

**Universidad de Nariño**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Física**



**Funciones de Green aplicadas a problemas de contorno basados en  
ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales con funciones  
exponenciales**

**TRABAJO DE GRADO**

Para optar el título profesional de:

Físico

**Wilmar Arbey Pinto Pinta**

San Juan de Pasto, Colombia

Noviembre 2021

**Universidad de Nariño**  
**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
**Departamento de Física**

**Funciones de Green aplicadas a problemas de contorno basados en  
ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales con funciones  
exponenciales**

**Wilmar Arbey Pinto Pinta**

**TRABAJO DE GRADO**

Director:

**Álvaro Rugeles Péres**  
**Ph.D. en Física**

San Juan de Pasto, Colombia

Noviembre 2021

©2021 - Wilmar Arbey Pinto Pinta

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable  
Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Acta de Aceptación

9 de Noviembre de 2021

Fecha de sustentación:

9 de noviembre del 2021 con acta 014

---

---

---

Ph.D. Álvaro Rugeles Pérez

Director

M.Sc. Jaime Alfredo Betancourt Minganquer

Jurado

M.Sc. Sandra Esperanza Sanchez Sierra

Jurado

San Juan de Pasto, Noviembre 2021

## **Agradecimientos**

Quiero expresar mis sinceros agradecimientos a todas las personas que estuvieron conmigo durante todo este proceso, en especial a mis padres Tito Pinto y Nuvia Pinta, a mis hermanos Sandra y Jhon Pinto, a mi esposa Milena Cuastumal por darme a mi hija Lina María quien es el motor de mi vida y por brindarme su apoyo incondicional durante toda mi carrera. Agradezco a la universidad de Nariño, al programa de Física y a mis profesores, por abrirme las puertas para entrar al maravilloso mundo de la ciencia. Un agradecimiento muy especial a mi asesor el PhD. Álvaro Rúgeles Pérez, quien ha brindado los mejor de sí mismo para sus alumnos y para su universidad, es un ejemplo como profesor y como persona.

*Dedicado a aquellas personas que han jugado parte fundamental en el transcurso de mi vida; mis padres, mis hermanos, mi esposa y mi hija adorada.*

**Funciones de Green aplicadas a problemas de contorno basados en  
ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales con funciones  
exponenciales**

## Resumen

*En este trabajo de grado se implementa el método de la función de Green aplicado a la solución de una clase de problemas en ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales con funciones exponenciales no homogéneas sujetas a unas condiciones iniciales y de frontera. Se construyen soluciones examinando la influencia tanto de las fuentes como de las condiciones iniciales y de frontera.*

**Green's functions applied to contour problems based on differential  
equations second-order linear with exponential functions**

## **Abstract**

*In this degree work, it is implemented the Green's function method applied to the solution of a kind of problems that are based on differential equations second-order linear with exponential functions differential equation, this equation is not homogeneous and it is subject to initial and frontier conditions. Solutions are built by studying the influence of both the sources and the initial and frontier conditions.*

# Contenido

Título . . . . .	i
Título . . . . .	ii
Aceptación . . . . .	iv
Agradecimientos . . . . .	v
Dedicatoria . . . . .	vi
Resumen . . . . .	vii
Abstract . . . . .	viii
Lista de Figuras . . . . .	xi
<b>1 Conceptos preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Formulación del problema . . . . .	2
1.3 Funciones de Bessel . . . . .	2
1.3.1 Notas historicas . . . . .	3
1.3.2 Función de Bessel de primera especie . . . . .	4
1.3.3 Función de Bessel de segunda especie . . . . .	6
1.4 Primera y segunda derivada de las funciones de Bessel . . . . .	7
1.4.1 Primera especie . . . . .	7
1.4.2 Segunda especie . . . . .	9
<b>2 Ecuación no homogénea sujeta a condiciones iniciales</b>	<b>12</b>
2.1 Fundamento teórico . . . . .	12
2.1.1 Método de la función de Green . . . . .	12
2.2 Planteamiento del problema . . . . .	14
2.3 El método de la función de Green . . . . .	15
2.3.1 Determinación de la ecuación diferencial para la función de Green . .	15
2.3.2 Condiciones de frontera para la función de Green . . . . .	17
2.3.3 Determinación de la función de Green . . . . .	18
2.3.4 Solución al problema (2.12) en términos de $G(t', t)$ . . . . .	27
2.4 Caso no homogéneo . . . . .	30
2.4.1 Fuente sinusoidal . . . . .	30
2.4.2 Fuente exponencial . . . . .	34
2.4.3 Fuente pulso rectangular . . . . .	36
2.4.4 Fuente en términos de las funciones de Bessel . . . . .	41

<b>3 Ecuación no homogénea sujeta a condiciones en la frontera</b>	<b>46</b>
3.1 Planteamiento del problema . . . . .	46
3.2 El método de la función de Green . . . . .	47
3.2.1 Ecuación diferencial para la función de Green . . . . .	47
3.2.2 Condiciones de frontera para la función de Green . . . . .	48
3.2.3 Determinación de la función de Green . . . . .	53
3.2.4 Solución del problema (3.1) en términos de $G(x', x)$ . . . . .	57
3.3 Caso homogéneo . . . . .	59
3.4 Caso no homogéneo . . . . .	61
3.4.1 Fuente sinusoidal . . . . .	61
3.4.2 Fuente exponencial . . . . .	65
3.4.3 Fuente pulso rectangular . . . . .	67
3.4.4 Fuente en términos de las funciones de Bessel . . . . .	70
<b>4 Caso particular</b>	<b>73</b>
4.1 Condiciones iniciales . . . . .	73
4.1.1 Solución en términos de la función de Green . . . . .	74
4.1.2 Caso homogéneo . . . . .	77
4.1.3 Caso no homogéneo . . . . .	79
4.2 Condiciones de frontera . . . . .	82
4.2.1 Solución en términos de la función de Green . . . . .	82
4.2.2 Caso homogéneo . . . . .	86
4.2.3 Caso no homogéneo . . . . .	88
<b>5 Conclusiones</b>	<b>90</b>
<b>APENDICES . . . . .</b>	<b>91</b>
<b>A Función Gamma</b>	<b>91</b>
<b>B Caso particular</b>	<b>92</b>
<b>C Demostración de propiedad (1.9)</b>	<b>93</b>
<b>D Función delta de Dirac</b>	<b>94</b>
<b>E Función hipergeométrica</b>	<b>97</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>

# Listado de Figuras

1.1	Friedrich Wilhelm Bessel.	3
1.2	Función de Bessel	5
1.3	Función de Neumann	7
2.1	Calculo del limite cuando $t'$ tiende a infinito de $J(t')$ y $Y(t')$ con $a = 3$ y $b = 2$ .	22
2.2	Calculo del limite cuando $t'$ tiende a infinito de las funciones de Bessel $J'(t')$ y $Y'(t')$ con $a = 3$ y $b = 2$ .	23
2.3	Solución al sistema (2.45)	24
2.4	Definición de las constantes $C1, C2$ y las funciones de Bessel para la función de Green, donde $G1[tp]$ y $G2[tp]$ representan $G(t', t)$ para los intervalos $t_1 < t' < t$ y $t' > t$ respectivamente y done $tp$ hace referencia a $t'$	25
2.5	Se prueba que la función de Green $G(t', t)$ encontrada cumple con la ecuación diferencial, es continua y que $G_{t'}(t', t)$ tiene una discontinuidad igual a 1 en el punto $t' = t$	25
2.6	Grafica de $G(t', t)$ para $t = 0$ (linea negra), $t = 1$ (linea azul), $t = 2$ (linea violeta) y $t = 3$ (linea roja).	26
2.7	Graficas de $G_{t'}(t', t)$ para diferentes valores de $t$	27
2.8	Se prueba que $x_H(t)$ es solución de la ecuación diferencial y que cumple con las condiciones iniciales.	29
2.9	Gráfica de $x(t)$ vs $t$ (linea azul) y $x'(t)$ vs $t$ (linea roja) para el caso $f(t) = 0$	30
2.10	Gráfica de $f(t)$ vs $t$ para el caso $f(t) = Asin(\omega t)$ , para $A = 1.5$ , y $\omega = \pi$	31
2.11	Calculo de $I_a$ e $I_b$ En términos de $z$ para la función sinusoidal.	32
2.12	se establecen las integrales 2.58, donde poner ";" al final de cada línea hace que Mathematica ejecute la orden pero no muestra el resultado en pantalla.	33
2.13	Se usa Mathematica para probar que (2.56) cumple con (2.59), donde la función de Green y su derivada es definida como se muestra en la figura 2.8	33
2.14	Gráfica de $x(t)$ vs $t$ (azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) para el caso $f(t) = Asen(\omega t)$ .	34
2.15		35
2.16	Calculo de $I_a$ e $I_b$ En términos de $z$ para la función exponencial.	36
2.17	Se prueba que (2.61) satisface el problema (2.63)	37
2.18	Gráfica de $x(t)$ vs $t$ (azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) para el caso $f(t) = Ce^{-\lambda t}$ , con $C = \frac{3}{4}$ y $\lambda = \frac{1}{10}$ .	37
2.19	Función pulso rectangular con $K_1 = 2, K_2 = 3, t_2 = 3$ y $t_3 = 6$ .	38
2.20	Calculo de $I_a$ e $I_b$ para el caso $f(t) = K_1 + K_2 H(t - t_2) - K_2 H(t - t_3)$	39

2.21 Se prueba que (2.66) satisface es problema (2.67), donde $k = K_1, K_1 + K_2$	40
2.22 Gráfica de $x(t)$ vs $t$ ( azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) para una fuente pulso rectangular, con $K_1 = 2, K_2 = 3, t_2 = 3$ y $t_3 = 6$	40
2.23 Representación grafica de $f(t) = AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})$	41
2.24 Cálculo de la primera y segunda integral de (2.69)	42
2.25 Cálculo de la segunda y tercera integral de (2.69)	43
2.26 Cálculo de la segunda y tercera integral de (2.69)	43
2.27 Se prueba la identidad (2.71) de manera gráfica	44
2.28 Gráfica de $x(t)$ vs $t$ ( azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) para $f(t) = AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})$ , con $A = 5$ y $B = 7$	45
 3.1 se definen $J(t'), Y(t')$ , $J_p(t')$ , $Y_p(t')$ , $A, B, D$ y $E$ , al igual que las constantes $C_1, C_2, C_3$ y $C_4$	56
3.2 Se define la función de Green junto con su derivada y se prueba que ésta satisface (3.22) y (3.31)	56
3.3 Gráfica de $G(t', t)$ y $G_{t'}(t', t)$ , con $t = 4$	57
3.4 se prueba que la solución encontrada satisface el problema (3.36)	60
3.5 Gráfica de $x(t)$ vs $t$ ( azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) para $f(t) = 0$	61
3.6 Gráfica de $Asin(\omega t)$ vs $t$ con $K = 3$ , y $\omega = \pi$	62
3.7	63
3.8 Se prueba que $x(t)$ satisface el problema (3.41)	64
3.9 Gráfica de $x(t)$ vs $t$ ( azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) para $f(t) = Ksen(\omega t)$	64
3.10 Gráfica de $f(t)$ vs $t$ para la función exponencial con $C = 5$ y $l = \frac{5}{6}$	65
3.11	66
3.12 Se prueba que (3.42) satisface (3.44)	66
3.13 Gráfica de $x(t)$ vs $t$ ( azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) para $f(t) = Ce^{-\lambda t}$ , con $C = 5$ y $l = \frac{5}{6}$	67
3.14 Gráfica de $K_1 + K_2 H(t - t_1) - K_2 H(t - t_2)$ vs $t$ con $t_1 = 3, t_2 = 6, K_1 = 2$ y $K_2 = 3$	68
3.15	69
3.16 Se prueba gráficamente que $R(t) = f(t)$ y también que se cumplen las condiciones de frontera	69
3.17 Gráfica de $x(t)$ vs $t$ ( azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) para la fuente pulso rectangular	70
3.18 Gráfica de $AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})$ vs $t$ , con $A = 5$ y $B = 7$	71
3.19 Se verifica que se cumplen las condiciones iniciales y que $R(t) = f(t)$	71
3.20 Gráfica de $x(t)$ vs $t$ ( azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) en el caso de $f(t) = AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})$	72
 4.1 Solución al sistema (4.8) en Mathematica, donde $\lambda$ es representado por $l$	75

4.2 Se define la función de Green junto con su derivada y se prueba que ésta satisface (4.5) y (4.8). . . . .	76
4.3 Gráfica de $G(t', t)$ y $G_{t'}(t', t)$ , con $t = 6$ . . . . .	77
4.4 Se prueba que la $x_H$ satisface (4.12). . . . .	78
4.5 Gráfica de $x(t)$ vs $t$ (azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) para $f(t) = 0$ con $\lambda = \frac{2}{10}$ . . . . .	78
4.6 Grafica de $f(t) = A\sin(\omega t)$ vs $t$ con $A = 3$ y $\omega = \pi$ . . . . .	79
4.7 Calculo de $I_a$ e $I_b$ y definición de $I_1$ e $I_2$ . . . . .	80
4.8 Se verifica que se cumplen las condiciones iniciales y que $R(t) = f(t)$ . . . . .	81
4.9 Gráfica de $x(t)$ vs $t$ (azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) para $f(t) = A\sin(\omega t)$ . . . . .	81
4.10 se definen $J(t')$ , $Y(t')$ , $J_p(t')$ , $Y_p(t')$ , $A$ , $B$ , $D$ y $E$ , al igual que las constantes $C_1$ , $C_2$ , $C_3$ y $C_4$ . . . . .	84
4.11 Se define la función de Green junto con su derivada y se prueba que ésta satisface (4.19) y (4.22). . . . .	85
4.12 Gráfica de $G(t', t)$ y $G_{t'}(t', t)$ , con $t = 10$ . . . . .	85
4.13 se prueba de manera grafica que (4.24)satisface (4.25). . . . .	87
4.14 Gráfica de $x(t)$ vs $t$ (azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) en el caso de $f(t) = 0$ . . . . .	87
4.15 . . . . .	88
4.16 Se prueba que $x(t)$ satisface el problema (4.27) . . . . .	89
4.17 Gráfica de $x(t)$ vs $t$ (azul) y $x'(t)$ vs $t$ (roja) para $f(t) = K\sin(\omega t)$ . . . . .	89
D.1 Función de Heaviside para $x_0 = 2$ . . . . .	95

# Capítulo 1

## Conceptos preliminares

### 1.1 Introducción

Una de las tareas de los métodos matemáticos para la física es el estudio de las ecuaciones diferenciales, la diversidad de ellas y sus aplicaciones, ya que por medio de ellas es posible describir los fenómenos que se presentan en la naturaleza, tanto a nivel macro a través de las ecuaciones de movimiento de Newton, o también a nivel microscópico por medio de la física cuántica y la ecuación de Schrödinger.

Dado lo anterior el presente trabajo se enfatiza en la aplicación del método de la función de Green para la solución de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden lineales con funciones exponenciales. El estudio se basa en ecuaciones no homogéneas las cuales tienen asociadas diferentes fuentes y diversas condiciones iniciales y de contorno, para esto se hace uso de la solución general de dichas ecuaciones dadas de manera homogénea.

El método de la función de Green se aplica a la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales lineales no homogéneas con condiciones de frontera o condiciones iniciales. El método de la función de Green desde su aparición en 1825 se ha convertido en una herramienta fundamental para abordar temas con ecuaciones diferenciales no homogéneas bajo ciertas condiciones de contorno, esta técnica ha demostrado ser útil en diversas áreas de la física. La importancia de este método radica en su generalidad para aplicarse a sistemas físicos gobernados por ecuaciones diferenciales [2].

## 1.2 Formulación del problema

El presente proyecto se centra en la solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden, lineales y cuyos coeficientes son funciones exponenciales, que cuentan con valores en la frontera o con condiciones iniciales, aplicando el método de la función de Green.

A continuación se presenta la ecuación que es objeto de este estudio :

$$y'' + (ae^x - b)y = f(x), \quad (1.1)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes reales. Para examinar la ecuación (1.1) por medio del método de la función de Green es necesario hacer uso de la solución general de esta ecuación dada de manera homogénea,[1] es decir

$$y'' + (ae^x - b)y = 0. \quad (1.2)$$

La solución a la ecuación (1.2) es una función que está representada en términos de las funciones de Bessel, dicha solución se representa de la siguiente manera.

$$y(x) = c_1 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{x/2}) + c_2 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{x/2}). \quad (1.3)$$

En la expresión (1.3)  $J_\nu(x)$  y  $Y_\nu(x)$  son las funciones de Bessel de primera y segunda especie respectivamente, mientras que  $c_1$  y  $c_2$  son constantes arbitrarias .[1]

## 1.3 Funciones de Bessel

Las funciones de Bessel se encuentran entre las funciones más utilizadas de la física matemática. Las funciones de Bessel  $J_\nu(x)$  de orden  $\nu$ , primero definidas por el matemático Daniel Bernoulli y más tarde generalizadas por Friedrich Bessel, son soluciones canónicas de la ecuación diferencial de Bessel:

$$x^2y'' + xy' + (x - \nu^2)y = 0. \quad (1.4)$$

donde  $\nu$  es un número real o complejo. El caso más común es cuando  $\nu$  es un entero, aunque la solución para  $\nu$  no entero es similar. [2]

### 1.3.1 Notas históricas

**Friedrich Wilhelm Bessel.** Alemania (1784 1846) no mostró signos de habilidad académica inusual en la escuela, aunque mostró gusto por las matemáticas y la física. Él dejó la escuela con la intención convertirse en un aprendiz de comerciante, un deseo que pronto se materializó con un período de siete años de Aprendizaje no remunerado con una gran empresa mercantil en Bremen. El joven Bessel demostró ser tan experto en la contabilidad y el cálculo que se le concedió un pequeño salario, con aumentos, después del primer año.

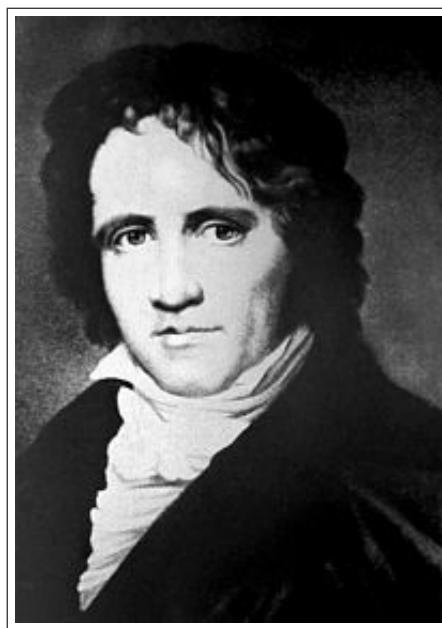


Figura 1.1: Friedrich Wilhelm Bessel.

Un interés en el comercio exterior llevó a Bessel a estudiar geografía e idiomas por la noche, aprendiendo asombrosamente a leer y escribir en inglés en solo tres meses. También estudió navegación para calificar como oficial de carga a bordo de un barco, pero su curiosidad innata pronto lo obligó a investigar astronomía en un nivel más fundamental. Todavía sirviendo su aprendizaje, Bessel aprendió a observar las posiciones de las estrellas con suficiente precisión como para determinar la longitud de Bremen, verificando sus resultados frente a las revistas astronómicas profesionales. Entonces él abordó el problema más formidable de determinar la

órbita del cometa de Halley. Después de ver el acuerdo cercano entre los cálculos de Bessel y los de Halley, el astrónomo alemán Olbers animó a Bessel para mejorar su ya impresionante trabajo con más observaciones. La mejora en los cálculos, un logro equivalente a una tesis doctoral moderna, fueron publicados con la recomendación de Olbers. Bessel luego trabajó en los observatorios cerca de Bremen y en Konigsberg, este último puesto que va acompañado de una cátedra. (El título de doctor, requerido para el profesorado, fue otorgado por la Universidad de Göttingen por recomendación de Gauss.)

Dado un registro tan impresionante en astronomía, parece lógico que las funciones famosas que llevan el nombre de Bessel surgieron de sus investigaciones de perturbaciones en sistemas planetarios. Él mostró que tales perturbaciones podrían ser divididas en dos efectos y tratados por separado: la atracción directa obvia debido al planeta perturbador y un efecto indirecto causado por la respuesta del Sol a las fuerzas perturbadoras. Las llamadas funciones de Bessel aparecen entonces como coeficientes en la serie tratamiento de la perturbación indirecta. Aunque hay casos especiales de funciones de Bessel fueron descubiertos por Bernoulli, Euler y Lagrange el tratamiento sistemático por Bessel claramente establecido su preeminencia, un homenaje apropiado al creador de las más famosas funciones en física matemática. [2]

### 1.3.2 Función de Bessel de primera especie

La función de Bessel de primera especie se representa en términos de series de potencias de la siguiente manera

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (\nu + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad (1.5)$$

para  $\nu$  entero positivo. También es posible definir (1.5) para valores no enteros de  $\nu$ , La única dificultad es interpretar correctamente  $(\nu + k)!$ , pero esto se lo puede solucionar insertando la función gamma en (1.2) recordando que  $\Gamma(n + 1) = n!$  (véase **Ápendice A**) para obtener

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (1.6)$$

Ahora, si  $\nu$  es negativo (1.5) y (1.6) se reescriben

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (-\nu + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (1.7)$$

y

$$J_{-\nu}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}. \quad (1.8)$$

En la figura (1.2) se observa la gráfica de la función  $J_\nu(x)$  para algunos valores de  $\nu$ .

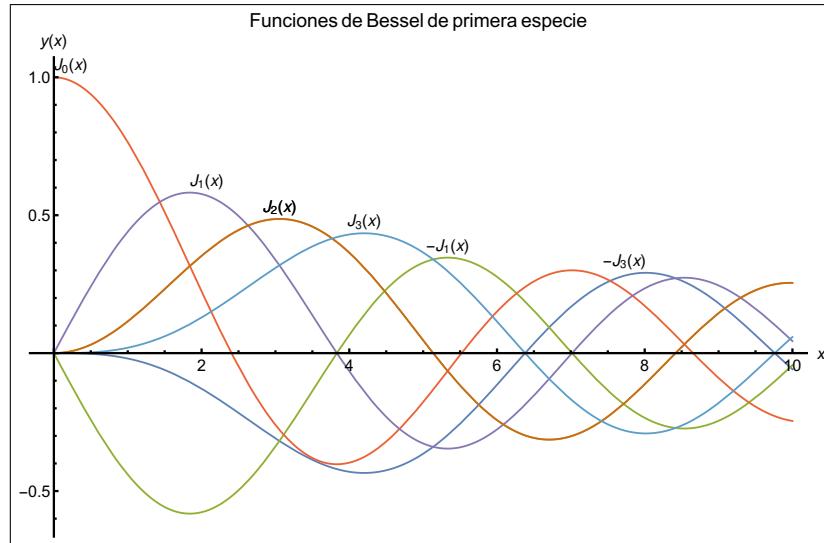


Figura 1.2: Función de Bessel

Ahora, tambien es importante tener en cuenta que si  $\nu$  es entero, entonces  $J_\nu(x)$  y  $J_{-\nu}(x)$  no son linealmente independientes y se relacionan por

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x), \quad (1.9)$$

por ende no es posible una solución de (1.4) en términos de estas dos funciones [2]. La demostración de (1.9) se muestra en el **Ápendice B**.

### 1.3.3 Función de Bessel de segunda especie

También llamada función de Neumann, de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias se sabe que la ecuación de Bessel por ser de segundo orden tiene dos soluciones independientes. En efecto para términos de orden entero  $\nu$  hemos encontrado dos soluciones linealmente dependientes  $J_\nu(x)$  y  $J_{-\nu}(x)$ , como lo muestra (1.9). Sin embargo, cuando  $\nu$  no es entero, entonces ambas soluciones son linealmente independientes, para este efecto se introduce una nueva función conocida como función de Bessel de segunda especie  $Y_\nu(x)$  la cual es linealmente independiente de  $J_\nu(x)$  para todo  $\nu$ , esta función se expresa de la siguiente manera,

$$Y_\nu(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \nu} \frac{J_\alpha(x) \cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}. \quad (1.10)$$

Por consiguiente, tanto para  $\nu$  entero como para  $\nu$  no entero, la solución general de la ecuación de Bessel con índice  $\nu$  puede escribirse como

$$y(x) = AJ_\nu(x) + BY_\nu(x). \quad (1.11)$$

Por supuesto, si  $\nu$  no es un número entero, el denominador  $\sin(\nu\pi)$  de (1.10) no es nulo y el resultado del límite es, trivialmente,

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)}. \quad (1.12)$$

Ahora si  $\nu = n$  es un número entero  $\cos(n\pi) = (-1)^n$  y teniendo en cuenta (1.9) se tiene que el numerador de (1.10) es nulo. Por supuesto, para  $n =$  entero el denominador  $\sin(n\pi)$  de (1.10) es también nulo, por lo que en principio se da una indeterminación de tipo  $0/0$ . Esta indeterminación se resuelve efectuando el proceso del límite con cuidado, por ejemplo, aplicando la regla de L'Hopital para obtener:

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\alpha(x)}{\partial \alpha} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-\alpha}(x)}{\partial \alpha} \right]_{\alpha=\nu}. \quad (1.13)$$

Por otro lado también cabe mencionar que  $Y_\nu$  también cumple con la propiedad

$$Y_{-\nu}(x) = (-1)^\nu Y_\nu(x), \quad (1.14)$$

y por ende tampoco sería posible escribir la solución de (1.4) en términos de  $Y_{-\nu}(x)$  y  $Y_\nu(x)$ .

[3] En la figura (1.3) se tiene la gráfica de  $Y_\nu(x)$  para algunos valores  $\nu$ .

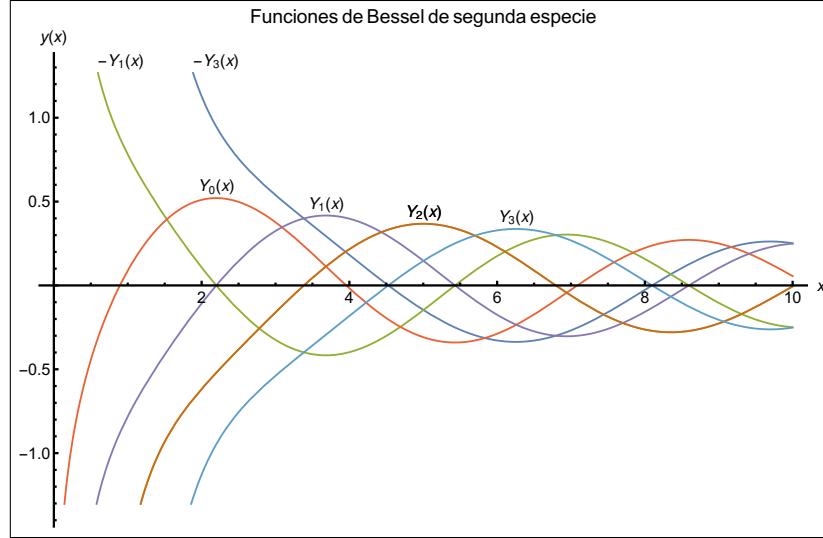


Figura 1.3: Función de Neumann

## 1.4 Primera y segunda derivada de las funciones de Bessel

Dado que la función de Green hace uso de las primera y segunda derivadas de (1.3) se procede a realizar estos cálculos.

### 1.4.1 Primera especie

Inicialmente se calcula la derivada de  $x^\nu J_\nu(x)$ , es decir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] &= \frac{d}{dx} \left[ x^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+2\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu + k + 1)} \right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+2\nu)(-1)^k x^{2k+2\nu-1}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(\nu + k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(k+\nu)(-1)^k x^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu} k! (\nu+k)\Gamma(\nu+k)} \end{aligned}$$

donde se ha usado el hecho de que  $\Gamma(x) = (x - 1)\Gamma(x - 1)$ ,

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^{(\nu-1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma((\nu-1)+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k},$$

finalmente

$$\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] = x^\nu J_{\nu-1}(x). \quad (1.15)$$

Ahora se calcula la derivada de  $x^{-\nu} J_\nu(x)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] &= \frac{d}{dx} \left[ x^{-\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! (k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \right] \\ &= \frac{d}{dx} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{\nu+2k} k! (k+\nu)!} x^{2k} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{2^{\nu+2k} k! (k+n)!} x^{2k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{\nu-1+2k} (k-1)! (k+\nu)!} x^{2k-1}, \end{aligned}$$

donde se debe tener en cuenta que el primer término de la sumatoria se anula, haciendo  $k - 1 = r$  resulta,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{2^{\nu+1+2r} r! (r+\nu+1)!} x^{2r+1} &= -x^{-\nu} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{2^{\nu+1+2r} r! (r+\nu+1)!} x^{\nu+1+2r} \\ &= -x^{-\nu} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! (r+\nu+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2r}, \\ \Rightarrow \frac{d}{dx}[x^{-\nu} J_\nu(x)] &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Derivando el lado izquierdo de (1.15) como un producto se tiene:

$$\nu x^{\nu-1} J_\nu(x) + x^\nu J'_{\nu-1}(x) = x^\nu J_{\nu-1}(x),$$

en donde al multiplicar por  $x^{-\nu}$  resulta

$$\frac{\nu}{x^\nu} J_\nu(x) + J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x). \quad (1.17)$$

De la misma manera, desarrollando la derivada en (1.16) y multiplicandoluego por  $x^\nu$  , se tiene

$$\begin{aligned} -\nu x^{-\nu-1} J_\nu(x) + x^{-\nu} J'_\nu(x) &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \\ -\frac{\nu}{x^\nu} J_\nu(x) + J'_\nu(x) &= -J_{\nu+1}(x). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Ahora sumando (1.17) y (1.18) se llega a

$$2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x),$$

finalmente se tiene que la primera derivada de la función de Bessel es

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2}[J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)], \quad (1.19)$$

mientras que la segunda derivada es

$$J''_\nu(x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}[J_{\nu-2}(x) - J_\nu(x)] + \frac{1}{2}[J_{\nu+2}(x) - J_\nu(x)] \right\},$$

Por consiguiente

$$J''_\nu(x) = \frac{1}{4}[J_{\nu-2}(x) + J_{\nu+2} - 2J_\nu(x)]. \quad (1.20)$$

### 1.4.2 Segunda especie

Se calcula la derivada de de (1.12) de la siguiente manera

$$Y'_\nu(x) = \frac{J'_\nu(x) \cos(\nu\pi) - J'_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)},$$

teniendo en cuenta (1.19) resulta

$$\begin{aligned}
Y'_\nu(x) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{(J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)) \cos(\nu\pi) - (J_{-\nu-1}(x) - J_{-\nu+1}(x))}{\sin(\nu\pi)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{J_{\nu-1}(x) \cos(\nu\pi) - J_{\nu+1}(x) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu-1}(x) + J_{-\nu+1}(x)}{\sin(\nu\pi)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{J_{\nu-1}(x) \cos(\nu\pi) - J_{\nu+1}(x) \cos(\nu\pi) - J_{-(\nu+1)}(x) + J_{-(\nu-1)}(x)}{\sin(\nu\pi)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{J_{\nu-1}(x) \cos(\nu\pi) + J_{-(\nu-1)}(x) - J_{\nu+1}(x) \cos(\nu\pi) - J_{-(\nu+1)}(x)}{\sin(\nu\pi)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{J_{\nu-1}(x) \cos(\nu\pi) + J_{-(\nu-1)}(x)}{\sin(\nu\pi)} - \frac{J_{\nu+1}(x) \cos(\nu\pi) + J_{-(\nu+1)}(x)}{\sin(\nu\pi)} \right],
\end{aligned}$$

teniendo en cuenta las siguientes identidades trigonométricas

$$\cos(\nu\pi) = -\cos(\nu\pi + \pi) = -\cos((\nu + 1)\pi)$$

$$\cos(\nu\pi) = -\cos(\nu\pi - \pi) = -\cos((\nu - 1)\pi)$$

$$\sin(\nu\pi) = -\sin(\nu\pi + \pi) = -\sin((\nu + 1)\pi)$$

$$\sin(\nu\pi) = -\sin(\nu\pi - \pi) = -\sin((\nu - 1)\pi)$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
Y'_\nu(x) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{-J_{\nu-1}(x) \cos[(\nu - 1)\pi] + J_{-(\nu-1)}(x)}{-\sin[(\nu - 1)\pi]} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[ \frac{-J_{\nu+1}(x) \cos[(\nu + 1)\pi] + J_{-(\nu+1)}(x)}{-\sin[(\nu + 1)\pi]} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{J_{\nu-1}(x) \cos[(\nu - 1)\pi] - J_{-(\nu-1)}(x)}{\sin[(\nu - 1)\pi]} \right] \\
&\quad - \frac{1}{2} \left[ \frac{J_{\nu+1}(x) \cos[(\nu + 1)\pi] - J_{-(\nu+1)}(x)}{\sin[(\nu + 1)\pi]} \right],
\end{aligned}$$

finalmente

$$Y'_\nu(x) = \frac{1}{2}[Y_{\nu-1}(x) - Y_{\nu+1}(x)] \quad (1.21)$$

y en efecto

$$Y''_\nu(x) = \frac{1}{4}[Y_{\nu-2}(x) + Y_{\nu+2} - 2Y_\nu(x)]. \quad (1.22)$$

# Capítulo 2

## Ecuación no homogénea sujeta a condiciones iniciales

### 2.1 Fundamento teórico

A continuación se presenta el mecanismo que se usa con la función de Green para la solución de ecuaciones diferenciales, lineales de segundo orden con condiciones iniciales o de contorno.

#### 2.1.1 Método de la función de Green

Considere una ecuación diferencial lineal expresada en la forma general,

$$\hat{L}(x)u(x) = f(x), \quad x \in [x_1, x_2], \quad (2.1)$$

donde (2.1) está sujeta a unas condiciones iniciales o de contorno las cuales son suministradas por cada problema en particular. Es de mencionar que,  $\hat{L}(x)$  es un operador diferencial,  $u(x)$  es una función desconocida,  $f(x)$  es una función conocida llamada también el término no homogéneo. Operacionalmente, la solución a la ecuación (2.1) es

$$u(x) = \hat{L}^{-1}(x)f(x), \quad (2.2)$$

siendo  $\hat{L}^{-1}(x)$  el inverso del operador  $\hat{L}(x)$ , puesto que éste es un operador diferencial, es razonable esperar que su inversa tenga la forma de un operador integral y que a su vez cumpla con la propiedad

$$\hat{L}(x)\hat{L}^{-1}(x) = \hat{L}^{-1}(x)\hat{L}(x) = \mathbb{I},$$

donde  $\mathbb{I}$  es el operador identidad. Ahora se define el operador inverso  $\hat{L}^{-1}(x)$  como:

$$\hat{L}^{-1}(x)f(x) = \int G(x', x)f(x')dx', \quad (2.3)$$

en la cual el kernel o nucleo asociado al operador diferencial  $\hat{L}(x)$  es la función de Green  $G(x', x)$ . Nótese que  $G(x', x)$  es una función bidimensional que depende tanto de  $x'$  como  $x$ . Para completar la idea del operador inverso  $\hat{L}^{-1}(x)$ , se introduce la función delta de Dirac  $\delta(x' - x)$  como el operador identidad  $\mathbb{I}$ . A continuación se mencionan algunas de las propiedades de la función delta de Dirac (vease **Ápendice C.**).

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}, \quad (2.4)$$

$$\int_a^b \delta(x - x_0)dx = 1, \quad x \in [a, b] \quad (2.5)$$

y

$$\int_a^b f(x)\delta(x - x_0)dx' = f(x_0), \quad x \in [a, b]. \quad (2.6)$$

Entonces, teniendo en cuenta (2.6) se puede escribir

$$f(x) = \int f(x')\delta(x' - x)dx', \quad (2.7)$$

por lo tanto (2.2) se reescribe como

$$u(x) = \hat{L}^{-1}(x)f(x) = \hat{L}^{-1}(x) \int f(x')\delta(x' - x)dx', \quad (2.8)$$

donde el operador  $\hat{L}^{-1}(x)$  actúa sobre  $x$ , entonces es posible incluirlo dentro de la integral como sigue,

$$u(x) = \hat{L}^{-1}(x)f(x) = \int \hat{L}^{-1}(x)\delta(x' - x)f(x')dx', \quad (2.9)$$

comparando (2.3) con (2.9) es notable que se debe cumplir que

$$G(x', x) = \hat{L}^{-1}(x)\delta(x' - x),$$

entonces

$$\hat{L}(x)G(x', x) = \delta(x' - x) \quad (2.10)$$

y la solución a la ecuación (2.1) será

$$u(x) = \int G(x', x) f(x') dx'. \quad (2.11)$$

La ventaja de este método radica en que la función de Green es independiente de la fuente  $f(x)$ , esto es, solo depende de la forma de la ecuación diferencial y de sus condiciones iniciales o de frontera[4].

## 2.2 Planteamiento del problema

Se considera la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) = f(t), \quad t \geq t_1 \quad (2.12)$$

Con  $a$  y  $b$  constantes reales,  $f(t)$  representa la fuente externa y la incógnita  $x(t)$  representa la respuesta a dicha fuente, además (2.12) está sujeta a las siguientes condiciones iniciales

$$x(t_1) = d_1, \quad \frac{dx(t_1)}{dt} = d_2, \quad (2.13)$$

donde  $d_1$  y  $d_2$  son constantes conocidas. También se debe notar que el operador diferencial asociado a este problema tiene la forma:

$$\hat{L}(t) = \frac{d^2}{dt^2} + (ae^t - b). \quad (2.14)$$

Ahora se procede a aplicar el método de la función de Green para encontrar una expresión para  $x(t)$ , la cual cumpla con (2.12) y (2.13).

## 2.3 El método de la función de Green

### 2.3.1 Determinación de la ecuación diferencial para la función de Green

Para determinar la ecuación diferencial correspondiente a la función de Green para el problema (2.12) y que cumpla con (2.13) se procede de la siguiente manera:

La variable  $t$  en la ecuación (2.12) se renombra como  $t'$  para obtener

$$\frac{d^2x(t')}{dt'^2} + (ae^{t'} - b)x(t') = f(t'), \quad t' \geq t_1, \quad (2.15)$$

entonces,

$$x(t_1) = d_1, \quad \frac{dx(t_1)}{dt'} = d_2. \quad (2.16)$$

Ahora se procede a multiplicar (2.16) por una función de Green  $G(t', t)$  por ahora desconocida, la cual depende de dos parámetros  $t'$  y  $t$ , luego se integra por  $t'$  entre  $t_1$  e infinito como sigue:

$$\int_{t_1}^{\infty} G(t', t) \left[ \frac{d^2x(t')}{dt'^2} + (ae^{t'} - b)x(t') \right] dt' = \int_{t_1}^{\infty} G(t', t)f(t')dt',$$

separando la integral de la izquierda,

$$\int_{t_1}^{\infty} G(t', t) \frac{d^2x(t')}{dt'^2} dt' + \int_{t_1}^{\infty} G(t', t)(ae^{t'} - b)x(t')dt' = \int_{t_1}^{\infty} G(t', t)f(t')dt', \quad (2.17)$$

se calcula la primera integral por partes con  $G(t', t) = u$  y  $\frac{d^2x(t')}{dt'^2} = dv$ , entonces,

$$\int_{t_1}^{\infty} G(t', t) \frac{d^2x(t')}{dt'^2} dt' = G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} - \int_{t_1}^{\infty} G_{t'}(t', t') \frac{dx(t')}{dt'} dt',$$

aplicando nuevamente integración por partes

$$\int_{t_1}^{\infty} G(t', t) \frac{d^2x(t')}{dt'^2} dt' = G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty}$$

$$-G_{t'}(t', t)x(t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} + \int_{t_1}^{\infty} G_{t't}(t', t)x(t')dt'$$

reemplazando el anterior resultado en (2.17)

$$\begin{aligned}
 & G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} - G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} + \int_{t_1}^{\infty} G_{t't}(t', t) x(t) dt' \\
 & + \int_{t_1}^{\infty} G(t', t)(ae^{t'} - b)x(t')dt' = \int_{t_1}^{\infty} G(t', t)f(t')dt', \\
 \Rightarrow \quad & G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} - G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} + \\
 & \int_{t_1}^{\infty} x(t') \left[ G_{t't'}(t', t) + (ae^{t'} - b)G(t', t) \right] dt' = \int_{t_1}^{\infty} G(t', t)f(t')dt', \\
 \Rightarrow \quad & G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} - G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} + \\
 & \int_{t_1}^{\infty} x(t') \left[ \frac{d^2}{dt'^2} + (ae^{t'} - b) \right] G(t', t) dt' = \int_{t_1}^{\infty} G(t', t)f(t')dt',
 \end{aligned}$$

escribiendo la anterior expresión como:

$$\begin{aligned}
 & G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} - G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} + \\
 & \int_{t_1}^{\infty} x(t') \hat{L}(t') G(t', t) dt' = \int_{t_1}^{\infty} G(t', t)f(t')dt',
 \end{aligned}$$

teniendo en cuenta (2.10),

$$\hat{L}(t')G(t', t) = \delta(t' - t) \quad (2.18)$$

ó

$$G_{t't'}(t', t) + (ae^{t'} - b)G(t', t) = \delta(t' - t), \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \quad & G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} - G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} + \\
 & \int_{t_1}^{\infty} x(t')\delta(t' - t)dt' = \int_{t_1}^{\infty} G(t', t)f(t')dt'.
 \end{aligned}$$

Ahora por la propiedad (2.6) se sabe que

$$\int_{t_1}^{\infty} x(t') \delta(t' - t) dt' = x(t), \quad t \in [t_1, \infty] \quad (2.20)$$

entonces

$$G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} - G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} + x(t) = \int_{t_1}^{\infty} G(t', t) f(t') dt'$$

y

$$x(t) = G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} - G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} + \int_{t_1}^{\infty} G(t', t) f(t') dt'. \quad (2.21)$$

La expresión (2.21) es la solución buscada, la cual queda determinada completamente cuando se conozca la  $G(t', t)$ .

Para encontrar  $G(t', t)$  es necesario resolver (2.19) la cual se conoce como la ecuación diferencial para la función de Green, que como se puede observar tiene la misma forma de (2.15), la cual requiere de unas condiciones de frontera para poder determinar las constantes que aparecen en su solución.

### 2.3.2 Condiciones de frontera para la función de Green

Para encontrar las condiciones de frontera para la función de Green se analizan los primeros dos términos de lado derecho de (2.21) como sigue

$$\begin{aligned} & G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} - G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} = \\ & G_{t'}(\infty, t) x(\infty) - G_{t'}(t_1, t) x(t_1) - G(\infty, t) \frac{dx(\infty)}{dt'} + G(t_1, t) \frac{dx(t_1)}{dt'} \end{aligned} \quad (2.22)$$

En la expresión anterior se tiene cuatro términos de frontera los cuales se detallan así:

- $G_{t'}(\infty, t) x(\infty)$ . Se observa que en las condiciones iniciales (2.13)  $x(\infty)$  no se conoce, entonces para eliminar este término se impone la condición de frontera para la función de Green en el infinito

$$G_{t'}(\infty, t) = 0. \quad (2.23)$$

- $G_{t'}(t_1, t) x(t_1)$ . En (2.13) el término  $x(t_1) = d_1$  entonces,

$$G_{t'}(t_1, t) x(t_1) = d_1 G_{t'}(t_1, t) \quad (2.24)$$

- $G(\infty, t) \frac{dx(\infty)}{dt'}$ . En (2.16)  $\frac{dx(\infty)}{dt'}$  no se conoce, entonces para eliminar este término se impone la siguiente condición

$$G(\infty, t) = 0 \quad (2.25)$$

- $G(t_1, t) \frac{dx(t_1)}{dt'}$ . En (2.16)  $\frac{dx(t_1)}{dt'} = d_2$  entonces,

$$G(t_1, t) \frac{dx(t_1)}{dt'} = d_2 G(t_1, t). \quad (2.26)$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores se tiene que,

$$G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} - G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=t_1}^{t'=\infty} = d_2 G(t_1, t) - d_1 G_{t'}(t_1, t), \quad (2.27)$$

por lo tanto (2.21) se expresa como

$$x(t) = d_2 G(t_1, t) - d_1 G_{t'}(t_1, t) + \int_{t_1}^{\infty} G(t', t) f(t') dt'. \quad (2.28)$$

La expresión anterior representa la solución a (2.12) la cual está en términos de las condiciones iniciales y la función de Green.

### 2.3.3 Determinación de la función de Green

Para determinar la función de Green usamos el hecho de que según (2.19), (2.23) y (2.25)  $G(t', t)$  debe satisfacer la siguiente ecuación diferencial con condiciones de frontera

$$G_{t't'}(t', t) + (ae^{t'} - b)G(t', t) = \delta(t' - t), \quad t' \geq t_1, \quad (2.29)$$

$$G(\infty, t) = 0, \quad G_{t'}(\infty, t) = 0.$$

Para encontrar la función de Green  $G(t', t)$  es necesario resolver la ecuación diferencial (2.29), en la cual aparece la función delta de Dirac  $\delta(t' - t)$  que tiene una singularidad en el punto  $t' = t$  ( $\delta(0) = \infty$ ), dado esto, inicialmente se soluciona la ecuación diferencial (2.29) en todo el intervalo  $t' \geq t_1$  excepto en el punto  $t' = t$ , por lo tanto dicho intervalo se divide en dos partes  $t_1 < t' < t$  y  $t' > t$ . Ahora teniendo en cuenta (2.4) en cada subintervalo se tiene que  $\delta(t' - t)|_{t' \neq t} = 0$ , entonces (2.29) se reduce a

$$G_{tt'}(t', t) + (ae^{t'} - b)G(t', t) = 0, \quad t' \geq t_1 \text{ y } t' \neq t, \quad (2.30)$$

$$\text{con } G(\infty, t) = 0, \quad G_{t'}(\infty, t) = 0.$$

La ecuación diferencial (2.30) es de la forma (1.2) cuya solución es dada por (1.3) que para este caso se representa como

$$G(t', t) = \begin{cases} C_1 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) + C_2 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}), & t_1 \leq t' < t \\ C_3 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) + C_4 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}), & t' > t \end{cases}, \quad (2.31)$$

donde  $J_\nu(x)$  y  $Y_\nu(x)$  son las funciones de Bessel de primera y segunda especie respectivamente, mientras que  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  son constantes arbitrarias,[1] Las cuales deben de ser determinadas.

Para determinar  $C_1, C_2, C_3$  y  $C_4$  se necesita de cuatro ecuaciones algebraicas, dos de ellas se obtienen de los términos de frontera dados en (2.30). Reescribiendo éstas condiciones en base a (2.31) se tiene

$$C_3 J_{2\sqrt{b}}(\infty) + C_4 Y_{2\sqrt{b}}(\infty) = 0, \quad (2.32)$$

$$C_3 J'_{2\sqrt{b}}(\infty) + C_4 Y'_{2\sqrt{b}}(\infty) = 0, \quad (2.33)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\lim_{t' \rightarrow \infty} (2\sqrt{a}e^{t'/2}) = \infty$ , además  $G_{t'}(t', t)$  esta dada por

$$G_{t'}(t', t) = \frac{1}{2} \sqrt{a} e^{t'/2} \begin{cases} C_1[J_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) - J_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{a}e^{t'/2})] + \\ C_2[Y_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) - Y_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{a}e^{t'/2})], & t_1 \leq t' < t \\ C_3[J_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) - J_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{a}e^{t'/2})] + \\ C_4[Y_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) - Y_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{a}e^{t'/2})], & t' > t \end{cases}, \quad (2.34)$$

para determinar las otras dos ecuaciones se examina el comportamiento de la función de Green  $G(t', t)$  en el punto  $t' = t$  y así poder completar la definición de la función de Green en todo el intervalo  $t' > t_1$ . Con este fin se integran los dos lados de la ecuación diferencial (2.30) sobre un intervalo arbitrario  $[t_\alpha, t_\beta] \in [t_1, t']$ , es decir,

$$\begin{aligned} \int_{t_\alpha}^{t_\beta} G_{t't'}(t', t) dt' + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} (ae^{t'} - b)G(t', t) dt' &= \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \delta(t' - t) dt'. \\ \Rightarrow G_{t'}(t_\beta, t) &= G_{t'}(t_\alpha, t) - \int_{t_\alpha}^{t_\beta} (ae^{t'} - b)G(t', t) dt' + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \delta(t' - t) dt'. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Suponiendo ahora que  $G(t', t)$  tiene una discontinuidad de tamaño  $\Delta G$  en  $t' = t$ , esto es

$$G(t', t) = \tilde{G}(t', t) + H(t' - t)\Delta G, \quad (2.36)$$

siendo  $\tilde{G}(t', t)$  una función continua en  $t' = t$  y  $H(t' - t)$  la función de Heaviside o escalón (véase **Ápendice C**), la cual tiene la siguiente propiedad.

$$H(t' - t) = \begin{cases} 0, & t' < t \\ 1, & t' > t. \end{cases},$$

De (2.36) se tiene que

$$G_{t'}(t', t) = \tilde{G}_{t'}(t', t) + \delta(t' - t)\Delta G. \quad (2.37)$$

En (2.37) se observa que si  $G(t', t)$  tuviera una discontinuidad en  $t' = t$ , entonces su derivada tendría una discontinuidad infinita en ese punto. Por consiguiente la igualdad refleja en En (2.35) sería imposible, pues en  $t_\beta = t$  el miembro derecho es finito mientras que el izquierdo es infinito debido a la función delta situada en  $t$ . Por lo tanto no es posible que  $G(t', t)$  sea

discontinua en  $t' = t$ . Como  $t$  es un punto arbitrario, se concluye que  $G(t', t)$  ha de ser continua en todo el intervalo  $t' > t_1$ .

Ahora se procede a integrar (2.30) pero esta vez se hace sobre un intervalo infinitesimal alrededor de  $t' = t$ , o sea en el intervalo  $t^- < t' < t^+$

$$\begin{aligned} \int_{t^-}^{t^+} G_{t't'}(t', t) dt' + \int_{t^-}^{t^+} (ae^{t'} - b)G(t', t) dt' &= \int_{t^-}^{t^+} \delta(t' - t) dt', \\ \Rightarrow G_{t'}(t^+, t) - G_{t'}(t^-, t) + \int_{t^-}^{t^+} (ae^{t'} - b)G(t', t) dt' &= \int_{t^-}^{t^+} \delta(t' - t) dt', \end{aligned} \quad (2.38)$$

teniendo en cuenta que  $G(t', t)$  es continua se tiene que

$$G(t^+, t) = G(t^-, t) \quad \text{o} \quad G(t^+, t) - G(t^-, t) = 0, \quad (2.39)$$

por lo tanto,

$$\int_{t^-}^{t^+} (ae^{t'} - b)G(t', t) dx' = 0, \quad (2.40)$$

donde el integrando  $(ae^{t'} - b)G(t', t)$  es continuo y al integrar en un intervalo infinitesimal el área bajo la curva da cero. Reemplazando (2.40) en (2.38), se tiene

$$G_{t'}(t^+, t) - G_{t'}(t^-, t) = 1, \quad (2.41)$$

con  $\int_{t^-}^{t^+} \delta(t' - t) dt' = 1$ . La ecuación (2.41) representa una condición que debe satisfacer la función de Green  $G(t', t)$ , la cual consiste en que su primera derivada tiene una discontinuidad igual a 1 en el punto  $t' = t$ . Esta discontinuidad es producida por la función delta de Dirac  $\delta(t' - t)$  en la ecuación diferencial del problema (2.30) y por la continuidad de  $G(t', t)$ . De acuerdo con (2.31) la ecuación (2.41) se reescribe

$$C_4 J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + C_3 Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) - C_1 J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) - C_2 Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) = 1 \quad (2.42)$$

Finalmente la condición de continuidad de la función de Green  $G(t', t)$  en  $t' = t$  dada por (2.39), y teniendo en cuenta (2.31) adquiere la forma

$$C_4 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + C_3 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) - C_1 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) - C_2 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) = 0. \quad (2.43)$$

En resumen, los resultados obtenidos en (2.32), (2.33), (2.42) y (2.43) representan el sistema de cuatro ecuaciones algebraicas necesarias para encontrar las incógnitas  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ , presentes en la función de Green  $G(t', t)$  dada en (2.31). Por lo tanto el sistema a resolver es el siguiente

$$C_4 J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) + C_3 Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) - C_1 J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) - C_2 Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) = 1,$$

$$C_4 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) + C_3 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) - C_1 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) - C_2 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) = 0,$$

$$C_3 J_{2\sqrt{b}}(\infty) + C_4 Y_{2\sqrt{b}}(\infty) = 0,$$

$$C_3 J'_{2\sqrt{b}}(\infty) + C_4 Y'_{2\sqrt{b}}(\infty) = 0.$$

(2.44)

Para solucionar el anterior sistema inicialmente se analiza el comportamiento de  $J(t')$ ,  $J'(t')$ ,  $Y(t')$  y  $Y'(t')$  cuando  $t'$  tiende a infinito. Para calcular dicho límite se utiliza el programa Wolfram Mathematica cuyo código y resultado se muestra en la siguiente figura

```

■ Funciones de Bessel de primera y segunda especie
In[1]:= J = BesselJ[2 Sqrt[2], 2 Sqrt[3] Exp[t/2]]
Out[1]= BesselJ[2 √2, 2 √3 et/2]

In[2]:= Y = BesselY[2 Sqrt[2], 2 Sqrt[3] Exp[t/2]]
Out[2]= BesselY[2 √2, 2 √3 et/2]

■ Límite de las funciones de Bessel cuando t tiende a infinito
In[3]:= Limit[J, t → Infinity]
Out[3]= 0

In[4]:= Limit[Y, t → Infinity]
Out[4]= 0

```

Figura 2.1: Calculo del límite cuando  $t'$  tiende a infinito de  $J(t')$  y  $Y(t')$  con  $a = 3$  y  $b = 2$ .

Los resultados de la figura 2.1 muestran que tanto  $J(t')$  como  $Y(t')$  tienden a cero cuando  $t'$  tiende a infinito, dado esto la tercera ecuación de (2.44) se cumple para  $C_3$  y  $C_4$  arbitrarias.

De la misma manera se calcula el límite de  $J'(t')$  y  $Y'(t')$  cuando  $t'$  tiende infinito, como se muestra en la figura 2.2

■ Derivada de las funciones de Bessel

```
In[5]:= DY = D[Y, t]
Out[5]=  $\frac{1}{2} \sqrt{3} e^{t/2} \left( \text{BesselY}\left[-1+2\sqrt{2}, 2\sqrt{3} e^{t/2}\right] - \text{BesselY}\left[1+2\sqrt{2}, 2\sqrt{3} e^{t/2}\right] \right)$ 
```

■ Límite de la derivada de las funciones de Bessel en el infinito

```
In[6]:= DJ = D[J, t]
Out[6]=  $\frac{1}{2} \sqrt{3} e^{t/2} \left( \text{BesselJ}\left[-1+2\sqrt{2}, 2\sqrt{3} e^{t/2}\right] - \text{BesselJ}\left[1+2\sqrt{2}, 2\sqrt{3} e^{t/2}\right] \right)$ 
```

```
In[7]:= Limit[DJ, t → Infinity]
Out[7]= Interval[{-∞, ∞}]
```

```
In[8]:= Limit[DY, t → Infinity]
Out[8]= Interval[{-∞, ∞}]
```

Figura 2.2: Calculo del límite cuando  $t'$  tiende a infinito de las funciones de Bessel  $J'(t')$  y  $Y'(t')$  con  $a = 3$  y  $b = 2$ .

La figura 2.2 muestra que cuando  $t'$  tiende a infinito,  $J'(t')$  y  $Y'(t')$  no toman un valor determinado, ya que oscilan en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  dado esto y teniendo en cuenta el hecho de que las constantes  $C_3$  y  $C_4$  pueden tomar valores arbitrarios, para que se cumpla la ultima ecuación del sistema (2.44), necesariamente se debe cumplir que  $C_3 = C_4 = 0$ . Teniendo en cuenta lo anterior y desarrollando la derivada de  $G(t', t)$  como lo muestra (2.34) éste sistema se reduce a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sqrt{a} e^{t/2} C_1 [J_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{a}e^{t/2}) - J_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{a}e^{t/2})] + \\ & \frac{1}{2} \sqrt{a} e^{t/2} C_2 [Y_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{a}e^{t/2}) - Y_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{a}e^{t/2})] = -1, \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$C_1 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + C_2 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) = 0.$$

Resolviendo el sistema (2.45) se encuentra que  $C_1$  y  $C_2$  son funciones de  $t$  y están dadas por,

$$C_1 = \pi Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) \quad \text{y} \quad C_2 = -\pi J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}), \quad (2.46)$$

como se puede ver en la figura 2.3

■ Definición de funciones y derivadas

```
In[1]:= J = BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp[t/2]]
Out[1]= BesselJ[2 √b, 2 √a et/2]

In[2]:= DJ = D[J, t]
Out[2]= 1/2 √a et/2 (BesselJ[-1 + 2 √b, 2 √a et/2] - BesselJ[1 + 2 √b, 2 √a et/2])

In[3]:= Y = BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp[t/2]]
Out[3]= BesselY[2 √b, 2 √a et/2]

In[4]:= DY = D[Y, t]
Out[4]= 1/2 √a et/2 (BesselY[-1 + 2 √b, 2 √a et/2] - BesselY[1 + 2 √b, 2 √a et/2])

■ Solución del sistema
```

```
In[5]:= FullSimplify[Solve[{C1 J + C2 Y == 0, C1 DJ + C2 DY == -1}, {C1, C2}]] // TraditionalForm
Out[5]//TraditionalForm=
{C1 → π Y2√b(2√a et/2), C2 → -π J2√b(2√a et/2)}
```

Figura 2.3: Solución al sistema (2.45)

Reemplazando  $C_3 = 0$ ,  $C_4 = 0$  y (2.46) en (2.31) se encuentra que la expresión que representa la función de Green es dada por

$$G(t', t) = \begin{cases} \pi Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) \\ -\pi J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}), & t_1 \leq t' \leq t \\ 0, & t' \geq t. \end{cases} \quad (2.47)$$

Ahora la función de Green dada en (2.47) debe cumplir con la ecuación diferencial (2.30), al igual que las condiciones (2.39) y (2.41). Para probar este hecho se usa Wolfram Mathematica como se muestra a continuación.

```

■ Definición de constantes y funciones
In[1]:= C1 = Pi BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp[t/2]]
Out[1]=  $\pi \text{BesselY}\left[2\sqrt{b}, 2\sqrt{a} e^{t/2}\right]$ 

In[2]:= C2 = -Pi BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp[t/2]]
Out[2]=  $-\pi \text{BesselJ}\left[2\sqrt{b}, 2\sqrt{a} e^{t/2}\right]$ 

In[3]:= J = BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp[tp/2]]
Out[3]=  $\text{BesselJ}\left[2\sqrt{b}, 2\sqrt{a} e^{tp/2}\right]$ 

In[4]:= Y = BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp[tp/2]]
Out[4]=  $\text{BesselY}\left[2\sqrt{b}, 2\sqrt{a} e^{tp/2}\right]$ 

■ Función de Green
In[5]:= G1[tp_] = C1 J + C2 Y
In[6]:= G2[tp_] = 0
Out[6]= 0

```

Figura 2.4: Definición de las constantes  $C1$ ,  $C2$  y las funciones de Bessel para la función de Green, donde  $G1[tp]$  y  $G2[tp]$  representan  $G(t', t)$  para los intervalos  $t_1 < t' < t$  y  $t' > t$  respectivamente y donde  $tp$  hace referencia a  $t'$

```

■ Solución de la ecuación diferencial
In[7]:= FullSimplify[D[G1[tp], {tp, 2}] + (a E^tp - b) G1[tp]]
Out[7]= 0

■ Continuidad de la función de Green
In[8]:= G2[t] - G1[t]
Out[8]= 0

■ Discontinuidad de la primera derivada
In[9]:= DG1[tp_] = D[G1[tp], tp]
In[10]:= DG2[tp_] = D[G2[tp], tp]
Out[10]= 0

In[11]:= FullSimplify[DG2[t] - DG1[t]]
Out[11]= 1

```

Figura 2.5: Se prueba que la función de Green  $G(t', t)$  encontrada cumple con la ecuación diferencial, es continua y que  $G'_t(t', t)$  tiene una discontinuidad igual a 1 en el punto  $t' = t$

Las figuras 2.3 y 2.4 prueban que la función de Green encontrada satisface el problema

(2.30) al igual que las condiciones (2.39) y (2.41), dado esto, ahora se procede a realizar su respectiva gráfica para varios valores de  $t$ , la cual se muestra a continuación.

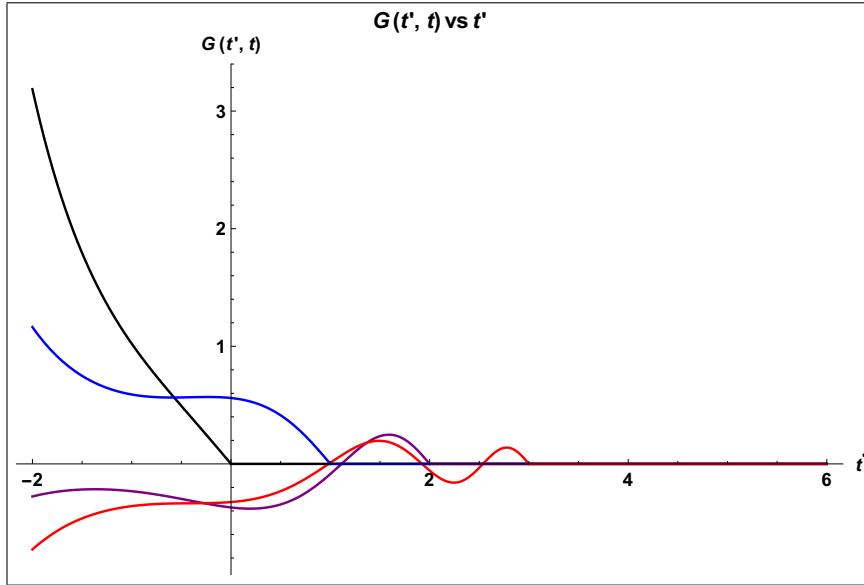
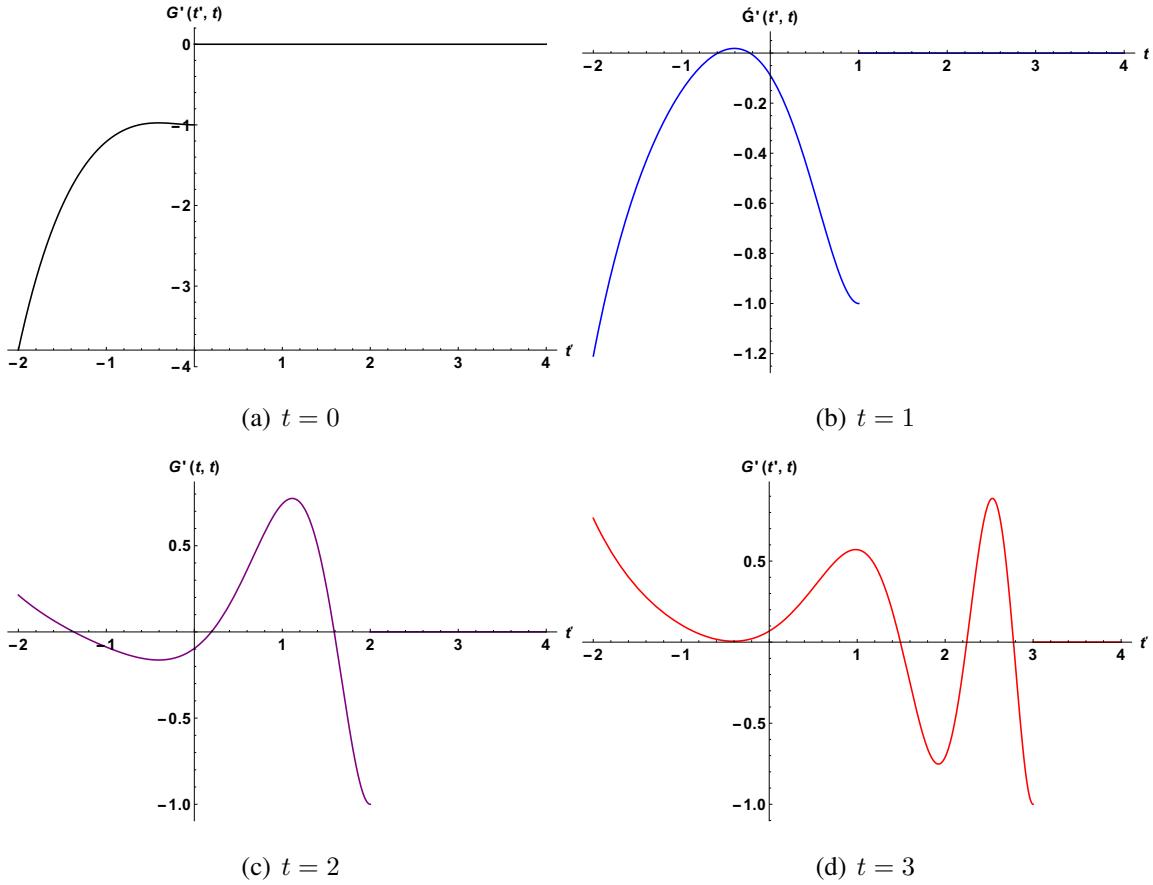


Figura 2.6: Grafica de  $G(t', t)$  para  $t = 0$  (linea negra),  $t = 1$  (linea azul),  $t = 2$  (linea violeta) y  $t = 3$  (linea roja).

En la figura 2.5 se aprecia que efectivamente  $G(t', t)$  cumple con la condición de ser continua en el punto  $t' = t$  y también que es posible escribir (2.47) de la siguiente manera

$$G(t', t) = \pi H(t - t') \left[ Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) - J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) \right]. \quad (2.48)$$

Ahora se realiza la gráfica de la primera derivada de  $G(t', t)$  para diferentes valores de  $t$  como se muestra en figura 2.7, en la cual se puede apreciar la discontinuidad de ancho 1 que tiene  $G_{t'}(t', t)$  en el punto  $t' = t$ .

Figura 2.7: Graficas de  $G_{t'}(t', t)$  para diferentes valores de  $t$ 

### 2.3.4 Solución al problema (2.12) en términos de $G(t', t)$

De acuerdo con la función de Green  $G(t', t)$  dada por (2.47) la integral que aparece en expresión para  $x(t)$  dada en (2.28) se parte en dos intervalos:  $t_1 \leq t' \leq t$  y  $t' \geq t$ , pero en el segundo intervalo  $G(t', t)$  se reduce a cero, por lo tanto la integral para este intervalo también lo hace y  $x(t)$  se reescribe como,

$$x(t) = d_2 G(t_1, t) - d_1 G_{t'}(t_1, t) + \int_{t_1}^t G(t', t) f(t') dt', \quad (2.49)$$

donde según (2.34) y (2.47),  $G(t_1, t)$  y  $G_{t'}(t_1, t)$  están dadas por

$$G(t_1, t) = \pi Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t_1/2}) - \pi J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t_1/2}), \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} G_{t'}(t_1, t) &= \frac{1}{2}\sqrt{ae^{t/2}}\pi Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}})[J_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}}) - J_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}})] \\ &- \frac{1}{2}\sqrt{ae^{t/2}}\pi J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}})[Y_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}}) - Y_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}})] \end{aligned} \quad (2.51)$$

Reemplazando (2.50) y (2.51) en (2.49) se tiene que

$$\begin{aligned} x(t) &= \pi d_2[Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}})J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t_1/2}}) - J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}})Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t_1/2}})] \\ &- \pi \frac{1}{2}\sqrt{ae^{t/2}}d_1\{Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}})[J_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}}) - J_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}})]\} \\ &+ \pi \frac{1}{2}\sqrt{ae^{t/2}}d_1\{J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}})[Y_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}}) - Y_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}})]\} \\ &+ \pi Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}}) \int_{t_1}^t J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t'/2}})f(t')dt' \\ &- \pi J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}}) \int_{t_1}^t Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t'/2}})f(t')dt'. \end{aligned} \quad (2.52)$$

La expresión (2.52) representa la solución a la ecuación diferencial (2.12) y cumple con las condiciones (2.13). En dicha solución se puede notar que, como las funciones de Bessel y la fuente son continuas en  $t = t_1$ , se garantiza que si las condiciones iniciales se cumplen para el caso homogéneo también se cumplirán para cualquier fuente, ya que en este caso las integrales que intervienen en la solución se desvanecen. Dado lo anterior, para verificar que (2.52) es la solución apropiada se toma el caso cuando  $f(t) = 0$ , es decir, se resuelve el siguiente problema,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) &= 0, \quad t \geq t_1 \\ x(t_1) = d_1, \quad \frac{dx(t_1)}{dt_1} &= d_2. \end{aligned} \quad (2.53)$$

De (2.52) se tiene que la solución a (2.53) es dada por

$$\begin{aligned} x_H(t) &= \pi d_2[Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}})J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t_1/2}}) - J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}})Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t_1/2}})] \\ &- \pi \frac{1}{2}\sqrt{ae^{t/2}}d_1\{Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}})[J_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}}) - J_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}})]\} \\ &+ \pi \frac{1}{2}\sqrt{ae^{t/2}}d_1\{J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{ae^{t/2}})[Y_{2\sqrt{b}-1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}}) - Y_{2\sqrt{b}+1}(2\sqrt{ae^{t_1/2}})]\}, \end{aligned} \quad (2.54)$$

donde el subíndice  $H$  hace referencia a que esta solución corresponde al caso homogéneo.

Ahora, haciendo uso de Mathematica se comprueba que  $x_H(t)$  dado en (2.54) satisface el problema (2.53) como se muestra en la siguiente figura , donde  $C_1, C_2, J$  y  $Y$  son definidas de la misma manera como en la figura 2.4.

```

■ Función de Green y sus derivadas
In[5]:= G[tp_] = C1 J + C2 Y;
In[6]:= dG = D[G[tp], tp];
In[7]:= DG[tp_] = dG;

■ Función solución
In[8]:= x[t_] = d2 G[t1] - d1 DG[t1]
Out[8]= -d1 \left(-\frac{1}{2} \sqrt{a} e^{t1/2} \pi \text{BesselJ}\left[2 \sqrt{b}, 2 \sqrt{a} e^{t/2}\right] \left(\text{BesselY}\left[-1+2 \sqrt{b}, 2 \sqrt{a} e^{t1/2}\right]-\text{BesselY}\left[1+2 \sqrt{b}, 2 \sqrt{a} e^{t1/2}\right]\right)+\frac{1}{2} \sqrt{a} e^{t1/2} \pi \left(\text{BesselJ}\left[-1+2 \sqrt{b}, 2 \sqrt{a} e^{t1/2}\right]-\text{BesselJ}\left[1+2 \sqrt{b}, 2 \sqrt{a} e^{t1/2}\right]\right) \text{BesselY}\left[2 \sqrt{b}, 2 \sqrt{a} e^{t/2}\right]\right)+d2 \left(\pi \text{BesselJ}\left[2 \sqrt{b}, 2 \sqrt{a} e^{t1/2}\right] \text{BesselY}\left[2 \sqrt{b}, 2 \sqrt{a} e^{t/2}\right]-\pi \text{BesselJ}\left[2 \sqrt{b}, 2 \sqrt{a} e^{t1/2}\right] \text{BesselY}\left[2 \sqrt{b}, 2 \sqrt{a} e^{t/2}\right]\right)

■ Ecuación diferencial
In[9]:= FullSimplify[D[x[t], {t, 2}] + (a Exp[t] - b) x[t]]
Out[9]= 0

■ Condiciones iniciales
In[10]:= FullSimplify[x[t1]]
Out[10]= d1
In[11]:= dx = D[x[t], t];
In[12]:= Dx[t_] = dx;
In[13]:= FullSimplify[Dx[t1]]
Out[13]= d2

```

Figura 2.8: Se prueba que  $x_H(t)$  es solución de la ecuación diferencial y que cumple con las condiciones iniciales.

A continuación se muestra la representación grafica de dicha solución, al igual que de su derivada, con  $a = \frac{3}{10}$ ,  $b = \frac{1}{5}$ ,  $d_1 = \frac{1}{2}$ ,  $d_2 = 1$  y  $t_1 = 0$ , los cuales tomaran el mismo valor para lo que sigue del capítulo.

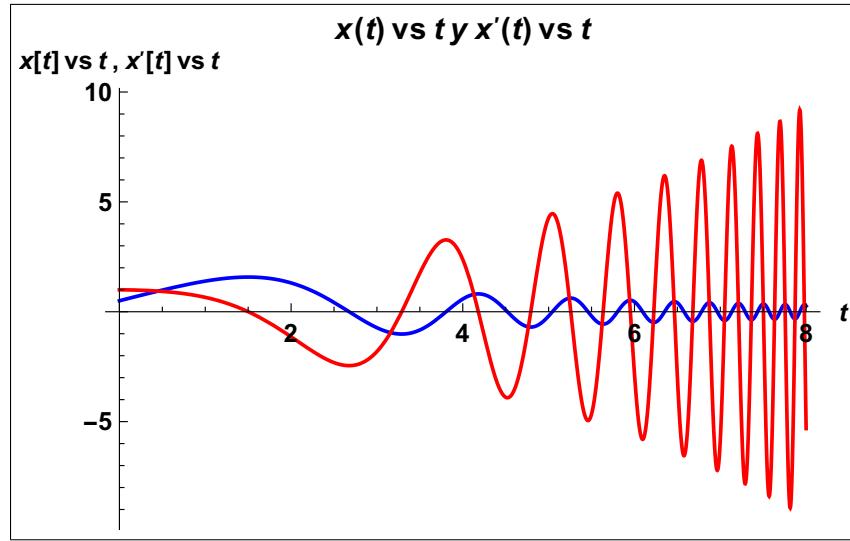


Figura 2.9: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (línea azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  para el caso  $f(t) = 0$ .

En la figura 2.9 se puede apreciar que para el caso  $t_1 = 0$ ,  $x(t)$  toma el valor de  $\frac{1}{2}$ , mientras que  $x'(t)$  toma el valor de 1, lo cual muestra que se cumplen las condiciones iniciales.

## 2.4 Caso no homogéneo

Después de comprobar que la solución (2.54) satisface el problema (2.53) se procede a estudiar el caso no homogéneo aplicando diferentes fuentes.

### 2.4.1 Fuente sinusoidal

Este tipo de fuente se representa de la siguiente manera

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t), \quad (2.55)$$

donde  $A$  y  $\omega$  son constantes. La gráfica de la fuente sinusoidal se muestra en la figura 2.10

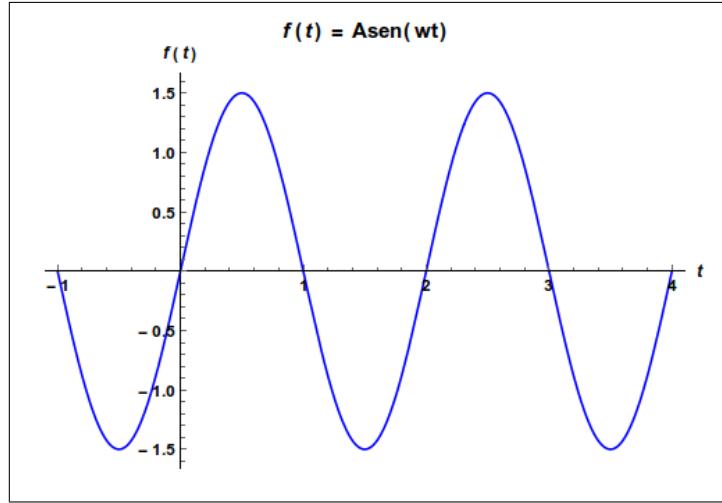


Figura 2.10: Gráfica de  $f(t)$  vs  $t$  para el caso  $f(t) = A\sin(\omega t)$ , para  $A = 1.5$ , y  $\omega = \pi$

Luego, teniendo en cuenta lo anterior y (2.52) se tiene que la solución a (2.12) para una fuente sinusoidal es dado por:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_H(t) + A\pi Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) \underbrace{\int_{t_1}^t J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) \sin(\omega t') dt'}_{I_a} \\ &\quad - A\pi J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) \underbrace{\int_{t_1}^t Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) \sin(\omega t') dt'}_{I_b}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Para solucionar las integrales  $I_a$  e  $I_b$  de tal manera que Wolfram Mathematica arroje una expresión que pueda ser expresada en términos de  $t$  y  $t_1$  es necesario hacer la siguiente sustitución,

$$z = e^{\frac{t}{2}}, \quad (2.57)$$

con lo cual las integrales a calcular son:

$$I_a = \int_{e^{\frac{t_1}{2}}}^{e^{\frac{t}{2}}} \frac{2A}{z} J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}z) \sin(2\omega \ln(z)) dz ; \quad I_b = \int_{e^{\frac{t_1}{2}}}^{e^{\frac{t}{2}}} \frac{2A}{z} Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}z) \sin(2\omega \ln(z)) dz. \quad (2.58)$$

Al resolver las anteriores integrales resulta ser que en sus soluciones aparecen la función

Gamma y la función Hipergeométrica (véase **Ápendice D**) como se puede observar en la figura 2.11.

■ Fuente Sinusoidal :

```
In[8]:= Integrate[BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp^(tp/2)] Sin[w tp], {tp, t1, t}] // TraditionalForm
Out[8]/TraditionalForm=

$$\int_{t1}^t \sin(tp w) J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a} \exp^{tp/2}) dt$$

```

```
In[9]:= Ia[z_] = Integrate[2 A (Sin[2 w Log[z]] BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z]) / z, z] // TraditionalForm
Out[9]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{2} i A z^{-2} \text{Log}(z)^2 \sqrt{b} \left( \Gamma(\sqrt{b} - i w) {}_1F_2\left(\sqrt{b} - i w; 2\sqrt{b} + 1, -i w + \sqrt{b} + 1; -a z^2\right) - z^4 \text{Log}\left(i w + \sqrt{b}\right) {}_1F_2\left(i w + \sqrt{b}; 2\sqrt{b} + 1, i w + \sqrt{b} + 1; -a z^2\right) \right)$$

```

```
In[10]:= Integrate[A BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp^(tp/2)] Sin[w tp], {tp, t1, t}] // TraditionalForm
Out[10]/TraditionalForm=

$$\int_{t1}^t A \sin(tp w) Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a} \exp^{tp/2}) dt$$

```

```
In[11]:= Ib[z_] = Integrate[2 A (Sin[2 w Log[z]] BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z]) / z, z] // TraditionalForm
Out[11]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{2} i A \csc(2\pi\sqrt{b}) z^{-2} \text{Log}(z)^{-2} \sqrt{b} \left( -\Gamma(-i w - \sqrt{b}) {}_1F_2\left(-i w - \sqrt{b}; 1 - 2\sqrt{b}, -i w - \sqrt{b} + 1; -a z^2\right) + \cos(2\pi\sqrt{b}) (\sqrt{a} z)^4 \sqrt{b} \Gamma(\sqrt{b} - i w) {}_1F_2\left(\sqrt{b} - i w; 2\sqrt{b} + 1, -i w + \sqrt{b} + 1; -a z^2\right) + z^4 \text{Log}\left(i w - \sqrt{b}\right) {}_1F_2\left(i w - \sqrt{b}; 1 - 2\sqrt{b}, i w - \sqrt{b} + 1; -a z^2\right) - \cos(2\pi\sqrt{b}) (\sqrt{a} z)^4 \sqrt{b} \Gamma(i w + \sqrt{b}) {}_1F_2\left(i w + \sqrt{b}; 2\sqrt{b} + 1, i w + \sqrt{b} + 1; -a z^2\right) \right)$$

```

Figura 2.11: Calculo de  $I_a$  e  $I_b$  En términos de  $z$  para la función sinusoidal.

Vale la pena resaltar que por practicidad no se escribirá  $x(t)$  de manera explícita en el texto, tanto para este caso como para los siguientes, ya que al calcular las integrales presentes en la solución resultan expresiones algo extensas, tal como se observa en la figura anterior.

Ahora, la siguiente figura muestra como se hace uso del teorema fundamental del cálculo para definir las soluciones mostradas en la figura 2.11 en términos de  $t$  y  $t_1$ , así como también se establecen el segundo y tercer término de (2.56), los cuales son representados por  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente.

```

In[12]:= ia[t_] = Ia[E^(t/2)] - Ia[E^(t1/2)];
In[13]:= ib[t_] = Ib[E^(t/2)] - Ib[E^(t1/2)];
In[14]:= I1 = π BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] e^{t/2}] ia[t];
In[15]:= I2 = π BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] e^{t/2}] ib[t];

```

Figura 2.12: se establecen las integrales 2.58, donde poner ";" al final de cada línea hace que Mathematica ejecute la orden pero no muestra el resultado en pantalla.

En seguida, siendo (2.56) solución de (2.12) con  $f(t) = A \sin(\omega t)$ , entonces debe satisfacer el siguiente problema

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) = A \sin(\omega t), \quad t \geq t_1$$

$$x(t_1) = d_1, \quad \frac{dx(t_1)}{dt_1} = d_2. \quad (2.59)$$

En la figura 2.13 se muestra que (2.56) satisface la ecuación diferencial, mientras que la gráfica de dicha solución y su derivada se muestran en la figura 2.14

```

■ Función solución
In[15]:= x[t_] = d2 G[t1] - d1 DG[t1] + I1 - I2;
■ Ecuación diferencial
In[16]:= FullSimplify[D[x[t], {t, 2}] + (a Exp[t] - b) x[t]]
Out[16]= -\frac{1}{2} i A (e^{t/2})^{-2 i w} (-1 + (e^{t/2})^{4 i w})
In[17]:= Expand[%]
Out[17]= \frac{1}{2} i A (e^{t/2})^{-2 i w} - \frac{1}{2} i A (e^{t/2})^{2 i w}
In[18]:= ExpToTrig[\frac{1}{2} i A e^{-i w t} - \frac{1}{2} i A e^{i w t}]
Out[18]= A Sin[w t]

```

Figura 2.13: Se usa Mathematica para probar que (2.56) cumple con (2.59), donde la función de Green y su derivada es definida como se muestra en la figura 2.8

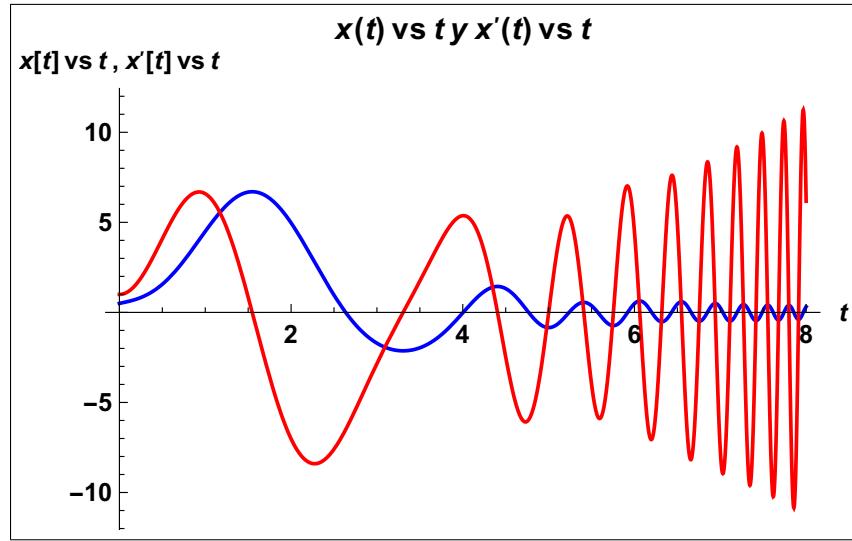


Figura 2.14: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  (roja) para el caso  $f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$ .

## 2.4.2 Fuente exponencial

Se expresa esta clase de fuente como

$$f(t) = C e^{-\lambda t}, \quad (2.60)$$

donde  $C$  y  $\lambda$  son constantes. La gráfica de dicha fuente se muestra en la figura 2.15.

Ahora, según (2.52) y (2.60) se tiene que la solución a (2.12) para este tipo de fuente toma la forma mostrada a continuación,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_H(t) + C \pi Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) \underbrace{\int_{t_1}^t J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) e^{-\lambda t'} dt'}_{I_a} \\ &\quad - C \pi J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) \underbrace{\int_{t_1}^t Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) e^{-\lambda t'} dt'}_{I_a}. \end{aligned} \quad (2.61)$$

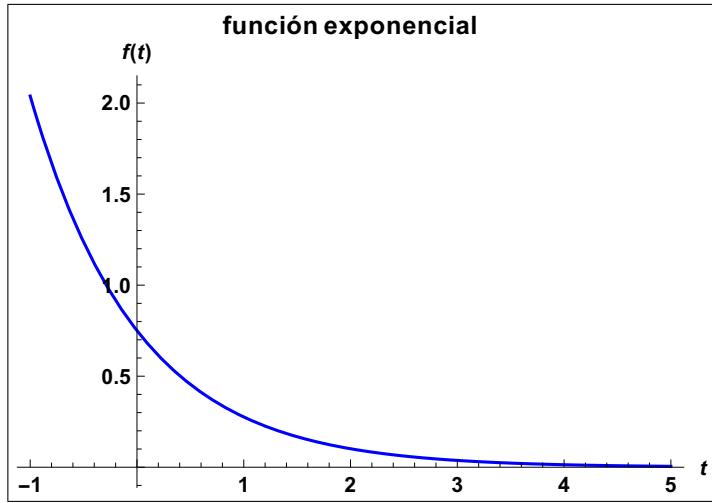


Figura 2.15:

Para solucionar  $I_a$  e  $I_b$  de (2.61) se recurre a la sustitución (2.57) para obtener las siguientes integrales,

$$I_a = \int_{e^{\frac{t_1}{2}}}^{e^{\frac{t}{2}}} \frac{2}{z} J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{az}) e^{-2\lambda \ln(z)} dz ; \quad I_b = \int_{e^{\frac{t_1}{2}}}^{e^{\frac{t}{2}}} \frac{2}{z} Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{az}) e^{-2\lambda \ln(z)} dz. \quad (2.62)$$

En la figura 2.16 se muestra los resultados obtenidos en Wolfram Mathematica al calcular las anteriores integrales.

Después de definir los resultados a las integrales (2.62) en términos de  $t$  y  $t_1$  de la manera mostrada en la figura 2.12 se procede a probar que la solución encontrada satisface el siguiente problema,

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) &= Ce^{-\lambda t}, \quad t \geq t_1 \\ x(t_1) = d_1, \quad \frac{dx(t_1)}{dt_1} &= d_2. \end{aligned} \quad (2.63)$$

■ Fuente exponencial

```
In[8]:= Integrate[c BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp^(tp/2)] Exp[-l tp], tp] // TraditionalForm
Out[8]/TraditionalForm=

$$c \int e^{-l tp} J_{2\sqrt{b}}\left(2\sqrt{a} \exp^{tp/2}\right) dt$$

```

```
In[9]:= Ia[z_] = Integrate[2 c (BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z] Exp[-2 l Log[z]]) / z, z] // TraditionalForm
Out[9]/TraditionalForm=

$$c z^{-2l} \left(\sqrt{a} z\right)^{2\sqrt{b}} \Gamma\left(\sqrt{b} - l\right) {}_1F_2\left(\sqrt{b} - l; 2\sqrt{b} + 1, -l + \sqrt{b} + 1; -a z^2\right)$$

```

```
In[10]:= Integrate[c BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp^(tp/2)] Exp[-l tp], tp] // TraditionalForm
Out[10]/TraditionalForm=

$$c \int e^{-l tp} Y_{2\sqrt{b}}\left(2\sqrt{a} \exp^{tp/2}\right) dt$$

```

```
In[11]:= Ib[z_] = Integrate[2 c (BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z] Exp[-2 l Log[z]]) / z, z] // TraditionalForm
Out[11]/TraditionalForm=

$$c \csc\left(2\pi\sqrt{b}\right) z^{-2l} \left(\sqrt{a} z\right)^{-2\sqrt{b}}$$


$$\left( \cos\left(2\pi\sqrt{b}\right) \left(\sqrt{a} z\right)^{4\sqrt{b}} \Gamma\left(\sqrt{b} - l\right) {}_1F_2\left(\sqrt{b} - l; 2\sqrt{b} + 1, -l + \sqrt{b} + 1; -a z^2\right) - \right.$$


$$\left. \Gamma\left(-l - \sqrt{b}\right) {}_1F_2\left(-l - \sqrt{b}; 1 - 2\sqrt{b}, -l - \sqrt{b} + 1; -a z^2\right) \right)$$

```

Figura 2.16: Calculo de  $I_a$  e  $I_b$  En términos de  $z$  para la función exponencial.

En la figura 2.17 se muestra que efectivamente (2.61) satisface el problema (2.63), en tanto que la gráfica de la solución y su derivada aparecen en la figura 2.18.

### 2.4.3 Fuente pulso rectangular

Este tipo de fuente se expresa como

$$f(t) = K_1 + K_2 H(t - t_2) - K_2 H(t - t_3), \quad (2.64)$$

donde  $K_1, K_2, t_2$  y  $t_3$  son constantes, además  $H(t - t_k)$  es la función de Heaviside o escalón, la cual posee la siguiente propiedad,

$$H(t - t_k) = \begin{cases} 0, & t < t_k, \\ 1, & t > t_k. \end{cases} \quad (2.65)$$

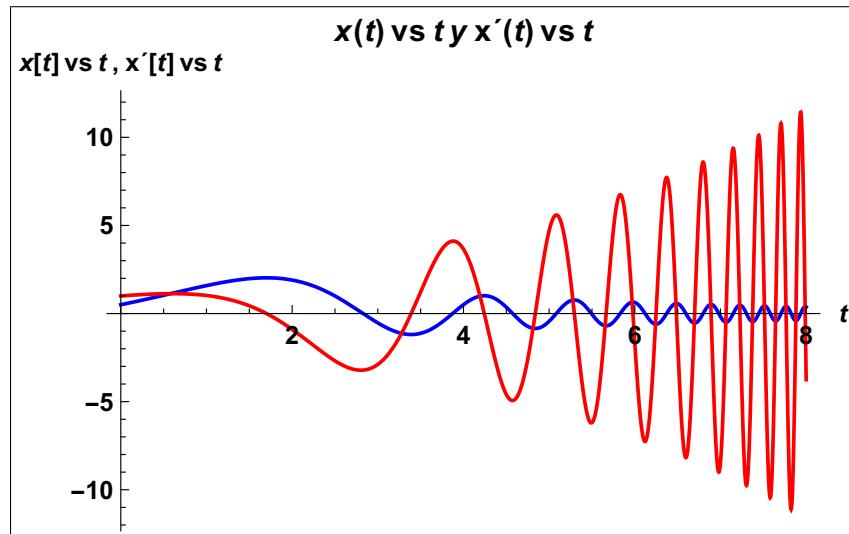
La forma gráfica de esta fuente se muestra en la figura 2.19.

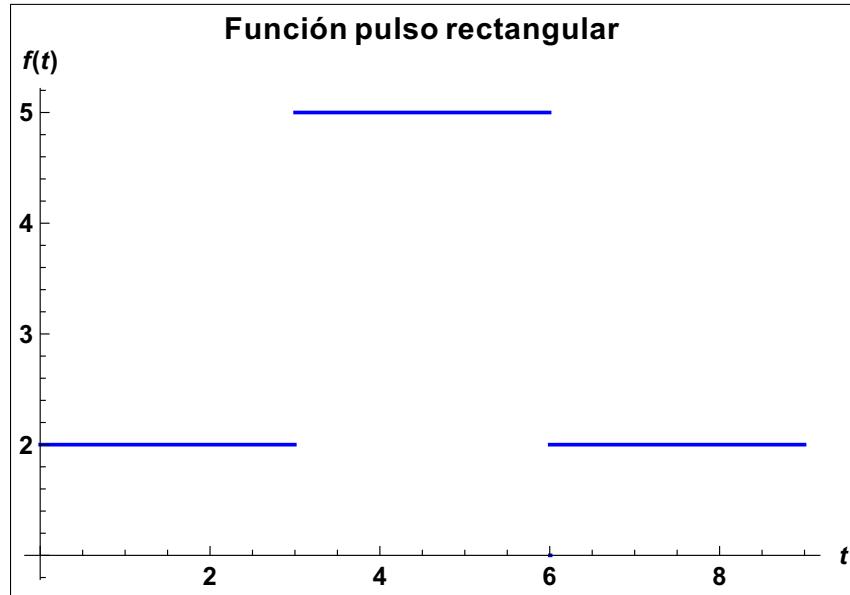
```

■ Función solución
In[16]:= x[t_] = d2 G[t1] - d1 DG[t1] + I1 - I2 ;
■ Ecuación diferencial
In[17]:= FullSimplify[D[x[t], {t, 2}] + (a Exp[t] - b) x[t]]
Out[17]= c (et/2)-2
■ Condiciones iniciales
In[18]:= FullSimplify[x[t1]]
Out[18]= d1
In[19]:= dx = D[x[t], t];
In[20]:= Dx[t_] = dx;
In[21]:= FullSimplify[Dx[t1]]
Out[21]= d2

```

Figura 2.17: Se prueba que (2.61) satisface es problema (2.63)

Figura 2.18: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  (roja) para el caso  $f(t) = Ce^{-\lambda t}$ , con  $C = \frac{3}{4}$  y  $\lambda = \frac{1}{10}$ .

Figura 2.19: Función pulso rectangular con  $K_1 = 2$ ,  $K_2 = 3$ ,  $t_2 = 3$  y  $t_3 = 6$ .

En seguida, reemplazando (2.64) en (2.52) Y teniendo en cuenta la propiedad (2.65) se escribe  $x(t)$  como sigue

$$x(t) = x_H(t) + \begin{cases} K_1 \pi Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) \underbrace{\int_{t_1}^t J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) dt'}_{I_a} - \\ K_1 \pi J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) \underbrace{\int_{t_1}^t Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) dt'}_{I_b}, & t < t_2 \text{ y } t > t_3, \\ (K_1 + K_2) \pi Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) \underbrace{\int_{t_1}^t J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) dt'}_{I_a} - \\ (K_1 + K_2) \pi J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) \underbrace{\int_{t_1}^t Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) dt'}, & t_2 < t < t_3. \end{cases} \quad (2.66)$$

A continuación se muestra el resultado de las integrales  $I_a$  e  $I_b$  de (2.66), donde  $k$  puede ser  $K_1$  o  $K_1 + K_2$ , dependiendo del intervalo donde se encuentre  $t$ .

```

■ Fuente pulso rectangular

In[8]:= Integrate[k BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp^(tp/2)], tp] // TraditionalForm
Out[8]/TraditionalForm=

$$k \int J_{2\sqrt{b}} \left( 2\sqrt{a} \exp^{tp/2} \right) dt$$


In[9]:= Ia[z_] = Integrate[2 k (BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z]) / z, z] // TraditionalForm
Out[9]/TraditionalForm=

$$k \Gamma(\sqrt{b}) (\sqrt{a} z)^{2\sqrt{b}} {}_1F_2(\sqrt{b}; 2\sqrt{b} + 1, \sqrt{b} + 1; -az^2)$$


In[10]:= Integrate[k BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp^(tp/2)], tp] // TraditionalForm
Out[10]/TraditionalForm=

$$k \int Y_{2\sqrt{b}} \left( 2\sqrt{a} \exp^{tp/2} \right) dt$$


In[11]:= Ib[z_] = Integrate[2 k (BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z]) / z, z] // TraditionalForm
Out[11]/TraditionalForm=

$$2k \csc(2\pi\sqrt{b}) \left( \frac{1}{2} \cos(2\pi\sqrt{b}) \Gamma(\sqrt{b}) (\sqrt{a} z)^{2\sqrt{b}} {}_1F_2(\sqrt{b}; 2\sqrt{b} + 1, \sqrt{b} + 1; -az^2) - \frac{1}{2} \Gamma(-\sqrt{b}) (\sqrt{a} z)^{-2\sqrt{b}} {}_1F_2(-\sqrt{b}; 1 - 2\sqrt{b}, 1 - \sqrt{b}; -az^2) \right)$$


```

Figura 2.20: Calculo de  $I_a$  e  $I_b$  para el caso  $f(t) = K_1 + K_2 H(t - t_2) - K_2 H(t - t_3)$

Luego, siendo (2.66) solución a (2.12) para la fuente pulso rectangular, se debe cumplir lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) &= \begin{cases} K_1, & t < t_2 \text{ y } t > t_3, \\ K_1 + K_2, & t_2 < t < t_3 \end{cases} \\ x(t_1) = d_1, \quad \frac{dx(t_1)}{dt_1} = d_2. \end{aligned} \tag{2.67}$$

En la figura (2.21) se muestra que la solución (2.66) cumple con el problema anteriormente mostrado, mientras que el estudio grafico de esta solución se puede ver en la figura (2.22).

```

■ Función solución
In[16]:= x[t_] = d2 G[t1] - d1 D G[t1] + I1 - I2 ;
■ Ecuación diferencial
In[17]:= FullSimplify[D[x[t], {t, 2}] + (a Exp[t] - b) x[t]]
Out[17]= k
■ Condiciones iniciales
In[18]:= FullSimplify[x[t1]]
Out[18]= d1
In[19]:= dx = D[x[t], t];
In[20]:= Dx[t_] = dx;
In[21]:= FullSimplify[Dx[t1]]
Out[21]= d2

```

Figura 2.21: Se prueba que (2.66) satisface es problema (2.67), donde  $k = K_1, K_1 + K_2$

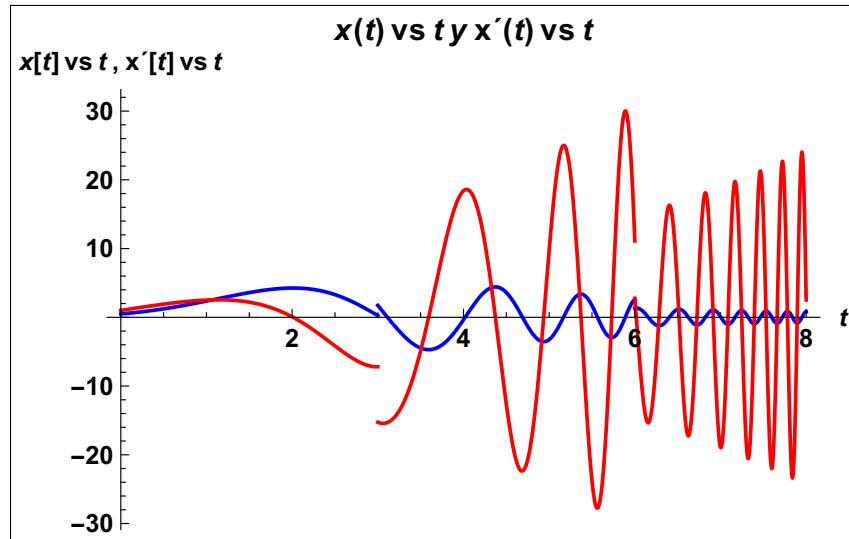


Figura 2.22: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  (roja) para una fuente pulso rectangular, con  $K_1 = 2$ ,  $K_2 = 3$ ,  $t_2 = 3$  y  $t_3 = 6$ .

En la anterior figura se puede ver claramente la influencia de la función de Heaviside en la gráfica de la solución, así como también se puede apreciar que para  $t = 0$  se cumplen las condiciones iniciales impuestas.

## 2.4.4 Fuente en términos de las funciones de Bessel

Después de analizar la influencia de fuentes de diferentes naturalezas, en seguida se procede a estudiar la presencia de una fuente que contenga funciones de Bessel, dicha fuente tiene la siguiente forma,

$$f(t) = AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}), \quad (2.68)$$

La representación gráfica de esta fuente se muestra a continuación,

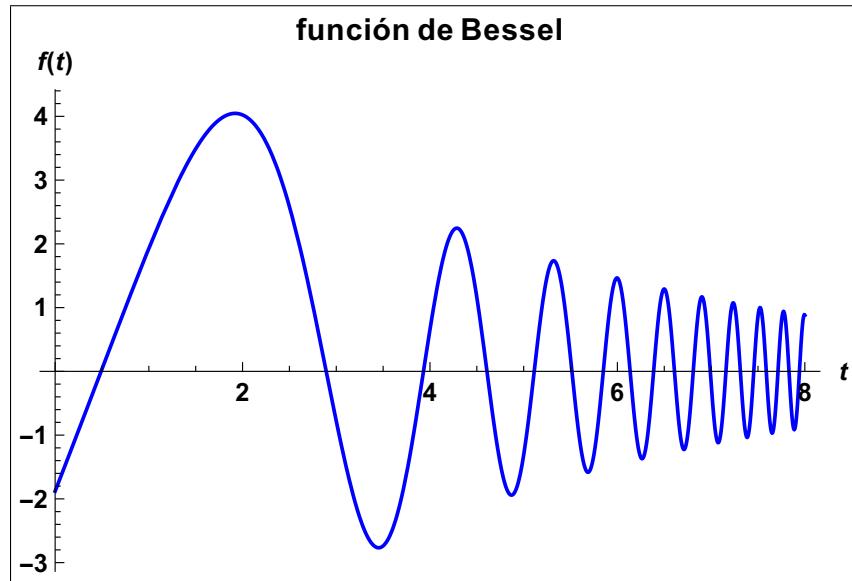


Figura 2.23: Representación grafica de  $f(t) = AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})$ .

Luego, según (2.52) la solución para este tipo de fuente se expresa de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_H(t) + A\pi Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) \int_{t_1}^t J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) dt' \\ &\quad + B\pi Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) \int_{t_1}^t Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) dt'. \\ &\quad - A\pi J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) \int_{t_1}^t J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) dt'. \\ &\quad - B\pi J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) \int_{t_1}^t Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) dt'. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Al igual que en los anteriores casos, para esta fuente también se tiene que en la solución intervienen la función Gamma y la función Hipergeométrica, además que otras funciones más familiares, como se puede apreciar en las figuras 2.24 y 2.25, en las cuales se ha calculado las integrales presentes en (2.69), donde  $z$  es dado por (2.57).

■ Fuente exponencial

```
In[9]:= Ia[z_] =
  Integrate[2 (A BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z] + B BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z])
    (BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z]) /z, z] // TraditionalForm
```

Out[9]/TraditionalForm=

$$\frac{1}{2\sqrt{b} \Gamma(1 - 2\sqrt{b}) \Gamma(2\sqrt{b} + 1)^2} \left( 4\sqrt{b} B \csc(2\pi\sqrt{b}) \Gamma(2\sqrt{b} + 1) \right.$$

$$\left( a z^2 \Gamma(1 - 2\sqrt{b}) \Gamma(2\sqrt{b} + 1) {}_3F_4\left(1, 1, \frac{3}{2}; 2\sqrt{b} + 2, 2 - 2\sqrt{b}, 2, -4az^2\right) - \log(z) \right) + \Gamma(1 - 2\sqrt{b})$$

$$\left( \sqrt{a} z \right)^{4\sqrt{b}} \left( A + B \cot(2\pi\sqrt{b}) \right) {}_2F_3\left(2\sqrt{b} + \frac{1}{2}, 2\sqrt{b} + 1, 2\sqrt{b} + 1, 4\sqrt{b} + 1; -4az^2\right)$$

Figura 2.24: Cálculo de la primera y segunda integral de (2.69).

Ahora, en figura 2.26 se muestra que la solución (2.69) satisface el problema (2.12) Para  $f(t)$  dado por (2.68), es decir

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) &= AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}), \quad t \geq t_1 \\ x(t_1) = d_1, \quad \frac{dx(t_1)}{dt_1} = d_2. \end{aligned} \tag{2.70}$$

```
In[11]:= Ib[z_] =
  Integrate[2 (A BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z] + B BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z])
  (BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z]) /z, z] // TraditionalForm
  |
Out[11]/TraditionalForm=
```

$$\frac{1}{2 \sqrt{b} \Gamma\left(1-2 \sqrt{b}\right)^2 \Gamma\left(2 \sqrt{b}+1\right)^2} \csc \left(2 \pi \sqrt{b}\right) \left(\sqrt{a} z\right)^{-4 \sqrt{b}}$$

$$\left(\Gamma\left(1-2 \sqrt{b}\right) \left(\sqrt{a} z\right)^{4 \sqrt{b}} \left(4 \sqrt{b} \Gamma\left(2 \sqrt{b}+1\right) \left(a z^2 \Gamma\left(1-2 \sqrt{b}\right) \Gamma\left(2 \sqrt{b}+1\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. \left(A+B \cot \left(2 \pi \sqrt{b}\right)\right) {}_3 F_4\left(1,1,\frac{3}{2};2 \sqrt{b}+2,2-2 \sqrt{b},2,2;-4 a z^2\right)+a B z^2 \cot \left(2 \pi \sqrt{b}\right) \Gamma\left(1-2 \sqrt{b}\right) \Gamma\left(2 \sqrt{b}+1\right) {}_3 F_4\left(1,1,\frac{3}{2};2-2 \sqrt{b},2 \sqrt{b}+2,2,-4 a z^2\right)-\log (z) \left(A+2 B \cot \left(2 \pi \sqrt{b}\right)\right)\right)+\cos \left(2 \pi \sqrt{b}\right) \Gamma\left(1-2 \sqrt{b}\right) \left(\sqrt{a} z\right)^{4 \sqrt{b}}\right.$$

$$\left.\left.\left. \left(A+B \cot \left(2 \pi \sqrt{b}\right)\right) {}_2 F_3\left(2 \sqrt{b}+\frac{1}{2},2 \sqrt{b} ;2 \sqrt{b}+1,2 \sqrt{b}+1,4 \sqrt{b}+1;-4 a z^2\right)\right)-B \csc \left(2 \pi \sqrt{b}\right) \Gamma\left(2 \sqrt{b}+1\right)^2 {}_2 F_3\left(\frac{1}{2}-2 \sqrt{b},-2 \sqrt{b} ;1-4 \sqrt{b},1-2 \sqrt{b},1-2 \sqrt{b};-4 a z^2\right)\right)$$

Figura 2.25: Cálculo de la segunda y tercera integral de (2.69).

■ Función solución

```
In[16]:= x[t_] = d2 G[t1] - d1 DG[t1] + I1 - I2;
```

■ Ecuación diferencial

```
In[17]:= FullSimplify[D[x[t], {t, 2}] + (a Exp[t] - b) x[t]] // TraditionalForm
```

Out[17]/TraditionalForm=

$$\left(\sqrt{a} e^{t/2}\right)^{2 \sqrt{b}} {}_0 F_1\left(;2 \sqrt{b}+1;-a e^t\right) \left(A+B \cot \left(2 \pi \sqrt{b}\right)\right)-B \csc \left(2 \pi \sqrt{b}\right) \left(\sqrt{a} e^{t/2}\right)^{-2 \sqrt{b}} {}_0 F_1\left(;1-2 \sqrt{b};-a e^t\right)$$

■ Condiciones iniciales

```
In[18]:= FullSimplify[x[t1]]
```

Out[18]= d1

```
In[19]:= dx = D[x[t], t];
```

```
In[20]:= Dx[t_] = dx;
```

```
In[21]:= FullSimplify[Dx[t1]]
```

Out[21]= d2

Figura 2.26: Cálculo de la segunda y tercera integral de (2.69)

En la anterior figura se puede notar que, dado que la solución (2.69) debe satisfacer el problema (2.70), se tiene que cumplir la identidad (2.71), la cual ha sido comprobada gráficamente, ya que al realizar el grafico del lado izquierdo de ésta, se obtiene el esquema mostrado en la figura 2.27, que coincide con la gráfica de  $f(t)$ .

$$\begin{aligned}
 & \left(\sqrt{a} e^{\frac{t}{2}}\right)^{2\sqrt{b}} {}_0\tilde{F}_1\left(; 2\sqrt{b} + 1; -ae^t\right) \left(A + B \cot\left(2\pi\sqrt{b}\right)\right) \\
 & - B \csc\left(2\pi\sqrt{b}\right) \left(\sqrt{a} e^{\frac{t}{2}}\right)^{-2\sqrt{b}} {}_0\tilde{F}_1\left(; 1 - 2\sqrt{b} + 1; -ae^t\right) \\
 & = AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}). \tag{2.71}
 \end{aligned}$$

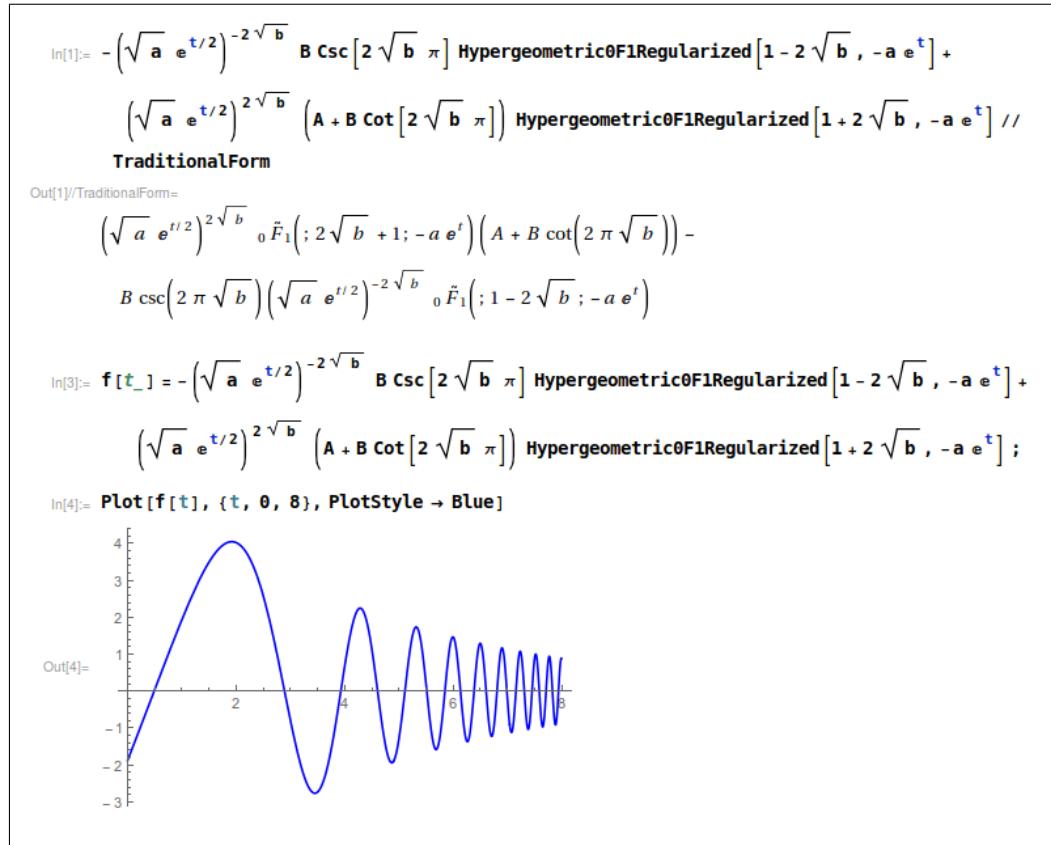


Figura 2.27: Se prueba la identidad (2.71) de manera gráfica.

En la siguiente figura se presenta la gráfica de la solución al problema tratado en el presente apartado, la cual, como puede apreciarse es similar a los anteriores casos.

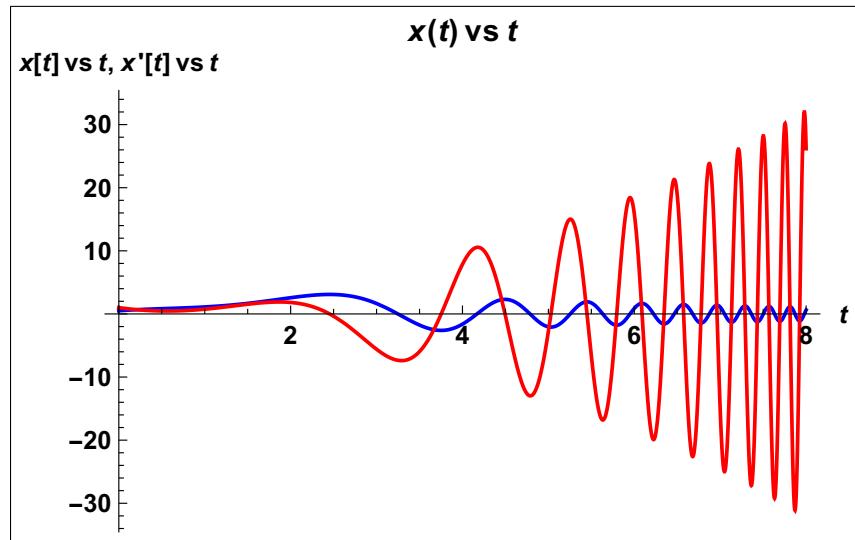


Figura 2.28: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  (roja) para  $f(t) = AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})$ , con  $A = 5$  y  $B = 7$ .

# **Capítulo 3**

## **Ecuación no homogenea sujeta a condiciones en la frontera**

### **3.1 Planteamiento del problema**

Se considera el siguiente problema de valores en la frontera;

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) &= f(t), \quad m \leq t \leq n \\ \alpha_1 x(m) + \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt} &= d_1; \quad \beta_1 x(n) + \beta_2 \frac{dx(n)}{dt} = d_2, \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde, los parametros  $m$ ,  $n$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $d_1$  y  $d_2$  son constantes. en las anteriores ecuaciones se puede observar que la solución  $x(t)$  está sujeta a condiciones de frontera en dos puntos, dichas condiciones de frontera son separadas, esto es, cada una afecta a un sólo punto de la frontera.

Ahora, si por lo menos uno de los términos  $f(t)$ ,  $d_1$  ó  $d_2$  es diferente de cero, el problema es no homogeneo.

A continuación se explica el método de la función de Green, aplicado a la solución del problema (3.1).

## 3.2 El método de la función de Green

### 3.2.1 Ecuación diferencial para la función de Green

Para aplicar el método de la función de Green la variable  $t$  se renombra como  $t'$ , entonces

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t')}{dt'^2} + (ae^{t'} - b)x(t') &= f(t'), \quad m \leq t' \leq n. \\ \alpha_1 x(m) + \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt'} &= d_1; \quad \beta_1 x(n) + \beta_2 \frac{dx(n)}{dt'} = d_2, \end{aligned} \tag{3.2}$$

A continuación, la ecuación anterior se multiplica por una función de Green  $G(t', t)$  por ahora desconocida, la cual depende de  $t'$  y  $t$ . Luego se integra por  $t'$  entre  $m$  y  $n$

$$\int_m^n G(t', t) \left[ \frac{d^2x(t')}{dt'^2} + (ae^{t'} - b)x(t') \right] dt' = \int_m^n G(t', t)f(t')dt'.$$

Ahora, siguiendo los pasos descritos en el capítulo 2 se obtiene que

$$\begin{aligned} G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=m}^{t'=n} - G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=m}^{t'=n} + \\ \int_m^n x(t') \left[ \frac{d^2}{dt'^2} + (ae^{t'} - b) \right] G(t', t) dt' = \int_m^n G(t', t)f(t')dt', \end{aligned}$$

siendo que,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d^2}{dt'^2} + (ae^{t'} - b) \right] &= \hat{L}(t'), \\ \Rightarrow G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=m}^{t'=n} - G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=m}^{t'=n} + \\ \int_m^n x(t') \hat{L}(t') G(t', t) dt' &= \int_m^n G(t', t)f(t')dt', \end{aligned} \tag{3.3}$$

Luego, según (2.10)

$$\hat{L}(t')G(t', t) = \delta(t' - t), \tag{3.4}$$

aplicando el operador  $\hat{L}(t')$  a  $G(t', t)$  se tiene que

$$G_{t't'}(t', t) + (ae^{t'} - b)G(t', t) = \delta(t' - t). \quad (3.5)$$

En seguida, reemplazando (3.4) en (3.3) y aprovechando el hecho de que

$$\int_m^n x(t')\delta(t' - t)dt' = x(t), \quad t \in [m, n],$$

resulta que la solución al problema (3.1) es dado por

$$x(t) = G_{t'}(t', t)x(t') \Big|_{t'=m}^{t'=n} - G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=m}^{t'=n} + \int_m^n G(t', t)f(t')dt'. \quad (3.6)$$

Para establecer completamente la anterior solución se debe determinar la función Green  $G(t', t)$ , lo cual se hace en los siguientes apartados.

### 3.2.2 Condiciones de frontera para la función de Green

Con el fin de establecer las condiciones de frontera para la función de Green se analizan los dos primeros términos del lado derecho de (3.6)

$$\begin{aligned} & G_{t'}(t', t)x(t') \Big|_{t'=m}^{t'=n} - G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=m}^{t'=n} = \\ & G_{t'}(n, t)x(n) - G_{t'}(m, t)x(m) - G(n, t) \frac{dx(n)}{dt'} + G(m, t) \frac{dx(m)}{dt'} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Se aplican en la ecuación (3.7) las condiciones de frontera dadas en la formulación del problema (3.1) y reescritas en (3.2). Pueden darse los siguientes casos que se examinarán separadamente:

1.  $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0,$
2.  $\alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0,$
3.  $\alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0,$
4.  $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0.$

**Caso 1:**  $\alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0$ . Según lo anterior es posible despejar  $x(m)$  y  $x(n)$  de (3.2), entonces

$$x(m) = \frac{1}{\alpha_1} \left[ d_1 - \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt'} \right], \quad x(n) = \frac{1}{\beta_1} \left[ d_2 - \beta_2 \frac{dx(n)}{dt'} \right].$$

Reemplazando las anteriores expresiones en (3.7), se tiene que

$$\begin{aligned} G_{t'}(n, t)x(n) - G_{t'}(m, t)x(m) - G(n, t)\frac{dx(n)}{dt'} + G(m, t)\frac{dx(m)}{dt'} &= \\ G_{t'}(n, t)\frac{1}{\beta_1} \left[ d_2 - \beta_2 \frac{dx(n)}{dt'} \right] - G_{t'}(m, t)\frac{1}{\alpha_1} \left[ d_1 - \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt'} \right] \\ - G(n, t)\frac{dx(n)}{dt'} + G(m, t)\frac{dx(m)}{dt'} &= \\ \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} G_{t'}(m, t) + G(m, t) \right] \frac{dx(m)}{dt'} + \frac{d_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) \\ - \left[ \frac{\beta_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) + G(n, t) \right] \frac{dx(n)}{dt'} - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{t'}(m, t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Ahora, en la expresión (3.8) participan  $\frac{dx(m)}{dt'}$  y  $\frac{dx(n)}{dt'}$  cuyos valores no son dados por las condiciones de frontera en (3.7), dado esto y con el fin de eliminar estos términos se establece la siguientes condiciones.

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2}{\alpha_1} G_{t'}(m, t) + G(m, t) &= 0, \\ \frac{\beta_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) + G(n, t) &= 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

por lo tanto,

$$G_{t'}(t', t)x(t') \Big|_{t'=m}^{t'=n} - G(t', t)\frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=m}^{t'=n} = \frac{d_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{t'}(m, t).$$

y la solución (3.6) se la puede escribir de la siguiente manera

$$x(t) = \frac{d_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{t'}(m, t) + \int_m^n G(t', t)f(t')dt. \tag{3.10}$$

La anterior expresión representa la solución del problema (3.1) para el caso 1 donde  $\alpha_1 \neq 0$  y  $\beta_1 \neq 0$ .

**Caso 2:**  $\alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0$ . Se despeja  $x(m)$  y  $\frac{dx(n)}{dt'}$  de (3.2) para obtener

$$x(m) = \frac{1}{\alpha_1} \left[ d_1 - \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt'} \right], \quad \frac{dx(n)}{dt'} = \frac{1}{\beta_2} [d_2 - \beta_1 x(n)]$$

Reemplazando en (3.7) se obtiene

$$\begin{aligned} G_{t'}(n, t)x(n) - G_{t'}(m, t)x(m) - G(n, t)\frac{dx(n)}{dt'} + G(m, t)\frac{dx(m)}{dt'} &= \\ G_{t'}(n, t)x(n) - G_{t'}(m, t)\frac{1}{\alpha_1} \left[ d_1 - \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt'} \right] & \\ -G(n, t)\frac{1}{\beta_2} [d_2 - \beta_1 x(n)] + G(m, t)\frac{dx(m)}{dt'} &= \\ \left[ G_{t'}(n, t) + \frac{\beta_1}{\beta_2} G(n, t) \right] x(n) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{t'}(m, t) & \\ + \left[ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} G_{t'}(m, t) + G(m, t) \right] \frac{dx(m)}{dt'} - \frac{d_2}{\beta_2} G(n, t). & \end{aligned} \tag{3.11}$$

Al igual que en el caso anterior, para eliminar los términos  $x(n)$  y  $\frac{dx(m)}{dt'}$ , los cuales no están especificados por las condiciones de frontera se imponen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} G_{t'}(n, t) + \frac{\beta_1}{\beta_2} G(n, t) &= 0 \\ \frac{\alpha_2}{\alpha_1} G_{t'}(m, t) + G(m, t) &= 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Teniendo en cuenta lo anterior se tiene que

$$G_{t'}(t', t)x(t') \Big|_{t'=m}^{t'=n} - G(t', t)\frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=m}^{t'=n} = -\frac{d_1}{\alpha_1} G_{t'}(m, t) - \frac{d_2}{\beta_2} G(n, t).$$

Por lo tanto, la solución para este caso es dada por

$$x(t) = -\frac{d_1}{\alpha_1} G_{t'}(m, t) - \frac{d_2}{\beta_2} G(n, t) + \int_m^n G(t', t)f(t')dt. \tag{3.13}$$

**Caso 3:**  $\alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0$ . Despejando  $\frac{dx(m)}{dt'}$  y  $x(n)$  de (3.2) se tiene que

$$\frac{dx(m)}{dt'} = \frac{1}{\alpha_2} [d_1 - \alpha_1 x(m)], \quad x(n) = \frac{1}{\beta_1} \left[ d_2 - \beta_2 \frac{dx(n)}{dt'} \right].$$

Sustituyendo lo anterior en (3.7) resulta que

$$\begin{aligned} G_{t'}(n, t) x(n) - G_{t'}(m, t) x(m) - G(n, t) \frac{dx(n)}{dt'} + G(m, t) \frac{dx(m)}{dt'} &= \\ G_{t'}(n, t) \frac{1}{\beta_1} \left[ d_2 - \beta_2 \frac{dx(n)}{dt'} \right] - G_{t'}(m, t) x(m) & \\ - G(n, t) \frac{dx(n)}{dt'} + G(m, t) \frac{1}{\alpha_2} [d_1 - \alpha_1 x(m)] &= \\ \frac{d_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) - \left[ \frac{\beta_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) + G(n, t) \right] \frac{dx(n)}{dt'} & \\ + \frac{d_1}{\alpha_2} G(m, t) - \left[ \frac{\alpha_1}{\alpha_2} G(m, t) + G_{t'}(m, t) \right] x(m). & \end{aligned} \tag{3.14}$$

De nuevo, para eliminar  $\frac{dx(n)}{dt'}$  y  $x(m)$  de (3.14) se impone que

$$\frac{\beta_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) + G(n, t) = 0 \tag{3.15}$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} G(m, t) + G_{t'}(m, t) = 0$$

Según lo anterior

$$G_{t'}(t', t) x(t') \Big|_{t'=m}^{t'=n} - G(t', t) \frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=m}^{t'=n} = \frac{d_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) + \frac{d_1}{\alpha_2} G(m, t).$$

Por lo tanto, la solución (3.6) para el caso  $\alpha_2 \neq 0$  y  $\beta_1 \neq 0$  se escribe de la siguiente manera

$$x(t) = \frac{d_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) + \frac{d_1}{\alpha_2} G(m, t) + \int_m^n G(t', t) f(t') dt. \tag{3.16}$$

**Caso 4:**  $\alpha_2 \neq 0, \beta_1 = 0$ . en este caso se tiene que

$$\frac{dx(m)}{dt'} = \frac{1}{\alpha_2} [d_1 - \alpha_1 x(m)], \quad \frac{dx(n)}{dt'} = \frac{1}{\beta_2} [d_2 - \beta_1 x(n)].$$

Según lo anterior,

$$\begin{aligned}
 & G_{t'}(n, t)x(n) - G_{t'}(m, t)x(m) - G(n, t)\frac{dx(n)}{dt'} + G(m, t)\frac{dx(m)}{dt'} = \\
 & \quad G_{t'}(n, t)x(n) - G_{t'}(m, t)x(m) \\
 & - G(n, t)\frac{1}{\beta_2}[d_2 - \beta_1x(n)] + G(m, t)\frac{1}{\alpha_2}[d_1 - \alpha_1x(m)] = \\
 & \quad \left[ G_{t'}(n, t) + \frac{\beta_1}{\beta_2}G(n, t) \right]x(n) - \frac{d_2}{\beta_2}G(n, t) \\
 & \quad - \left[ G_{t'}(m, t) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}G(m, t) \right]x(m) + \frac{d_1}{\alpha_2}G(m, t). \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

De manera similar a los casos anteriores, se exige que

$$\begin{aligned}
 & G_{t'}(n, t) + \frac{\beta_1}{\beta_2}G(n, t) = 0 \\
 & G_{t'}(m, t) + \frac{\alpha_1}{\alpha_2}G(m, t) = 0, \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

entonces

$$G_{t'}(t', t)x(t') \Big|_{t'=m}^{t'=n} - G(t', t)\frac{dx(t')}{dt'} \Big|_{t'=m}^{t'=n} = \frac{d_1}{\alpha_2}G(m, t) - \frac{d_2}{\beta_2}G(n, t).$$

En consecuencia, si  $\alpha_2 \neq 0$  y  $\beta_2 \neq 0$ , la solución (3.6) es

$$x(t) = \frac{d_1}{\alpha_2}G(m, t) - \frac{d_2}{\beta_2}G(n, t) + \int_m^n G(t', t)f(t')dt. \tag{3.19}$$

Ahora, observando (3.9), (3.12), (3.15) y (3.18) se concluye que dichas condiciones se pueden sintetizar de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
 & \alpha_1G(m, t) + \alpha_2G_{t'}(m, t) = 0, \\
 & \beta_1G(n, t) + \beta_2G_{t'}(n, t) = 0. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Luego, teniendo en cuenta lo anterior y (3.5) se infiere que la función de Green es la misma para los cuatro casos y es regida por el siguiente problema

$$G_{t't'}(t', t) + (ae^{t'} - b)G(t', t) = \delta(t' - t), \quad m \leq t' \leq n,$$

$$\alpha_1 G(m, t) + \alpha_2 G_{t'}(m, t) = 0, \quad (3.21)$$

$$\beta_1 G(n, t) + \beta_2 G_{t'}(n, t) = 0.$$

A continuación se estudian las anteriores ecuaciones para determinar la función de Green.

### 3.2.3 Determinación de la función de Green

Para determinar la función de Green se tiene en cuenta que en el problema (3.21) interviene la función delta de Dirac  $\delta(x' - x)$ , la cual presenta una singularidad en el punto  $t' = t$  ( $\delta(0) = \infty$ ), teniendo en cuenta esto es conveniente dividir el intervalo  $m < t' < n$  en dos subintervalos:  $m \leq t' < t$  y  $t < t' \leq n$ . En cada subintervalo se tiene que  $\delta(t' - t)|_{t' \neq t} = 0$ , entonces la ecuación diferencial en (3.21) se reduce a

$$G_{t't'}(t', t) + (ae^{t'} - b)G(t', t) = 0, \quad \text{para } t' \neq t. \quad (3.22)$$

De acuerdo con (1.2) la solución a la anterior ecuación diferencial es dada por (1.3), que en este caso se escribe de la siguiente manera

$$G(t', t) = \begin{cases} C_1 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) + C_2 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}), & m \leq t' < t \\ C_3 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) + C_4 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}), & t < t' \leq n \end{cases}, \quad (3.23)$$

donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son cantidades constantes con respecto a la variable  $t'$ , además  $G_{t'}(t', t)$  esta dada por

$$G_{t'}(t', t) = \begin{cases} C_1 J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) + C_2 Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}), & m \leq t' < t \\ C_3 J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) + C_4 Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}), & t < t' \leq n. \end{cases}, \quad (3.24)$$

donde  $J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})$  y  $Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})$  representan las derivadas con respecto a  $t'$ , ahora según (3.23) y (3.24) las condiciones de frontera dadas en (3.21) se escriben de la siguiente manera

$$C_1 \underbrace{\left\{ \alpha_1 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{m/2}) + \alpha_2 J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{m/2}) \right\}}_A + \\ (3.25)$$

$$C_2 \underbrace{\left\{ \alpha_1 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{m/2}) + \alpha_2 Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{m/2}) \right\}}_B = 0, \\ C_3 \underbrace{\left\{ \beta_1 J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{n/2}) + \beta_2 J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{n/2}) \right\}}_D + \\ (3.26)$$

$$C_4 \underbrace{\left\{ \beta_1 Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{n/2}) + \beta_2 Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{n/2}) \right\}}_E = 0,$$

En seguida, para determinar  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  son necesarias dos ecuaciones más, las cuales se obtienen analizando el comportamiento de la función de Green  $G(t', t)$  en el punto  $t' = t$  y así poder establecer esta función para todo el intervalo  $m \leq t' \leq n$ . Con este fin se integran los dos lados de la ecuación diferencial en (3.21) sobre un intervalo infinitesimal alrededor del punto  $t' = t$ , es decir, en el intervalo  $t^- \leq t' \leq t^+$  como se muestra a continuación

$$\int_{t^-}^{t^+} G_{t't'}(t', t) dt' + \int_{t^-}^{t^+} (ae^{t'} - b)G(t', t) dt' = \int_{t^-}^{t^+} \delta(t' - t) dt'.$$

Al realizar un procedimiento igual al mostrado en el capítulo 2 se encuentra que en  $t' = t$  la función de Green debe ser continua y además su primera derivada tiene un salto igual a 1, lo cual se sintetiza en las siguientes condiciones

$$G(t^+, t) = G(t^-, t) \quad \text{y} \quad G(t^+, t) - G(t^-, t) = 0, \quad (3.27)$$

$$G_{t'}(t^+, t) - G_{t'}(t^-, t) = 1. \quad (3.28)$$

$$C_4 \underbrace{J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})}_{J(t)} + C_3 \underbrace{Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})}_{Y(t)} - C_1 \underbrace{J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})}_{J(t)} - C_2 \underbrace{Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})}_{Y(t)} = 0. \quad (3.29)$$

$$C_4 \underbrace{J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})}_{J_p(t)} + C_3 \underbrace{Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})}_{Y_p(t)} - C_1 \underbrace{J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})}_{J_p(t)} - C_2 \underbrace{Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})}_{Y_p(t)} = 1. \quad (3.30)$$

Luego, de acuerdo con (3.25), (3.26), (3.29) y (3.30) se concluye que para obtener  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} AC_1 + BC_2 &= 0 \\ DC_3 + EC_4 &= 0 \\ J(t)C_4 + Y(t)C_3 - J(t)C_1 - Y(t)C_2 &= 0 \\ J_p(t)C_4 + Y_p(t)C_3 - J_p(t)C_1 - Y_p(t)C_2 &= 1. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Resolviendo el sistema de manera manual se encuentra que

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{B[EJ(t) - DY(t)]}{(BD - AE)[J_p(t)Y(t) - J(t)Y_p(t)]}, \\ C_2(t) &= \frac{A[DY(t) - EJ(t)]}{(BD - AE)[J_p(t)Y(t) - J(t)Y_p(t)]}, \\ C_3(t) &= \frac{E[BJ(t) - AY(t)]}{(BD - AE)[J_p(t)Y(t) - J(t)Y_p(t)]}, \\ C_4(t) &= \frac{D[AY(t) - BJ(t)]}{(BD - AE)[J_p(t)Y(t) - J(t)Y_p(t)]}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Así pues, teniendo en cuenta los anteriores resultados la función de Green toma la siguiente forma

$$G(t', t) = \begin{cases} C_1(t)J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) + C_2(t)Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}), & m \leq t' \leq t \\ C_3(t)J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) + C_4(t)Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}), & t \leq t' \leq n. \end{cases} \quad (3.33)$$

Para comprobar que la anterior expresión es la apropiada se usa Wolfram Mathematica y se verifica que se cumple la ecuación diferencial (3.22), al igual que las condiciones (3.31) como se muestra en la figuras (3.1) y (3.2), donde  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  y  $\beta_2$  son representados por  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$  y  $b_2$  respectivamente.

```

■ Funciones de Bessel
In[1]:= J[tp_] = BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp[tp/2]];
In[2]:= Y[tp_] = BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] Exp[tp/2]];
In[3]:= dJ = D[J[tp], tp];
In[4]:= dY = D[Y[tp], tp];
In[5]:= Jp[tp_] = dJ;
In[6]:= Yp[tp_] = dY;

■ Definición de coeficientes
In[7]:= A = a1 J[m] + a2 Jp[m]; B = a1 Y[m] + a2 Yp[m];
In[8]:= Dp = b1 J[n] + b2 Jp[n]; Ep = b1 Y[n] + b2 Yp[n];

■ Definición de las constantes
In[9]:= Del = (B Dp - A Ep) (Jp[t] Y[t] - J[t] Yp[t]);
In[10]:= C1 = (B (Ep J[t] - Dp Y[t])) / Del; C2 = (A (Dp Y[t] - Ep J[t])) / Del;
In[11]:= C3 = (Ep (B J[t] - A Y[t])) / Del; C4 = (Dp (A Y[t] - B J[t])) / Del;

```

Figura 3.1: se definen  $J(t')$ ,  $Y(t')$ ,  $J_p(t')$ ,  $Y_p(t')$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $D$  y  $E$ , al igual que las constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ .

```

■ Función de Green y su derivada
In[12]:= G1[tp_] = C1 J[tp] + C2 Y[tp]; G2[tp_] = C3 J[tp] + C4 Y[tp];
In[13]:= DG1[tp_] = D[G1[tp], tp]; DG2[tp_] = D[G2[tp], tp];

■ Ecuación diferencial
In[14]:= FullSimplify[D[G1[tp], {tp, 2}] + (a Exp[tp] - b) G1[tp]]
Out[14]= 0

In[15]:= FullSimplify[D[G2[tp], {tp, 2}] + (a Exp[tp] - b) G2[tp]]
Out[15]= 0

■ Condiciones de frontera
In[16]:= Simplify[a1 G1[m] + a2 DG1[m]]
Out[16]= 0

In[17]:= Simplify[b1 G2[n] + b2 DG2[n]]
Out[17]= 0

In[18]:= Simplify[G2[t] - G1[t]]
Out[18]= 0

In[19]:= Simplify[DG2[t] - DG1[t]]
Out[19]= 1

```

Figura 3.2: Se define la función de Green junto con su derivada y se prueba que ésta satisface (3.22) y (3.31).

Después de probar que la función de Green encontrada es la apropiada se procede a realizar su respectiva gráfica, la cual se muestra en la figura (3.3), donde

$$a = \frac{3}{10}, \quad b = \frac{2}{10}, \quad m = 3.2, \quad n = 7.9, \quad d_1 = \frac{1}{2}, \\ d_2 = 1, \quad \alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = 3, \quad \beta_1 = 4, \quad \text{y} \quad \beta_2 = 6.$$

Los valores anteriormente dados de repetirán para lo que resta del presente capítulo.

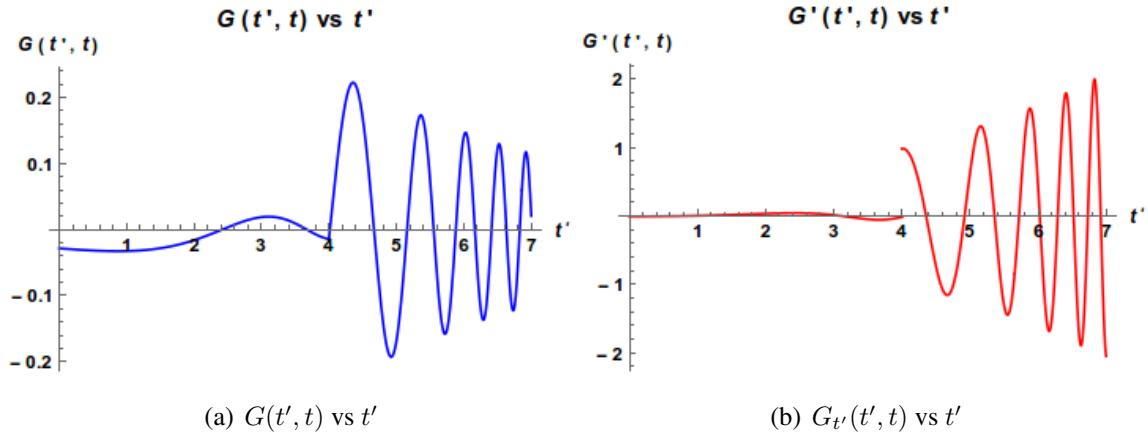


Figura 3.3: Gráfica de  $G(t', t)$  y  $G_{t'}(t', t)$ , con  $t = 4$ .

### 3.2.4 Solución del problema (3.1) en términos de $G(x', x)$

Teniendo en cuenta los resultados (3.10), (3.13), (3.16) y (3.19) la solución al problema (3.1) se escribe de la siguiente manera

$$x(t) = \begin{cases} \frac{d_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) - \frac{d_1}{\alpha_1} G_{t'}(m, t), & \alpha_1 \neq 0, \beta_1 \neq 0 \\ -\frac{d_1}{\alpha_1} G_{t'}(m, t) - \frac{d_2}{\beta_2} G(n, t), & \alpha_1 \neq 0, \beta_2 \neq 0 \\ + \\ \frac{d_2}{\beta_1} G_{t'}(n, t) + \frac{d_1}{\alpha_2} G(m, t), & \alpha_2 \neq 0, \beta_1 \neq 0 \\ \frac{d_1}{\alpha_2} G(m, t) - \frac{d_2}{\beta_2} G(n, t), & \alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0 \end{cases}$$

$$C_1(t) \underbrace{\int_m^t J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) f(t') dt'}_{i_1} + C_2(t) \underbrace{\int_m^t Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) f(t') dt'}_{i_2} +$$

$$C_3(t) \underbrace{\int_t^n J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) f(t') dt'}_{i_3} + C_4(t) \underbrace{\int_t^n Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) f(t') dt'}_{i_4}. \quad (3.34)$$

donde se tiene que

$$G(m, t) = C_1(t) J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{m/2}) + C_2(t) Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{m/2}),$$

$$G(n, t) = C_3(t) J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{n/2}) + C_4(t) Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{n/2}),$$

(3.35)

$$G_{t'}(m, t) = C_1(t) J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{m/2}) + C_2(t) Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{m/2}),$$

$$G_{t'}(n, t) = C_3(t) J'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{n/2}) + C_4(t) Y'_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{n/2}).$$

En las siguientes secciones se procede a verificar que (3.34) satisface (3.1) cuando  $f(t) = 0$  (caso homogéneo) y cuando  $f(t) \neq 0$  (caso no homogéneo).

### 3.3 Caso homogéneo

En este caso se analiza el siguiente problema

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) &= 0, \quad m \leq t \leq n \\ \alpha_1 x(m) + \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt} &= d_1; \quad \beta_1 x(n) + \beta_2 \frac{dx(n)}{dt} = d_2. \end{aligned} \tag{3.36}$$

En lo que sigue del capítulo se estudiara el caso  $\alpha_2 \neq 0$  y  $\beta_2 \neq 0$ .

Según lo dicho anteriormente y teniendo en cuenta que para este caso  $f(t) = f(t') = 0$ , la solución (3.34) que satisface (3.36) se reduce a

$$x_H(t) = \frac{d_1}{\alpha_2} G(m, t) - \frac{d_2}{\beta_2} G(n, t). \tag{3.37}$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.35) resulta que

$$\begin{aligned} x_H(t) &= \frac{d_1}{\alpha_2} [C_1(t)J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{m/2}) + C_2(t)Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{m/2})] \\ &- \frac{d_2}{\beta_2} [C_3(t)J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{n/2}) + C_4(t)Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{n/2})]. \end{aligned} \tag{3.38}$$

En seguida, con ayuda de Wolfram Mathematica se prueba que (3.38) cumple con el problema (3.36) donde  $d_1$  y  $d_2$  toman los valores antes asignados.

Cabe mencionar que al resolver la ecuación diferencial en Mathematica el resultado obtenido no es el esperado, es decir no resulta ser  $f(t)$  (cero en este caso), dado lo anterior se establece la función  $R(t)$  mostrada en (3.39) para posteriormente realizar su grafica y compararla con  $f(t)$ .

$$R(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t). \tag{3.39}$$

El proceso antes descrito se muestra en la siguiente figura, donde la función de Green es definida como aparece en la figura 3.2

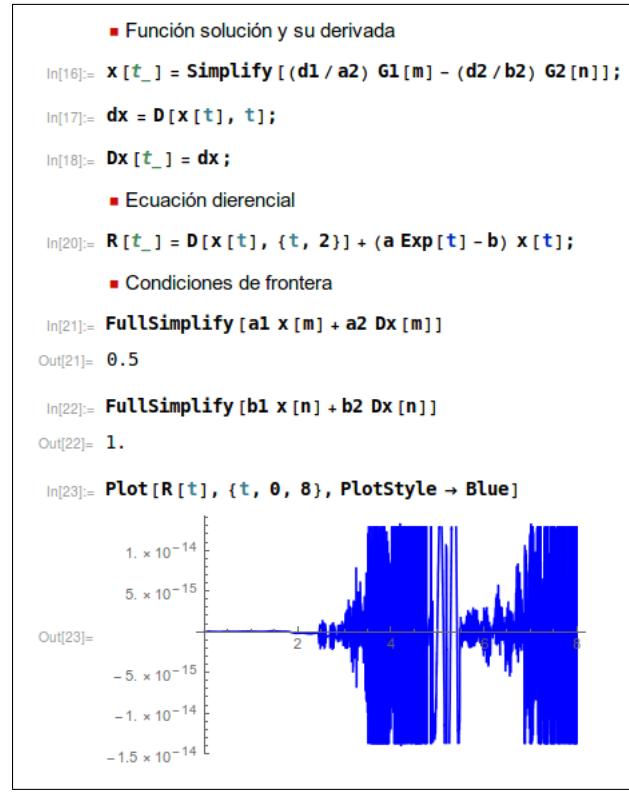


Figura 3.4: se prueba que la solución encontrada satisface el problema (3.36).

En la figura 3.4 se puede apreciar que se cumplen las condiciones de frontera, ya que  $\alpha_1 x(m) + \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt} = d_1 = \frac{1}{2}$  y  $\beta_1 x(n) + \beta_2 \frac{dx(n)}{dt} = d_2 = 1$ , por otra parte cuando se grafica  $R(t)$ , ésta toma valores despreciables, es decir su valor se puede tomar como cero lo cual concuerda con la ecuación diferencial.

A continuación se presenta la gráfica de la función solución al igual que de su derivada en función de  $t$ .

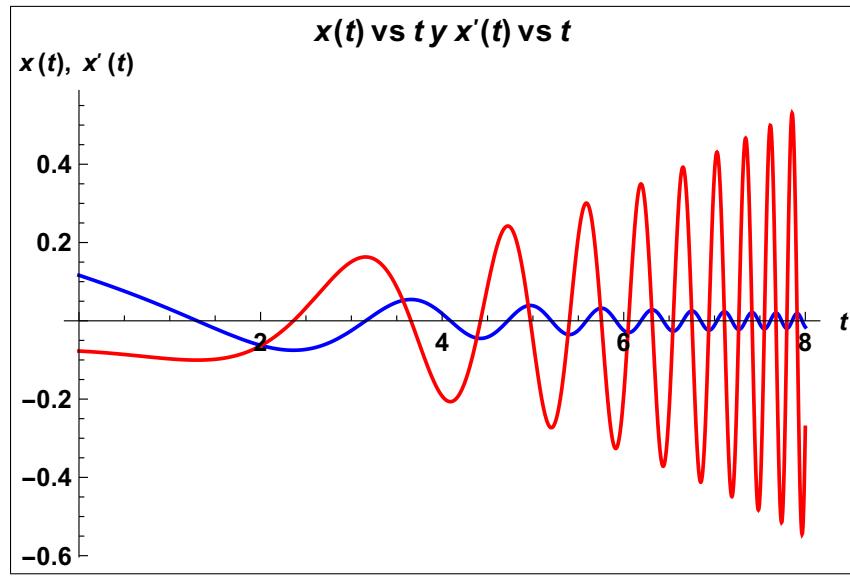


Figura 3.5: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  (roja) para  $f(t) = 0$ .

## 3.4 Caso no homogéneo

A continuación se aplican fuentes de la misma naturaleza a las aplicadas en el capítulo 2 para estudiar el comportamiento de la solución cuando la ecuación diferencial esta sujeta a condiciones de frontera.

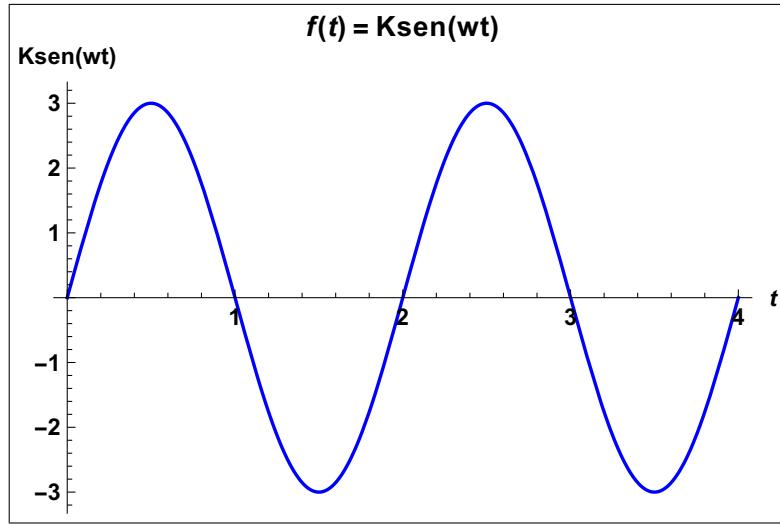
Al igual que en capítulo anterior, en este caso tampoco se escribirá la solución de manera explícita por contener expresiones muy extensas.

### 3.4.1 Fuente sinusoidal

Este tipo de fuente tiene la siguiente forma.

$$f(t) = K \operatorname{sen}(\omega t), \quad (3.40)$$

donde  $K$  y  $\omega$  son constantes. La gráfica de la fuente sinusoidal se muestra a continuación.

Figura 3.6: Gráfica de  $A\sin(\omega t)$  vs  $t$  con  $K = 3$ , y  $\omega = \pi$ .

Ahora según (3.1) y (3.40) el problema a resolver es

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) = K\sin(\omega t), \quad m \leq t \leq n \quad (3.41)$$

$$\alpha_1 x(m) + \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt} = d_1; \quad \beta_1 x(n) + \beta_2 \frac{dx(n)}{dt} = d_2.$$

De acuerdo con (3.34) y teniendo en cuenta que  $\alpha_2 \neq 0$  y  $\beta_2 \neq 0$  la solución al anterior problema es dada por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} x(t) &= x_H(t) + C_1(t) \underbrace{\int_m^t J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})f(t')dt'}_{i_1} + C_2(t) \underbrace{\int_m^t Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})f(t')dt'}_{i_2} \\ &+ C_3(t) \underbrace{\int_t^n J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})f(t')dt'}_{i_3} + C_4(t) \underbrace{\int_t^n Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})f(t')dt'}_{i_4} \end{aligned} \quad (3.42)$$

donde  $f(t') = K\sin(\omega t')$ .

En seguida se calculan las integrales presentes en la anterior expresión, para ello se hace uso

de la sustitución  $z = e^{\frac{t'}{2}}$  con lo cual se encuentra que

$$\int J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})f(t')dt' = \int \frac{2K}{z}J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{az})\sin(2\omega\ln(z))dz = I_a$$

$$\int Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})f(t')dt' = \int \frac{2K}{z}Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{az})\sin(2\omega\ln(z))dz = I_b.$$

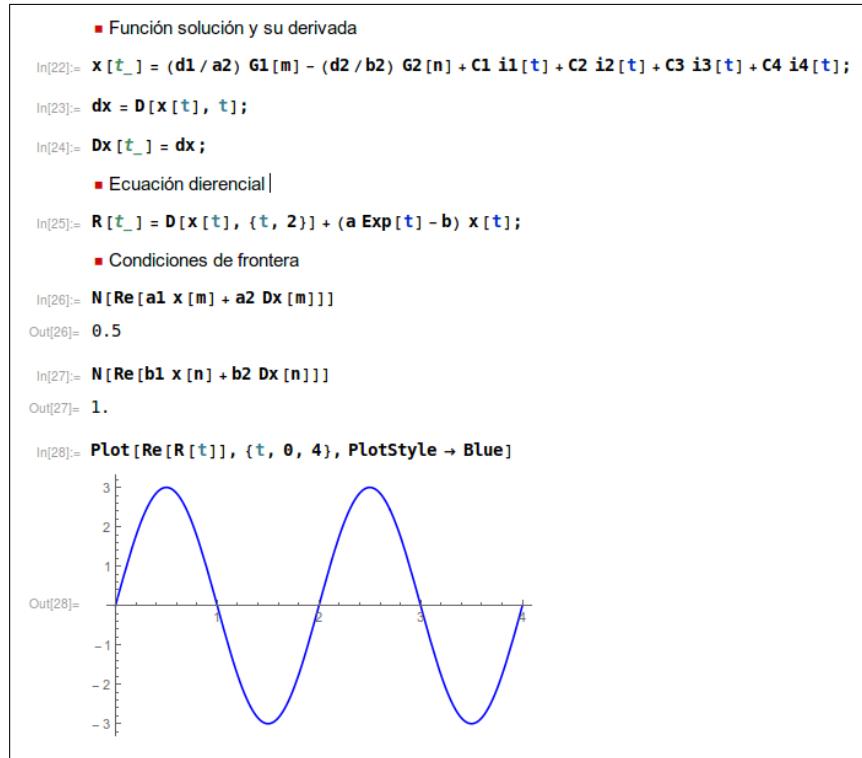
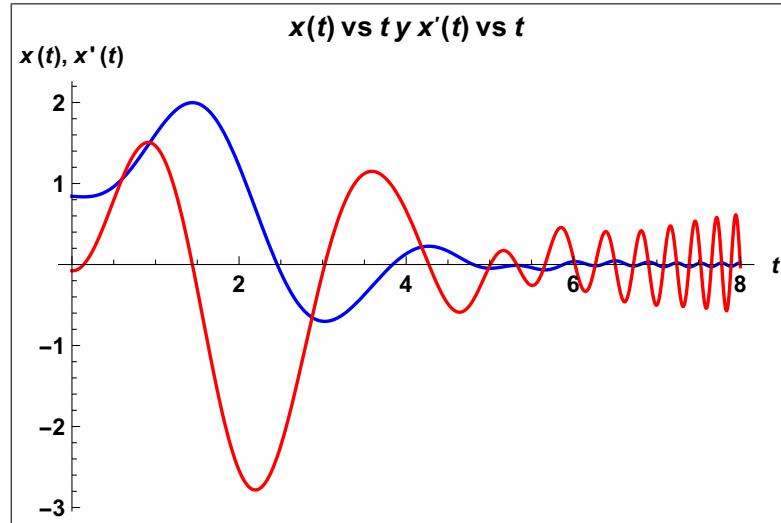
En la siguiente imagen se muestra el cálculo de  $I_a$  e  $I_b$ , cuyos resultados resultan ser en términos de la función gamma y la función hipergeométrica, como se vio en el capítulo 2 y también se establecen  $i_1, i_2, i_3$  e  $i_4$  presentes en (3.42).

```
■ Fuente sinusoidal
In[16]:= Ia[z_] = FullSimplify[Integrate[2 K (Sin[2 w Log[z]] BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z]) / z, z]];
In[17]:= Ib[z_] = FullSimplify[Integrate[2 K (Sin[2 w Log[z]] BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z]) / z, z]];
In[18]:= i1[t_] = Ia[E^(t/2)] - Ia[E^(m/2)];
In[19]:= i2[t_] = Ib[E^(t/2)] - Ib[E^(m/2)];
In[20]:= i3[t_] = Ia[E^(n/2)] - Ia[E^(t/2)];
In[21]:= i4[t_] = Ib[E^(n/2)] - Ib[E^(t/2)];
```

Figura 3.7:

Para probar la ecuación diferencial se usa el método descrito en el caso homogéneo, es decir, se realiza la gráfica de la función  $R(t)$ (3.39), evidenciando que ésta corresponde a la gráfica de  $K\sin(\omega t)$ , lo cual garantiza que la solución (3.42) satisface (3.41). Lo dicho anteriormente se muestra en la figura 3.8, donde también se define la función solución y se prueban las condiciones de frontera.

Finalmente el esquema gráfico de  $x(t)$  y  $\frac{dx(t)}{dt}$  puede apreciarse en la figura 3.9 con  $K = 3$  y  $\omega = \pi$

Figura 3.8: Se prueba que  $x(t)$  satisface el problema (3.41)Figura 3.9: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  (roja) para  $f(t) = K \operatorname{sen}(\omega t)$ .

### 3.4.2 Fuente exponencial

Esta clase de fuente se la expresa de la siguiente manera

$$f(t) = Ce^{-\lambda t}, \quad (3.43)$$

donde  $C$  y  $\lambda$  son constantes. La gráfica de dicha fuente se muestra a continuación.

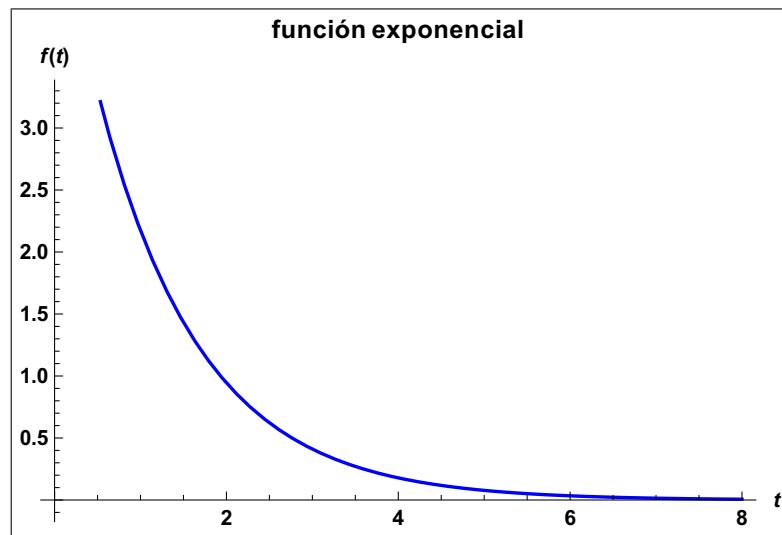


Figura 3.10: Gráfica de  $f(t)$  vs  $t$  para la función exponencial con  $C = 5$  y  $l = \frac{5}{6}$ .

Luego, según lo anterior, el problema que se presenta es

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) = Ce^{-\lambda t}, \quad m \leq t \leq n \quad (3.44)$$

$$\alpha_1 x(m) + \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt} = d_1; \quad \beta_1 x(n) + \beta_2 \frac{dx(n)}{dt} = d_2.$$

Teniendo en cuenta (3.43) la solución en este caso es dado por (3.42) con  $f(t') = Ce^{-\lambda t'}$  y las integrales a resolver son

$$\int J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})f(t')dt' = \int \frac{2C}{z}J_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}z)e^{-2\lambda \ln(z)}dz = I_a$$

$$\int Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})f(t')dt' = \int \frac{2C}{z}Y_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}z)e^{-2\lambda \ln(z)}dz = I_b.$$

El cálculo a las anteriores integrales se muestra a continuación, donde  $\lambda$  es representado por  $l$

```
■ Fuente exponencial
In[16]:= Ia[z_] = FullSimplify[Integrate[2 c (Exp[-2 l Log[z]] BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z]) / z, z]];
In[17]:= Ib[z_] = FullSimplify[Integrate[2 c (Exp[-2 l Log[z]] BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z]) / z, z]];
In[18]:= i1[t_] = Ia[E^(t/2)] - Ia[E^(m/2)];
In[19]:= i2[t_] = Ib[E^(t/2)] - Ib[E^(m/2)];
In[20]:= i3[t_] = Ia[E^(n/2)] - Ia[E^(t/2)];
In[21]:= i4[t_] = Ib[E^(n/2)] - Ib[E^(t/2)];
```

Figura 3.11:

```
■ Función solución y su derivada
In[22]:= x[t_] = (d1/a2) G1[m] - (d2/b2) G2[n] + c1 i1[t] + c2 i2[t] + c3 i3[t] + c4 i4[t];
In[23]:= dx = D[x[t], t];
In[24]:= Dx[t_] = dx;
■ Ecuación diferencial
In[25]:= R[t_] = D[x[t], {t, 2}] + (a Exp[t] - b) x[t];
■ Condiciones de frontera
In[26]:= FullSimplify[a1 x[m] + a2 Dx[m]]
Out[26]= 0.5
In[27]:= FullSimplify[b1 x[n] + b2 Dx[n]]
Out[27]= 1.
In[28]:= Plot[R[t], {t, 0, 8}, PlotStyle -> Blue]

Out[28]=
```

Figura 3.12: Se prueba que (3.42) satisface (3.44)

En la figura 3.12 se usa el método antes mencionado para comprobar que  $x(t)$  satisface el problema (3.44), mientras que el estudio gráfico de dicha solución y su derivada se muestra en la siguiente figura.

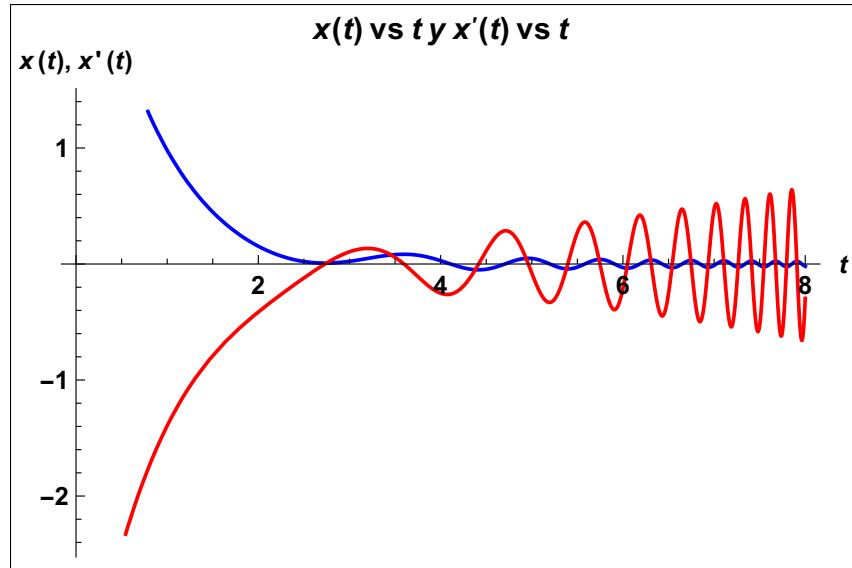


Figura 3.13: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  para  $f(t) = Ce^{-\lambda t}$ , con  $C = 5$  y  $\lambda = \frac{5}{6}$ .

### 3.4.3 Fuente pulso rectangular

Como se vio en el capítulo 2 este tipo de fuente tiene la siguiente forma

$$f(t) = K_1 + K_2 H(t - t_1) - K_2 H(t - t_2), \quad (3.45)$$

donde  $K_1, K_2, t_1$  y  $t_2$  son constantes y  $H(t - t_k)$  es la función de Heaviside.

El esquema gráfico de esta fuente se presenta en la siguiente figura

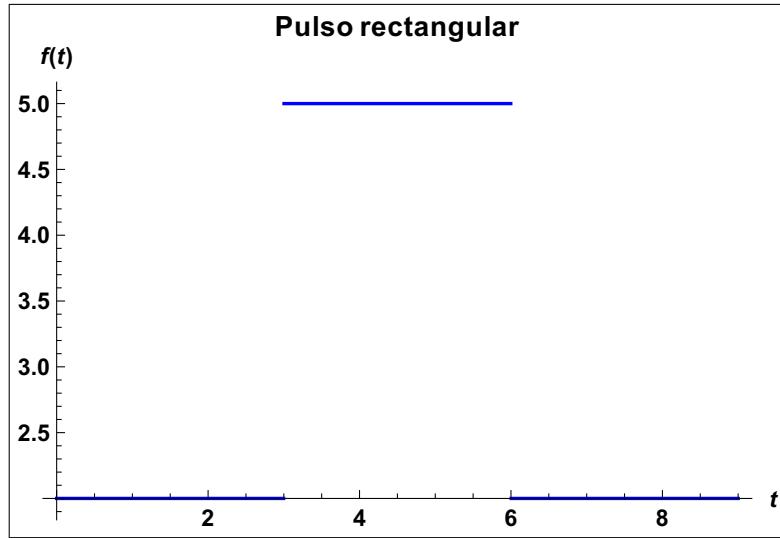


Figura 3.14: Gráfica de  $K_1 + K_2 H(t - t_1) - K_2 H(t - t_2)$  vs  $t$  con  $t_1 = 3$ ,  $t_2 = 6$ ,  $K_1 = 2$  y  $K_2 = 3$ .

Obedeciendo a (3.45) se tiene que el problema en cuestión es dado por (3.46), en tanto que su solución es dada por (3.42) con  $f(t') = K_1 + K_2 H(t' - t_1) - K_2 H(t' - t_2)$ .

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) = K_1 + K_2 H(t - t_1) - K_2 H(t - t_2), \quad m \leq t \leq n \quad (3.46)$$

$$\alpha_1 x(m) + \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt} = d_1; \quad \beta_1 x(n) + \beta_2 \frac{dx(n)}{dt} = d_2.$$

En la figura 3.15 aparece el cálculo de las integrales que resultan cuando se introduce la fuente pulso rectangular en 3.42, donde se debe tener claro que,

$$\text{si } z = e^{\frac{t'}{2}} \Rightarrow t' = 2\ln(z),$$

$$\text{por lo tanto } H(t' - t_i) = H(2\ln(z) - t_i) = H\left(z - e^{\frac{t_i}{2}}\right).$$

En la figura 3.16 se observa que efectivamente cuando se inserta la fuente pulso rectangular en (3.46) la solución obtenida satisface el problema (3.46).

```

■ Fuente escalón rectangular

In[16]:= f[z_] = 2 + 3 HeavisideTheta[z - E^(3/2)] - 3 HeavisideTheta[z - E^3];
In[17]:= Ia[z_] = FullSimplify[Integrate[2 f[z] (BesselJ[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z])/z, z]];
In[18]:= Ib[z_] = FullSimplify[Integrate[2 f[z] (BesselY[2 Sqrt[b], 2 Sqrt[a] z])/z, z]];
In[19]:= i1[t_] = Ia[E^(t/2)] - Ia[E^(m/2)];
In[20]:= i2[t_] = Ib[E^(t/2)] - Ib[E^(m/2)];
In[21]:= i3[t_] = Ia[E^(n/2)] - Ia[E^(t/2)];
In[22]:= i4[t_] = Ib[E^(n/2)] - Ib[E^(t/2)];

```

Figura 3.15:

```

■ Función solución y su derivada

In[23]:= x[t_] = (d1 a2) G1[m] - (d2 b2) G2[n] + c1 i1[t] + c2 i2[t] + c3 i3[t] + c4 i4[t];
In[24]:= dx = D[x[t], t];
In[25]:= Dx[t_] = dx;

■ Ecuación diferencial

In[26]:= R[t_] = D[x[t], {t, 2}] + (a Exp[t] - b) x[t];

■ Condiciones de frontera

In[27]:= FullSimplify[a1 x[m] + a2 Dx[m]]
Out[27]= 0.5

In[28]:= FullSimplify[b1 x[n] + b2 Dx[n]]
Out[28]= 1.

In[29]:= Plot[R[t], {t, 0, 8}, PlotStyle -> Blue]

```

The figure shows a plot of the function R(t) against t. The x-axis ranges from 0 to 8 with major ticks at 2, 4, 6, and 8. The y-axis ranges from 2.5 to 5.0 with major ticks at 3.0, 4.0, 4.5, and 5.0. The function is zero for t < 0. At t = 0, it jumps to 0.5. It remains constant at 0.5 until t = 2. At t = 2, it jumps to 1.0 and remains constant at 1.0 until t = 8.

Figura 3.16: Se prueba gráficamente que  $R(t) = f(t)$  y también que se cumplen las condiciones de frontera.

Ahora, cuando se grafica la solución  $x(t)$  y su derivada se obtiene el esquema mostrado a

continuación.

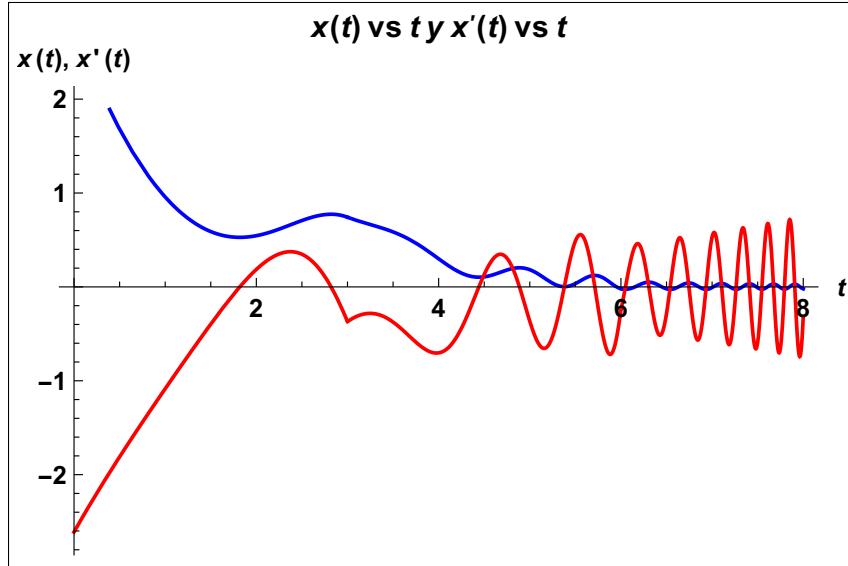


Figura 3.17: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  para la fuente pulso rectangular.

### 3.4.4 Fuente en términos de las funciones de Bessel

Al igual que en capítulo anterior, en este caso también se analiza la presencia de una fuente que contiene funciones de Bessel tanto de primera como de segunda especie, dicha fuente se escribe como sigue

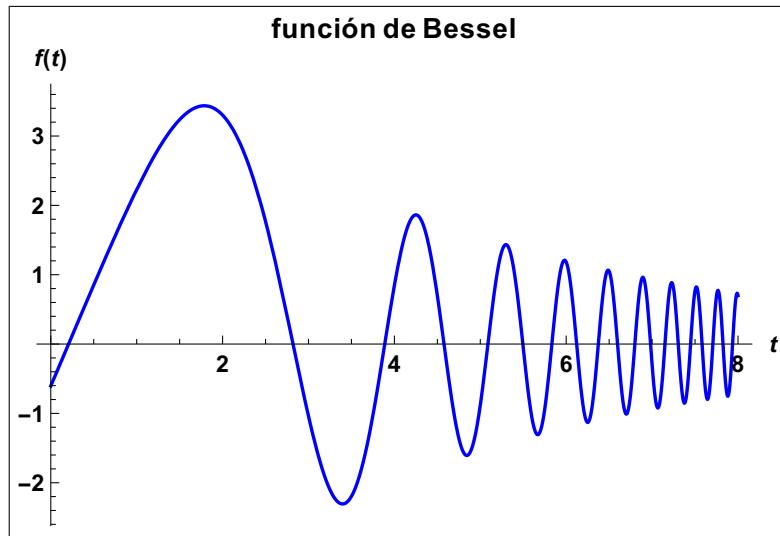
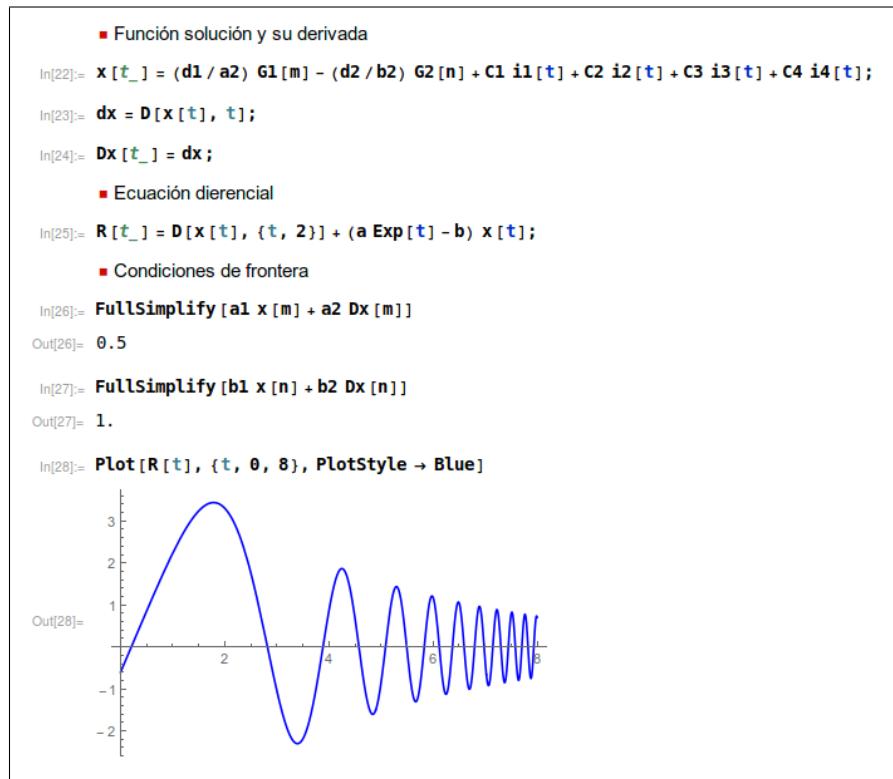
$$f(t) = AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}), \quad (3.47)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes. La gráfica que representa esta fuente se muestra en la figura 3.18.

Después, el problema que se tiene que resolver es

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + (ae^t - b)x(t) = AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}), \quad m \leq t \leq n \quad (3.48)$$

$$\alpha_1 x(m) + \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt} = d_1; \quad \beta_1 x(n) + \beta_2 \frac{dx(n)}{dt} = d_2.$$

Figura 3.18: Gráfica de  $AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})$  vs  $t$ , con  $A = 5$  y  $B = 7$ Figura 3.19: Se verifica que se cumplen las condiciones iniciales y que  $R(t) = f(t)$ .

Para obtener la solución a (3.46) se inserta  $f(t') = AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t'/2})$  en (3.42) y se calculan las integrales en Wolfram Mathematica como en los anteriores casos.

En la figura 3.19 se puede observar que se satisfacen las condiciones iniciales y que la grafica que se obtiene cuando se representa  $R(t)$  concuerda con presentada en la figura 3.18.

en seguida se presenta el estudio grafico de la solución y su derivada para la fuente dada en este apartado.

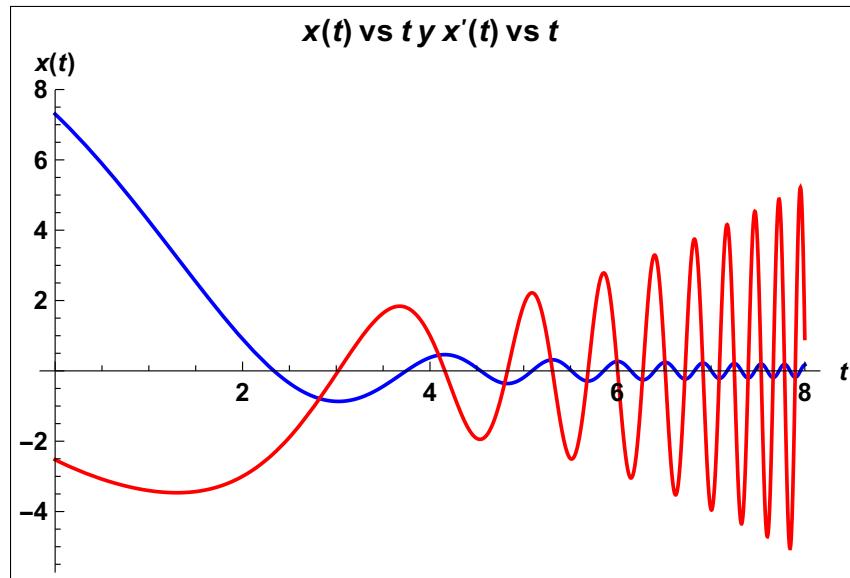


Figura 3.20: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  (roja) en el caso de  $f(t) = AJ_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2}) + BY_{2\sqrt{b}}(2\sqrt{a}e^{t/2})$ .

# Capítulo 4

## Caso particular

Uno de los objetivos de este trabajo también es el análisis de la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + ae^{\lambda t}x(t) = f(t), \quad (4.1)$$

la cual tiene relación directa con la ecuación (1.1) y cuya solución general al caso homogéneo ( $f(x) = 0$ ) es dado por (véase **Ápendice B**)

$$x(t) = c_1 J_0 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t/2} \right) + c_2 Y_0 \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t/2} \right). \quad (4.2)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, en seguida se procede al análisis de (4.1) cuando ésta se sujeta a condiciones iniciales y condiciones de frontera.

### 4.1 Condiciones iniciales

El problema que se plantea es el siguiente

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + ae^{\lambda t}x(t) &= f(t), \quad t \geq t_1 \\ x(t_1) &= d_1, \quad \frac{dx(t_1)}{dt_1} = d_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Donde  $a$ ,  $\lambda$ ,  $d_1$  y  $d_2$  son constantes. Como se vio en capítulos anteriores la solución al anterior problema puede plantearse en términos de la función de green, como se muestra a continuación .

### 4.1.1 Solución en términos de la función de Green

Según el método de la función de Green desarrollado en el capítulo 2, la solución al problema (4.1) puede ser escrito de la siguiente manera

$$x(t) = d_2 G(t_1, t) - d_1 G_{t'}(t_1, t) + \int_{t_1}^{\infty} G(t', t) f(t') dt', \quad (4.4)$$

donde la función  $G(t', t)$  debe cumplir la siguiente ecuación diferencial

$$G_{t't'}(t', t) + (ae^{t'} - b)G(t', t) = 0, \quad t' \geq t_1 \text{ y } t' \neq t, \quad (4.5)$$

Ahora, considerando la relación que existe entre los problemas (2.12) y (4.3), la función de Green presente en (4.4) tiene la siguiente forma

$$G(t', t) = \begin{cases} C_1 J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right), & t_1 \leq t' < t \\ 0, & t' > t \end{cases}, \quad (4.6)$$

mientras que su derivada es esta dada por

$$G(t', t) = -\sqrt{a}e^{\lambda t'/2} \begin{cases} C_1 J_1\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) + C_2 Y_1\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right), & t_1 \leq t' < t \\ 0, & t' > t \end{cases}. \quad (4.7)$$

Para determinar las constantes  $C_1$  y  $C_2$  se debe tener en cuenta que la función de Green debe cumplir las siguientes condiciones

$$G(t^+, t) - G(t^-, t) = 0,$$

$$G_{t'}(t^+, t) - G_{t'}(t^-, t) = 1.$$

De acuerdo con (4.6) y (4.7) la anterior expresión se convierte en

$$\begin{aligned} C_1 J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) + C_2 Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) &= 0, \\ \sqrt{a}e^{\lambda t'/2} [C_1 J_1\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) + C_2 Y_1\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right)] &= -1. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Resolviendo el anterior sistema como se muestra en la figura 4.1 Se encuentra que las constantes  $C_1$  y  $C_2$  estan dadas por

$$C_1 = \frac{\pi}{\lambda} Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) \quad \text{y} \quad C_2 = -\frac{\pi}{\lambda} 0F_1\left(; 1; -\frac{ae^{\lambda t}}{\lambda^2}\right) = -\frac{\pi}{\lambda} J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right). \quad (4.9)$$

■ Funciones de Bessel y sus derivadas

```
In[1]:= J = BesselJ[0, (2/l) Sqrt[a] Exp[l t/2]];
```

```
In[2]:= DJ = D[J, t];
```

```
In[3]:= Y = BesselY[0, (2/l) Sqrt[a] Exp[l t/2]];
```

```
In[4]:= DY = D[Y, t];
```

■ Solución del sistema

```
In[5]:= FullSimplify[Solve[{C1 J + C2 Y == 0, C1 DJ + C2 DY == -1}, {C1, C2}]] // TraditionalForm
```

```
Out[5]/TraditionalForm=
```

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ C1 \rightarrow \frac{\pi Y_0\left(\frac{2\sqrt{a}e^{\lambda t/2}}{l}\right)}{l}, C2 \rightarrow -\frac{\pi {}_0F_1\left(; 1; -\frac{ae^{\lambda t}}{l^2}\right)}{l} \right\} \end{array} \right.$$

Figura 4.1: Solución al sistema (4.8) en Mathematica, donde  $\lambda$  es representado por  $l$ .

Según lo anterior, la función de Green toma la siguiente forma

$$G(t', t) = \begin{cases} \frac{\pi}{\lambda} Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right), & t_1 \leq t' \leq t \\ -\frac{\pi}{\lambda} J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right), & t' \geq t \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (4.10)$$

En la figura 4.2 se muestra que la función de Green dada anteriormente satisface la ecuación diferencial (4.5) y cumple con las condiciones (4.8), mientras que la grafica de  $G(t', t)$  y  $G'_t(t', t)$  aparece en la figura 4.3.

En seguida, de acuerdo a (4.10) la solución (4.1) se escribe como

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{\pi d_2}{\lambda} \left[ Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) - J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) \right] \\
 &+ \frac{\pi d_2 \sqrt{a} e^{\lambda t'/2}}{\lambda} \left[ Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) - J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) \right] \\
 &+ \frac{\pi}{\lambda} Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) \int_{t_1}^t J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) f(t') dt' \\
 &- \frac{\pi}{\lambda} J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) \int_{t_1}^t Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) f(t') dt'.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

```

■ Definición de constantes y funciones de Bessel
In[1]:= C1 = (\pi / l) BesselY[0, (2 Sqrt[a] Exp[l t / 2]) / l];
In[2]:= C2 = -(\pi / l) BesselJ[0, (2 Sqrt[a] Exp[l t / 2]) / l];
In[3]:= J = BesselJ[0, (2 / l) Sqrt[a] Exp[l tp / 2]];
In[4]:= Y = BesselY[0, (2 / l) Sqrt[a] Exp[l tp / 2]];

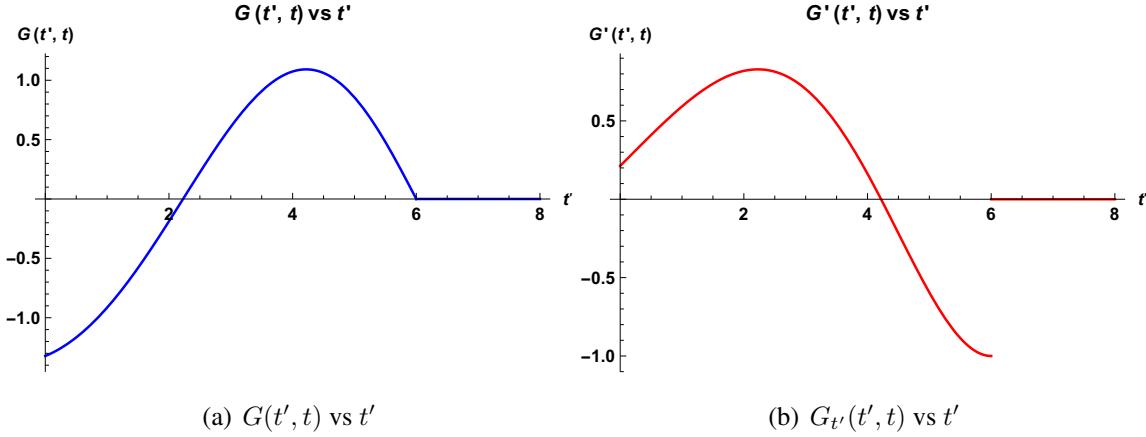
■ Función de Green y su derivada
In[5]:= G1[tp_] = C1 J + C2 Y;
In[6]:= DG1[tp_] = D[G1[tp], tp];
In[7]:= G2[tp_] = 0
Out[7]= 0
In[8]:= DG2[tp_] = D[G2[tp], tp]
Out[8]= 0

■ Ecuación diferencial
In[9]:= FullSimplify[D[G1[tp], {tp, 2}] + (a Exp[l tp]) G1[tp]]
Out[9]= 0

■ Condiciones de la función de Green
In[10]:= FullSimplify[G2[t] - G2[tp]]
Out[10]= 0
In[11]:= FullSimplify[DG2[t] - DG1[tp]]
Out[11]= 1

```

Figura 4.2: Se define la función de Green junto con su derivada y se prueba que ésta satisface (4.5) y (4.8).

Figura 4.3: Gráfica de  $G(t', t)$  y  $G'_t(t', t)$ , con  $t = 6$ .

Después de verificar que la función de Green es la adecuada se procede al análisis de los casos homogéneo y no homogéneo respectivamente

### 4.1.2 Caso homogéneo

Este caso se presenta cuando  $f(x) = 0$ , por lo tanto el problema a resolver es

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + ae^{\lambda t}x(t) = 0, \quad t \geq t_1$$

$$x(t_1) = d_1, \quad \frac{dx(t_1)}{dt_1} = d_2. \quad (4.12)$$

Luego, según (4.11) la solución al problema presentado previamente es dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} x_H(t) &= \frac{\pi d_2}{\lambda} \left[ Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) - J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) \right] \\ &+ \frac{\pi d_2 \sqrt{a}e^{\lambda t'/2}}{\lambda} \left[ Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) - J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Para comprobar que  $x_H(t)$  corresponde a la solución de (4.12) se usa Wolfram Mathematica tal como se muestra en la siguiente figura, donde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $J$  y  $Y$  se han definido como aparece en la figura 4.2.

```

■ Función de Green y su derivada
In[5]:= G[tp_] = C1 J + C2 Y;
In[6]:= DG[tp_] = D[G[tp], tp];

■ Función solución y su derivada
In[7]:= x[t_] = d2 G[t1] - d1 DG[t1];
In[8]:= Dx[t_] = D[x[t], t];

■ Ecuación diferencial
In[9]:= FullSimplify[D[x[t], {t, 2}] + (a Exp[l t]) x[t]]
Out[9]= 0

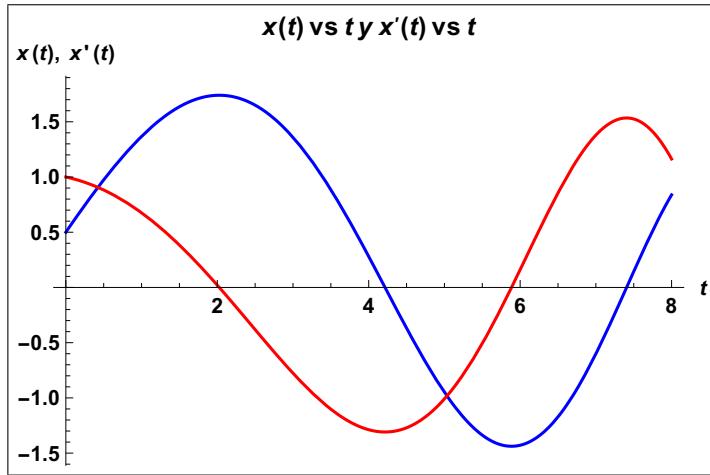
■ Condiciones iniciales
In[10]:= FullSimplify[x[t1]]
Out[10]= d1

In[11]:= FullSimplify[Dx[t1]]
Out[11]= d2

```

Figura 4.4: Se prueba que la  $x_H$  satisface (4.12).

En la anterior figura pude observarse que la solución (4.13) satisface el problema (4.12), en tanto que su grafica se muestra a continuación

Figura 4.5: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  (roja) para  $f(t) = 0$  con  $\lambda = \frac{2}{10}$ .

En la figura 4.5 puede notarse que para  $t = t_1 = 0$  se cumple que  $x(t_1) = d_1 = \frac{1}{2}$  y

$$\frac{dx(t_1)}{dt} = d_2 = 1.$$

Después de probar que la solución (4.11) satisface el caso homogéneo, en la siguiente sección se analiza el caso no homogéneo.

### 4.1.3 Caso no homogéneo

Ahora se procede a analizar el caso no homogéneo, es decir cuando la fuente es diferente de cero, cabe mencionar que en esta ocasión solo se estudiará la presencia de una sola fuente, dado que en anteriores capítulos ya se ha realizado un estudio completo con varias de ellas.

#### Fuente sinusoidal

Esta fuente se representa de la siguiente manera

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t). \quad (4.14)$$

La representación gráfica de esta fuente se muestra a continuación

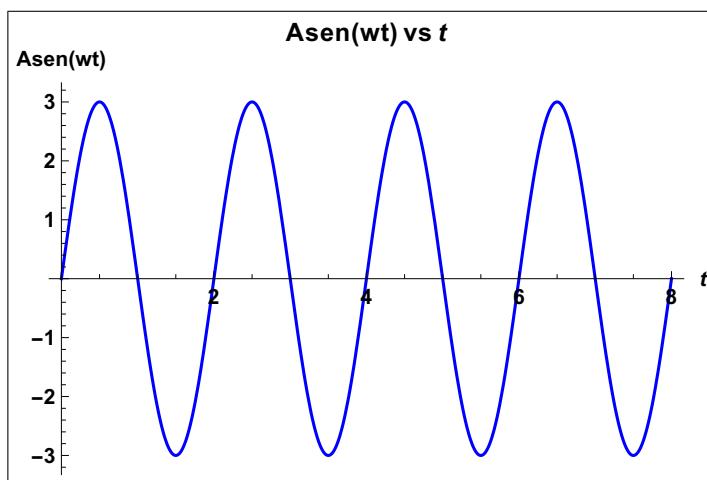


Figura 4.6: Grafica de  $f(t) = A \operatorname{sen}(\omega t)$  vs  $t$  con  $A = 3$  y  $\omega = \pi$ .

De acuerdo con (4.3) y (4.14) el problema que se tiene es

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + ae^{\lambda t}x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t), \quad t \geq t_1$$

$$x(t_1) = d_1, \quad \frac{dx(t_1)}{dt_1} = d_2. \quad (4.15)$$

En seguida, reemplazando  $f(t') = A\sin(\omega t')$  en (4.11) se tiene que la solución al anterior problema es dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} x(t) &= x_H(t) + \frac{\pi A}{\lambda} Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) \underbrace{\int_{t_1}^t J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) \sin(\omega t') dt'}_{I_a} \\ &\quad - \frac{\pi A}{\lambda} J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t/2}\right) \underbrace{\int_{t_1}^t Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) \sin(\omega t') dt'}_{I_b}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Para determinar la anterior solución de manera completa se debe solucionar las integrales  $I_a$  e  $I_b$ , lo cual se realiza en Wolfram Mathematica como se muestra en la figura 4.7, donde al igual que anteriores capítulos se usa la sustitución  $z = e^{\frac{t'}{2}}$ .

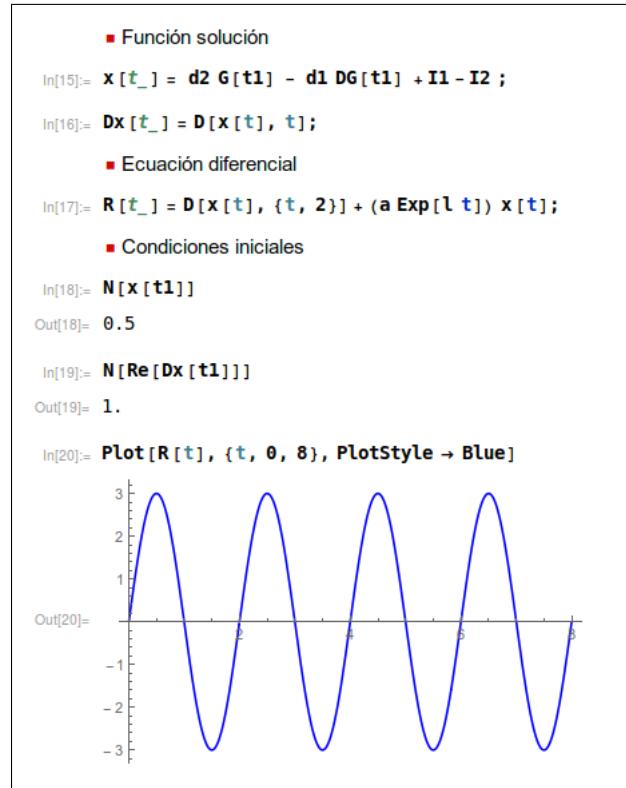
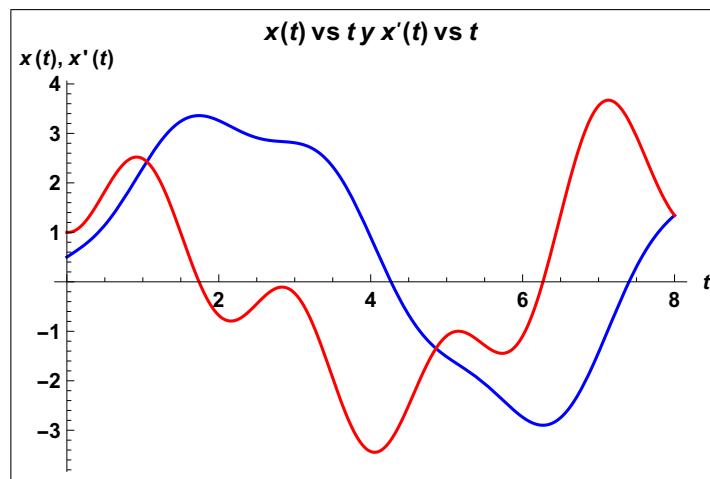
■ Fuente Sinusoidal

```
In[9]:= Ia[z_] = FullSimplify[Integrate[(2/l) A (Sin[(2/l) w Log[z]] BesselJ[0, (2/l) Sqrt[a] z]) / z, z]];
In[10]:= Ib[z_] = FullSimplify[Integrate[(2/l) A (Sin[(2/l) w Log[z]] BesselY[0, (2/l) Sqrt[a] z]) / z, z]];
In[11]:= ia[t_] = Ia[E^(l t/2)] - Ia[E^(l t1/2)];
In[12]:= ib[t_] = Ib[E^(l t/2)] - Ib[E^(l t1/2)];
In[13]:= I1 = π (1/l) BesselY[0, (2/l) Sqrt[a] Exp[l t/2]] ia[t];
In[14]:= I2 = π (1/l) BesselJ[0, (2/l) Sqrt[a] Exp[l t/2]] ib[t];
```

Figura 4.7: Calculo de  $I_a$  e  $I_b$  y definición de  $I_1$  e  $I_2$

En la anterior figura también se definen los resultados de  $I_a$  e  $I_b$  en términos de  $t$  e  $t_1$  y se establecen el segundo y tercer término de (4.16), los cuales se representan con  $I_1$  y  $I_2$ .

Luego, en la siguiente figura se define la solución (4.16) y se verifica de manera grafica que ésta satisface la ecuación diferencial y también que cumple con la condiciones iniciales.

Figura 4.8: Se verifica que se cumplen las condiciones iniciales y que  $R(t) = f(t)$ .Figura 4.9: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  (roja) para  $f(t) = A\sin(\omega t)$ .

Por último, en la anterior imagen se puede observar el estudio grafico de la solución encontrada junto con su derivada.

## 4.2 Condiciones de frontera

De manera similar a como se hizo en el capítulo 3, en este caso se plantea el siguiente problema de valores en la frontera;

$$\begin{aligned} \frac{d^2x(t)}{dt^2} + ae^{\lambda t}x(t) &= f(t), \quad m \leq t \leq n \\ \alpha_1x(m) + \alpha_2\frac{dx(m)}{dt} &= d_1; \quad \beta_1x(n) + \beta_2\frac{dx(n)}{dt} = d_2, \end{aligned} \tag{4.17}$$

donde, los parametros  $m, n, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, d_1$  y  $d_2$  son constantes. Como ya se a visto, la solución al anterior problema puede ser dada en términos de la función de Green tal como se muestra en seguida.

### 4.2.1 Solución en términos de la función de Green

En el capítulo 3 se mostró que cuando se analiza el caso  $\alpha_2 \neq 0, \beta_2 \neq 0$ . la solución al problema (4.17) es dado por

$$x(t) = \frac{d_1}{\alpha_2}G(m, t) - \frac{d_2}{\beta_2}G(n, t) + \int_m^n G(t', t)f(t')dt. \tag{4.18}$$

Donde la función de Green debe ser solución de la siguiente ecuación diferencial

$$G_{t't'}(t', t) + ae^{\lambda t'}G(t', t) = 0, \quad \text{para } t' \neq t. \tag{4.19}$$

De acuerdo a (4.2) y (3.23)  $G(t', t)$  se escribe de la siguiente manera

$$G(t', t) = \begin{cases} C_1J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) + C_2Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right), & m \leq t' \leq t \\ C_3J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right) + C_4Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{a}e^{\lambda t'/2}\right), & t \leq t' \leq n \end{cases}, \tag{4.20}$$

en tanto que  $G_{t'}(t', t)$  es

$$G_{t'}(t', t) = \begin{cases} C_1 J'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t'/2}\right) + C_2 Y'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t'/2}\right), & m \leq t' < t \\ C_3 J'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t'/2}\right) + C_4 Y'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t'/2}\right), & t < t' \leq n. \end{cases} \quad (4.21)$$

Para determinar las constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  se debe tener en cuenta que  $G(t', t)$  debe cumplir las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} \alpha_1 G(m, t) + \alpha_2 G_{t'}(m, t) &= 0 \\ \beta_1 G(n, t) + \beta_2 G_{t'}(n, t) &= 0 \\ G(t^+, t) - G(t^-, t) &= 0 \\ G_{t'}(t^+, t) - G_{t'}(t^-, t) &= 1 \end{aligned}$$

Según (4.20) y (4.21) el anterior sistema se convierte en

$$\begin{aligned} &C_1 \underbrace{\left\{ \alpha_1 J_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda m/2}\right) + \alpha_2 J'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda m/2}\right) \right\}}_A + \\ &C_2 \underbrace{\left\{ \alpha_1 Y_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda m/2}\right) + \alpha_2 Y'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda m/2}\right) \right\}}_B = 0, \\ &C_3 \underbrace{\left\{ \beta_1 J_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda n/2}\right) + \beta_2 J'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda n/2}\right) \right\}}_D + \\ &C_4 \underbrace{\left\{ \beta_1 Y_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda n/2}\right) + \beta_2 Y'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda n/2}\right) \right\}}_E = 0, \\ &\underbrace{C_4 J_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t/2}\right)}_{J(t)} + \underbrace{C_3 Y_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t/2}\right)}_{Y(t)} - \underbrace{C_1 J_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t/2}\right)}_{J(t)} - \underbrace{C_2 Y_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t/2}\right)}_{Y(t)} = 0, \\ &\underbrace{C_4 J'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t/2}\right)}_{J_p(t)} + \underbrace{C_3 Y'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t/2}\right)}_{Y_p(t)} - \underbrace{C_1 J'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t/2}\right)}_{J_p(t)} - \underbrace{C_2 Y'_0\left(\frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t/2}\right)}_{Y_p(t)} = 1. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Resolviendo (4.22) se encuentra que  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  están dadas por

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \frac{B[EJ(t) - DY(t)]}{(BD - AE)[J_p(t)Y(t) - J(t)Y_p(t)]}, \\ C_2(t) &= \frac{A[DY(t) - EJ(t)]}{(BD - AE)[J_p(t)Y(t) - J(t)Y_p(t)]}, \\ C_3(t) &= \frac{E[BJ(t) - AY(t)]}{(BD - AE)[J_p(t)Y(t) - J(t)Y_p(t)]}, \\ C_4(t) &= \frac{D[AY(t) - BJ(t)]}{(BD - AE)[J_p(t)Y(t) - J(t)Y_p(t)]}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ahora, con las constantes ya conocidas, queda totalmente determinada la función de Green. En seguida se muestra que  $G(t', t)$  cumple con (4.19) y las condiciones (4.22)

```

■ Funciones de Bessel
In[1]:= J[tp_] = BesselJ[0, (2 / l) Sqrt[a] Exp[l tp / 2]];
In[2]:= Y[tp_] = BesselY[0, (2 / l) Sqrt[a] Exp[l tp / 2]];
In[3]:= dJ = D[J[tp], tp];
In[4]:= dY = D[Y[tp], tp];
In[5]:= Jp[tp_] = dJ;
In[6]:= Yp[tp_] = dY;

■ Definición de coeficientes
In[7]:= A = a1 J[m] + a2 Jp[m]; B = a1 Y[m] + a2 Yp[m];
In[8]:= Dp = b1 J[n] + b2 Jp[n]; Ep = b1 Y[n] + b2 Yp[n];

■ Definición de las constantes
In[9]:= Del = (B Dp - A Ep) (Jp[t] Y[t] - J[t] Yp[t]);
In[10]:= C1 = (B (Ep J[t] - Dp Y[t])) / Del; C2 = (A (Dp Y[t] - Ep J[t])) / Del;
In[11]:= C3 = (Ep (B J[t] - A Y[t])) / Del; C4 = (Dp (A Y[t] - B J[t])) / Del;

```

Figura 4.10: se definen  $J(t')$ ,  $Y(t')$ ,  $J_p(t')$ ,  $Y_p(t')$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $D$  y  $E$ , al igual que las constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ .

```

■ Función de Green y su derivada
In[12]:= G1[tp_] = C1 J[tp] + C2 Y[tp]; G2[tp_] = C3 J[tp] + C4 Y[tp];
In[13]:= DG1[tp_] = D[G1[tp], tp]; DG2[tp_] = D[G2[tp], tp];
■ Ecuación diferencial
In[14]:= FullSimplify[D[G1[tp], {tp, 2}] + (a Exp[l tp]) G1[tp]]
Out[14]= 0

In[15]:= FullSimplify[D[G2[tp], {tp, 2}] + (a Exp[l tp]) G2[tp]]
Out[15]= 0

■ Condiciones de frontera
In[16]:= FullSimplify[a1 G1[m] + a2 DG1[m]]
Out[16]= 0

In[17]:= FullSimplify[b1 G2[n] + b2 DG2[n]]
Out[17]= 0

In[18]:= Simplify[G2[t] - G1[t]]
Out[18]= 0

In[19]:= Simplify[DG2[t] - DG1[t]]
Out[19]= 1

```

Figura 4.11: Se define la función de Green junto con su derivada y se prueba que ésta satisface (4.19) y (4.22).

Después de probar que la función de Green encontrada es la adecuada se procede a realizar su gráfica, la cual se muestra en la figura 4.12, donde los parametros constantes toman los mismos valores dados en capítulos anteriores.

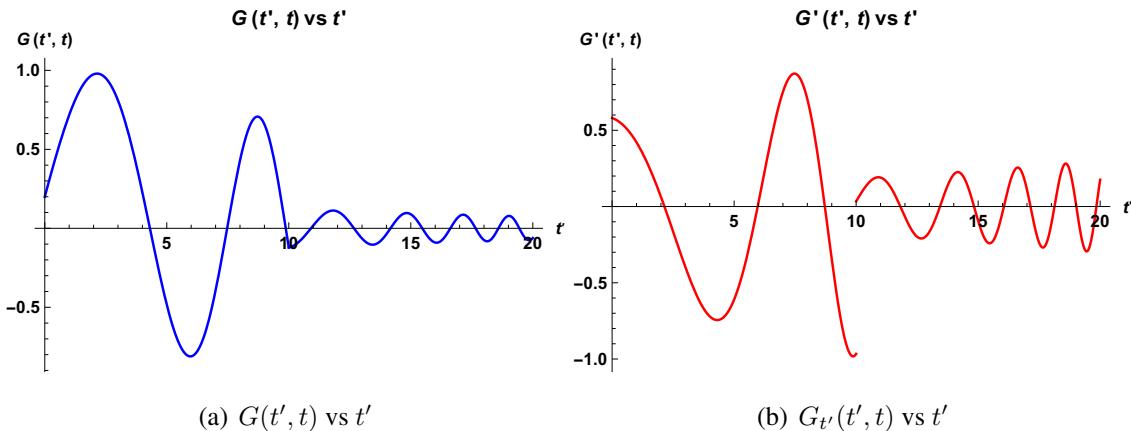


Figura 4.12: Gráfica de  $G(t', t)$  y  $G'_t(t', t)$ , con  $t = 10$ .

Luego, según (4.20) y (4.21) la solución (4.18) se convierte en

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{d_1}{\alpha_2} \left[ C_1(t) J_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda m/2} \right) + C_2(t) Y_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda m/2} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{d_2}{\beta_2} \left[ C_3(t) J_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda n/2} \right) + C_4(t) Y_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda n/2} \right) \right] \\
 &\quad + C_1(t) \underbrace{\int_m^t J_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t'/2} \right) f(t') dt'}_{i_1} + C_2(t) \underbrace{\int_m^t Y_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t'/2} \right) f(t') dt'}_{i_2} \\
 &\quad + C_3(t) \underbrace{\int_t^n J_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t'/2} \right) f(t') dt'}_{i_3} + C_4(t) \underbrace{\int_t^n Y_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda t'/2} \right) f(t') dt'}_{i_4}
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Después, con la solución (4.24) totalmente determinada se procede a verificar que ésta satisface el problema (4.17) cuando  $f(t) = 0$  y  $f'(t) \neq 0$ .

## 4.2.2 Caso homogéneo

Cuando  $f(x) = 0$  el problema a resolver es

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2x(t)}{dt^2} + ae^{\lambda t}x(t) &= 0, \quad m \leq t \leq n \\
 \alpha_1 x(m) + \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt} &= d_1; \quad \beta_1 x(n) + \beta_2 \frac{dx(n)}{dt} = d_2.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

De acuerdo con (4.24) la solución al problema dado anteriormente es

$$\begin{aligned}
 x_H(t) &= \frac{d_1}{\alpha_2} \left[ C_1(t) J_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda m/2} \right) + C_2(t) Y_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda m/2} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{d_2}{\beta_2} \left[ C_3(t) J_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda n/2} \right) + C_4(t) Y_{2\sqrt{b}} \left( \frac{2}{\lambda} \sqrt{a} e^{\lambda n/2} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

En seguida se muestra que efectivamente (4.26) es solución de (4.25) Y la gráfica de dicha solución se muestra en la figura 4.14.

```

■ Función solución y su derivada
In[16]:= x[t_] = Simplify[(d1/a2) G1[m] - (d2/b2) G2[n]];
In[17]:= dx = D[x[t], t];
In[18]:= Dx[t_] = dx;

■ Ecuación dierencial
In[19]:= R[t_] = D[x[t], {t, 2}] + (a Exp[l t]) x[t];

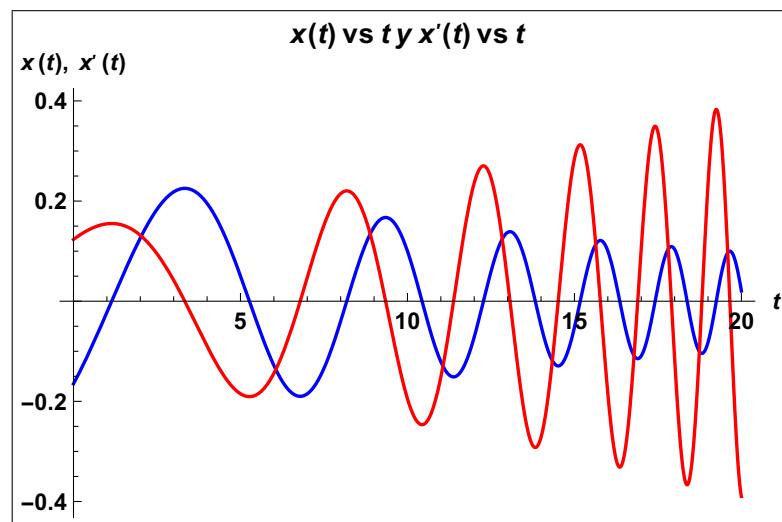
■ Condiciones de frontera
In[20]:= FullSimplify[a1 x[m] + a2 Dx[m]]
Out[20]= 0.5

In[21]:= FullSimplify[b1 x[n] + b2 Dx[n]]
Out[21]= 1.

In[22]:= Plot[R[t], {t, 0, 20}, PlotStyle -> Blue]
Out[22]=


```

Figura 4.13: se prueba de manera grafica que (4.24)satisface (4.25).

Figura 4.14: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  ( azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  (roja) en el caso de  $f(t) = 0$ .

### 4.2.3 Caso no homogéneo

En este caso se analiza la presencia de una fuente diferente de cero.

#### Fuente sinusoidal

Con esta fuente el problema a resolver es

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + ae^{\lambda t}x(t) = K \operatorname{sen}(\omega t), \quad m \leq t \leq n \quad (4.27)$$

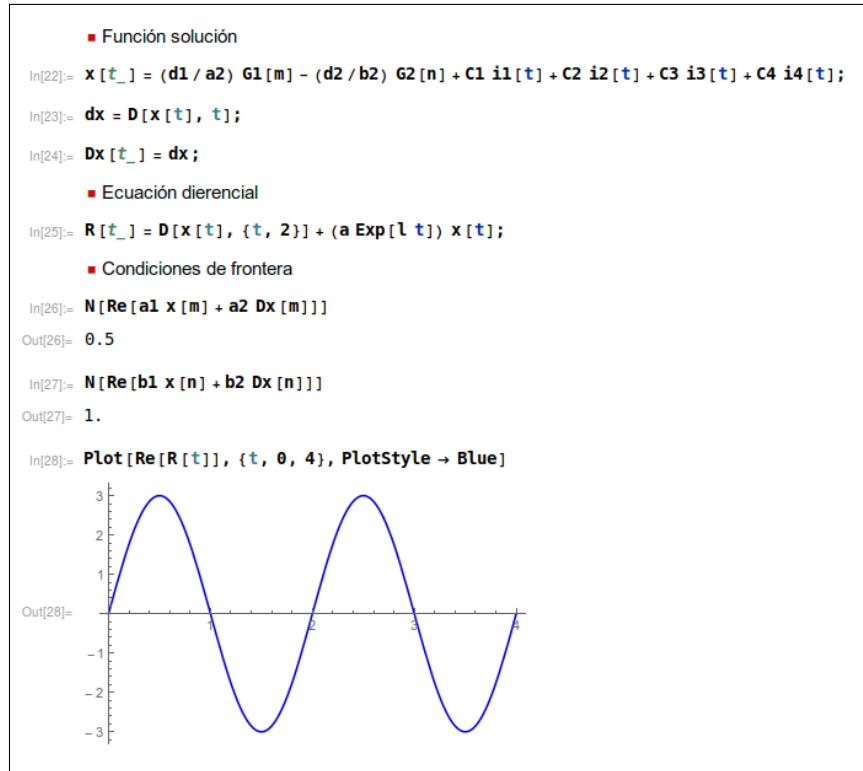
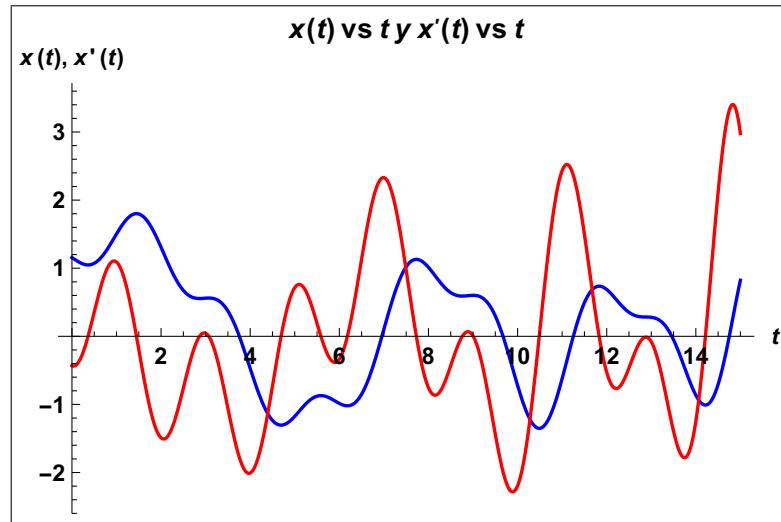
$$\alpha_1 x(m) + \alpha_2 \frac{dx(m)}{dt} = d_1; \quad \beta_1 x(n) + \beta_2 \frac{dx(n)}{dt} = d_2.$$

La solución a este problema se encuentra reemplazando  $f(t') = K \operatorname{sen}(\omega t')$  en (4.24).

A continuación, de manera similar a como se ha venido trabajando se prueba que (4.24) es solución de (4.27) y la gráfica de esta solución aparece en la figura 4.17

```
■ Fuente sinusoidal
In[16]:= Ia[z_] = FullSimplify[Integrate[(2/l) K (Sin[(2/l) w Log[z]] BesselJ[0, (2/l) Sqrt[a] z])/z, z]];
In[17]:= Ib[z_] = FullSimplify[Integrate[(2/l) K (Sin[(2/l) w Log[z]] BesselY[0, (2/l) Sqrt[a] z])/z, z]];
In[18]:= i1[t_] = Ia[E^(l t/2)] - Ia[E^(m l/2)];
In[19]:= i2[t_] = Ib[E^(t l/2)] - Ib[E^(m l/2)];
In[20]:= i3[t_] = Ia[E^(n l/2)] - Ia[E^(t l/2)];
In[21]:= i4[t_] = Ib[E^(n l/2)] - Ib[E^(t l/2)];
```

Figura 4.15:

Figura 4.16: Se prueba que  $x(t)$  satisface el problema (4.27)Figura 4.17: Gráfica de  $x(t)$  vs  $t$  (azul) y  $x'(t)$  vs  $t$  (roja) para  $f(t) = K \operatorname{sen}(\omega t)$ .

# **Capítulo 5**

## **Conclusiones**

- El conocimiento de la función de Green asociada al tipo de problemas de contorno basados en la ecuación diferencial examinada en este trabajo (1.1), permite construir soluciones para diversas fuentes sin la necesidad de resolver uno a uno cada problema.
- El método de la función de Green facilita la construcción numérica y grafica de soluciones cuando no es posible la construcción de soluciones analíticas.
- El método de la función de Green es una de las aproximaciones fundamentales que se aplican en la solución de esta clase de problemas.
- El uso de programas como Wolfram matemática amplía la aplicabilidad del método de la función de Green, ya que con ayuda de estos se pueden resolver analítica o numéricamente las integrales y realizar los demás cálculos que se puedan presentar.

# Apéndice A

## Función Gamma

Considere la siguiente integral

$$\Gamma(x) \equiv \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (\text{A.1})$$

donde  $x$  es un numero real, integrando (A.1) por partes con  $u = t^{x-1}$  y  $dv = e^{-t}$  obtenemos

$$\Gamma(x) = t^{x-1} [-e^{-t}]_0^\infty + (x-1) \int_0^\infty t^{x-2} e^{-t} dt$$

el primer termino resulta ser cero mientras que la integral es  $\Gamma(x-1)$ , entonces

$$\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1) \quad (\text{A.2})$$

En particular, si  $x$  es un entero positivo  $n$ , entonces el uso repetido de la ecuación (A.2) resulta  $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = (n-1)(n-2)...1.\Gamma(1) = (n-1)!$  donde se a usado el hecho de que  $\Gamma(1) = 1$ , lo cual se puede comprobar facilmente usando (A.1). Esta ecuación se puede escribir como

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{para } n \text{ entero positivo.} \quad (\text{A.3})$$

Reescribiendo (A.2) como  $\Gamma(x-1) = \frac{\Gamma(x)}{(x-1)}$  entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \Gamma(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Gamma(x)}{(x-1)} \rightarrow \infty$$

por que  $\Gamma(1) = 1$ . De esta manera  $\Gamma(0) = \infty$ . Similarmente,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Gamma(x-1) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(x)}{(x-1)} \rightarrow \frac{\Gamma(0)}{(-1)} \rightarrow \infty,$$

es decir  $\Gamma(0) = \infty$ . es claro que  $\Gamma(n) = \infty$  para  $n$  entero negativo o cero, resulta ser que en estos puntos  $\Gamma(x)$  no está definida.

# Apéndice B

## Caso particular

Partiendo de la siguiente ecuación diferencial

$$y''(x) + (me^{cx} - k)y(x) = 0 \quad (\text{B.1})$$

haciendo el cambio de variable:  $\bar{x} = cx \Rightarrow y(x) \rightarrow y(\bar{x})$

$$\begin{aligned} x = \frac{\bar{x}}{c} &\Rightarrow y'(x) = y'(\bar{x}) \frac{d\bar{x}}{dx} = cy'(\bar{x}) \\ &\Rightarrow y''(x) = c^2 y''(\bar{x}) \end{aligned}$$

reemplazando los anteriores resultados en (B.1) obtenemos

$$\begin{aligned} c^2 y''(\bar{x}) + (me^{cx} - k)y(\bar{x}) &= 0 \Rightarrow \\ y''(\bar{x}) + \left(\frac{m}{c^2} e^{\bar{x}} - \frac{k}{c^2}\right) y(\bar{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

ahora teniendo cuenta (1.2) y (1.3) sabemos que la solución de (B.2) es

$$y(\bar{x}) = c_1 J_{\frac{2}{c}\sqrt{k}}\left(\frac{2}{c}\sqrt{m}e^{\bar{x}/2}\right) + c_2 Y_{\frac{2}{c}\sqrt{k}}\left(\frac{2}{c}\sqrt{m}e^{\bar{x}/2}\right)$$

pero  $\bar{x} = cx \Rightarrow$

$$y(x) = c_1 J_{\frac{2}{c}\sqrt{k}}\left(\frac{2}{c}\sqrt{m}e^{cx/2}\right) + c_2 Y_{\frac{2}{c}\sqrt{k}}\left(\frac{2}{c}\sqrt{m}e^{cx/2}\right) \quad (\text{B.3})$$

Ahora se debe notar que si en (B.2) y (B.3)  $c = \lambda$  y  $k = 0$  se obtiene que

$$y''(x) + me^{\lambda x} y(x) = 0, \quad (\text{B.4})$$

cuya solución es

$$y(x) = c_1 J_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{m}e^{\lambda x/2}\right) + c_2 Y_0\left(\frac{2}{\lambda}\sqrt{m}e^{\lambda x/2}\right). \quad (\text{B.5})$$

# Apéndice C

## Demostración de propiedad (1.9)

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
 \Rightarrow J_{-\nu}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\
 &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} + \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}
 \end{aligned}$$

Puesto que  $\Gamma(n)$  es infinita para  $n \leq 0$  (**Apéndice B**), los términos de la primera suma se anulan, ya que,  $k < \nu$

$$\Rightarrow J_{-\nu}(x) = \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-\nu}$$

Ahora haciendo  $k - \nu = n$

$$\Rightarrow J_{-\nu}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu+n}}{(\nu+n)! \Gamma(n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(\nu+n)-\nu},$$

Recordando que  $\Gamma(n+1) = n!$  obtenemos que

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n)! \Gamma(n+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

finalmente

$$J_{-\nu}(x) = (-1)^\nu J_\nu(x).$$

# Apéndice D

## Función delta de Dirac

La delta de Dirac es un concepto que permite analizar, a través de un intervalo no muy largo de tiempo, las distintas adaptaciones conceptuales que se hacen de medios importantes de la matemática, que son utilizados de acuerdo con los intereses de ciertas disciplinas y a sus contextos concretos de aplicación. Formulada por primera vez por el propio P.A.M. Dirac desde 1930, interesó vivamente a la comunidad científica, que la bautizó con el nombre de su autor. Desde entonces, el interés por la delta de Dirac ha tomado dos direcciones básicas: la primera, hacia su fundamentación matemática; y la segunda, hacia su aplicación práctica. Estas dos direcciones se han entrecruzado, pues quienes han dotado a la delta de Dirac de un corpus teórico se preocupan por tratar de mostrar su enorme campo de aplicación, mientras que los que la aplican, tratan de dotarla de una cierta fundamentación.

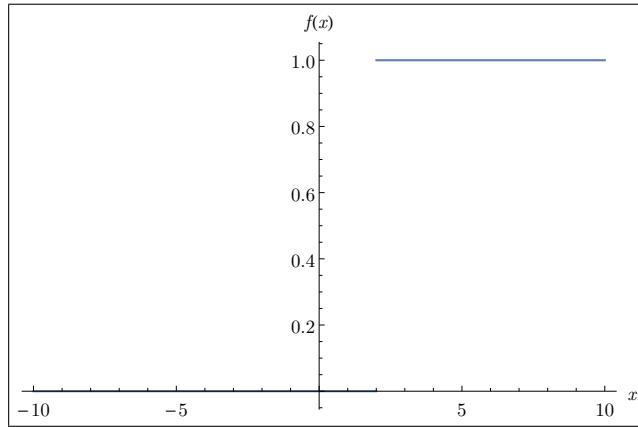
A la función (generalizada) delta de Dirac se le suele llamar distribución delta, pues, nos referiremos a un delta de Dirac como a aquel objeto matemático que posee ciertas propiedades y cuyo sentido (y utilidad) aparece al aplicarse sobre integrales.

Para introducir la Función delta de Dirac considere la función  $H(x) : \mathbb{R} - \{0\} \mapsto \{0, 1\}$

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}, \quad (\text{D.1})$$

esta función se le conoce como la función de **Heaviside** o escalón, podemos escribir entonces,

$$H(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ 1, & x > x_0 \end{cases}, \quad (\text{D.2})$$

Figura D.1: Función de Heaviside para  $x_0 = 2$ 

Teniendo en cuenta la figura (C.1) podemos notar que

$$\frac{dH(x - x_0)}{dx} = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}, \quad (\text{D.3})$$

(C.3) se denota como:

$$\delta(x - x_0) = \frac{dH(x - x_0)}{dx} = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}, \quad (\text{D.4})$$

donde  $\delta(x - x_0)$  se conoce como la función **Delta de Dirac**.

Ahora,

$$\delta(x - x_0) = \frac{dH(x - x_0)}{dx}, \quad (\text{D.5})$$

integrando ambos lados de (C.4) de  $-\infty$  a  $x$  se obtiene

$$\int_{-\infty}^x \delta(x' - x_0) dx' = H(x - x_0) \quad (\text{D.6})$$

se debe notar que si  $x_0 \in (-\infty, x)$ , entonces  $x_0 < x$  y según (C.38)  $H(x - x_0) = 1$  por lo tanto,

$$\int_{-\infty}^x \delta(x' - x_0) dx' = 1, \quad (\text{D.7})$$

que para  $x$  lo suficientemente grande se convierte en

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x' - x_0) dx' = 1. \quad (\text{D.8})$$

Ahora se considera la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx \quad (\text{D.9})$$

con  $f(x)$  continua, acotada alrededor de  $x_0$  como  $\delta(x - x_0) = 0$  para  $x \neq x_0$ , entonces

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} f(x) \delta(x - x_0) dx \quad (\text{D.10})$$

con  $\epsilon > 0$ . En este caso, si  $\epsilon$  es lo suficientemente pequeño los valores de  $f(x)$  en el intervalo de integración es aproximadamente una constante  $f(x_0)$ , por lo tanto

$$\int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) \int_{x_0 - \epsilon}^{x_0 + \epsilon} \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (\text{D.11})$$

Lo anterior se reescribe como

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad x_0 \in [a, b] \quad (\text{D.12})$$

# Apéndice E

## Función hipergeométrica

Se considera la siguiente ecuación diferencial

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y'' - \alpha\beta y = 0, \quad (\text{E.1})$$

donde  $x \in \mathbb{R}$  y  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son parámetros reales.

Dividiendo (E.1) por  $x(1-x)$  se obtiene

$$y'' + \frac{[\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]}{x(1-x)}y'' - \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}y = 0, \quad (\text{E.2})$$

Lo que muestra que  $x = 0$  y  $x = 1$  son puntos singulares, ya que  $P(x) = \frac{[\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]}{x(1-x)}$

y  $Q(x) = \frac{\alpha\beta}{x(1-x)}$  no son funciones analíticas en dichos puntos. Sin embargo.

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} xP(x) = \gamma \quad \text{y} \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2Q(x) = 0, \quad (\text{E.3})$$

lo que indica que  $x = 0$  es un punto singular regular, por lo que se buscan soluciones del tipo

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+r}, \quad \text{siendo } r \text{ la raíz de la ecuación indicial } (r-1)r + p_0r + q_0 = 0$$

$$r^2 - r + \gamma r = 0 \Rightarrow r^2 + (\gamma - 1)r = 0 \Rightarrow r_1 = 0 \text{ y } r_2 = 1 - \gamma. \quad (\text{E.4})$$

la solución que se obtiene para  $r = 0$  se conoce como función hipergeométrica y se denota como  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$  o simplemente  $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$ , y es dada por

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_k (\beta)_k}{k! (\gamma)_k} x^k, \quad (\text{E.5})$$

donde se han introducido los símbolos de Pochhammer

$$(\lambda)_k = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ \lambda(\lambda + 1)(\lambda + 2)\dots(\lambda + k - 1), & \text{si } k = 1, 2, 3, \dots \end{cases}, \quad (\text{E.6})$$

# Bibliografía

- [1] Valentin F. Zaitsev, Handbook of exact solutions for ordinary differential equations 2nd ed..Chapman & Hall/CRC. 2003
- [2] Sadri Hassani, Mathematical Methods For Students of Physics and Related Fields, Springer Science+Business Media, LLC 2009.
- [3] Santos B. Yuste, Métodos matemáticos avanzados para científicos e ingenieros, Universidad de Extremadura, 2006.
- [4] D. G. Duffy,Green's Functions with Applications, Ed. Chapman Hall/CRC Press, Boca Raton, Florida, 2001
- [5] Álvaro Rugeles. Funciones de Green aplicadas a la solución de ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden con condiciones de frontera, Universidad de Nariño,2013.
- [6] Trabajo de grado: Andrés Izquierdo Diaz “Funciones de Green aplicadas a la solución de problemas de contorno basados en la ecuación diferencial de Airy”