SIMETRÍAS Y LEYES DE CONSERVACIÓN EN MECÁNICA CLÁSICA

German Enrique Ramos Zambrano

Departamento de Física - Universidad de Nariño

Introducción

Considerando un sistema de dos partículas, la segunda ley de Newton determina la dinámica del sistema:

$$\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i, \qquad i = 1, 2,$$

de manera que

$$\dot{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{F}_{12} \qquad , \qquad \dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{F}_{21},.$$

Sin embargo, de la tercera ley de Newton

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12},$$

se establece que

$$\frac{d}{dt}\Big(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2\Big) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = cte.$$

Si dichas fuerzas son consecuencia de un potencial de interacción entre las partículas, es decir:

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_1 V\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right) \quad , \quad \mathbf{F}_{21} = -\nabla_2 V\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right),$$

entonces

$$\mathbf{F}_{12} = -\nabla_1 V\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right) = \nabla_2 V\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right) = -\mathbf{F}_{12},$$

Consecuencia del hecho que la trasformación de traslación:

$$\mathbf{x}'_1 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{R} \quad , \quad \mathbf{x}'_2 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{R}, \quad \mathbf{R} = cte.$$

se determina que

$$V\left(\mathbf{x}'_1 - \mathbf{x}'_2\right) = V\left(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\right),$$

Formulación Lagrangiana

Consideremos un sistema con N grados de libertad: $q_r, \dot{q}_r$, siendo $r = 1, 2, 3, \cdots, N$. Descrito por el Lagrangiano $L\left(q, \dot{q}\right)$ que se asume no singular, es decir, que la matriz Hessiana W,

$$W_{ij} \equiv \frac{\partial^2 L\left(q, \dot{q}\right)}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j},$$

es no singular. Así, a partir de los momentos canónicos

$$p_i = \frac{\partial L\left(q, \dot{q}\right)}{\partial \dot{q}_i} = f_i\left(q, \dot{q}\right),$$

se pueda encontrar:

$$\dot{q}_r = g_r\left(q, p\right).$$

Las ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Euler-Lagrange):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad , i=1,2,3,\cdots,N,$$

son consecuencia del principio de mínima acción:

$$\delta S\left[q\right]=\delta\int_{t_1}^{t_2} dt\ L\left(q,\dot{q}\right)=0 \quad con \quad \delta q_i\left(t_1\right)=\delta q_i\left(t_2\right)=0,$$

con $i=1,2,3,\cdots,N$.

En descripción de la mecánica Lagrangiana, una constante de movimiento se interpreta como una función $f\left(q,\dot{q},t\right)$ que satisface la condición:

$$\frac{d}{dt}f\left(q,\dot{q},t\right)=0.$$

Este resultado garantizara que para una solución de las ecuaciones de movimiento, es decir, para una trayectoria física en el espacio de configuración, la constante de movimiento tendrá un valor numérico que no cambia,

Sea que $L(q,\dot{q})$ no dependa sobre una coordenada particular q_k.
Se determina que:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{p_k}-\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{0}=\frac{dp_k}{dt}=0 \qquad \Rightarrow \qquad p_k=cte.$$

Lagrangiano es invariante por:

$$\delta q_k = q_k' - q_k = \epsilon = cte \qquad , \qquad \delta \dot{q}_k = \dot{q}_k' - \dot{q}_k = 0.$$

Entonces:

$$\delta L(q,\dot{q}) = \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_k}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)} \delta q_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\delta \dot{q}_k}_{0} = \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{p_k}\epsilon = 0,$$

De manera que,

$$\frac{dp_k}{dt} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p_k = cte.$$

El momento canónico conjugado a dicha coordenadas o coordenada es una constante de movimiento. La simetría asociada se conoce como homogeneidad en el espacio.

Considere un sistema sometido a fuerzas conservativas, entonces, $L\left(q,\dot{q}\right)$:

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\left[\underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)}_{p_k}}\underbrace{\frac{dq_i}{dt}}_{\dot{q}_i}+\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}}_{p_k}\frac{d\dot{q}_i}{dt}\right]=\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i,$$

de manera que

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i-L\right]=0\Rightarrow H\equiv\sum_{i=1}^{N}p_i\dot{q}_i-L,$$

H es la energía total del sistema conservativo. Este teorema de conservación resulta de la homogeneidad en el tiempo.

Tratamiento General

Considérese una transformación infinitesimal puntual:

$$\delta q_i = \epsilon \Phi_i(q) \qquad , i = 1, 2, 3, \cdots, N,$$

siendo que ϵ es un parámetro infinitesimal y $\Phi_i(q)$ es una función que depende únicamente de las coordenadas. Se debe cumplir:

$$\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\delta q_i = \epsilon \frac{\partial \Phi_i(q)}{\partial q_j}\frac{dq_j}{dt} = \epsilon \frac{\partial \Phi_i(q)}{\partial q_j}\dot{q}_j.$$

De manera que la variación en el Lagrangiano resulta en:

$$\begin{aligned}
\delta L\left(q,\dot{q}\right) &= \underbrace{\frac{\partial L}{\partial q_i}}_{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)}\delta q_i + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i}\delta \dot{q}_i = \frac{d}{dt}\underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}}_{p_i}\delta q_i + p_i\delta\dot{q}_i \\
&= \epsilon\frac{d}{dt}\Big[p_i\Phi_i\left(q\right)\Big] = 0.
\end{aligned}$$

Así, se propone la siguiente cantidad conservada:

$$K\left(p,q\right) \equiv p_i\Phi_i\left(q\right) = cte.$$

Transformaciones Canónicas

El corchete de Poisson de dos funciones $F(p,q)$ y $G(p,q)$ es definido por:

$$\left\{ F(p,q), G(p,q) \right\} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right],$$

Una trasformaciones canónicas son relaciones del tipo:

$$q, p \to Q(p,q), P(p,q),$$

que garantizan que los corchetes de Poisson no cambian, es decir:

$$\left\{ F(p,q), H(p,q) \right\} = \left\{ F(P,Q), h(P,Q) \right\}.$$

Las transformaciones canónicas infinitesimales:

$$Q_i = q_i + \delta q_i\left(p, q\right) \quad , \quad P_i = p_i + \delta p_i\left(p, q\right),$$

siendo que $(\delta p, \delta q)$ son funciones infinitesimales de (p, q). La función generatriz es de la forma:

$$F_2\left(q, P\right) = \sum_{i=1}^{N} q_i P_i + \epsilon G\left(q, P\right),$$

donde ϵ es el parámetro infinitesimal de la transformación y $G\left(q, P\right)$ es una función diferencial de $2N$ argumentos.

De las ecuaciones de transformación se determina que:

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = P_i + \epsilon \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad \Rightarrow \quad P_i - p_i = \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G(q,P)}{\partial q_i}, \\ Q_i &= \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = q_i + \epsilon \frac{\partial G(q,P)}{\partial P_i} \quad \Rightarrow \quad Q_i - q_i = \delta q_i = \epsilon \frac{\partial G(q,P)}{\partial P_i}. \end{aligned}$$

Siendo que las cantidades $(\delta p, \delta q)$ son cantidades infinitesimales, una expansión en Taylor de la función $G(q,P)$, determina que:

$$G(q,P) = G(q, p + \delta p) \approx G(q,p) + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial G}{\partial p_i} \delta p_i,$$

Se puede mostrar que

$$\delta q_i = \epsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial p_i} \quad , \quad \delta p_i = -\epsilon \frac{\partial G(q,p)}{\partial q_i}. \tag{1}$$

El cambio en una función $F(p,q)$ a consecuencia de la transformación infinitesimal se expresa como:

$$\delta F(p,q) = F(P,Q) - F(p,q) = F(p+\delta p, q+\delta q) - F(p,q),$$

al considerar una expansión en serie de Taylor para las variables (p,q) y manteniendo potencia de primer orden en el parámetro infinitesimal resulta:

$$\delta F\left(p,q\right)=\epsilon\left\{\,F\left(p,q\right),G\left(p,q\right)\right\},$$

Esto permite establecer que:

$$\begin{aligned}
\delta q_i &= \epsilon\frac{\partial G\left(q,p\right)}{\partial p_i}=\epsilon\left\{\,q_i,G\left(p,q\right)\right\},\\
\delta p_i &= -\epsilon\frac{\partial G\left(q,p\right)}{\partial q_i}=\epsilon\left\{\,p_i,G\left(p,q\right)\right\}.
\end{aligned}$$

A la función $G\left(p,q\right)$ se identifica como el generador infinitesimal de la trasformación canónica.

Transformaciones de Simetría

Consideremos que la transformación infinitesimal sea de simetría. En el análisis Lagrangiano se mostró que una trasformación puntual de simetría de la forma:

$$\delta q_i = \epsilon \Phi_i (q) \qquad , i = 1, 2, 3, \cdots , N, \tag{2}$$

conllevo a la cantidad conservada,

$$K (p, q) \equiv p_i \Phi_i (q) = cte.$$

la cual es lineal en los momentos canónicos.

Considerando que el generador $G(p,q) \equiv K(p,q)$, entonces se puede determinar que:

$$\delta q_i = \epsilon \left\{ q_i, K(p,q) \right\} = \epsilon \underbrace{\left\{ q_i, p_j \right\}}_{\delta_{ij}} \Phi_j(q) = \epsilon \Phi_i(q) \,. \tag{3}$$

Para los momentos canónicos se obtiene que:

$$\delta p_i = \delta \left(\frac{\partial L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} \right) = \epsilon \left[\frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial q_j} \Phi_j(q) + \frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \frac{\partial \Phi_i(q)}{\partial q_k} \dot{q}_k \right] . \tag{4}$$

Siendo que la transformación considerada es una transformación de simetría del Lagrangiano se debe cumplir que:

$$\delta L\left(q,\dot{q}\right)=\frac{\partial L}{\partial q_j}\underbrace{\delta q_j}_{\epsilon\Phi_j(q)}+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\underbrace{\delta \dot{q}_j}_{\epsilon\frac{\partial\Phi_i(q)}{\partial q_k}\dot{q}_k}=\epsilon\left[\frac{\partial L}{\partial q_j}\Phi_j\left(q\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \Phi_j\left(q\right)}{\partial q_k}\dot{q}_k\right]=0,$$

de manera que

$$\frac{\partial L}{\partial q_j}\Phi_j\left(q\right)+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \Phi_j\left(q\right)}{\partial q_k}\dot{q}_k=0.$$

Derivando con respecto a las velocidades:

$$0 = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\Phi_j(q) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_k}\dot{q}_k + \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}}_{p_j}\frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_i}$$

de manera que:

$$-p_j\frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\Phi_j(q) + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_k}\dot{q}_k \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \delta p_i &= \epsilon\left[\frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial q_j}\Phi_j(q) + \frac{\partial^2 L(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\frac{\partial \Phi_i(q)}{\partial q_k}\dot{q}_k\right] \\ &= -\epsilon p_j\frac{\partial \Phi_j(q)}{\partial q_i}. \end{aligned}$$

Si se propone:

$$\delta p_i = \epsilon \left\{ q_i, K\left(p,q\right) \right\} = -\epsilon p_j \frac{\partial \Phi_j\left(q\right)}{\partial q_i},$$

Una trasformación puntual de simetría del Lagrangiano se interpreta en el espacio de fase como una trasformación canónica infinitesimal de simetría, siendo que la correspondiente constate de movimiento es el generador infinitesimal de la trasformación.

Extendiendo el concepto de transformación puntual para un cambio en las coordenadas de la forma:

$$\delta q_j = \epsilon \Phi_j \left(q, \dot{q} \right) \qquad , i = 1, 2, 3, \cdots, N, \tag{5}$$

La variación en las velocidades generalizadas es:

$$\delta \dot{q}_j = \frac{d}{dt} \delta q_j = \epsilon \frac{d\Phi_j \left(q, \dot{q} \right)}{dt}. \tag{6}$$

La variación en el Lagrangiano:

$$\delta L \left(q, \dot{q} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \underbrace{\delta q_j}_{\epsilon \Phi_j (q, \dot{q})} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{\epsilon \frac{d\Phi_j (q, \dot{q})}{dt}} = \epsilon \frac{d}{dt} \left[p_j \Phi_j \left(q, \dot{q} \right) \right]. \tag{7}$$

Si se considera que la variación en el Lagrangiano se expresa en la forma:

$$\delta L\left(q,\dot{q}\right)=\epsilon\frac{d}{dt}F\left(q,\dot{q}\right). \tag{8}$$

Se cumple en nuestro caso que:

$$\delta L\left(q,\dot{q}\right)=\epsilon\frac{d}{dt}F\left(q,\dot{q}\right)=\epsilon\frac{d}{dt}\left[p_j\Phi_j\left(q,\dot{q}\right)\right],$$

entonces

$$\epsilon\frac{d}{dt}\left[p_j\Phi_j\left(q,\dot{q}\right)-F\left(q,\dot{q}\right)\right]=0$$

Con lo cual se concluye que

$$K\left(q,p\right)\equiv p_j\Phi_j\left(q,\dot{q}\right)-F\left(q,\dot{q}\right)=cte. \tag{9}$$

Cuando el análisis se extiende al espacio de fase, la simetría se interpreta como una transformación canónica infinitesimal:

$$Q_i = q_i + \delta q_i \left(p, q\right) \quad , \quad P_i = p_i + \delta p_i \left(p, q\right),$$

donde

$$\delta q_i = \epsilon \left\{ q_i, K\left(p, q\right) \right\} \quad , \quad \delta p_i = \epsilon \left\{ p_i, K\left(p, q\right) \right\},$$

La constante de movimiento $K\left(q, p\right)$ identificada como el generador infinitesimal de la trasformación canónica.

Como un caso partícular cuando el Lagrangiana no depende explícitamente del tiempo, si se considera la variación en las coordenadas:

$$\delta q_j = \epsilon \Phi_j (q, \dot{q}) = \epsilon \dot{q}_j \quad , \delta \dot{q}_j = \epsilon \frac{d\dot{q}_j}{dt},$$

entonces, la variación en el Lagrangiano es:

$$\delta L (q, \dot{q}) = \frac{\partial L}{\partial q_j} \underbrace{\delta q_j}_{\epsilon \dot{q}_j} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \underbrace{\delta \dot{q}_j}_{\epsilon \frac{d\dot{q}_j}{dt}} = \epsilon \frac{d}{dt} L (q, \dot{q})$$

de manera que la cantidad conservada es de la forma:

$$K (q, p) = p_j \Phi_j (q, \dot{q}) - F (q, \dot{q}) = p_j \dot{q}_j - L (q, \dot{q}) \, .$$

Si se considera que el parámetro continuo infinitesimal sea de la forma $\epsilon = dt$ y la función generatriz de la transformación canónica infinitesimal con el Hamiltoniano, $K \to H$, se determinar que:

$$
\begin{aligned}
\delta q_i &= dt \left\{ q_i, H\left(p, q\right) \right\} = dt \frac{dq_i}{dt} = dq_i, \\
\delta p_i &= dt \left\{ p_i, H\left(p, q\right) \right\} = dt \frac{dp_i}{dt} = dp_i.
\end{aligned}
$$

Así que el movimiento de un sistema se puede describir mediante una transformación canónica infinitesimal generada por el hamiltoniano.

Sistema de partículas moviéndose en un potencial debido a fuerzas Newtonianas

Consideremos un sistema de N partículas puntuales moviéndose bajo la acción de un potencial que depende solo de la distancia relativa entre ellas.
El lagrangiano que describe el sistema es:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2 - V\left(\{r_{ij}\}\right) \quad , r_{ij} = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \quad \therefore \quad i, j = 1, 2, 3, \cdots, N \tag{10}$$

El correspondiente cambio en el Lagrangiano es dada por:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial V\left(\{r_{ij}\}\right)}{\partial r_{ij}} \mathbf{x}_{ij} \cdot \delta \mathbf{x}_{ij} \quad \therefore \quad \mathbf{x}_{ij} \equiv \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j$$

Traslaciones

Consideremos la variación en las coordenadas:

$$\delta \mathbf{x}_i = \epsilon \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = cte, \quad \Rightarrow \quad \delta q_i = \epsilon \Phi_i(q) \quad \Rightarrow \quad \Phi_i(q) \to \mathbf{a},$$

las variaciones en las velocidades

$$\delta \dot{\mathbf{x}}_i = \frac{d}{dt}\delta \mathbf{x}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \dot{q}_j = \epsilon \frac{d\Phi_j(q)}{dt}.$$

Implicando que:

$$\mathbf{x}_i' = \mathbf{x}_i + \delta \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i + \epsilon \mathbf{a} \quad \Rightarrow \quad \delta \mathbf{x}_{ij} = \delta \mathbf{x}_i - \delta \mathbf{x}_j = 0$$

De manera que:

$$\delta L = 0.$$

La constante conservada sera:

$$G\left(p,q\right)=p_i\Phi_i\left(q\right)\quad\Rightarrow\quad G\left(p,q\right)=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}\cdot\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i=\mathbf{a}\cdot\mathbf{P},$$

donde $\mathbf{P}$ es el momento lineal total del sistema de N partículas. Siendo que el vector $\mathbf{a}$ es una constante arbitraria, se puede afirmar que la constante de movimiento es:

$$\mathbf{P}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{p}_i. \tag{11}$$

Rotaciones

Consideremos la variación en las coordenadas:

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{x}_i &= \epsilon\left(\mathbf{n}\times\mathbf{x}_i\right), \Rightarrow \ \delta q_i = \epsilon\Phi_i\left(q\right) \ \Rightarrow \ \Phi_i\left(q\right)\rightarrow\left(\mathbf{n}\times\mathbf{x}_i\right)\\ \delta\dot{\mathbf{x}}_i &= = \frac{d}{dt}\delta\mathbf{x}_i = \epsilon\frac{d}{dt}\left(\mathbf{n}\times\mathbf{x}_i\right) = \epsilon\left(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{x}}_i\right),\end{aligned}$$

De manera que

$$\dot{\mathbf{x}}_i\cdot\delta\dot{\mathbf{x}}_i = \epsilon\dot{\mathbf{x}}_i\cdot\left(\mathbf{n}\times\dot{\mathbf{x}}_i\right) = \epsilon\mathbf{n}\cdot\left(\dot{\mathbf{x}}_i\times\dot{\mathbf{x}}_i\right) = 0,$$

Ahora, si se considera

$$\delta\mathbf{x}_{ij} = \delta\mathbf{x}_i - \delta\mathbf{x}_j = \epsilon\left(\mathbf{n}\times\mathbf{x}_i\right) - \epsilon\left(\mathbf{n}\times\mathbf{x}_j\right) = \epsilon\mathbf{n}\times\left(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\right) = \epsilon\left(\mathbf{n}\times\mathbf{x}_{ij}\right)$$

se deduce que:

$$\mathbf{x}_{ij} \cdot \delta \mathbf{x}_{ij} = \epsilon \mathbf{x}_{ij} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{x}_{ij}) = \epsilon \mathbf{n} \cdot (\mathbf{x}_{ij} \times \mathbf{x}_{ij}) = 0,$$

con lo cual

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{\partial V\left(\{r_{ij}\}\right)}{\partial r_{ij}} \frac{1}{r_{ij}} \mathbf{x}_{ij} \cdot \delta \mathbf{x}_{ij} = 0$$

Entonces la cantidad conservada se expresa como:

$$G\left(p, q\right) = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{x}_i) = \mathbf{n} \cdot \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{x}_i \times \mathbf{p}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{L},$$

donde $\mathbf{L}$ es el momento angular del sistema.

La cantidad conservada:

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_i. \tag{12}$$

Boost de Galileo

Ahora, consideremos la variación en las coordenadas:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_i &= -\epsilon \mathbf{v} t, \quad \mathbf{v} = cte, \ \Rightarrow \ \delta q_i = \epsilon \Phi_i \left(q, \dot{q} \right) \ \Rightarrow \ \Phi_i \left(q \right) \to -\mathbf{v} t \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_i &= = \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}_i = -\epsilon \mathbf{v}. \end{aligned} \tag{13}$$

Es posible determinar que

$$\dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i = -\epsilon \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \mathbf{v} = -\epsilon \frac{d\left(\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{v}\right)}{dt},$$

De manera similar,

$$\delta \mathbf{x}_{ij} = \delta \mathbf{x}_i - \delta \mathbf{x}_j = -\epsilon \mathbf{v} t + \epsilon \mathbf{v} t = 0,$$

Con lo cual, se puede concluir que:

$$\delta L = -\epsilon \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{v}.$$

Para las variaciones de éste tipo se debe cumplir que:

$$\delta L\left(q,\dot{q}\right)=\epsilon\frac{d}{dt}F\left(q,\dot{q}\right).$$

Es posible identificar:

$$F\left(q,\dot{q}\right)=-\sum_{i=1}^{N}m_i\mathbf{x}_i\cdot\mathbf{v}.$$

Se determina que la constante de movimiento es:

$$\begin{aligned} G\left(q,p\right) &= p_j \Phi_j\left(q,\dot{q}\right) - F\left(q,\dot{q}\right) \quad \Rightarrow \\ G\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right) &= \mathbf{v}\cdot\left[\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{x}_i - t\mathbf{P}\right]. \end{aligned}$$

De la definición del centro de masa para este sistema de partículas:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{x}_i \quad \therefore \quad M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i,$$

Podemos determinar que:

$$G\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right) = M\mathbf{v}\cdot\left[\mathbf{R} - \frac{t\mathbf{P}}{M}\right].$$

Siendo $\mathbf{v}$ una velocidad constante arbitraria se puede identifica que la constante de movimiento es:

$$\mathbf{R} - \frac{t\mathbf{P}}{M}. \tag{14}$$

La constate de movimiento hace referencia al movimiento relativo del centro de masa.

Traslaciones Temporales

Consideremos variaciones de la forma:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{x}_i &= \epsilon \mathbf{v}_i \quad \Rightarrow \quad \delta q_i = \epsilon \Phi_i \left(q, \dot{q}\right) \quad \Rightarrow \quad \Phi_j \left(q, \dot{q}\right) \rightarrow \mathbf{v}_i \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_i &= \frac{d}{dt} \delta \mathbf{x}_i = \epsilon \frac{d \mathbf{v}_i}{dt}. \end{aligned} \tag{15}$$

De manera que

$$\delta \mathbf{x}_{ij} = \epsilon \mathbf{v}_i - \epsilon \mathbf{v}_j = \epsilon \left(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j\right) = \epsilon \mathbf{v}_{ij}$$

La variación en el Lagrangiano se expresa como:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \delta \dot{\mathbf{x}}_i - \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial V \left(\{r_{ij}\}\right)}{\partial r_{ij}} \mathbf{x}_{ij} \cdot \delta \mathbf{x}_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
\delta L &= \epsilon \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} - \epsilon \frac{1}{r_{ij}} \frac{\partial V\left(\{r_{ij}\}\right)}{\partial r_{ij}} \mathbf{x}_{ij} \cdot \mathbf{v}_{ij} \\
&= \epsilon \left[\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}_i \cdot \dot{\mathbf{x}}_i \right) - \frac{d}{dt} V\left(\{r_{ij}\}\right) \right] = \epsilon \frac{d}{dt} L
\end{aligned}
$$

Es posible identificar:

$$
\delta L\left(q, \dot{q}\right) = \epsilon \frac{d}{dt} F\left(q, \dot{q}\right) = \epsilon \frac{d}{dt} L\left(q, \dot{q}\right).
$$

Así, la constante de movimiento es:

$$\begin{aligned} G(q,p) &= p_j \Phi_j(q,\dot{q}) - F(q,\dot{q}) \quad \Rightarrow \\ G(\mathbf{x},\mathbf{p}) &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i - L \end{aligned}$$

$$H = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i - L. \tag{16}$$

Que corresponde a la energía del sistema.

Resumen

El sistema de N partículas que interactuan entre si bajo la acción de fuerza conservativa, posee 10 constantes de movimiento:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \quad , \quad \mathbf{R} - \frac{t\mathbf{P}}{M}, \\ \mathbf{L} &= \sum_{i=1}^{N} \mathbf{L}_i, \quad , \quad H = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{v}_i - L. \end{aligned}$$

Que se conocen como Invariantes de Galileo, para un potencial general $V(\{r_{ij}\})$.

Partícula Relativista

Sea una partícula libre relativista de masa en reposo m moviéndose a una velocidad $\dot{\mathbf{x}}(t)$ relativo a un sistema de referencia inercial S. El Lagrangiano asociado al sistema es:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}. \tag{17}$$

La variación del Lagrangiano es:

$$\delta L = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}}\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\delta\dot{\mathbf{x}}(t). \tag{18}$$

Considérese una trasformación de Lorentz infinitesimal de un sistema de referencia inercial S con coordenadas $(\mathbf{x},t)$ a un sistema S' de coordenadas $(\mathbf{x}',t')$:

$$\mathbf{x}'\left(t'\right) \simeq \mathbf{x}\left(t\right) - \epsilon \mathbf{v} t \quad , \quad t' \simeq t - \epsilon \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}\left(t\right)}{c^2}. \tag{19}$$

La variación en las coordenadas se define como:

$$\delta \mathbf{x}\left(t\right) \equiv \mathbf{x}'\left(t\right) - \mathbf{x}\left(t\right),$$

Realizando una expansión en potencias del parámetro infinitesimal ϵ, es posible mostrar:

$$\mathbf{x}'\left(t'\right) \simeq \mathbf{x}'\left(t\right) - \epsilon\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}\left(t\right)}{c^2}\dot{\mathbf{x}}\left(t\right),$$

de manera que:

$$\delta\mathbf{x}\left(t\right) \equiv \mathbf{x}'\left(t\right) - \mathbf{x}\left(t\right) = -\epsilon\left[\mathbf{v}t - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}\left(t\right)}{c^2}\dot{\mathbf{x}}\left(t\right)\right].$$

Con lo cual es posible identificar:

$$\delta q_i = \epsilon\Phi_i\left(q,\dot{q}\right) \Rightarrow \Phi_i\left(q,\dot{q}\right) \rightarrow -\left[\mathbf{v}t - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}\left(t\right)}{c^2}\dot{\mathbf{x}}\left(t\right)\right].$$

Ahora, la variación en las velocidades se expresar como:

$$\begin{aligned} \delta\dot{\mathbf{x}}(t) &= \delta\frac{d\dot{\mathbf{x}}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\delta\mathbf{x}(t) \\ &= -\epsilon\left[\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)}{c^2}\dot{\mathbf{x}}(t) - \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}(t)}{c^2}\ddot{\mathbf{x}}(t)\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

Así, podemos expresar la variación en el Lagrangiano de la partícula libre de la siguiente manera:

$$\delta L = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}}\dot{\mathbf{x}}(t)\cdot\delta\dot{\mathbf{x}}(t)$$

$$
\begin{aligned}
&= -\epsilon \frac{m}{\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}} \dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \left[\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)}{c^2} \dot{\mathbf{x}}(t) - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}(t)}{c^2} \ddot{\mathbf{x}}(t) \right] \\
&= -\epsilon m \frac{d}{dt} \left[(\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{v}) \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}} \right] = \epsilon \frac{d}{dt} F(q, \dot{q}) .
\end{aligned}
$$

Es posible identificar:

$$
F(q, \dot{q}) = -m (\mathbf{x}(t) \cdot \mathbf{v}) \sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}} .
$$

Para este caso, se determina que la constante de movimiento es:

$$
\begin{aligned}
G\left(q,p\right) &= p_j\Phi_j\left(q,\dot{q}\right)-F\left(q,\dot{q}\right) \quad \Rightarrow \\
G\left(\mathbf{x},\mathbf{p}\right) &= -\mathbf{p}\cdot\left[\mathbf{v}t-\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{x}\left(t\right)}{c^2}\dot{\mathbf{x}}\left(t\right)\right]+m\left(\mathbf{x}\left(t\right)\cdot\mathbf{v}\right)\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2\left(t\right)}{c^2}} \\
&= \mathbf{v}\cdot\left\{-\mathbf{p}t+\mathbf{x}\left(t\right)\left[\frac{\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{x}}\left(t\right)}{c^2}+m\sqrt{1-\frac{\dot{\mathbf{x}}^2\left(t\right)}{c^2}}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

Usando la relación básicas correspondientes a una partícula relativista:

$$\mathbf{p} = \frac{m\dot{\mathbf{x}}(t)}{\sqrt{1 - \frac{\dot{\mathbf{x}}^2(t)}{c^2}}} \quad , \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + c^2m^2}}.$$

Se puede mostrar que:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{v} \cdot \left\{ \frac{E}{c^2}\mathbf{x}(t) - \mathbf{p}t \right\},$$

Siendo que:

$$E = \sqrt{c^2\mathbf{p}^2 + c^4m^2}.$$

Si consideramos el limite no relativista, es posible observar que

$$\frac{E}{c^2} = \sqrt{\frac{\mathbf{p}^2}{c^2} + m^2} \underset{c \to \infty}{\simeq} \sqrt{m^2} = m,$$

entonces, la constante de movimiento en el limite no relativista tiene la forma

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = m\left(\mathbf{x}(t) - \frac{\mathbf{p}t}{m}\right) \to G(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \mathbf{x}(t) - \frac{\mathbf{p}t}{m}.$$

es decir, el invariante Galileano de una partícula no relativista.

Conclusiones

- Describimos la conexión entre simetrías continuas y leyes de conservación en mecánica clásica.
- El procedimiento es realizado en sucesivos niveles, en los cuales se destaco las importancia de cada uno de ellos: Nivel Newtoniano, Nivel Lagrangiano, Nivel Hamiltoniano.