EL POTENCIAL ESCALAR EN $\mathbf{SU(3)}_C\otimes\mathbf{SU(3)}_L\otimes\mathbf{U(1)}_X$ COMO EXTENSIÓN DEL MODELO ESTÁNDAR

Trabajo que Presenta
el estudiante

YITHSBEY GIRALDO ÚSUGA

Como Requisito para Optar
al Título de Magister en Física.
Dirigido por el Doctor William A. Ponce G.

UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Instituto de Física
Abril 2002
Medellín, Colombia

A mis amigos del *combo*:

James (*oidnI*), Jorge (*ociM*, *apmorT...*), Miller (*náclúT*) y Over (*acaV*).

Agradecimientos

Mis más sinceros agradecimientos al Doctor William Ponce, por todo el conocimiento aportado en mi formación como físico, y todas las sugerencias, comentarios y correcciones que hizo a este trabajo de grado. Agradezco también al estudiante de doctorado Luis Alberto Sánchez por su ayuda imprescindible en la elaboración y corrección de este trabajo.

Agradezco a la Universidad de Antioquia, BID, y a Colciencias por el soporte financiero brindado a este trabajo.

Contenido

Introducción

El objetivo de este trabajo es el estudio del grupo gauge local SU$(3)_c\otimes$ SU$(3)_L\otimes$U$(1)_X$. Un análisis detallado muestra que este grupo arroja varios modelos libres de anomalías, llamados en la literatura modelos 331. Trataremos en el presente estudio sólo modelos cuyo contenido fermiónico no contiene cargas eléctricas exóticas, los cuales tienen asociado, como veremos, un sector bosónico único (bosones gauge y escalares de Higgs) que estudiaremos en detalle. Para llevar a feliz término estos objetivos hemos dividido este trabajo en tres capítulos:

El capítulo 1 estudia el modelo más simple, conocido como el Modelo Estándar (ME) asociado al grupo SU$(3)_c\otimes$ SU$(2)_L\otimes$U$(1)_X$. Trataremos los tópicos más sobresalientes del ME: la construcción del contenido fermiónico con los números cuánticos asociados, la definición de la derivada covariante, etc. Veremos específicamente la manera en que se implementa el rompimiento espontáneo de la simetría gauge para que los bosones y fermiones presentes adquieran masa, también obtendremos el ángulo de Cabbibo y la matriz de Cabbibo-Kobayashi-Maskawa (CKM), entre otras cosas. Este capítulo trata los diferentes temas de una manera muy concisa y ordenada, lo que permite que sirva de *guía* o *texto ejemplo* para el dominio de teorías gauge más complejas.

El capítulo 2 estudiará el modelo SU$(3)_c\otimes$SU$(3)_L\otimes$U$(1)_Y$. El objetivo es encontrar todos los arreglos fermiónicos libres de anomalías, principalmente aquellos modelos con un contenido fermiónico ausente de cargas eléctricas exóticas. Vamos a ver que los resultados que se van a obtener son interesantes y nuevos en la literatura, para ser tenidos en cuenta en estudios posteriores.

El capítulo 3 estudia en detalle el sector escalar asociado con los modelos 331 sin cargas eléctricas exóticas en su contenido fermiónico. Construiremos el potencial escalar más general y romperemos la simetría para obtener los Higgses masivos y los bosones de Goldstone. También hallaremos las masas de los bosones gauge y sus acoples con los Higgses. Veremos que el potencial escalar con que trabajamos es mucho más simple que el dado en la literatura para este tipo de modelos, y es consistente.

Presentaremos al final un apéndice en donde mostraremos cómo los términos, de un modelo específico, adquieren masas con los Higgses usados en el rompimiento de la simetría.

Capítulo 1

El Modelo Estándar

1.1. El Contenido Fermiónico

Bajo el grupo gauge local $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, el modelo más simple sin anomalías, conocido como el Modelo Estándar (ME)[1], contiene tres familias, de las cuales la primera familia está conformada por dos leptones (ν_e , e) y dos quarks (u, d), arreglados de la siguiente manera:

Sector Leptónico

$L_e = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	e_R
$(1, 2, -1)$	$(1, 1, -2)$

Sector de quarks

$L_u = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	u_R	d_R
$(3, 2, 1/3)$	$(3, 1, 4/3)$	$(3, 1, -2/3)$

los números entre paréntesis (denominados *números cuánticos*), indican cómo transforman los campos bajo el grupo gauge local $SU(3)_c$ (grupo de interacción fuerte, o del color), $SU(2)_L$ (grupo isospín débil) y $U(1)_Y$(grupo de hipercarga débil) respectivamente. Los campos están proyectados en dobletes izquierdos y singletes derechos lo cual tiene implicaciones al desarrollar el Lagrangiano[1]. El valor de la hipercarga Y es tal que se satisface la relación

$$Q = T_{3L} + \frac{Y}{2} \, , \tag{1.1}$$

donde la proyección de isospín débil es

$$T_{3L} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \tag{1.2}$$

y Q es el operador de carga de las partículas en los multipletes. La relación (1.1) es conocida como la fórmula de Gell-Mann-Nishijima[2][2].

El sector fermiónico puede ser ampliado para incluir más familias. Más adelante incluiremos las restantes dos familias.

[1]No se ha incluido el singlete derecho del neutrino. En este modelo se considera el neutrino sin masa.

[2]La carga Q en la relación de Gell-Mann-Nishijima esta dada por la combinación lineal de los generadores diagonales que son la matriz de Pauli τ_3 de $SU(2)_L$ y la matriz identidad de $U(1)_Y$. Para el caso de los singletes se omite la matriz T_{3L}, de tal manera que la relación para determinar la carga se reduce a $Q = \frac{Y}{2}$.

1.2. La Derivada Covariante

La derivada covariante es la típica extensión de la derivada parcial ordinaria para hacer el Lagrangiano invariante bajo transformaciones gauge locales SU$(3)_c \otimes$SU$(2)_L \otimes$U$(1)_Y$. El reemplazo es el siguiente:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \quad &\rightarrow \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu Y + \frac{ig}{2} \tau.\mathbf{A}_\mu \,, \quad \text{para dobletes de SU}(2)_L && (1.3) \\ \partial_\mu \quad &\rightarrow \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'}{2} B_\mu Y \,, \quad \text{para singletes} && (1.4) \\ \partial_\mu \quad &\rightarrow \quad \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{ig_3}{2} \lambda^\alpha G_\mu^\alpha \,, \quad \text{para tripletes de color} && (1.5) \end{aligned}$$

donde g es la constante de acoplamiento para SU$(2)_L$, g' está asociado con U$(1)_Y$ y g_3 con SU$(3)_c$. Los τ_i , $i = 1, 2, 3$ son las matrices de Pauli y los λ^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, 8$ son las ocho matrices de Gell-Mann. Hemos introducido los bosones de gauge

$$A_\mu^1 \,, A_\mu^2 \,, A_\mu^3 \,, \text{ para SU}(2)_L \,; \quad B_\mu \,, \text{ para U}(1)_Y \,; \text{ y } \quad G_\mu^1 \,, G_\mu^2 \,, \ldots, G_\mu^8 \,, \text{ para SU}(3)_c \,. \qquad (1.6)$$

Como observamos, tenemos 12 bosones gauge en nuestro modelo. Los únicos bosones no masivos que de entrada tienen sentido físico son los gluones G_μ^α , asociados con la interacción fuerte. Los restantes bosones deben ser redefinidos para que puedan ser asociados a partículas físicas masivas, tal como se hará mas adelante. Estos bosones cumplen reglas de transformación bajo las simetrías gauge, no vamos a escribirlas pero se pueden encontrar en la literatura (véase Ref[3], págs. 55-57).

1.3. El Lagrangiano Cinético

La razón por la que se añade esta sección es para permitir escribir en definitiva todos los términos cinéticos asociados con los campos gauge, los cuales deben tenerse en cuenta para tener un modelo consistente. Aprovechando que ya hemos definido nuestros bosones, escribamos el Lagrangiano cinético:

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^l F^{l\mu\nu} - \frac{1}{4} f_{\mu\nu} f^{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu}^\alpha g^{\alpha\mu\nu}, \qquad (1.7)$$

donde los tensores de campo son

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^l &= \partial_\nu A_\mu^l - \partial_\mu A_\nu^l + g\epsilon_{jkl} A_\mu^j A_\nu^k, \\ f_{\mu\nu} &= \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu, && (1.8) \\ g_{\mu\nu}^\alpha &= \partial_\nu G_\mu^\alpha - \partial_\mu G_\nu^\alpha + g_3 f^{jk\alpha} G_\mu^j G_\nu^k, && (1.9) \end{aligned}$$

los ϵ_{jkl} y $f^{jk\alpha}$ son las constantes de estructura asociadas a los grupos SU$(2)_L$ y SU$(3)_c$ respectivamente[3] (págs. 57 y 197). Si observamos, la forma de estos tensores para cada conjunto de bosones es la misma. Este método se puede generalizar para otros modelos.

1.4. El Sector Escalar

A fin de romper la simetría, y que los fermiones y bosones adquieran masa, debemos incluir el siguiente doblete escalar complejo junto con sus números cuánticos:

$$\phi(1, 2, 1) \equiv \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \qquad (1.10)$$

el cual transforma como un doblete de SU$(2)_L$.

Vamos a ver que este doblete escalar es suficiente para asignarle masa a todos los fermiones, cuando acoplemos el sector escalar con los campos fermiónicos para construir el Lagrangiano de Yukawa. Por regla general, siempre se busca una mínima cantidad de escalares que arrojen modelos realistas.

1.4.1. El Potencial Escalar y el Rompimiento Espontáneo de la Simetría

Para introducir el concepto de rompimiento espontáneo de la simetría[4], consideremos primero el caso de un solo escalar real ϕ con un potencial de la forma

$$V(\phi^\dagger\phi) = \mu^2\phi^2 + \lambda\phi^4, \tag{1.11}$$

con las restricciones:

$$\mu^2 < 0 \quad \text{y} \quad \lambda > 0\,.$$

Una gráfica de este potencial es mostrada en la Fig. 1.1.

Figura 1.1: Curva del potencial escalar (1.11) cuando los parámetros cumplen las restricciones $\mu^2 < 0$ y $\lambda > 0$.

El mínimo del potencial aparece en los puntos $m = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{2\lambda}}$. Esto tiene graves consecuencias, pues $\phi = 0$ no corresponde a un mínimo del potencial como debiera serlo en una teoría consistente. Una solución a este inconveniente es redefinir el campo escalar ϕ a través de un corrimiento tal que

$$\phi' = \phi - m\,.$$

Ahora sí, $\phi' = 0$ es un mínimo del potencial. Esto es lo que se conoce como el rompimiento espontáneo de la simetría.

Volviendo al doblete cargado de Higgses del ME (1.10), el potencial es

$$V(\phi^\dagger\phi) = \mu^2(\phi^\dagger\phi) + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \tag{1.12}$$

y el rompimiento espontáneo de la simetría se implementa haciendo

$$\phi \to \phi' = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ (v+\eta^0)/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

donde $v = \sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}$ y el campo complejo η^0 es el nuevo escalar neutro. Este corrimiento nos permite asegurar que cuando los campos son iguales a cero, el potencial escalar toma su mínimo valor. Este doblete rompe la simetría gauge SU(2)$_L\otimes$U(1)$_Y$ del siguiente modo

$$\begin{array}{c} SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \\ \downarrow \langle\phi\rangle \\ SU(3)_C \otimes U(1)_Q\,, \end{array} \tag{1.14}$$

donde Q es la carga electromagnética. Vemos que este rompimiento se debe a la constante v que no sufre ninguna transformación gauge, pues está relacionada con el valor esperado en el vacío del campo escalar

$$<\phi>_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

1.4.2. El Mecanismo Higgs

A fin de implementar el mecanismo Higgs[5] manipulemos el doblete escalar (1.13) de tal manera que tome la siguiente forma:

$$\phi' = \exp\left(\frac{i\xi.\tau}{2v}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ (v+\eta)/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

donde η es el campo de Higgs real y los restantes campos están contenidos en la exponencial. Hagamos una transformación gauge $\mathrm{SU}(2)_L$ sobre la expresión (1.16)

$$\phi \to \phi' = \exp\left(\frac{-i\xi.\tau}{2v}\right)\phi = \left(\begin{array}{c} 0 \\ (v+\eta)/\sqrt{2} \end{array}\right).$$

De este modo el doblete escalar ha tomado una forma sencilla

$$\phi = \left(\begin{array}{c} 0 \\ (v+\eta)/\sqrt{2} \end{array}\right). \tag{1.17}$$

Las siguientes son las transformaciones adicionales necesarias sobre los bosones y los campos fermiónicos para dejar la densidad Lagrangiana invariante.

$$\begin{array}{rcl} \tau.A_\mu & \to & \tau.A'_\mu\,; \\ B_\mu & \to & B_\mu\,; \\ \lambda^\alpha G^\alpha_\mu & \to & \lambda^\alpha G^\alpha_\mu\,; \\ f_R & \to & f_R\,, \quad \text{para todo singlete } f_R \text{ del contenido fermiónico}\,; \\ \psi & \to & \psi\,, \quad \text{para todo triplete de color}\,; \\ L & \to & L' = \exp\left(\dfrac{-i\xi.\tau}{2v}\right)L\,, \quad \text{L: todo doblete del contenido fermiónico}\,. \end{array}$$

Como vemos, sólo los dobletes y bosones primados asociados a $\mathrm{SU}(2)_L$ sufren transformaciones.

1.5. Masa para los Bosones Gauge

En forma completa, el Lagrangiano del sector escalar esta dado por

$$\mathcal{L}_{\text{escalar}} = (\mathcal{D}^\mu\phi)^\dagger(\mathcal{D}_\mu\phi) - V(\phi^\dagger\phi), \tag{1.18}$$

donde $\mathcal{D}_\mu$ es la derivada covariante dada en la expresión (1.3). V y ϕ están definidos en las ecuaciones (1.12) y (1.17).

Escribamos por conveniencia los 3 bosones de gauge asociados con $\mathrm{SU}(2)_L$ en la siguiente forma

$$\frac{1}{2}\tau.A^\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc} A^\mu_3/\sqrt{2} & W^{+\mu} \\ W^{-\mu} & -A^\mu_3/\sqrt{2} \end{array}\right), \tag{1.19}$$

donde $W^\pm_\mu = \frac{A^1_\mu \mp iA^2_\mu}{\sqrt{2}}$. Manipulando el sector escalar (1.18), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{escalar}} &= \left[\left(\partial^\mu + \frac{ig'}{2}B^\mu Y_\phi + \frac{ig}{2}\tau.A^\mu\right)\phi\right]^2 - V(\phi^\dagger\phi) \\ &= \left\{\left[\partial^\mu + i\left(\begin{array}{cc} \frac{g}{2}A^\mu_3 + \frac{g'}{2}B^\mu & \frac{g}{\sqrt{2}}W^{+\mu} \\ \frac{g}{\sqrt{2}}W^{-\mu} & -\frac{g}{2}A^\mu_3 + \frac{g'}{2}B^\mu \end{array}\right)\right]\left(\begin{array}{c} 0 \\ (v+\eta)/\sqrt{2} \end{array}\right)\right\}^2 \\ &- \left[\mu^2\left((v+\eta)/\sqrt{2}\right)^2 + \lambda\left((v+\eta)/\sqrt{2}\right)^4\right] \\ \mathcal{L}_{\text{escalar}} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu\eta)(\partial_\mu\eta) + \mu^2\eta^2 + \frac{g^2v^2}{8}\left(|W^+_\mu|^2 + |W^-_\mu|^2\right) + \frac{v^2}{8}(g'B_\mu - gA^3_\mu)^2 + \ldots \end{aligned}$$

Al diagonalizar la matriz que se origina en el último término de la anterior expresión que mezcla los campos B_μ y A^3_μ, obtenemos los nuevos campos

$$Z_\mu = \frac{-g'B_\mu + gA^3_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}\,, \quad A_\mu = \frac{gB_\mu + g'A^3_\mu}{\sqrt{g^2+g'^2}}\,. \tag{1.20}$$

Finalmente

$$\mathcal{L}_{\text{escalar}} = \frac{1}{2}(\partial^\mu \eta)(\partial_\mu \eta) + \mu^2\eta^2 + \frac{g^2v^2}{8}\left(|W_\mu^+|^2 + |W_\mu^-|^2\right) + \frac{(g^2+g'^2)v^2}{8} Z^\mu Z_\mu + \dots \tag{1.21}$$

El bosón vectorial cargado W, y el bosón intermedio neutro Z tienen masas

$$M_{W^\pm} = gv/2\,, \quad M_Z = \sqrt{g^2+g'^2}\, v/2 \tag{1.22}$$

respectivamente. El campo de Higgs físico η ha adquirido una masa (masa^2) $-2\mu^2 = 2\lambda v^2 > 0$. El campo A_μ ausente en la expresión (1.21) no posee masa, más adelante veremos que corresponde al fotón.

1.6. Acoples con el Higgs

Después de un corto desarrollo sobre el Lagrangiano (1.18) encontramos los acoples del Higgs físico η y los bosones vectoriales cargados $W^\pm$, y el bosón neutro Z. Los resultados son los siguientes:

$$\begin{aligned} g(WW\eta) &= \frac{g^2\, v}{2}\,, & g(WW\eta\eta) &= \frac{g^2}{4}\,, \\ g(ZZ\eta) &= \frac{g^2\, v}{4\cos^2(\theta_W)}\,, & g(ZZ\eta\eta) &= \frac{g^2}{8\cos^2(\theta_W)}\,, \end{aligned} \tag{1.23}$$

donde θ_W es el ángulo de mezcla electrodébil que se define como

$$\tan(\theta_W) = \frac{g'}{g} \tag{1.24}$$

1.7. Masa para los Fermiones

El isodoblete escalar conjugado $\tilde{\phi}$ en la representación 2, se relaciona con el isodoblete escalar ϕ en la forma:

$$\tilde{\phi}(1,2,-1) = i\tau_2\phi^* = \begin{pmatrix} \bar{\phi}^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix} \tag{1.25}$$

donde $\phi^{+*} \equiv \phi^-$ y $\bar{\phi}^0 \equiv \phi^{0*}$. No es difícil demostrar que $\tilde{\phi}$ transforma de igual forma a como lo hace ϕ bajo simetrías gauge $\mathrm{SU}(2)_L$.

Para la construcción de los términos de Yukawa, que acoplan el sector escalar con el sector fermiónico, debemos ser cuidadosos con las diversas invarianzas de cada término. Es sencillo construir invariantes de Lorentz y de gauge $\mathrm{SU}(2)_L$. Para determinar si es invariante $\mathrm{U}(1)_Y$ debemos procurar que la suma de las hipercargas de cada término en el producto de cero, tal como se puede comprobar de las siguientes expresiones.

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = \mathcal{L}_{\text{Yukawa(leptones)}} + \mathcal{L}_{\text{Yukawa(quarks } u,\, d)} \tag{1.26}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa(leptones)}} &= -G_e\, \bar{e}_R\, (\phi^\dagger L_e) + \text{h.c} \\ &= -\frac{G_e\, v}{\sqrt{2}}\bar{e}e - \frac{G_e\, \eta}{\sqrt{2}}\bar{e}e\,, \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa(quarks } u,\, d)} &= -y_u\, \bar{u}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_u) - y_d\, \bar{d}_R(\phi^\dagger L_u) + \text{h.c} \\ &= -\frac{y_u\, v}{\sqrt{2}}\bar{u}u - \frac{y_d\, v}{\sqrt{2}}\bar{d}d + \dots \end{aligned} \tag{1.28}$$

Los coeficientes G_e, y_u y y_d son reales, puesto que la fase puede ser absorbida en los singletes derechos. De la ecuaciones (1.27) y (1.28) podemos concluir que la masa adquirida por el electrón y los quarks u y d son respectivamente

$$\frac{G_e\, v}{\sqrt{2}}\,, \quad \frac{y_u\, v}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad \frac{y_d\, v}{\sqrt{2}}\,. \tag{1.29}$$

1.8. Corrientes

Los acoples posibles con campos gauge de nuestro sector fermiónico provienen de:

$$\mathcal{L} = \bar{L}_e i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_e + \bar{e}_R i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + \bar{L}_u i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu L_u + \bar{u}_R i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R + \bar{d}_R i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R\,. \tag{1.30}$$

De nuestra experiencia adquirida al trabajar con el sector escalar, podemos desarrollar en forma similar el anterior Lagrangiano. Recordemos que para los singletes la derivada covariante esta dada por la expresión (1.4). Los resultados son los siguientes :

1.8.1. Corrientes Cargadas

Las interacciones entre el campo vectorial cargado con los fermiones son:

$$\mathcal{L}_{W-f} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\left[W_\mu^+\left(\bar{\nu}_{eL}\gamma^\mu e_L + \bar{u}_L\gamma^\mu d_L\right)\right] + \text{h.c.} \tag{1.31}$$

1.8.2. Corrientes Neutras

El cálculo es un poco más largo, debemos tomar en cuenta las relaciones (1.20) y escribir por comodidad las funciones trigonométricas asociadas al ángulo de mezcla electrodébil θ_W (definido en la sección (1.6)) como $\cos\theta_W = C_W$ y $\sin\theta_W = S_W$. De este modo obtenemos las corrientes neutras $J_\mu(EM)$ y $J_\mu(Z)$ asociadas con el Hamiltoniano que acopla los fermiones los bosones gauge neutros.

$$H^0 = eA^\mu J_\mu(EM) + \frac{g}{C_W} Z^\mu J_\mu(Z), \tag{1.32}$$

donde

$$\begin{aligned} J_\mu(EM) &= -\bar{e}\,\gamma_\mu\, e + \frac{2}{3}\,\bar{u}\,\gamma_\mu\, u - \frac{1}{3}\,\bar{d}\,\gamma_\mu\, d\,, \\ J_\mu(Z) &= J_{\mu,L}(Z) - S_W^2\, J_\mu(EM)\,; \end{aligned} \tag{1.33}$$

la carga eléctrica toma el valor $e = g\,g'/\sqrt{g^2 + g'^2} > 0$, $J_\mu(EM)$ es la corriente electromagnética, y la corriente de quiralidad izquierda esta dada por:

$$J_{\mu,L}(Z) = \frac{1}{2}\left(\bar{\nu}_{eL}\gamma_\mu\,\nu_{eL} - \bar{e}_L\gamma_\mu\, e_L + \bar{u}_L\gamma_\mu\, u_L - \bar{d}_L\gamma_\mu\, d_L\right). \tag{1.34}$$

Las anteriores corrientes dan cuenta de una amplia variedad de procesos que involucran interacciones electromagnéticas y débiles.

1.9. Más Familias Fermiónicas

Hasta ahora hemos trabajado con una sola familia fermiónica, sin embargo existen otras dos familias[3]:

Segunda familia fermiónica:

[3]Hay evidencias experimentales de que solo hay tres familias que contienen un fermión neutro liviano. Las evidencias llegan de dos fuentes distintas: una tiene que ver con la cantidad ^{4}He producido en la nucleosíntesis primordial acaecida en el Big-Bang, que limita el número de neutrinos livianos[6]. La otra evidencia se apoya en el ancho experimental de la masa del bosón neutro Z^0[7].

Sector Leptónico

$L_\mu = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	μ_R
$(1, 2, -1)$	$(1, 1, -2)$

Sector de quarks

$L_c = \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	c_R	s_R
$(3, 2, 1/3)$	$(3, 1, 4/3)$	$(3, 1, -2/3)$

Tercera familia fermiónica:

Sector Leptónico

$L_\tau = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	τ_R
$(1, 2, -1)$	$(1, 1, -2)$

Sector de quarks

$L_t = \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	t_R	b_R
$(3, 2, 1/3)$	$(3, 1, 4/3)$	$(3, 1, -2/3)$

Como los números cuánticos son los mismos, tan solo duplicamos los resultados de las secciones anteriores para abarcar las restantes familias. Pero al construir el Lagrangiano de Yukawa las posibilidades se incrementan.

1.9.1. Modelo con dos Familias Fermiónicas

Desarrollemos un modelo que abarque las dos primeras familias fermiónicas. Al construir el Lagrangiano de Yukawa para el sector de los quarks[4], la matriz de masa debe ser diagonalizada así que los campos deben ser redefinidos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{Y(quarks}\ u,\, c)} &= -y_{uu}\bar{u}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_u) - y_{uc}\bar{u}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_c) - y_{cu}\bar{c}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_u) - y_{cc}\bar{c}_R(\tilde{\phi}^\dagger L_c) + \text{h.c} \\
&= -\frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{c} \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} y_{uu} & y_{uc} \\ y_{cu} & y_{cc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L + \text{h.c} + \ldots \\
&= -\frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{u} & \bar{c} \end{pmatrix}_R U_R^{-1} U_R \begin{pmatrix} y_{uu} & y_{uc} \\ y_{cu} & y_{cc} \end{pmatrix} U_L^{-1} U_L \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L + \ldots
\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\mathrm{Y(quarks}\ d,\, s)} &= -y_{dd}\bar{d}_R(\phi^\dagger L_u) - y_{ds}\bar{d}_R(\phi^\dagger L_c) - y_{sd}\bar{s}_R(\phi^\dagger L_u) - y_{ss}\bar{s}_R(\phi^\dagger L_c) + \text{h.c.} \\
&= -\frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \bar{d} & \bar{s} \end{pmatrix}_R \begin{pmatrix} y_{dd} & y_{ds} \\ y_{sd} & y_{ss} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L + \text{h.c} + \ldots,
\end{aligned} \tag{1.36}$$

donde la fase de cada una de las constantes y's puede ser absorbida por los campos de quiralidad derecha en los Lagrangianos anteriores.

Para diagonalizar la expresión (1.35) es necesario insertar las matrices unitarias U_R y U_L, tal que

$$U_R \left[-\frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} y_{uu} & y_{uc} \\ y_{cu} & y_{cc} \end{pmatrix} \right] U_L^{-1} = \begin{pmatrix} m_\mu & 0 \\ 0 & m_c \end{pmatrix}, \tag{1.37}$$

con

$$U_L = \begin{pmatrix} \cos\theta_u & \sin\theta_u \\ -\sin\theta_u & \cos\theta_u \end{pmatrix} \tag{1.38}$$

y las cantidades m_u, m_c son las masas para los quarks u'(up) y c'(charmed), y están relacionados con los campos no físicos u y c en la forma:

$$\begin{pmatrix} u' \\ c' \end{pmatrix}_L = U_L \begin{pmatrix} u \\ c \end{pmatrix}_L. \tag{1.39}$$

[4] Para el sector leptónico no hay mezclas entre los distintos campos, ya que en nuestro modelo los neutrinos no tienen masa.

Despues de cierta cantidad de álgebra sobre la expresión (1.37) llegamos a las relaciones

$$y_{uu} = \frac{\sqrt{2}}{v} m_u \cos\theta_u \; ; \; y_{cu} = -\frac{\sqrt{2}}{v} m_c \sin\theta_u \; ; \; y_{uc} = \frac{\sqrt{2}}{v} m_u \sin\theta_u \; ; \; y_{cc} = \frac{\sqrt{2}}{v} m_c \cos\theta_u \, . \tag{1.40}$$

El tratamiento para la ecuación (1.36) es similar. Definimos la matriz

$$D_L = \begin{pmatrix} \cos\theta_d & \sin\theta_d \\ -\sin\theta_d & \cos\theta_d \end{pmatrix}$$

y encontramos que

$$y_{dd} = \frac{\sqrt{2}}{v} m_d \cos\theta_d \; ; \; y_{sd} = -\frac{\sqrt{2}}{v} m_s \sin\theta_d \; ; \; y_{ds} = \frac{\sqrt{2}}{v} m_d \sin\theta_d \; ; \; y_{ss} = \frac{\sqrt{2}}{v} m_s \cos\theta_d \; ; \tag{1.41}$$

donde m_d y m_s son las masas para los quarks d'(down) y s'(strange) definidos de la forma

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}_L = D_L \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L . \tag{1.42}$$

Con los nuevos campos físicos definidos en las ecuaciones (1.39) y (1.42) las corrientes cargadas toman una forma distinta[5]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W-f} &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left[W_\mu^+ \left(\ldots + \bar{u}_L \gamma^\mu d_L + \bar{c}_L \gamma^\mu s_L \right) \right] + \text{h.c} \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left\{ [W_\mu^+ \left[\ldots + (\bar{u} \quad \bar{c})_L \left(U_L^\dagger U_L \right) \gamma^\mu \left(D_L^\dagger D_L \right) \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix}_L \right] \right\} + \text{h.c} \\ &= -\frac{g}{\sqrt{2}} \left\{ [W_\mu^+ \left[\ldots + (\bar{u'} \quad \bar{c'})_L \gamma^\mu \left(U_L D_L^\dagger \right) \begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix}_L \right] \right\} + \text{h.c} \end{aligned} \tag{1.43}$$

Llegamos asi al ángulo de Cabibbo[8] $\theta_c = (\theta_u - \theta_d)$, y a la matriz de Glashow-Iliopoulos-Maiani (GIM) que mezcla los quarks d' y s'

$$V_{GIM} = U_L D_L^\dagger = \begin{pmatrix} \cos\theta_c & \sin\theta_c \\ -\sin\theta_c & \cos\theta_c \end{pmatrix} . \tag{1.44}$$

1.9.2. Modelo con tres Familias

Con tres familias es posible mezclar los tres tipos de quarks. Construyamos el Lagrangiano de Yukawa

$$\mathcal{L}_Y = -y_u^{ij} \, \bar{u}_R^i \left(\tilde{\phi}^\dagger L_j \right) - y_d^{ij} \, \bar{d}_R^i \left(\phi^\dagger L_j \right) + \text{h.c} \, , \tag{1.45}$$

donde las matrices 3 x 3 y_u y y_d no son necesariamente simétricas.

En forma análoga a la sección anterior definimos las matrices unitarias U_R y U_L tal que

$$\left(-v/\sqrt{2} \right) U_R \, y_u \, U_L^{-1} = D_u \, , \tag{1.46}$$

donde D_u es la matriz diagonal cuyas entradas corresponden a la masa de los quarks[6]. En forma similar

$$\left(-v/\sqrt{2} \right) D_R \, y_d \, D_L^{-1} = D_d \tag{1.47}$$

[5] Las restantes cantidades físicas permanecen invariantes en forma, tan solo reemplazando los campos no primados por primados. Para no complicar la notación redefinamos los campos a no primados.

[6] El procedimiento para volver diagonal la matriz y_u es válido debido a que se trabaja con dos matrices unitarias distintas.

para la matriz y_d. Ahora hacemos el cambio de variables

$$u'^i_L = U^{ij}_L\, u^j_L\,, \quad d'^i_L = D^{ij}_L\, d^j_L\,, \tag{1.48}$$

tal como se hizo para el caso de dos familias. La única relación física que cambia de forma está relacionada con la corriente cargada de los quarks

$$\mathcal{L}_{W-\text{quarks}} = -\frac{g}{\sqrt{2}}\left[W^+_\mu(\bar{u}^i_L\,\gamma^\mu d^i_L) + \text{h.c}\right] \rightarrow -\frac{g}{\sqrt{2}}\left[W^+_\mu\left(\bar{u'}^i_L\,\gamma^\mu\left(U_L\,D^\dagger_L\right)^{ij} d'^j_L\right) + \text{h.c}\right]. \tag{1.49}$$

La matriz unitaria $V_{\text{CKM}} = U_L D^\dagger_L$ que mezcla los quarks es conocida como la matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa(CKM)[9].

1.10. La Cromodinámica Cuántica

Hasta ahora hemos trabajado la interacción electrodébil asociada con el grupo gauge SU$(2)_L\otimes$U$(1)_Y$, los resultados que se han obtenido (como por ejemplo la definición de los nuevos campos primados, ecuaciones. (1.48)) no influyen para nada en la forma de las expresiones al incluir el grupo gauge SU$(3)_c$ del color. Es bien sabido de los experimentos que los quarks u, d, s, c, b y t son tripletes de color, es decir, cada quark viene en tres colores distintos *red*(r), *blue*(b) y *green*(g). Con estos tres colores se forman los tripletes

$$\psi = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix}, \tag{1.50}$$

donde la letra q indica uno cualquiera de los seis quarks de nuestro modelo. Podemos entonces construir un Lagrangiano que sea invariante bajo SU$(3)_c$

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi \tag{1.51}$$

donde $\mathcal{D}_\mu$ es la derivada covariante dada en (1.5) y no incluimos el término cinético puesto que ya fue trabajado en la sección (1.3). El Lagrangiano (1.51) permite el término de masa m puesto que el triplete (1.50) no está proyectado en campos izquierdos o derechos. Otra característica de este modelo es que SU$(3)_c$ no está rota, y de este modo los bosones correspondientes no tienen masa, los cuales corresponden a los gluones no masivos, responsables de la interacción fuerte que hace que los quarks permanezcan unidos para formar nucleones. El término de interacción en el Lagrangiano (1.51) es

$$\mathcal{L}_{int} = -\frac{g_3}{2}\, G^a_\mu\, \bar{\psi}\, \gamma^\mu\, \lambda^a\, \psi\,, \tag{1.52}$$

el cual conduce de una vez a las reglas de Feynman para la interacción quark-quark-gluon.

La teoría electrodébil junto con el modelo QCD(cromodinámica cuántica) se basan en el grupo gauge local SU$(3)_c\otimes$SU$(2)_L\otimes$U$(1)_Y$, que denominamos como el Modelo Estándar(ME). Sin duda, el ME es exitoso, explica una gran cantidad de fenómenos físicos, pero mas que pensar que es un modelo acabado debemos tomarlo como base para otros modelos. El ME no puede explicar, por ejemplo, la jerarquía de masas y los ángulos de mezcla, la cuantización de la carga, la violación CP, etc. Otros modelos introducen otros grupos gauge locales electrodébiles como por ejemplo SU$(2)_L\otimes$SU$(2)_R\otimes$U$(1)_{(B-L)}$[10] y el modelo SU$(3)_L\otimes$U$(1)_X$[11], cosa que complica más el álgebra pero enriquece la teoría.

1.11. El Modelo Estándar, una Teoría Renormalizable y sin Anomalías

Determinar si el ME es o no una teoría renormalizable es un problema no-trivial. La dificultad principal proviene del hecho de que algunos bosones gauge tienen masa y se sabe que bosones intermediarios masivos conducen a teorías no renormalizables. La única esperanza que quedaba era el hecho de que las masas en el ME eran adquiridas a través de un mecanismo de rompimiento espontáneo de simetría, en lugar de ser puestas a mano como sucedía en modelos anteriores. En 1971 ocurrió lo deseado, 't Hooft[12] hizo una demostración rigurosa de la renormalizabilidad de las teorías gauge con rompimiento espontáneo.

Queda entonces por ver si el modelo no tiene anomalías, pero antes hablemos un poco sobre qué son las anomalías: en modelos renormalizables los infinitos que surgen cuando se calculan correcciones radiativas requieren de alguna clase de regulador para acotar los cálculos, pero resulta que el regulador puede violar simetrías de la teoría, y aun cuando este regulador es removido al final del cálculo puede dejar vestigios de esta violación. Las anomalías pueden tambien violar las simetrías gauge. Así que la condición de cancelación de anomalías (Ref.[13], sección 22) puede ser usado para limitar las teorías gauge físicas. Esto se puede ver en la conservación de las corrientes en general, donde éstas se acoplan con el campo gauge, así que la condición de invarianza gauge requiere que las anomalías se cancelen. Un análisis detallado muestra que la mayoría de las anomalías son propocionales a la traza de cierta combinación de representaciones matriciales asociadas a los generadores del grupos gauge, que cuando se impone la condición de que sean iguales a cero derivan en relaciones matemáticas entre los números cuánticos del contenido fermiónico[14].

Asignemos por el momento hipercargas débiles arbitrarias $a, b, c, d,$ y e a los multipletes de la primera familia fermiónica[7] $(u,d)_L, u_R, d_R, (\nu_e, e)_L$ y e_R, respectivamente. La condición de cancelación de anomalías de la base de bosones asociados con los distintos grupos gauge nos dice que:

$[\mathrm{SU}(3)_c]^3$: No existe este tipo de anomalía debido a que los fermiones de quiralidad izquierda poseen una representación $3+3+\bar{3}+\bar{3}+1+1+1$ de $\mathrm{SU}(3)_c$ la cual es real;

$[\mathrm{SU}(2)_L]^3$: no hay anomalía aquí debido a que $\mathrm{SU}(2)_L$ solamente tiene representaciones reales o pseudoreales;

$$\begin{aligned}
[\mathrm{SU}(3)_c]^2\,\mathrm{U}(1)_Y &\quad : \quad -2a+b+c=0;\\
[\mathrm{SU}(2)_L]^2\,\mathrm{U}(1)_Y &\quad : \quad -3a-d=0;\\
[\mathrm{grav}]^2\,\mathrm{U}(1)_Y &\quad : \quad -6a+3b-2d+e=0;\\
[\mathrm{U}(1)_Y]^3 &\quad : \quad -6a^3+3b^3+3c^3-2d^3+e^3=0\,.
\end{aligned}$$

Las cuatro últimas condiciones restringen el valor de las hipercargas. Los coeficientes que acompañan a las hipercargas en las ecuaciones anteriores tienen que ver con el número de grados de libertad de los distintos multipletes, con valores positivos para estados de quiralidad derecha y negativos para los estados de quiralidad izquierda. En nuestro modelo, con los valores de las hipercargas $a=\frac{1}{3}$, $b=\frac{4}{3}$, $c=-\frac{2}{3}$, $d=-1$ y $e=-2$ se satisfacen las anteriores ecuaciones, así que tenemos un modelo libre de anomalías y por lo tanto renormalizable.

Referencias

[1] $\mathrm{SU}(2)_L\otimes\mathrm{U}(1)_Y$ fue introducido en: S.L. Glashow, *Nucl. Phys.* **22**, 579 (1961); S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **19**, 1264 (1967); A. Salam, en *Elementary Particles Theory: Relativistic Groups and Analyticity (Nobel Symposium No.8)*, editado por N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968), p. 367. Para una revisión de $\mathrm{SU}(3)_c$ ver por ejemplo: W. Marciano y H. Pagels, *Phys. Rep.* **36**, 137 (1978).

[2] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **92**, 833 (1953); T. Nakano y K. Nishijima, *Prog. Theor. Phys.* (Kyoto) **10**, 581 (1955).

[7]La cancelación de anomalías se hace en forma independiente en cada familia. Y debido a que cada familia posee los mismos números cuánticos es suficiente tomar una sola familia.

[3] Chris Quigg, *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions* (The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc. 1983). Un estudio adicional del ME se presenta en los siguientes textos: R. Ticciati, *Quantum Field Theory for Mathematicians* (Cambridge University Press, 1999); D. Bailin, A. Love. *Introduction to Gauge Field Theory* (Institute of Physics Publishing, 1993).

[4] J. Goldstone, *Nuovo Cim.* **19**, 154 (1961).

[5] P. W. Higgs, *Phys. Lett.* **12**, 132 (1964).

[6] F. Hoyle and R. J. Tayler, *Nature* **203**, 1108 (1964); R. V. Wagoner, W. A. Fowler, and F. Hoyle, *Ap. J.* **148**, 3 (1967); V. F. Shvartsman, *JETP Lett.* **9**, 184 (1969); P. J. E. Peebles, *Physical Cosmology* (Princeton University Press, Princeton, 1971), p. 267.; G. Steigman, D. N. Schramm and J. Gunn, *Phys. Lett.* **66B**, 202 (1977); un tratamiento adicional del tema puede encontrarse en el texto: Edward W. Kolb and Michael S. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, 1990).

[7] D. DeNegri, B. Saudolet, and M. Spiro, CERN preprint CERN-EP-88, LBL preprint 88-26014, *Rev. Mod. Phys.*, in press (1989); F. Abe, et al., *Phys. Rev. Lett.* **63**, 720 (1989); G. Abrams, et al., *ibid* **63**, 724 (1989);G. Abrams, et al. (SLC), *Phys. Rev. Lett.*, in press (1989); M. Z. Akrawy, et al. (OPAL), *Phys. Lett.* **B**, in press (1989); B. Adeva, et al. (L3), *Phys. Lett.* **B**, in press (1989); D. Decamp, et al. (ALEPH), *Phys. Lett.* **B**, in press (1989); P. Aarino, et al. (DELPHI), *Phys. Lett.* **B**, in press (1989).

[8] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 531 (1963).

[9] M. Kobayashi and K. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* 49, 652 (1973); para una reciente revisión ver L. L. Chau, *Phys. Rep.* **95**, 1 (1983); L. Wolfenstein, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1945 (1983).

[10] J. C. Pati y A. Salam, *Phys. Rev.* **D10**, 275 (1974); R. N. Mohapatra y J. C. Pati, *Phys. Rev.* **D11**, 566 (1975); G. Senjanovic y N. Mohapatra, *Phys. Rev.* **D12**, 1502 (1975).

[11] William A. Ponce, Juán B. Flórez y Luis A. Sánchez, Int. Journal of Modern Phys. A, Vol 17 No 5, 643 (2002), hep-ph/0103100.

[12] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B35**, 167 (1971); B. W. Lee, *Phys. Rev.* **D5**, 823 (1972).

[13] Steven Weinberg, *The Quantum Theory of Fields* (Vol. II), (Cambridge, 1996).

[14] H. Georgi and S. L. Glashow, *Phys. Rev.* **D6**, 429 (1972); J. Banks and H. Georgi, *Phys. Rev.* **D14**, 1159 (1976); E. Witten, *Phys. Lett.* **117B**, 324 (1982); y los textos: R. Jackiw, in *Lectures on Current Algebra and its Applictions* (Princeton Univ. Press, Princeton, N. J. 1970); Jesús M. Mira, *Modelos con Simetría Horizontal* U(1) (Tesis de Maestría), Universidad de Antioquia (1995).

Capítulo 2

El Modelo $\mathbf{SU(3)}_c\otimes\mathbf{SU(3)}_L\otimes\mathbf{U(1)}_X$

2.1. Introducción

El ME estudiado en el capítulo anterior se puede ampliar de diversas maneras: en primer lugar añadiendo nuevos campos fermiónicos (lo más simple sería añadir el campo del neutrino de quiralidad derecha, lo cual conduciría a la obtención de masa para el neutrino a través del mecanismo see-saw, y a ampliar el posible número de simetrías gauge locales abelianas que puedan ser gaugeadas simultáneamente). En segundo lugar, aumentando el sector escalar a más de una representación de Higgses, y en tercer lugar ampliando el grupo gauge local. En esta última dirección $\mathrm{SU}(3)_L\otimes\mathrm{U}(1)_X$ como un grupo de sabor, ha sido estudiada previamente por muchos autores [1]-[6] quienes han explorado las distintas posibilidades del contenido fermiónico y de los bosones Higgs.

En lo que sigue, vamos a presentar un análisis sistemático de todos los posibles modelos gauge que surgen del grupo $\mathrm{SU}(3)_c\otimes\mathrm{SU}(3)_L\otimes\mathrm{U}(1)_X$ el cual llamaremos desde ahora la teoría 331.

Nuestra hipótesis central es que el grupo gauge electrodébil es $\mathrm{SU}(3)_L\otimes\mathrm{U}(1)_X \supset \mathrm{SU}(2)_L\otimes\mathrm{U}(1)_Y$. Asumiremos que los quarks de quiralidad izquierda (tripletes de color) y los leptones de quiralidad izquierda (singletes de color) transforman bajo las dos representaciones fundamentales (3 y 3^*) de $\mathrm{SU}(3)_L$. Dos clases de modelos serán discutidos: modelos de una familia donde las anomalías se cancelan en cada familia como en el ME, y modelos donde las anomalías se cancelan por interrelación entre las familias. Al igual que en el ME, en todos los modelos 331 presentados aquí $\mathrm{SU}(3)_c$ es de tipo vectorial.

La expresión más general para el generador de carga eléctrica en $\mathrm{SU}(3)_L\otimes\mathrm{U}(1)_X$, que actúa en la representación 3, es una combinación lineal de los tres generadores diagonales del grupo gauge

$$Q = aT_{3L} + \frac{2}{\sqrt{3}}bT_{8L} + xI_3, \tag{2.1}$$

donde $T_{iL} = \lambda_{iL}/2$, siendo λ_{iL} las matrices de Gell-Mann para $\mathrm{SU}(3)_L$, normalizadas como $\mathbf{Tr}(\lambda_i\lambda_j) = 2\delta_{ij}$; $I_3 = Dg(1,1,1)$ es la matriz unitaria 3x3; y a y b son parámetros arbitrarios cuyos valores serán determinados luego. Un posible coeficiente para el tercer término se puede absorber en el valor de x de la hipercarga del subgrupo abeliano en la teoría 331.

Si asumimos que el isospín usual $\mathrm{SU}(2)_L$ del ME es tal que $\mathrm{SU}(2)_L \subset \mathrm{SU}(3)_L$, entonces $a = 1$, y así hemos fijado el primer parámetro de los modelos, que quedarán caracterizados de ahora en adelante solamente por el valor de b. De este modo, la Eq. (2.1) permite un número infinito de modelos en el contexto de la teoría 331, cada uno de ellos asociado con un valor particular del parámetro libre b y con características típicas que los hacen bastante diferentes entre ellos, como lo veremos en los siguientes ejemplos.

Hay un total de 17 bosones vectoriales en el grupo gauge bajo consideración, los cuales son: un campo gauge B^μ asociado con $\mathrm{U}(1)_X$, los 8 campos gluónicos no masivos asociados con la simetría no rota SU(3)$_c$, y otros 8 asociados con SU(3)$_L$ que podemos escribir de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2}\lambda_{\alpha L}A^{\alpha}_{\mu} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} D^0_{1\mu} & W^+_\mu & K^{(1/2+b)}_\mu \\ W^-_\mu & D^0_{2\mu} & K^{-(1/2-b)}_\mu \\ K^{-(1/2+b)}_\mu & K^{(1/2-b)}_\mu & D^0_{3\mu} \end{pmatrix}, \tag{2.2}$$

donde $D^\mu_1 = A^\mu_3/\sqrt{2} + A^\mu_8/\sqrt{6}$, $D^\mu_2 = -A^\mu_3/\sqrt{2} + A^\mu_8/\sqrt{6}$ y $D^\mu_3 = -2A^\mu_8/\sqrt{6}$. El índice superior en los bosones gauge de la expresión anterior establece la carga eléctrica de las partículas correspondientes, algunas de ellas en función del parámetro b. Observe que los bosones gauge tienen carga eléctrica entera solamente para $b = \pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \ldots, \pm(2n+1)/2$, $n = 1, 2, 3\ldots$. Un análisis más a fondo muestra que los valores negativos de b están relacionados con los positivos tomando el conjugado complejo de la derivada covariante, lo cual equivale a reemplazar $3 \leftrightarrow 3^*$ en el contenido fermiónico para cada modelo en particular. Así, nuestra primera conclusión es que si no deseamos cargas eléctricas exóticas en el sector gauge de nuestra teoría, entonces b debe ser igual a 1/2. Veremos que ésta es también la condición para excluir las cargas eléctricas exóticas del sector fermiónico.

Ahora, contrario al ME donde solamente el factor abeliano U(1)$_Y$ es anómalo, en la teoría 331 ambos, SU(3)$_L$ y U(1)$_X$ son anómalos (SU(3)$_c$ es de tipo vectorial tanto en el ME como en la teoría 331). Así, una combinación especial de multipletes debe ser usada en cada modelo específico a fin de cancelar todas las anomalías posibles y llegar a un modelo físico aceptable. Las anomalías triangulares que se deben tomar en cuenta son: $[\mathrm{SU}(3)_L]^3$, $[\mathrm{SU}(3)_c]^2\mathrm{U}(1)_X$, $[\mathrm{SU}(3)_L]^2\mathrm{U}(1)_X$, $[\mathrm{grav}]^2\mathrm{U}(1)_X$ y $[\mathrm{U}(1)_X]^3$.

A fin de presentar ejemplos específicos, veamos cómo el operador de carga en la Eq. (2.1) actúa sobre las representaciones 3 y 3^* de SU(3)$_L$.

$$\begin{aligned} Q[3] &= Dg.\left(\frac{1}{2}+\frac{b}{3}+x\,,\ -\frac{1}{2}+\frac{b}{3}+x\,,\ -\frac{2b}{3}+x\right), \\ Q[3^*] &= Dg.\left(-\frac{1}{2}-\frac{b}{3}+x\,,\ \frac{1}{2}-\frac{b}{3}+x\,,\ \frac{2b}{3}+x\right). \end{aligned}$$

Observe de las anteriores expresiones que si ubicamos los quarks de quiralidad izquierda y los isodobletes leptónicos conocidos en las dos primeras componentes superiores de la representación 3 y 3^* (o 3^* y 3), y prohibimos la presencia de cargas eléctricas exóticas en los posibles modelos, entonces la carga eléctrica de la tercera componente en estas representaciones debe ser igual a la carga de la primera o segunda componente, lo cual implica que $b = \pm 1/2$. Visto que el valor negativo es equivalente al positivo, $b = 1/2$ es condición suficiente y necesaria a fin de excluir cargas eléctricas exóticas del sector fermiónico, como lo habíamos anticipado.

2.2. Algunos Ejemplos

2.2.1. El Modelo de Pleitez-Frampton

Como un primer ejemplo tomemos $b = 3/2$. Entonces $Q[3] = Dg.(1+x, x, -1+x)$ y $Q[3^*] = Dg.(-1+x, x, 1+x)$. De esta manera los siguientes multipletes son asociados con los respectivos números cuánticos (SU(3)$_c$, SU(3)$_L$, U(1)$_X$): $(e^-\ ,\ \nu_e\ ,\ e^+)^T_L \sim (1, 3^*, 0)$; $(u, d, j)^T_L \sim (3, 3, -1/3)$ y $(d, u, K)^T_L \sim (3, 3^*, 2/3)$, donde los isosingletes j y K son quarks exóticos de cargas eléctricas $-4/3$ y $5/3$ respectivamente. Estos multipletes son la base estructural del modelo de Pleitez-Frampton[2] el cual está dado por el siguiente arreglo de tres familias libre de anomalías:

$$\begin{aligned} \psi^a_L &= (e^a, \nu^a, e^{ca})^T_L \sim (1, 3^*, 0), \\ q^i_L &= (u^i, d^i, j^i)^T_L \sim (3, 3, -1/3), \\ q^1_L &= (d^1, u^1, K)^T_L \sim (3, 3^*, 2/3), \\ u^{ca}_L &\sim (3, 1, -2/3),\ d^{ca}_L \sim (3, 1, 1/3), \\ K^c_L &\sim (3, 1, -5/3),\ j^{ci}_L \sim (3, 1, -4/3), \end{aligned}$$

donde el símbolo superior c establece la conjugación de carga, $a = 1, 2, 3$ es el índice de familias e $i = 1, 2$ se refiere a dos de las tres familias (en la base 331). Como se puede ver, hay seis tripletes de $\mathrm{SU}(3)_L$ y seis antitripletes, lo cual asegura la cancelación de la anomalía $[\mathrm{SU}(3)_L]^3$. Un análisis algebraico muestra que las otras cuatro anomalías también se anulan.

2.2.2. Otros Modelos 331 en la Literatura

Analicemos otros dos modelos 331 de tres familias ya presentes en la literatura, en los cuales $b = 1/2$ (no contienen cargas eléctricas exóticas). Para este valor particular de b tenemos: $Q[3] = Dg.(2/3+x, -1/3+x, -1/3+x)$ y $Q[3^*] = Dg.(-2/3+x, 1/3+x, 1/3+x)$. Entonces obtenemos los siguientes multipletes asociados con los números cuánticos dados: $(u, d, D)_L^T \sim (3, 3, 0)$, $(e^-, \nu_e, N^0)_L^T \sim (1, 3^*, -1/3)$ y $(d, u, U)_L^T \sim (3, 3^*, 1/3)$, donde D y U son quarks exóticos con cargas eléctricas $-1/3$ y $2/3$ respectivamente. Con esta estructura gauge podemos arreglar el siguiente modelo, libre de anomalías, de tres familias:

$$\begin{aligned}
\psi_L'^a &= (e^a, \nu^a, N^a)_L^T \sim (1, 3^*, -1/3),\\
e^{ca} &\sim (1, 1, 1)\\
q_L'^i &= (u^i, d^i, D^i)_L^T \sim (3, 3, 0),\\
q_L'^1 &= (d^1, u^1, U)_L^T \sim (3, 3^*, 1/3),\\
u_L^{ca} &\sim (3^*, 1, -2/3),\ \ d_L^{ca} \sim (3^*, 1, 1/3),\\
U_L^c &\sim (3^*, 1, -2/3),\ \ D_L^{ci} \sim (3^*, 1, 1/3),
\end{aligned}$$

donde como antes $a = 1, 2, 3$ es el índice de familias e $i = 1, 2$. Este modelo ha sido analizado en la literatura en la Ref.[3]. Si es necesario, este modelo puede ser aumentado con un número indeterminado de estados de Weyl neutros $N_L^{0f} \sim (1, 1, 0)$, $f = 1, 2, \ldots$ sin llegar a alterar las relaciones que fijan las anomalías. Llamaremos a este modelo : **Modelo A**.

El modelo que presentaremos a continuación tiene los mismos multipletes de quarks que los usados en el modelo A pero organizados de una manera diferente, y hace uso de un multiplete leptónico distinto $\psi'' = (\nu_e\ , e^-, E^-)_L^T \sim (1, 3, -2/3)$. Los multipletes de este nuevo modelo libre de anomalías son:

$$\begin{aligned}
\psi_L''^a &= (\nu^a, e^a, E^a)_L^T \sim (1, 3, -2/3),\\
e^{ca} &\sim (1, 1, 1)\ ,\ E^{ca} \sim (1, 1, 1),\\
q_L''^1 &= (u^1, d^1, D)_L^T \sim (3, 3, 0),\\
q_L''^i &= (d^i, u^i, U^i)_L^T \sim (3, 3^*, 1/3),\\
u_L^{ca} &\sim (3^*, 1, -2/3),\ \ d_L^{ca} \sim (3^*, 1, 1/3),\\
D_L^c &\sim (3^*, 1, 1/3),\ \ U_L^{ci} \sim (3^*, 1, 2/3).
\end{aligned}$$

Este modelo ha sido estudiado parcialmente en la literatura Ref.[4]. Lo llamaremos: **Modelo B**.

2.2.3. Otros Modelos

Consideremos ahora otros posibles modelos 331 sin cargas eléctricas exóticas (b=1/2). Comencemos primero definiendo los conjuntos *cerrados* de multipletes fermiónicos (decimos *cerrado* en el sentido de que se incluyen en cada conjunto las antipartículas de las partículas cargadas):

$S_1 = [(\nu_\alpha, \alpha^-, E_\alpha^-)\ ;\ \alpha^+; E_\alpha^+]$ con números cuánticos $(1, 3, -2/3); (1, 1, 1); (1, 1, 1)$ respectivamente.

$S_2 = [(\alpha^-, \nu_\alpha, N_\alpha^0)\ ;\ \alpha^+]$ con números cuánticos $[(1, 3^*, -1/3); (1, 1, 1)]$.

$S_3 = [(d, u, U); u^c; d^c; U^c]$ con números cuánticos $[(3, 3^*, 1/3); (3^*, 1, -2/3); (3^*, 1, 1/3)y(3^*, 1, -2/3)]$.

$S_4 = [(u, d, D)\ ;\ d^c; u^c; D^c]$ con números cuánticos $[(3, 3, 0); (3^*, 1, 1/3); (3^*, 1, -2/3)$ y $(3^*, 1, 1/3)]$.

$S_5 = [(e^-, \nu_e, N_1^0)\ ;\ (E^-, N_2^0, N_3^0)\ ;\ (N_4^0, E^+, e^+)]$ con números cuánticos $[(1, 3^*, -1/3); (1, 3^*, -1/3);$ y $(1, 3^*, 2/3)]$.

$S_6 = [(\nu_e, e^-, E_1^-)\ ;\ (E_2^+, N_1^0, N_2^0)\ ;\ (N_3^0, E_2^-, E_3^-); e^+; E_1^+; E_3^+]$ con números cuánticos $[(1, 3, -2/3);$ $(1, 3, 1/3); (1, 3, -2/3); (1, 1, 1); (1, 1, 1); (1, 1, 1)]$.

Las cinco anomalías para los anteriores conjuntos de fermiones son presentados en la siguiente tabla:

TABLA I. Anomalías para S_i .

Anomalías	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
$[\mathrm{SU}(3)_c]^2\mathrm{U}(1)_X$	0	0	0	0	0	0
$[\mathrm{SU}(3)_L]^2\mathrm{U}(1)_X$	$-2/3$	$-1/3$	1	0	0	-1
$[\mathrm{grav}]^2\mathrm{U}(1)_X$	0	0	0	0	0	0
$[\mathrm{U}(1)_X]^3$	$10/9$	$8/9$	$-12/9$	$-6/9$	$6/9$	$12/9$
$[\mathrm{SU}(3)_L]^3$	1	-1	-3	3	-3	3

Observe de la Tabla que el modelo A es representado por $(3S_2 + S_3 + 2S_4)$ y el modelo B por $(3S_1 + 2S_3 + S_4)$. Pero esas no son las únicas estructuras sin anomalías que se pueden lograr. Veamos otras:

Modelos de una Familia

Hay dos estructuras de una familia sin anomalías que pueden ser deducidas de la Tabla. Estas son:

Modelo C: $(S_4 + S_5)$. Este modelo está asociado con un subgrupo de E_6 y ha sido estudiado en la Ref.[5].

Modelo D: $(S_3 + S_6)$. Este modelo está asociado con un subgrupo de $\mathrm{SU}(6)_L \otimes U(1)_X$ y ha sido estudiado en la Ref.[6].

Los dos modelos anteriores pueden llegar a ser modelos realistas (de tres familias) haciendo copias exactas de las familias, tal como se hace en el ME; es decir, considerando $3(S_4 + S_5)$ y $3(S_3 + S_6)$ respectivamente, o también $(2S_4 + 2S_5 + S_3 + S_6)$ y $(S_4 + S_5 + 2S_3 + 2S_6)$.

Modelos de dos Familias

Hay cuatro modelos de dos familias. Son ellos: $(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$, $(2S_4 + 2S_5)$, $(2S_3 + 2S_6)$ y $(S_3 + S_4 + S_5 + S_6)$. Como es obvio, estos modelos no pueden llegar a ser realistas.

Modelos de tres Familias

Además de los modelos A y B tenemos seis más; son ellos:

Modelo E: $(S_1 + S_2 + S_3 + 2S_4 + S_5)$.

Modelo F: $(S_1 + S_2 + 2S_3 + S_4 + S_6)$.

Modelo G: $(2S_4 + 2S_5 + S_3 + S_6)$.

Modelo H: $(S_4 + S_5 + 2S_3 + 2S_6)$.

Modelo I: $3(S_4 + S_5)$.

Modelo J: $3(S_3 + S_6)$.

La principal característica de varios de estos últimos modelos es que, cada una de las tres familias es tratada en forma diferente. Que sepamos, hasta el momento estos modelos no han sido estudiados en la literatura.

Podemos tambien deducir modelos de cuatro, cinco, etc. familias (un modelo de cuatro familias estaría dado por ejemplo por: $2(S_1 + S_2 + S_3 + S_4)$, pero como en el caso de dos familias, estos no son del todo modelos realistas).

2.3. Conclusiones

En este capítulo hemos estudiado en detalle la teoría $\mathrm{SU}(3)_c \otimes \mathrm{SU}(3)_L \otimes \mathrm{U}(1)_x$. Se ha llegado a ocho modelos diferentes de tres familias cuando restringimos las representaciones del campo fermiónico a partículas sin cargas eléctricas exóticas. Estos modelos son relativamente nuevos en la literatura, y seis de ellos (modelos E- J) se introducen aquí por primera vez, hasta donde sabemos.

Si permitimos partículas con cargas eléctricas exóticas en nuestro estudio, el número de modelos es infinito, donde el modelo en la Ref.[2] es solamente uno de ellos.

Las predicciones a bajas energías de los seis modelos presentados aquí no son iguales. Todas ellas tienen en común una nueva corriente neutra que se mezcla con la corriente neutra del ME incluida también en cada modelo. Cuando el ángulo de mezcla entre las dos corrientes neutras es cero ($\sin\theta = 0$), se llega a las mismas predicciones del ME. Pero de acuerdo a los resultados experimentales provenientes del LEP y SLAC, y de violación de la paridad atómica, obliga a que los valores del ángulo de mezcla sean dependientes del modelo. Para resultados parciales ver, por ejemplo, las Refs.[3,5] y [6].

Un estudio detallado de cada modelo abarca aspectos modelo-dependientes, como las corrientes neutras que cambian sabor, el mecanismo GIM, la escala de masa de los nuevos bosones gauge, el espectro de masa de las partículas de espín 1/2, etc.

El resultado más importante de nuestro estudio es que, contrario a lo que se afirma en la Ref.[2], la teoría 331 puede ser utilizada para construir modelos de una o más familias, siendo el número de familias arbitrario. Sobresaliente es la existencia de los modelos de tres familias **E** y **F**, donde las tres familias son tratadas de manera diferente.

Referencias

[1] Un estudio sistemático de modelos basados en el grupo gauge electrodébil $SU(3)_L \otimes U(1)_X$ está en: W. A. Ponce, Y. Giraldo y L. A. Sánchez, "Systematic Study of 331 Models", hep-ph/0201133, to appear in *The Annals at the VIII Mexican School at Particles and Fields* (Zacatecas, Mexico, Noviembre 2001); W.A. Ponce, J.B. Flórez y L.A. Sánchez, *Int. Journal of Mod. Phys. A*, Vol. 17 No 5, 643 (2002), hep-ph/0103100.

[2] F. Pisano y V. Pleitez, *Phys. Rev.* **D46**, 410 (1992); P. H. Frampton, *Phys. Rev.* Lett. **69**, 2887 (1992).

[3] M. Singer, J.W.F. Valle y J. Schechter, *Phys. Rev.* **D22**, 738 (1980); R. Foot, H.N. Long y T.A. Tran, *Phys. Rev.* **D50**, R34 (1994); H.N. Long, *Phys. Rev.* **D53**, 437 (1996); *ibid* **D54**, 4691 (1996).

[4] M. Ozer, *Phys. Rev.* **D54**, 1143 (1996).

[5] K.T Mahanthappa y P.K. Mohapatra, *Phys. Rev.* **D42**, 1732 (1990); *ibid*, **D42**, 2400 (1990); **D43**, 3093 (1991); L.A. Sánchez, W.A. Ponce y R. Martínez, *Phys. Rev.* **D64**, 075013 (2001), hep-ph/0103244.

[6] R. Martínez, W.A. Ponce y L.A. Sánchez, "$SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ as an $SU(6) \otimes U(1)_X$ subgroup", *Phys. Rev.* **D65**, 055013 (2002), hep-ph/0110246.

Capítulo 3

El Sector Escalar

En este capítulo vamos a estudiar el sector escalar de algunos modelos 331 introducidos en el capítulo anterior. En concreto estudiaremos aquellos modelos en los cuales el parámetro b toma el valor de 1/2 (los diez modelos A-J), y por lo tanto no contienen partículas con cargas eléctricas exóticas. Vamos a ver que para esos modelos existe un sector escalar muy simple el cual rompe la simetría en forma adecuada y su potencial más general presenta un mínimo para valores particulares de los parámetros usados. Además, como lo mostraremos en el apéndice A, esos mismos escalares pueden ser usados para darle masas a los fermiones en algunos de los modelos.

Nuestra meta es romper la simetría $SU(3)_C \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X \rightarrow SU(3)_C \otimes U(1)_Q$, la cual implica la existencia de 8 bosones de Goldstone los cuales deben estar contenidos en el sector escalar de la teoría[1]. Así pues, si vamos a usar tripletes para romper la simetría, un mínimo de dos tripletes, equivalentes a seis escalares complejos o doce reales, son indispensables para disponer de los grados de libertad suficientes.

Ahora, para $b = 1/2$ hay solamente dos tripletes escalares de Higgses (junto con sus complejos conjugados) que desarrollan un valor esperado en el vacío (VEV) distinto de cero. Estos dos tripletes escalares junto con sus VEV's en la dirección de carga eléctrica neutra más general posible son:

$$\begin{aligned} \phi_1(1,3^*,-1/3) &= \begin{pmatrix} \phi_1^- \\ \phi_1'^0 \\ \phi_1^0 \end{pmatrix} \quad \text{con VEV} \quad <\phi_1> = \begin{pmatrix} 0 \\ v_1 \\ V_1 \end{pmatrix} , \\ \phi_2(1,3^*,2/3) &= \begin{pmatrix} \phi_2^0 \\ \phi_2^+ \\ \phi_2'^+ \end{pmatrix} \quad \text{con VEV} \quad <\phi_2> = \begin{pmatrix} v_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \end{aligned} \tag{3.1}$$

con la jerarquía $V_1 >> v_1 \sim v_2 \sim 174$ Gev, la escala de masa electrodébil. Este sector escalar tiene tres estados complejos y eléctricamente neutros y por desarrollar VEV's distintos de cero es más conveniente reescribirlos de la siguiente manera:

$$\phi_1^0 = V_1 + \frac{H_{\phi_1}^0 + iA_{\phi_1}^0}{\sqrt{2}} , \; \phi_1'^0 = v_1 + \frac{H_{\phi_1}'^0 + iA_{\phi_1}'^0}{\sqrt{2}} , \; \phi_2^0 = v_2 + \frac{H_{\phi_2}^0 + iA_{\phi_2}^0}{\sqrt{2}} . \tag{3.2}$$

La parte real H es conocida como un escalar CP-par ó *escalar* puro, y la imaginaria A como un escalar CP-impar ó *pseudoescalar*. Como vamos a ver a continuación, este sector escalar es mucho más simple que el utilizado en la literatura[2] para esta clase de modelos; aún así vamos a mostrar que es suficiente y consistente.

3.1. El Potencial Escalar

El potencial escalar más general, renormalizable, que contiene a ϕ_1 y ϕ_2 e invariante 331, lo podemos escribir como

$$V(\phi_1,\phi_2) = \mu_1^2\phi_1^\dagger\phi_1 + \mu_2^2\phi_2^\dagger\phi_2 + \lambda_1\left(\phi_1^\dagger\phi_1\right)^2 + \lambda_2\left(\phi_2^\dagger\phi_2\right)^2 + \lambda_3(\phi_1^\dagger\phi_1)(\phi_2^\dagger\phi_2) + \lambda_4(\phi_1^\dagger\phi_2)(\phi_2^\dagger\phi_1), \quad (3.3)$$

en el cual están ausentes los posibles términos cúbicos ya que estos se anulan, debido a la antisimetría del tensor de Levi-Civita y de que al menos un escalar debe repetirse en la expresión.

Nuestra tarea ahora es buscar valores de los parámetros que hagan del potencial un mínimo cuando los campos del sector escalar sean cero. Este es un problema de extremos de varias variables y para ello recurrimos a técnicas matemáticas bien conocidas (véase por ejemplo Ref.[3], pág. 597 y Ref.[4], pág. 231).

3.1.1. Minimización del Potencial

Imponiendo la condición de que el potencial (3.3) tenga un extremo cuando los campos sean cero, tendremos entonces un *punto crítico* para el potencial. Examinemos pues todas las primeras derivadas del potencial en el punto crítico (campos cero):

$$\left.\frac{\partial V}{\partial H^0_{\phi_1}}\right|_{\text{campos}=0} = \mu_1^2 + 2\lambda_1\,(v_1^2+V_1^2) + \lambda_3\,v_2^2 = 0\,, \quad (3.4)$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial H^0_{\phi_2}}\right|_{\text{campos}=0} = \mu_2^2 + \lambda_3\,(v_1^2+V_1^2) + 2\lambda_2\,v_2^2 = 0\,, \quad (3.5)$$

las otras derivadas no dan ecuaciones de ligadura adicionales. Ahora determinemos qué tipo de extremo (mínimo o máximo) es este punto crítico; para ello necesitamos calcular los determinantes Hessianos[3] en el punto crítico. Es fácil ver que algunos Hessianos son iguales a cero, así que no podemos decir nada acerca de qué tipo de extremo hemos establecido. La razón de que esto suceda, se ve al recurrir a la analogía del *sombrero Mejicano*, donde hay muchos posibles mínimos, y nosotros hemos escogido uno en particular: cuando los campos escalares son cero. Restaría entonces por saber la orientación de este *sombrero*. Para determinar de qué extremo se trata (si el sombrero está boca arriba o boca abajo) debemos examinar el potencial alrededor del punto crítico: los términos lineales se cancelan, mientras que si exigimos que los términos de segundo orden al ser diagonalizados den espectros positivo, nuestro punto crítico será un mínimo, tal como se deseaba. El valor que toma el potencial en dicho punto está dado por

$$V_{\text{mínimo}} = -v_2^4\,\lambda_2 - (v_1^2+V_1^2)\left[(v_1^2+V_1^2)\,\lambda_1 + v_2^2\,\lambda_3\right]. \quad (3.6)$$

Observamos que mientras mayor sea v_1 menor es $V_{\text{mínimo}}$ (con $\lambda_1 > 0$ como veremos más adelante). Por lo tanto el valor $v_1 = 0$ tomado en algunos análisis en la literatura[2] para esta clase de modelos, no es del todo conveniente.

3.2. El Espectro de Masas del Sector Escalar

El potencial (3.3), desarrollado hasta términos de segundo orden y teniendo en cuenta las ligaduras (3.4) y (3.5), toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V &= \lambda_4 v_2 v_1 \phi_1^-\phi_2^+ + \lambda_4 V_1 v_2 \phi_1^-\phi_2'^+ + \lambda_4 v_2 v_1 \phi_1^+\phi_2^- + \lambda_4 V_1 v_1 \phi_2'^+\phi_2^- + \lambda_4 V_1 v_2 \phi_1^+\phi_2'^- \\ &+ \lambda_4 V_1 v_1 \phi_2^+\phi_2'^- + \lambda_4 v_1^2|\phi_2^+|^2 + \lambda_4 v_2^2|\phi_1^+|^2 + \lambda_4 V_1^2|\phi_2'^+|^2 + 2\lambda_1 v_1^2 H'^{0^2}_{\phi_1} + 2\lambda_1 V_1^2 H^{0^2}_{\phi_1} \\ &+ 2\lambda_2 v_2^2 H^{0^2}_{\phi_2} + 4\lambda_1 V_1 v_1 H^0_{\phi_1} H'^0_{\phi_1} + 2\lambda_3 v_1 v_2 H^0_{\phi_2} H'^0_{\phi_1} + 2\lambda_3 v_2 V_1 H^0_{\phi_1} H^0_{\phi_2} + V_{\text{mínimo}}\,. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Con el potencial de esta manera, podemos obtener las matrices de masa de los distintos campos escalares de nuestro modelo[1].

3.2.1. Espectro del Sector Escalar Neutro

Vemos en el potencial (3.7) que los campos escalares neutros se mezclan entre ellos de la manera dada por la matriz de masa siguiente, expresada en la base $H^0_{\phi_1}$, $H^0_{\phi_2}$, $H'^0_{\phi_1}$:

$$M_H^2 = 2 \begin{pmatrix} 2\lambda_1 V_1^2 & \lambda_3 v_2 V_1 & 2\lambda_1 v_1 V_1 \\ \lambda_3 v_2 V_1 & 2\lambda_2 v_2^2 & \lambda_3 v_1 v_2 \\ 2\lambda_1 v_1 V_1 & \lambda_3 v_1 v_2 & 2\lambda_1 v_1^2 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

la cual tiene determinante cero. Al diagonalizar la matriz M_H^2 obtenemos un bosón de Goldstone G_1 de masa cero y dos campos de Higgs masivos H_1 y H_2 de masas (masa^2) reales dadas por

$$M_1^2 = 2\left(v_1^2 + V_1^2\right)\lambda_1 + 2v_2^2\lambda_2 + 2\sqrt{\left[\left(v_1^2 + V_1^2\right)\lambda_1 - v_2^2\lambda_2\right]^2 + v_2^2\left(v_1^2 + V_1^2\right)\lambda_3^2} \tag{3.9}$$

y

$$M_2^2 = 2\left(v_1^2 + V_1^2\right)\lambda_1 + 2v_2^2\lambda_2 - 2\sqrt{\left[\left(v_1^2 + V_1^2\right)\lambda_1 - v_2^2\lambda_2\right]^2 + v_2^2\left(v_1^2 + V_1^2\right)\lambda_3^2} \tag{3.10}$$

respectivamente. Es natural pensar que λ_i sea del orden de la unidad mas o menos un orden de magnitud. Adicionalmente, para que la masa (3.10) sea positiva es necesario imponer las condiciones

$$\lambda_1 > 0\,, \quad \lambda_2 > 0\,, \; {\lambda_3}^2 < 4\,\lambda_1\,\lambda_2\,, \tag{3.11}$$

y como esta última masa es pequeña, el campo H_2 puede asociarse con el Higgs del ME.

Las matrices de mezcla de estos campos son:

$$\begin{pmatrix} H^o_{\phi_1} \\ H^o_{\phi_2} \\ H'^o_{\phi_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v_2\,V_1}{S_1} & \frac{v_2\,V_1}{S_2} & -\frac{v_1}{\sqrt{{v_1}^2+{V_1}^2}} \\ \frac{M_1^2-4\left({v_1}^2+{V_1}^2\right)\lambda_1}{2\,S_1\,\lambda_3} & \frac{-\left(M_1^2-4\,{v_2}^2\,\lambda_2\right)}{2\,S_2\,\lambda_3} & 0 \\ \frac{v_1\,v_2}{S_1} & \frac{v_1\,v_2}{S_2} & \frac{V_1}{\sqrt{{v_1}^2+{V_1}^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ G_1 \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

donde las cantidades S_1 y S_2 están dados por

$$\begin{aligned} S_1 &= \sqrt{{v_1}^2\,{v_2}^2 + {v_2}^2\,{V_1}^2 + \frac{\left(M_1^2 - 4\,\left({v_1}^2 + {V_1}^2\right)\,\lambda_1\right)^2}{4\,{\lambda_3}^2}}\,, \\ S_2 &= \sqrt{{v_2}^2\,\left({v_1}^2 + {V_1}^2\right) + \frac{\left(M_1^2 - 4\,{v_2}^2\,\lambda_2\right)^2}{4\,{\lambda_3}^2}}\,, \end{aligned}$$

con estas definiciones los cálculos que se harán más adelante se simplifican bastante.

3.2.2. Espectro del Sector Pseudoescalar Neutro

El potencial (3.7) no contiene campos pseudoescalares A, lo cual nos permite identificar los siguientes otros tres bosones de Goldstone:

$$G_2 \equiv A^0_{\phi_1}\,,\; G_3 \equiv A^0_{\phi_2}\,,\; G_4 \equiv A'^0_{\phi_1}\,. \tag{3.13}$$

[1]Los términos de estas matrices de masa pueden ser también obtenidos evaluando las segundas derivadas parciales, respecto a los campos, del potencial escalar en el punto crítico, que es equivalente a la expasión a segundo orden del potencial.

3.2.3. Espectro del Sector Escalar Cargado

En la base ϕ_1^+ , ϕ_2^+ , $\phi_2'^+$ encontramos la matriz

$$M_+^2 = 2\lambda_4 \begin{pmatrix} v_2^2 & v_1 v_2 & v_2 V_1 \\ v_1 v_2 & v_1^2 & v_1 V_1 \\ v_2 V_1 & v_1 V_1 & V_1^2 \end{pmatrix} , \tag{3.14}$$

la cual, después de ser diagonalizada, produce cuatro bosones de Goldstone cargados $G_5^+(G_5^-)$, $G_6^+(G_6^-)$ y dos campos cargados físicos masivos $H_3^+(H_3^-)$, de masa

$$\lambda_4 \left(v_1^2 + v_2^2 + V_1^2\right) , \tag{3.15}$$

con $\lambda_4 > 0$. Los nuevos campos estan definidos de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} G_5^+ \\ G_6^+ \\ H_3^+ \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} \phi_1^+ \\ \phi_2^+ \\ \phi_2'^+ \end{pmatrix} , \tag{3.16}$$

donde la matriz de mezcla es

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\frac{V_1}{\sqrt{v_2{}^2+V_1{}^2}} & 0 & \frac{v_2}{\sqrt{v_2{}^2+V_1{}^2}} \\ -\frac{v_1\, v_2}{\sqrt{(v_2{}^2+V_1{}^2)\,(v_1{}^2+v_2{}^2+V_1{}^2)}} & \frac{v_2{}^2+V_1{}^2}{\sqrt{(v_2{}^2+V_1{}^2)\,(v_1{}^2+v_2{}^2+V_1{}^2)}} & -\frac{v_1\, V_1}{\sqrt{(v_2{}^2+V_1{}^2)\,(v_1{}^2+v_2{}^2+V_1{}^2)}} \\ \frac{v_2}{\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+V_1{}^2}} & \frac{v_1}{\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+V_1{}^2}} & \frac{V_1}{\sqrt{v_1{}^2+v_2{}^2+V_1{}^2}} \end{pmatrix} . \tag{3.17}$$

Finalmente, hagamos una breve lista del contenido de partículas del sector escalar: en el modelo considerado tenemos dos escalares neutros masivos (H_1 y H_2), dos escalares cargados masivos ($H_3^+(H_3^-)$) y ocho bosones de Goldstone (G_1, G_2, G_3, G_4, $G_5^+(G_5^-)$, $G_6^+(G_6^-)$), para un total de 12 campos de los cuales H_2 corresponde al Higgs del ME y ocho (los bosones de Goldstone) desaparecen en la gauge *unitaria*[5] (pág. 183-186)[2].

Como puede verse, el modelo es consistente y muy económico pues aparte del Higgs del ME hay solamente dos Higgses más, uno neutro real y el otro cargado (es un sector escalar más simple que la extensión del ME con dos dobletes de Higgses).

3.3. Masa para los Bosones Gauge

El precio que hay que pagar por tener un sector escalar tan simple como el discutido en la sección anterior, es el tener un espectro de masas para los bosones de gauge un poco más complicada que el presentado originalmente en la literatura[7]. Claro que de paso, el modelo tiene una fenomenología mucho más rica y variada como veremos más adelante.

Habíamos visto en el capítulo anterior que los ocho bosones de SU$(3)_L$ podían escribirse de la siguiente manera ($b = 1/2$):

$$\frac{1}{2}\lambda_\alpha A_\mu^\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} D_{1\mu}^o & W_\mu^+ & K_\mu^+ \\ W_\mu^- & D_{2\mu}^o & K_\mu^o \\ K_\mu^- & \bar{K}_\mu^o & D_{3\mu}^o \end{pmatrix} , \tag{3.18}$$

donde $D_1^\mu = A_3^\mu/\sqrt{2} + A_8^\mu/\sqrt{6}$, $D_2^\mu = -A_3^\mu/\sqrt{2} + A_8^\mu/\sqrt{6}$ y $D_3^\mu = -2A_8^\mu/\sqrt{6}$. Los λ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, 8$ son las ocho matrices de Gell-Mann.

Partimos de

$$\left(\mathcal{D}^\mu \mathcal{H}\right)^\dagger \left(\mathcal{D}_\mu \mathcal{H}\right) , \quad \mathcal{H} = \phi_1 \, , \, \phi_2 \, , \tag{3.19}$$

[2] Una prueba elegante de la existencia de la gauge unitaria la puede encontrar en la Ref.[6].

donde la derivada covariante para los tripletes de $\mathrm{SU}(3)_L$ es

$$\mathcal{D}^\mu = \partial^\mu - \frac{ig}{2}\lambda_\alpha A^\mu_\alpha - ig'XB^\mu \quad \rightarrow \quad \text{Para la representación 3,}$$
$$\bar{\mathcal{D}}^\mu = \partial^\mu - \frac{ig}{2}\bar{\lambda}_\alpha A^\mu_\alpha - ig'XB^\mu \quad \rightarrow \quad \text{Para la representación } 3^*\text{ ,}$$

con $\bar{\lambda}_\alpha = -\lambda^*_\alpha = -\lambda^T_\alpha$, g y g' son las constantes de acoplamiento de $\mathrm{SU}(3)_L$ y $\mathrm{U}(1)_X$, y X es la hipercarga (una mejor discusión de las anteriores definiciones se pueden encontrar en los artículos[7], los cuales desarrollan en forma exhaustiva algunos de los modelos 331).

3.3.1. Masa para los Bosones Cargados

Luego del álgebra encontramos la siguiente mezcla para los bosones K^μ y W^μ :

	$K^{-\mu}$	$W^{-\mu}$
K^+_μ	$\frac{1}{2}g^2V_1^2 + \frac{v_2^2g^2}{2}$	$\frac{1}{2}g^2v_1V_1$
W^+_μ	$\frac{1}{2}g^2v_1V_1$	$\frac{1}{2}g^2v_1^2 + \frac{v_2^2g^2}{2}$

(3.20)

La anterior matriz nos da los nuevos bosones gauge físicos $W'^{\pm}_\mu$ y $K'^{\pm}_\mu$ de masas (masa^2):

$$M^2_{W'^\pm} = \frac{1}{2}\,g^2\,v_2^2 \quad \text{y} \quad M^2_{K'^\pm} = \frac{1}{2}\,g^2\,(v_1^2 + v_2^2 + V_1^2), \tag{3.21}$$

y definidos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} K'_\mu \\ W'_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_1}{\sqrt{{v_1}^2+{V_1}^2}} & \frac{v_1}{\sqrt{{v_1}^2+{V_1}^2}} \\ \frac{v_1}{\sqrt{{v_1}^2+{V_1}^2}} & -\frac{V_1}{\sqrt{{v_1}^2+{V_1}^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K_\mu \\ W_\mu \end{pmatrix}. \tag{3.22}$$

3.3.2. Masa para los Bosones Neutros

Para los bosones neutros singletes de color tenemos la siguiente mezcla:

	B^μ	A_3^μ	A_8^μ	$\bar{K}^{0\mu}$
B_μ	$\frac{g'^2}{9}(v_1^2+V_1^2) + \frac{4v_2^2g'^2}{9}$	$-\frac{gg'v_1^2}{6} - \frac{gg'v_2^2}{3}$	$\frac{gg'}{6\sqrt{3}}(v_1^2 - 2V_1^2) - \frac{gg'}{3\sqrt{3}}v_2^2$	$\frac{\sqrt{2}}{3}gg'v_1V_1$
$A_{3\mu}$	$-\frac{gg'v_1^2}{6} - \frac{gg'v_2^2}{3}$	$\frac{g^2v_1^2}{4} + \frac{g^2v_2^2}{4}$	$-\frac{v_1^2g^2}{4\sqrt{3}} + \frac{v_2^2g^2}{4\sqrt{3}}$	$-\frac{\sqrt{2}g^2v_1V_1}{4}$
$A_{8\mu}$	$\frac{gg'}{6\sqrt{3}}(v_1^2 - 2V_1^2) - \frac{gg'}{3\sqrt{3}}v_2^2$	$-\frac{v_1^2g^2}{4\sqrt{3}} + \frac{v_2^2g^2}{4\sqrt{3}}$	$\frac{g^2}{12}(v_1^2 + 4V_1^2) + \frac{v_2^2g^2}{12}$	$-\frac{\sqrt{2}g^2v_1V_1}{4\sqrt{3}}$
K^0_μ	$\frac{\sqrt{2}}{3}gg'v_1V_1$	$-\frac{\sqrt{2}g^2v_1V_1}{4}$	$-\frac{\sqrt{2}g^2v_1V_1}{4\sqrt{3}}$	$\frac{g^2}{2}(v_1^2 + V_1^2)$

(3.23)

El determinante de la anterior matriz es cero, lo cual permite establecer que existe al menos un autovalor igual a cero, y que el campo asociado puede ser relacionado con el campo electromagnético. El proceso de diagonalización de la matriz (3.23) conduce a expresiones muy largas y complejas, sin embargo, podemos definir los campos intermedios Z^μ, Z'^μ, A^μ tales que:

$$A^\mu = S_W A_3^\mu + C_W \left[\frac{T_W}{\sqrt{3}} A_8^\mu + (1 - T_W^2/3)^{1/2} B^\mu\right], \tag{3.24}$$

$$Z^\mu = C_W A_3^\mu - S_W \left[\frac{T_W}{\sqrt{3}} A_8^\mu + (1 - T_W^2/3)^{1/2} B^\mu\right], \tag{3.25}$$

$$Z'^\mu = -(1 - T_W^2/3)^{1/2} A_8^\mu + \frac{T_W}{\sqrt{3}} B^\mu\,, \tag{3.26}$$

en donde A^μ es el autoestado de masa cero asociado al fotón (campo electromagnético) y Z^μ corresponde a la corriente débil neutra del Modelo Estándar, de donde puede verse que la hipercarga del ME le podemos asociar un bosón gauge

$$Y^\mu = \frac{T_W}{\sqrt{3}} A_8^\mu + (1 - T_W^2/3)^{1/2} B^\mu\,. \tag{3.27}$$

En todas las anteriores expresiones se tiene que $S_W = \sqrt{3}g'/\sqrt{3g^2 + 4g'^2}$ y C_W son el seno y el coseno del ángulo de mezcla electrodébil respectivamente, y $T_W = S_W/C_W$. La matriz (3.23) se reduce entonces

	Z'^μ	Z^μ	$\mathrm{Re}\,(K^{0\mu})$
Z'_μ	$\frac{-\left(g^2 \sec(w)^4 \left((1+\cos(4w))\, {v_1}^2 + 2\left({v_2}^2 + 4\cos(w)^4 {V_1}^2\right)\right)\right)}{8\left(-3+\tan(w)^2\right)}$	$\frac{g^2 \sec(w)^3 \left(\cos(2w)\, {v_1}^2 - {v_2}^2\right)}{4\sqrt{4-\sec(w)^2}}$	$\frac{g^2 \sqrt{2-\frac{\sec(w)^2}{2}}\, v_1 V_1}{2+4\cos(2w)}$
Z_μ	$\frac{g^2 \sec(w)^3 \left(\cos(2w)\, {v_1}^2 - {v_2}^2\right)}{4\sqrt{4-\sec(w)^2}}$	$\frac{g^2 \sec(w)^2 \left({v_1}^2 + {v_2}^2\right)}{4}$	$\frac{-\left(g^2 \sec(w)\, v_1 V_1\right)}{2\sqrt{2}}$
$\mathrm{Re}\,(K_\mu^0)$	$\frac{g^2 \sqrt{2-\frac{\sec(w)^2}{2}}\, v_1 V_1}{2+4\cos(2w)}$	$\frac{-\left(g^2 \sec(w)\, v_1 V_1\right)}{2\sqrt{2}}$	$\frac{g^2 \left({v_1}^2 + {V_1}^2\right)}{2}$

(3.28)

Como se observa, los bosones gauge Z_μ y Z'_μ solo se acoplan con la parte real del bosón neutro $K^{0\mu} = \mathrm{Re}\,(K^{0\mu}) + i\,\mathrm{Im}\,(K^{0\mu})$, lo cual se deduce fácilmente a partir de la matriz (3.23). El campo asociado a la parte imaginaria de $K^{0\mu}$ se desacopla y tiene por masa:

$$M^2_{\mathrm{Im}(K^0)} = g^2(v_1^2 + V_1^2)\,. \tag{3.29}$$

El determinante de la matriz (3.28) está dada por

$$\frac{g^6\, {v_2}^2 \left({v_1}^2 + {V_1}^2\right)^2}{8 + 16\, C_{2W}}\,. \tag{3.30}$$

En principio, la matriz (3.28) puede ser diagonalizada para obtener los campos físicos reales, pero los resultados son algo complejos. Visto que $V_1 >> v_1 \sim v_2 \sim 174$ Gev, podemos utilizar métodos perturbativos para estimar las masas, a segundo orden, de los campos resultantes al diagonalizar la matriz (3.28). Asumiendo $v_2 \simeq v_1$ y $q = v_1/V_1 << 1$ los resultados son los siguientes:

Masa del bosón Z^0:

$$M_{Z^0}^2 \approx \frac{1}{2}\, g^2\, C_W^{-2}\, {v_1}^2\, \left(1 - q^2\, T_W^4\right)\,, \tag{3.31}$$

la cual es del orden de v_1.

Masa del bosón Z'^0:

$$\begin{aligned} M_{Z'^0}^2 &\approx \frac{g^2\, V_1^2}{2 + 4\, C_{2W}}\, \left[2 + 2\, C_{2W} + q^2\, \left(-2 + 2\, C_{2W} + C_W^{-2} - 2\, C_{2W}^{-1}\right)\right. \\ &+ \left. q^4\, \left(4 - 9\, C_W^{-2} + 6\, C_W^{-4} - C_W^{-6}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.32}$$

la cual es del orden de V_1.

Masa del bosón real K^0:

$$M_{K^0}^2 \approx g^2 {V_1}^2\, \left[\left(1 + C_{2W}^{-1}\right)\, q^2 + 1\right], \tag{3.33}$$

la cual es del orden de V_1.

Las masas anteriores, específicamente las expresiones (3.21) y (3.31), nos permiten escribir en forma aproximada la siguiente relación:

$$\frac{M_{W^\pm}^2}{M_{Z^0}^2 C_W^2} \approx 1 + \Delta(q^2). \tag{3.34}$$

Sabiendo que $S_W^2 = 0{,}231$ (PPB 2000), luego $\Delta = 0{,}0898\, q^2$, y se sabe experimentalmente que $\Delta = 0{,}0006$, entonces podemos estimar el valor de $V_1 \approx 2$ Tev; valor que está de acuerdo con el esquema de rompimiento de la simetría del modelo.

3.4. Acoples de los Higgses con los Bosones Gauge

Determinemos los acoples más importantes de los Higgses H_1 y H_2, definidos en la sección (3.2.1), con los bosones gauge. Especialmente con el bosón vectorial cargado $W^\pm$ y el bosón neutro liviano Z^0, para de ese modo relacionar los resultados con los del ME.

Para llevar a cabo esta tarea, debemos tomar en cuenta que tanto los Higgses como los bosones gauge físicos fueron definidos de tal modo que diagonalizaban matrices de mezcla para las masas; así que para la obtención de los acoples a partir de la relación (3.19) debemos expresar el resultado final en términos de estos campos.

Luego del álgebra hallamos los siguientes acoples con $W^\pm$:

$$g(WWH_1) = \frac{g^2\, v_2\, \left(M_1^2 - 4\, \left({v_1}^2 + {V_1}^2\right)\, \lambda_1\right)}{2\, \sqrt{2}\, S_1\, \lambda_3}\,, \tag{3.35}$$

$$g(WWH_2) = \frac{g^2\, v_2\, \left(-M_1^2 + 4\, {v_2}^2\, \lambda_2\right)}{2\, \sqrt{2}\, S_2\, \lambda_3}\,, \tag{3.36}$$

$$g(WWH_1H_1) = \frac{g^2\, \left({M_1}^2 - 4\, \left({v_1}^2 + {V_1}^2\right)\, \lambda_1\right)^2}{16\, {S_1}^2\, {\lambda_3}^2}\,, \tag{3.37}$$

$$g(WWH_2H_2) = \frac{g^2\, \left({M_1}^2 - 4\, {v_2}^2\, \lambda_2\right)^2}{16\, {S_2}^2\, {\lambda_3}^2}\,, \tag{3.38}$$

las cantidades S_1 , S_2 y M_1^2 fueron definidas en la sección (3.2.1)

Para el cálculo de los acoples asociados con el bosón neutro Z^0 debemos utilizar métodos aproximativos. Aprovechando el hecho, como se había mencionado antes, que $V_1 >> v_1 \approx v_2$ y $q = v_1/V_1 << 1$, encontramos los siguientes acoples a distintos órdenes de la cantidad pequeña q:

$$
\begin{aligned}
g(Z^0 Z^0 H_1) &= \frac{1}{S_1}\left\{\frac{g^2\,{v_1}^3}{2\,\sqrt{2}\,{C_W}^2}+\frac{g^2\,v_1\,\left(M_1^2-4\,\left({v_1}^2+{V_1}^2\right)\,\lambda_1\right)}{4\,\sqrt{2}\,{C_W}^2\,\lambda_3}-q\left(\frac{g^2\,{v_1}^2\,V_1}{\sqrt{2}\,{C_W}^2}\right)\right.\\
&+ q^2\left[\frac{g^2\,v_1\,\left(4\,{V_1}^2\,\left(\frac{{T_W}^2\,\lambda_1}{{C_W}^2}+\lambda_3\right)+\frac{{T_W}^2\,\left(-M_1^2+4\,{v_1}^2\,\lambda_1+2\,C_{2\,W}\,{v_1}^2\,\lambda_3\right)}{{C_W}^2}\right)}{8\,\sqrt{2}\,{C_W}^2\,\lambda_3}\right]\\
&- q^3\left[\frac{g^2\,\left(-1+2\,C_{2\,W}\right)\,{T_W}^2\,{v_1}^2\,V_1}{4\,\sqrt{2}\,{C_W}^4}\right]+q^4\left[\frac{g^2\,v_1}{256\,\sqrt{2}\,{C_W}^6}\left[-16\,\left(1-4\,C_{2\,W}+C_{4\,W}\right)\,{V_1}^2\right.\right.\\
&+ \frac{2\,\left(-3-37\,C_{2\,W}+8\,C_{4\,W}\right)\,{T_W}^2\,\left(M_1^2-4\,\left({v_1}^2+{V_1}^2\right)\,\lambda_1\right)}{{C_W}^2\,\lambda_3}\\
&+ \left.\left.\left.\frac{\left(46-42\,C_{2\,W}+53\,C_{4\,W}-26\,C_{6\,W}+C_{8\,W}\right)\,{v_1}^2}{{C_W}^4}\right]\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(Z^0 Z^0 H_2) &= \frac{1}{S_2}\left\{\frac{g^2\,{v_1}^3}{2\,\sqrt{2}\,{C_W}^2}+\frac{g^2\,v_1\,\left(-M_1^2+4\,{v_1}^2\,\lambda_2\right)}{4\,\sqrt{2}\,{C_W}^2\,\lambda_3}-q\left(\frac{g^2\,{v_1}^2\,V_1}{\sqrt{2}\,{C_W}^2}\right)\right.\\
&+ q^2\left[\frac{g^2\,v_1\,\left(4\,{V_1}^2\,\lambda_3+\frac{{T_W}^2\,\left(M_1^2-4\,{v_1}^2\,\lambda_2+2\,C_{2\,W}\,{v_1}^2\,\lambda_3\right)}{{C_W}^2}\right)}{8\,\sqrt{2}\,{C_W}^2\,\lambda_3}\right]\\
&- q^3\left[\frac{g^2\,\left(-1+2\,C_{2\,W}\right)\,{T_W}^2\,{v_1}^2\,V_1}{4\,\sqrt{2}\,{C_W}^4}\right]+q^4\left[\frac{g^2\,v_1}{256\,\sqrt{2}\,{C_W}^6}\left[-16\,\left(1-4\,C_{2\,W}+C_{4\,W}\right)\,{V_1}^2\right.\right.\\
&+ \frac{2\,\left(3+37\,C_{2\,W}-8\,C_{4\,W}\right)\,{T_W}^2\,\left(M_1^2-4\,{v_1}^2\,\lambda_2\right)}{{C_W}^2\,\lambda_3}\\
&+ \left.\left.\left.\frac{\left(46-42\,C_{2\,W}+53\,C_{4\,W}-26\,C_{6\,W}+C_{8\,W}\right)\,{v_1}^2}{{C_W}^4}\right]\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(Z^0 Z^0 H_1 H_1) &= \frac{1}{S_1^2}\left\{\frac{g^2\,{v_1}^4}{8\,{C_W}^2}+\frac{g^2\,\left(M_1^2-4\,\left({v_1}^2+{V_1}^2\right)\,\lambda_1\right)^2}{32\,{C_W}^2\,{\lambda_3}^2}-q\left(\frac{g^2\,{v_1}^3\,V_1}{4\,{C_W}^2}\right)\right.\\
&+ q^2\left[\frac{g^2\,{v_1}^2\,\left(\frac{C_{2\,W}\,{T_W}^2\,{v_1}^2}{{C_W}^2}+2\,{V_1}^2\right)}{16\,{C_W}^2}-\frac{g^2\,{T_W}^2\,\left(M_1^2-4\,\left({v_1}^2+{V_1}^2\right)\,\lambda_1\right)^2}{64\,{C_W}^4\,{\lambda_3}^2}\right]\\
&- q^3\left[\frac{g^2\,\left(-1+2\,C_{2\,W}\right)\,{T_W}^2\,{v_1}^3\,V_1}{16\,{C_W}^4}\right]+q^4\left[\frac{-\left(g^2\,\left(1-4\,C_{2\,W}+C_{4\,W}\right)\,{v_1}^2\,{V_1}^2\right)}{64\,{C_W}^6}\right.\\
&+ \frac{g^2\,\left(-3-37\,C_{2\,W}+8\,C_{4\,W}\right)\,{T_W}^2\,\left(M_1^2-4\,\left({v_1}^2+{V_1}^2\right)\,\lambda_1\right)^2}{1024\,{C_W}^8\,{\lambda_3}^2}\\
&+ \left.\left.\frac{g^2\,\left(46-42\,C_{2\,W}+53\,C_{4\,W}-26\,C_{6\,W}+C_{8\,W}\right)\,{v_1}^4}{1024\,{C_W}^{10}}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(Z^0 Z^0 H_2 H_2) &= \frac{1}{S_2^2}\left\{\frac{g^2\,{v_1}^4}{8\,{C_W}^2} + \frac{g^2\left(-M_1^2 + 4\,{v_1}^2\,\lambda_2\right)^2}{32\,{C_W}^2\,{\lambda_3}^2} - q\left(\frac{g^2\,{v_1}^3\,V_1}{4\,{C_W}^2}\right)\right. \\
&+ q^2\left[\frac{g^2\,{v_1}^2\left(\frac{C_{2\,W}\,{T_W}^2\,{v_1}^2}{{C_W}^2} + 2\,{V_1}^2\right)}{16\,{C_W}^2} - \frac{g^2\,{T_W}^2\left(-M_1^2 + 4\,{v_1}^2\,\lambda_2\right)^2}{64\,{C_W}^4\,{\lambda_3}^2}\right] \\
&- q^3\left[\frac{g^2\,\left(-1 + 2\,C_{2\,W}\right)\,{T_W}^2\,{v_1}^3\,V_1}{16\,{C_W}^4}\right] + q^4\left[\frac{-\left(g^2\,\left(1 - 4\,C_{2\,W} + C_{4\,W}\right)\,{v_1}^2\,{V_1}^2\right)}{64\,{C_W}^6}\right. \\
&+ \frac{g^2\,\left(-3 - 37\,C_{2\,W} + 8\,C_{4\,W}\right)\,{T_W}^2\left(-M_1^2 + 4\,{v_1}^2\,\lambda_2\right)^2}{1024\,{C_W}^8\,{\lambda_3}^2} \\
&+ \left.\left.\frac{g^2\,\left(46 - 42\,C_{2\,W} + 53\,C_{4\,W} - 26\,C_{6\,W} + C_{8\,W}\right)\,{v_1}^4}{1024\,{C_W}^{10}}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

3.4.1. Acoples Aproximados de los Higgses y la relación con el ME

En esta sección vamos a calcular de forma aproximada los anteriores acoples cuando $V_1 >> v_1 \sim v_2$, de tal manera que podamos ver la correspondencia entre los Higgses con el Higgs del ME (ver acoples del ME en el capítulo 1, sección (1.8)). Después de considerar la mencionada aproximación y asumir que $\lambda_3 < 0$, los resultados son los siguientes:

Para el Higgs H_2:

$$
\begin{aligned}
g(WWH_2) &\approx \frac{g^2\,v_2}{\sqrt{2}}\,, \\
g(WWH_2H_2) &\approx \frac{g^2}{4}\,, \\
g(Z^0Z^0H_2) &\approx \frac{g^2\,v_1}{2\,\sqrt{2}\,C_W^2}\,, \\
g(Z^0Z^0H_2H_2) &\approx \frac{g^2}{8\,C_W^2}\,.
\end{aligned}
$$

Para el Higgs H_1:

$$
\begin{aligned}
g(WWH_1) &\approx \frac{g^2\,v_2^2\,\lambda_3}{2\,\sqrt{2}\,\lambda_1\,V_1}\,, \\
g(WWH_1H_1) &\approx \frac{g^2\,v_2^2\,\lambda_3^2}{16\,\lambda_1^2\,V_1^2}\,, \\
g(Z^0Z^0H_1) &\approx \frac{g^2\,v_1^2\,\lambda_3}{4\,\sqrt{2}\,\lambda_1\,C_W^2\,V_1}\,, \\
g(Z^0Z^0H_1H_1) &\approx \frac{g^2\,\lambda_3^2\,v_1^2}{32\,V_1^2\,\lambda_1^2\,C_W^2}\,.
\end{aligned}
$$

Si observamos, concluimos que el Higgs H_2 corresponde al Higgs bosónico neutro del ME, pues los acoples resultan ser los mismos.

Algo que falta aún por hacer es determinar las masas de los fermiones. En el apéndice A vamos a llevar a cabo esta tarea para un modelo específico. Las partículas exóticas en este modelo adquieren masas grandes, mientras que algunos fermiones livianos permanecen sin masa, pero elllos pueden adquirir masa a través de correcciones radiativas.

3.5. Conclusiones

Fue un acierto de nuestra parte haber considerado el sector escalar (3.1) con VEV's en la dirección de carga eléctrica neutra más general posible. El análisis mostró que se rompió la simetría de manera adecuada: se llegó a los ocho bosones de Goldstone que se esperaban, y se obtuvieron dos escalares neutros masivos: uno pesado y otro liviano, siendo este último Higgs identificable con el Higgs del ME; y otros dos escalares cargados muy masivos.

En lo que respecta a los bosones gauge, a pesar de que el álgebra se complicó los resultados finales fueron aceptables. Por ejemplo para los bosones vectoriales cargados la masa de $W^{\pm}$ coinciden con la del ME, mientras que la masa de $K^{\pm}$ es muy grande. Para los bosones neutros, el campo correspondiente a la componente imaginaria del bosón $K^0(\bar{K}^0)$ se desacopló de los restantes campos, siendo posible, de inmediato, el cálculo de su masa en forma exacta; mientras la parte real permanece acoplada a los restantes campos. Después del proceso de diagonalización (de manera perturbativa) se obtuvieron los campos físicos, uno de masa pequeña Z^0, que corresponde al bosón intermedio neutro del ME, y dos campos reales más de masas grandes Z'^0 y K^0. Estas masas y los resultados experimentales, vía el parámetro ρ que representa la intensidad relativa entre los Lagrangianos efectivos para las corrientes neutras y cargadas, nos permitió estimar el valor del parámetro $V_1 \approx 2$ Tev.

Los resultados de los acoples de los Higgses neutros con los bosones $W^{\pm}$ y Z^0, corrobora lo dicho anteriormente de que uno de los Higgses corresponde a del ME, mientras que el acople del otro Higgs es bastante débil.

Sobresaliente es el hecho de haber acotado todos los parámetros λ_i de nuestro modelo, resumiendo, encontramos que:

$$\lambda_1 > 0\,,\ \ \lambda_2 > 0\,,\ \ \lambda_3 < 0\,,\ \ \lambda_4 > 0 \ \text{y}\ \ {\lambda_3}^2 < 4\,\lambda_1\,\lambda_2\,.$$

Estudios amplios han sido hechos, considerando el posible descubrimiento de varios tipos de bosones Higgs en futuros experimentos con colisionadores[8]. Se ha estudiado mucho el Higgs CP-par H_1, el mismo del ME $H^0(\eta)$, y aquellos estados que surgen del Modelo Estándar Supersimétrico Mínimo (MSSM), H_1^0, H_2^0, $A^0\, y\, H^{\pm}$.

Una masa límite de 88 GeV ha sido obtenida [9,10] para el ME (H^0), investigando los procesos $e^+e^- \rightarrow ZH^0$ en LEP, mientras límites de 71 GeV han sido dados para los estados más livianos CP-par H_1^0 y CP-impar A^0 de MSSM [11]. El límite típico para $H^{\pm}$ es de 60 GeV [10,12]. Estados doblemente cargados han recibido también alguna atención [13]. Recientes estudios pueden encontrarse en la Ref.[14], que arroja nuevos valores y límites para los Higgses.

Claramente, la fenomenología del sector escalar de los modelos 331 es muy rica y valiosa para estudios adicionales.

Referencias

[1] J. Goldstone, Nuov. Cim. **19**, 154 (1961); J. Goldstone, A. Salam, y S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962); S. Bludman y A. Klein, ibid. **131**, 2364 (1963); W. Gilbert, Phys. Rev. Lett. **12**, 713 (1964); R. F. Streater, Proc. Roy. Soc. (London) **A287**, 510 (1965); D. Kastler, D. W. Robinson, y Swieca, Commun. Math. Phys. **2**, 108 (1966); y el texto: D. Bailin, A. Love. *Introduction to Gauge Field Theory* (Institute of Physics Publishing, 1993).

[2] Hoang Long, *Scalar Sector of the 331 Model with three Higgs Triplets*, hep-ph/9711204vi(1997); N.T. Anh, N.A. Ky, and H.N. Long, [hep-ph/9810273(1998)], *Int. J. Mod. Phys.* **A15**, 283 (2000); M.B. Tully and G.C. Joshi, Preprint UM-P-98/52, [hep-ph/9810282(1999)]; N.T. Anh, N.A. Ky, and H.N. Long, [hep-ph/0011201(2000)].

[3] Jean E. Draper y Jane S. Klingman, *Mathematical analysis: business and economic applications* (Estados Unidos, HARPER, 2 ED. 1972).

[4] Avner Friedman, *Advanced Calculus* (HOLT, Rinehart and Wiston, INC. 1971).

[5] D. Bailin, A. Love. *Introduction to Gauge Field Theory* (Institute of Physics Publishing, 1993).

[6] E. S. Abers and B. W. Lee, Phys. Rep. **9C** 1(1973).

[7] Luis A. Sánchez, William A. Ponce, R. Martínez, $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ *as an* E_6 *subgroup*, Phys. Rev. **D64**, 075013 (2001); R. Martínez, W.A. Ponce y L.A. Sánchez, "$SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_X$ as an $SU(6) \otimes U(1)_X$ subgroup", *Phys. Rev.* **D65**, 055013 (2002), hep-ph/0110246.

[8] Por ejemplo, J. C. Gunion et. al., UCD-97-5, hep-ph/9703330.

[9] ALEPH Collaboration, R. Barate et. al., Phys. Lett. **B440**, 403 (1998).

[10] OPAL Collaboration, G. Abbiendi et. al., preprint CERN-EP/98-173, hep-ex/9811025.

[11] L3 Collaboration, M. Acciarri et. al., Phys. Lett. **B436**, 389 (1998).

[12] L3 Collaboration, M. Acciarri et. al., preprint CERN-EP/98-149.

[13] OPAL Collaboration, P. D. Acton et. al., Phys. Lett. **B295**, 347 (1992).

[14] DELPHI Collaboration, P. Abreu et. al., preprint CERN-EP/2001-062; ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL Collaborations, *Searches for Higgs bosons: Preliminary combined results using LEP data collected at energies up to 202 GeV*, CERN-EP 2000-055.

Conclusiones

En el capítulo 2 hicimos un análisis sistemático de los modelos 331 que surgen del grupo $\mathrm{SU}(3)_c\otimes \mathrm{SU}(3)_L\otimes\ \mathrm{U}(1)_X$, se encontró inicialmente dos parámetros libres a y b asociados con el generador de carga eléctrica en $\mathrm{SU}(3)_L\otimes\mathrm{U}(1)_X$, de los cuales $a = 1$ cuando se considera que el $\mathrm{SU}(2)_L$ del ME es tal que $\mathrm{SU}(2)_L \subset \mathrm{SU}(3)_L$. El valor b sería entonces el único parámetro libre, lo que implica que hay un número infinito de modelos 331. En el caso particular de que $b = 1/2$ los modelos correspondientes no poseen bosones gauge y fermiones con cargas eléctricas exóticas. Para este valor específico de b se ha llegado a ocho modelos diferentes de tres familias. Estos modelos son relativamente nuevos en la literatura, y seis de ellos se introducen aquí por primera vez, hasta donde sabemos. Conclusiones más específicas acerca de este tema se pueden encontrar al final del capítulo 2 de este trabajo.

En el capítulo 3 se encontró que el sector escalar de los modelos 331 en los cuales $b = 1/2$ (los ocho modelos antes mencionados) está compuesto solamente de dos tripletes escalares. Este sector escalar es mucho más simple y económico que el utilizado en la literatura y aún así es suficiente y consistente, pues al romper la simetría arroja dos escalares neutros masivos (uno de ellos puede ser asociado con el Higgs del ME), dos escalares cargados masivos y los ocho bosones de Goldstone que se esperaban, para un total de 12 campos. También se logró acotar varios parámetros libres del modelo y determinar que la componente VEV del triplete escalar ϕ_1, indicada con la letra v_1 es distinto de cero, en oposición a algunos análisis en literatura que lo consideran cero. Se halló también que la masa del bosón gauge $W^{\pm}$ coincide con la del ME, mientras que la masa del bosón $K^{\pm}$ es grande (orden de V_1). Por otro lado, con ayuda de la masa pequeña obtenida para el bosón Z^0 y la masa de $W^{\pm}$, se logró acotar el valor de $V_1 \approx 2$ Tev. También son importantes los resultados obtenidos de los acoples de los Higgses con algunos bosones gauge, que permitieron relacionar de manera categórica un Higgs con el del ME, mientras el otro Higgs posee acoples muy débiles. Este sector escalar, estudiado para un modelo en particular (uno de los ocho modelos, modelo C), arrojó masas aceptables para los fermiones, los campos exóticos adquirieron masas grandes, mientras que algunos otros campos no adquirieron masa, la cual la obtienen a través de correcciones radiativas. Finalmente concluimos, que nuestro estudio, simple y consistente, da resultados mucho más nítidos que los análisis presentados en la literatura.

Apéndice A

Masa para los Fermiones

El sector escalar introducido en capítulo 3 no solo rompe la simetría de una manera apropiada , sino que produce términos de masa aceptables para los fermiones de los modelos 331 sin cargas eléctricas exóticas, tratados en el capítulo 2.

Específicamente, vamos a trabajar el **Modelo C** como un subgrupo de E_6[1]. Escribamos el contenido fermiónico de este modelo:

$Q_L = \begin{pmatrix} u \\ d \\ D \end{pmatrix}_L$	u_L^c	d_L^c	D_L^c
$(3,3,0)$	$(3^*,1,-\frac{2}{3})$	$(3^*,1,\frac{1}{3})$	$(3^*,1,\frac{1}{3})$

$\Psi_L = \begin{pmatrix} e^- \\ \nu_e \\ N_1^0 \end{pmatrix}_L$	$\Phi_L = \begin{pmatrix} E^- \\ N_2^0 \\ N_3^0 \end{pmatrix}_L$	$\chi_L = \begin{pmatrix} N_4^0 \\ E^+ \\ e^+ \end{pmatrix}_L$
$(1,3^*,-\frac{1}{3})$	$(1,3^*,-\frac{1}{3})$	$(1,3^*,\frac{2}{3})$

A.1. Masas de los Quarks

Para el sector de quarks podemos escribir los siguientes términos de Yukawa:

$$-\mathcal{L}_Y^Q = Q_L^T C(h_u\phi_2 u_L^c + h_D\phi_1 D_L^c + h_d\phi_1 d_L^c) + h.c.\,, \tag{A.1}$$

donde h_η , $\eta = u, D$, y d son los acoples de Yukawa que asumimos de orden uno y C es el operador conjugación de carga. De la ec.(A.1) obtenemos el término de masa para el quark up $m_u = h_u\, v_2$, y para el sector de quarks down la matriz de masa en la base (d, D) es de la forma:

$$M_{dD} = \begin{pmatrix} h_d\, v_1 & h_D\, v_1 \\ h_d\, V_1 & h_D\, V_1 \end{pmatrix}. \tag{A.2}$$

Luego del álgebra sobre la anterior matriz, obtenemos las masas $m_d = 0$ y $m_D = h_d\, v_1 + h_D\, V_1$. Que el quark d no tenga masa no es ningún problema, pues este puede adquirir masa a través de correcciones radiativas en el contexto del mismo modelo, o introduciendo nuevos Higgses que no tengan valor esperado en el vacío, o buscando simetrías discretas en el modelo Ref. [2].

A.2. Masas de los Leptones

Para el sector leptónico podemos escribir los siguientes términos de Yukawa:

$$-\mathcal{L}_y^l = \epsilon_{abc}\left[\psi_L^a\, C(h_1\, \Phi_L^b\, \phi_2^c + h_2\, \chi_L^b\, \phi_1^c) + \Phi_L^a\, C(h_3\, \chi_L^b\, \phi_1^c)\right] + h.c.\,, \tag{A.3}$$

donde a, b, c son índices tensoriales $\mathrm{SU}(3)_L$ y los Yukawas son de nuevo de orden uno. Estos nuevos términos producen en la base (e, E) la matriz de masa

$$M_{eE} = \begin{pmatrix} -h_2\, v_1 & -h_3\, v_1 \\ h_2\, V_1 & h_3\, V_1 \end{pmatrix} \tag{A.4}$$

con autovalores $m_e = 0$ y $m_E = -h_2\, v_1 + h_3\, V_1$, con similares consecuencias a las presentadas en el sector quark down.

Para los leptones neutros en la base $(\nu_e, N_1, N_2, N_3, N_4)$ obtenemos la matriz de masa

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & h_1\, v_2 & -h_2\, V_1 \\ 0 & 0 & -h_1\, v_2 & 0 & h_2\, v_1 \\ 0 & -h_1\, v_2 & 0 & 0 & -h_3\, V_1 \\ h_1\, v_2 & 0 & 0 & 0 & h_3\, v_1 \\ -h_2\, V_1 & h_2\, v_1 & -h_3\, V_1 & h_3\, v_1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

los autovalores son $0, \pm h_1\, v_2\,, \pm\sqrt{{h_1}^2\, {v_2}^2 + \left({h_2}^2 + {h_3}^2\right)\, \left({v_1}^2 + {V_1}^2\right)}$. El autovalor cero corresponde al neutrino ν_e, el cual puede desarrollar masa a través de correcciones radiativas[2].

Referencias

[1] Luis A. Sánchez, William A. Ponce, R. Martínez, $\mathrm{SU}(3)_c\otimes\mathrm{SU}(3)_L\otimes\mathrm{U}(1)_X$ *as an* E_6 *subgroup*, Phys. Rev. **D64**, 075013 (2001).

[2] W. A. Ponce, Y. Giraldo y L. A. Sánchez, *The minimal scalar sector of 331 models without exotic electric charge* (en preparación).