

San Juan de Pasto 22 de junio de 2022

Señores

COMITÉ CURRICULAR

Departamento de Física

Universidad de Nariño

Cordial saludo

Por medio de la presente quiero informar que del 15 al 17 junio del presente año participe en el **4th Colombian Workshop on flavor physics** que se realizó en ciudad de Ibagué. En este encuentro presente los siguientes trabajos en calidad de ponente:

- Classical Symmetry.
- Yang-Mills field on the Null-Plane.
- Participé de las actividades realizadas en esta conferencia.

Agradezco de antemano su atención

Atentamente



German Enrique Ramos Zambrano.

Docente Tiempo Completo

Departamento de Física

Ibagué, June 21, 2022

To whom it may concern,

We certify that Dr. German Ramos has attended the Workshop “4th Colombian Workshop on flavor physics”, (<https://indico.cern.ch/event/889612/>), held from June 15 to June 18, 2022, Ibagué-Tolima, Colombia. Additionally, we certify that he presented the talk “**Yang-Mills field on the Null-Plane**” and the wider audience talk “**Classical Symmetry**”.

Best regards,



Carlos Eduardo Vera
On behalf of the Organizing Committee
Information: quarkspesados2015@gmail.com

Yang-Mills Field on the Null-Plane

German Enrique Ramos Zambrano

Departamento de Física - Universidad de Nariño

Free Yang-Mills field

For any semi-simple Lie group with structure constants f_{bc}^a the Yang-Mill lagrangian density is

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_a^{\mu\nu}F_{\mu\nu}^a, \quad (1)$$

with $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf_{bc}^a A_\mu^b A_\nu^c$, the gauge index a, b, c runs from 1 to n .

In the present work, for convenience, we specialize in the $SU(2)$ gauge group. From (1) we find the Euler-Lagrange equations

$$(D_\nu)^{ab} F_b^{\nu\mu} = 0, \quad (2)$$

where we have defined the covariant derivative

$$(D_\nu)^{ab} \equiv \delta_b^a \partial_\nu - g\varepsilon_{abc} A_\nu^c.$$

Structure Constraints and Classification

The null plane time x^+ and longitudinal coordinate x^- are defined, respectively, as

$$x^+ \equiv \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}} \quad , \quad x^- \equiv \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}} \quad , \quad (3)$$

with the transverse coordinates $\underline{x} \equiv (x^1, x^2)$ kept unchanged. Hence, in the space of four-vectors $x^\mu = (x^+, x^1, x^2, x^-)$, the metric is

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \quad (4)$$

Explicitly,

$$\begin{aligned}x^+ &= x_- \quad , \quad x^- = x_+, \\x \cdot y &= x^+ y^- + x^- y^+ - x^k x^k,\end{aligned}\tag{5}$$

with $k = 1, 2$. The derivatives with respect to x^+ e x^- are defined as

$$\partial_+ \equiv \frac{\partial}{\partial x^+} \quad , \quad \partial_- \equiv \frac{\partial}{\partial x^-}.\tag{6}$$

with $\partial^+ = \partial_-$.

In the null-plane dynamics, the canonical conjugate momenta are

$$\pi_a^\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_+ A_\mu^a)} = -F_a^{+\mu} , \quad (7)$$

this equation gives the following set of primary constraints

$$\phi_a \equiv \pi_a^+ \approx 0 \quad , \quad \phi_a^k \equiv \pi_a^k - \partial_- A_k^a + \partial_k A_-^a - g\varepsilon_{abc} A_-^b A_k^c \approx 0 . \quad (8)$$

and the dynamical relation for A_-^a

$$\pi_a^- = \partial_+ A_-^a - \partial_- A_+^a - g\varepsilon_{abc} A_+^b A_-^c , \quad (9)$$

We define the primary hamiltonian adding to the canonical hamiltonian the primary constraints

$$H_P = \int d^3y \left\{ \frac{1}{2} (\pi_a^-)^2 + \pi_a^- (D_-^x)^{ab} A_+^b + \pi_a^i (D_i^x)^{ab} A_+^b + \frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2 + u^b \phi_b + \lambda_l^b \phi_b^l \right\}, \quad (10)$$

where u^b and λ_l^b are their respective Lagrange multipliers.

The fundamental Poisson brackets (PB) among fields are

$$\{A_\mu^a(x), \pi_b^\nu(y)\} = \delta_\mu^\nu \delta_b^a \delta^3(x - y). \quad (11)$$

The consistency condition of the primary constraints give us

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi}_a &= \{\phi_a, H_P\} = (D_-^x)^{ab} \pi_b^- + (D_i^x)^{ab} \pi_b^i \\
 &\equiv G_a \approx 0, \\
 \dot{\phi}_a^k &= \{\phi_a^k, H_P\} = (D_k^x)^{ab} F_{+-}^b + (D_i^x)^{ab} F_{ik}^b - 2 (D_-^x)^{ab} \lambda_k^b \\
 &\approx 0,
 \end{aligned} \tag{12}$$

The relation (32) is a secondary constraint, the Gauss's law.

The consistency condition of the secondary constraint yields,

$$\dot{G}_a = \{G_a(x), H_P\} \approx 0. \quad (13)$$

then the Gauss's law is automatically conserved.

The set of first class constraints is $\{\pi_a^+, G_a\}$ and the set of second class constraints is $\{\phi_a^k\}$ whose PB's are

$$\left\{ \phi_a^k(x), \phi_b^l(y) \right\} = -2\delta_k^l (D_-^x)^{ab} \delta^3(x - y) \quad (14)$$

Equation of motion

The time evolution of the fields is determined by computing their PB's with the so called extended hamiltonian H_E ,

$$\begin{aligned} H_E = \int d^3y \left\{ \frac{1}{2} (\pi_b^-)^2 + \pi_b^- (D_-^y)^{bc} A_+^c + \pi_b^i (D_i^y)^{bc} A_+^c + \frac{1}{4} (F_{ij}^b)^2 \right. \\ \left. + \lambda_l^b \phi_b^l + u^b \phi_b + v^b G_b \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

thus, we have the time evolution of the fields:

$$\dot{A}_+^a = u^a, \quad (16)$$

$$\dot{A}_-^a = \pi_a^- + (D_-^x)^{ac} A_+^c - (D_-^x)^{ab} v^b, \quad (17)$$

$$\dot{A}_k^a = (D_k^x)^{ac} A_+^c + \lambda_k^a - (D_k^x)^{ab} v^b, \quad (18)$$

and the canonical momenta,

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_a^+ &= G_a, \\ \dot{\pi}_a^- &= -g\varepsilon_{abc}\pi_b^- A_+^c + (D_l^x)^{ab} \lambda_l^b - g\varepsilon_{bca}v^b \pi_c^-, \\ \dot{\pi}_a^k &= -g\varepsilon_{bca}\pi_b^k A_+^c + (D_j^x)^{ab} F_{kj}^b - (D_-^x)^{ab} \lambda_k^b - g\varepsilon_{abc}\pi_c^k v^b.\end{aligned}\tag{19}$$

The Dirac's algorithm requires as many gauge conditions as first class constraints there are, thus, we choose the the null-plane gauge

$$A_-^a \approx 0 \quad , \quad \pi_a^- + \partial_-^x A_+^a \approx 0.\tag{20}$$

as our gauge conditions on the null-plane.

Dirac Brackets

The prescription for determining the Dirac's brackets implies in calculating the inverse of the second class matrix, if we rename the second class constraints as

$$\begin{aligned}\Theta_1 &\equiv \pi_a^+ & , & & \Theta_2 &\equiv (D_-^x)^{ab} \pi_b^- + (D_i^x)^{ab} \pi_b^i \\ \Theta_3 &\equiv A_-^a & , & & \Theta_4 &\equiv \pi_a^- + \partial_-^x A_+^a \\ \Theta_5 &\equiv \pi_a^k - \partial_-^x A_k^a + \partial_k^x A_-^a - g\varepsilon_{abc} A_-^b A_k^c,\end{aligned}\tag{21}$$

and we define the elements of the second class matrix as $F_{ab}(x, y) \equiv \{\Theta_a(x), \Theta_b(y)\}$.

The Dirac's bracket of two dynamical variables, $\mathbf{A}_a(x)$ and $\mathbf{B}_b(y)$, is then defined as:

$$\left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\}_D = \left\{ \mathbf{A}_a(x), \mathbf{B}_b(y) \right\} - \int d^3u d^3v \left\{ \mathbf{A}_a(x), \Theta_c(u) \right\} (F^{-1})^{cd}(u, v) \left\{ \Theta_d(v), \mathbf{B}_b(y) \right\}, \quad (22)$$

where F^{-1} is the inverse of the constraint matrix.

From (22) we obtain the DB among the independent variables of the theory

$$\begin{aligned}\left\{A_k^a(x), A_l^b(y)\right\}_D &= -\frac{1}{4}\delta_b^a\delta_k^l\epsilon(x-y)\delta^2(x^\top-y^\top) \\ \left\{A_k^a(x), A_+^b(y)\right\}_D &= \frac{1}{4}|x-y|(D_k^x)^{ab}\delta^2(x^\top-y^\top).\end{aligned}\quad (23)$$

At once, via the correspondence principle we obtain the commutators among the fields

$$\left[A_k^a(x), A_l^b(y)\right] = -\frac{i}{4}\delta_b^a\delta_k^l\epsilon(x-y)\delta^2(x^\top-y^\top), \quad (24)$$

$$\left[A_k^a(x), A_+^b(y)\right] = \frac{i}{4}|x-y|(D_k^x)^{ab}\delta^2(x^\top-y^\top). \quad (25)$$

Functional Quantization

The theory is characterized by a set of primary constraints:

$$\phi_a \equiv \pi_a^+ \approx 0, \quad (26)$$

$$\phi_a^k \equiv \pi_a^k - \partial_- A_k^a + \partial_k A_-^a - g\varepsilon_{abc} A_-^b A_k^c \approx 0. \quad (27)$$

The consistent of primary constraint (26) and (27)) implies the secondary constraint

$$G_a \equiv (D_-)^{ab} \pi_b^- + (D_i)^{ab} \pi_b^i \approx 0, \quad (28)$$

the Gauss's law. The equation (26) and (28) together constitute a set of first class constraints Ψ_i^a , while (27) is a second class constraint.

For each first class constraint, Ψ_i^a , it is necessary to introduce a gauge condition Δ_j^a , the restriction on our choice of Δ_j^a is that $\det \left| \left\{ \Psi_i^a(x), \Delta_j^b(y) \right\} \right| \neq 0$. We choose as the first gauge condition

$$\Delta_1^a \equiv A_-^a \approx 0. \quad (29)$$

The relation (29) will hold for all time only if

$$\Delta_2^a \equiv \pi_a^- + (D_-^x)^{ab} A_+^b \approx 0. \quad (30)$$

Therefore, the equation (29) and (30) constitute our gauge conditions on the null-plane.

Now, the expression for the transition amplitude of the Yang Mills theory on the null-plane gauge can be written in the following way

$$Z = \int D\mu \exp \left\{ i \int d^4x \left(\pi_a^\mu \partial_+ A_\mu^a - \mathcal{H}_c \right) \right\}. \quad (31)$$

The integration measure is defined by

$$D\mu = D\pi_a^\mu D A_\mu^a \det \left| \left\{ \Psi_i^a(x), \Delta_j^b(y) \right\} \right| \left| \det \left\{ \phi_a^k(x), \phi_b^l(y) \right\} \right|^{\frac{1}{2}} \delta(\Psi_i^a) \delta(\Delta_j^a) \delta(\phi_a^k). \quad (32)$$

Here, $\det \left| \left\{ \Psi_i^a(x), \Delta_j^b(y) \right\} \right|$ represents the determinant formed by the brackets between the first class constraints and the gauge fixing conditions, which takes the form

$$\det \left| \left\{ \Psi_i^a(x), \Delta_j^b(y) \right\} \right| = \delta_b^a \det \left| \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \partial_-^x \\ 0 & 0 & -\partial_-^x & 0 \\ 0 & -\partial_-^x & 0 & 1 \\ \partial_-^x & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \delta^3(x-y) \right|, \quad (33)$$

thus, it does not contains field variables and can be absorbed in a normalization constant.

Meanwhile, $|\det \{\phi_a^k(x), \phi_b^l(y)\}|^{\frac{1}{2}}$ is the determinant associated to the second class constraints with

$$\{\phi_a^k(x), \phi_a^l(y)\} = -2\delta_l^k \delta_b^a \partial_-^x \delta^3(x-y). \quad (34)$$

We arrived in the following expression for the transition amplitude

$$Z = N \int DA_\mu^a \delta \left[(D_\mu)^{ab} \partial_- A^b{}^\mu \right] \delta(A_-^a) \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \right] \right\}, \quad (35)$$

with

$$N \equiv \det \left| \left\{ \Psi_i^a(x), \Delta_j^b(y) \right\} \right| \left| \det \left\{ \phi^{a\ k}(x), \phi^{b\ l}(y) \right\} \right|^{\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

If we introduce a space-like constant vector

$$n_a^\mu = (0 \ 0 \ 0 \ 1), \quad (37)$$

we can write $(D_\mu)^{ab} \partial_- A^{b\ \mu} = (D_\mu)^{ab} (n_a^\mu \partial_\mu A^{b\ \mu})$ and

$$A_-^a = n_a^\mu A_\mu^a = n \cdot A \approx 0. \quad (38)$$

The transition amplitude can be written in the form

$$\begin{aligned} Z = N \int DA_\mu^a \delta \left[(D_\mu)^{ab} \left(n_a^\mu \partial_\mu A^{b\ \mu} \right) \right] \delta(n \cdot A) \\ \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{4} F_a^{\mu\nu} F_{\mu\nu}^a \right] \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

The relation (35) can be expressed in terms of its freedom degree, thus, it can be write

$$\begin{aligned}
 Z = & N \int DA_+^a DA_-^a DA_i^a \\
 & \delta \left[(D_+)^{ab} \partial_- A^b + + (D_-)^{ab} \partial_- A^b - + (D_i)^{ab} \partial_- A^b i \right] \delta (A_-^a) \\
 & \exp \left\{ i \int d^4x \left[\frac{1}{2} (F_{+-}^a)^2 + F_{-i}^a F_{+i}^a - \frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2 \right] \right\}. \quad (40)
 \end{aligned}$$

Integrating with respect to A_-^a and A_+^a finally we obtain

$$\begin{aligned}
 Z = & \frac{N}{\det \partial_-} \int DA_i^a \exp \left\{ i \int d^4x \left[-\frac{1}{2} A_i \cdot \square A_i \right. \right. \\
 & + g \left[(A_i \times A_j) \cdot \partial_i A_j + \partial_j A_j \cdot \frac{1}{\partial_-} (A_i \times \partial_- A_i) \right] \\
 & - g^2 \left[\frac{1}{4} (A_i \times A_j) \cdot (A_i \times A_j) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{\partial_-} (A_i \times \partial_- A_i) \cdot \frac{1}{\partial_-} (A_j \times \partial_- A_j) \right] \right\}, \tag{41}
 \end{aligned}$$

where the "dot" and "cross" products are defined over the internal group space.

Conclusions

- Performing a careful analysis of the constraint structure of Yang-Mills field, we have determined in addition of the usual first class constraints set a second class ones set, which is a characteristic of the null-plane dynamics.
- The imposition of appropriated boundary conditions on the fields fixes the hidden subset of first class constraints and eliminates the ambiguity on the operator ∂_- , that allows to get a unique inverse for the second class constraint matrix.
- The Dirac's brackets of the theory are quantized via correspondence principle; the commutators obtained are the same derived by Tomboulis.

- The relation $A_\mu^a \approx 0$ alone does not define the null-plane gauge. The subsidiary condition $(D_\mu)^{ab} \partial_- A^b{}^\mu \approx 0$ is necessary in order to fix the first-class constraints of the theory.
- Appropriate boundary conditions were imposed on the fields and then the transition amplitudes expressed in terms of the physical components.
- The results found are thoroughly consistent with the ones reported in the literature

SIMETRÍAS Y LEYES DE CONSERVACIÓN EN MECÁNICA CLÁSICA

German Enrique Ramos Zambrano

Departamento de Física - Universidad de Nariño

Introducción

Considerando un sistema de dos partículas, la segunda ley de Newton determina la dinámica del sistema:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2,$$

de manera que

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{F}_{12} \quad , \quad \dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}_{21}.$$

Sin embargo, de la tercera ley de Newton

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12},$$

se establece que

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = cte.$$

Si dichas fuerzas son consecuencia de un potencial de interacción entre las partículas, es decir:

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_1 V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad , \quad \mathbf{F}_{21} = -\nabla_2 V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad ,$$

entonces

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_1 V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = \nabla_2 V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = -\mathbf{F}_{21},$$

Consecuencia del hecho que la transformación de traslación:

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{R} \quad , \quad \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = cte.$$

se determina que

$$V(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2) = V(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \quad ,$$

Formulación Lagrangiana

Consideremos un sistema con N grados de libertad: $q_r, \dot{q}_r$, siendo $r = 1, 2, 3, \dots, N$. Descrito por el Lagrangiano $L(q, \dot{q})$ que se asume no singular, es decir, que la matriz Hessiana W ,

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j},$$

es no singular. Así, a partir de los momentos canónicos

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} = f_i(q, \dot{q}),$$

se pueda encontrar:

$$\dot{q}_r = g_r(q, p).$$

Las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Euler-Lagrange):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad , i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

son consecuencia del principio de mínima acción:

$$\delta S [q] = \delta \int_{t_1}^{t_2} dt \, L (q, \dot{q}) = 0 \quad \text{con} \quad \delta q_i (t_1) = \delta q_i (t_2) = 0,$$

con $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

En descripción de la mecánica Lagrangiana, una constante de movimiento se interpreta como una función $f(q, \dot{q}, t)$ que satisface la condición:

$$\frac{d}{dt} f(q, \dot{q}, t) = 0.$$

Este resultado garantiza que para una solución de las ecuaciones de movimiento, es decir, para una trayectoria física en el espacio de configuración, la constante de movimiento tendrá un valor numérico que no cambia,

Sea que $L(q, \dot{q})$ no dependa sobre una coordenada particular q_k .
Se determina que:

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)}_{p_k} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_0 = \frac{dp_k}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_k = cte.$$

Lagrangiano es invariante por:

$$\delta q_k = q'_k - q_k = \epsilon = cte \quad , \quad \delta \dot{q}_k = \dot{q}'_k - \dot{q}_k = 0.$$

Entonces:

$$\delta L(q, \dot{q}) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)} \delta q_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \delta \dot{q}_k}_0 = \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)}_{p_k} \epsilon = 0,$$

De manera que,

$$\frac{dp_k}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_k = cte.$$

El momento canónico conjugado a dicha coordenadas o coordenada es una constante de movimiento. La simetría asociada se conoce como homogeneidad en el espacio.

Considere un sistema sometido a fuerzas conservativas, entonces, $L(q, \dot{q})$:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^N \left[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right)} \underbrace{\frac{dq_i}{dt}}_{\dot{q}_i} + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k} \frac{d\dot{q}_i}{dt} \right] = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i,$$

de manera que

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L \right] = 0 \Rightarrow H \equiv \sum_{i=1}^N p_i \dot{q}_i - L,$$

H es la energía total del sistema conservativo. Este teorema de conservación resulta de la homogeneidad en el tiempo.

Tratamiento General

Considérese una transformación infinitesimal puntual:

$$\delta q_i = \epsilon \Phi_i(q) \quad , i = 1, 2, 3, \dots, N,$$

siendo que ϵ es un parámetro infinitesimal y $\Phi_i(q)$ es una función que depende únicamente de las coordenadas. Se debe cumplir:

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \delta q_i = \epsilon \frac{\partial \Phi_i(q)}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} = \epsilon \frac{\partial \Phi_i(q)}{\partial q_j} \dot{q}_j.$$

De manera que la variación en el Lagrangiano resulta en:

$$\begin{aligned}\delta L(q, \dot{q}) &= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)} \delta q_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt} \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i} \delta q_i + p_i \delta \dot{q}_i \\ &= \epsilon \frac{d}{dt} \left[p_i \Phi_i(q) \right] = 0.\end{aligned}$$

Así, se propone la siguiente cantidad conservada:

$$K(p, q) \equiv p_i \Phi_i(q) = cte.$$

Transformaciones Canónicas

El corchete de Poisson de dos funciones $F(p, q)$ y $G(p, q)$ es definido por:

$$\left\{ F(p, q), G(p, q) \right\} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right],$$

Una transformaciones canónicas son relaciones del tipo:

$$q, p \rightarrow Q(p, q), P(p, q),$$

que garantizan que los corchetes de Poisson no cambian, es decir:

$$\left\{ F(p, q), H(p, q) \right\} = \left\{ F(P, Q), h(P, Q) \right\}.$$

Las transformaciones canónicas infinitesimales:

$$Q_i = q_i + \delta q_i(p, q) \quad , \quad P_i = p_i + \delta p_i(p, q) \quad ,$$

siendo que $(\delta p, \delta q)$ son funciones infinitesimales de (p, q) . La función generatriz es de la forma:

$$F_2(q, P) = \sum_{i=1}^N q_i P_i + \epsilon G(q, P) \quad ,$$

donde ϵ es el parámetro infinitesimal de la transformación y $G(q, P)$ es una función diferencial de $2N$ argumentos.

De las ecuaciones de transformación se determina que:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \Rightarrow P_i - p_i = \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial q_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial P_i} \Rightarrow Q_i - q_i = \delta q_i = \epsilon \frac{\partial G(q, P)}{\partial P_i}. \end{aligned}$$

Siendo que las cantidades $(\delta p, \delta q)$ son cantidades infinitesimales, una expansión en Taylor de la función $G(q, P)$, determina que:

$$G(q, P) = G(q, p + \delta p) \approx G(q, p) + \sum_{i=1}^N \frac{\partial G}{\partial p_i} \delta p_i,$$

Se puede mostrar que

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p_i}, \quad \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q_i}. \quad (1)$$

El cambio en una función $F(p, q)$ a consecuencia de la transformación infinitesimal se expresa como:

$$\delta F(p, q) = F(P, Q) - F(p, q) = F(p + \delta p, q + \delta q) - F(p, q),$$

al considerar una expansión en serie de Taylor para las variables (p, q) y manteniendo potencia de primer orden en el parámetro infinitesimal resulta:

$$\delta F(p, q) = \epsilon \left\{ F(p, q), G(p, q) \right\},$$

Esto permite establecer que:

$$\begin{aligned}\delta q_i &= \epsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial p_i} = \epsilon \left\{ q_i, G(p, q) \right\}, \\ \delta p_i &= -\epsilon \frac{\partial G(q, p)}{\partial q_i} = \epsilon \left\{ p_i, G(p, q) \right\}.\end{aligned}$$

A la función $G(p, q)$ se identifica como el generador infinitesimal de la transformación canónica.

Transformaciones de Simetría

Consideremos que la transformación infinitesimal sea de simetría. En el análisis Lagrangiano se mostró que una transformación puntual de simetría de la forma:

$$\delta q_i = \epsilon \Phi_i(q) \quad , i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (2)$$

conllevo a la cantidad conservada,

$$K(p, q) \equiv p_i \Phi_i(q) = cte.$$

la cual es lineal en los momentos canónicos.

Considerando que el generador $G(p, q) \equiv K(p, q)$, entonces se puede determinar que:

$$\delta q_i = \epsilon \left\{ q_i, K(p, q) \right\} = \epsilon \underbrace{\left\{ q_i, p_j \right\}}_{\delta_{ij}} \Phi_j(q) = \epsilon \Phi_i(q). \quad (3)$$

Para los momentos canónicos se obtiene que:

$$\delta p_i = \delta \left(\frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) = \epsilon \left[\frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \Phi_j(q) + \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \frac{\partial \Phi_i(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k \right]. \quad (4)$$

Siendo que la transformación considerada es una transformación de simetría del Lagrangiano se debe cumplir que:

$$\delta L(q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \underbrace{\delta q_j}_{\in \Phi_j(q)} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{\in \frac{\partial \Phi_i(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k} = \epsilon \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} \Phi_j(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] = 0,$$

de manera que

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} \Phi_j(q) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k = 0.$$

Derivando con respecto a las velocidades:

$$0 = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \Phi_j(q) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j} \frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_i}$$

de manera que:

$$-p_j \frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \Phi_j(q) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \delta p_i &= \epsilon \left[\frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \Phi_j(q) + \frac{\partial^2 L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] \\ &= -\epsilon p_j \frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Si se propone:

$$\delta p_i = \epsilon \left\{ q_i, K(p, q) \right\} = -\epsilon p_j \frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_i},$$

Una transformación puntual de simetría del Lagrangiano se interpreta en el espacio de fase como una transformación canónica infinitesimal de simetría, siendo que la correspondiente constante de movimiento es el generador infinitesimal de la transformación.

Extendiendo el concepto de transformación puntual para un cambio en las coordenadas de la forma:

$$\delta q_j = \epsilon \Phi_j (q, \dot{q}) \quad , i = 1, 2, 3, \dots, N, \quad (5)$$

La variación en las velocidades generalizadas es:

$$\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j = \epsilon \frac{d\Phi_j (q, \dot{q})}{dt}. \quad (6)$$

La variación en el Lagrangiano:

$$\delta L (q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \underbrace{\delta q_j}_{\epsilon \Phi_j (q, \dot{q})} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{\epsilon \frac{d\Phi_j (q, \dot{q})}{dt}} = \epsilon \frac{d}{dt} \left[p_j \Phi_j (q, \dot{q}) \right]. \quad (7)$$

Si se considera que la variación en el Lagrangiano se expresa en la forma:

$$\delta L (q, \dot{q}) = \epsilon \frac{d}{dt} F (q, \dot{q}) . \quad (8)$$

Se cumple en nuestro caso que:

$$\delta L (q, \dot{q}) = \epsilon \frac{d}{dt} F (q, \dot{q}) = \epsilon \frac{d}{dt} \left[p_j \Phi_j (q, \dot{q}) \right] ,$$

entonces

$$\epsilon \frac{d}{dt} \left[p_j \Phi_j (q, \dot{q}) - F (q, \dot{q}) \right] = 0$$

Con lo cual se concluye que

$$K (q, p) \equiv p_j \Phi_j (q, \dot{q}) - F (q, \dot{q}) = cte. \quad (9)$$

Cuando el análisis se extiende al espacio de fase, la simetría se interpreta como una transformación canónica infinitesimal:

$$Q_i = q_i + \delta q_i(p, q) \quad , \quad P_i = p_i + \delta p_i(p, q) \quad ,$$

donde

$$\delta q_i = \epsilon \left\{ q_i, K(p, q) \right\} \quad , \quad \delta p_i = \epsilon \left\{ p_i, K(p, q) \right\} \quad ,$$

La constante de movimiento $K(q, p)$ identificada como el generador infinitesimal de la transformación canónica.

Como un caso particular cuando el Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, si se considera la variación en las coordenadas:

$$\delta q_j = \epsilon \Phi_j (q, \dot{q}) = \epsilon \dot{q}_j \quad , \quad \delta \dot{q}_j = \epsilon \frac{d\dot{q}_j}{dt} ,$$

entonces, la variación en el Lagrangiano es:

$$\delta L (q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \underbrace{\delta q_j}_{\epsilon \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{\epsilon \frac{d\dot{q}_j}{dt}} = \epsilon \frac{d}{dt} L (q, \dot{q})$$

de manera que la cantidad conservada es de la forma:

$$K (q, p) = p_j \Phi_j (q, \dot{q}) - F (q, \dot{q}) = p_j \dot{q}_j - L (q, \dot{q}) .$$

Si se considera que el parámetro continuo infinitesimal sea de la forma $\epsilon = dt$ y la función generatriz de la transformación canónica infinitesimal con el Hamiltoniano, $K \rightarrow H$, se determinar que:

$$\begin{aligned}\delta q_i &= dt \left\{ q_i, H(p, q) \right\} = dt \frac{dq_i}{dt} = dq_i, \\ \delta p_i &= dt \left\{ p_i, H(p, q) \right\} = dt \frac{dp_i}{dt} = dp_i.\end{aligned}$$

Así que el movimiento de un sistema se puede describir mediante una transformación canónica infinitesimal generada por el hamiltoniano.

Sistema de partículas moviéndose en un potencial debido a fuerzas Newtonianas

Consideremos un sistema de N partículas puntuales moviéndose bajo la acción de un potencial que depende solo de la distancia relativa entre ellas.

El lagrangiano que describe el sistema es:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - V(\{r_{ij}\}) \quad , r_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \quad \therefore \quad i, j = 1, 2, 3, \dots, N \quad (10)$$

El correspondiente cambio en el Lagrangiano es dada por:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial V(\{r_{ij}\})}{\partial r_{ij}} \mathbf{x}_{ij} \cdot \delta \mathbf{x}_{ij} \quad \therefore \quad \mathbf{x}_{ij} \equiv \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$$

Traslaciones

Consideremos la variación en las coordenadas:

$$\delta \mathbf{x}_i = \epsilon \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = cte, \quad \Rightarrow \quad \delta q_i = \epsilon \Phi_i(q) \quad \Rightarrow \quad \Phi_i(q) \rightarrow \mathbf{a},$$

las variaciones en las velocidades

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \dot{q}_j = \epsilon \frac{d\Phi_j(q)}{dt}.$$

Implicando que:

$$\mathbf{x}'_i = \mathbf{x}_i + \delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i + \epsilon \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{x}_{ij} = \delta \mathbf{x}_i - \delta \mathbf{x}_j = 0$$

De manera que:

$$\delta L = 0.$$

La constante conservada sera:

$$G(p, q) = p_i \Phi_i(q) \quad \Rightarrow \quad G(p, q) = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{P},$$

donde $\mathbf{P}$ es el momento lineal total del sistema de N partículas. Siendo que el vector $\mathbf{a}$ es una constante arbitraria, se puede afirmar que la constante de movimiento es:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i. \quad (11)$$

Rotaciones

Consideremos la variación en las coordenadas:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_i &= \epsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{x}_i), \Rightarrow \delta q_i = \epsilon \Phi_i(q) \Rightarrow \Phi_i(q) \rightarrow (\mathbf{n} \times \mathbf{x}_i) \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_i &= \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}_i = \epsilon \frac{d}{dt} (\mathbf{n} \times \mathbf{x}_i) = \epsilon (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{x}}_i),\end{aligned}$$

De manera que

$$\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \epsilon \dot{\mathbf{x}}_i \cdot (\mathbf{n} \times \dot{\mathbf{x}}_i) = \epsilon \mathbf{n} \cdot (\dot{\mathbf{x}}_i \times \dot{\mathbf{x}}_i) = 0,$$

Ahora, si se considera

$$\delta \mathbf{x}_{ij} = \delta \mathbf{x}_i - \delta \mathbf{x}_j = \epsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{x}_i) - \epsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{x}_j) = \epsilon \mathbf{n} \times (\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \epsilon (\mathbf{n} \times \mathbf{x}_{ij})$$

se deduce que:

$$\mathbf{x}_{ij} \cdot \delta \mathbf{x}_{ij} = \epsilon \mathbf{x}_{ij} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{x}_{ij}) = \epsilon \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_{ij} \times \mathbf{x}_{ij}) = 0,$$

con lo cual

$$\delta L = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{\partial V(\{r_{ij}\})}{\partial r_{ij}} \frac{1}{r_{ij}} \mathbf{x}_{ij} \cdot \delta \mathbf{x}_{ij} = 0$$

Entonces la cantidad conservada se expresa como:

$$G(p, q) = \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{x}_i) = \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L},$$

donde $\mathbf{L}$ es el momento angular del sistema.

La cantidad conservada:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i. \quad (12)$$

Boost de Galileo

Ahora, consideremos la variación en las coordenadas:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_i &= -\epsilon \mathbf{v} t, \quad \mathbf{v} = cte, \Rightarrow \delta q_i = \epsilon \Phi_i(q, \dot{q}) \Rightarrow \Phi_i(q) \rightarrow -\mathbf{v} t \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_i &= \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}_i = -\epsilon \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (13)$$

Es posible determinar que

$$\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i = -\epsilon \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{v} = -\epsilon \frac{d(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{v})}{dt},$$

De manera similar,

$$\delta \mathbf{x}_{ij} = \delta \mathbf{x}_i - \delta \mathbf{x}_j = -\epsilon \mathbf{v} t + \epsilon \mathbf{v} t = 0,$$

Con lo cual, se puede concluir que:

$$\delta L = -\epsilon \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{v}.$$

Para las variaciones de éste tipo se debe cumplir que:

$$\delta L (q, \dot{q}) = \epsilon \frac{d}{dt} F (q, \dot{q}) .$$

Es posible identificar:

$$F (q, \dot{q}) = - \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{v} .$$

Se determina que la constante de movimiento es:

$$\begin{aligned} G(q, p) &= p_j \Phi_j(q, \dot{q}) - F(q, \dot{q}) \Rightarrow \\ G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \mathbf{v} \cdot \left[\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i - t \mathbf{P} \right]. \end{aligned}$$

De la definición del centro de masa para este sistema de partículas:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{x}_i \quad \therefore \quad M \equiv \sum_{i=1}^N m_i,$$

Podemos determinar que:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = M\mathbf{v} \cdot \left[\mathbf{R} - \frac{t\mathbf{P}}{M} \right].$$

Siendo $\mathbf{v}$ una velocidad constante arbitraria se puede identificar que la constante de movimiento es:

$$\mathbf{R} - \frac{t\mathbf{P}}{M}. \quad (14)$$

La constante de movimiento hace referencia al movimiento relativo del centro de masa.

Traslaciones Temporales

Consideremos variaciones de la forma:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_i &= \epsilon \mathbf{v}_i \Rightarrow \delta q_i = \epsilon \Phi_i(q, \dot{q}) \Rightarrow \Phi_j(q, \dot{q}) \rightarrow \mathbf{v}_i \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_i &= \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}_i = \epsilon \frac{d\mathbf{v}_i}{dt}.\end{aligned}\quad (15)$$

De manera que

$$\delta \mathbf{x}_{ij} = \epsilon \mathbf{v}_i - \epsilon \mathbf{v}_j = \epsilon (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j) = \epsilon \mathbf{v}_{ij}$$

La variación en el Lagrangiano se expresa como:

$$\delta L = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial V(\{r_{ij}\})}{\partial r_{ij}} \mathbf{x}_{ij} \cdot \delta \mathbf{x}_{ij}$$

$$\begin{aligned}
 \delta L &= \epsilon \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} - \epsilon \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial V(\{r_{ij}\})}{\partial r_{ij}} \mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} \\
 &= \epsilon \left[\sum_{i=1}^N m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \right) - \frac{d}{dt} V(\{r_{ij}\}) \right] = \epsilon \frac{d}{dt} L
 \end{aligned}$$

Es posible identificar:

$$\delta L(q, \dot{q}) = \epsilon \frac{d}{dt} F(q, \dot{q}) = \epsilon \frac{d}{dt} L(q, \dot{q}).$$

Así, la constante de movimiento es:

$$\begin{aligned} G(q, p) &= p_j \Phi_j(q, \dot{q}) - F(q, \dot{q}) \Rightarrow \\ G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i - L \\ H &= \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i - L. \end{aligned} \tag{16}$$

Que corresponde a la energía del sistema.

Resumen

El sistema de N partículas que interactúan entre sí bajo la acción de fuerza conservativa, posee 10 constantes de movimiento:

$$\begin{aligned}\mathbf{P} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i, & \mathbf{R} &= \frac{t\mathbf{P}}{M}, \\ \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^N \mathbf{L}_i, & H &= \sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i - L.\end{aligned}$$

Que se conocen como Invariantes de Galileo, para un potencial general $V(\{r_{ij}\})$.

Partícula Relativista

Sea una partícula libre relativista de masa en reposo m moviéndose a una velocidad $\dot{\mathbf{x}}(t)$ relativo a un sistema de referencia inercial S . El Lagrangiano asociado al sistema es:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}. \quad (17)$$

La variación del Lagrangiano es:

$$\delta L = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}(t). \quad (18)$$

Considérese una transformación de Lorentz infinitesimal de un sistema de referencia inercial S con coordenadas $(\mathbf{x}, t)$ a un sistema S' de coordenadas $(\mathbf{x}', t')$:

$$\mathbf{x}'(t') \simeq \mathbf{x}(t) - \epsilon \mathbf{v} t, \quad t' \simeq t - \epsilon \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}(t)}{c^2}. \quad (19)$$

La variación en las coordenadas se define como:

$$\delta \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t),$$

Realizando una expansión en potencias del parámetro infinitesimal ϵ , es posible mostrar:

$$\mathbf{x}'(t') \simeq \mathbf{x}'(t) - \epsilon \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}(t)}{c^2} \dot{\mathbf{x}}(t),$$

de manera que:

$$\delta \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{x}'(t) - \mathbf{x}(t) = -\epsilon \left[\mathbf{v}t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}(t)}{c^2} \dot{\mathbf{x}}(t) \right].$$

Con lo cual es posible identificar:

$$\delta q_i = \epsilon \Phi_i(q, \dot{q}) \Rightarrow \Phi_i(q, \dot{q}) \rightarrow - \left[\mathbf{v}t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}(t)}{c^2} \dot{\mathbf{x}}(t) \right].$$

Ahora, la variación en las velocidades se expresar como:

$$\begin{aligned}\delta \dot{\mathbf{x}}(t) &= \delta \frac{d\dot{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}(t) \\ &= -\epsilon \left[\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{c^2} \dot{\mathbf{x}}(t) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}(t)}{c^2} \ddot{\mathbf{x}}(t) \right].\end{aligned}\quad (20)$$

Así, podemos expresar la variación en el Lagrangiano de la partícula libre de la siguiente manera:

$$\delta L = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}(t)$$

$$\begin{aligned}
&= -\epsilon \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \left[\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{c^2} \dot{\mathbf{x}}(t) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}(t)}{c^2} \ddot{\mathbf{x}}(t) \right] \\
&= -\epsilon m \frac{d}{dt} \left[(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{v}) \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}} \right] = \epsilon \frac{d}{dt} F(q, \dot{q}).
\end{aligned}$$

Es posible identificar:

$$F(q, \dot{q}) = -m (\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{v}) \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}.$$

Para este caso, se determina que la constante de movimiento es:

$$\begin{aligned} G(q, p) &= p_j \Phi_j(q, \dot{q}) - F(q, \dot{q}) \Rightarrow \\ G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) &= -\mathbf{p} \cdot \left[\mathbf{v}t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}(t)}{c^2} \dot{\mathbf{x}}(t) \right] + m(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{v}) \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}} \\ &= \mathbf{v} \cdot \left\{ -\mathbf{p}t + \mathbf{x}(t) \left[\frac{\mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{c^2} + m \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

Usando la relación básicas correspondientes a una partícula relativista:

$$\mathbf{p} = \frac{m\dot{\mathbf{x}}(t)}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}} \quad , \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + c^2m^2}}.$$

Se puede mostrar que:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{E}{c^2} \mathbf{x}(t) - \mathbf{p}t \right\},$$

Siendo que:

$$E = \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + c^4m^2}.$$

Si consideramos el limite no relativista, es posible observar que

$$\frac{E}{c^2} = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{c^2} + m^2} \underset{c \rightarrow \infty}{\simeq} \sqrt{m^2} = m,$$

entonces, la constante de movimiento en el limite no relativista tiene la forma

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = m \left(\mathbf{x}(t) - \frac{\mathbf{p}t}{m} \right) \rightarrow G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{x}(t) - \frac{\mathbf{p}t}{m}.$$

es decir, el invariante Galileano de una partícula no relativista.

Conclusiones

- Describimos la conexión entre simetrías continuas y leyes de conservación en mecánica clásica.
- El procedimiento es realizado en sucesivos niveles, en los cuales se destacó la importancia de cada uno de ellos: Nivel Newtoniano, Nivel Lagrangiano, Nivel Hamiltoniano.