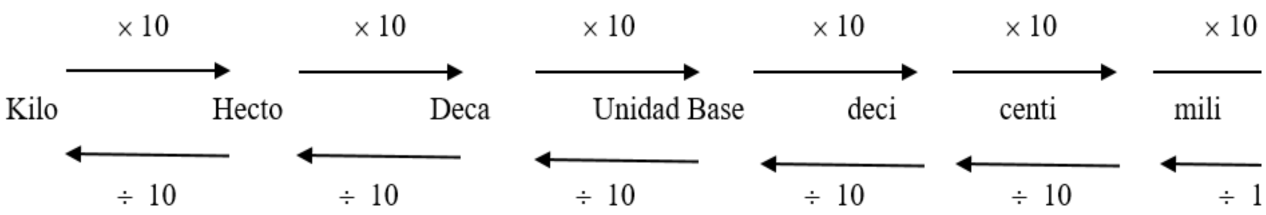


Gráfico 19. Conversión de unidades: de menor a mayor y viceversa

Ejemplos:

Es necesario recordar que, dividir un número entre 10, es equivalente a multiplicar el número por $\frac{1}{10}$.

$2{,}6\ Km = 2{,}6 \times 10\ Hm = 26\ Hm$ $\qquad$ $35\ Km = 35 \times 10 \times 10 \times 10\ m = 35000\ m$

$5Hm = 5 \times 100\ m = 500\ m$

$970\ mm = 970 \div 10\ cm = 97\ cm$

$97\ cm = 97 \div 10\ dm = 9{,}7\ dm$

$845\ cm = 845 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}\ m = 8{,}45\ m$

A continuación, se presentan algunas equivalencias. Obviamente, las unidades monetarias varían constantemente.

Unidades de longitud

$1\ Km = 1000\ m$ $\quad$ $1\ Hm = 100\ m.$ $\quad$ $1\ Dm = 10\ m.$

$1\ m = 10\ dm$ $\quad$ $1\ m = 100\ cm$ $\quad$ $1\ m = 1000\ mm$

$1\ dm = \frac{1}{10}\ m$ $\quad$ $1\ cm = \frac{1}{100}\ m$ $\quad$ $1\ mm = \frac{1}{1000}\ m$

$1\ pie\ (foot) = 30{,}48\ cm$ $\quad$ $1\ pulgada\ (inch, 1'') = 2{,}54\ cm$ $\quad$ $1\ milla\ náutica = 1852\ m$

Unidades de área

$1m^2 = 100\ dm^2$ $\quad$ $1m^2 = 10.000\ cm^2$ $\quad$ $1Dm^2 = 100\ m^2$ $\quad$ $1Hm^2 = 10.000\ m^2$

Unidades de medida agraria

Una hectárea (Ha) = 100 áreas (1 Ha = 100 áreas) 1 Ha = 10000 m2

Unidades de volumen

1 m3 = 1000 dm3. 1 m3 = 1.000.000 cm3.

Unidades de capacidad

Un galón americano = 3,784 litros (l.) 1 litro = 1000 ml 1ml = 1cm3

Unidades de tiempo

Un día = 24 horas   Una hora = 60 min   Un min = 60 seg

Otras notaciones y equivalencias

$Kilobyte = Kb$ $Megabyte = Mg$ $Gigabyte = \ Gb$ $Terabyte = \ Tb$

$1\ Kb\ \ =\ \ 1.024\ b$ $1\ Mg\ \ =\ \ 1.024\ Kb$ $1\ Gb\ \ =\ \ 1.024\ Mb$ $1Tb\ \ =\ \ 1.024\ Gb$

Conversiones:

Un Dólar equivale $3.190; es decir: 1 Dólar = 3190 pesos. La equivalencia de un Dólar en pesos, varia diariamente.

En este caso, U_1 es Dólar, U_2 es Peso colombiano y $\boldsymbol{m}\ =\ 3190.$

Para convertir $\boldsymbol{n}$ Dólares a Pesos, se aplica la fórmula (I), así:

$$120\ Dólares\ =\ 120\ \times 3.190\ pesos\ =\ \$382.800.$$

Para convertir $\boldsymbol{k}$ Pesos a Dólares, se aplica fórmula (II).

$$\$78.155\ =\ \frac{78.155}{3.190}\ Dólares\ =\ 24{,}5\ Dólares.$$

Conclusiones:

Para convertir Dólares a Pesos, se multiplica el número de Dólares por 3.190 (valor que cambia diariamente).

Para convertir Pesos a Dólares, se divide el número de Pesos entre 3.190.

Un Euro equivales a 1,15 Dólares: 1 Euro = 1,15 Dólares.

Ahora U1 es un Euro y U2 es un Dólar.

Ejemplo:

Convertir 200 Euros a Dólares y 4.439 Dólares a Euros.

Solución

Según (I): 200 × 1,15 Euros = 230 Dólares.

Según (II) 4.439 Dólares = $\frac{4.439}{1,15}$ Euros = 3.860 Euros.

Ejemplo:

Convertir $500.000 a Euros y 100 Euros a Pesos.

Solución:

Se pasa primero de Pesos a Dólares y luego, el resultado a Euros.

$\$500.000 = \frac{500.000}{3.190}$ Dólares $= 156,7398$ Dólares $\cong 156,74$ Dólares.

156,74 Dólares $= \frac{156,74}{1,15}$ E $= 136,2956$ Euros.

Ejemplo:

Convertir 100 Euros a Pesos

Se convierte los Euros a Dólares y luego, el resultado a Pesos

$$100\ Euros\ =\ 100\ \times 1.15\ Dólares\ =\ 115\ Dólares\ =\ 115\ \times 3.190\ Pesos\ =\ \$366.850$$

Efectuar las siguientes conversiones

a. 2,8 Km a Hm, Dm y m.

b. 150 m a Dm, Hm y Hm

c. 350 m a dm, cm y mm

d. 9.870 mm a cm, dm y m

e. 3,5 Kg a gr y 970 gr a Kg

f. 0,8 gr a mg y 12.500 mg a gr y Kg

g. 1,4 litros (l) a dl y cl

h. 0,5 litros a centilitros, mililitros y cm3

i. 10 Kb a bytes

j. 1.024.000 bytes a Kb y Mb

k. 5 Ha a áreas y m2

l. 50.230 m2 a áreas y a Ha,

m. 12 pulg a cm; 60 pulg a m; 254 cm a pulg; 35 pulg a dm.

n. 15 pies a cm; 150 pies a metros; 3.048 cm a pies; 60,96 metros a pies

o. 20 galones americanos a litros y decilitros

p. 77,572 litros a galones americanos

Nota: $n \div 10 = n \times \frac{1}{10} = n \times 0{,}1$; $n \div 100 = n \times \frac{1}{100} = n \times 0{,}01.$

Respuestas

a. 2,8 Km = 28 Hm = 280 Dm = 2.800 m

b. 50 m = 15 Dm = 1,5 Hm

c. 350 m = 3.500 dm = 35.500 cm = 350.000 mm

d. 9.870 mm = 987 cm = 98,7 dm = 9,87 m

e. 3,5 Kg = 3,5 × 10 × 10 × 10 g = 3.500 g

970 g = 970 × 0,1 × 0,1 × 0,1 Kg = 0,97 Kg

f. 0,8 gramos = 800 mg

12.500 mg = 12,5 gr = 0,0125 Kg

g. 1,4 litros (L) = 14 decilitros (dl)=140 centilitros (cl)

h. 0,5 L = 50 cl = 500 mililitros = 500 cm3.

i. 10 Kb = 10.240 bytes

j. 1.024.000 bytes = 1.000 Kb = 0,97656225 Mg

k. 5 Ha = 500 áreas = 50.000 m2

l. 50.230 m2 = 502,3 áreas = 5,023 Ha

m. 12 pulg = 30,48 cm; 60 pulg = 1,1524 m

254 cm = 100 pulg; 35 pulg = 8,89 dm

n. 15 pies = 457,2 cm; 150 pies = 45,72 m

3.048 cm = 100 pies; 60,96 m = 20 pies

o. 20 galones americanos = 75,68 L = 756,8 dl

p. 77,572 L = 20,5 galones americanos

Problemas de aplicación

1. Se distribuye x pesos entre cinco entidades A, B, C, D, E. La entidad A recibe las dos quintas partes de x, B recibe la sexta parte de x, C recibe el 10% de x, a la entidad D le corresponde el doble de lo que recibe C. La entidad E recibe el resto, cuyo valor es \$40.000.000. ¿Cuál es el valor de x? ¿Cuánto reciben las entidades A, B, C, D? ¿Qué porcentaje de x reciben la entidad E y la entidad A?

   Solución:

   A recibe $\frac{2}{5}x$; B recibe $\frac{1}{6}x$; C recibe 10% de $x = \frac{10}{100}x = \frac{1}{10}x$; D recibe $2 \times \frac{1}{10}x = \frac{1}{5}x.$

   Sumando las cantidades parciales distribuidas, resulta la cantidad total:

   $\frac{2}{5}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{5}x + 40.000 = x.$

Al simplificar términos semejantes, se tiene:

$$\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\right)x+40.000=x$$

Reduciendo a común denominador:

$$\frac{12+5+3+6}{30}\,x+40.000=x\;;$$

$$\frac{26}{30}x+40.000=x\;.$$

Al efectuar trasposición de términos y al reducir términos semejantes, se tiene:

$$40.000=x-\frac{26}{30}x\;;\;40.000=\left(1-\frac{26}{30}\right)x\;;\;40.000=\frac{2}{15}x\;;$$

$$x=40.000\times\frac{2}{15}=300.000.000\;.$$

Determinemos los valores que reciben cada una de las entidades:

Entidad A: $\frac{2}{5}x=\frac{2}{5}\times 300.000.000=120.000.000$

Entidad B: $\frac{1}{6}x=\frac{1}{6}\times 300.000.000=50.000.000$

Entidad C: $\frac{1}{10}x=\frac{1}{10}\times 300.000.000=30.000.000$

Entidad D: $\frac{1}{5}x=\frac{1}{5}\times 300.000.000=60.000.000$

Respuestas

El valor de x es \$300.000.0000 (cantidad total distribuida).

Las entidades $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ reciben respectivamente: 120, 50, 30 y 60 millones de pesos.

Como E recibe $\frac{2}{15}$ $de\ x$ y $\frac{2}{15}=0{,}133333=13{,}33\%$, entonces, E recibe el 13,333% de x (aproximadamente).

$$300.000.000\times a\%=40.000.000;\text{luego},a=\frac{40.000.000\times 100}{300.000.000}=13{,}3333\ \%.$$

Dado que A recibe $\frac{2}{5}$ del total, y $\frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\%$, entonces, A recibe el $40\ \%$ del total distribuido.

2. Se presta un capital de $50.000.000 al 3,5% mensual (tasa de interés). Obtener el valor del rendimiento a cabo de 8 meses.

   Solución y respuestas:

   Los rendimientos obtenidos en un mes son:

   $$50.000 \times 3{,}5\% = 50.000.000 \times \frac{3{,}5}{100} = 500.000 \times 3{,}5 = 1.750.000$$

   Los rendimientos obtenidos en 8 meses son:

   $$8 \times 1.750.000 = 14.000.000\, pesos$$

3. El salario mensual de una persona en diciembre de 2019 fue de $980.500. Si para el año 2020 este salario se incrementó en 5,5%, ¿cuál es valor del nuevo salario? ¿cuál es el monto del incremento?

   Solución y respuesta:

   El valor del incremento mensual fue: $980.500 \times 5{,}5\% = 53.927{,}5\, pesos$

   El valor del salario para 2020 es: $980.500 + 53.927{,}5 = 1.034.427{,}5\, pesos$

4. Se presta un capital con un interés de 4% mensual durante cinco meses. Al cabo de ese tiempo, se recibe el capital prestado junto con el rendimiento obtenido, lo cual suma $48.000.000. ¿Cuál es el valor del capital prestado?

   Solución:

   Si x es el valor del capital prestado, entonces, $x \times 4\%$ es el rendimiento obtenido en un mes; por lo tanto: $(x \times 4\%) \times 5$ es el rendimiento obtenido durante 5 meses.

   Dado que el capital prestado más el rendimiento obtenido en 5 meses corresponde a 40.000.000, entonces:

   $$x + (x \times 4\%) \times 5 = 48.000.000 \ \rightarrow x + x\frac{4}{100} \times 5 = 48.000.000$$

   $$x + 0{,}2x = 48.000.000 \rightarrow 1{,}2x = 48.000.000$$

   $$\mathrm{x} = \frac{48.000.000}{1{,}2} = 40.000.000$$

Respuesta:

El valor del capital prestado es de $40.000.000

5. El precio de un artículo incluido el 19% de IVA es de $46.172. ¿Cuál es el precio del producto sin incluir el IVA?

Solución:

Si x es el valor de artículo sin incluir el IVA; entonces, $19\%\ x$ es el valor a pagar por el impuesto.

Si al valor del artículo sin incluir el IVA, se le suma el valor a pagar por el impuesto, se obtiene el valor del artículo incluido el IVA.

$$x + 19\%x = 46.172\ ; x + 0{,}19x = 46.172\ ;\ 1{,}19x = 46.172;\ x = \frac{46.172}{1{,}19} = 38.800.$$

Respuesta

El valor del artículo sin incluir IVA, es de $38.800.

6. El precio de un metro cuadrado de un terreno es de $12.000. Obtener el valor de 4 Hectáreas de dicho terreno.

Solución:

Se calcula el número de metros cuadrados de 4 hectáreas y se multiplica este resultado por $12.000.

$$4\,Ha = 4 \times 10.000\,m2 = 40.000\,m^2\ ;\ 40.000 \times 12.000 = 480.000.000\,.$$

Respuesta:

El precio de 4 hectáreas de terreno es de $480.000.000.

7. El valor de un producto sin incluir el 19% de IVA, es de $130.000. El vendedor concede un descuento del 10%. Calcular el valor del producto, teniendo en cuenta lo siguiente:

i) Aplicar primero el IVA y después el 10% de descuento.

ii) Aplicar primero el descuento y después el IVA.

Solución.

i) $130.000 + 130.000 \times 19\% = 130.000 + 130.000 \times (0{,}19) = 1{,}19 \times 130.000 = 154.700.$

Valor con IVA: 154.700.

Descuento: $154.700 \times 10\% = 15.470.$

Valor a pagar: $154.700 - 15.470 = 139.230$

ii) $130.000 - 130.000 \times 10\% = 130.000 - 130.000 \times (0{,}1) = (0{,}9) \times 130.000 = 117.000.$

Valor con descuento: $117.000.$

Valor con IVA:

$117.000 + 117.000 \times 19\% = 117.000 + 117.000 \times (0{,}19) = 1{,}19 \times 117.000 = 139.230$

Respuesta

i) El valor del producto incluyendo el IVA y aplicando después el descuento, es: $\$139.230.$

ii) El valor del producto aplicando el descuento y después el IVA, es: $\$139.230.$

Por lo tanto, con los dos procedimientos se obtiene el mismo valor a pagar.

8. El valor de un producto es de \$250.500, pero tiene un descuento de 12%. Obtener el valor del producto con el descuento ofrecido.

Solución

$250.500 - 250.500 \times 12\% = 250.500 - 250.500 \times (0{,}12) = 250.500 \times (0{,}88) = 220.440$

Respuesta

El valor del producto realizando el descuento, es \$220.450.

2.8 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Realizar las operaciones indicadas y simplificar el resultado.

Operaciones	Operaciones
$\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$
$\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$	$\frac{3}{5}+\frac{5}{3}$

$\frac{35}{2}+\frac{135}{4}$ $\frac{5}{-4}+\frac{-2}{3}$

$\frac{7}{-2}+\frac{-2}{3}+\frac{11}{-6}$ $\frac{3}{5}-\frac{5}{3}$

$\frac{-35}{2}-\frac{135}{4}$ $\frac{5}{-4}-\frac{-2}{3}$

$\frac{7}{-2}-\frac{2}{3}-\frac{11}{6}$ $\frac{40}{7}\times\frac{49}{100}$

$\frac{23}{-8}\times\frac{18}{300}$ $\frac{15}{-14}\times\frac{98}{-105}$

$\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{-5}{2}$ $\frac{55}{4}\times\frac{75}{24}$

$\frac{70}{-8}\div\frac{-770}{48}$ $\left(\frac{9}{80}\div\frac{-10}{210}\right)\div\frac{81}{-42}$

$\frac{125}{49}+\frac{3}{7}\times\left(\frac{140}{3}-\frac{65}{6}\right)-70$ $350-\left(\frac{4}{5}+\frac{5}{4}\right)\times\frac{20}{41}+\left(\frac{1}{4}\div\frac{1}{48}\right)\times\frac{5}{6}$

2. Expresar en forma fraccionaria los siguientes números mixtos.

$10\frac{3}{4}$ $50\frac{1}{2}$ $2\frac{1}{2}$ $-30\frac{2}{5}$

3. Expresar cada porcentaje en forma fraccionaria, y cada fraccionario o decimal en términos de porcentajes.

60% $12{,}5\%$ 16% $\frac{3}{5}$

$\frac{1}{8}$ $0{,}6$ $0{,}125$ $0{,}16$

2,43	$\frac{60}{100}$

4. Determinar la cantidad que se indica en cada expresión.

Expresiones	Expresiones
Dos quintas partes de 57.955	Las tres cuartas partes de 45.729.116
El 75% de 45.729.116	La mitad del 50% de 800
Tres quintas partes del 25% de 35.588.600	1% de 10

6. Determinar en cada caso, el valor correspondiente al MCD o MCM.

a.

Operaciones	Operaciones
$MCM(6,2)$	$MCM(6,3)$
$MCM(6,2,3)$	$MCM(3,2,6)$
$MCD(42,72)$	$MCD(84,144)$
$MCD(3024,5184)$	$MCM(42,72)$
$MCM(4,7,2,1)$	$MCD(4,7,2,1)$
$MCM(84,144)$	$MCD(3024,5184,1728)$
$MCM(4000,7000,2000,1000)$	$MCD(4000,7000,2000,1000)$

b. Operaciones

Si $MCD(a, b) = 900$, hallar $MCD(3a, 3b)$

Si $MCM(a, b) = 800$, hallar $MCM(3a, 3b)$

Si 100 es divisor de a y b, hallar MCD $\left(\frac{a}{100}, \frac{b}{100}\right)$

Si 100 es divisor de a y b, hallar MCM $\left(\frac{a}{100}, \frac{b}{100}\right)$

CAPÍTULO 3.

Introducción al Álgebra

CAPÍTULO 3.
INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA

3.1 EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Una expresión algebraica es una representación escrita que combina símbolos matemáticos, números, letras, signos de operación, de agrupación, de relación, entre otros.

Ejemplos:

Son expresiones algebraicas:

$$3x \qquad 2x-8 \qquad (x-7)+z \qquad \frac{3}{4}x+10=x\sqrt{4x-7}=2 \qquad ax+by<1$$

Términos. En una expresión algebraica se distinguen los términos, los cuales, están separados entre sí por los signos de operación más y menos: $+$ y $-$

La anterior afirmación no es una definición, sino, una forma intuitiva de concebir lo que es un término algebraico.

Ejemplos:

Las expresiones que siguen pueden se pueden considerar términos de una expresión algebraica:

$$10x \quad ax^2 \quad 2axyz \quad 345 \quad \frac{a}{5}\,xyz^2 \quad \frac{ax-by}{10} \quad \sqrt{10a} \quad \sqrt{x^2-16} \quad \frac{\sqrt{ax+by}}{20}$$

Nota:

Cuando una expresión está agrupada con paréntesis, corchetes o llaves, en sí misma, se considera que es un término; inclusive, en cierta forma, se consideran signos de agrupación el signo radical y la barra horizontal de la división.

En la expresión $a+b+c+d$ hay cuatro términos; pero en $(a+b)+(c+d)$, hay dos términos: $(a+b)$ y $(c+d)$.

En la expresión $x^{a+b}+\ y^c$ hay dos términos, el primer término es x^{a+b} y en su exponente hay dos términos a y b.

Variables

Letras tales como: x, y, z, u, v, w se las utiliza como variables, es decir, que pueden tomar distintos valores en la misma expresión. En ciertas expresiones, tal como las ecuaciones, estas letras se las denomina incógnitas, variables; esto, porque representan cantidades o valores desconocidos.

Una letra con subíndices, también puede representar variables, así: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$.

Constantes

Letras como a, b, c, d se utilizan como coeficientes de variables o para la generalización de ciertas expresiones; toman valores constantes o fijos; es decir, representan valores particulares de ellas, con lo cual, se obtiene una expresión en particular.

Ejemplos:

La expresión $ax^2 + bx + c$ donde a ≠ 0, en general, es un polinomio de segundo grado o de grado 2, conocido como polinomio cuadrático, donde x es la variable; a, b son coeficientes y c es término independiente.

Si se asigna arbitrariamente valores constantes (fijos) para a, b, c, se obtiene una expresión cuadrática particular.

Así, para $a = 5, b =- 7$ y $c = 10$, se obtiene: $5x^2 - 7x + 10$.

En la expresión $200x^2 + 35x - 30$, se tiene que $a = 200, b = 35$ y $c = -30$.

3.2 POLINOMIOS

3.2.1 Conceptos

Una expresión algebraica con uno, dos o más términos, donde los exponentes de la variable son números enteros positivos, se denomina polinomio.

- Monomio. Es una expresión algebraica con un solo término.

  Ejemplos:

  $100,\ 45x,\ abc,\ x^{2+b}y^3,\ 2ax^3.$

- Binomio. Es una expresión algebraica con dos términos.

  Ejemplos:

  $x + y;\ 25 - 9y^2;\ (x + y) + z\ ;\ a^3 - b^3$

- Trinomio. Es una expresión algebraica con tres términos.

Ejemplos:

$4x^2 - 12x + 9$; $x + y + z$.

La expresión: $2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 4x + 10$ es un polinomio con cinco términos.

La expresión $(x + y)^2$ es el cuadrado de un binomio; $a^3 - b^3$ es una diferencia de cubos.

La expresión $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ es una igualdad (identidad) en la cual, el primer miembro es el cuadrado de un binomio y, el segundo miembro, es un trinomio.

Nota:

Una identidad es una igualdad, la cual se cumple para valores arbitrarios de sus variables.

Son ejemplos de identidades, las siguientes:

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ (diferencia de cubos)

$sen^2x + cos^2 = 1$ (identidad trigonométrica). Se cumple para cualquier valor real de x (x expresado en radianes o en grados sexagesimales)

- Términos semejantes. Son aquellos que tienen las mismas variables y con igual exponente.

  Ejemplos:

  $20x^2y$; $\frac{2}{3}x^2y$; x^2y ; $-x^2y$.

- Término entero. Es aquel que no tiene variables en el denominador.

  Ejemplos:

  $10x$; $\frac{1}{5}y$; $\frac{xy}{4}$.

- Término fraccionario. Es aquel que tiene una o más variables en el denominador.

  Ejemplos:

  $\frac{40}{x}$; $\frac{x+y}{3x}$; $\frac{2a+8}{x-3y}$.

- Término racional. Es aquel que no tiene variables en radicales. Los ejemplos anteriores, corresponden a términos racionales.

- Grado de un término. El grado de un término entero respecto a una variable, es el exponente entero no-negativo de dicha variable. Se lo llama también grado relativo.

  El término $50x^2z^3$ es de grado 2 con respecto a x, y de grado 3 respecto a z.

  $3xyz$ es de grado 1 respecto a x, grado 1 respecto a y, y de grado 1 respecto a z.

- Grado absoluto de un término entero. Es la suma de los grados de sus variables.

  El grado absoluto de $80ax^2y^3z$ es $2 + 3 + 1 = 6$.

  El grado absoluto de $80ax^2y^3z^2$ es $2 + 3 + 2 = 7$.

  El grado absoluto de $12abxy^4z^3$ es 8.

- Términos homogéneos. Son términos con igual grado absoluto.

  Ejemplos:

  $60x^4yz^2$; $-\frac{3}{5}x^2y^2z^3$.

- Términos heterogéneos. Corresponden a términos que tienen diferente grado absoluto.

  Ejemplos:

  $60x^5yz^2$; $-\frac{3}{5}x^2y^4z^3$.

- Un polinomio es entero cuando todos sus términos son enteros; es fraccionario cuando tiene al menos un término fraccionario.

  El grado de un polinomio entero respecto a una variable, es el mayor exponente entero positivo de dicha variable.

  Ejemplo:

  El grado del polinomio $x^4 + x^2y^2 + y^3$ es 4 respecto a x, y 3 respecto a y.

  Un polinomio entero está completo respecto a una variable, cuando la variable forma parte de todos sus términos, con exponente entero no negativo, desde cero hasta el correspondiente al grado del polinomio.

  Ejemplos:

  $8x^3 + 10x^2 - 6x + 15$.

$x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 + 1$. Este polinomio es completo respecto a x y también respecto a y.

Un polinomio entero está ordenado en forma ascendente respecto a una variable, cuando los exponentes enteros no negativos de la variable, están en orden de mayor a menor; en caso contrario, queda ordenado en forma descendente.

El polinomio $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$está ordenado en forma descendente respecto a x; y en orden ascendente respeto y.

El polinomio $x^3 + x^2y + xy^2 + y^3$ está ordenado en forma descendente respecto a x, y en orden ascendente respeto y.

- Reducción de términos semejantes. Es un proceso que consiste en operar con los coeficientes y agregar al resultado la misma parte variable.

Ejemplos:

$30x + 45x = (30 + 40)x = 75x$.

$10x - 8x = (10 - 8)x = 2x$.

$43x - 60x = (43 - 60)x = -17x$.

$-25x^2 - 16x^2 = (-25 - 16)x^2 = -41x^2$.

$-54xy + 10xy + 4xy = (-54 + 10 + 4)xy = -40xy$.

$14x + 15x - 10x^2 - 11x^2 = (14 + 15)x + (-10 - 11)x^2 = 29x + (-21)x^2 = 29x - 21x^2$.

$$\frac{2}{3}xy - \frac{5}{2}xy + \frac{7}{4}x^3y^2 + 10x^3y^2 - 6xy = \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{2} - 6\right)xy + \left(\frac{7}{4} + 10\right)x^3y^2$$

$$= \frac{-47}{6}xy + \frac{47}{4}x^3y^2 .$$

3.2.2 Polinomios con una variable

Interesa, sobre todo, polinomios enteros con una variable real (o en general compleja), con coeficientes reales (complejos), de grado n, que son de la forma:

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = p(x)$ donde $a_n \neq 0$.

La variable es x, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$, son los coeficientes; a_0 es el término independiente, esto porque no es coeficiente de x.

Dado que $x^0 = 1$, cuando $x \neq 0$, entonces se puede considerar que $a_0 = a_0x^0$.

La expresión: $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n = 0$ se denomina ecuación polinómica de grado n.

- *Polinomio de grado cero*. Un polinomio $p(x) = k$, donde k es un real fijo, es decir, es una constante, constituye un polinomio de grado cero. Cualquier número real, incluyendo el cero, se puede considerar que es un polinomio de grado cero.

- *Polinomio de grado uno*. Un polinomio $p(x) = ax + b$, donde $a \neq 0$, es de grado uno. En este caso, también se dice que $p(x)$ es un polinomio lineal.

  La igualdad $ax + b = 0$ es una ecuación polinómica de grado uno o una ecuación lineal.

- *Polinomio de grado dos*. Un polinomio $p(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$, es de grado dos. En este caso, también se dice que, $p(x)$ es un polinomio cuadrático.

  La igualdad $ax^2 + bx + c = 0$ es una ecuación polinómica de grado dos o una ecuación cuadrática.

- *Polinomio de grado tres*. Un polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ donde $a \neq 0$, es de grado tres. En este caso, se dice también que $p(x)$ es un polinomio cúbico.

  La igualdad $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ es una ecuación polinómica de grado tres o una ecuación cúbica.

3.2.3 Operaciones con polinomios

3.2.3.1 Adición y sustracción

Para obtener la suma o la diferencia de polinomios, simplemente se reducen términos semejantes. No es necesario que tengan igual grado, que sean completos o que estén ordenados; pero, sí es conveniente hacerlo en forma ascendente o descendente.

Ejemplos:

1. Sean los siguientes polinomios $p(x), q(x)$ y $r(x)$:

   $p(x) = 3x^3 - 8x^2 + 7x - 9;$

   $q(x) = 25 + 30x - 15x^2 + 80x^3$

   $r(x) = 23x + 50 - 18x^4 + 70x^3$

   Determinar los polinomios para las siguientes expresiones:

   $p(x) + q(x)\ ;\ q(x) + r(x)\ ;\ p(x) - r(x)\ ;\ p(x) - q(x)\ ;\ p(x) - q(x) - r(x)\ .$

Solución:

$$p(x) + q(x) = (3 + 80)x^3 + (-8 - 15)x^2 + (7 + 30)x + (-9 + 25)$$
$$= 83x^3 - 23x^2 + 37x + 16\,.$$
$$q(x) + r(x) = (25 + 50) + (30 + 23)x + (-15)x^2 + (80 + 70)x^3 + (-18)x^4$$
$$= 75 + 53x - 15x^2 + 150x^3 - 18x^4\,.$$
$$p(x) - r(x) = -(-18)x^4 + (3 - 70)x^3 - 8x^2 + (7 - 23)x + (-9 - 50)$$
$$= 18x^4 - 67x^3 - 8x^2 - 16x - 59\,.$$
$$p(x) - q(x) = (3 - 80)x^3 + (-8 + 15)x^2 + (7 - 30)x + (-9 - 25)$$
$$= -77x^3 + 7x^2 - 23x - 34\,.$$
$$p(x) - q(x) - r(x)$$
$$= 18x^4 + (3 - 80 - 70)x^3 + (-80 + 15)x^2 + (7 - 30 - 23)x + (-9 - 25 - 50)$$
$$= 18x^4 - 147x^3 + 7x^2 - 46x - 84\,.$$

2. Simplificar la siguiente expresión: $(3x^3 - 8x^2 + 7x - 9) + (9x - 5x^2 + 8x^3 - 12)$.

   Solución:

$$\begin{aligned}&(3x^3 - 8x^2 + 7x - 9) + (9x - 5x^2 + 8x^3 - 12)\\ &\qquad = (3 + 8)x^3 + (-8 - 5)x^2 + (7 + 9)x + (-9 - 12)\\ &\qquad = 11x^3 - 13x^2 + 16x - 21\,.\end{aligned}$$

3.2.3.2 Propiedades o leyes de los exponentes

La expresión a^n es una potencia de a; n es el exponente y a es la base.

Notaciones: $a \times b = a.b = a * b = ab$.

Producto de potencias de la misma base:

$a^n \times a^m = a^{n+m}$; se escribe la base y se suma los exponentes.

Producto de potencias de igual exponente:

$a^n \times b^n = (a \times b)^n$; se multiplica las bases y se deja el exponente.

Cociente de potencias de la misma base:

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$; $a \neq 0$; se deja la base y se resta los exponentes.

Cociente de potencias de igual exponente:

$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$; $b \neq 0$; se divide las bases y se deja el exponente.

Potencia de una potencia:

$(a^n)^m = a^{n \times m} = a^{nm}$; se escribe la base y se multiplica los exponentes.

Raíz n-ésima de a:

$\sqrt[n]{a} = (a)^{1/n}$; $\sqrt[n]{a^m} = (a)^{m/n}$.

Además, se cumple que:

$a^1 = a, \forall a \in \mathbb{R}$.

$a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R};\ a \neq 0$.

Ejemplos:

1. $a^n \times a^m = a^{n+m}$; equivalentemente, $a^{n+m} = a^n \times a^m$.

$z^2 \times z^5 = z^{2+5} = z^7$; $x^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{4}{2}} = x^2$; $x^5 x^{-2} = x^{5-2} = x^3$.

$890^3 \times 890^{-2} = 890^{3-2} = 890^1 = 890$.

$6^{10} \times 6^5 \times 6^{-13} = 6^{10+5-13} = 6^2 = 36$.

$2.340^{\frac{1}{2}} \times 2.340^{\frac{1}{3}} \times 2.340^{\frac{1}{6}} = 2.340^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 2.340^{\frac{3+2+1}{6}} = 2.340^1 = 2.340$.

$a \times a \times a \times a = a^{1+1+1+1} = a^4$.

$a^5 a^{-8} a^6 a^{-3} = a^{5-8+6-3} = a^0 = 1$; se assume que, $a \neq 0$.

$x^7 = x^{5+2} = x^5 x^2$.

$x^7 = x^6 x^1 = x^4 x^3 = x^5 x^2$.

2. $a^n \times b^n = (a \times b)^n$; equivalentemente $(a \times b)^n = a^n \times b^n$.

$5^2 \times 10^2 = (5 \times 10)^2 = 2.500$.

$a^3b^3 = (ab)^3$

$\left(\frac{1}{500}\right)^3 (1000)^3 = \left(\frac{1000}{500}\right)^3 = 2^3 = 8\,.$

$(a^2)^3b^3 = (a^2b)^3\,.$

$(a^k)^n \times (b^h)^n = (a^k \times b^h)^n\,.$

$(5^k)^n \times (a^3)^n \times (b^2)^n = (5^k \times a^3 \times b^2)^n\,.$

$(ab)^3 = a^3b^3 \qquad (2ab)^3 = 2^3a^3b^3 = 8a^3b^3\,.$

$(6 \times a^3 \times b^2)^3 = 6^3(a^3)^3(b^2)^3 = 216a^9b^6\,.$

3. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

$\frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3\,;\; \frac{a^3}{a^5} = a^{3-5} = a^{-2}\,;\; \frac{b^4}{b^3} = b^{4-3} = b^1 = b\,.$

$\frac{20.340^{35}}{20.340^{34}} = 20.340^{35-34} = 20.340^1 = 20.340\,.$

$\frac{250^{40}}{250^{41}} = 250^{40-41} = 250^{-1} = \frac{1}{250}.$

Nota.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$\frac{1}{5^{-3}} = 5^{-(-3)} = 5^3 = 125$

$100 \times 2^{-5} = \frac{100}{2^5} = \frac{100}{32} = \frac{25}{8}$

4. $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$

$\frac{100^4}{5^4} = \left(\frac{100}{5}\right)^4 = 20^4 = 160.000\,;\; \frac{360^5}{180^5} = \left(\frac{360}{180}\right)^5 = 2^5 = 32\,.$

$\sqrt{8} = 8^{\frac{1}{2}}\,;\; \sqrt{8^4} = 8^{\frac{4}{2}} = 8^2 = 64\,;\; \sqrt[3]{12} = 12^{\frac{1}{3}}\,;\; \sqrt[3]{12^3} = 12^{\frac{3}{3}} = 12^1 = 12\,.$

3.2.3.3 Multiplicación de polinomios

Para multiplicar dos polinomios, se multiplica cada término del uno por cada término del otro y, luego, si es el caso, se reduce términos semejantes, seleccionado un orden, descendente o ascendente.

Ejemplos:

a. $(x+4)(x+3) = x(x+3) + 4(x+3) = x^2 + 3x + 4x + 12 = x^2 + 7x + 12$.

b. $(3x+2)(x+5) = 3x(x+5) + 2(x+5) = 3x^2 + 15x + 2x + 10 = 3x^2 + 17x + 10.$

c. $(5x-2)(2x^2+3x-6)$

$= 5x(2x^2+3x-6) + (-2)(2x^2+3x-6)$

$= (5x)(2x^2) + (5x)(3x) + (5x)(-6) + (-2)(2x^2) + (-2)(3x) + (-2)(-6)$

$= 10x^3 + 15x^2 - 30x - 4x^2 - 6x + 12$

$= 10x^3 + 11x^2 - 36x + 12.$

d. $(7x^3 - 5x + 10)(10x^2 + 2)$

$= (7x^3)(10x^2) + (-5x)(10x^2) + (10)(10x^2) + (7x^3)(2) + (-5x)(2) + (10)(2)$

$= 70x^5 - 50x^3 + 100x^2 + 14x^3 - 10x + 20$

$= 70x^5 + (-50+14)x^3 + 100x^2 - 10x + 20$

$= 70x^5 - 36x^3 + 100x^2 - 10x + 20.$

e. $(x+4)(x+3)(8x-5)$

$= (x^2 + 7x + 12)(8x - 5)$

$= (x^2)(8x) + (7x)(8x) + (12)(8x) + (x^2)(-5) + (7x)(-5) + (12)(-5)$

$= 8x^3 + (56-5)x^2 + (96-35)x - 60$

$= 8x^3 + 51x^2 + 61x - 60.$

f. $(1{,}2x + 0{,}4x^2)(10x^3 - 8x)$

$= (1{,}2x + 0{,}4x^2)(10x^3) + (1{,}2x + 0{,}4x^2)(-8x)$

$= (1{,}2x)(10x^3) + (0{,}4x^2)(10x^3) + (1{,}2x)(-8x) + (0{,}4x^2)(-8x)$

$= 12x^4 + 4x^5 - 9{,}6x^2 - 3{,}2x^3$

$= 4x^5 + 12x^4 - 3{,}2x^3 - 9{,}6x^2.$

3.2.3.4 División de polinomios

La división de polinomios tiene trascendencia por los resultados que de ella se obtiene, sobre todo, cuando se divide por un polinomio lineal. Los procesos realizados en la división permiten factorizar el polinomio y obtener ciertos valores de la variable llamados raíces, y de paso, las soluciones de una ecuación polinómica.

3.2.3.4.1 Algoritmos de la división

Dado un polinomio $p(x)$ de grado n, y un polinomio $s(x)$ de grado m, tales que $n \geq m$, entonces, existe un polinomio $q(x)$ llamado cociente y un polinomio $r(x)$ llamado resto o residuo, que cumplen lo siguiente:

$$p(x) = s(x)(x) + r(x)\ donde\ 0 \leq grado\ r(x) < m.$$

La anterior expresión se conoce como algoritmo de la división de polinomios.

Proceso de la división

Se realizan los siguientes pasos:

1. Se ordenan $p(x)$ y $s(x)$ en forma descendente.

2. Se divide el primer término de $p(x)$ entre el primer término de $s(x)$; este resultado es el primer término del polinomio cociente $q(x)$.

3. Se multiplica el primer término del cociente por $s(x)$ y este polinomio resultante se resta a $p(x)$. Para esto, se escribe este polinomio resultante, cambiando de signo a sus términos, debajo de $p(x)$, y se reduce términos semejantes; mediante lo cual se obtiene un polinomio $p_1(x)$, también ordenado en forma descendente.

4. Si el grado de $p_1(x)$ es mayor o igual que m, se divide el primer término de $p_1(x)$ entre el primer término de $s(x)$; este resultado es el segundo término del polinomio cociente $q(x)$.

5. Se multiplica el segundo término del cociente por S (x); este polinomio resultante se resta a $p_1(x)$. Se escribe este polinomio resultante cambiando de signo a sus términos, debajo de $p_1(x)$, y se reduce términos semejantes; mediante lo cual se obtiene un polinomio $p_2(x)$, también ordenado en forma descendente.

6. Si el grado de $p_2(x)$ es mayor o igual que m, se divide el primer término de $p_2(x)$ entre el primer término de $s(x)$; este resultado es el tercer término del polinomio cociente $q(x)$. Se continúa el proceso tal como en los casos anteriores.

El proceso termina cuando se obtiene un polinomio $p_k(x)$ de grado menor que m. Este polinomio $p_k(x)$, constituye el polinomio residuo $r(x)$.

Ejemplos:

Dividir: P (x) = 2x 3 + x 2 – 43x – 60 entre:

a. $s(x) = x + 5$ b. $s(x) = x + 4$ c. $s(x) = 3x - 4$

d. $s(x) = x - 5$ e. $s(x) = 2x + 3$

Solución:

a. Como $p(x)$ y $s(x)$ están ordenados en forma descendente, entonces, se divide $2x^3$ entre x.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 + x^2 - 43x - 60 & x + 5 \\ \hline
-2x^3 - 10x^2 & 2x^2 - 9x + 2 \\ \hline
P_1(x) = -9x^2 - 43x - 60 & \\
\qquad 9x^2 + 45x & \\ \hline
P_2(x) = 2x - 60 & \\
\qquad -2x - 10 & \\ \hline
P_3(x) = -70 = R(x) &
\end{array}
$$

El resultado es $2x^2$ y es el primer término del cociente.

Se multiplica $2x^2$ por $x + 5$, lo cual resulta $2x^3 + 10x^2$.

Este polinomio se resta a $p(x)$, lo cual equivale a cambiarle de signo y sumar con $p(x)$. Se reduce términos semejantes y se obtiene el polinomio: $p_1(x) = -9x^2 - 43x - 60$.

Como $p_1(x)$ es de grado 2 y $x + 5$ es de grado 1, entonces se, procede a dividir tal como en el proceso anterior; aplicando el paso 5) y el paso 6).

Como $p_3(x) = -70$ es de grado cero, entonces termina la división y -70 es el resto o residuo $r(x)$.

El cociente es $q(x) = 2x^2 - 9x + 2$.

Según el algoritmo de la división, se tiene que: $p(x) = (x + 5)(2x^2 - 9x + 2) + (-70)$.

b. Dividir: $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = x + 4$.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 + x^2 - 43x - 60 & x+4 \\ \cline{2-2}
-2x^3 - 8x^2 & 2x^2 - 7x - 15 \\ \cline{1-1}
P_1(x) = -7x^2 - 43x - 60 & \\
\qquad 7x^2 + 28x & \\ \cline{1-1}
P_2(x) = -15x - 60 & \\
\qquad 15x + 60 & \\ \cline{1-1}
P_3(x) = 0 = R(x): \text{ residuo} & \\
\text{Cociente: } 2x^2 - 7x - 15 &
\end{array}
$$

Según el algoritmo de la división, se tiene que:

$p(x) = (x+4)(2x^2 - 7x - 15) + 0 = (x+4)(2x^2 - 7x - 15)$, por lo cual, $p(x)$ queda factorizado.

c. Dividir: $P(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $S(x) = 3x - 4$.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3 + x^2 - 43x - 60 & 3x - 4 \\ \cline{2-2}
-2x^3 + \frac{8}{3}x^2 & \frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{343}{27} \\ \cline{1-1}
p_1(x) = \frac{11}{3}x^2 - 43x - 60 & \\
-\frac{11}{3}x^2 + \frac{44}{9}x & \\ \cline{1-1}
p_2(x) = -\frac{343}{9}x - 60 & \\
\frac{342}{9}x - \frac{1.372}{27} & \\ \cline{1-1}
p_3(x) = -\frac{2.992}{27} = R(x) & \\
q(x) = \frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{343}{27} &
\end{array}
$$

En este caso, se cumple que:

$$p(x) = (3x - 4)\left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}x - \frac{343}{27}\right) + \left(-\frac{2.992}{27}\right).$$

Se observa que, el polinomio $p(x)$ no está factorizado.

3.2.3.4.2 División Sintética o método de coeficientes separados

Se aplica cuando se divide un polinomio $p(x)$ de grado n, entre un polinomio lineal $s(x) = ax + b$ Observe que $grado\ s(x) = 1$.

Según el algoritmo de la división, el cociente $q(x)$ queda de grado $n - 1$ y $0 \leq grado\ r(x) < 1$; en consecuencia, grado $r(x) = 0$. Según esto, $r(x)$ es un número real, incluido cero. Este hecho se puede observar en los tres ejemplos anteriores. Por tanto, $r(x)$ es un número real, que se puede representar por r.

Para realizar la división de un polinomio cualquiera entre un polinomio lineal, se utiliza un proceso simplificado, llamado División Sintética o método de coeficientes separados.

Pasos:

1. Se ordena en forma descendente $p(x)$ y se escribe únicamente sus coeficientes.
2. Se baja el primer coeficiente y se multiplica por $-\frac{b}{a}$. Este resultado se suma con el segundo coeficiente de $p(x)$
3. Se multiplica el resultado anterior por $-\frac{b}{a}$ y este producto se suma con el tercer coeficiente de $p(x)$.
4. Se multiplica por $-\frac{b}{a}$ el resultado del paso anterior; este producto se suma con el cuarto coeficiente de $p(x)$.

Se continúa hasta obtener la suma del último coeficiente de $p(x)$ con el último producto con $-\frac{b}{a}$. Esta última suma, es el residuo.

Se divide por a el primer coeficiente de $p(x)$ y las sucesivas sumas obtenidas, excepto la última suma, la cual, constituye el residuo. Los demás valores son los coeficientes del cociente $q(x)$.

Ejemplos:

Dividir: $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre los siguientes polinomios $s(x)$:

a. $s(x) = x + 5$ b. $s(x) = x + 4$ c. $s(x) = 3x - 4$ d. $s(x) = x - 5$ e. $s(x) = 2x + 3$

Solución:

a. Dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = x + 5$.

2	1	-43	-60
(-5)	-10	-45	-10
2	-9	2	-70

En este caso, como $s(x) = x + 5$, entonces $a = 1, b = 5$, y $-\frac{b}{a} = -5$.

Como $p(x)$ está ordenado en forma descendente, entonces, el orden de los coeficientes corresponde al establecido en su formulación.

Se baja el primer coeficiente que es 2 y se lo multiplica por -5. El producto resultante, -10, en este caso, se suma con 1. Esta suma, -9, se multiplica por -5. Este producto 45 se suma con -43, cuyo resultado es 2. Finalmente, se multiplica 2 por -5 y su resultado -10 se suma con -60. El valor -70, es el residuo de la división.

Como $a = 1$, no hace falta dividir 2, – 9 y 2 entre 1. Por lo tanto, el cociente pedido es:

$q(x) = 2x^2 - 9x + 2$.

b. Dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = x + 4$.

2	1	– 43	– 60
(– 4)	– 8	28	60
2	– 7	– 15	0

$s(x) = x + 4; a = 1 y\ b = 4; luego: -\frac{b}{a} = -4$

Cociente: $2x^2 - 7x - 15$.

Residuo: 0

c. Dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = 3x - 4$.

2	1	-43	-60
$(\frac{4}{3})$	$\frac{8}{3}$	$\frac{44}{9}$	$-\frac{1372}{27}$
2	$\frac{11}{3}$	$-\frac{343}{9}$	$-\frac{2.992}{27}$

Como $s(x) = 3x - 4$, entonces,

$a = 3, b = -4, -\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$

Cociente: $\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{9}x - \frac{343}{27}$

Residuo: $\frac{2.992}{27}$

Se debe tener presente que se divide 2, $\frac{11}{3}$ y $-\frac{343}{9}$ entre 3, dando como resultado $\frac{2}{3}, \frac{11}{9}$ y $-\frac{343}{27}$

d. Dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = x - 5$.

2	1	-43	-60
(5)	10	55	60
2	11	12	0

Cociente: $2x^2 + 11x + 12$

Residuo:0

$p(x) = (x - 5)(2x^2 + 11x + 12)$

e. Dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $s(x) = 2x + 3$.

2	1	-43	-60
$\left(-\frac{3}{2}\right)$	-3	3	60
2	-2	-40	0

Cociente: $\frac{2}{2}x^2 - \frac{2}{2}x - \frac{40}{2} = x^2 - x - 20$

Residuo: 0

$p(x) = (2x + 3)(x^2 - x - 20)$

En los casos $d)$ y $e)$, $p(x)$ queda factorizado, siendo $x - 5$ y $2x + 3$ factores lineales del polinomio.

En la división por $x + 4$, ejemplo $b)$, el resto también es cero y $x + 4$ es otro factor lineal de $p(x)$.

Así que, $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60 = (x + 4)(x - 5)(2x + 3)$.

Nota:

- Las soluciones de la ecuación cúbica $2x^3 + x^2 - 43x - 60 = 0$ son $-4,\ 5$ y $-\frac{3}{2}$.
- Las raíces del polinomio cúbico $2x^3 + x^2 - 43x - 60$ son $-4,\ 5$ y $-\frac{3}{2}$.

3.2.4 Teorema del residuo y del factor.

Como se explicó anteriormente, según el algoritmo de la división se cumple que:

$$p(x) = (ax + b)q(x) + r.$$

El residuo es $r(x)$, es un número real que se puede representar por r. Este hecho se puede observar en los cinco ejemplos anteriores.

Ahora bien, si $ax + b = 0$, entonces, $x = -\frac{b}{a}$.

Al reemplazar x por este valor en $p(x)$, se obtiene:

$$p(x) = (ax + b)q(x) + r.$$

$$p\left(-\frac{b}{a}\right)=\left(a\left(-\frac{b}{a}\right)+b\right)q\left(-\frac{b}{a}\right)+r=(-b+b)\times q\left(-\frac{b}{a}\right)+r=0\times q\left(-\frac{b}{a}\right)+r=r.$$

Por lo tanto, $p\left(-\frac{b}{a}\right)=r$.

3.2.4.1 Teorema del residuo

El residuo de dividir un polinomio $p(x)$ entre $ax+b$ es $p\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Si el resto r es cero, entonces, de la expresión $p(x)=(ax+b)q(x)+r$ se obtiene que:

$$p(x)=(ax+b)q(x).$$

En este caso, $p(x)$ queda factorizado y la expresión $ax+b$ es un factor lineal del polinomio $p(x)$.

3.2.4.2 Teorema del factor

$ax+b$ es factor lineal de un polinomio $p(x)$, si y solo sí, $p\left(-\frac{b}{a}\right)=0$.

Esto es equivalente a la siguiente afirmación:

$ax+b$ es un factor de $p(x)$, si y solo sí, la división de $p(x)$ entre $ax+b$ es exacta; es decir, el residuo de dividir $p(x)$ entre $ax+b$ es $r=0$.

En los ejemplos anteriores $b), d)$ y $e)$, los residuos son cero; por lo tanto, las divisiones son exactas. En consecuencia, $x+4,\ x-5\ y\ 2x+3$ son factores (lineales) de $p(x)$.

Ejemplo:

Aplicando el teorema del residuo, obtener el resto de dividir $p(x)=2x^3+x^2-43x-60$ entre los siguientes polinomios:

a. $s(x)=x+5; b)\ s(x)=x+4; c)\ s(x)=3x-4; d)\ s(x)=x-5; e)\ s(x)=2x+3.$

Solución:

a. Dado que $s(x)=ax+b=x+5$, entonces $a=1, b=5, -\frac{b}{a}=-5$.

$$\begin{aligned} p(-5) &= 2(-5)^3+(-5)^2-43(-5)-60 \\ &= 2(-125)+25+215-60 \\ &= -250+25+215-60=-70. \end{aligned}$$

$p(-5)=-70=r$.

R/ El residuo es $r=-70$.

b. Como $s(x) = ax + b = x + 4$, entonces $a = 1, b = 4, -\frac{b}{a} = -4$.

$$p(-4) = 2(-4)^3 + (-4)^2 - 43(-4) - 60$$

$$= 2(-64) + 16 + 172 - 60$$

$$= -128 + 16 + 172 - 60 = 0 = r.$$

$p(-4) = 0 = r.$

R/ El residuo es $r = 0$.

c. Como $s(x) = ax + b = 3x - 4$, entonces $a = 3, b = -4, -\frac{b}{a} = \frac{4}{3}$.

$$p\left(\frac{4}{3}\right) = 2\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 43\left(\frac{4}{3}\right) - 60$$

$$= 2\left(\frac{64}{27}\right) + \frac{16}{9} - \frac{172}{3} - 60 = \frac{128}{27} + \frac{16}{9} - \frac{172}{3} - 60 = -\frac{2.992}{27}.$$

$$p\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{2.992}{27} = r\,.$$

R/ El residuo es $r = -\frac{2.992}{27}$.

d. Como $s(x) = ax + b = x - 5$, entonces $a = 1, b = -5, -\frac{b}{a} = 5$.

$$p(5) = 2(5)^3 + (5)^2 - 43(5) - 60$$

$$= 2(125) + 25 - 215 - 60 = 250 + 25 - 215 - 60 = 0\,.$$

$p(5) = 0 = r$.

R/ El residuo es $r = 0$.

e. Como $s(x) = ax + b = 2x + 3$, entonces $a = 2, b = 3, -\frac{b}{a} = -\frac{3}{2}$.

$$p\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 43\left(-\frac{3}{2}\right) - 60 = 2\left(-\frac{27}{8}\right) + \frac{9}{4} + \frac{129}{2} - 60$$

$$= -\frac{27}{4} + \frac{9}{4} + \frac{129}{2} - 60 = 0\,.$$

$$p\left(-\frac{3}{2}\right) = 0 = r\,.$$

R/ El residuo es $r = 0$.

Como se puede observar, estos restos ya se habían obtenido realizando las divisiones correspondientes; sin embargo, se presentan como ejemplos sobre aplicación del teorema del residuo.

Ejemplo

Obtener el resto de la división de $p(x) = 12x^3 - 43x^2 + 11x + 30$ entre a) $4x - 5$; b) $x - 2$.

Solución

a. $p(x) = 12\left(\frac{5}{4}\right)^3 - 43\left(\frac{5}{4}\right)^2 + 11\left(\frac{5}{4}\right) + 30$

$$= 12\left(\frac{125}{64}\right) - 43\left(\frac{25}{16}\right) + \frac{55}{4} + 30 = \frac{1.500}{64} - \frac{1.075}{16} + \frac{55}{4} + 30 = 0 .$$

Nota. Como $r = 0$, entonces, $4x - 5$ es un factor (lineal) de $p(x)$.

b. P (2) = 12(2) 3 – 43 (2) 2 + 11(2) + 30 = 12(8) – 43(4) + 22 + 30 = 96 – 172 + 52 = –24 = r (residuo).

$$p(x) = 12(2)^3 - 43(2)^2 + 11(2) + 30 = 12(8) - 43(4) + 22 + 30 = -24 = r .$$

Nota. Como $r \neq 0$, entonces, $x - 2$ no es un factor de $p(x)$.

Ahora, realicemos las divisiones por el método de coeficientes separados.

a.

12	– 43	11	30
(5/4)	15	– 35	–30
12	– 28	– 24	0

Residuo: $r = 0$.

Cociente: $q(x) = 3x^2 - 7x$-6.

b.

12	– 43	11	30
(2)	24	– 38	–54
12	– 19	– 27	–24

Residuo $r = -24$.

Cociente: $q(x) = 12x^2 - 19x - 27$.

Conclusión. Para obtener el residuo (resto) de la división de un polinomio $p(x)$ entre un polinomio lineal, es conveniente, en muchos casos, aplicar el método de la división sintética.

3.2.6 Valor numérico y raíz de un polinomio

Sea un polinomio $p(x)$. El valor que se obtiene al reemplazar la variable x por un número fijo k, se denomina valor numérico de $p(x)$ para $x = k$; es decir, el valor numérico de $p(x)$ para $x = k$ es $p(k)$.

Ahora, cuando $p(k) = 0$, se dice que k es una raíz de $p(x)$.

Ejemplo:

Sea el polinomio $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$.

Determinar el valor numérico para $x = -5, x = -4, x = \frac{4}{3}, x = 5, x = -\frac{3}{2}$.

Solución

$$p(-5) = 2(-5)^3 + (-5)^2 - 43(-5) - 60 = 2(-125) + 25 + 215 - 60$$

$$= -250 + 25 + 215 - 60 = -70\,.$$

Observe que $r = -70$ es el residuo de la división de $p(x)$ entre $x + 5$.

$$p(-4) = 2(-4)^3 + (-4)^2 - 43(-4) - 60 = 2(-64) + 16 + 172 - 60$$

$$= -128 + 16 + 172 - 60 = 0\,.$$

Observe que $r = 0$ es el residuo de la división de $p(x)$ entre $x + 4$.

$$p\left(\frac{4}{3}\right) = 2\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 43\left(\frac{4}{3}\right) - 60 = 2\left(\frac{64}{27}\right) + \frac{16}{9} - \frac{172}{3} - 60$$

$$= \frac{128}{127} + \frac{16}{9} - \frac{172}{3} - 60 = -\frac{2.992}{27}\,.$$

Se recuerda que $r = -\frac{2.992}{27}$ es el residuo de la división de $p(x)$ entre $3x - 4$.

$$p(5) = 2(5)^3 + (5)^2 - 43(5) - 60 = 2(125) + 25 - 215 - 60 = 250 + 25 - 215 - 60 = 0\,.$$

Observe que, $r = 0$ es el residuo de la división de $p(x)$ entre $x - 5$.

$$p\left(-\frac{3}{2}\right) = 2\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 43\left(-\frac{3}{2}\right) - 60$$

$$= 2\left(-\frac{27}{8}\right) + \frac{9}{4} + \frac{129}{2} - 60 = -\frac{27}{4} + \frac{9}{4} + \frac{129}{2} - 60 = 0\,.$$

Observe que $r = 0$ es el residuo de la división de $p(x)$ entre $2x + 3$.

k	$p(k) = r$
-5	-70
-4	0
$\frac{4}{3}$	$-\frac{2.992}{27}$
5	0
$-\frac{3}{2}$	0

Se puede observar que los valores $-4,\ 5\ y -\frac{3}{2}$ son raíces de $p(x)$ y los valores $-5\ y\ \frac{4}{3}$ no son raíces de $p(x)$.

Nota:

Los valores numéricos indicados en la tabla anterior, se obtuvieron en ejemplos anteriores, aplicando el algoritmo común de la división y también por el algoritmo de la División Sintética al dividir $p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60$ entre $x + 5,\ x + 4,\ 3x - 4,\ x - 5\ y\ 2x + 3$. También se obtuvieron cuando se calculó el residuo de dividir el polinomio $p(x)$ entre $x + 5,\ x + 4,\ 3x - 4,\ x - 5\ y\ 2x + 3$, respectivamente, como ejemplos de aplicación del teorema del factor. En su momento se concluyó que los polinomios lineales $x + 4,\ x - 5\ y\ 2x + 3$ son factores lineales del polinomio:

$p(x) = 2x^3 + x^2 - 43x - 60.$

Resumen:

- El residuo de dividir un polinomio $p(x)$ entre un polinomio lineal $ax + b$, es $p\left(-\frac{b}{a}\right)$.
- El polinomio $ax + b$ es un factor lineal de $p(x)$ si y solo si $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ (El residuo de la división es cero).
- $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ es raíz de $p(x)$ si y solo si $p\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$.
- El polinomio $ax + b$ es factor lineal de $p(x)$ si y solo si $p\left(-\frac{b}{a}\right)$ es raíz de $p(x)$.

Conclusión:

- Un factor lineal de un polinomio, determina una raíz del polinomio.
- Una raíz de un polinomio, determina un factor lineal del polinomio.

Ejemplos:

Si $2x + 3$ es un factor de un polinomio $p(x)$, entonces, $-\frac{3}{2}$ es una raíz de $p(x)$, por lo tanto, $p\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$.

Si $7x - 8$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces, $\frac{8}{7}$ es una raíz de $p(x)$; por lo tanto, $p\left(\frac{8}{7}\right) = 0$.

Si $x + 12$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces, -12 es una raíz de $p(x)$; por tanto, $p(-12) = 0$.

Si $x - 3$ es factor de un polinomio $p(x)$, entonces,3 es una raíz de $p(x)$; por lo cual, $p(3) = 0$.

Si $-\frac{10}{7}, \frac{11}{3}, -40, 20$ son raíces de $p(x)$, entonces, $7x + 10$, $3x - 11$, $x + 40$, $x - 20$, son factores de $p(x)$.

3.2.7 Raíces racionales de un polinomio

Sea el polinomio $\mathrm{p}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n$ donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números enteros. Las posibles raíces racionales del polinomio $\mathrm{p}(x)$ son números racionales de la forma $\frac{p}{q}$, siendo p factor de a_0 y q factor de a_n ($\frac{p}{q}$ es el cociente de factores del término independiente sobre factores del coeficiente del término de mayor exponente).

Ejemplo.

Sea $p(x) = 2x^3 + 7x^2 - 17x - 10$.

Observe que $a_0 = -10$ y $a_n = 2$.

Los factores (divisores) de -10 son: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$.

Los factores (divisores) de 2 son: $\pm 1, \pm 2$.

Por lo tanto, las posibles raíces racionales de la forma $\frac{p}{q}$ son cocientes de los factores de -10 sobre ± 1 y factores de -10 sobre ± 2.

De esta manera, las posibles raíces racionales de $p(x)$ son: $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{5}{2}$.

Para comprobar si una posible raíz, realmente lo es, se puede aplicar la división sintética o calcular el valor numérico del polinomio para la posible raíz.

2	7	– 17	– 10
(1)	2	9	– 8
2	9	– 8	–18

2	7	– 17	– 10
(– 1)	–2	– 5	22
2	5	– 22	12

2	7	– 17	– 10
(2)	4	22	10
2	11	5	0

Según lo anterior, $p(1) \ = – 18;\ p(-1) = 12;\ P\ (2)\ =\ 0.$

Por lo tanto, – $1\ y\ 1$ no son raíces de $p(x)$; pero 2 sí es una raíz de $p(x)$.

Como 2 es una raíz de $p(x) = \ 2x^3 + 7x^2 – \ 17x - 10$, entonces,

$p(x) = 2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 = (x-2)(2x^2 + 11x + 5).$

Posteriormente se determina las raíces del polinomio cociente $q(x) = 2x^2 + 11x + 5$, las cuales también son raíces de $p(x)$.

Nota. Las raíces de un polinomio cuadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ son soluciones de la ecuación cuadrática correspondiente: $ax^2 + bx + c = 0$, y se pueden obtener mediante la siguiente fórmula:

$$x \ = \ \frac{-\,b\ \pm\ \sqrt{b^2\ -\ 4ac}}{2a}$$

Para $p(x) = 2x^2 + 11x + 5$, se tiene que:

$$x \ = \frac{-11\ \pm\ \sqrt{11^{\,2}\ -\ 4(2)(5)}}{2 \times 2} \ = \ \frac{-11\ \pm\ \sqrt{121\ -40}}{4} \ = \ \frac{-\,11\ \ \pm\ \sqrt{81}}{4} \ = \ \frac{-\,11\ \ \pm\ \ 9}{4}$$

Una raíz se obtiene así: $\frac{-\ 11\ +\ 9}{4} \ = \ \frac{-\ 2}{4} \ = \ -\ \frac{1}{2}.$

La otra raíz es: $\frac{-\ 1\,1-\ 9}{4} \ = \ \frac{-\ 20}{4} \ = \ -\,5\ .$

Así que: $p\left(-\ \frac{1}{2}\right) = 0\ y\ \ p(-5) = 0\ .$

Por tanto, las raíces de la ecuación $2x^2 + 11x + 5 = 0$ son $-\frac{1}{2}\ \ y - 5.$

En consecuencia, los ceros del polinomio $p(x) = \ 2x^3 + 7x^2 – \ 17x - 10$ son $2, -5$ y $-\frac{1}{2}$; los cuales son las soluciones (raíces) de la ecuación polinómica: $2x^3 + 7x^2 – \ 17x - 10 = 0.$

Nota:

Los factores lineales de $p(x)$ son $(x-2), (x+5)\ y\ (2x+1)$, entonces:

$$p(x) = (x-2)(x+5)(2x+1).$$

$$p(x) = 2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 = (x-2)(x+5)(2x+1)\,.$$

Por tanto, para obtener raíces racionales de un polinomio $p(x)$ de grado n, se aplica la división sintética, iniciando con los coeficientes del $p(x)$ y se continúa el proceso con los coeficientes de los cocientes sucesivos.

Ejemplo:

Obtener las raíces de $p(x) = -49x^3 + 6x^4 + 234x + 72 + 37x^2$ (Polinomio no ordenado).

El polinomio $p(x)$ ordenado queda así: $p(x) = 6x^4 - 49x^3 + 37x^2 + 234x + 72$.

Las posibles raíces racionales del polinomio corresponden a los cocientes de los divisores de 72 entre los divisores de 6.

Divisores de 72: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72$.

Divisores de 6: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Posibles raíces racionales:

$$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm 2, \pm\frac{2}{3}, \pm 3, \pm\frac{3}{2}, \pm 4, \pm\frac{4}{3}, \pm 6, \pm 8, \pm\frac{8}{3}, \pm 9, \pm\frac{9}{2}, \pm 12, \pm 18, \pm 24, \pm 36, \pm 72\,.$$

6	-49	37	234	72
(4)	24	-100	-252	-72
6	-25	-63	-18	0
(6)	36	66	18	
6	11	3	0	

Después de probar varias opciones, se obtiene las primeras dos raíces: 4 y 6.

En la primera división, el cociente es de grado 3; en la segunda es de grado 2 y sus raíces son $-\frac{3}{2}$ y $-\frac{1}{3}$.

Respuesta:

Las raíces del polinomio de grado 4, son: $4, 6, -\frac{3}{2}$ y $-\frac{1}{3}$.

Las soluciones de la ecuación $6x^4 - 49x^3 + 37x^2 + 234x + 72 = 0$, son: $4, 6, -\frac{3}{2}$ y $-\frac{1}{3}$.

Los factores lineales de $p(x) = 6x^4 - 49x^3 + 37x^2 + 234x + 72$ son:

$(x-4)$; $(x-6)$; $(2x+3)$ y $(3x+1)$.

Entonces:

$$p(x) = 6x^4 - 49x^3 + 37x^2 + 234x + 72 = (x-4)(x-6)(2x+3)(3x+1).$$

3.2.8 Teorema fundamental del álgebra

Un polinomio de grado n, tiene como máximo n ceros (raíces) complejos diferentes.

Una ecuación polinómica de grado n, tiene como máximo n soluciones (raíces) complejas diferentes.

Notas.

1. Si las raíces diferentes de un polinomio $p(x)$ de grado 3, son k y h, entonces, una de las dos se repite.

   En este caso se debe cumplir una de las ecuaciones siguientes:

   $p(x) = (x-h)(x-h)(x-k)$ o también $p(x) = (x-h)(x-k)(x-k)$.

2. Las raíces de un polinomio $p(x)$, son las soluciones de la ecuación polinómica $p(x) = 0$.

3.3 PRODUCTOS NOTABLES

3.3.1 Suma por diferencia de dos expresiones

$$(A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

La suma por la diferencia o diferencia por suma, de dos expresiones, es igual al cuadrado de la primera expresión que está en la diferencia, menos el cuadrado de la otra expresión.

Ejemplos:

$(5+x)(5-x) = 25 - x^2$.

$(x^2-y)(x^2+y) = (x^2)^2 - y^2 = x^4 - y^2$.

$(8-x^3)(x^3+8) = 64 - (x^3)^2 = 64 - x^6$.

$(3x+2y)(2y-3x) = (2y)^2 - (3x)^2 = 4y^2 - 9x^2$.

$\left(\sqrt{7} - 4xy^2\right)\left(4xy^2 + \sqrt{7}\right) = \left(\sqrt{7}\right)^2 - (4xy^2)^2 = 7 - 16x^2y^4$.

3.3.2 Cuadrado de un binomio

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Nota:

En el desarrollo de un trinomio, sus términos no necesariamente deben tener el orden señalado anteriormente.

Ejemplos:

$(6x+5y)^2 = (6x)^2 + 2(6x)(5y) + (5y)^2 = 36x^2 + 60xy + 25y^2.$

$(6x-5y)^2 = (6x)^2 - 2(6x)(5y) + (5y)^2 = 36x^2 - 60xy + 25y^2.$

$(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$

$(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2.$

3.3.3 Cubo de un binomio

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3.$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}(2x^2+4y^3)^3 &= (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2(4y^3) + 3(2x^2)(4y^3)^2 + (4y^3)^3\\ &= 4x^6 + 48x^4y^3 + 96x^2y^6 + 64y^9.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(30-3x^2)^3 &= (30)^3 - 3(30)^2(3x^2) + 3(30)(3x^2)^2 - (3x^2)^3\\ &= 27.000 - 8.100x^2 + 810x^4 - 27x^6.\end{aligned}$$

3.4 COCIENTES NOTABLES

$\frac{A^n - B^n}{A-B} = A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + A^{n-4}B^3 + \cdots + B^{n-1}$ (n entero positivo).

$\frac{A^n - B^n}{A+B} = A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - A^{n-4}B^3 + \cdots - B^{n-1}$ (n entero par positivo).

$\frac{A^n + B^n}{A+B} = A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - A^{n-4}B^3 + \cdots + B^{n-1}$ (n entero impar positivo).

Muchas veces es necesario llevar la expresión a la forma como aparece en el término del lado izquierdo de las igualdades anteriores; de esta manera se identifica el valor de n y de las expresiones A y B.

Observe que, la secuencia del desarrollo es idéntica en todos los casos, excepto por los signos $\pm$.

Ejemplos:

a. $\dfrac{4^3 - x^3}{4 - x} = 4^{3-1} + 4^{3-2}x + 4^{3-3}x^2 = 4^2 + 4^1x + 4^0x^2 = 16 + 4x + x^2.$

Observe que $n = 3,\ A = 4,\ B = x.$

b. $\dfrac{25 - x^4}{5 - x^2} = \dfrac{5^2 - (x^2)^2}{5 - x^2} = 5^{2-1} + 5^{2-2}x^2 = 5 + x^2.$

Aquí se tiene que $n = 2,\ A = 5,\ B = x^2.$

c. $\dfrac{16 - 81x^4}{2 + 3x} = \dfrac{2^4 - (3x)^4}{2 + 3x} = 2^3 - 2^2(3x) + 2(3x)^2 - (3x)^3 = 8 - 12x + 18x^2 - 27x^3$.

d. $$\begin{aligned}\frac{32 + x^{10}}{2 + x^2} = \frac{2^5 + (x^2)^5}{2 + x^2} &= 2^4 - 2^3x^2 + 2^2(x^2)^2 - 2(x^2)^3 + (x^2)^4 \\ &= 16 - 8x^2 + 4x^4 - 2x^6 + x^8\ .\end{aligned}$$

e. $\dfrac{6^3 + x^3}{6 + x} = 6^2 - 6x + x^2 = 36 - 6x + x^2$.

f. $\dfrac{1 + x^3}{1 + x} = 1 - x + x^2$.

g. $\dfrac{1 - x^3}{1 - x} = 1 + x + x^2$.

3.5 FACTORIZACIÓN

La factorización es el proceso inverso al de la propiedad distributiva. Consiste en representar una expresión como el producto de dos o más expresiones, llamadas factores.

3.5.1 Diferencia de cuadrados

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)\ .$$

Ejemplos:

a. $100 - x^2 = 10^2 - x^2 = (10 + x)(10 - x)$.

b. $144 - 25x^2 = 12^2 - (5x)^2 = (12 - 5x)(12 + x)$.

c. $a^6 - b^8 = (a^3)^2 - (b^4)^2 = (a^3 - b^4)(a^3 + b^4)$.

d. $36x^2 - 49y^4 = (6x)^2 - (7y^2)^2 = (6x + 7y)(6x - 7y)$.

e. $10a^2x^4 - 5by^8 = \left(\sqrt{10}ax^2\right)^2 - \left(\sqrt{5b}y^4\right)^2 = \left(\sqrt{10}ax^2 + \sqrt{5b}y^4\right)\left(\sqrt{10}ax^2 - \sqrt{5b}y^4\right)$.

3.5.2 Trinomio cuadrado perfecto

$$A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2 .$$

Ejemplos:

a. $36x^2 + 60xy + 25y^2 = (6x)^2 + 2(6x)(5y) + (5y)^2 = (6x + 5y)^2$.

b. $36x^2 - 60xy + 25y^2 = (6x)^2 - 2(6x)(5y) + (5y)^2 = (6x - 5y)^2$.

c. $9y^2 + 12xy + 4x^2 = (3y)^2 + 2(3y)(2x) + (2x)^2 = (2x + 3y)^2$.

d. $4x^2 + 9y^2 - 12xy = (2x - 3y)^2$.

e. $30x^2y^4 + 9x^4 + 25y^8 = (3x^2)^2 + (5y^4)^2 + 2(3x^2)(5y^4) = (3x^2 + 5y^4)^2$.

3.5.3 Factorización de un trinomio cuadrático

$$ax^2 + bx + c = \frac{(ax + m)(ax + n)}{a} ;$$

donde $mn = ac$ y $m + n = b$.

Como caso particular, si $a = 1$, se tiene que: $ax^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$, donde,

$$mn = c \text{ y } m + n = b .$$

Ejemplos:

a. $x^2 + 13x + 40 = (x+5)(x+8) \ \rightarrow m = 5 \text{ y } n = 8;$ porque:

$5 + 8 = 13 = b \text{ y } 5 \times 8 = 40 = c$.

b. $x^2 + 3x - 70 = (x+10)\big(x + (-7)\big) \ \rightarrow m = 10 \text{ y } n = -7;$ porque:

$10 + (-7) = 3 \ y \ 10 \times (-7) = -70$.

c. $x^2 - 9x - 220 = (x+11)(x-20)$.

$m = 11 \text{ y } n = -20; 11 + (-20) = -9 \text{ y } 11 \times (-20) = -220$.

d. $x^2 - 14x + 48 = (x-8)(x-6)$.

$m = -8 \text{ y } n = -6; \ -8 + (-6) = -14 \ y \ -8 \times (-6) = 48$.

e. $60x^2 + 37x + 5 = \dfrac{(60x+25)(60x+12)}{60} = \dfrac{5 \times (12x+5) \times 12 \times (5x+1)}{60}$

$$= (12x+5)(5x+1) .$$

En este caso se tiene que:

$m = 25 \text{ y } n = 12;$ porque $25 \times 12 = 300 = 60 \times 5 = ac \text{ y } 25 + 12 = 37 = b$.

3.5.4 Factor común

Si en cada uno de los términos de una expresión hay un factor común, entonces dicha expresión es igual al factor común multiplicado por la expresión que se obtiene de dividir cada término de la expresión inicial, por ese factor.

Ejemplos:

a. $5a + 5ax + 5ay - 5az = 5a(1 + x + y - z)$.

b. $12 + 24x - 36y + 12z = 12(1 + 2x - 3y + z)$.

c. $3x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 9x = x(3x^3 - 4x^2 + 8x - 9)$.

d. $20a^2x^3 - 25a^3y + 30a^4z^4 = 4(5a^2)x^3 - 5(5a^2)ay + 6(5a^2)a^2z^4$
$= (5a^2)(4x^3 - 5ay + 6a^2z^4)$.

e. $\frac{5}{2}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x(5x^2 + 7x - 1)$.

3.5.5 Diferencia y sumas de potencias

Para cualquier entero positivo n:

$$A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 + \, . \, . \, . \, . \, . + B^{n-1}) .$$

Para cualquier entero par positivo n:

$$A^n - B^n = (A + B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - \, . \, . \, . \, . \, . - B^{n-1}) .$$

Para cualquier entero impar positivo n:

$$A^n + B^n = (A + B)(A^{n-1} - A^{n-2}B + A^{n-3}B^2 - \, . \, . \, . \, . \, . + B^{n-1}) .$$

Nota:

Los denominadores en los cocientes notables, que a su vez son divisores de los numeradores, ahora pasan a ser factores de los numeradores.

Ejemplos:

a. $4^3 - x^3 = (4 - x)(4^{3-1} + 4^{3-2}x + 4^{3-3}x^2) = (4 - x)(4^2 + 4^1x + 4^0x^2)$
$= (4 - x)(16 + 4x + x^2)$.

b. $25 - x^4 = 5^2 - (x^2)^2 = (5 - x^2)(5^{2-1} + 5^{2-2}x^2) = (5 - x^2)(5 + x^2)$

c. $16 - 81x^4 = 2^4 - (3x)^4 = (2 + 3x)(2^3 - 2^2(3x) + 2(3x)^2 - (3x)^3)$
$= (2 + 3x)(8 - 12x + 18x^2 - 27x^3)$.

d. $6^3 + x^3 = (6 + x)(6^2 - 6x + x^2) = (6 + x)(36 - 6x + x^2)$.

e. $1+\ x^3\ =(1+x)(1-x+\ x^2)$.

f. $1-\ x^3\ =(\ 1-x)(1+x+\ x^2)$.

g. $8-\ x^3\ =\ 2^3\ -\ \ x^3=\ (\ 2-x)(2^2+2x+\ x^2)=(2-x)(4+2x+x^2)$.

h. $32+x^{10}=2^5+(x^2)^5=(\ 2+x^2)(2^{\,4}-2^{\,3}x^2+2^2(x^2)^2-2(x^2\ )^3+(x^2)^4)=$

$(2+x^2)(16-8x^2+\ 4x^4-2x^6+x^8)$.

3.6 RACIONALIZACIÓN

Racionalizar una fracción algebraica que contiene radicales en el denominador, consiste en obtener otra expresión algebraica equivalente de modo que el denominador no contenga radicales.

3.6.1 Fracciones con denominador raíz n-ésima de A

$$\frac{K}{\sqrt[n]{A}}=\frac{K\sqrt[n]{A^{\,n-1}}}{A}.$$

Cuando $n\ =\ 2$, no se escribe índice del radical.

Ejemplos:

a. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}=\dfrac{1\times\sqrt[3]{2^{\,3-1}}}{2}=\dfrac{\sqrt[3]{2^{\,2}}}{2}=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}.$

b. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3^{\,2-1}}}{3}=\dfrac{\sqrt{3^{\,1}}}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}.$

c. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}.$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.$

e. $\dfrac{10}{\sqrt[3]{5}} = \dfrac{10\sqrt[3]{5^2}}{5} = 2\sqrt[3]{25}\,.$

f. $\dfrac{-20}{\sqrt[3]{30}} = \dfrac{-20\sqrt[3]{30^{2}}}{30} = \dfrac{-2\sqrt[3]{900}}{3}.$

g. $\dfrac{7}{\sqrt{10}} = \dfrac{7\sqrt{10}}{10}.$

h. $\dfrac{-45}{\sqrt{15}} = \dfrac{-45\sqrt{15}}{15} = -3\sqrt{15}\,.$

3.6.2 Fracciones con denominador de suma y resta de radicales

$$\frac{k}{\sqrt{A}+\sqrt{B}} = \frac{k(\sqrt{A}-\sqrt{B})}{A-B}.$$

$$\frac{k}{\sqrt{A}-\sqrt{B}} = \frac{k(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}.$$

Ejemplos:

a. $\dfrac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}} = \dfrac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{7-2} = \dfrac{5(\sqrt{7}-\sqrt{2})}{5} = \sqrt{7}-\sqrt{2}\,.$

b. $\dfrac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} = \dfrac{10(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2} = \dfrac{10(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{5} = 2(\sqrt{7}+\sqrt{2})\,.$

c. $\dfrac{-30}{\sqrt{10}+\sqrt{5}} = \dfrac{-30(\sqrt{10}-\sqrt{5})}{10-5} = \dfrac{-30(\sqrt{10}-\sqrt{5})}{5} = -6(\sqrt{10}-\sqrt{5})\,.$

d. $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{6-2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$

e. $\dfrac{15}{\sqrt{13}+\sqrt{17}} = \dfrac{15(\sqrt{13}-\sqrt{17})}{13-17} = \dfrac{15(\sqrt{13}-\sqrt{17})}{-4}.$

f. $\dfrac{-20}{\sqrt{26}-\sqrt{41}}=\dfrac{-20\left(\sqrt{26}+\sqrt{41}\right)}{26-41}=\dfrac{-20\left(\sqrt{26}+\sqrt{41}\right)}{-15}=\dfrac{4\left(\sqrt{26}+\sqrt{41}\right)}{3}$.

g. $\dfrac{40}{\sqrt{8}-4}=\dfrac{40}{\sqrt{8}-\sqrt{16}}=\dfrac{40\left(\sqrt{8}+\sqrt{16}\right)}{8-16}=\dfrac{40\left(\sqrt{8}+\sqrt{16}\right)}{-8}=-5\left(\sqrt{8}+4\right)$.

h. $\dfrac{-50}{3-\sqrt{5}}=\dfrac{-50}{\sqrt{9}-\sqrt{5}}=\dfrac{-50\left(\sqrt{9}+\sqrt{5}\right)}{9-5}=\dfrac{-50\left(\sqrt{9}+\sqrt{5}\right)}{4}=\dfrac{-25\left(3+\sqrt{5}\right)}{2}$.

3.7 ECUACIONES E INECUACIONES

Una ecuación es una igualdad con una o más variables, que se cumple para determinados valores de estas.

Ejemplos:

$2x=7$ $\qquad x+2y=0$ $\qquad x2+3x-1=0$ $\qquad y=\ x2-3$

Una inecuación es una desigualdad ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$) con una o más variables que se cumple para determinados valores de estas.

Ejemplos:

$2x<7$; $\ x+2y>0$; $y<x^2-3$.

Cada valor numérico que toma cada variable, para el cual se cumple o satisface la igualdad o la desigualdad, es una solución de la ecuación o de la inecuación.

Resolver una ecuación o una inecuación, consiste en obtener la solución o soluciones de la ecuación o de la inecuación.

Para resolver una ecuación o una inecuación se aplica procesos algebraicos, tales como: transposición de términos, de factores, divisores; reducción de términos semejantes; factorización; propiedades de las desigualdades; leyes de los exponentes; aplicación del teorema del residuo, del factor, de las raíces racionales; aplicación de propiedades del valor absoluto; intervalos, unión, intersección de conjuntos, entre otros.

En las desigualdades, si la variable o variables son reales, entonces hay infinitas soluciones; por esto, se debe establecer el conjunto solución.

3.7.1 Ecuaciones e inecuaciones polinómicas

Se debe recordar que:

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ donde $a_n \neq 0$, es un polinomio entero de grado n, con una variable.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ es una ecuación polinómica de grado n.

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n < 0(>, \ \leq, \ \geq)$ es una inecuación polinómica de grado n.

Una ecuación polinómica de grado 1 o ecuación lineal con una variable, es de la forma: $ax + b = 0$, donde $a \neq 0$.

Una ecuación polinómica de grado 2 o ecuación cuadrática, es de la forma: $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$.

Una ecuación polinómica de grado 3 o ecuación cúbica, es de la forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, donde $a \neq 0$.

Para resolver una ecuación polinómica se aplica los casos de factorización, división sintética, entre otros procedimientos.

Se debe tener en cuenta que las raíces de un polinomio $p(x)$ son las soluciones de la ecuación polinómica correspondiente, es decir, las soluciones de $p(x) = 0$.

Ejemplos:

Dado que $x^2 + 13x + 40 = (x + 5)(x + 8)$, entonces las raíces del polinomio $p(x) = x^2 + 13x + 40$ son: $-5 \ y \ -8$.

Por tanto, las soluciones de la ecuación $x^2 + 13x + 40 = 0$, son $x = -5$ y $x = -8$.

De igual manera:

Las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 70 = 0 \ son - 10 \ \text{y} \ 7$.

Las soluciones de la ecuación $x^2 - 9x - 220 = 0 \, son - 11 \, y \, 20$.

Las soluciones de la ecuación $x^2 - 14x + 48 = 0 \ son \, x = 6 \ \text{y} \ x = 8$.

Las soluciones de $60x^2 + 37x + 5 = 0 \ son \ -\frac{5}{12} \ y -\frac{1}{5}$.

Nota:

Las soluciones de una ecuación cuadrática, $ax^2 + bx + c = 0, \ a \neq 0$ también se las puede obtener aplicando la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

3.7.2 Ecuaciones fraccionarias con una variable

Una ecuación o inecuación es fraccionaria, cuando tiene al menos un término fraccionario.

Para resolver una ecuación fraccionaria se la debe transformar en ecuación polinómica, para lo cual, primero se aplica trasposición de factores, divisores, simplificación de términos, etc., según el caso.

Ejemplos:

1. $\dfrac{2}{6x+1} = x\,;\;\; 2 = x(6x+1) = 6x^2 + x\,;\;\; 6x^2 + x - 2 = 0\,;\;\; (3x+2)(2x-1)) = 0\,.$

   Las soluciones son: $x = -\frac{2}{3}$ y $x = \frac{1}{2}$.

2. $\dfrac{x}{x-3} + \dfrac{x}{10} = 3\,;\;\; \dfrac{10x + x(x-3)}{10(x-3)} = 3\,;\;\; 10x + x^2 - 3x = 30(x-3);$

   $7x + x^2 = 30x - 90\,;\;\; x^2 - 23x + 90 = 0\,;\;\; (x-5)(x-18) = 0.$

   Las soluciones son: 5 y 18.

3. $\dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2x} + \dfrac{1}{x+4} = 1\,;\;\; \dfrac{4x(x+4) + 3x(x+4) + (2x)x}{x(2x)(x+4)} = 1\,;$

   $4x^2 + 16x + 3x^2 + 12x + 2x^2 = 2x^2(x+4)\,;\; 9x^2 + 28x = 2x^3 + 8x^2\,;\;\; 2x^3 - x^2 - 28x = 0\,;$

   $x(2x^2 - x - 28) = 0\,;\;\; x(x-4)(2x+7) = 0\,.$

   Las soluciones de la última ecuación son: $x = 0,\; x = 4$ y $x = -\frac{7}{2}$; pero, debido a que en la ecuación fraccionaria inicial x no puede ser cero, entonces, las soluciones de la ecuación fraccionaria son:

   $x = 4$ y $x = -\dfrac{7}{2}$

Conclusión.

Transformada una ecuación fraccionaria en ecuación polinómica, se resuelve esta última, tal como se ha realizado en los ejemplos de raíces de un polinomio o soluciones de una ecuación polinómica; pero al final, se debe considerar que, en una fracción, el denominador debe ser diferente de cero.

3.7.3 Ecuaciones con radicales

Son aquellas ecuaciones que tienen al menos un radical (raíz cuadrada, raíz cúbica, entre otros casos).

Para resolver una ecuación con radicales es conveniente dejar un radical en un miembro de la igualdad, con el fin de elevar al cuadrado o al cubo, según el caso, para eliminar el radical y obtener una ecuación polinómica.

Notas:

- Cuando se eleva al cuadrado una expresión algebraica, en muchos casos se introducen raíces extrañas; por lo cual, es necesario comprobar en la ecuación inicial, los valores que se obtengan.

- Cuando no antecede el signo menos a una raíz cuadrada, se toma únicamente la raíz positiva, como se muestra en los siguientes ejemplos.

  $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{2} = 1{,}414213\ldots$; $-\sqrt{144} = -12$; $\pm\sqrt{169} = \pm 13$; $\sqrt{1} = 1$.

Ejemplos:

a. $\sqrt{x} = 4 \;\rightarrow\; x = 16$. Solución de la ecuación: $x = 16$.

b. $\sqrt{x+5} = 5 \;\rightarrow\; x + 5 = 25 \;\rightarrow\; x = 25 - 5 \;\rightarrow\; x = 20$. Solución de la ecuación: $x = 20$.

c. $\sqrt{4x+5} = x \rightarrow 4x + 5 = x^2 \rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \rightarrow (x+1)(x-5) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ y } x = 5$.

   Las soluciones de la ecuación cuadrática son: -1 y 5; pero reemplazando x por -1 en la ecuación inicial, se observa que no se cumple la igualdad. En efecto:

   $\sqrt{4(-1)+5} = \sqrt{-4+5} = \sqrt{1} = 1 \neq -1$.

   Reemplazando x por 5 en la ecuación inicial se obtiene lo siguiente:

   $\sqrt{4(5)+5} = \sqrt{20+5} = \sqrt{25} = 5$.

   Por lo tanto, la solución de la ecuación $\sqrt{4x+5} = x$ es $x = 5$.

d. $\sqrt{5x+39} - x = 9$.

$\sqrt{5x+39} - x = 9 \;\rightarrow\; \sqrt{5x+39} = x + 9$. Elevando al cuadrado:

$5x + 39 = (x + 9)^2 = x^2 + 18x + 81 \;\rightarrow\; x^2 + 18x + 81 - 5x - 39 = 0$.

$x^2 + 13x + 42 = 0 \;\rightarrow\; (x+6)(x+7) = 0 \;\rightarrow\; x = -6$ y $x = -7$.

Comprobando: $\sqrt{5(-6)+39} - (-6) = \sqrt{-30+39} + 6 = \sqrt{9} + 6 = 3 + 6 = 9$.

$\sqrt{5(-7)+39} - (-7) = \sqrt{-35+39} + 7 = \sqrt{4} + 7 = 2 + 7 = 9$.

Entonces, las soluciones de la ecuación inicial $\sqrt{5x+39} - x = 9$ son: -6 y -7.

Observar que, en este caso, no se introdujeron raíces extrañas.

3.7.4 Ecuaciones con valor absoluto

Para resolver una ecuación con valor absoluto, se aplica propiedades del valor absoluto; con lo cual se obtiene una ecuación polinómica.

El valor absoluto de un número real x se simboliza así: $|x|$.

Definición

$|x| = x \;\; si\; y\; solo\; si\; x \geq 0$ (x es mayor o igual que 0).

$|x| = -x \;\; si\; y\; solo\; si\; x < 0.$

Ejemplos:

$|0| = 0 \qquad |10| = 10 \qquad |-10| = -(-10) = 10 \qquad |15| = 15 \qquad |-15| = 15$

$\left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} \qquad \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

Propiedades

Para cualquier par de números reales x, y se cumple lo siguiente:

a. $|x| \geq 0.$

b. $|xy| = |x||y|.$

c. $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}, y \neq 0.$

d. $|x - y| = |y - x|.$

e. $|x| = |y|$ si y solo si $x = y \ o \ x = -y.$

f. $|x| = \sqrt{x^2}.$

Ejemplos:

a. $|x| = 10 \quad \rightarrow \quad x = 10 \quad \text{o} \quad \text{x} = -10.$

Solución: $x = 10 \quad \text{o} \quad x = -10$

b. $|x| = 15 \quad \rightarrow \quad x = 15 \quad \text{o} \quad \text{x} = -15$

Solución: $x = 15 \quad \text{o} \quad x = -15.$

c. $|x| = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{3}.$

Solución: $x = \frac{1}{3} \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{3}.$

d. $|3x| = 8 \quad \rightarrow \quad 3x = 8 \quad \text{o} \quad 3\text{x} = -8 \quad \rightarrow \quad \text{x} = \frac{8}{3} \quad \text{o} \quad x = -\frac{8}{3}.$

Solución: $x = \frac{8}{3} \quad \text{o} \quad x = -\frac{8}{3}.$

e. $|5x + 9| = 14 \rightarrow 5x + 9 = 14 \ \text{o} \ 5x + 9 = -14 \rightarrow 5x = 5 \ \text{o} \ 5x = -23 \rightarrow \ x = 1 \ \text{o} \ x = -\frac{23}{5}.$

Solución: $x = 1 \quad y \quad x = -\frac{23}{5}.$

f. $\dfrac{2}{|x|}+\dfrac{8}{|x|}=1 \quad\rightarrow\quad \dfrac{10}{|x|}=1 \quad\rightarrow\quad 10=|x| \quad\rightarrow\quad x=\pm 10\,.$

Solución: $x=10 \quad y \quad x=-10\,.$

g. $|x+8|=\dfrac{17}{|x-8|} \quad\rightarrow\quad |x+8||x-8|=17 \quad\rightarrow\quad |(x+8)(x-8)|=17 \quad\rightarrow\quad |x^2-64|=17 \rightarrow$

$x^2-64=17 \quad \text{o} \quad x^2-64=-17 \quad\rightarrow\quad x^2=81 \quad \text{o} \quad x^2=47\,.$

Extrayendo raíz cuadrada se tiene:

$\sqrt{x^2}=\sqrt{81} \;\; o \;\; \sqrt{x^2}=\sqrt{47} \;\rightarrow\; |x|=9 \;\; o \;\; |x|=\sqrt{47} \rightarrow \mathrm{x}=\pm 9 \;\; \text{o} \;\; \mathrm{x}=\pm\sqrt{47}\,.$

Solución:

$x=-9, \;\; x=9, \;\; x=\sqrt{47}, \;\; x=-\sqrt{47}\,.$

3.7.5 Orden en $\mathbb{R}$

Sean a, b $\in \mathbb{R}$, en la expresión $a<b$ se lee: a es menor que b.

La expresión $a<b$ es equivalente a la expresión $b>a$.

Definición

$a<b$ si y sólo si existe un real c mayor que cero, tal que: $a+c=b$.

Nota

- Un número real k es positivo, si y solo si, $k>0$; y es negativo si y solo si $k<0$.
- Entre dos números reales diferentes, existen infinitos números reales.

Según lo anterior, no existe un número real que sea el inmediatamente mayor o menor que cualquier número real. En cambio, en los enteros siempre hay un entero que es el siguiente mayor o el anterior menor.

Entre los números reales $3{,}1$ y $3{,}2$ existen infinitos números reales; en cambio, el entero inmediatamente mayor que 3 es 4 y el inmediatamente menor es 2.

Propiedades del orden en $\mathbb{R}$

1. $a < b \ y \ c < d \ \rightarrow \ a + c < b + d$.

2. $a < b \ \rightarrow \ a + f < b + f$.

3. $a < b \ y \, h > 0 \ \rightarrow \ ah < bh$.

4. $a < b \ y \, h < 0 \ \rightarrow ah > bh$.

5. $a < 0 \, y \, b < 0 \ \rightarrow ab > 0$ Real negativo por real negativo resulta un real positivo: $(-)(-) = +$.

6. $a < 0 \, y \, b > 0 \ \rightarrow ab < 0$ Real negativo por real positivo resulta un real negativo: $(-)(+) = -$.

7. $a > 0 \, y \, b > 0 \ \rightarrow ab > 0$ Real positivo por real positivo resulta un real positivo: $(+)(+) = +$.

8. $a > 0 \, y \, b < 0 \ \rightarrow ab < 0$ Real positivo por real negativo resulta un real negativo: $(+)(-) = -$.

9. Si a, b son reales positivos y $a^2 < b^2$entonces $a < b$.

10. Para a, b reales positivos, $a < b \ \rightarrow \ a^2 < b^2$.

11. Si a, b son reales negativos y $a^2 < b^2$ entonces $a > b$.

12. Si a, b son reales negativos y $a > b$ entonces $a^2 < b^2$.

13. Si $a^3 < b^3$ entonces $a < b$ para a y b reales arbitrarios.

14. $a < b \ \leftrightarrow \ -a > -b$.

15. Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $a = b$ ó $a < b$ ó $a > b$ (Ley de la tricotomía).

16. $a < b \ y \ b < c \ \rightarrow \ a < c$ (Propiedad transitiva).

17. $a < b \;\rightarrow\; a - b < 0 \;\; y \;\; b - a > 0$.

18. Para k real positivo: $|a| < k$, si y sólo sí $-k < a < k$.

19. Para k real positivo:

    $|a| > k$, si y sólo sí $a < -k \;\; o \;\; k < a$.

3.8 INTERVALOS REALES

Sean m y n números reales, tales que $m < n$; se define los siguientes intervalos:

Intervalo cerrado:

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, m \leq x \leq n\} \;=\; [m, n].$$

Intervalo abierto:

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, m < x < n\} \;=(m, n)\;.$$

Intervalo semi-abierto:

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, m \leq x < n\} \;=[m, n)\;.$$

Intervalo semi–abierto:

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, m < x \leq n\} \;=(m, n].$$

Intervalo infinito:

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, m \leq x\} \;=[m, +\infty).$$

Intervalo infinito:

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, m < x\} = (m, +\infty).$$

Intervalo infinito:

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x \leq n\} = (-\infty, n].$$

Intervalo infinito:

$$\{x \in \mathbb{R} \,/\, x < n\} = (-\infty, n).$$

3.8.1 Inecuaciones polinómicas, fraccionarias, con valor Absoluto

Para resolver una inecuación, se sigue procesos similares a los utilizados para resolver una ecuación; pero, en este caso, se debe aplicar propiedades de las desigualdades; además, para las respuestas se debe tener en cuenta las definiciones de intervalos reales.

3.8.2 Ejemplos de Inecuaciones

1. $x < 8$ Conjunto solución $(-\infty, 8)$.

2. $x > -20$ Conjunto solución $[-20, +\infty)$.

3. $5x < 15$ Se multiplica ambos miembros por $\frac{1}{5} > 0$ y se aplica propiedad de desigualdades:

   $(5x)\left(\frac{1}{5}\right) \leq 15\left(\frac{1}{5}\right) \rightarrow x \leq 3.$

   Conjunto solución: $(-\infty, 3]$.

   Nota:

   En el anterior ejemplo, multiplicar por $\frac{1}{5}$, equivale a dividir por 5 o también transponer 5 de factor a divisor.

4. $-10x < 80 \rightarrow (-10x)\left(-\dfrac{1}{10}\right) > (80)\left(-\dfrac{1}{10}\right) \rightarrow x > -8$.

   En este caso se multiplicó una desigualdad por un número negativo.

   Conjunto solución: $(-8, +\infty)$.

5. $x - 6 < 0 \rightarrow x < 6$ Conjunto solución: $(-\infty, 6)$.

6. $x + 3 \geq 0 \rightarrow x \geq -3$ Conjunto solución: $[-3, +\infty)$.

7. $x^2 + 2x - 48 \leq 0 \rightarrow (x + 8)(x - 6) \leq 0$

Por la *ley de los signos*, un factor es positivo y el otro negativo: $+ \wedge -$ por lo cual, se presentan dos casos.

Caso 1:

$$x+8 \geq 0 \ \wedge \ \mathrm{x}-6 \leq 0 \ \rightarrow x \geq -8 \wedge \mathrm{x} \leq 6 \ \rightarrow \mathrm{x} \in (-8,+\infty) \wedge \mathrm{x} \in (-\infty, 6]$$

$$\rightarrow x \in (-8,+\infty) \cap (-\infty, 6] \ \rightarrow x \in [-8,6]$$

Caso 2:

$$x+8 \leq 0 \ \wedge \ \mathrm{x}-6 \geq 0 \ \rightarrow x \leq -8 \wedge \mathrm{x} \geq 6 \ \rightarrow \mathrm{x} \in (-\infty,-8] \wedge \mathrm{x} \in [6,+\infty)$$

$$\rightarrow x \in (-\infty,-8) \cap [6,+\infty)$$

$\rightarrow \ x \in \phi$, es decir, no hay solución en este caso.

Según Caso1 o Caso 2: $\mathrm{x} \in [-8,6] \vee \mathrm{x} \in \phi \rightarrow x \in ([-8,6] \cup \phi) \rightarrow \mathrm{x} \in [-8, 6]$.

En definitiva, el conjunto solución de la inecuación $x^2+2x-48 \leq 0$ es el intervalo $[-8,6]$.

En el ejemplo anterior, se realizó todo el proceso con los pasos necesarios y convenientes. Sin embargo, en adelante, se omitirán ciertos pasos del proceso. Además, las gráficas sobre la recta real son una gran ayuda para obtener la unión y la intersección de intervalos (ver Gráfico 20).

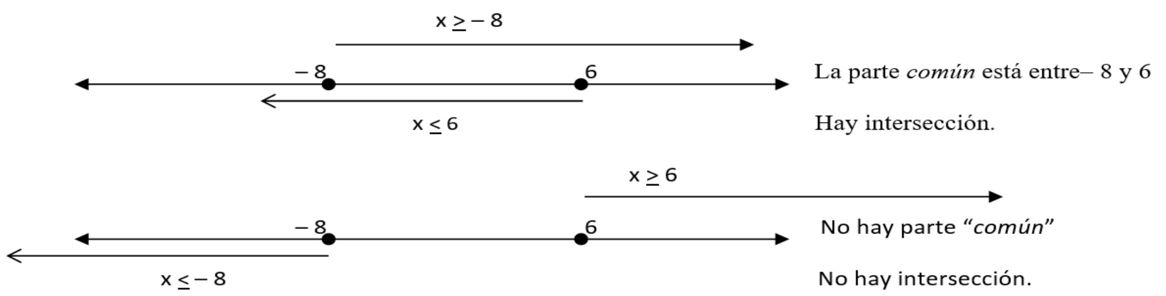


Gráfico 20. Unión e intersección de intervalos mediante la representación en la recta real

Nota:

Dado que los valores que son solución de la inecuación $x^2+2x-48 \leq 0$ pertenecen al intervalo $[-8,6]$, entonces, los valores que no son solución de la inecuación $x^2+2x-48 \leq 0$ no pertenecen al intervalo $[-8,6]$, en consecuencia, pertenecen al conjunto complemento, es decir, pertenecen al conjunto $(-\infty,-8) \cup (6,+\infty)$.

En consecuencia, las soluciones de las inecuaciones indicadas, son las siguientes:

- $x^2 + 2x - 48 \leq 0 \;\rightarrow\; x \in [-8{,}6]$.
- $x^2 + 2x - 48 < 0 \;\rightarrow\; x \in (-8{,}6)$.
- $x^2 + 2x - 48 > 0 \;\rightarrow\; x \in (-\infty, -8) \cup (6, +\infty)$.
- $x^2 + 2x - 48 \geq 0 \;\rightarrow\; x \in (-\infty, -8] \cup [6, +\infty)$.

8. $2x^3 + 7x^2 - 17x - 10 > 0 \;\rightarrow\; (x-2)(x+5)(2x+1) > 0$

Para obtener la solución de la inecuación $(x-2)(x+5)(2x+1) > 0$ se debe analizar los siguientes cuatro (4) casos, respecto a los signos de los factores, así (ver Tabla 18):

Tabla 18. Análisis de los signos de los factores de una inecuación de números reales

$x-2$	$x+5$	$2x+1$	$(x-2)(x-5)(2x+1) > 0$
$+$	$+$	$+$	$+$
$+$	$-$	$-$	$+$
$-$	$+$	$-$	$+$
$-$	$-$	$+$	$+$

Caso 1:

$x - 2 > 0 \;\wedge\; x + 5 > 0 \;\wedge\; 2x + 1 > 0 \quad\rightarrow\quad x > 2 \;\wedge\; x > -5 \;\wedge\; x > -\frac{1}{2} \quad\rightarrow$
$x \in (2, +\infty) \;\wedge\; x \in (5, +\infty) \;\wedge\; x \in \left(\frac{-1}{2}, +\infty\right)$.

Los valores de x que cumplen a la vez las tres condiciones son mayores que 2, por lo tanto, la solución del caso 1 (solución parcial de la inecuación dada) es el intervalo $(2, +\infty)$; así pues, $S_1 = (2, +\infty)$.

Caso 2:

$x-2>0 \text{ o } \wedge \ x+5<0 \ \wedge \ 2x+1<0 \quad \rightarrow \quad x>2 \ \wedge \ x<-5 \ \wedge \ x<-\frac{1}{2} \quad \rightarrow$
$x \in (2,+\infty) \ \wedge x \in (-\infty,-5) \ \wedge \ x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right).$

No existen tales valores de x que cumplan a la vez las tres condiciones; por lo tanto, $S_2 = \emptyset$.

Caso 3:

$x-2<0 \text{ o } \wedge \ x+5> \ 0 \ \wedge \ 2x+1<0 \quad \rightarrow \quad x<2 \ \wedge \ x>-5 \ \wedge \ x<-\frac{1}{2} \quad \rightarrow$
$x \in (-\infty,2) \ \wedge x \in (-5,+\infty) \ \wedge \ x \in \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right).$

Los valores de x que cumplen a la vez las tres condiciones son a la vez menores que 2, mayores que -5 y menores que $-\frac{1}{2}$, por lo tanto: $S_3 = \left(-5,-\frac{1}{2}\right)$.

Caso 4:

$x-2<0 \, o \ \wedge \ x+5< \ 0 \ \wedge \ 2x+1>0 \quad \rightarrow \quad x<2 \ \wedge \ x<-5 \ \wedge \ x>-\frac{1}{2} \quad \rightarrow$
$x \in (-\infty,2) \ \wedge x \in (-\infty,-5) \ \wedge \ x \in \left(-\frac{1}{2},+\infty\right).$

No existen tales valores de x que cumplen a la vez las tres condiciones; por lo tanto, $S_4 = \emptyset$.

Finalmente, la solución de la inecuación $(x-2)(x-5)(2x+1)>0$ es:

$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cap S_4 = (2,+\infty) \cup \emptyset \cup \left(-5,-\frac{1}{2}\right) \cup \emptyset = \left(-5,-\frac{1}{2}\right) \cup (2,+\infty).$

Entonces la solución de la inecuación $2x^3+7x^2-17x-10>0$ es: $S = \left(-5,-\frac{1}{2}\right) \cup (2,+\infty)$.

9. $\dfrac{1}{x} < -2\,.$

$\frac{1}{x}$ es negativo, pero como el numerador es positivo, entonces x tiene que ser negativo, es decir, $x<0$.

Multiplicamos los dos términos de la inecuación por $x<0$, se obtiene lo siguiente:

$$1>-2x \ \rightarrow \ -\frac{1}{2}<x\,.$$

Entonces:

$$-\frac{1}{2} < x \ \wedge \ x < 0 \ \rightarrow \ x \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

Conjunto solución: $S = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

10. $\frac{3}{x} < 5.$

En este caso, para cualquier real negativo $x, \frac{3}{x}$ es negativo y, de hecho, también es menor que 5.

Luego, el conjunto $S_1 = (-\infty, 0)$ (primera solución parcial).

Ahora, para $x > 0$, multiplicando los dos términos de la inecuación por dicho x, se tiene:

$$3 < 5x \ \rightarrow \ \frac{3}{5} < x \, .$$

Entonces, $x \in \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$ para $x > 0$, por lo cual, $S_2 = \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$. (segunda solución parcial).

Finalmente, la solución de la inecuación $\frac{3}{x} < 5$ es:

$$S = S_1 \cup S_2 = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right).$$

Por lo tanto, $S = (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{5}, +\infty\right)$.

Nota:

El conjunto solución de la inecuación $\frac{3}{x} \geq 5$ es $S = (0, \frac{3}{5}]$.

Observe que, este conjunto es el complemento de $S' = (-\infty, 0) \cup (\frac{3}{5}, +\infty)$.

11. $|x| < 12 \ \rightarrow - 12 < x < 12 \ \rightarrow \ x \in [-12, 12]$

Conjunto solución $S = (-12,12)$

Nota:

El conjunto solución de: $|x| < 12$ es $(-12,12)$, entonces, la solución de $|x| > 12$ es

$(-\infty, -12) \cup (12, +\infty)$.

12. $|2x| > 20 \ \rightarrow \ 2x < -20$ o $2x > 20 \ \rightarrow \ x < -10$ o $x > 10 \ \rightarrow \ x \in (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$.

El conjunto solución de $|2x| > 20$ es $S = (-\infty, -10) \cup (10, +\infty)$ y de la inecuación $|2x| \leq 20$ es $S' = [-10, 10]$, que es el complemento del conjunto solución anterior.

13. $x^2 - 49 \leq 0 \ \rightarrow \ x^2 \leq 49 \ \rightarrow \ \sqrt{x^2} \leq \sqrt{49} \ \rightarrow |x| \leq 7 \ \rightarrow \ -7 \leq x \leq 7 \ \rightarrow \ x \in [-7, 7]$.

Conjunto solución: $S = [-7, 7]$.

Nota:

El conjunto solución de $x^2 - 49 > 0$ es $S = (-\infty, -7) \cup (7, +\infty)$.

De igual manera, realizando el mismo proceso, el conjunto solución de $x^2 - 50 \leq 0$ es:

$S = [-\sqrt{50}, \sqrt{50}]$.

Por tanto, el conjunto solución de $x^2 - 50 > 0$ es $S = (-\infty, -\sqrt{50}) \cup (\sqrt{50}, +\infty)$.

14. $|\, x^2 - 64| \leq 36 \ \rightarrow \ -36 \leq x^2 - 64 \leq 36 \ \rightarrow$

$-36 + 64 \leq x^2 \leq 36 + 64 \ \rightarrow \ 28 \leq x^2 \leq 100 \ \rightarrow \sqrt{28} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{100} \ \rightarrow$

$\sqrt{28} \leq |x| \leq 10 \rightarrow |x| \leq 10$ y $|x| \geq \sqrt{28} \rightarrow - \ 0 \leq x \leq < 10$ ***y*** $\left(x \leq -\sqrt{28} \text{ o } x \geq \sqrt{28}\right)$.

$\rightarrow \ x \in [-10, 10]$ y $(x \in \left(-\infty, -\sqrt{28}\right]$ ***o*** $x \in [\sqrt{28}, +\infty))$.

Conjunto solución: $S = [-10, -\sqrt{28}] \cup [\sqrt{28}, 10]$.

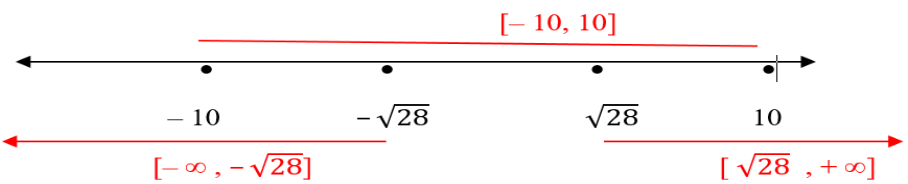


Gráfico 21. Unión de intervalos mediante la representación en la recta real

Nota:

El conjunto solución de $|x^2 - 64| \geq 36$ es: $(-\infty, -10] \cup [-\sqrt{28}, \sqrt{28}] \cup [10, +\infty)$.

15. $\frac{44}{|x+10|} > |x-10| \rightarrow 44 > |x-10||x+10| \rightarrow 44 > |(x-10)(x+10)| \rightarrow 44 > |x^2 - 100|$.

$|x^2 - 100| < 44 \rightarrow$ A partir de esta expresión, este ejemplo es similar al anterior.

$-44 < x^2 - 100 < 44 \quad \rightarrow \quad 56 < x^2 < 144 \quad \rightarrow \quad \sqrt{56} \leq \sqrt{x^2} \leq \sqrt{144}$

$\sqrt{56} \leq |x| \leq 12 \rightarrow |x| \leq 12$ y $|x| \geq \sqrt{56}$.

Continuando el procedimiento, tal como en el ejemplo anterior, se obtiene el siguiente conjunto solución:

$S = [-12, -\sqrt{56}] \cup [\sqrt{56}, 12] - \{-10\}$.

Nota:

En la ecuación inicial, $x + 10 \neq 0$, porque está en denominador, luego $x \neq -10$, por esto, se debe excluir – 10 del conjunto solución. En el intervalo $[-12, -\sqrt{56}]$ está el -10.

16. $\sqrt{x} < 5$.

En primer lugar, $x \geq 0$, puesto que para $x < 0$; $\sqrt{x}$ no es número real.

Ahora, elevando al cuadrado, se tiene que: $x < 25 \rightarrow$ x ∈ (– ∞, 25) y x ∈ [0, +∞), entonces:

$x \in (-\infty, 25)\ y\ \ x \in [0, +\infty)$, en consecuencia, $x \in [0,25)$.

Conjunto solución: S = [0, 25).

Nota:

El conjunto solución de $\sqrt{x} \geq 5\ es\ [25, +\infty)$.

El conjunto solución de $\sqrt{x} > 5\ es\ (25, +\infty)$.

17. $\sqrt{x+1} \leq 2$.

En primer lugar, se tiene que: $x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$.

$\sqrt{x+1} \leq 2 \rightarrow x + 1 \leq 4 \rightarrow x \leq 3$.

Se tiene, entonces: $-1 \leq x$ y $x \leq 3$; por tanto, $-1 \leq x \leq 3$.

Conjunto solución: $[-1{,}3]$.

Nota:

El conjunto solución de $\sqrt{x+1} \geq 2$ es $[3, +\infty)$.

18. $\sqrt{x+1} + 1 < x$.

Se debe cumplir que: $x + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1$.

Además, $\sqrt{x+1} + 1 < x$.

$\sqrt{x+1} + 1 < x \rightarrow \sqrt{x+1} < x - 1 \rightarrow x + 1 < (x-1)^2 \rightarrow x + 1 < x^2 - 2x + 1$

$0 < x^2 - 3x \rightarrow 0 < x(x-3)$

Dado que $x > 0$, entonces: $(x-3) > 0 \rightarrow x > 3 \rightarrow x \in (3, +\infty)$.

En la inecuación: $0 < x(x-3)$ no se requiere considerar otro caso; dado que, en el ejercicio siempre se cumple $x > 0$; por tanto, el conjunto solución de la inecuación, es el intervalo $(3, +\infty)$.

Nota:

$\sqrt{x+1} \geq 0$; $\sqrt{x+1} + 1 \geq 1 + 0$ y como $\sqrt{x+1}$+1<x, entonces $x > 0$.

$\sqrt{x+1} \geq 0$, entonces $\sqrt{x+1} + 1 \geq 1$; y según la solución de la inecuación $\sqrt{x+1} + 1 < x$, entonces, la solución de $\sqrt{x+1} + 1 > x$, es $[-1{,}3]$.

Tener presente que $x \geq -1$.

El conjunto solución de $\sqrt{x+1} + 1 \geq x$ es $[-1{,}3]$. Tener presente que $x \geq -1$.

19. $\sqrt{x^2 + x} \leq \sqrt{2}$

Elevando al cuadrado se obtiene: $x^2 + x \leq 2 \rightarrow \ x^2 + x - 2 \leq 0 \rightarrow \ (x-1)(x+2) \leq 0$.

Para $x \geq 1$ y $x \leq -2$ no hay solución .

Para $x \leq 1$ y $x \geq -2$ se tiene que: $-2 \leq x \leq 1$.

El conjunto solución de la inecuación $x^2 + x - 2 \leq 0$ es $[-2,1]$ y también lo es de la inecuación inicial.

Nota:

Se debe tener en cuenta que la inecuación $x^2 + x + 2 > 0$, se cumple para cualquier valor real de x.

20. $\sqrt{2x+5} \leq \sqrt{3x-5}$.

En primer lugar, $2x + 5 \geq 0$ y $3x - 5 \geq 0 \ \rightarrow \ x \geq -\frac{5}{2}$ y $x \geq \frac{5}{3}$.

Por otra parte, $2x + 5 \leq 3x - 5 \ \rightarrow \ 10 \leq x$.

Por tanto,

$x \geq -\frac{5}{2}$ y $x \geq \frac{5}{3}$ y $x \geq 10$; entonces, $x \geq 10$.

Conjunto solución de la inecuación $\sqrt{2x+5} \leq \sqrt{3x-5}$ es: $S = [10, +\infty)$.

Conjunto solución de la inecuación $\sqrt{2x+5} < \sqrt{3x-5}$ es: $S = (10, +\infty)$.

El conjunto solución de la inecuación $\sqrt{2x+5} \geq \sqrt{3x-5}$ es $[\frac{5}{3}, \ 10]$.

Tenga en cuenta que se mantienen las condiciones iniciales o desigualdades:

$x \geq -\frac{5}{2}$ y $x \geq \frac{5}{3}$ y $x \geq 10$; además se debe cumplir que $2x + 5 \geq 3x - 5$, es decir, $x \leq 10$; de lo cual, se tiene que los valores de x que satisfacen todas las condiciones pertenecen al intervalo $[\frac{5}{3}, \ 10]$.

De aquí se infiere que el conjunto solución de $\sqrt{2x+5} > \sqrt{3x-5}$ es el intervalo $(\frac{5}{3}, \ 10)$.

3.9 PROBLEMAS DE APLICACIÓN RESUELTOS

1. Con una cuerda de 30 metros de longitud, se desea formar un rectángulo en el cual, el largo es el doble del ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

Solución:

Sea $\boldsymbol{x}$ el largo, $\boldsymbol{y}$ el ancho del rectángulo, entonces:
$\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{y}$ (largo el doble del ancho) (ver Gráfico 22).

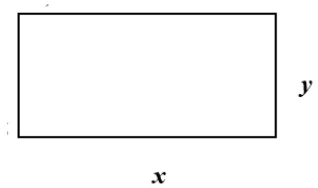


Gráfico 22. Rectángulo con doble de largo que de ancho.

El perímetro del rectángulo es igual a la longitud de la cuerda:

$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 30\, m. \rightarrow 2\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 30 \rightarrow \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 15\,.$

Reemplazando en la anterior igualdad, $\boldsymbol{x}$ por $2\boldsymbol{y}$:

$2\boldsymbol{y} + \boldsymbol{y} = 15 \rightarrow 3\boldsymbol{y} = 15 \rightarrow \boldsymbol{y} = 5.$

Ahora, dado que $\boldsymbol{x} = 2\boldsymbol{y} = 2\times 5 = 10$, entonces $x = 10$.

Respuesta:

Las dimensiones del rectángulo son: 10 m de largo y 5 m de ancho.

2. Tres puntos diferentes A, B, C están en línea recta. La distancia de A a C es de 120 m. y de A a B es de 50 m. ¿Cuál es la distancia de B a C? (ver Gráfico 23).

Solución:

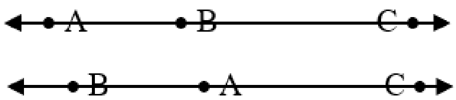


Gráfico 23. Ubicación de un punto entre dos valores dados

Si B está entre A y C:

$AB + BC = AC \rightarrow 50 + BC = 120 \rightarrow BC = 70\,.$

Si A está entre B y C:

$BA + AC = BC \rightarrow 50 + 120 = BC \rightarrow BC = 170.$

C no puede estar entre A y B

Respuesta:

Si B está entre A y C, entonces la distancia de B a C es 70 m.

Si A está entre B y C, entonces la distancia de B a C es 170 m.

3. Obtener dos números, tales que su producto sea igual a 48 y la suma sea igual a 16.

   Solución:

   Si $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son los números a obtener, entonces: $\boldsymbol{ab} = 48 \ y \ \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 16$.

   Despejando b de la segunda igualdad y reemplazando en la primera, se tiene:

   $\boldsymbol{b} = 16 - \boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{a}(16 - \boldsymbol{a}) = 48 \rightarrow 16\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^2 = 48$

   $\boldsymbol{a}^2 - 16\boldsymbol{a} + 48 = 0 \rightarrow (\boldsymbol{a} - 4)(\boldsymbol{a} - 12) = 0 \rightarrow \boldsymbol{a} = 4; \ \boldsymbol{a} = 12.$

   Si $\boldsymbol{a} = 4$, entonces $\boldsymbol{b} = 12$; y si $\boldsymbol{a} = 12$, entonces $\boldsymbol{b} = 4$.

   Respuesta:

   Los números buscados son 4 y 12.

4. Con una cuerda de 32 metros de longitud, se desea formar un rectángulo cuya área sea de 48 m2. ¿Cuáles son las dimensiones (largo y ancho) del rectángulo?

   Solución:

   Si a y b son las dimensiones del rectángulo, entonces, el área es $\boldsymbol{ab} = 48$ y el perímetro es igual a la longitud de la cuerda, esto es: $2\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} = 32$, de lo cual se obtiene que: $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 16$.

   Como $\boldsymbol{ab} = 48$ y $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = 16$, entonces $\boldsymbol{a} = 4$ y $\boldsymbol{b} = 12$ o $\boldsymbol{a} = 12$ y $\boldsymbol{b} = 4$.

   Los valores obtenidos corresponden a los mismos del problema anterior.

   Respuesta:

   Las dimensiones del rectángulo son: $4 \ m$ y $12 \ m$.

5. Con una lámina rectangular de zinc, se desea construir un cilindro recto circular sin tapas (un “tubo”).

5.1 ¿Cuáles deben ser las dimensiones (largo, ancho) de la lámina, si la altura del cilindro es el doble de su diámetro?

5.2 ¿La medida de la altura del cilindro, es el largo de la lámina o el ancho?

5.3 ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la lámina, si la altura del cilindro es igual a su diámetro?

5.4 ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la lámina, si la altura del cilindro es igual a π "veces" su diámetro? (ver Gráfico 24).

Solución:

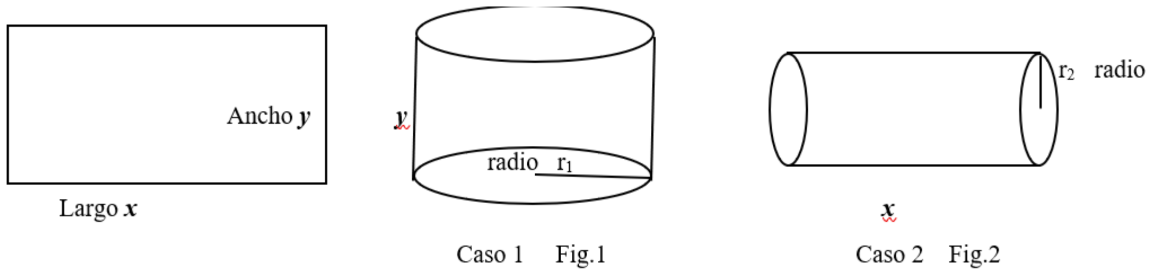


Gráfico 24. Dimensiones de una caja y representación de dos posibles cilindros

En el caso 1, la altura del cilindro es $\boldsymbol{y}$; y en el caso 2, la altura del cilindro es $\boldsymbol{x}$.

El perímetro de la circunferencia base para el caso 1 es $2\pi r_1 = x$; y para el caso 2 es $2\pi r_2 = y$.

Despejando los radios en cada caso, se obtiene: $r_1 = \frac{x}{2\pi}$ y $r_2 = \frac{y}{2\pi}$.

Diámetro del cilindro:

Caso 1:

$$d_1 = 2r_1 = \frac{2x}{2\pi} = \frac{x}{\pi} .$$

Caso 2:

$$d_2 = 2r_2 = \frac{2y}{2\pi} = \frac{y}{\pi} .$$

Si la altura del cilindro es el doble de su diámetro, entonces:

Caso 1:

$$y = 2d_1 = \frac{2x}{\pi}.$$

Caso 2:

$$\boldsymbol{x} = 2d_2 = \frac{2y}{\pi}.$$

Con la anterior condición, no es posible obtener el caso 2, porque $\frac{2y}{\pi} < y$, esto es $x < y$.

Respuesta 5.1:

Las dimensiones de la lámina son: $\boldsymbol{x}$ de largo, $\frac{2x}{\pi}$ de ancho, en unidades lineales.

Respuesta 5.2:

La medida de la altura del cilindro es el de ancho de la lámina; corresponde al caso 1.

Si la altura del cilindro es igual a su diámetro, entonces:

Caso 1:

$$y = d_1 = \frac{x}{\pi}.$$

Caso 2:

$$\boldsymbol{x} = d_2 = \frac{\boldsymbol{y}}{\pi}.$$

De lo anterior se obtiene:

Caso 1: $y = \frac{x}{\pi}$ es decir: $\pi y = x$.

Caso 2: $\pi x = y$ el cual no es posible porque sería $x < y$.

Respuesta 5.3:

Las dimensiones de la lámina son: x de largo, $\frac{x}{\pi}$ de ancho, en unidades lineales.

Si la altura del cilindro es igual a π veces su diámetro, entonces:

Caso 1:

$$y = \pi d_1 = \pi\left(\frac{x}{\pi}\right) = x.$$

Caso 2:

$$x = \pi \, d_2 = \pi \left(\frac{y}{\pi}\right) = y \, .$$

En ambos casos, se tiene que $x = y$.

Las dimensiones de la lámina son: x de largo, x de ancho, en unidades lineales; en este caso, la lámina es cuadrada, y el Caso 1 es el mismo Caso 2.

6. Se construye un cilindro recto circular con una lámina rectangular cuyo largo mide el doble del ancho.

6.1 Obtener el volumen del cilindro si su altura es: a) el ancho de la lámina; b) el largo de la lámina.

6.2 ¿Cuál es la relación entre los volúmenes obtenidos en los casos a) y b)?

6.3 ¿Cuál es el volumen del cilindro en los casos a) y b), si el ancho de la lámina mide 40 cm?

Solución:

Si x es el largo y, y el ancho de la lámina, entonces $x = 2y$ es decir, $\frac{x}{2} = y$.

Si la altura del cilindro es el ancho de la lámina (fig. 1 del ejemplo 5), entonces el perímetro de la circunferencia base es: $2\pi r_1 = x$, de lo cual se obtiene:

$$r_1 = \frac{\boldsymbol{x}}{2\pi}$$

El área del círculo base es πr_1^2.

El volumen del cilindro es:

$$V_1 = \textit{área de la base multipliada por la altura} \text{ ; esto es } V_1 = (\pi r_1^2) y.$$

Reemplazando r_1 y y en V_1, se obtiene:

$$V_1 = \pi \left(\frac{\boldsymbol{x}}{2\pi}\right)^2 \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x^3}{8\pi}.$$

Si la altura del cilindro es el ancho de la lámina, (fig. 2 del ejemplo 5), entonces el perímetro de la circunferencia base es: $2\pi r_2 = y$, por lo cual, $r_2 = \frac{y}{2\pi}$.

El área del círculo base es: πr_2^2 .

El volumen del cilindro es:

$$V_2 = \text{ área de la base multiplicada por la altura; esto es, } V_2 = \pi r_2^2 x \text{ .}$$

Reemplazando $\boldsymbol{r_2}$ y luego $\boldsymbol{y}$, se tiene:

$$V_2 = \pi\left(\frac{y}{2\pi}\right)^2 x = \left(\frac{y^2}{4\pi}\right)x = \left(\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{4\pi}\right)x = \frac{x^3}{16\pi}.$$

Respuesta 6.1:

a. Si la altura del cilindro es el ancho de la lámina, entonces, el volumen del cilindro es:

$$V_1 = \frac{x^3}{8\pi}.$$

b. Si la altura del cilindro es el largo de la lámina, entonces, el volumen del cilindro es:

$$V_2 = \frac{x^3}{16\pi}.$$

Respuesta 6.2:

De las ecuaciones de V1 y V2, se encuentra que:

$$V_2 = \frac{x^3}{16\pi} = \frac{x^3}{2(8\pi)} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{8\pi}\right) = \frac{1}{2}V_1 \text{ ; } 2V_2 = V_1;\ V_1 > V_2 \text{ .}$$

La relación entre los volúmenes obtenidos es: $V_1 = 2V_2$, por lo tanto, $V_1 > V_2$.

Respuesta 6.3:

Si el ancho de la lámina mide $40\ cm$, entonces:

$$x = 2y = 2 \times 40 = 80\ cm.$$

$$x^3 = (80\ cm)^3 = 512.000\ cm^3.$$

$$V_1 = \frac{x^3}{8\pi} = \frac{512.000}{8\pi} = \frac{64.000}{\pi} \cong 20.371{,}85\ cm^3 .$$

$$V_2 = \frac{x^3}{16\pi} = \frac{512.000}{16\pi} = \frac{32.000}{\pi} \cong 10.185{,}92\ cm^3 .$$

Para el caso a) del numeral 6.1, el volumen es $20.371{,}85\ cm^3$;y para el caso b) es $10.185{,}92\ cm^3$.

7. Con una lámina rectangular delgada, se construye un prisma de caras laterales rectangulares y base cuadrada sin tapas (una caja abierta en sus bases).

7.1 Obtener el volumen del prisma si su altura es: a. el ancho de la lámina; b. el largo de la lámina.

7.2 Obtener una relación (igualdades, desigualdades) entre los volúmenes obtenidos en los casos a. y b. del numeral 7.1.

7.3 Obtener las dimensiones de la lámina, si los dos volúmenes obtenidos son iguales.

7.4 Obtener las dimensiones de la lámina, si el largo es el doble del ancho, considerando los casos a. y b. del numeral 7.1.

7.5 Obtener las dimensiones de la lámina, si el largo es el doble del ancho y el volumen del prisma es $16\ cm^3$ considerando el caso a. del numeral 7.1; además, determinar el volumen que se obtiene con esas dimensiones para el caso b. del numeral 7.1.

7.6 Obtener las dimensiones de cada lámina, si tanto en el caso a. como en el caso b. del numeral 7.1, el volumen del prisma es de $2000\ cm^3$.

Pregunta 7.1:

Obtener el volumen del prisma si su altura es: a. el ancho de la lámina; b. el largo de la lámina.

Solución:

Caso a.

Sean x el largo, y el ancho del rectángulo (en unidades lineales).

Considerando la altura de la caja igual al ancho de la lámina, en este caso y, entonces, cada lado de la base cuadrada es $\frac{x}{4}$ (ver Gráfico 25).

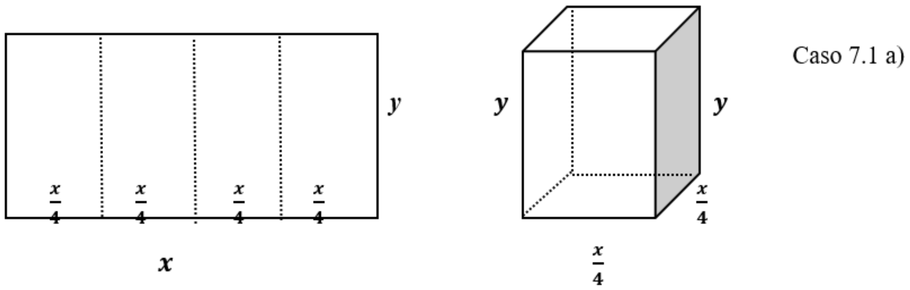


Gráfico 25. Representación de una caja cuya altura es igual al ancho de la lámina

El área de la base cuadrada de la caja, es:

$$\acute{A}rea\ de\ la\ base = \left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{x^2}{16}\ \text{(unidades cuadradas)}.$$

El volumen de la caja es:

$$V_1 = (\acute{a}rea\ de\ la\ base) * (altura) = \left(\frac{x^2}{16}\right)\boldsymbol{y}\ = \frac{x^2y}{16}\ (\ unidades\ c\acute{u}bicas).$$

Nota:

Si se toma $\frac{x}{4}$ como altura, entonces:

$$\acute{a}rea\ de\ la\ base = \left(\frac{x}{4}\right)\boldsymbol{y}\ = \frac{xy}{4}.$$

$$V_1 = (\acute{a}rea\ de\ la\ base) * \left(\frac{x}{4}\right) = \left(\frac{xy}{4}\right)\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{x^2y}{16}.$$

Respuesta caso a):

El volumen del prisma o caja con las dimensiones especificadas es:

$$V_1 = \frac{x^2y}{16}.$$

Caso b)

Considerando la altura de la caja al largo de la lámina, en este caso x, entonces cada lado de la base cuadrada es $\frac{y}{4}$ (ver Gráfico 26).

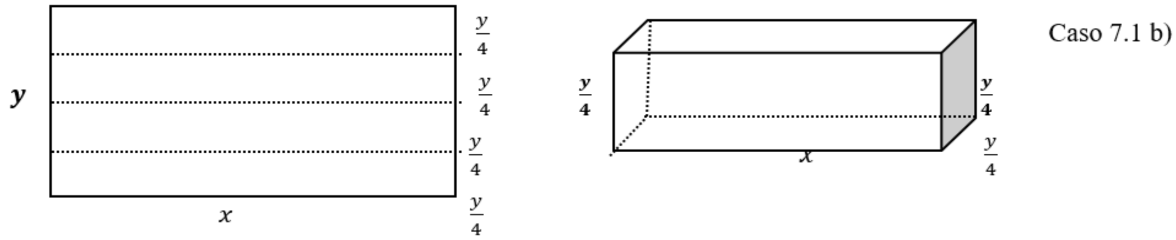


Gráfico 26. Representación de una caja cuya altura es igual al largo de la lámina

El área de la base cuadrada de la caja es:

$$\acute{a}rea\ de\ la\ base = \left(\frac{y}{4}\right)\left(\frac{y}{4}\right) = \frac{y^2}{16}\ \text{(unidades cuadradas).}$$

El volumen de la caja es:

$$V_2 = (\acute{a}rea\ de\ la\ base)(altura) = \left(\frac{y^2}{16}\right)x = \frac{xy^2}{16}\ \text{(unidades cúbicas).}$$

Nota:

Si se toma y/4 como altura, entonces:

$$\acute{a}rea\ de\ la\ base = \left(\frac{y}{4}\right)x = \frac{xy}{4}.$$

$$V_2 = (\acute{a}rea\ de\ la\ base)(altura) = \left(\frac{xy}{4}\right)\left(\frac{y}{4}\right) = \frac{xy^2}{16}.$$

Respuesta caso b):

El volumen del prisma o caja con las dimensiones especificadas es:

$$V_2 = \frac{xy^2}{16}.$$

Pregunta 7.2:

Obtener una relación (igualdades, desigualdades) entre los volúmenes obtenidos en los casos a. y b. del numeral 7.1.

Solución:

$$V_1 = \frac{x^2 y}{16} = \frac{x(xy)}{16} \longrightarrow \frac{V_1}{x} = \frac{xy}{16}.$$

$$V_2 = \frac{y(xy)}{16} \longrightarrow \frac{V_2}{y} = \frac{xy}{16}.$$

Según lo anterior, se tiene las siguientes relaciones:

$$\frac{V_1}{x} = \frac{V_2}{y} \longrightarrow yV_1 = xV_2 \,.$$

Por otra parte, si $\boldsymbol{y} < \boldsymbol{x}$ entonces, multiplicando términos por V_1 se tiene que:

$$yV_1 < xV_1 \,.$$

Reemplazando en la anterior desigualdad yV_1 por xV_2 se tiene que:

$$xV_2 < xV_1 \longrightarrow V_2 < V_1 \text{ (siempre que } x > 1).$$

Respuesta 7.2:

Las relaciones entre los volúmenes de los dos casos, son:

$$yV_1 = xV_2 \,; \;\; V_2 < V_1 \,.$$

Pregunta 7.3:

Obtener las dimensiones de la lámina, si los dos volúmenes obtenidos son iguales.

Solución:

Si los volúmenes son iguales, entonces, de la igualdad $yV_1 = xV_2$ se obtiene que $x = y$.

En este caso, las dimensiones de la lámina son: x de ancho por x de largo; es decir la lámina es cuadrada.

Respuesta 7.3:

La lámina es cuadrada.

Pregunta 7.4:

Obtener las dimensiones de la lámina, si el largo es el doble del ancho, considerando los casos a. y b. del numeral 7.1.

Solución:

Si el largo de la lámina es el doble de su ancho, entonces:

$$x = 2y \ \ o \ \frac{x}{2} = y\,.$$

$$V_1 = \frac{x^2y}{16} = \frac{(2y)^2y}{16} = \frac{y^3}{4} \ \text{ o también } V_1 = \frac{x^2y}{16} = \frac{x^2\left(\frac{x}{2}\right)}{16} = \frac{x^3}{32}\,.$$

$$V_2 = \frac{xy^2}{16} = \frac{(2y)y^2}{16} = \frac{y^3}{8} \ \text{ o también } V_2 = \frac{xy^2}{16} = \frac{x\left(\frac{x}{2}\right)^2}{16} = \frac{x^3}{64}\,.$$

Respuesta 7.4:

El volumen del prisma en el caso 7.1.a) es:

$$V_1 = \frac{y^3}{4} = \frac{x^3}{32}\,.$$

El volumen del prisma en el caso 7.1.b). es:

$$V_2 = \frac{y^3}{8} = \frac{x^3}{64}\,.$$

Pregunta 7.5:

Obtener las dimensiones de la lámina, si el largo es el doble del ancho y el volumen del prisma es 16 cm^3, considerando el caso a. del numeral 7.1; además, determinar el volumen que se obtiene con esas dimensiones para el caso b. del numeral 7.1.

Solución:

Si el largo de la lámina es el doble de su ancho y el volumen para el caso 7.1.a). es 16 cm^3, entonces:

$$V_1 = \frac{y^3}{4} = 16 \ \longrightarrow \ y^3 = 64 \ \longrightarrow y = 4\,.$$

$$V_1 = \frac{x^3}{32} = 16 \ \longrightarrow \ x^3 = 512 \ \longrightarrow x = 8\,.$$

Con estas dimensiones, se tiene que:

$$V_2 = \frac{y^3}{8} = \frac{4^3}{8} = \frac{64}{8} = 8 \ \text{ o también: } V_2 = \frac{x^3}{64} = \frac{8^3}{64} = \frac{512}{64} = 8\,.$$

Este valor se obtiene también a partir de:

$$yV_1 = xV_2 \longrightarrow 4 \times 16 = 8V_2 \longrightarrow \frac{64}{8} = V_2 \longrightarrow V_2 = 8\,.$$

Respuesta 7.5:

Las dimensiones de la lámina para el caso 7.1.a. son: $largo = 8\ cm;\ ancho = 4\ cm.$

Con estas dimensiones, en el caso 7.1.b. el volumen es $8\ cm^3$.

Nota:

Con una misma lámina, los volúmenes obtenidos en los dos casos, son diferentes.

Pregunta 7.6:

Obtener las dimensiones de cada lámina, si tanto en el caso a. como en el caso b. del numeral 7.1, el volumen del prisma es de $2000\ cm^3$.

Solución:

$Si\ x = 2y$ o sea $\frac{x}{2} = y$, entonces $V_1 = \frac{y^3}{4}$ o también: $V_1 = \frac{x^3}{32}$.

Observe que, estos valores de V_1 se obtuvieron en la pregunta 7.4.

$Si\ V_1 = \frac{y^3}{4} = 2.000\ cm^3$ entonces: $y^3 = 8.000\ cm^3 \longrightarrow y = 20\ cm$ y $x = 40\ cm$.

El volumen del prisma para el caso 7.1 b) es:

$$V_2 = \frac{y^3}{8} = 2.000\ cm^3\ \ entonces: y^3 = 16.000\ cm^3 \longrightarrow y = 20\sqrt[3]{2}\ cm^3 \longrightarrow$$

$$y \cong 25{,}1984\ cm\ \ y\ \ x \cong 50{,}3968\ cm\,.$$

Respuesta 7.6:

Las dimensiones de la lámina para el caso 7.1.a) son: $largo = 40\ cm;\ ancho = 20\ cm.$

Las dimensiones de la lámina para el caso 7.1.b) son: $largo \cong 50{,}4\ cm;\ ancho \cong 25{,}2\ cm.$

Nota:

Para obtener prismas de igual volumen, en los dos casos, las dimensiones de las dos láminas son diferentes.

3.10 PROBLEMAS DE APLICACIÓN PROPUESTOS

1. Con una cuerda de 120 metros de longitud, se desea formar un rectángulo en el cual, el largo es el doble del ancho. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo?

2. Tres puntos diferentes A, B, C están en línea recta. La distancia de A a C es de 120 m. y de A a B es el doble de distancia de B a C. ¿Cuál es la distancia de A a B y de B a C?

3. Obtener dos números, tales que su producto sea igual a 30 y la suma sea igual a 11.

4. Con una cuerda de 22 metros de longitud, se desea formar un rectángulo cuta área sea de 30 m2. ¿Cuáles son las dimensiones (largo y ancho) del rectángulo?

5. Se construye un cilindro recto circular con una lámina rectangular cuyo largo mide el tripe del ancho.

   5.1 Obtener el volumen del cilindro si su altura es: a. el ancho de la lámina; b. el largo de la lámina.

   5.2 ¿Cuál es la relación entre los volúmenes de los casos 6.1 a. y 6.1 b.?

   5.3 Para los casos 6.1 a. y 6.1 b. ¿cuál es el volumen del cilindro si el ancho de la lámina mide 40 cm?

6. Con una lámina rectangular delgada de 80 cm por 40 cm, se construye una caja, sin tapas, haciendo cortes en las esquinas (ver Gráfico 27).

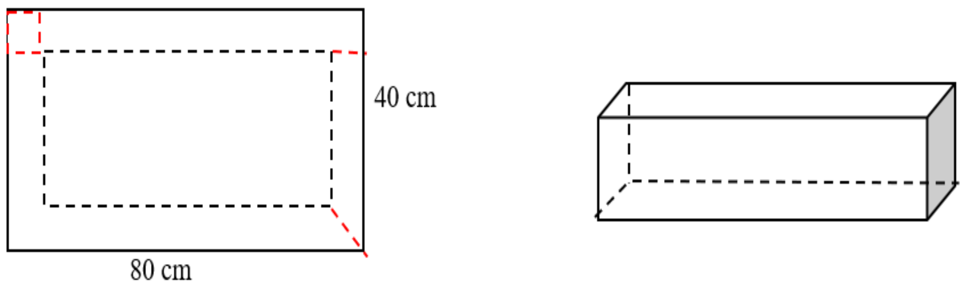


Fig. 1 Fig. 2

Gráfico 27. Lámina de 80x40 cm^2 y caja sin tapas construida con dicha lámina

Nota:

Los cortes en las esquinas se pueden realizar, cortando cuadros o haciendo cortes diagonales en las esquinas y doblar las pestañas. Los triángulos “sobrantes” sirven para unir las esquinas. También se puede, haciendo un solo corte en cada esquina y doblar las pestañas; los cuadrados “sobrantes” sirve para unir las esquinas de la caja. En cualquier caso, se doblan las pestañas por la línea punteada de color negro, resultando el ancho de las pestañas la altura de la caja. Las tres formas de corte se indican en la Fig.1 con líneas punteadas de color rojo.

6.1 Obtener las relaciones (igualdades) entre las tres dimensiones de la caja: largo, ancho y altura.

6.2 Identificar las ecuaciones obtenidas.

6.3 Obtener relaciones (desigualdades) entre las tres dimensiones.

6.4 Establecer el volumen considerando:

a. Las tres dimensiones; b. Dos dimensiones (largo y alto; largo y ancho; ancho y alto); c. Una sola dimensión.

6.5 Obtener las dimensiones de la caja, si el volumen es de 18.000 cm^3

3.11 EJERCICIOS PROPUESTOS

1. En cada expresión, realizar operaciones y simplificar, cuando sea posible. Aplicar fórmulas, leyes. Las respuestas no deben estar en notación decimal.

Expresiones	Expresiones
$\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{3}{8}}\right)^{8}$	$\left(3^{\frac{5}{4}}\right)^{\frac{12}{5}}$
$2^{150} \times 2^{-147}$	$\frac{(7.855)^{25}}{(7.855)^{26}}$

$8^{\frac{1}{6}} \times 8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{1}{2}}$	$(225)^{\frac{1}{6}}(225)^{-\frac{1}{2}}(225)^{\frac{1}{3}}$
$(64)^{\frac{2}{3}} \times (64)^{-\frac{1}{2}} \times (64)^{\frac{1}{3}}$	$\left(\frac{1}{50}\right)^2 (500)^2$
$(78.550)^{12}(78.550)^{-11}$	$\left(4x^3 y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{5}{2}}\right)^2$
$\sqrt[3]{54a^4b^7}$	$(1.000)^{\frac{2}{3}}$
$(81)^{\frac{3}{4}}$	$\left(81x^4 y^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{4}}$
$\left(x^{20} y^{\frac{20}{3}}\right)^{\frac{3}{10}}$	$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

2. Simplificar el radical (extraer un entero del radical)

Expresiones	Expresiones	Expresiones
$\sqrt{48}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{500}$
$\sqrt{125}$	$\sqrt{\frac{27}{48}}$	$\sqrt[3]{16}$
$\sqrt[3]{54}$	$\sqrt[3]{128}$	$\sqrt[3]{16a^3}$
$(1.000)^{\frac{2}{3}}$	$\sqrt[5]{32}$	$\sqrt[3]{8}$

3. Realizar las operaciones indicadas y simplificar el resultado.

Expresiones

$(x+5)(x-3)(x+4)$

$(3x+2)(x-3)(4x-5)$

4. Aplicar el algoritmo de la división.

Dividendos	Divisores
$x^3-4x^2-11x+32$	$x-5$
$x^3-4x^2-11x+27$	$x+3$
$x^3-4x^2-11x+34$	$x-2$
$8x^3+2x^2-27x-18$	$2x+3$
$8x^3+2x^2-27x-18$	$x-2$

5. Aplicación del teorema del factor, teorema fundamental del álgebra, definición de raíz y división sintética.

5.1 Determinar $p(x)$:

- Si $2x-5$ y $x+4$ son factores de un polinomio $p(x)$ de grado 2, determinar $p(x)$
- Si 6 es raíz y (x + 4), (2x – 5) son factores de un polinomio $p(x)$de grado 3, entonces:
- Si $-5,-4\ y\ 3$ son las raíces de un polinomio $p(x)$de grado 3, determinar $p(x)$.
- Si $4x-5$ es un factor de $p(x)$, $3\ \ y-\frac{2}{3}$ son raíces de un polinomio $p(x)$ de grado 3, hallar $p(x)$:
- Sea un polinomio $p(x)$ de grado 3, tales que $p(1)=0, p(4)=0\ \ y\ \ p(-2)=0$. Hallar $p(x)$

5.2 Determinar las raíces faltantes de $p(x)$:

- Si $3 \ y - 2$ son raíces de P (x) = 6x4 + x3 − 41x2 − 44x − 12 $p(x) = 6x^4 + x^3 - 41x^2 - 44x - 1$, hallar las dos raíces faltantes.
- Si -4 es una raíz de $p(x) = x^3 + 6x^2 - 7x - 60$, hallar las dos raíces que faltan.
- Determinar las raíces del polinomio $p(x) = 5(9x+2)(x-17)(5x-2)(x+15)(5x+8)$
- Hallar el factor lineal asociado a la raíz $-\frac{b}{a}$ de un polinomio $p(x)$

5.3 Aplicando el teorema del factor, determinar los valores numéricos de un polinomio $p(x)$.

- Si $3x+2, x-5, 7x+3$son factores de un polinomio $p(x)$, determinar $p\left(-\frac{2}{3}\right), p\left(-\frac{3}{7}\right) \ y \ p(5)$
- Si $x+8$ es un factor de un polinomio $p(x)$, hallara $p(-8)$
- Si $x-12$ es un factor de un polinomio $p(x)$, hallara $p(12)$
- Si $7x+2$ es un factor de un polinomio $p(x)$, hallara $p\left(-\frac{2}{7}\right)$
- Si $6x-1$ es un factor de un polinomio $p(x)$, hallara $p\left(\frac{1}{6}\right)$
- Si $mx+n$ es un factor lineal de un polinomio $p(x)$, hallar $p\left(-\frac{n}{m}\right)$

5.4 Aplicando el teorema del residuo, determinar los factores lineales de un polinomio $p(x)$.

- Si $p\left(-\frac{5}{3}\right) = 0; p\left(\frac{7}{2}\right) = 0; p(2) = 0$, determinar los factores lineales de polinomio $p(x)$
- Si $p(-18) = 0; p\left(\frac{2}{7}\right) = 0$, determinar los factores lineales de polinomio $p(x)$

5.5 Raíces racionales y factores lineales de un polinomio $p(x)$.

- Si $p(x) = x^3 + 8x^2 - 30x + 12$, determinar las posibles raíces racionales y los posibles factores lineales de $p(x)$.

- Si 5 es una solución de la ecuación $4x^2 - 12x + k = 0$, hallar el valor de k y la otra raíz de dicha ecuación.
- Si 1 es una solución de la ecuación $x^3 - 7x + h = 0$, hallar el valor de h y las otras dos raíces de dicha ecuación.
- Sea un polinomio $p(x)$ de grado 3, tales que: $p(2) = p(1) = (-3) = 0$ Hallar la ecuación polinómica $p(x) = 0$

6. Determinar las soluciones de cada ecuación en el conjunto de los números reales.

$$(3x+1)(x-10)(x^2+36)(x+10)\left(x+\frac{3}{4}\right) = 0 \qquad (x+6)(x^2-49)(x+8) = 0$$

$$(3x+5)(x^2-10)(4x-1) = 0 \qquad |x+16| = 6$$

$$|6x| = 12 \qquad |3x-18| = 3$$

$$|x^2-64| = 36 \qquad \sqrt{x+10} = 6$$

$$\sqrt{2x-19} = 9 \qquad \frac{36}{|x-8|} = |x+8|$$

7. Determinar el conjunto solución de cada inecuación.

$$|x+16| \leq 6 \qquad |3x-18| \geq 3 \qquad |x^2-64| < 36$$

$$\sqrt{x+10} < 6 \qquad |3x-18| \leq 3 \qquad \sqrt{5x-19} > 9$$

$$|x+10| > 4 \qquad |6x| \leq 12 \qquad |6x| > 12$$

$$|x^2-64| \geq 36$$

8. Reducir términos semejantes, simplificar cuando se posible y escribir la respuesta final.

$$\frac{1}{5}x+\frac{1}{6}x+\frac{2}{3}x$$

$$\frac{3}{10}x^2+\frac{2}{5}x^2+\frac{1}{10}x^2$$

$$\frac{3}{10}xy-\frac{2}{5}xy+\frac{1}{10}xy$$

$$\frac{1}{6}x^2y+z+\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}x^2y+\frac{1}{3}z$$

$$-x^3+y^3-7x^3+2x^3-8y^3$$

$$144ax^4-200by^2+6ax^4+100by^2$$

9. Realizar las multiplicaciones, reducir términos semejantes y escribir la respuesta final.

$$(x+9)(x+5)$$

$$(x-7)(x+1)$$

$$(x-12)(x-2)$$

$$(2x-1)(3x+2)$$

$$(5x+3)(4x+1)$$

$$(2x-3)(3x+2)(4x+1)$$

$$(x-8)(2x+1)(4x-3)$$

10. Efectuar los productos notables y escribir el resultado final.

$$(x+9)(x-9)$$

$$(2x+3)(3-2x)$$

$$(x+9)(9-x)$$

$$\left(\sqrt{7}-4x\right)\left(4x+\sqrt{7}\right)$$

$$(4x^2-5)(5+4x^2)$$

$$\left(\sqrt{7}+4x\right)\left(4x-\sqrt{7}\right)$$

$$\left(\sqrt{12}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{12}-\sqrt{5}\right)$$

$$(a^{0,5}-b^{0,5})(b^{0,5}+a^{0,5})$$

$$(2x+1)^2$$

$$(3x^2-y)^2$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y\right)^2$$

$$(5x+3)^3$$

$$\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}t\right)^3 \qquad \left(\frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{2}t\right)^3$$

11. Desarrollar los cocientes notables.

$$\frac{x^2 - 36}{x - 6} \qquad \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} \qquad \frac{x^2 - 81}{x + 9} \qquad \frac{16x^4 - 25}{4x^2 - 5}$$

$$\frac{7 - 16x^2}{\sqrt{7} + 4x} \qquad \frac{8 + x^3}{2 + x} \qquad \frac{125 + x^6}{5 + x^2} \qquad \frac{27 - x^6}{3 - x^2}$$

12. Factorizar los siguientes trinomios.

$$x^2 + 14x + 45 \qquad x^2 - 6x - 7 \qquad x^2 - 14x + 24$$

$$6x^2 + x - 2 \qquad 20x^2 + 17x + 3 \qquad 4x^2 + 4x + 1$$

13. Factorizar diferencia de cuadrados, sumas y diferencias de cubos.

$$x^2 - 81 \qquad 9 - 4x^2 \qquad 16x^4 - 25 \qquad 125 + x^6$$

$$125 - x^6 \qquad 8 + x^3 \qquad 64 - x^3 \qquad 8 - x^3$$

14. Racionalizar y simplificar cuando sea posible.

$$\frac{5}{\sqrt{5}} \qquad \frac{-14}{\sqrt{7}} \qquad \frac{10}{\sqrt[3]{2}} \qquad \frac{-18}{\sqrt{12}}$$

$$\frac{9}{\sqrt{11} - \sqrt{2}} \qquad \frac{-10}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} \qquad \frac{-8}{\sqrt{12} - 4} \qquad \frac{60}{5 + \sqrt{5}}$$

CAPÍTULO 4.
Funciones

CAPÍTULO 4.
FUNCIONES

4.1 FUNCIONES REALES

Antes de definir lo que es una función, se establece la definición de relación binaria.

Una *relación binaria* entre un conjunto M y un conjunto N, es cualquier subconjunto del producto cartesiano $M \times N$.

Ejemplos:

Sean $M = \{1, 2{,}4\}\ y\ N = \{a, b\}$.

$M \times N = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (4, a), (4, b)\}$.

Son relaciones entre M y N: $\{(1, a)\}$; $\{(1, b), (2, a)\}$; $\{(2, b), (4, a), (4, b)\}$; $\{(1, b), (2, b), (4, b)\}$.

4.1.1 Definición de función

Una *relación F* de M hacia N, $(de\ M\ a\ N)$, lo cual se expresa así, $F: M \to N$, es una *función* si y solo si:

a cada elemento de M, le corresponde *un único* elemento de N.

A los elementos de M se los llama *pre- imágenes*, y a los elementos N que están relacionados con elementos de M, se los llama *imágenes*.

El conjunto M es el *dominio* (conjunto de partida, primer conjunto) y el conjunto N (conjunto de llegada o segundo conjunto) es el *codominio* de la función F. El conjunto de las imágenes, es el *rango* de F.

Notaciones:

D_F es el dominio de F; $R_F$es el rango (o recorrido) de F.

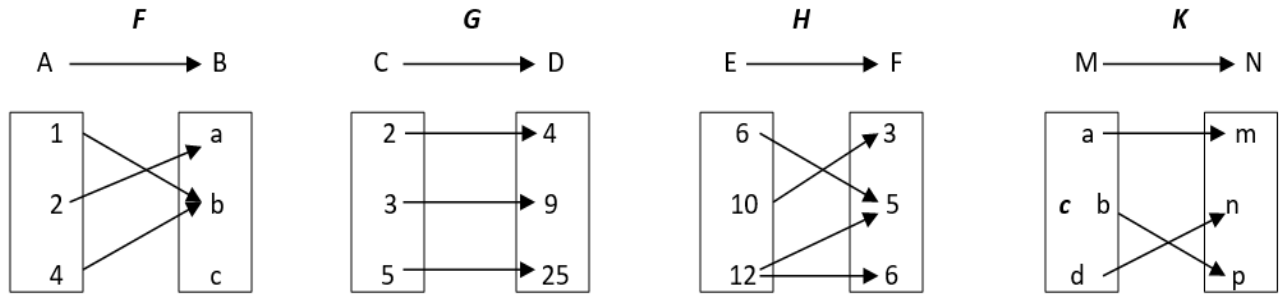
4.1.2 Funcione inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Sea $F: M \to N$, una función.

F sobreyectiva cuando el rango de F es N, es decir, cuando todos los elementos de N son imágenes.

F es inyectiva, cuando cada imagen tiene una sola pre- imagen.

F es biyectiva, cuando es inyectiva y sobreyectiva.



$F = \{(1, b), (2, a), (4, b)\}$ $G = \{(2, 4), (3, 9), (5, 25]\}$ $H = \{(6, 5), (10, 3), (12, 5), (12, 6)\}$

Gráfico 28. Representación gráfica de relaciones

F y G son funciones porque a cada elemento del primer conjunto le corresponde un solo elemento del segundo.

H no es función, porque el elemento 12 tiene dos (2) imágenes.

K no es función, porque al elemento ***c*** no le corresponde un elemento de N, es decir, no tiene imagen.

El dominio de F es $A = \{1, 2, 4\} = D_F$.

El rango de F es $R_F = \{a, b\} \subset B$.

$R_G = \{4, 9, 25\} = D$; $D_G = C$.

F no es inyectiva ni sobreyectiva; F no es biyectiva; G es inyectiva y sobreyectiva; G es biyectiva.

Nota:

Una *relación* F de a M hacia N, no es función, cuando hay al menos un elemento de M, al cual no le corresponde un elemento de N; es decir, no tiene imagen; o cuando hay al menos un elemento de M, el cual tiene dos o más imágenes.

Cuando F es función de M hacia N, se dice también que F es función *definida* de M hacia N.

Cuando $M = N$, entonces, se afirma que F es función *definida sobre* M. ($F: M \to M$).

En matemáticas interesa, sobre todo, funciones definidas sobre conjuntos numéricos; además, que los elementos de los conjuntos se relacionen mediante una *fórmula* o una *proposición* en términos de variables.

En estos casos, una función F se puede definir de la siguiente manera: sea F definida de M a N o definida sobre M, por $F(x) = y$. La variable x *representa* los elementos del dominio M; la variable y *representa* los elementos del rango de la función. Según esto, cada x es pre imagen; cada y es imagen. Además, F es una función con una sola variable x.

Ejemplos:

En la función G, de los ejemplos dados, se observa que $G(x) = x^2 = y$.

Si se define F sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, ($\boldsymbol{F}$: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$) así: $\boldsymbol{F}(n) = 2n + 4 = y$, entonces, para cada número natural n; $2n$ es número natural y único; $2n + 4$ es número natural, además, es único para cada n. Luego, F es función, pues cumple con la definición de función o condición para ser función.

$$F(1) = 6; F(2) = 8; F(3) = 10; F(4) = 12; F(5) = 14; F(6) = 16; F(7) = 18; F(8) = 20; F(9) = 22.$$

El rango de F es $R_F = \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 2\ 0, 22, 24, 26, 30, \ldots\} \subset \mathbb{N}$.

Sobre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, se define G por: $G\ (x) = \frac{7}{x} = y$, entonces G no es función porque el elemento 0 no tiene imagen en los reales; pues, $G(0) = \frac{7}{0}$ no está definido en los números reales, no es número real.

Si G: $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}\ tal\ que\ G(x) = \frac{7}{x} = y$, entonces G es función. ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$)

De igual manera, si H se define sobre $\mathbb{R}$, así: $H(x) = \frac{12}{x-4} = y$; H no es función porque $H(4)$ no existe en $\mathbb{R}$.

Si H: $\mathbb{R} - \{4\} \rightarrow \mathbb{R}\ y\ H(x) = \frac{12}{x-4} = y$; entonces, en este caso, H es función.

Si $\beta(x) = \sqrt{x+6} = y$, definida sobre $\mathbb{R}$, entonces β no es función, dado que, para $x < -6$ se tiene que $\sqrt{x+6}$ no es número real; es número imaginario, es decir, estos valores de x, no tienen imagen real.

Si se define β de $[-6, +\infty)$ hacia $\mathbb{R}$ y $\beta(x) = \sqrt{x+6} = y$, entonces β es función.

Nota:

Si $a\ y\ b$ son números reales y n entero positivo, entonces: $\frac{a}{b}$ es un número real si $b \neq 0$.

$\sqrt[n]{a}$ es número real, cuando n es entero par y $a \geq 0$. Cuando n impar, a puede ser cualquier número real.

Para $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ es número real; además, es mayor o igual que cero.

4.1.3 Función constante

Una función F: $M \rightarrow N$ es constante, cuando para todo x, $F(x) = k$, donde k es un elemento fijo (constante) de N.

Ejemplos:

Para todo real x, son funciones constantes: $F(x) = 10; G(x) = -8; H(x) = \frac{12}{7}; K(x) = -9\sqrt{2}$.

4.1.4 Función inversa

Si $F: A \to B$, tal que $F(x) = y$, es función biyectiva, entonces $F^{-1}: B \to A$, tal que $F^{-1}(y) = x$, es función, y también es biyectiva. F^{-1} es la inversa de F.

Ejemplo:

Si $F(x) = 3x + 7 = y$, para todo real x, entonces Fes función biyectiva.

Despejando x se tiene: $x = \frac{y-7}{3}$.

Luego, $F^{-1}(y) = \frac{y-7}{3} = x$.

Se puede verificar que F^{-1} es función biyectiva.

4.1.5 Función Identidad

Si F está definida sobre un conjunto A, tal que, $\forall x,\ F(x) = x$, entonces F es una función identidad.

4.2 FUNCIONES REALES CON UNA VARIABLE

Si $F: M \to \mathbb{R}$, tal que $F(x) = y$; donde $M \subset \mathbb{R}$, es función, entonces: F es función real con una variable.

Como caso particular, puede ser $M = \mathbb{R}$, en este caso, F queda definida sobre $\mathbb{R}$.

Cuando se afirma que F es función real y $F(x) = y$, entonces, $F: M \to \mathbb{R}$. En este caso, obviamente no se analiza si F es función, pues, en la afirmación lo dice; pero es conveniente y necesario, obtener el conjunto M; es decir, *se debe determinar* el dominio de la función.

Ejemplos:

Obtener el domino de las siguientes funciones reales:

1. $G(x) = \dfrac{20}{x} = y$.

   Como el único valor real que no puede tomar x, es cero, entonces: $D_G = \mathbb{R} - \{0\}$ o bien $D_G = R^*$.

2. $H(x) = \dfrac{80}{x - 6} = y$.

   Como $x - 6 \neq 0$, entonces $x \neq 6$. Luego: $D_H = \mathbb{R} - \{6\}$.

3. $\beta(x) = \sqrt{x+9} = y$.

   Como $x + 9 \geq 0$, entonces $x \geq -9$, luego, $x \in [-9, +\infty)$ y $D_\beta = [-9, +\infty)$.

4. $F(x) = \sqrt{2x+9} = y$.

   $2x + 9 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -9 \rightarrow x \geq -\dfrac{9}{2} \rightarrow x \in \left[-\dfrac{9}{2}, +\infty\right)$.

   Por tanto, $D_F = \left[-\frac{9}{2}, +\infty\right)$.

5. G(x) = $\sqrt{x^2 - 36}$.

   $x^2 - 36 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 36 \rightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{36} \rightarrow |x| \geq 6 \rightarrow x \leq -6$ o $6 \leq x$.

   $x \in (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$.

   De esta manera: $D_G = (-\infty, -6] \cup [6, +\infty)$.

6. $H(x) = \sqrt{36 - x^2}$.

   $36 - x^2 \geq 0 \rightarrow 36 \geq x^2 \rightarrow \sqrt{36} \geq \sqrt{x^2} \rightarrow 6 \geq |x|$ o $|x| \leq 6 \rightarrow -6 \leq x \leq 6$.

   Entonces: $D_H = [-6, 6]$.

7. $K(x) = \sqrt{x^2 + 36}$.

   Para todo número real x, $x^2 \geq 0$ y $x^2 + 36 > 0$, por lo cual $\sqrt{x^2+36} \in \mathbb{R}$.

   Por lo tanto, $D_K = \mathbb{R}$.

8. $\alpha(x) = \dfrac{18}{x^2 + 7}$.

Para todo número real x, $x^2 \geq 0$ y $x^2 + 7 \geq 7$, entonces $D_\alpha = \mathbb{R}$.

9. $\beta(x) = \dfrac{\sqrt{144 - x^2}}{x^2 - 16}$.

En primer lugar,

$144 - x^2 \geq 0 \rightarrow 144 \geq x^2 \rightarrow \sqrt{144} \geq \sqrt{x^2} \rightarrow 12 \geq |x|$ o $|x| \leq 12 \rightarrow -12 \leq x \leq 12$.

Por otra parte: $x^2 - 16 \neq 0 \rightarrow x \neq 4$.

En consecuencia, $-12 \leq x \leq 12$ y $x \neq 4$, de lo cual $x \in [-12, 12] - \{-4, 4\}$.

$D_\beta = [-12, 12] - \{-4, 4\}$.

En muchos casos, también es conveniente obtener el rango de una función real F definida por $F(x) = y$.

Para ello, en caso de que sea posible, se despeja la variable x, y se analiza para qué valores reales de y, la variable x es número real.

Ejemplos:

Determinar los rangos de las siguientes funciones:

1. $G(x) = \dfrac{7}{x} = y$.

$7 = xy \rightarrow \frac{7}{y} = x$. Por tanto, x es número real cuando $y \neq 0$.

Así que: $R_G = \mathbb{R}^*$.

2. $H(x) = \dfrac{12}{x - 4} = y$.

$$\frac{12}{x-4} = y \to 12 = (x-4)\boldsymbol{y} \to 12 = x\boldsymbol{y} - 4\boldsymbol{y} \to 12 + 4\boldsymbol{y} = x\boldsymbol{y} \to \frac{12+4\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{y}} = x\,.$$

Se observa que x número real cuando $\boldsymbol{y} \neq 0$; por lo tanto, $R_H = \mathbb{R}^*$.

3. $\beta(x) = \sqrt{x+6} = y$.

Como $\sqrt{x+6} \geq 0$ y su mínimo valor es 0, el cual se obtiene para $x = -6$, entonces $y \geq 0$.

En consecuencia: $R_\beta = [0, +\infty)$.

4. $F(x) = \sqrt{2x+9} = y$.

Como $\sqrt{2x+9} \geq 0$, y su mínimo valor es 0, se concluye que $y \geq 0$. Así. $R_F = [0, +\infty)$.

Se puede observar, que la función $F(x)$ $no\ es\ sobrectiva$; pero la función G definida como sigue:

$G: \left[-\frac{9}{2}, +\infty\right) \to [0, +\infty)$ tales que $G(x) = \sqrt{2x+9}$, es sobreyectiva.

En efecto:

$$D_G = \left[-\frac{9}{2}, +\infty\right) \ y \ R_G = [0, +\infty)\,.$$

5. $G(x) = \sqrt{x^2 - 36} = y$.

Inicialmente, $y \geq 0$:

$$\sqrt{x^2-36} = y \to x^2 - 36 = y^2 \to x^2 = y^2 + 36 \to x = \pm\sqrt{y^2+36}\,.$$

Para todo número real y , $y^2 + 36 > 0$; en consecuencia, $x = \pm\sqrt{y^2+36}$ es número real.

Pero $y \geq 0$, entonces: $R_G = [0, +\infty)$.

En este caso, una manera de obtener los valores de y, es teniendo en cuenta que el mínimo valor de
$x^2 - 36$ es 0, el cual se obtiene para $x = \pm 6$; así, el mínimo valor de y es 0.

6. $H(x) = \sqrt{36 - x^2} = y$.

En este caso, también se observa que el mínimo valor de $36 - x^2$, es cero, el cual se obtiene para $x = \pm 6$. Así que, el mínimo valor de y es 0.

En consecuencia, $R_H = [0, +\infty)$.

7. $K(x) = \sqrt{x^2 + 36} = y$.

Inicialmente, $y \geq 0$.

El mínimo valor de $x^2 + 36$ es 36 y de $\sqrt{x^2 + 36} = y$, es 6; que se obtiene cuando $x = 0$.

Por tanto, $R_K = [6, +\infty)$.

De otra manera:

Despejando x: $x^2 + 36 = y^2 \rightarrow x^2 = y^2 - 36 \rightarrow x = \pm\sqrt{y^2 - 36}$.

Como x es real, $y^2 - 36 \geq 0 \rightarrow y^2 \geq 36 \rightarrow |y| \geq 6 \rightarrow y \leq -6$ o $6 \leq y \rightarrow y \in [6, +\infty)$.

Se descarta $y \leq -6$, porque inicialmente se tiene que $y \geq 0$.

8. $\alpha(x) = \dfrac{18}{x^2 + 7} = y$.

El mínimo valor de $x^2 + 7$, es 7, entonces el mínimo valor de y es $\frac{18}{7}$. Así que: $R_\alpha = [\frac{18}{7}, +\infty)$.

De otra manera:

Despejando x: $18 = yx^2 + 7y \rightarrow 18 - 7y = yx^2 \rightarrow x = \pm\sqrt{18 - 7y} \rightarrow 18 - 7y \geq 0$.

$$x^2 = \frac{18 - 7y}{y} \rightarrow \mathrm{x} = \pm\sqrt{\frac{18 - 7y}{y}}.$$

Se debe cumplir que $\frac{18-7y}{y} \geq 0 \rightarrow (18 - 7\mathrm{y} \geq 0 \text{ y } \mathrm{y} > 0 \text{ o } 18 - 7\mathrm{y} \leq 0 \text{ y } \mathrm{y} < 0)$.

Dado que $\frac{18}{x^2+7} = y$, entonces, se descarta $y < 0$ porque $18 > 0$ y $\quad + 7 > 0$.

Entonces sólo se debe cumplir que: $18 - 7y \geq 0$ y $y > 0$, de donde se obtiene que:

$y > \frac{18}{7}$ y $y > 0$.

Por lo tanto, $y > \frac{18}{7}$, es decir, $R_\alpha = [\frac{18}{7}, +\infty)$.

4.3 FUNCIONES REALES DESTACADAS

Entre las principales funciones reales con una variable, están: las polinómicas, logarítmicas, exponenciales y trigonométricas. También se destacan funciones reales con valor absoluto, fraccionarias y con radicales.

4.3.1 Funciones polinómicas

Una función real F es polinómica de grado n, si $F(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n; a_n \neq 0$.

Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales; x es la variable real.

El dominio y el codominio de cualquier función polinómica es $\mathbb{R}$; sin embargo, el codominio de una función polinómica de grado impar se puede *restringir* para hacerlo coincidir con el rango de la función, para lo cual, se elimina del codominio los elementos que no son imágenes. Con este procedimiento, la función no cambia, tampoco su gráfica, pero se crea la posibilidad de disponer de una función biyectiva.

La función F que sigue no es sobreyectiva; no obstante, si se redefine F de A hacia el conjunto $B' = \{a, b\} = R_F$, entonces, F se convierte en una función sobreyectiva. Se ha eliminado el elemento c del conjunto B. La función F no cambia (ver Gráfico 29).

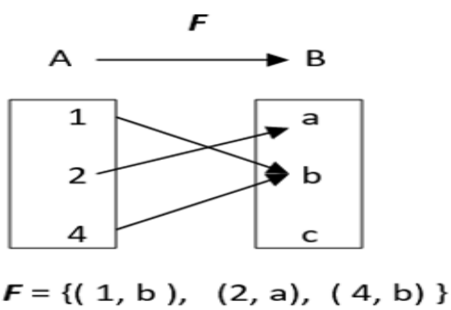


Gráfico 29. Representación gráfica de función no sobreyectiva

Nota:

Se debe tener en cuenta que:

- El dominio de toda función polinómica, es el conjunto $\mathbb{R}$.

- El rango de las funciones polinómicas de grado impar, es $\mathbb{R}$.

4.3.1.1 Casos particulares de funciones polinómicas

$F(x) = k$ es función polinómica de grado cero; k es un valor real fijo, constante.

$F(x) = mx + n$, donde $m \neq 0$, es función polinómica de grado uno o función lineal.

$F(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$, es función polinómica de grado dos; se denomina función cuadrática.

$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, a \neq 0$, es función polinómica de grado tres; se denomina función cúbica.

4.3.1.2 Gráficas de funciones polinómicas en el plano cartesiano XY

La gráfica de una función real constante, es una línea recta paralela al eje coordenado X (ver Gráfico 30).

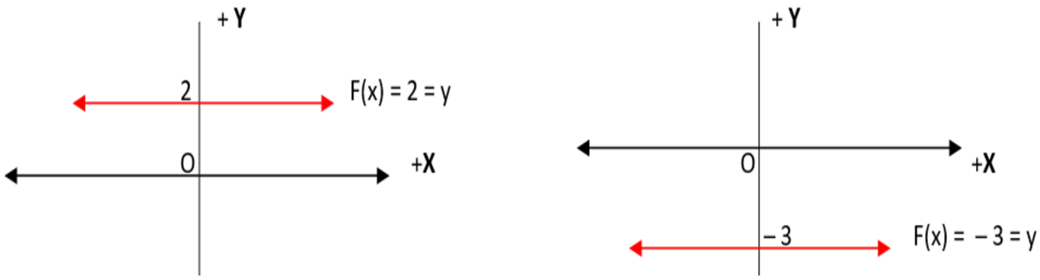


Gráfico 30. Representación gráfica de una función constante

La gráfica de una función lineal $F(x) = mx + n$, es una línea recta no paralela al eje coordenado Y; m es la *pendiente*.

Nota:

La pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo positivo, medido desde el eje X hasta la recta.

Si $A(a, b)$ y $B(c, d)$ son puntos diferentes de una recta, entonces, ecuación *dos-puntos* es:

$$\frac{y - b}{d - b} = \frac{x - a}{c - a}.$$

De aquí se obtiene la ecuación *pendiente – corte* de la recta, así:

$$y - b = \frac{(d - b)}{c - a}(x - a) = m(x - a); \;\; m = \frac{d - b}{c - a} \;\; \text{o también: } m = \frac{b - d}{a - c} \;\; \text{y } a \neq c.$$

Por lo tanto, la pendiente de una recta, es el cociente entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas de dos puntos diferentes de la recta.

Ejemplo:

Sean los siguientes puntos con coordenadas cartesianas: $A\ (3,4), B\ (5,8), C\ (-3,7), D\ (5,4)$.

La ecuación *pendiente-corte* de la recta que pasa por los puntos A y B es la siguiente:

$$y - 4 = \frac{(8 - 4)}{5 - 3}\,(x - 3) = 2(x - 3) \rightarrow y = 2x - 6 + 4 \rightarrow y = 2x - 2\,.$$

La ecuación *pendiente-corte* de la recta que pasa por los puntos C y D es la siguiente:

$$y - 7 = \frac{(7 - 4)}{(-3 - 5)}\,\big(x - (-3)\big) = \frac{3}{-8}(x + 3) \rightarrow y = \frac{-3}{8}x + \frac{-9}{8} + 7 \rightarrow y = \frac{-3}{8}x + \frac{47}{8}\,.$$

La gráfica de una función cuadrática, $F(x) = ax^2 + bx + c = y$ es una parábola que se extiende desde su *vértice* hacia arriba, cuando $a > 0$, o hacia abajo cuando $a < 0$.

El vértice de una parábola, es el punto de coordenadas:

$$V\left(-\frac{b}{2a},\ \ c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Cuando $a > 0$, el rango de la función es el intervalo $\left[\,c - \frac{b^2}{4a}, +\infty\right)$.

Cuando $a < 0$, el rango de la función es el intervalo $\left(-\infty,\ c - \frac{b^2}{4a}\right]$.

Ejemplo:

$F(x) = x^2 - 4x - 12 = y$.

En este caso: $a = 1; b = -4; c = -12$.

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2\,.$$

$$c - \frac{b^2}{4a} = -12 - \frac{(-4)^2}{4(1)} = -12 - \frac{16}{4} = -12 - 4 = -16\,.$$

Entonces:

El vértice de la parábola es: $V\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = V(2, -16)$.

El rango de la función es: $R_F = \left(c - \frac{b^2}{4a}, +\infty\right) = [-16, +\infty)$.

Por otra parte, $x^2 - 4x - 12 = y \to y = (x+2)(x-6)$.

Luego, para $x = -2$ y $x = 6$; se obtiene $y = 0$.

En este caso, la parábola corta al eje X en $x = -2$ y $x = 6$; es decir, la parábola intercepta al eje X en los puntos de coordenada $(-2, 0)$ y $(6, 0)$.

4.3.2 Función exponencial y función logarítmica

Para un número real fijo positivo $a, a \neq 1$, la función $\boldsymbol{E}(x) = a^x = \boldsymbol{y}$, es una función real; la función E se llama *función real exponencial*.

Para $0 < a$; si $x \to +\infty$, (x tiende a $+\infty$) entonces $a^x \to +\infty$ y si $x \to -\infty$, entonces $a^x \to 0$, $a^x \neq 0$.

Para $0 < a < 1$; si $x \to +\infty$, entonces $a^x \to 0$ y si $x \to -\infty$, entonces $a^x \to +\infty$.

Para $x = 0$, $a^0 = 1 = y$.

La gráfica de la función exponencial E intercepta al eje Y en el punto de coordenadas $(0, 1)$ (ver Gráfico 31).

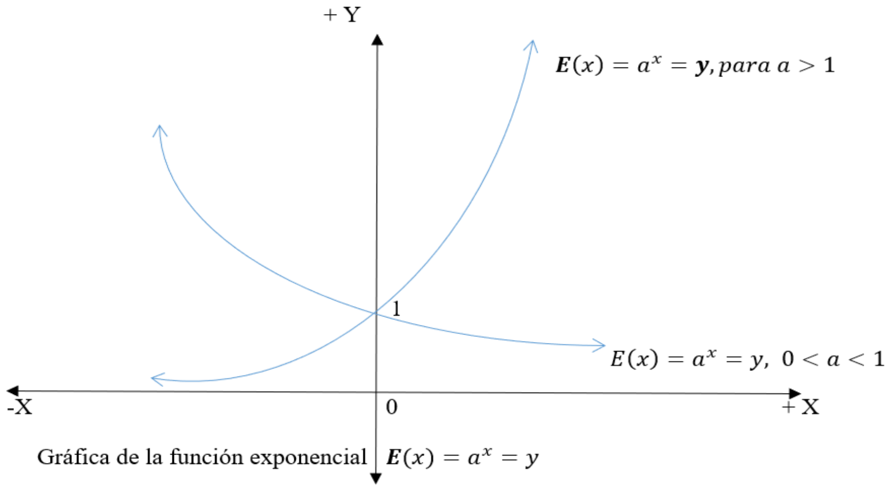


Gráfico 31. Función exponencial de base $a \neq 1$

Dado que, para todo número real x, $a^x > 0$, entonces, el dominio de E es $\mathbb{R}$ y el rango de E es $\mathbb{R}^+$.

Según esto, E no es sobreyectiva, pero sí es inyectiva.

Restringiendo el codominio $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$, entonces E es sobreyectiva y en consecuencia es biyectiva. Es decir, la función $\boldsymbol{E}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $tal\ que$ $E(x) = a^x$, es una función exponencial biyectiva.

4.3.2.1 Potenciación

$$A^n = P\,.$$

A es la base, P es la n-ésima potencia de A, n el exponente. Se conoce A y n, se determina P.

4.3.2.2 Radicación

$$\sqrt[n]{P} \;=\; A\,.$$

A es la n-ésima raíz de P; n es el índice. P es la cantidad sub-radical. Se conocen P y n, y se determina A.

4.3.2.3 Logaritmación

$$Log_A(P) = n\,.$$

A es la base, P es el número al cual se calcula el logaritmo. Se conocen A y P, se determina n.

Según lo anterior, se obtiene:

$$Log_A(P) = n \;\;\leftrightarrow\;\; A^n = P\,.$$

Por lo tanto: $E(x) = a^x = y$ si y solo si $log_a(y) = x = L(y)$.

Como $\boldsymbol{E}$: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, entonces: $\boldsymbol{L}$: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

$\boldsymbol{L}$ es función logarítmica; es la inversa de E, entonces, L es también función biyectiva. El dominio de L es $\mathbb{R}^+$.

Notas:

1. Cuando la base del logaritmo es 10, se escribe $Log_{10}(x) = Log(x)$. Esta función logarítmica se denomina función logaritmo decimal.

2. Cuando la base del logaritmo es el número irracional $\boldsymbol{e}$ (número de Euler, $e = 2{,}718281$ ...), se escribe $Log_e(x) = Ln(x)$. Esta función logarítmica se denomina función logaritmo natural.

3. No existe logaritmo de cero ni de números reales negativos.

4. Tener presente que, si $\boldsymbol{a}$ es la base de una función logarítmica, entonces $\boldsymbol{a} > 0$ y $\boldsymbol{a} \neq 1$.

Ejemplos:

$Log_2(8) = 3$ porque $2^3 = 8$.

$Log_3(81) = 4$ porque $3^4 = 81$.

$Log(100) = 2$ porque $10^2 = 100$.

4.3.3 Propiedades de los logaritmos

a. $Log_a(xy) = Log_a(x) + Log_a(y)$.

b. $Log_a\left(\frac{x}{y}\right) = Log_a(x) - Log_a(y)$.

c. $Log_a(x^n) = nLog_a(x)$.

d. $Log_a(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}Log_a(x)$.

e. $Log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$.

f. $Log_a(a) = 1$.

g. $Log_a(a^n) = n$.

h. $Log_a(1) = 0$.

i. Si $a^x = p$ entonces $x = \frac{Ln(p)}{Ln(a)}$.

j. $Log_a(x) = Log_a(y)$ si y solo si $x = y$.

Ejemplos:

1. $Log_2(8^{10}) = 30 = 10 \times Log_2(8) = 10 \times 3 = 30$.

2. $Log_5(\sqrt[3]{25}) = \frac{1}{3} \times Log_5(25) = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$.

3. $Log_2(30) = \frac{Ln(30)}{Ln(2)} = \frac{3{,}401197382 \ldots}{0{,}69314718} = 4{,}906990596 \ldots$

4. $Log_3(81) = Log_3(3^4) = 4 \times Log_3(3) = 4 \times 1 = 4.$

5. $Log_3(80) = \frac{Ln(80)}{Ln(3)} = 3{,}988692535$.

6. $Log(10^{20}) = 20 \times Log(10) = 20 \times 1 = 20.$

7. $Log_2(2^{10}) = 10 \times Log_2(2) = 10 \times 1 = 10.$

8. $Log_5(5) = 1$ porque $5^1 = 5.$

9. $Ln(e) = 1$ porque $Ln(e) = Log_e(e)$ y $e^1 = 1.$

10. $Log(10) = 1$ porque $Log(10) = Log_{10}(10)$ y $10^1 = 1.$

11. $Log(1) = 0$ porque $Log(1) = Log_{10}(1)$ y $10^0 = 1.$

12. $Ln(1) = 0$ Porque $Ln(1) = Log_e(1)$ y $e^0 = 1.$

Notas:

1. La expresión $a^x = b$ es una ecuación exponencial. Se debe tener en cuenta que $a > 0, \ a \neq 1, \ b \in \mathbb{R}^+$.

2. La expresión $Log_a(x) = b$ es una ecuación logarítmica; donde $a > 0, \ a \neq 1, \ x > 0, b \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

1. $5^x = 625 \;\rightarrow\; \mathrm{x} = Log_5(625) = \frac{Ln(625)}{Ln(5)} = 4.$

2. $2^x = 1.024 \;\rightarrow\; \mathrm{x} = Log_2(1.024) = \dfrac{Ln(1.024)}{Ln(2)} = 10.$

3. $2^x = 1.020 \;\rightarrow\; \mathrm{x} = Log_2(1.020) = \dfrac{Ln(1.020)}{Ln(2)} = 9{,}994 \ldots$

4. $2^x = 1.050 \;\rightarrow\; \mathrm{x} = Log_2(1.050) = \dfrac{Ln(1.050)}{Ln(2)} = 10{,}036 \ldots$

Nota:

Los logaritmos en base 10 y en base e, se obtienen con calculadora mediante las teclas Log y Ln.

4.4 APLICACIÓN DE FUNCIONES Y ECUACIONES

4.4.1 Introducción

Se plantea textualmente y se resuelve algunos problemas sencillos, para aplicar ecuaciones y funciones, sobre todo polinómicas, con el propósito que los estudiantes reconozcan la gran utilidad de estos temas matemáticos y adquieran capacidad para abordar problemas más complejos y los puedan estructura en términos matemáticos, para luego obtener la solución de los mismos. *Por esto, en el proceso de solucionar los problemas, se darán explicaciones adicionales, se mencionarán temas matemáticos estudiados, lo cual sirve también como retroalimentación.*

En el planteamiento textual de un problema, se presentan datos conocidos y desconocido; estos últimos, en muchos casos, se los identifica con la misma pregunta del problema; se los representa con letras variables o incógnitas, tales como x, y, z, u, v, w, t; entre otras.

Se recomienda leer el planteamiento textual del problema, las veces que sea necesario, con el fin de entender y asimilar su contenido, y empezar a estructura matemáticamente el planteamiento para su solución. Algunas veces es necesario recurrir a gráficas, expresiones particulares, entre otras, como se verá en los ejemplos siguientes.

4.4.2 Problemas resueltos

1. El administrador de un parqueadero dispone de una malla de longitud 240 m. para hacer un cerco de base rectangular destinado al parqueo de motos.

   a. Establecer la ecuación que relaciona las dimensiones de la base del cerco, es decir del rectángulo.

   b. Despeje una variable e identifique la clase de función que se obtiene

   c. Expresar el área de la superficie del cerco en función de una de sus dimensiones.

Solución:

El único dato conocido, es la longitud de la malla: $240\ m$. Además, se sabe que se debe formar un cerco rectangular.

Sean x, y las dimensiones del rectángulo (superficie). No interesa la altura del cerco, o sea, el acho de la malla (ver Gráfico 32).

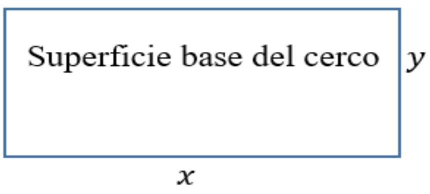


Gráfico 32. Rectángulo de dimensiones $x \times y$

El perímetro del rectángulo es igual a la longitud de la malla; luego:

$$x + y + x + y = 240 \;\rightarrow\; 2x + 2y = 240 \;\rightarrow\; x + y = 120 \;\rightarrow\; y = -x + 120 = f(x).$$

El área de la superficie del cerco es $A = xy$. Al reemplazar el valor de y, se tiene:

$A = x(-x + 120) = -x^2 + 120x = \boldsymbol{s}(x).$

Las respuestas son las siguientes:

a. La ecuación que relaciona las dimensiones de la base rectangular del cerco es: $x + y = 120$.

b. $f(x) = -x + 120 = y$; es una función lineal.

c. $\boldsymbol{s}(x) = -x^2 + 120x = A$; la función s es cuadrática; el área está en función de la dimensión x.

Nota:

La gráfica de la función $\boldsymbol{s}$, es una parábola que se extiende hacia abajo desde el vértice $V(60, 3.600)$; el rango es $(-\infty,\ 3.600]$. Esto indica que, el máximo valor del área es: $A = 3600\ m^2$.

Por otra parte, como $x + y = 120$, entonces, para $x = 60\ m$, se obtiene $y = 60\ m$, lo cual indica que dicho rectángulo es un cuadrado; y en este caso, se obtiene el área máxima.

Aplicando Cálculo Diferencial, para obtener el valor máximo, se deriva la función $\boldsymbol{s}$, se iguala a cero y se obtiene el valor de x que es 60; se reemplaza este valor en $-x^2 + 120x = A$ y se obtiene el valor de $A = 3.600\ m^2$.

Así, para obtener mayor capacidad de parqueo de motos, se debe construir un cerco de base cuadrada, cuyo lado debe ser de 60 m.

1. Se dispone de $7.200.000 para hacer un cerco rectangular aprovechando un muro. El material e instalación del cerco cuesta $8.000 el metro lineal, para el lado paralelo al muro; $12.000 por cada metro lineal de los dos lados laterales.

   a. Establecer la ecuación que relaciona las dimensiones del cerco.

   b. Expresar una dimensión en función de la otra e identificar el tipo de función.

   c. Expresar el área de la base rectangular del cerco en función de una dimensión e identificar la clase de función.

   d. Obtener las dimensiones de la cerca para las cuales se obtiene la mayor área de la superficie y obtener dicha área.

Solución:

Datos conocidos: el valor disponible de $7.200.000; el valor del metro lineal para el lado paralelo al muro es: $\$8.000$, y de los otros dos lados es $\$12.000$.

Datos desconocidos: dimensiones de la base rectangular (el suelo) y el área máxima.

Según los datos del problema, se tiene lo siguiente:

Si x es la longitud en metros del lado paralelo al muro, entonces $8.000\,x$ es el costo para construir ese lado.

Si y es la longitud en metros de cada lado lateral, entonces $12.000\,y$ es el costo para construir cada lado lateral.

Así, el costo para construir toda la cera es: $8.000\,x\ +\ 12.000\,y +\ 12.000\,y$, que es igual al valor disponible.

Entonces,

$$8.000x + 12.000y + 12.000y = 7.200.00\ \rightarrow 8.000x + 24.000y = 7.200.000 \rightarrow$$

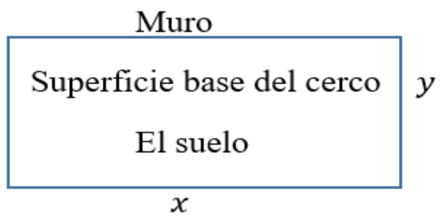


Gráfico 33. Rectángulo de dimensiones $x \times y$

$8x + 24y = 7.200$ Simplificando entre 8: $x + 3y = 900$.

Despejando y se tiene: $y = -x + 900 = f(x)$.

El área de la base rectangular es $A = xy$.

Al reemplazar se obtiene:

$A = x(-x + 900) = -x^2 + 900x = s(x)$.

Las respuestas son las siguientes:

a. La ecuación simplificada que relaciona las dimensiones del cerco es: $x + 3y = 900$.

b. Expresando el ancho de la base, en función del largo, queda así: $y = -x + 900 = f(x)$; f es función lineal; la gráfica es una línea recta con pendiente $m = -1$.

c. Expresando el área de la base en función del largo, queda así: $A = -x^2 + 900x = \boldsymbol{s}(x)$; s es una función cuadrática. La gráfica es una parábola que se extiende hacia abajo desde el vértice.

   $V(\,450,\ 202.500)$.

   En consecuencia, el mayor valor de A, es $A = 202.500$, el cual obtiene para $x = 450$.

Ahora, como $y = -x + 900$, entonces, para $x = 450$, se obtiene $y = 450$.

d. Las dimensiones de la base rectangular para obtener área máxima son $450\ m \times 450\ m$; y su área máxima es: $A = 202.500\ m^2$.

3. Con una lámina rectangular de $50\ cm \times 40\ cm$ se elabora una caja sin tapa, haciendo cortes cuadrados en sus esquinas y doblando las pestañas o bordes por las líneas punteadas. Se plantea lo siguiente:

a. Establecer las ecuaciones que relacionan las dimensiones de la caja.

b. Establecer las desigualdades e intervalos de variación de las dimensiones de la caja (largo, ancho y altura).

c. Expresar el volumen de la caja en función de una sola dimensión (altura), e identificar la función obtenida.

d. Obtener las dimensiones de la caja si el volumen requerido es de $6.000\ m^3$.

e. Obtener las dimensiones de la caja para las cuales se obtiene volumen máximo. Obtener el volumen.

Solución:

Datos conocidos: dimensiones de la lámina: 50 por 40 cm.

Datos desconocidos o datos por determinar: dimensiones de la caja para obtener sus relaciones y el máximo volumen de la caja.

Sea x el largo, y el ancho, z la altura en cm de la caja. Los cortes se hacen por las líneas puntadas (ver Gráfico 34).

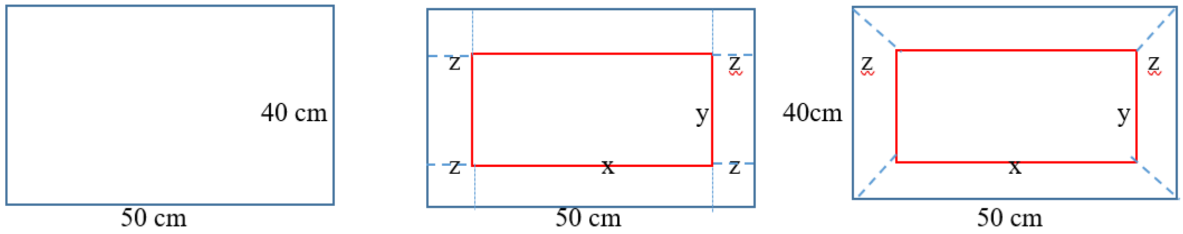


Gráfico 34. Rectángulo de dimensiones 50 x 40 y modelos de cajas

Por las líneas rojas se dobla las pestañas, que es la base de la caja; el ancho de las pestañas es la altura de la caja (ver Gráfico 35).

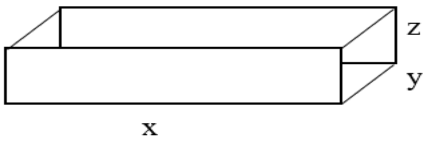


Gráfico 35. Caja con dimensiones $x \times y \times z$

Observando las gráficas y teniendo en cuenta los datos del problema, se tiene: $x + 2z = 50$; $y + 2z = 40$.

Restando la segunda igualdad a la primera:

$x - y = 10$.

Despejando variables: $x = 50 - 2z$; $y = 40 - 2z$; $x = 10 + y$.

Si $z = 20$, es decir, si se hace cortes cuadrados de 20 cm de lado, no se podría formar una caja; pues, se obtendría una franja de la lámina de $10\ cm \times 40\ cm$; no habría pestañas para doblar. De igual manera, si $z = 0$, según lo anterior, $0 < z < 20$. Multiplicando por -2, cambia el sentido de las desigualdades: $0 > -2z > -40$.

Sumando respectivamente 50 y 40:

$$50 > 50 - 2z > 10; \quad 40 > 40 - 2z > 0 \ \rightarrow \ 50 > x > 10; \ 40 > y > 0\,.$$

Como $10 < x < 50$, $0 < y < 40$, $0 < z < 20$, entonces $x \in (10{,}50)$; $y \in (0, 40)$; $z \in (0, 20)$.

Respuestas:

a. Las ecuaciones que relacionan las dimensiones de la caja son:

   $x + 2z = 50$; $y + 2z = 40$; $x - y = 10$ o también: $x = 50 - 2z$; $y = 40 - 2z$; $x = 10 + y$.

b. Los intervalos de variación de las dimensiones de la caja y sus respectivos intervalos son:

$10 < x < 50, \quad 0 < y < 40, \quad 0 < z < 20 \quad \rightarrow x \in (10{,}50);\ y\ (0, 40);\ \ z \in (0, 20).$

Volumen de la caja:

$V = xyz \quad \rightarrow \quad V = (50 - 2z)(40 - 2z)z \quad \rightarrow \quad V = (2.000 - 180z + 4z^2)z \ \rightarrow$

$V = (2.000z - 180z^2 + 4z^3) = f(z).$

c. En la anterior igualdad, el volumen de la caja se expresa en función de su altura, que es z. La función f es una cúbica.

Si el volumen requerido es de 6.000 m^3, entonces,

$2.000z - 180z^2 + 4z^3 = 6.000 \rightarrow 4z^3 - 180z^2 + 2.000z - 6.000 = 0\,.$

Simplificando por 4 se tiene: $z^3 - 45z^2 + 500z - 1.500 = 0.$

Las posibles raíces racionales de la anterior ecuación cúbica, son los divisores de 1.500, (48 divisores en total).

Se debe tener en cuenta que $0 < z < 20$, por lo tanto, las posibles raíces racionales son: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12$ y 15.

Comprobando con la división sintética, se encuentra que 10 es una raíz de la ecuación.

En consecuencia:

$(z - 10)(z^2 - 35z + 150) = 0$ y las raíces de $z^2 - 35z + 150$ son: $5\ \ y\ \ 30.$

En resumen, las soluciones de la ecuación $z^3 - 45z^2 + 500z - 1.500 = 0$ son: $5, 10\ \ y\ \ 30$.

Para el problema, se descarta el valor de 30; por lo tanto:

Para $z\ =\ 5$, se tiene: $x\ =\ 50 - 2 \times 5\ =\ 40, \quad y\ =\ 40\ - 2 \times 5\ =\ 30.$

Para $z\ =\ 10$, se tiene: $x\ =\ 50 - 2 \times 10\ =\ 30, \quad y\ =\ 40\ - 2 \times 10\ =\ 20.$

d. Para obtener un volumen de 6.000 m^3 las dimensiones de la caja son: largo :40 cm, ancho: 30 cm, altura: 5 cm; o también: largo:30 cm, ancho: 20 cm y altura: 10 cm.

Nota:

Para obtener las dimensiones de la caja para que su volumen sea máximo, se debe derivar respecto a z la función cúbica f, igualar a cero este resultado, resolver la ecuación cuadrática que resulte y comprobar con ciertos criterios, que el valor es máximo; pero esto es tema de Cálculo Diferencial.

Se puede obtener un valor aproximado de z y luego los valores de x , y, mediante tablas elaboradas en Excel.

Por ejemplo, desde la celda $A5$ se escribe números enteros de $0\ a\ 20$; en $B5$ se digita la fórmula: $= 50 - 2 \times A5$ y se la copia hacia abajo; en $C5$ la fórmula: $= 40 - 2 \times A5$ y se la copia hacia abajo; en D5 se digita la fórmula: =A5*B5*C5 y se la copia hacia abajo.

En esta tabla, se encuentra que para: $z = 6,\ z = 7, z = 8$, el respectivo volumen es 6.384, sube a 6.552 y baja a 6.528.

Esto nos indica que, el volumen máximo se obtiene para z próximo a 7.

En Tabla 19, se toma valores próximos a 7 y las cifras decimales se las establece según que el volumen vaya aumentando, para luego disminuir.

Tabla 19. Ejemplos de dimensiones de cajas

Caso 1				**Caso 2**			
DIMENSIONES			Volumen	DIMENSIONES			Volumen
Altura z	Largo x	Ancho y		Altura z	Largo x	Ancho y	
0	50	40	0	7	36	26	6552
1	48	38	1824	7,1	35,8	25,8	6557,844
2	46	36	3312	7,2	35,6	25,6	6561,792

3	44	34	4488	7,3	35,4	25,4	6563,868
4	42	32	5376	7,31	35,38	25,38	6563,97356
5	40	30	6000	7,32	35,36	25,36	6564,06067
6	38	28	6384	7,33	35,34	25,34	6564,12935
7	36	26	6552	7,34	35,32	25,32	6564,17962
8	34	24	6528	7,35	35,3	25,3	6564,2115
9	32	22	6336	7,36	35,28	25,28	6564,22502
10	30	20	6000	7,361	35,278	25,278	6564,22537
11	28	18	5544	7,362	35,276	25,276	6564,22553
12	26	16	4992	7,3621	35,2758	25,2758	6564,22553
13	24	14	4368	7,3622	35,2756	25,2756	6564,22554
14	22	12	3696	7,3623	35,2754	25,2754	6564,22554
15	20	10	3000	7,36231	35,27538	25,27538	6564,22554
16	18	8	2304	7,36232	35,27536	25,27536	6564,22554
17	16	6	1632	7,36233	35,27534	25,27534	6564,22554
18	14	4	1008	7,36234	35,27532	25,27532	6564,22554

19	12	2	456	7,36235	35,2753	25,2753	6564,22554
20	10	0	0	7,36236	35,27528	25,27528	6564,22554
				7,36237	35,27526	25,27526	6564,22554
				8	34	24	6528

Observar en el *caso 1*, los valores de x, y, z para obtener un volumen de 6.000 m3.

e. Según la Tabla 19, se puede tomar las siguientes dimensiones:

$x = 35{,}27526\ cm\ ;\ y\ = 25{,}27526\ cm;\ \ z\ =\ 7{,}36237\ cm$

Pero en la práctica, y siendo las longitudes en centímetros, no se puede cortar cuadros de 7,36237 cm.

Para una respuesta aproximada y factible, según el problema, se puede hacer cortes cuadrados de $7{,}3\ cm$ o $7{,}4\ cm$.

4. Una institución educativa abre un curso para un máximo de 50 personas, con un valor por persona de $200.000, siempre y cuando se escriban hasta 30 personas. Pero, si se inscriben más de 30, entonces por cada persona adicional, el valor por persona disminuye en $5.000.

a. Obtener el ingreso que recibe la institución, en función del número de personas que toman el curso.

b. Calcular el mayor el número de personas que deben tomar el curso, para que la institución obtenga mayor ingreso.

c. Si se inscriben 50 persona, ¿cuál es el ingreso para la institución?

d. Teóricamente, ¿cuál es el número de personas que debería tomar el curso para que el valor por persona se de \$0?

Solución:

Si x es el número de persona que toman el curso y u el ingreso para la institución, entonces:

Para $x \leq 30$: $u = 200.000x = f(x)$.

Ahora, para $x > 30$ y para comprender la estructuración del problema, se plantea los siguientes casos particulares:

Si $x = 31$, es decir, si hay una persona adicional, entonces el valor para cada persona es:

$200.000 - 5{,}000 = 195.000$.

El ingreso es: $u = (200.000 - 5.000) \times 31 = 195 \times 31 = f(31)$.

Si $x = 32$, o sea, si hay dos personas adicionales, entonces el valor para cada persona es:

$200.000 - 2 \times 5.000 = 190.000$.

El ingreso es: $u = (200.000 - 2 \times 5.000) \times 32 = 190 \times 32 = f(32)$.

Si $x = 33$, o sea, si hay tres personas adicionales, entonces el valor para cada persona es:

$200.000 - 3 \times 5.000 = 185.000$.

El ingreso es: $u = (200.000 - 3 \times 5.000) \times 33 = 185 \times 33 = f(33)$.

Si $x = 34$, hay cuatro personas adicionales, entonces el valor para cada persona es:

$200.000 - 4 \times 5.000 = 180.000$.

El ingreso es: $u = (200.000 - 4 \times 5.000) \times 34 = 180 \times 34 = f(34)$.

En general, si n es el número de persona adicionales a 30, es decir $x = 30 + n$, entonces, $n = x - 30$.

El valor para cada persona es: $200.000 - n \times 5.000 = 200.000 - (x - 30) \times 5.000$.

El ingreso para $x > 30$, es:

$\boldsymbol{u} = (200.000 - (x - 30) \times 5.000)x = f(x)$;

$\boldsymbol{u} = (200.000 - 5.000x + 150.000)x = f(x);$

$\boldsymbol{u} = (350.000 - 5.000x)x = f(x);$

$\boldsymbol{u} = 350.000\text{x} - 5.000\, x^2 = f(x).$

Respuestas:

a. El ingreso que recibe la institución, en función del número de persona que toman el curso, es:

$\boldsymbol{u} = 200.000x = f(x)\ para\ x \leq 30$ y $\boldsymbol{u} = 350.000\text{x} - 5.000\, x^2 = f(x)\, para\, x > 30.$

Para el primer caso, la función f es lineal, su gráfica es una línea recta con pendiente 200.000.

Para el segundo caso, la función f es cuadrática y su gráfica es una parábola con vértice $V(35, 6.125.000)$ y como la parábola se extiende hacia abajo, $6.125.000$ es el máximo valor de $\boldsymbol{u}$, el cual se obtiene para $x = 35$.

b. Con las condiciones que establece la institución, para que ésta obtenga un mayor ingreso, el número de personas que deben tomar el curso es de 35 y el máximo ingreso es de $\$6.125.000$.

Si en número de persona que toman el curso es de 50, que es el máximo establecido, el ingreso es:

$\boldsymbol{u} = 350.000 \times 50 - 5.000 \times (50)^2 = 1.7500.000 - 5.000 \times 2.500 = 5.000.000$

c. Si el curso lo toman 50 personas, entonces el ingreso para la institución es de $\$5.000.000$

Obviamente este ingreso es menor que $6.125.000$, pero así resulta bajo las condiciones que se establece.

Si $u = 0$, entonces,

$$0 = 350.000\text{x} - 5.000\, x^2 = (350.000 - 5.000x)x \ \rightarrow\ x = 0 \ \text{o}\ 350.000 - 5.000x = 0.$$

Las soluciones de esta ecuación son: $x = 0$; $x = 70$.

d. Si no se inscriben al curso, es decir, $x = 0$, o si toman el curso 70 personas, entonces, el ingreso es $0.

4.5 RADIANES

Radio. Es cualquier segmento de recta con extremos en el centro de una circunferencia o de un círculo y cualquier punto de la misma. También es costumbre afirmar, que radio es la longitud de dicho segmento, es decir, a la distancia del centro de la circunferencia a cualquier punto de ella.

Diámetro. Es cualquier segmento de recta con extremos en una circunferencia y que contiene al centro de ella, es decir, "pasa" por el centro de la circunferencia.

De forma semejante al caso del radio, también se suele decir diámetro, a la longitud de éste segmento, la cual es la máxima distancia entre dos puntos de la circunferencia o bien de un círculo.

Si $\boldsymbol{D}$ es la longitud del diámetro y $\boldsymbol{r}$ la del radio, entonces $D = 2r$.

En la circunferencia y círculos siguientes, los segmentos: $AC, BC, CF, CE, HC, CM, GC, CK$ son radios; EF, HK, son diámetros (ver Gráfico 36). En consecuencia, se cumplen las siguientes relaciones:

$AC = BC = HC = GC = r.$

$EF = HK = 2\boldsymbol{r} = D.$

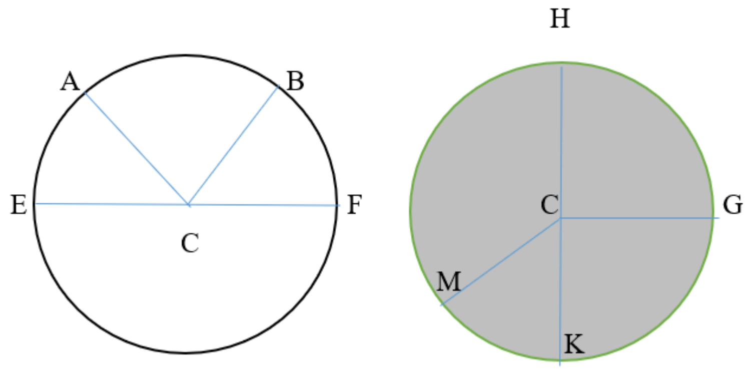


Gráfico 36. Representación de una circunferencia y del círculo correspondiente

Suponga que el radio r de la circunferencia y del círculo anteriores, miden 1 (una unidad) y que la longitud del arco MK es igual a r, entonces el arco MK mide *un radian* (un radio); o equivalentemente, el arco MK es un radian.

Radian. Es la longitud de un arco de circunferencia (o el arco mismo) igual al radio de la circunferencia de radio unitario $(r = 1)$. De modo que, *el radian es una unidad de medida de longitud,* que se utiliza para la medición de arcos de circunferencia de cualquier radio.

La longitud o perímetro de una circunferencia de radio r, es 2π radianes; esto es, 2π "veces" el radio r. De modo que, la longitud o el perímetro de una circunferencia de radio r es $2\pi r$; es decir, la longitud de la circunferencia de radio r se expresa en términos de r. En consecuencia, la longitud de la semicircunferencia de radio r, es $2\pi\frac{r}{2} = \pi r$, o sea π *radianes.*

Nota:

π es un número irracional, $\pi \cong 3{,}14159265358979323846264338327 95 \cong 3{,}1416$

En algunos casos, es suficiente tomar aproximaciones a π, como las siguientes: $\pi \cong 3{,}14159$; $\pi \cong 3{,}1416$; $\pi \cong 3{,}1415$.

Cuando se conoce la longitud del radio de una circunferencia, el radio se constituye en una unidad de medida de longitud; por lo cual, se puede obtener la longitud de la circunferencia en términos de esa unidad.

Ejemplos:

a. Determinar la longitud de una circunferencia de radio $r = 10$ metros, y la longitud de la cuarta parte de la circunferencia respectiva.

b. Determinar la longitud de una circunferencia de radio $r = 10$ pulgadas, y la longitud de la cuarta parte de la circunferencia correspondiente.

Solución

a. Sea L la longitud de la circunferencia.

$L = 2\pi r = 2\pi * 10\ m.$

$L \cong 2 * 3{,}1416 * 10\ m = 62{,}831853\ m.$

La longitud de la cuarta parte de la circunferencia es:

$$\frac{L}{4} = \frac{2\pi r}{4} \cong \frac{62{,}831853}{4}\ metros = 15{,}70796325\ metros.$$

R/ La longitud de la circunferencia es aproximadamente igual a $62{,}831853\ m$ y la longitud de un cuarto de circunferencia mide $15{,}70796325\ metros$.

b. Sea L la longitud de la circunferencia.

$L = 2\pi r = 2\pi * 10$.

$L \cong 2 * 3{,}1416 * 10\ pulgadas = 62{,}831853\ pulgadas.$

La longitud de la cuarta parte de la circunferencia es:

$$\frac{L}{4} = \frac{2\pi r}{4} \cong \frac{62{,}831853}{4}\ pulgadas = 15{,}70796325\ pulgadas.$$

R/ La longitud de la circunferencia es aproximadamente igual a $62{,}831853\ pulgadas$ y la longitud de un cuarto de circunferencia mide $15{,}70796325\ pulgadas$.

4.5.1 Grados sexagesimales

Cuando se divide una circunferencia en 360 partes (arcos) de igual longitud, a cada uno de los ángulos centrales que determinan estos arcos, se les asigna una unidad de medida angular, llamada **grado sexagesimal**.

A la vez, cada grado sexagesimal equivale a 60 minutos y cada minuto equivale a 60 segundos. Lo anterior, en forma abreviada, se expresa así: $1^0 = 60'\ y\ 1' = 60''$.

Según lo anterior, la longitud de cada uno de los arcos es $\frac{2\pi r}{360}$; es decir:

$$\frac{2\pi}{360}\ radianes = \frac{\pi}{180}\ radianes.$$

Como cada arco subtiende un ángulo central de un grado sexagesimal, entonces, a cada grado sexagesimal le corresponde o es equivalente a $\frac{\pi}{180}\ radianes$; esto es:

$$1^0 = \frac{\pi}{180}\ radianes\ \ y\ \ 1\ radián = \frac{180}{\pi}\ grados\ sexagesimales.$$

En consecuencia, se tienen las siguientes relaciones:

$$n^0 = \frac{\pi n}{180}\ radianes\ \ y\ \ m\ radianes = \frac{180m}{\pi}\ grados\ sexagesimales.$$

Ejemplos:

a. Convertir grados sexagesimales en radianes:

$$20^0 = \frac{20\pi}{180}\ radianes = \frac{\pi}{9}\ radianes.$$

$$225^0 = \frac{225\pi}{180}\ radianes = \frac{5\pi}{4}\ radianes.$$

$$270^0 = \frac{270\pi}{180}\ radianes = \frac{3\pi}{2}\ radianes.$$

$$300^0 = \frac{300\pi}{180}\ radianes = \frac{5\pi}{3}\ radianes.$$

b. Convertir radianes a grados sexagesimales:

$$\frac{5\pi}{12}\ radianes = 180 \times \frac{\frac{5\pi}{12}}{\pi} = 75\ grados\ sexagesimales = 75^0;\ en\ este\ caso\ m = \frac{5\pi}{12}.$$

$$\frac{7\pi}{4}\ radianes = 180 \times \frac{\frac{7\pi}{4}}{\pi} = 315\ grados\ sexagesimales = 315^0;\ en\ este\ caso\ m = \frac{7\pi}{4}.$$

$$3\ radianes = 180 \times \frac{3}{\pi} \cong 171{,}88748^0\ .$$

Nota:

a. $171{,}88748^0 \cong 171^0 53' 15''$.

b. Se suele suprimir la palabra radian y escribir la equivalencia con grados sexagesimales; así:

$180^0 = \pi$ bajo el entendido que un ángulo de 180^0 es subtendido por un arco de longitud $\pi radianes = \pi r$, donde r es la longitud del radio de la respectiva circunferencia (ver Gráfico 37).

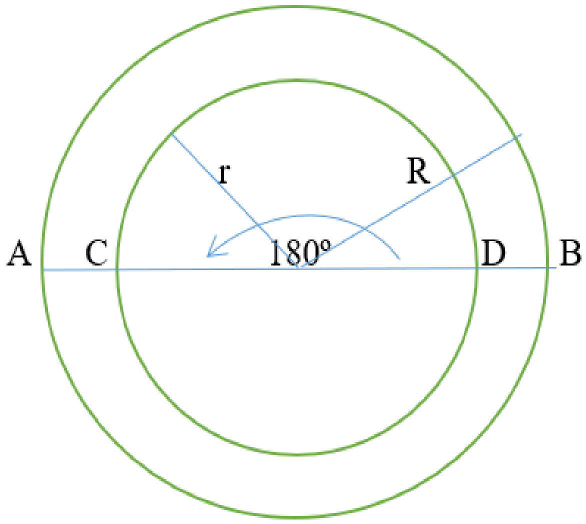


Gráfico 37. Circunferencia con el mismo centro y radios r y R

r radio de la circunferencia pequeña y R radios de la circunferencia grande.

Los arcos AB y CD subtienden un ángulo central de 180º; la longitud del arco AB es $2\pi R$ y la del arco CD, es $2\pi r$.

4.5.2 Ángulos fundamentales

Se denominan fundamentales porque son de uso muy frecuente en muchos problemas y aplicaciones. La Tabla 20 muestra tales ángulos y sus equivalencias entre grados sexagesimales y radianes.

Tabla 20. Relación entre ángulos sexagesimales y radianes

Ángulos	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
Radianes	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π

4.5.3 Longitud de arco

Cuando en una circunferencia de radio $\boldsymbol{r}$ se conoce el ángulo central en grados sexagesimales, entonces, para obtener la longitud del arco que lo subtiende, se toma la medida del ángulo con su equivalente en radianes; luego, si la longitud del radio está en una unidad de medida lineal, se multiplica la medida del ángulo por el valor dado.

Ejemplo:

Calcular la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 20^0 en una circunferencia, con los siguientes radios: a. 80 cm; b. 10 m.

Solución:

$$20^0 = \frac{20\pi}{180}\, radianes = \frac{\pi}{9}\, radianes.$$

a. La longitud del arco es: $L = \frac{\pi}{9}r = \frac{\pi}{9} * 80\ cm = 27{,}925268\ cm.$

b. La longitud del arco es: $L = \frac{\pi}{9}r = \frac{\pi}{9} * 10\ m = 3{,}490658\ m.$

R/ En cualquier circunferencia de radio $\boldsymbol{r}$, la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 20º, es: $L = \frac{\pi}{9}\ radianes = \frac{\pi}{9}r$.

4.6 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

4.6.1 Dominio y recorrido de las funciones trigonométricas

x es la medida de un ángulo en radianes o en grados sexagesimales.

Función Seno

$$S(x) = sen(\boldsymbol{x}) = y;\ \ D_s = \mathbb{R};\ \ R_s = [-1,1].$$

Función Coseno

$$C(\boldsymbol{x}) = cos(x) = y;\ D_c = \mathbb{R};\ \ R_c = [-1,1].$$

Función tangente

$$T(x) = \ Tan(x) = \frac{sen(x)}{\cos\,(x)} = y;\quad D_T = \{x \in \mathbb{R}/\cos(x) \neq 0\};\ \ R_T = \mathbb{R}.$$

Función cotangente

$$Ctan(x) = \frac{cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = y;\quad D_{Ctan} = \{x \in \mathbb{R}/sen(x) \neq 0\};\ \ R_{Ctan} = \mathbb{R}.$$

Función secante

$$Sec(x) = \frac{1}{\cos\,(x)} = y;\quad D_{Sec} = \{x \in \mathbb{R}/\cos(x) \neq 0\};\ \ R_{Sec} = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty).$$

Función cosecante

$$Csec(x) = \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = y;\quad D_{Csec} = \{x \in \mathbb{R}/sen(x) \neq 0\};\ \ R_{Csec} = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty).$$

Si bien, el dominio de seno y coseno es $\mathbb{R}$, generalmente se toma los intervalos $[0,2\pi]\ \ o\ \ [-\pi,\pi]$.

4.6.2 Funciones trigonométricas en un triángulo rectángulo

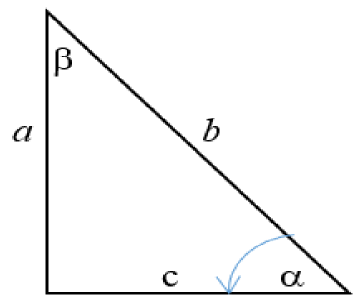


Gráfico 38. Triángulo rectángulo

En el Gráfico 38, los lados a y c, se denominan *catetos* y el lado b se denomina *hipotenusa*. Además, cateto a es adyacente al ángulo β, y el cateto c, es opuesto al ángulo β. Por su parte, el cateto c es adyacente al ángulo α y el cateto a es opuesto al ángulo α.

Entre los lados y ángulos de un triángulo se cumplen las siguientes relaciones:

$$sen(\alpha)=\frac{a}{b};\ \cos(\alpha)=\frac{c}{b};\ \tan(\alpha)=\frac{a}{c};\ \ ctan(\alpha)=\frac{c}{a};\ \sec(\alpha)=\frac{b}{c};\ csec(\alpha)=\frac{b}{a}$$

$$sen(\beta)=\frac{c}{b};\ \cos(\beta)=\frac{a}{b};\ \tan(\beta)=\frac{c}{a};\ \ ctan(\beta)=\frac{a}{c};\ \sec(\beta)=\frac{b}{a};\ csec(\beta)=\frac{b}{c}$$

Como se observa en el triángulo y en las expresiones anteriores, se tienen las siguientes relaciones:

1. $\alpha+\beta=90°$, esto es, α y β son medidas de ángulos complementarios; de lo cual, $\alpha=90°-\beta$.

2. $sen(\alpha)=\ cos(\beta);\ \ sen\ (90°-\beta)=\ cos(\beta)$.

3. $cos(\alpha)=\ sen(\beta);\ \ cos\ (90°-\ \beta)=sen(\beta)$.

4. $tan(\alpha)=ctan(\beta);\ \ tan(90°-\beta)=ctan(\beta)$.

5. $ctan(\alpha)=tan(\beta);\ \ ctan(90°-\beta)=tan(\beta)$.

6. $sec(\alpha)=csec(\beta);\ \ sec(90°-\beta)=csec(\beta)$.

7. $csec(\alpha)=sec(\beta);\ \ csec(90°-\beta)=sec(\beta)$.

En términos generales, en un triángulo rectángulo cualquiera, para un ángulo agudo de medida φ, las relaciones de las funciones circulares y los lados del triángulo, se expresan así:

$$sen(\varphi)=\frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa}.$$

$$cos(\varphi)=\frac{Cateto\ adyacente}{Hipotenusa}.$$

$$tan(\varphi) = \frac{Cateto\ opuesto}{Cateto\ adyacente}.$$

$$ctan(\varphi) = \frac{Cateto\ adyacente}{Cateto\ opuesto}.$$

$$sec(\varphi) = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ adyacente}.$$

$$csec(\varphi) = \frac{Hipotenusa}{Cateto\ opuesto}.$$

Nota:

Cateto opuesto se refiere al lado opuesto al ángulo φ; y cateto adyacente, corresponde al lado adyacente al ángulo φ.

4.6.3 Funciones trigonométricas en el plano cartesiano.

En el plano o Sistema Cartesiano XYO, se considera las siguientes circunferencias con centro en O y radio $r = 1$, denominados circunferencia unitaria o círculo unitario respectivamente (ver Gráfico 39).

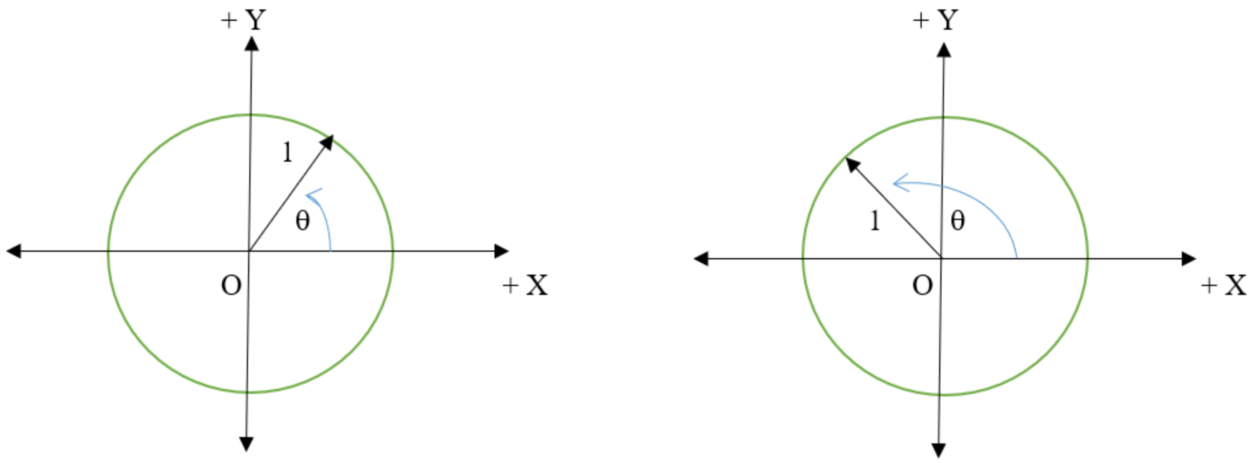


Gráfico 39. Circuito unitario

4.6.3.1 Identidades trigonométricas fundamentales.

$$sen^2(x) + cos^2(x) = 1.$$

Esta igualdad se cumple para todo número real x, por lo cual, se denomina *identidad* y constituye la identidad fundamental de las funciones trigonométricas.

Las siguientes identidades se derivan de la fundamental:

$$sec^2(x) = 1 + tan^2(x).$$

$$csec^2(x) = 1 + ctan^2(x).$$

Nota:

$$sen^2(x) = sen(x) \times sen(x) = (sen(x))^2.$$

4.6.3.2 Funciones trigonométricas de suma y diferencia de preimágenes

$$sen(x + y) = sen(x)cos(y) + cos(x)sen(y).$$

$$sen(2x) = 2sen(x)cos(x).$$

$$cos(x + y) = cos(x)cos(y) - sen(x)sen(y).$$

$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x).$$

$$sen(x - y) = sen(x)cos(y) - cos(x)sen(y).$$

$$cos(x - y) = cos(x)cos(y) + sen(x)sen(y).$$

$$tan(x + y) = \frac{tan(x) + \tan(y)}{1 - tan(x)\tan(y)}.$$

$$tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - tan^2(x)}.$$

Se puede obtener muchas identidades trigonométricas a partir de las anteriormente planteadas.

Ejemplo:

Comprobar las siguientes identidades:

a. $\cos(2x) = 1 - 2sen^2(x).$

b. $sen^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$

c. $\text{sen}(x) = \sqrt{\frac{1 - \cos(2x)}{2}}.$

d. $sen\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$.

e. $cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos(x)}{2}}$.

Solución:

a. $\cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x) = 1 - sen^2(x) - sen^2(x) = 1 - 2sen^2(x)$.

Por lo tanto, $\cos(2x) = 1 - 2sen^2(x)$.

b. De la expresión $\cos(2x) = 1 - 2sen^2(x)$ se tiene que:

$2sen^2(x) = 1 - \cos(2x)$ entonces: $sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$.

c. De la expresión $sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$ se tiene que:

$$sen(x) = \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}}.$$

d. En la identidad $sen(x) = \sqrt{\frac{1-\cos(2x)}{2}}$ reemplazando $x\ por\ \frac{x}{2} se\ tiene\ que$:

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\left(2*\frac{x}{2}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}.$$

Entonces: $sen\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}$.

e. En la identidad $sen^2(x) + cos^2(x) = 1$ reemplazando x por $\frac{x}{2}$ se tiene que:

$sen^2\left(\frac{x}{2}\right) + cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1$ entonces:

$$cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - sen^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - \left(\sqrt{\frac{1-\cos(x)}{2}}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{1-\cos(x)}{2} = \frac{2-1+\cos(x)}{2} = \frac{1+\cos(x)}{2}.$$

Entonces: $cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1+\cos\,(x)}{2}$.

De donde $cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\,(x)}{2}}$.

4.6.3.3 Valores de seno y coseno para ángulos fundamentales.

La Tabla 21, presenta las imágenes de las funciones seno y coseno para ángulos fundamentales medidos en el sistema sexagesimal (grados).

Tabla 21. Valores de seno y coseno para ángulos fundamentales medidos en grados.

$sen(0^0) = 0$	$sen(30^0) = \frac{1}{2}$	$sen(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$sen(60^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$sen(90^0) = 1$
$cos(0^0) = 1$	$cos(30^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$cos(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$cos(60^0) = \frac{1}{2}$	$cos(90^0) = 0$
$sen(120^0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$sen(135^0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$sen(150^0) = \frac{1}{2}$	$sen(180^0) = 0$	$sen(360^0) = 0$
$cos(120^0) = -\frac{1}{2}$	$cos(135^0) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$cos(150^0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$cos(180^0) = -1$	$cos(360^0) = 1$

Considerando ángulos centrales medidos en radianes, se tienen las siguientes relaciones de imágenes para las funciones seno y coseno (ver Tabla 22).

Tabla 22. Valores de seno y coseno para ángulos fundamentales medidos en radianes

$sen(0) = 0$	$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$cos(0) = 1$	$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$sen(\pi) = 0$	$sen(2\pi) = 0$
$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$	$cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$cos(\pi) = -1$	$cos(2\pi) = 1$

Para obtener valores en notación fraccionaria de ángulos fundamentales para otras funciones trigonométricas, se aplica las relaciones planteadas anteriormente.

Ejemplo:

Calcular las siguientes imágenes:

$$a. \tan(30^0)\,;\;\; b. \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\;; c. ctan\,\left(\frac{\pi}{6}\right); d. ctan(30^0).$$

Solución:

a. $$\tan(30^0) = \frac{sen(30^0)}{\cos\,(30^0)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\boldsymbol{R}/\ \tan(30^0) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

b. $$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{sen(\frac{\pi}{4})}{\cos\,(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1\,.$$

$\boldsymbol{R}/\ \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

c. $\operatorname{ctan}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{cos(\frac{\pi}{6})}{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{6})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$\boldsymbol{R}/\ \operatorname{ctan}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$.

d. $\operatorname{ctan}(30^0) = \frac{cos(30^0)}{\operatorname{sen}(30^0)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

$\boldsymbol{R}/\ \operatorname{ctan}(30^0) = \sqrt{3}$.

4.6.4 Teorema de los senos

Sea cualquier triángulo ABC con lados $a, b\ y\ c$, cuyos ángulos opuestos respectivamente a los laso a, b y c, son $\alpha, \beta\ y\ \varphi$ (ver Gráfico 40).

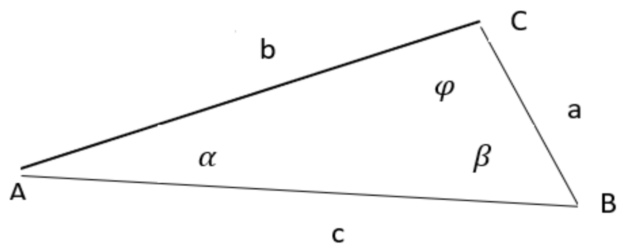


Gráfico 40. Teorema de los senos

En el Gráfico 40, se cumplen las siguientes relaciones:

$$\frac{sen\ \alpha}{sen\ \beta} = \frac{a}{b};\ \frac{sen\ \alpha}{sen\ \varphi} = \frac{a}{c};\ \frac{sen\ \beta}{sen\ \varphi} = \frac{b}{c}.$$

Se debe recordar que, si los ángulos están medidos en grados, entonces: $\alpha + \beta + \varphi = 180^0$ y si están medidos en radianes, entonces: $\alpha + \beta + \varphi = \pi$.

El teorema de los senos permite conocer las medidas de los lados de un triángulo, conocidos los valores de dos ángulos interiores y la medida de un lado; y también permite conocer las medidas de los ángulos interiores de un triángulo, conocidos las medidas de dos lados de un triángulo y el valor de un ángulo opuesto a uno de ellos.

Ejemplo:

Sea un triángulo con lados $a, b\ y\ c$ y sus ángulos opuestos $\alpha, \beta\ y\ \varphi$, respectivamente; además, supongamos que $\alpha = 45^0, \varphi = 53{,}13^0\ y\ c = 14\ cm$. Determinar el valor del ángulo β y la medida de los lados a y b.

Solución:

Se sabe que: $\dfrac{sen\ \alpha}{sen\ \varphi} = \dfrac{a}{c}$ entonces: $a = \dfrac{c * sen(\alpha)}{sen(\varphi)}$.

$$a = \frac{c * sen(\alpha)}{sen(\varphi)} = \frac{14 * sen(45^0)}{sen(53{,}13^0)} cm = \frac{14 * 0{,}7071}{0{,}7980} = \frac{9{,}8994}{0{,}7980} cm = 12{,}4052\ cm.$$

$$\alpha + \beta + \varphi = 180^0 \ \rightarrow\ \beta = 180^0 - \alpha - \varphi = 180^0 - 45^0 - 53{,}13^0 = 81{,}87^0\ .$$

Dado que $\dfrac{sen\ \alpha}{sen\ \beta} = \dfrac{a}{b}$ entonces: $\mathrm{b} = \dfrac{a * sen(\beta)}{sen(\alpha)}$.

$$\mathrm{b} = \frac{a * sen(\beta)}{sen(\alpha)} = \frac{12{,}4052 * sen(81{,}87^0)}{sen(45^0)} = \frac{12{,}4052 * 0{,}9899}{0{,}7071} = \frac{12{,}2799}{0{,}7071} = 17{,}3666\ cm.$$

R/ Las medidas de los lados del triángulo son: $a = 12{,}4052\ cm,\ b = 17{,}3666\ cm,\ c = 14\ cm$; y las medidas de los ángulos son: $\alpha = 45^0, \beta = 81{,}87^0\ y\ \varphi = 53{,}13^0$.

Nota:

Considerando un triángulo con las siguientes medidas:

$a = 12{,}4052\ cm,\ b = 17{,}3666\ cm,\ c = 14\ cm\ y\ \alpha = 45^0$; se obtiene $\varphi = 53{,}13010235^0$; y, de hecho, se obtiene que $\beta = 81{,}86989765^0 \cong 81{,}87^0$.

4.6.5 Funciones inversas de las funciones trigonométricas

Recordemos que si F es una función biyectiva de A hacia B; tal que $F(x) = y$, entonces, $F^{-1}(y) = x$; F^{-1} es una función biyectiva de B hacia A, y es la función inversa de F.

Por tanto, $F\left(F^{-1}(y)\right) = x;\ F^{-1}\left(F(x)\right) = y$.

$Cuando\ F\ es\ biyectiva\ se\ tiene\ que: F(x) = y \Leftrightarrow\ F^{-1}(y) = x.$

Para las funciones trigonométricas, se debe considerar como conjunto de partida un intervalo conveniente y como codominio el rango de la función para ese dominio; de este modo, las funciones quedan biyectivas.

En la Tabla 23, se presenta los dominios de biyección más usuales de las funciones trigonométricas y las respectivas funciones inversas

Tabla 23. Dominios de biyección de las funciones trigonométricas y sus inversas

Función	Dominio y rango	Función inversa	Dominio y recorrido
$sen(x) = y$	$D_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ $R_f = [-1,1]$	$sen^{-1}(y) = arc\ sen(y) = x$	$D_f = [-1,1]$ $R_f = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$cos(x) = y$	$D_f = [0, \pi]$ $R_f = [-1,1]$	$cos^{-1}(y) = arc\ cos(y) = x$	$D_f = [-1,1]$ $R_f = [0, \pi]$
$tan(x) = y$	$D_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $R_f = (-\infty, +\infty)$	$tan^{-1}(y) = arc\ tan(y) = x$	$D_f = (-\infty, +\infty)$ $R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$ctan(x) = y$	$D_f = (0, \pi)$ $R_f = (-\infty, +\infty)$	$ctan^{-1}(y) = arc\ ctan(y) = x$	$D_f = (-\infty, +\infty)$ $R_f = (0, \pi)$
$sec(x) = y$	$D_f = (0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ $R_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$sec^{-1}(y) = arc\ sec(y) = x$	$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ $R_f = (0, \pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$csec(x) = y$	$D_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ $R_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$	$csec^{-1}(y) = arc\ csec(y) = x$	$D_f = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ $R_f = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$

Ejemplos:

$$sen(0) = 0 \ \rightarrow sen^{-1}(0) = arc\ sen(0) = 0.$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \rightarrow sen^{-1}(1) = arc\ sen(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = arc\ sen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \rightarrow sen^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = arc\ sen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

$$cos(0) = 1 \rightarrow cos^{-1}(1) = arc\ cos(1) = 0.$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \rightarrow cos^{-1}(0) = arc\ cos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = arc\ cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow cos^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = arc\ cos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

$$tan(0) = 0 \rightarrow tan^{-1}(0) = arc\ tan(0) = 0.$$

$$tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \rightarrow tan^{-1}(1) = arc\ tan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \rightarrow tan^{-1}(-1) = arc\ tan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$tan(1{,}57) \cong 1.255{,}76 \rightarrow tan^{-1}(1.255{,}76) = arc\ tan(1.255{,}76) \cong 1{,}57.$$

$$tan(-1{,}57) \cong -1.255{,}76 \rightarrow tan^{-1}(-1.255{,}76) = arc\ tan(-1.255{,}76) \cong -1{,}57.$$

Nota:

$$sen^{-1}(y) \neq \frac{1}{sen(y)}.$$

Para evitar que se tome $sen^{-1}(y) = \frac{1}{sen(y)}$, es recomendable utilizar $arc\ sen(y)$ en lugar de $sen^{-1}(y)$.

Ejemplo:

Utilizando los dominios dados en la tabla anterior, determinar los valores de α en siguientes expresiones:

$$a.\ \mathrm{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2};\ b.\ \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2};\ c.\ \tan(\alpha) = 1;\ d.\ \tan(\alpha) = -1;\ \ e.\ \sec(\alpha) = 3;\ f.\ csec(20).$$

Solución:

a. $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \alpha = arc\ sen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
$R/\ \alpha = \frac{\pi}{4}$.

b. $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \alpha = arc\ cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$.
$R/\ \alpha = \frac{\pi}{6}$.

c. $\tan(\alpha) = 1\ \rightarrow \alpha = arc\ tan(1) = \frac{\pi}{4}$.
$R/\ \alpha = \frac{\pi}{4}$.

d. $\tan(\alpha) = -1\ \rightarrow \alpha = arc\ tan(-1) = -\frac{\pi}{4}$.
$R/\ \alpha = -\frac{\pi}{4}$

e. $\sec(\alpha) = 3\ \rightarrow \alpha = arc\ sec(3) \cong 70{,}5288$.
$R/\ \alpha \cong 70{,}5288$.

f. $\operatorname{csec}(\alpha) = 20\ \rightarrow \frac{1}{sen(\alpha)} = 20\ \rightarrow \alpha = arc\ sec\left(\frac{1}{20}\right) \cong 2{,}8660.$
$R/\ \alpha \cong 2{,}8660.$

4.7 APLICACIONES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS A LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

Entre las aplicaciones de las funciones trigonométricas se encuentra la resolución de triángulos, es decir, se utilizan para obtener las longitudes de los lados de un triángulo, las medidas de los ángulos interiores u otras relaciones entre sus elementos.

Ejemplos 1:

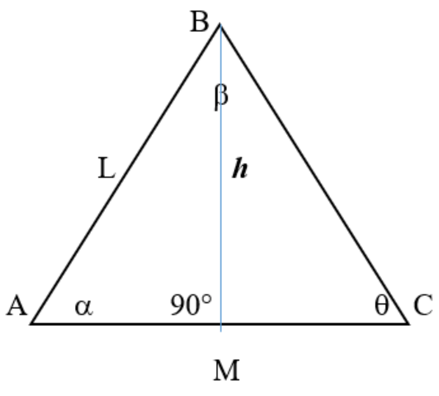


Gráfico 41. Triángulo equilátero

El triángulo ABC es equilátero (ver Gráfico 41), esto es,

$$AB = BC = AC = L.$$

A lados de igual medida, se oponen ángulo de igual medida; entonces: $\alpha = \beta = \theta$.

Dado que $\alpha + \beta + \theta = 180°$, entonces, $\alpha = \beta = \theta = 60^0$

Según lo anterior, el triángulo ABC también es equiángulo.

Determinar la altura $\boldsymbol{h}$ en términos de L.

Solución:

M es punto medio del segmento AC, entonces, $AM = \frac{L}{2} = MC$.

El segmento BM es perpendicular al segmento AC, entonces, el triángulo AMB es rectángulo; por lo cual:

$$sen(\alpha) = \frac{BM}{AB} \to sen(60^0) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{L} \to h = \frac{\sqrt{3}L}{2}.$$

$$\boldsymbol{R}/\ h = \frac{\sqrt{3}L}{2}.$$

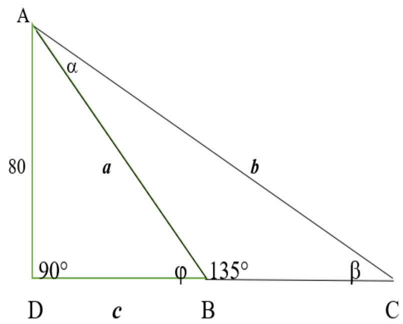
La anterior relación, también se la obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras, puesto que ABM es triángulo rectángulo.

Nota:

$$\text{Area del triángulo ABC} = \frac{Base * altura}{2} = \frac{AC * h}{2} = \frac{L * \frac{\sqrt{3}L}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}L^2}{4}.$$

Ejemplo 2:

Calcular las longitudes a, b, c, y las medidas positivas angulares α, β, φ, en el triángulo ABC (ver Gráfico 42).



Los segmentos AD y DB son auxiliares.

$AD = 80\ cm$ es altura del triángulo.

$BC = 70\ cm$.

$135^0 + \varphi = 180^0 \to \varphi = 45^0$.

Gráfico 42. Aplicación del Teorema de Pitágoras

En el triángulo rectángulo ADB se tiene que:

$$\tan(\varphi) = \tan(45^0) = 1 = \frac{80}{c} \to c = 80\ cm = DB.$$

$$sen(\varphi) = sen(45^0) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{80}{a} \to a = \frac{2 * 80}{\sqrt{2}} = \frac{2 * 80 * \sqrt{2}}{2} = 80\sqrt{2}.$$

También se puede obtener el valor $\boldsymbol{a}$, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo ABD porque se trata de triángulo rectángulo.

Ahora $DC = DB + BC = 80 + 70 = 150\ cm.$

Para determinar el valor de b, se aplica el Teorema de Pitágoras al triángulo ADC:

$$b = \sqrt{80^2 + 150^2} = \sqrt{6.400 + 22.500} = \sqrt{28.900} = 170\ cm.$$

Ahora se calcula el valor de β considerando que el triángulo ADC es rectángulo:

$$sen(\beta) = \frac{80}{b} = \frac{80}{170} = \frac{8}{17} \to \beta = arcsen\left(\frac{8}{17}\right) \cong 28{,}0725^0.$$

El valor de β también se puede determinar aplicando la función coseno al triángulo ADC:

$$cos(\beta) = \frac{150}{b} = \frac{150}{170} = \frac{15}{17} \to \beta = arccos\left(\frac{15}{17}\right) \cong 28{,}0725^0.$$

Ahora:

$$\alpha + \beta + 135^0 = 180^0 \ \to \alpha = 180^0 - 135^0 - \beta \cong 180^0 - 135^0 - 28{,}0725^0 = 16{,}9275^0 \cong 17^0.$$

Entonces: $\alpha \cong 17^0$.

$\boldsymbol{R}/\ a = 80\sqrt{2}\ cm; b = 17\ cm; c = 80\ cm;\ \varphi = 45^0;\ \beta \cong 28^0;\ \alpha \cong 17^0$.

4.8 EJERCICIOS

1. Identificar las relaciones que son funciones; justifique su respuesta.

   Nota. Para demostrar que $F: A \to B$, tal que $F(x) = y$, no es función, basta con tomar un elemento $a \in A$, para el cual $F(a) \notin B$. Este proceso se llama contra ejemplo.

   Expresión

   $F: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, $F(n) = \frac{3}{n}$

   $F: \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, F(n) = \frac{3}{n}$

   $G: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, G(n) = -\frac{3}{n+1}$

   $G: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}, G(n) = -\frac{3}{n+1}$

$H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}, H(n) = -\frac{3}{n+1}$

$H: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ tal que para todo $n \in \mathbb{Z}, H(n) = -\frac{3}{n+1}$

$T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para $n \in \mathbb{N},\ T(n) = 8n + 10$

$T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que para $n \in \mathbb{N}, T(n) = 10n - 8$

$S: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, tal que para $n \in \mathbb{Z}, S(n) = 8n + 10$

$S: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, tal que para $n \in \mathbb{N}, S(n) = 10n - 18$

α definida sobre $\mathbb{R}$ así: $\alpha(\mathrm{x}) = \frac{x}{x+20}$

β definida sobre $\mathbb{R}$ así: $\beta(\mathrm{x}) = \frac{x}{x^2+20}$

γ definida sobre $\mathbb{R}$ así: $\gamma(\mathrm{x}) = \frac{5x}{x^{2}-20}$

$\omega(\mathrm{x}) = \frac{x}{x+20}$ definida de $R - \{-20\}$ hacia $\mathbb{R}$

δ: $\mathbb{R} - \{-\sqrt{20}, \sqrt{20}\} \rightarrow \mathbb{R}$, así: $\delta(\mathrm{x}) = \frac{5x}{x^{2}-20}$

$\lambda(\mathrm{x}) = \frac{12}{27+x^{3}}$ definida sobre $\mathbb{R}$

φ definida sobre $\mathbb{R}$ por: $\varphi(u) = \sqrt{2-u}$

$\Omega(\mathrm{u}) = \sqrt{2-u}$; definida de $(-\infty, 2]$ hacia $\mathbb{R}$

2. Determinar el dominio y el rango de las siguientes funciones reales; excepto para las funciones α, β, γ y ∂, para las cuales solo debe calcular el dominio.

Funciones	Funciones
$F(x) = \dfrac{8}{x+9}$	$G(x) = \dfrac{-10}{x-9}$
$H(x) = \dfrac{x}{3x+15}$	$\alpha(\mathrm{x}) = \dfrac{x+4}{x^2-9}$

$\beta(\mathrm{x}) = \dfrac{x + 7}{x^2 + 10}$

$\gamma(\mathrm{x}) = \dfrac{x + 7}{x^2 - 10}$

$F(\mathrm{u}) = \sqrt{u + 12}$

$G(\mathrm{u}) = \sqrt{u - 10}$

$H(\mathrm{u}) = \sqrt{3u + 15}$

$\mathrm{T}(u) = \sqrt{7u - 3}$

$\beta(\mathrm{u}) = \sqrt{u^2 - 16}$

$\mathrm{S}(u) = \sqrt{u^2 + 20}$

$\partial(v) = \dfrac{\sqrt{v^2 - 16}}{v + 5}$

$F(t) = t^2 - t - 30$

$G(t) = 8t^2 + 10t + 5$

$W(t) = 3t^3 + 10t$

3. Obtener la ecuación pendiente-corte (es de la forma $y = mx + n$) de cada una de las rectas descritas en seguida.

   Condiciones

   a. Pasa por los puntos $A(-3,4)$ y $B(1,-2)$.

   b. Pasa por el punto $C(3,5)$ y tiene pendiente 2.

   c. Contiene a los puntos $D(4,5)$ y $E(0,0)$.

   d. Pasa por el punto $C(3,5)$ y tiene pendiente -1.

4. Obtener los valores reales x para los cuales $F(x) = 0$.

   Funciones

   $F(x) = x + 12$

   Funciones

   $F(x) = x - 15$

$F(x) = 7x + 10$ $\qquad$ $F(x) = 8x - 16$

$F(x) = x^2 + 20$ $\qquad$ $F(x) = 3x^2 - 6x - 45$

$F(x) = x^2 - x - 30$ $\qquad$ $F(x) = x^2 - 16$

$F(x) = x^2 - 10$ $\qquad$ $F(x) = x^2 - 11x + 18$

5. Resolver las siguientes ecuaciones. (ln representa logaritmo natural)

$5^x = 125$ $\qquad$ $2^x = 1.025$ $\qquad$ $5^x + 8 = 133$

$2^x - 1.025 = 0$ $\qquad$ $10(2^x) = 15$ $\qquad$ $3(2^x) - 92 = 100$

$2(3^x) - 92 = 70$ $\qquad$ $3(2^x) + 92 = 110$ $\qquad$ $3^{2x} = 27$

$3^{2x} - 2(3^x) + 1 = 0$ $\qquad$ $3^{2x} - 4(3^x) + 4 = 0$ $\qquad$ $Log_a(x) = b$

$Log_5(x) = 3$ $\qquad$ $Log_2(x) = 10$ $\qquad$ $Log_2(x) - 9 = 0$

$Log_2(x) = 10{,}96578$

6. Obtener el equivalente en radianes de: $15^0;\ 25^0;\ 40^0;\ 75^0;\ 100^0;\ 140^0;\ 210^0;\ 315^0$.

7. Obtener el equivalente en grados sexagesimales de los siguientes valores dados en radianes: $\frac{\pi}{12} rad$; $\frac{\pi}{20}\ rad$; $\frac{5\pi}{12}\ rad$; $\frac{\pi}{12}\ rad$; $3{,}14\ rad$; $3{,}1415\ rad$; $0{,}4\ rad$; $3\ rad$.

8. Obtener la longitud del arco que subtiende un ángulo central de 60^0 en una circunferencia de 30 $pulgadas$ de radio.

9. Obtener la longitud en cm. de un arco de longitud $0{,}25$ $radianes$ de una circunferencia de radio 80 cm.

10. Obtener la longitud de una circunferencia de radio: a) $50\ cm$; b) $2\ m$; c) $20\ pulgadas$; d) $2{,}5\ km$.

11. Una rueda de $0{,}5\ m$ de diámetro gira 50 vueltas para recorrer un tramo de A hasta B. ¿Cuál es la longitud del tramo AB?

12. Las llantas de un carro tienen un diámetro de $0{,}6\ m$. ¿Cuántas vueltas deben girar las llantas para recorrer un tramo de $100\ m$.?

13. Calcular las longitudes $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, la altura $\boldsymbol{h}$ y las medidas positivas angulares α, β, φ, en cada triángulo que sigue (ver Gráfico 43).

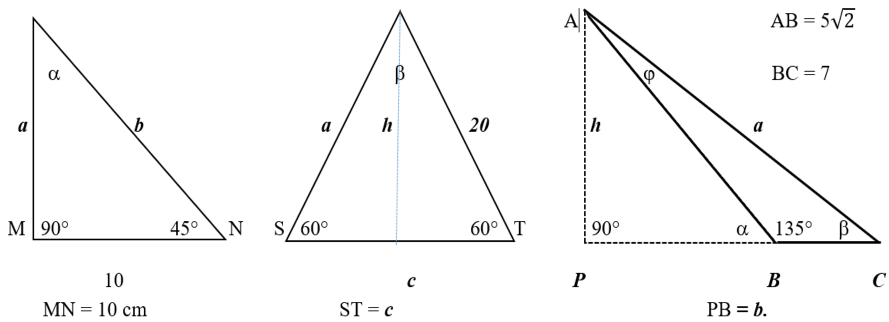


Gráfico 43. Triángulos del problema 13

Los segmentos de recta AP y PB son líneas auxiliares, necesarias para deducir resultados.

14. El triángulo ABC que sigue es equilátero, inscrito en una circunferencia de radio 80 cm. Obtener las longitudes de sus lados y de los arcos AB, BC y AC (ver Gráfico 44).

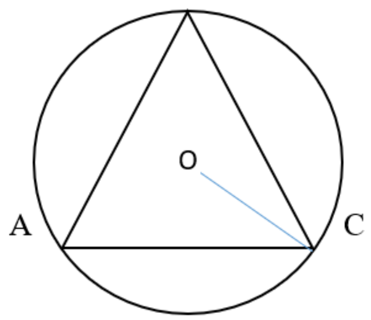


Gráfico 44. Triángulo equilátero inscrito en una circunferencia

Sugerencia:

Es conveniente y necesario, trazar líneas auxiliares para obtener triángulos y ángulos con el fin de poder aplicar funciones trigonométricas, relaciones entre ellas y relaciones entre triángulos. Por ejemplo, trazar segmentos de recta desde el centro de la circunferencia a los puntos A, B, C; trazar la altura desde el punto B.

15. El triángulo ABC es isósceles, inscrito en una circunferencia de radio 50 cm. y $AB = BC$; el segmento AC es un diámetro. Calcular las longitudes de los lados, las medidas de lo ángulo interiores y la longitud de los arcos AB, BC y AC. El segmento BO, donde O es el centro de la circunferencia, es perpendicular al diámetro AC (ver Gráfico 45).

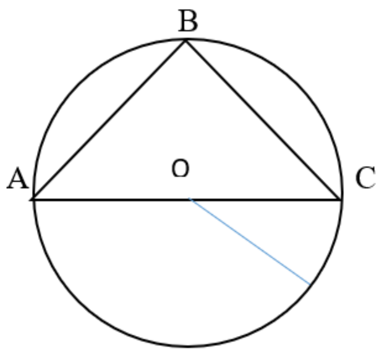


Gráfico 45. Triángulo isósceles inscrito en una circunferencia

16. MNR es un triángulo inscrito en una circunferencia de diámetro 80 cm, $MN = NR$, $\alpha = 120^0$. Hallar las longitudes de sus lados, la altura, los arcos MN, NR, MR y las medidas de los otros dos ángulos (ver Gráfico 46).

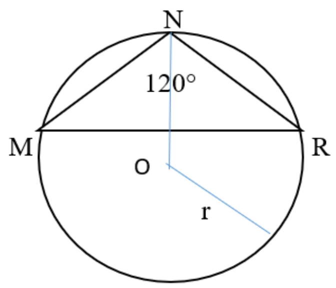


Gráfico 46. Representación gráfica del problema 16

Sugerencia:

Trazar segmentos de recta desde el centro de la circunferencia a los puntos M, N; deducir o establecer la medida de los ángulos en los vértices M y R. El segmento NC es perpendicular al lado MR, donde C es el centro de la circunferencia. Determinar las medidas de ángulos que se obtienen de los trazos.

17. P, Q, R son puntos de una circunferencia de radio 6,5 m, $PQ = 5\ m$; el segmento PR es un diámetro. Calcular QR, PR, las medidas de los ángulos interiores del triángulo PQR y las longitudes de los arcos PQ, QR, PR (ver Gráfico 47).

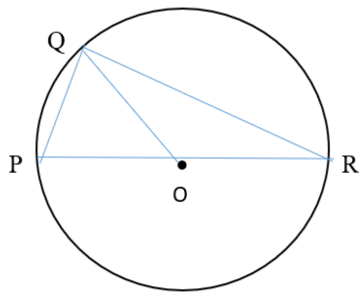


Gráfico 47. Representación gráfica del problema 17

18. A una altura de 1,5 m del piso, el ángulo de elevación desde la horizontal al extremo de una torre es de 20°. Aproximándose 75 m en línea recta hacia la torre, el ángulo de elevación mide 40° desde la horizontal hasta la parte más alta de la torre. Calcular la altura de la torre (ver Gráfico 48).

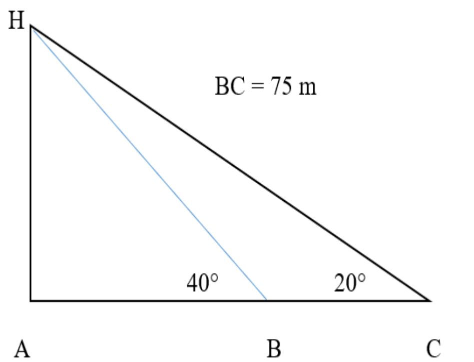


Gráfico 48. Representación gráfica del problema 18

19. Dos ruedas de 20 y 60 cm de radio, están conectadas por una banda (ver Gráfico 49). Si la rueda pequeña gira 90 vueltas, ¿cuántas vueltas gira la ruede grande?

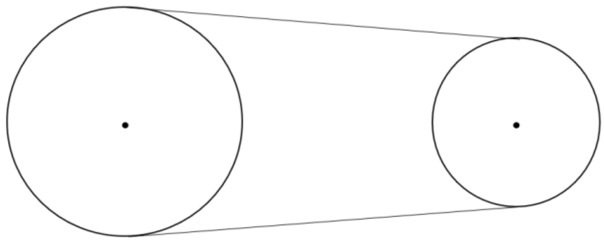


Gráfico 49. Representación gráfica del problema 19

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Fleming, W. & Varberg, D. (2003). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Prentice - Hall.

Frank, A. (1980). Fundamentos de Matemáticas Superiores. México: McGraw-Hill.

Portilla, H.J. & Caicedo, S.J. (2019). Introducción a los Fundamentos de Matemáticas Generales. San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño.

Raymond, B. et al. (1999). Precálculo. México: Mc Graw Hill.

Smith, S. et al. (1998). Algebra: Trigonometría y Geometría. México: Addison Wesley Longman.

Smith, S. et. al (2002). Álgebra, Trigonometría y Geometría Analítica. México: Addison Wesley Longman.

Zill, D. & Dewar, J. (2001). Álgebra Trigonometría. México: Mc-Graw-Hill.

LOS AUTORES

Segundo Javier Caicedo Zambrano.

Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima; Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga; Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana; Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño; Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño; Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Profesor de Tiempo Completo en la categoría Asociado, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño; jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co.

Héctor Jairo Portilla Obando.

Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana; Licenciado en Educación especialidad Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Profesor de Tiempo Completo en la categoría Asociado, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño; jairopor@gmail.com.

Editorial
Universidad de Nariño

El mérito principal de esta publicación y del trabajo realizado, radica en la selección de las temáticas, de los ejemplos y el lenguaje sencillo que, sin restarle rigor a los conceptos, se presentan de forma clara y precisa, con la profundidad que corresponde, de modo que los puede entender cualquier estudiante que empieza sus estudios universitarios y quienes deseen recordar los principios del cálculo. Vale decir que la experiencia de más de 35 años de docencia en el área de matemáticas de sus autores, ha posibilitado la elaboración de este libro que, sin duda alguna, puede ser adoptado como libro de texto en cualquier programa profesional que tenga en su formación los fundamentos de matemáticas, particularmente, en los programas de las disciplinas de ciencias económicas y administrativas, de ciencias exactas y naturales y de ingeniería, de la Universidad de Nariño, Institución donde laboran sus autores, quienes se complacen de poner a su disposición esta importante obra y esperan contar con su retroalimentación. Confiamos que este libro sea de utilidad, no para ser reproducido en forma exacta en el aula de clases, sino para ser adaptado a su propia realidad y experiencia; contiene todas las temáticas de la asignatura de Matemáticas Generales que se ofrecen en la Universidad de Nariño.

Esta obra es un producto derivado del libro Introducción a los fundamentos de matemáticas generales (Portilla y Caicedo, 2019), producido por los mismos autores; obviamente, ha sido revisado, mejorado y ampliado y contiene nuevos ejercicios de aplicación. En este libro se desarrolló el capítulo de funciones trigonométricas, de modo que se pueda adoptar como un libro de texto, con lo cual, no sólo orienta a los profesores de fundamentos de matemáticas, sino, principalmente, ayuda a los estudiantes a mejorar su conocimiento, la comprensión y aplicación de los conceptos.

El libro está organizado en cuatro capítulos. El primero, Elementos de lógica matemática y de teoría de conjuntos, aborda temáticas relacionadas con proposiciones y aplicaciones, elementos de la teoría de conjuntos y propiedades, que inducen al estudiante al rigor de la matemática y de las demostraciones, finalizando con una sección de ejercicios. El segundo capítulo, Conjuntos numéricos, trata temas relacionados con los conjuntos de los números naturales, los números enteros, racionales y reales, propiedades y aplicaciones, equivalencias y conversiones de unidades de medida, entre otros aspectos. El capítulo tercero, Introducción al álgebra, aborda el estudio de polinomios, productos y cocientes notables, factorización, racionalización, solución de ecuaciones e inecuaciones, intervalos reales, problemas resueltos y propuestos. Finalmente, en el cuarto capítulo, Funciones, se estudia las funciones reales, algunas funciones destacadas, aplicación de las funciones y ecuaciones, relación entre grados y radianes, funciones trigonométricas directas e inversas y finaliza con la aplicación de las funciones trigonométricas a la resolución de triángulos.

ISBN: 978-958-5123-22-9 digital
9 789585 123229

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Universidad de Nariño
ACREDITADA DE ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 10567 - MAYO 23 DE 2017

Editorial
Universidad de Nariño