INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Notas de Clase

Segundo Javier Caicedo Zambrano
Héctor Jairo Portilla Obando

Editorial
Universidad de Nariño

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Editorial

Universidad de Nariño

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Notas de Clase

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

Notas de Clase

Héctor Jairo Portilla Obando
Segundo Javier Caicedo Zambrano

Editorial
Universidad de Nariño

Portilla Obando, Héctor Jairo Introducción a los métodos de demostración matemática/ Notas de clase /Héctor Jairo Portilla Obando, Segundo Javier Caicedo Zambrano. - -1a. ed.- -San Juan de Pasto:

Editorial Universidad de Nariño, 2022

101p.:

ISBN: 978-628-7509-38-2

1.Lógica matemática 2. Matemáticas -conjuntos 3. Teoría matemática 4. enseñanza matemática I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier

511.3 P852 – SCDD-Ed. 22

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904
SECCIÓN DE BIBLIOTECA
"Alberto Quijano Guerrero"

Introducción a Los Métodos de Demostración Matemática

Notas de Clase

Autores: Héctor Jairo Portilla O.; Segundo Javier Caicedo Z.

ISBN: 978-958-8958-84-2 digital.

Diseño y Diagramación: Diana Sofía Salas Chalapud

San Juan de Pasto – Nariño - Colombia

Contenido

INTRODUCCIÓN

En el estudio de asignaturas del área de Matemáticas, una de las grandes dificultades que tienen los estudiantes es la de realizar demostraciones de teoremas, proposiciones, propiedades o de cualquier afirmación que tratan en las asignaturas.

En el presente libro, se exponen los métodos más usuales en demostraciones matemáticas, tales como, el Método Directo, Métodos Indirectos: Contra recíproca y por Contradicción o Reducción al Absurdo, Método de Casos Separados, Método de Contraejemplo y el Método de Inducción Matemática.

Además de explicar en qué consiste cada método, se realizan demostraciones que sirven de modelos o guías para la demostración de otras afirmaciones similares a las que se demuestran, con el fin de que el lector adquiera mayor comprensión y experiencia en estos procesos.

Dado que no se abordará el desarrollo de una asignatura en particular, por ejemplo, Matemáticas Generales, Álgebra Lineal o temas relacionados con Algebra Promocional, Teoría de Conjuntos, es posible que el lector encuentre un cierto grado de dificultad para realizar demostraciones, por lo cual, se plantearán previamente temas teóricos, definiciones y propiedades que se utilizarán en las demostraciones.

Precisamente, dado que las demostraciones a tratar son procesos deductivos que se fundamenten en teoremas, reglas de inferencia y leyes de lógica matemática, inicialmente se expondrán elementos de Lógica Matemática o Algebra Proposicional y de Teoría de Conjuntos. Además, se desarrollan varios ejemplos con el fin de comprender mejor el sentido de las leyes lógicas y de conjuntos. También se establecen otros elementos que son necesarios y afines al contenido teórico que contribuyen a la comprensión de las demostraciones.

Igualmente, se presentan explicaciones adicionales que, si bien no hacen parte en sí de las demostraciones, contribuyen a que el lector adquiera una mayor comprensión y que asimile de mejor manera el proceso, empezando con el planteamiento inicial de la afirmación a demostrar.

Durante el proceso de la demostración se realizan justificaciones y, es ahí, donde se utilizan los teoremas que se demuestran previamente, como también definiciones, propiedades y axiomas, que se hayan establecido como fundamentación para el desarrollo de los ejemplos sobre demostraciones.

Finalmente, el presente libro se constituye en una guía y fuente de consulta para estudiantes de los primeros semestres de los programas que contienen asignaturas de Matemáticas, en especial, en los programas relacionados con formación matemática e ingeniería.

CAPÍTULO 1
Elementos de Lógica Matemática

CAPÍTULO 1
ELEMENTOS DE LÓGICA MATEMÁTICA

1.1 Álgebra Proposicional

Una de las mayores dificultades que tienen los estudiantes para comprender y asimilar los conocimientos matemáticos y, para analizar y deducir procesos matemáticos, como es el caso de las demostraciones, tema central del libro, radica en el uso y poco manejo del lenguaje y de la simbología propia de la Lógica Matemática. Teniendo en cuenta lo anterior, en este capítulo se plantean elementos básicos y necesarios de la Lógica Matemática, con lo cual se busca que los estudiantes se apropien de estos elementos para el uso y aplicación en los procesos deductivos a tratar.

Una Proposición es un enunciado que tiene un solo valor de verdad, a saber: verdadero o falso; se designa o denota con una letra, minúscula o mayúscula, por ejemplo, $p, q, r, s, t; P, Q, R, S, T$ u otras.

En el lenguaje común, es decir, en la cotidianidad, el valor de verdad de una proposición depende de ciertas circunstancias, factores y conveniencias, tales como: tiempo, lugar, lenguaje convenido, contexto, entre otros.

Ejemplos:

Las siguientes declaraciones o expresiones, son ejemplos de proposiciones.

p: cuatro es un número natural

q: 0,72 es un número irracional

r: 30 no es número entero

s: hoy es día lunes

t: hace mucho frio

w: Luis no es inteligente

De las propiedades de los conjuntos numéricos, se sabe que la proposición p es verdadera, q y r son falsas. Por su parte, el valor de verdad de las proposiciones s, t, w está sujeto a circunstancias o factores como los descritos anteriormente. En efecto, para el valor de verdad de s, depende del día en que se enuncie la afirmación; para t, de las condiciones del estado del tiempo y, para w, del caso concreto de Luis.

En adelante se utilizarán esencialmente proposiciones matemáticas, excepto en los ejemplos en los que se requiera comprender ciertos valores de verdad.

1.1.1 Negación de una proposición

Operador $\sim$ (NO; NOT).

La negación de una proposición p se indica por $\sim p$, en la cual se lee: no p. Así, $\sim p$ es otra proposición llamada Negación de p.

Si p es falsa, entonces, $\sim p$ es verdadera y, si p es verdadera, entonces $\sim p$ es falsa.

Ejemplos:

Al negar las proposiciones de los ejemplos anteriores, se tienen las siguientes proposiciones:

$\sim p$: cuatro no es un número natural	$\sim q$: 0,72 no es un número irracional
$\sim r$: 30 es número entero	$\sim s$: hoy no es día lunes
$\sim t$: no hace mucho frio	$\sim w$: Luis es inteligente

1.1.2 Ley Involutiva

La negación de la negación de una proposición dada, equivale a la proposición dada.

Ejemplos:

$\sim(\sim p)$: Cuatro es un número natural.

$\sim(\sim q)$: 0,72 es número irracional.

$\sim(\sim r)$: 30 no es número entero.

Como se puede observar, la negación de la negación de una proposición produce la proposición original; en este caso, se obtienen, respectivamente, las proposiciones iniciales p, q, r.

1.1.3 Conjunción

Operador " ∧ " (Y; AND).

Si p, q son proposiciones, entonces $p \wedge q$ es otra proposición llamada Conjunción de p y q. En la expresión $p \wedge q$, se lee: p y q o también p $\mathbf{and}$ q.

1.1.4 Valor de verdad de una Conjunción

Una Conjunción es verdadera, únicamente cuando son verdaderas las dos proposiciones que la constituyen; en cualquier otro caso, la conjunción es falsa.

1.1.5 Disyunción

Operador " ∨ " (O; OR).

Si p, q son proposiciones, entonces $p \vee q$ es otra proposición llamada Disyunción de p y q. En la expresión $p \vee q$, se lee: p $\boldsymbol{o}$ q o también p $\boldsymbol{or}$ q.

1.1.6 Valor de verdad de una Disyunción

Una Disyunción es verdadera cuando es verdadera al menos una de las dos proposiciones que la constituyen, por lo cual, una disyunción es falsa cuando son falsas las dos proposiciones que la conforman.

1.1.7 Disyunción Excluyente o Exclusiva

Operador " $\underline{\vee}$ " (Ó; XOR).

Si p, q son proposiciones, entonces $p \quad q$ es otra proposición llamada disyunción excluyente de p con q.

En la expresión $p \underline{\vee} q$ se lee p ó q o también p o q pero no ambas (p xor q; p or q but not both).

1.1.8 Valor de verdad de una Disyunción Exclusiva

Una disyunción excluyente es verdadera cuando es verdadera únicamente una de las proposiciones que la constituyen, por lo cual, la una excluye a la otra; esto es, una disyunción excluyente es verdadera cuando las dos proposiciones que la conforman tienen diferente valor de verdad (ver Cuadro 1).

Cuadro 1.
Tabla de verdad de Negación, Conjunción, Disyunción y Disyunción Exclusiva

Negación		Conjunción			Disyunción			Disyunción Exclusiva		
$\boldsymbol{p}$	$\sim \boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \wedge q}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \vee q}$	$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{p \underline{\vee} q}$
v	f	v	V	v	v	v	v	v	v	F
		v	F	f	v	f	v	v	f	V
f	v	f	V	f	f	v	v	f	v	V
		f	F	f	f	f	f	f	f	F

Observando los valores de verdad del Cuadro 1, se puede afirmar que, una Disyunción no es exigente puesto que, para que sea verdadera, no es necesario que las proposiciones que la conforman sean verdaderas, basta que lo sea una de ellas; en cambio, una Conjunción sí es exigente, ya que, para que sea verdadera, es decir, para que se cumpla, es necesario que sean verdaderas las dos proposiciones que la constituyen.

Los símbolos "$\sim$", " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\underline{\vee}$ ", son operadores lógicos.

El símbolo $\sim$ es operador unario, porque se aplica o actúa sobre una proposición; en cambio, los operadores " $\wedge$ ", " $\vee$ ", " $\underline{\vee}$ ", son operadores binarios, porque unen dos proposiciones. Estos operadores son conectivos lógicos fundamentales.

Ejemplos:

p: 200 *es número natural* q: 0.75 *es número entero* r: -150 *es número entero*

La proposición $p \vee q$: 200 *es número natural* **o** 0.75 *es número entero* es verdadera, porque p es verdadera. Observe, que no importa el valor de verdad de la proposición q, el cual, en este ejemplo, es falso.

$p \wedge q$: 200 *es número natural* **y** 0.75 *es número entero*, es falsa¸ porque q es falsa. Note que, no importa el valor de verdad de la proposición p, el cual, en este ejemplo es verdadero.

$p \wedge r$: 200 *es número natural* **y** -150 *es número entero*, es verdadera¸ porque tanto p como r son verdaderas.

Sean las siguientes proposiciones:

s: x *es número racional* t: x *es número irracional*

$s \underline{\vee}\ t$: x *es número racional* ó x *es número irracional*

La proposición $s \underline{\vee} t$ es una disyunción excluyente porque, si x es racional, no puede ser irracional, o si x es irracional, no es racional. En realidad, la proposición s excluye a la proposición t y viceversa.

Así pues, si s es verdadera, entonces t es falsa y si t es verdadera, s es falsa. En este ejemplo, la proposición $s \underline{\vee} t$ es verdadera.

1.1.9 Proposición compuesta

Una proposición es Compuesta si tiene al menos un operador (conectivo) binario.

De aquí se deduce que, una Conjunción, Disyunción y Disyunción Excluyente son Proposiciones Compuestas.

1.1.10 Proposición Simple

Una proposición es Simple (Aislada) cuando no tiene operadores binarios, por lo cual, existe una sola unidad de afirmación.

1.1.11 Proposición Implicación

Operador " $\longrightarrow$ " o " $\Longrightarrow$ " (Si⋯entonces ⋯; If⋯then⋯).

Sean las proposiciones p, q.

La expresión $p \Longrightarrow q$ es otra proposición, llamada Implicación, la cual, puede constituir un enunciado Condicional, Hipotético o Implicativo.

La expresión $p \Longrightarrow p$ se lee: p implica q o también: si p entonces q; p solamente si q; p sólo si q; q si p.

La proposición p es el Antecedente y q es el Consecuente. Esta proposición es la de mayor aplicación en los procesos matemáticos deductivos, inclusive, en el lenguaje común.

Vale anotar que, en procesos de demostración matemática de una proposición de la forma
$p \Longrightarrow q$, se asume que p es una proposición verdadera; es decir, se asume que p es una Verdad Hipotética. En realidad, no tiene sentido considerar que la proposición p sea falsa porque, en este caso, la implicación es verdadera. Por esto, la proposición $p \Longrightarrow q$ constituye un Enunciado Hipotético.

La proposición p es la condición que se impone y si se concluye que q es verdadera, entonces, la implicación $(p \Longrightarrow q)$ es verdadera. Por esto, a la proposición $p \Longrightarrow q$ también se le llama Enunciado Condicional.

En algunos casos, el antecedente es una conjunción de dos o más proposiciones, llamadas Premisas.

1.1.12 Valor de Verdad de una Implicación

Una implicación es falsa únicamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso; pues, cuando el antecedente es falso, no interesa el valor de verdad del consecuente ya que, en cualquier caso, la implicación es verdadera (ver Cuadro 2).

Cuadro 2.
Tabla de verdad de la implicación

P	q	$\boldsymbol{p \Longrightarrow q}$
V	v	v
V	f	f
F	v	v
F	f	v

1.1.13 Proposiciones Recíprocas, Contrarias y Contra recíprocas

Las proposiciones $p \Longrightarrow q$; $q \Longrightarrow p$ son Recíprocas; también se dice que la una es la recíproca de la otra.

Las proposiciones $p \Longrightarrow q$; $\sim p \Longrightarrow \sim q$ son Contrarias; también se dice que la una es la contraria de la otra.

Las proposiciones $p \Longrightarrow q$; $\sim q \Longrightarrow \sim p$ son Contra recíprocas; la una es la contra recíproca de la otra.

Según lo anterior, se tiene los siguientes ejemplos:

La Recíproca de $r \Longrightarrow \sim q$ es la proposición: $\sim q \Longrightarrow r$.

La Contraria de $\sim q \Longrightarrow r$ es la proposición: $\sim (\sim q) \Longrightarrow \sim r$ o bien: $q \Longrightarrow \sim r$.

La Contra recíproca de $r \Longrightarrow \sim q$ es la proposición: $q \Longrightarrow \sim r$.

Cuando una proposición $p \Longrightarrow q$ es verdadera, se dice que p es Condición Suficiente para q y que q es Condición Necesaria para p.

Nota:

Se suele utilizar el símbolo " $\rightarrow$ " para la implicación en general y el símbolo " $\Longrightarrow$ " cuando la implicación es tautológicamente verdadera; es decir, cuando es verdadera independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que figuren en ella.

1.1.14 Proposición Doble Implicación

Operador: " $\leftrightarrow$ " o también " $\Leftrightarrow$ " (p sí y solo sí q).

La proposición $p \Leftrightarrow q$ se lee: p sí y solo sí q; p solamente si q y representa la Conjunción:

$(p \Longrightarrow q) \wedge \ (q\ p)$.

La proposición Doble Implicación, también se la llama Bicondicional (ver Cuadro 3).

Cuadro 3
Tabla de verdad de la doble Implicación

p		q	$p \Longrightarrow q$	$q \Longrightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$ $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$
v		v	v	v	v
v		f	f	v	f
f		v	v	f	f
f		f	v	v	v

Se puede observar que, una Proposición Bicondicional es verdadera cuando las dos proposiciones que la constituyen tienen el mismo valor de verdad y, es falsa, cuando son contrarios los valores de verdad de las dos proposiciones.

Ejemplos:

Una Conjunción es verdadera, sí y solo sí, las proposiciones que la constituyen son verdaderas.

La anterior proposición es verdadera, porque si una conjunción es verdadera, implica o se concluye, que las proposiciones que la constituyen son verdaderas. Ahora bien, si las dos proposiciones que conforman una Conjunción son verdaderas, entonces, se concluye que dicha conjunción es verdadera; es decir, una afirmación implica la otra.

Una Disyunción es verdadera, sí y solo sí, las proposiciones que la constituyen son verdaderas.

La anterior proposición es falsa, porque si una Disyunción es verdadera no implica o no se concluye que las dos proposiciones que la constituyen sean verdaderas, ya que, puede suceder que una de ellas sea verdadera y la otra sea falsa. Sin embargo, si las dos proposiciones que conforman una Disyunción son verdaderas, sí se concluye que dicha Disyunción es verdadera.

En este ejemplo, la primera afirmación no implica la segunda, pero la segunda afirmación sí implica la primera.

Nota:

Si $(p \Longrightarrow q)$ es falsa y $(q \Longrightarrow p)$ es verdadera, entonces, la proposición $(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$ es falsa, por lo tanto, la proposición $p \Leftrightarrow q$ es falsa.

En matemáticas, generalmente las definiciones se expresan como una Proposición de Doble Implicación. Así pues, si $p \Leftrightarrow q$ es una definición, entonces, en la proposición p se enuncia lo que se define y en la proposición q se establece la condición o condiciones que se deben cumplir.

Ejemplos:

Sea n un número entero.

n es número par, sí y solo sí, existe un número entero k tal que $n = 2k$.

n es número impar, sí y solo sí, existe un número entero h tal que $n = 2h + 1$.

En las afirmaciones anteriores, se presentan las definiciones de número par y de número impar. También se establece la condición que se debe cumplir, para que un número entero sea par o sea impar.

1.1.15 Proposiciones Equivalentes

Dos proposiciones compuestas por las mismas Proposiciones Simples son lógicamente Equivalentes, si al asignar los mismos valores de verdad a las proposiciones simples, las proposiciones compuestas resultan con el mismo valor de verdad, por lo cual, las respectivas tablas de verdad son Idénticas (ver Cuadro 4).

Ejemplos:

El Cuadro 4, presenta dos tablas de verdad; se observa que son iguales las columnas correspondientes a $p \Longrightarrow q$ y $\sim\ p \vee q$.

Cuadro 4.
Ejemplo de tabla equivalente

p	q	$\boldsymbol{p \Rightarrow q}$
v	v	v
v	f	f
f	v	v
f	f	v

p	q	$\boldsymbol{\sim p}$	$\boldsymbol{\sim\ p \vee q}$
v	v	f	v
v	f	f	f
f	v	v	v
f	f	v	v

Como se puede observar, asignando los mismos valores de verdad a p y q en ambas tablas del Cuadro 4, los valores de verdad de las proposiciones compuestas $(p \Longrightarrow q)$ y $(\sim p \vee q)$ tienen los mismos valores de verdad; en consecuencia, las proposiciones $(p \Longrightarrow q)$ y $(\sim p \vee q)$ son equivalentes, situación que se simboliza así: $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p$ Ú $q)$.

En este caso, el símbolo $\Leftrightarrow$ se lee: equivalente.

La proposición: $Carlos\ es\ estudiante$ y $es\ futbolista$, es equivalente a la proposición: $Carlos\ es\ futbolista$ y $es\ estudiante$, ya que expresan lo mismo; no importa qué se mencione primero, bien sea la palabra estudiante o la palabra futbolista.

De igual manera, la proposición: $Diana\ estudia\ inglés$ **o** $Diana\ estudia\ matemáticas$, es equivalente a la proposición: $Diana\ estudia\ matemáticas$ **o** $Diana\ estudia\ inglés$.

Según lo anterior, la proposición $(p \wedge q)$ es equivalente a la proposición $(q \wedge p)$; lo mismo ocurre con las proposiciones: $(p \vee q)$ y $(q \vee p)$; es decir: $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$; $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$

En algunos casos de Proposiciones Equivalentes, una de ellas puede ser simple, por ejemplo: $(p \vee p) \Leftrightarrow p$.

También se puede afirmar lo siguiente: una proposición $\boldsymbol{p}$ es lógicamente equivalente a una proposición $\boldsymbol{q}$, si para cada asignación de valor de verdad a las proposiciones simples que la componen, p y q tienen el mismo valor de verdad.

Para indicar equivalencia también se utiliza el símbolo $\equiv$ o el signo $=$.

Por ejemplo, $p \vee p \equiv\ p$; $p \vee p = p$.

1.1.16 Tautología, Contradicción y Contingencia

Una Proposición Compuesta es una Tautología cuando es verdadera independientemente de los valores de verdad de las proposiciones simples que intervienen en ella; se la representa con los símbolos “T” o con “V”.

Una Proposición Compuesta es una Contradicción cuando es falsa independientemente de los valores de verdad de las Proposiciones Simples que intervienen en ella; se la representa con “C” o con “F”.

Una proposición compuesta es una contingencia cuando no es tautología ni contradicción.

La negación de una tautología es una contradicción y la negación de una contingencia es otra contingencia.

Si p, q son proposiciones equivalentes, entonces la proposición $p \Leftrightarrow q$ es una Tautología.

1.2 Leyes de la Lógica Proposicional

Algunos autores, toman el símbolo " $\longrightarrow$ " para una Implicación cualquiera y el símbolo " $\Longrightarrow$ " para la Implicación que es verdadera o tautológicamente verdadera.

También, toman el símbolo " $\longleftrightarrow$ " para una Doble Implicación cualquiera y el símbolo " $\Longleftrightarrow$ " para una Doble Implicación verdadera o tautológicamente verdadera y, en este caso, el símbolo " $\Longleftrightarrow$ " se lee: equivalente a.

En el Álgebra Proposicional se utilizan equivalencias, las cuales se constituyen en leyes lógicas de uso frecuente.

En lo que sigue, el símbolo " $\Longleftrightarrow$ " se lee equivalente a y es análogo al signo igual (" = ") que, en Aritmética y en Álgebra representa igualdad.

1.2.1 Involutiva

La negación de la negación de una proposición es equivalente a la misma proposición, esto es:

$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$.

1.2.2 Conmutativa

la conjunción, disyunción y disyunción excluyente de proposiciones son operaciones conmutativas.

$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$.

$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$.

$(p \veebar q) \Leftrightarrow (q \veebar p)$.

1.2.3 Idempotencia

la conjunción y la disyunción son idempotentes:

$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$.

$(p \vee p) \Leftrightarrow p$.

1.2.4 Identidad o Modulativa

Si "$\boldsymbol{T}$" es una proposición verdadera y "$\boldsymbol{C}$" es cualquier proposición falsa, entonces "$\boldsymbol{T}$" y "$\boldsymbol{C}$" actúan como elementos neutros (módulos) en la Conjunción y en la Disyunción de proposiciones, respectivamente.

$(p \wedge T) \Leftrightarrow p$.

$(p \vee C) \Leftrightarrow p$.

1.2.5 Leyes de D'Morgan

la negación de la disyunción de dos proposiciones es equivalente a la conjunción de las negaciones de estas y, la negación de la conjunción de dos proposiciones es equivalente a la disyunción de las negaciones de estas dos proposiciones; esto es:

$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$.

$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q)$.

A la negación de una disyunción se la llama Anti Disyunción, en inglés $NOT\ OR$ o simplemente NOR.

A la proposición $\sim (\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$ y a su equivalente $(\sim \boldsymbol{p} \wedge \sim \boldsymbol{q})$ se las denota por $\boldsymbol{p} \downarrow \boldsymbol{q}$.

El símbolo " $\downarrow$ " es la flecha de Pierce.

A la negación de una conjunción se la llama Anti Conjunción, en inglés $NOT\ AND$ o simplemente $NAND$.

A la proposición $\sim (\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q})$ y a su equivalente $(\sim \boldsymbol{p} \vee \sim \boldsymbol{q})$ se las denota por $\boldsymbol{p} \mid \boldsymbol{q}$.

El símbolo "|" es el trazo de Scheffer.

En la proposición $(\sim \boldsymbol{p} \wedge \sim \boldsymbol{q})$ (no p y no q) en el lenguaje común se lee: $ni\ \boldsymbol{p}\ ni\ \boldsymbol{q}$.

1.2.6 Asociativa

La Conjunción, Disyunción y Disyunción Excluyente, son Asociativas.

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$.

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

$(p \veebar q) \veebar r \Leftrightarrow p \veebar (q \veebar r)$.

1.2.7 Distributiva

La Conjunción se distribuye respecto a la Disyunción y la Disyunción se distribuye respecto a la Conjunción.

Distributiva por izquierda:

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Distributiva por derecha:

$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$.

1.2.8 Ley del Tercio Excluido

Como $\boldsymbol{p} \vee (\sim \boldsymbol{p})$ es una Tautología, se obtiene la siguiente equivalencia:

$p \vee (\sim p) \Leftrightarrow T$.

1.2.9 Leyes del Complemento

$p \vee (\sim p) \Leftrightarrow T$.

$(p \wedge \sim p) \Leftrightarrow C$.

$\sim T \Leftrightarrow C$.

$\sim C \Leftrightarrow T$.

1.2.10 Ley de la Contracción Conjuntiva o Simplificación

$p \wedge q \Rightarrow p.$

$p \wedge q \Rightarrow q.$

Una Conjunción implica tautológicamente a cualquiera de las dos proposiciones que la constituyen.

1.2.11 Ley de Silogismo Hipotético (SH)

$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r).$

De lo anterior se dice que, la Implicación cumple la Ley Transitiva.

1.2.12 Ley de Modus Ponendo Ponens (MPP)

$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q.$

Si una Implicación es verdadera y su antecedente es verdadero, entonces su consecuente es verdadero.

1.2.13 Ley de Modus Tollendo Tollones (MTT)

$[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p.$

Si una Implicación es verdadera y su consecuente es falso, entonces su antecedente es falso.

1.2.14 Ley de Modus Tollendo Ponens (MTP) o Silogismo Disyuntivo.

$[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p.$

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q.$

Si una Disyunción es verdadera y es falsa una de sus dos proposiciones que la constituyen, entonces la otra proposición es verdadera.

Nota:

Tener presente que en las leyes de los numerales 1.2.10, 1.2.11, 1.2.12, 1.2.13 y 1.2.14 el símbolo $\Rightarrow$ representa a una Implicación Tautológica.

1.2.15 Leyes de Absorción

Absorción Total:

$[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p.$

$[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p.$

Absorción Parcial:

$[p \vee (\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow p \vee q.$

$[p \wedge (\sim p \vee q)] \Leftrightarrow p \wedge q.$

1.2.16 Ley de la Adición

$p \Rightarrow (p \vee q).$

1.2.17 Ley Transitiva de la Doble Implicación (Bicondicional)

$[(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r)] \Rightarrow (p \Leftrightarrow r).$

1.2.18 Equivalencia del Bicondicional y de la negación del Bicondicional

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow \sim q).$

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \underline{\vee} q).$

$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)\ (Simetría\ de \Leftrightarrow).$

$\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \Leftrightarrow q).$

$\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \sim q).$

$\sim (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \underline{\vee} q).$

Se puede observar que:

$(\sim p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow \sim q).$

Ejemplo:

Sean las siguientes proposiciones **p** y **q**:

$\boldsymbol{p}$: $ABC\ es\ un\ triángulo\ equilátero$; $\boldsymbol{q}:\ AB = BC = AC.$

$\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q}$: $ABC\ es\ triángulo\ equilátero, si\ y\ solo\ si, AB = BC = AC.$

La proposición $\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \boldsymbol{q}$ es verdadera, pues, corresponde a la definición de triángulo equilátero.

$\sim \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \sim \boldsymbol{q}$: ABC $\boldsymbol{no}$ $es\ triángulo\ equilátero, si\ y\ solo\ si,$

$AB \neq BC\ o\ \ BC \neq AC\ o\ \ AB \neq BC.$

La proposición $\sim \boldsymbol{p} \Leftrightarrow \sim \boldsymbol{q}$ es verdadera.

$\sim \boldsymbol{p} \ \Leftrightarrow \ \ \boldsymbol{q}$: ABC $\boldsymbol{no}$ $es\ triángulo\ equilátero, si\ y\ solo\ si, AB = \ BC = AC.$

La proposición $\sim \boldsymbol{p} \ \Leftrightarrow \ \ \boldsymbol{q}$ es falsa.

$\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \sim \boldsymbol{q}$: $BC\ es\ triángulo\ equilátero, si\ y\ solo\ si, AB \neq BC\ o\ BC \neq AC\ o\ \ AB \neq BC.$

La proposición $\boldsymbol{p} \Leftrightarrow \sim \boldsymbol{q}$ es falsa.

1.2.19 Equivalencia de la Implicación y de su negación

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q).$

$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q).$

Una Implicación es equivalente con su Contra recíproca, esto es:

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p).$

1.2.20 Equivalencia de la Disyunción Excluyente y de su negación

$(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow \sim(p \Leftrightarrow q).$

$\sim (p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow q).$

$\sim (p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (\sim p \underline{\vee} q).$

$\sim (p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (p \underline{\vee} \sim q).$

$(p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (\sim p \underline{\vee} \sim q).$

Se observa que:

$(\sim p \underline{\vee} q) \Leftrightarrow (p \underline{\vee} \sim q).$

1.2.21 Implicaciones Tautológicas que incluyen Bicondicional

$[(p \Leftrightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q.$

$[(p \Leftrightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p.$

$[(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim p] \Rightarrow \sim q.$

$[(p \Leftrightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p.$

Si una doble implicación es verdadera y una de las dos proposiciones que la conforman es verdadera, entonces la otra proposición también es verdadera.

Si una Doble Implicación es verdadera y una de las dos proposiciones que la conforman es falsa, entonces la otra proposición también es falsa.

1.2.22 Implicaciones Tautológicas con Disyunción Excluyente

$[(p \veebar q) \wedge p] \Rightarrow \sim q.$

$[(p \veebar q) \wedge q] \Rightarrow \sim p.$

$[(p \veebar q) \wedge \sim p] \Rightarrow q.$

$[(p \veebar q) \wedge \sim q] \Rightarrow p.$

Si una disyunción excluyente es verdadera y una de las dos proposiciones que la conforman es verdadera, entonces la otra proposición es falsa.

Si una disyunción excluyente es verdadera y una de las dos proposiciones que la constituyen es falsa, entonces la otra proposición es verdadera.

Tanto las tautologías de los numerales 1.2.21 (p. 27) y 1.2.22 (p. 28) como sus conclusiones se deducen a partir de los valores de sus tablas de verdad.

1.2.23 Otras Tautologías y Contingencias

$(p \vee T) \Leftrightarrow T.$

$(p \wedge C) \Leftrightarrow C.$

"T" es una Tautología o cualquier proposición verdadera y "C" es una Contradicción o cualquier proposición falsa.

Las siguientes proposiciones son ejemplos de contradicciones:

p ∧ ~ p: principio de no contradicción.

$\sim [(p \wedge q) \Rightarrow p].$

$(p \wedge q) \wedge (\sim q).$

Las siguientes proposiciones son ejemplos de contingencias:

$p \wedge q$	$p \vee q$	$q \Rightarrow p$
$(q \Rightarrow p) \wedge r$	$(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r$	

Afirmaciones:

Si una de las proposiciones que constituyen una conjunción es falsa, entonces la Conjunción es falsa.

Es suficiente saber que una de las dos proposiciones que constituyen una Conjunción sea falsa, para afirmar que la Conjunción es falsa.

Es Suficiente con que una de las proposiciones que constituyen una disyunción sea verdadera, para afirmar que la disyunción es verdadera.

Si $(p \Rightarrow q)$ es verdadera y p es verdadera, entonces q es verdadera.

1.3 Funciones Proposicionales

Expresiones como: $x \in R, x \in Q, x^2 \geq 0, x + y = z, x < 5, x + y \in Q$, entre muchas otras, son Funciones Proposicionales o Proposiciones Abiertas porque el valor de verdad depende de los valores que tomen las variables; en estos ejemplos, dependen de los valores de x, y , z.

Una Proposición Abierta con una variable x se denota por $P(x)$; con dos variables x, y por $P(x, y)$; con tres variables x, y , z por $P(x, y, z)$ o también por $F(x, y, z)$.

Ejemplos:

Las siguientes expresiones constituyen proposiciones abiertas:

$P(x): x \in \mathbb{R}; R(x): x \in \mathbb{Q}; S(x, y, z): x + y = z; F(x): x < 5; P(x, y): x + y \in \mathbb{Q}$.

Cuando en una Proposición Abierta se asigna un valor a una variable, se obtiene una proposición, esto porque su asignación determina un valor de verdad.

Ejemplos:

$P(10): 10 \in \mathbb{R}$, es verdadera.

$P(\sqrt{-8}): \sqrt{-8} \in \mathbb{R}$, es falsa.

$R(0.5): 0.5 \in \mathbb{Q}$, es verdadera.

$R(\sqrt{2}): \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, es falsa.

$s(1,4,3): 1 + 4 = 3$, falsa.

$F(4): 4 < 5$, verdadera.

En muchos casos, cuando se utilizan conectivos con Proposiciones Abiertas se obtienen proposiciones, es decir, las expresiones toman un valor de verdad.

Ejemplos:

$x \geq R \to x^2 \geq 0$: proposición verdadera.

$x \in R \Longrightarrow x \in Q$: proposición falsa.

$x + y = z \Leftrightarrow x = z - y$: proposición verdadera.

$(x + y) \in Q \vee (x + y) \notin Q$: proposición verdadera.

1.4 Conjunto de Referencia

En proposiciones abiertas, el valor de verdad depende del valor específico que toman las variables en un determinado conjunto. El conjunto, cuyos elementos están representados con una o más variables se denomina Conjunto de Referencia.

En una teoría o en algunos procesos, el Conjunto de Referencia es el conjunto de contexto, llamado también Universal. Por ejemplo, en el desarrollo o estudio aritmético de los números reales, el Conjunto Universal o de Contexto es el conjunto de los números reales, representado por $\mathbb{R}$.

En la teoría abstracta o general de la Teoría de Conjunto, al Conjunto Universal se lo denota con la letra $\boldsymbol{U}$, por lo cual, cualquier conjunto que se considere en dicha teoría es un subconjunto de $\boldsymbol{U}$ y cualquier elemento de un subconjunto, es elemento de $\boldsymbol{U}$.

Cuando en una Proposición Abierta se establece un Conjunto de Referencia, esta queda más direccionada o más específica.

Ejemplo:

En la expresión $F(x): x < 5$, se sabe que se deben tomar números para obtener proposiciones, pero no se precisa en qué conjunto o qué clase de números, por lo cual, pueden ser enteros positivos, negativo, racionales, entre otros.

En cambio, en la Proposición Abierta $F(x): x < 5$, para $x \in \mathbb{N}$, sólo se deben considerar números naturales.

1.4.1 Conjunto Solución

El conjunto del cual se obtienen proposiciones verdaderas para una Proposición Abierta, se denomina Conjunto Solución de la Proposición Abierta. El Conjunto Solución es un subconjunto del conjunto de referencia.

Ejemplos:

El Conjunto Solución de la proposición abierta: $x < 5$, para $x \in \mathbb{N}$, es $S = \{1,2,3,4\} \subset \mathbb{N}$.

El Conjunto Solución de: $x^2 \geq 0$, para $x \in \mathbb{R}$, es $\mathbb{R}$; es decir, es el mismo Conjunto de Referencia.

Cuando el conjunto solución es igual al conjunto de referencia, se dice que la proposición es universalmente verdadera.

1.4.2 Producto Cartesiano

Sean los conjuntos A y B.

El Producto Cartesiano de A con B se denota por $A \times B$ y se define así.

$A \times B = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in B\}$, donde (x, y) es un par ordenado.

De la definición, se tiene lo siguiente:

$(x, y) \in A \times B \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in B$.

$(x, y) \notin A \times B \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin B$.

Ejemplo:

Sean los conjuntos $A = \{1,3,-5\}$ y $B = \{-1,2,5\}$.

$A \times B = \{(1,-1), (1,2), (1,5), (3,-1), (3,2), (3,5), (-5,-1), (-5,2), (-5,5)\}$

En general, si A tiene n elementos y B tiene m elementos, entonces $A \times B$ tiene $n \times m$ elementos.

En una proposición con dos variables x, y, la una puede representar elementos de un conjunto y la otra a elementos de otro conjunto.

Ejemplo:

El Conjunto Solución de la proposición $P(x, y)$: $x + y = 0$, para $x \in A \wedge y \in B$, es:

$S = \{(1,-1); (-5,5)\}$, el cual es subconjunto de $A \times B$.

Nota:

Cuando $A = B$, el Producto Cartesiano de A y B se define como sigue:

$A \times A = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in A\}$.

El producto $A \times A$ se lo puede denotar como A^2.

Según lo anterior:

$(x, y) \in A^2 \Leftrightarrow x \in A \wedge y \in A$.

$(x, y) \notin A^2 \Leftrightarrow x \notin A \vee y \notin A$.

La proposición $x \in A \wedge y \in A$, se la abrevia así: $x, y \in A$.

La forma extendida de la proposición $x, y \notin A$, es la siguiente: $x \notin A \wedge y \notin A$.

1.4.3 Ejercicios

Analizar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

1. $x \notin A \wedge y \in A \longrightarrow (x, y) \notin A^2$
2. $x \in A \wedge y \notin A \longrightarrow (x, y) \notin A^2$
3. $(x, y) \notin A^2 \longrightarrow x \notin A \wedge y \in A$
4. $(x, y) \notin A^2 \longrightarrow x \in A \wedge y \notin A$
5. $x \notin A \wedge y \in A \longleftrightarrow (x, y) \notin A^2$
6. $x \in A \wedge y \notin A \longleftrightarrow (x, y) \notin A^2$
7. $x \notin A \wedge y \in B \longrightarrow (x, y) \notin A \times B$
8. $x \in A \wedge y \notin B \longrightarrow (x, y) \notin A \times B$
9. $(x, y) \notin A \times B \longrightarrow x \notin A \wedge y \in B$
10. $(x, y) \notin A \times B \longrightarrow x \in A \wedge y \notin B$
11. $(x, y) \notin A \times B \longleftrightarrow x \notin A \wedge y \in B$
12. $(x, y) \notin A \times B \longleftrightarrow x \in A \wedge y \notin B$

1.5 Cuantificadores

Una manera para obtener proposiciones a partir de Funciones Lógicas o Proposiciones Abiertas, es utilizar Cuantificadores y Conjuntos de Referencia.

1.5.1 Cuantificador Universal

Palabras como cualquier(a), los, las, se utilizan para generalizar una afirmación y, para la forma simbólica se usa el símbolo $\forall$, el cual se lee así: para todo(a), para cada, todo(a), cualquier, cualquiera u otra expresión que indique generalidad o totalidad.

Si $P(x), F(x, y)$ son Proposiciones Abiertas, la forma simbólica de una proposición general, es:

$\forall x, P(x)$.

$\forall x, F(x, y)$.

$\forall x \in A: P(x)$.

$\forall x, y \in A: P(x, y)$.

$\forall (x, y) \in A^2: P(x, y)$.

$\forall (x, y) \in A \times B: P(x, y)$.

También, así:

$P(x), \forall x \in A$.

$P(x, y), \forall x, y \in A$.

$P(x, y), \forall (x, y) \in A^2$.

$P(x, y), \forall (x, y) \in A \times B$.

Ejemplos:

Cuadro 5, contiene varios casos donde se aplica el cuantificador universal.

Cuadro 5.

Ejemplos sobre el uso de cuantificador universal

La proposición $\forall x \in A: P(x)$, se la puede expresar en términos de Implicación, así:

$x \in A \longrightarrow P(x)$.

De igual manera: $\forall x, y \in A: P(x, y)$ es equivalente a la Implicación: $x, y \in A \longrightarrow P(x, y)$.

$\forall (x, y) \in A^2: P(x, y)$ es equivalente a la Implicación: $(x, y) \in A^2 \longrightarrow P(x, y)$.

Ejemplos:

Expresar en términos de Implicaciones las siguientes proposiciones:

$\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0; \forall x \in A: x \in \mathbb{N};\ \forall x, y \in \mathbb{Z}: x + y \in \mathbb{Z}$.

Se obtiene las siguientes implicaciones:

$x \in R \longrightarrow x^2 \geq 0$.

$x \in A \longrightarrow x \in N$.

$x, y\ \in \mathbb{Z} \longrightarrow x + y \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto:

$(\forall x \in \mathbb{R}: x^2 \geq 0) \leftrightarrow (x \in \mathbb{R} \longrightarrow x^2 \geq 0)$.

$(\forall x \in A: x \in \mathbb{N}) \leftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in \mathbb{N})$.

$(\forall x, y \in \mathbb{Z}: x + y \in \mathbb{Z}) \leftrightarrow (x, y\ \in \mathbb{Z} \longrightarrow x + y \in \mathbb{Z})$.

1.5.2 Cuantificador Existencial, Existencia y Unicidad

El símbolo del Cuantificador Existencial es ∃, el cual se lee, existe un, una, hay, para por lo menos un, una, algún, alguna; existen o cualquier otra expresión que indique existencia de elementos.

El símbolo ∃! se lee: existe un único o existe un solo; hay un solo o cualquier otra expresión que indique existencia de un solo elemento.

Las estructuras del Cuantificador Existencial, son las siguientes:

$\exists x \in A / P(x)$.

$\exists x, y \in A / P(x, y)$.

$\exists (x, y) \in A^2 / P(x, y)$.

$\exists (x, y) \in A \times B / P(x, y)$.

La barra “/” se lee: tal que o tales que.

Ejemplos:

El Cuadro 6, contiene varios ejemplos que muestran la aplicación del cuantificador existencial.

Cuadro 6.
Ejemplos sobre el uso de cuantificador existencial

Existe un número entero tal que su cuadrado es igual a 20	$\exists x \in \mathbb{Z}/x^2 = 0$
El cubo de algún número real es igual a -10	$\exists x \in \mathbb{R}/x^3 = -10$
Hay elementos de A que son elementos de B	$\exists x \in A\ /x\ \in\ B$
La diferencia de un par de números naturales es igual a 2	$\exists x, y\ \in \mathbb{N}/x - y = 2$
La suma de algún par de números naturales es igual a – 3	$\exists (x, y)\ \in \mathbb{N}^2/x + y = -3$
Algunos elementos de B, son elementos de A	$\exists x \in\ B/x\ \in\ A$
Hay elementos de A que pertenecen a B y elementos de B que son elementos de A	$\exists x \in A\ /x \in B \wedge \exists x \in\ B/x \in A$
Existe un número del conjunto A tal que, si su cuadrado es igual a dos, entonces el número pertenece a B	$\exists x \in A/\ x^2 = 2 \longrightarrow x \in\ B$
Para cada elemento de A, existe un elemento de B, tales que la suma de éstos, es igual a cero	$\forall x \in A: \exists y \in B/x + y = 0$
Existe un único número entero que elevado al cuadrado es igual a 9	$\exists!\, x \in \mathbb{Z}/x^2 = 9$
El cuadrado de un único número entero es igual a 9	$\exists!\, x \in \mathbb{Z}/x^2 = 9$

1.5.3 Negación de Proposiciones Cuantificadas

$\sim[\forall x \in A: P(x)]$ es equivalente a la proposición: $\exists x \in A/\sim P(x)$; esto es:

$\sim[\forall x \in A: P(x)] \Leftrightarrow \exists x \in A/\sim P(x)$.

$\sim[\exists x \in A/P(x)]$ es equivalente a la proposición: $\forall x \in A: \sim P(x)$; es decir,

$\sim[\forall x \in A: P(x)] \Leftrightarrow \exists x \in A/\sim P(x)$.

Las anteriores equivalencias son Leyes de D'Morgan.

Ejemplos:

El Cuadro 7 contiene varios ejemplos que muestran la aplicación de la negación de los cuantificadores universal y existencial.

La negación de la proposición $\exists x \in A/P(x)$, también se la puede expresar así: $\nexists x \in A / P(x)$. Claro que, en este caso, no se está aplicando la Ley de D'Morgan.

Una proposición $\exists!\, x \in A/P(x)$ puede ser falsa, si no existe ni un solo elemento a de A, para el cual $P(a)$ sea verdadera, o porque existen al menos dos elementos a y b de A, para los cuales $P(a)$ y $P(b)$ son verdaderas.

Tal es el caso de la proposición $\exists!\, x \in \mathbb{Z}/x^2 = 9$, la cual es falsa, porque existen dos números enteros que cumplen la proposición $x^2 = 9$, que son el 3 y el -3.

Cuadro 7.
Ejemplos de negación de proposiciones cuantificadas

Proposición	Negación
1. Todos los estudiantes son mayores de edad	a) Algún estudiante no es mayor de edad b) Hay estudiantes que no son mayores de edad
2. Todos los números reales, son números racionales	a) Algunos números reales, no son números racionales b) Hay números reales, que no son números racionales
3. $\exists x \in Z/x^2 = 20$	$\forall x \in Z/x^2 \neq 20$
4. $\exists x \in A\ /x\ \in\ B$	$\forall x \in A\ /x \notin B$
5. $\exists(x, y) \in \mathbb{N}^2/x + y =-3$	$\forall(x, y) \in \mathbb{N}^2: x + y \neq -3$
6. $\forall x \in \mathbb{Z}: \exists e \in \mathbb{Z}/x + e = 0$	$\exists x \in \mathbb{Z}/\forall e \in \mathbb{Z}/x + e \neq 0$
7. Existe un número real, tal que elevado al cubo, es igual a -8	No existe un número real, tal que, elevado al cubo, sea igual a -8.

Con las tablas de verdad se puede demostrar o comprobar si una proposición es una Tautología, Contingencia o una Contradicción. Pero en cierta forma, es un proceso “mecánico”, aunque ayuda a reafirmar los valores de verdad de una Conjunción, Disyunción, Disyunción Excluyente, Implicación y Doble Implicación. Las tablas de verdad también contribuyen a la identificación de la proposición en cuestión.

Otra manera de demostrar o de comprobar proposiciones es mediante procesos deductivos y utilizando leyes lógicas. Estos procesos contribuyen a desarrollar la capacidad para deducir, analizar y comprender mejor el sentido y utilidad de estas leyes. Esto es, lo que se realizará en la sección donde se tratan los métodos de demostración.

Vale decir que, una ley lógica se puede comprobar mediante la aplicación de otras leyes.

CAPÍTULO 2
Elementos de Conjuntos

CAPÍTULO 2
ELEMENTOS DE CONJUNTOS

2.1 Definiciones

2.1.1 Conjunto

Un Conjunto es una “agrupación”, “colección”, “reunión”, “grupo” de objetos llamados elementos del Conjunto.

Para denotar o representar conjuntos se utilizan letras mayúsculas, tales como A, B, C, D, X, Y, Z; por su parte, para representar los elementos de un conjunto se utilizan letras minúsculas, tales como: x, y, z, u, v; por lo cual, también se las denomina variables.

Para indicar que x representa a los elementos de un conjunto A, se expresa así: $x \in A$, y se lee: x pertenece a A, o también x es un elemento de A.

En la expresión $x \notin \mathrm{A}$ se lee: x no es elemento de A o x no pertenece al conjunto A; esto es, la proposición $x \notin A$ es la negación de la proposición $x \in A$.

2.1.2 Correspondencia entre conjuntos y proposiciones

A un conjunto M se le asocia, se le asigna o le corresponde la proposición $x \in M$, lo cual se expresa así: $M \leftrightarrow x \in M$. De aquí se sigue que:

$A \leftrightarrow x \in A$; $B \leftrightarrow x \in B$; $C \leftrightarrow x \in C$.

2.1.3 Expresiones de un conjunto

Un conjunto está expresado en forma extensiva cuando entre llaves se listan todos sus elementos o parte de ellos que identifican, definen o representan a todo el conjunto.

Ejemplos:

Los siguientes conjuntos están expresados en forma extensiva:

$A = \{2, 8, 20, 30, 45, 3\}$.

Si N es el conjunto de los números naturales, entonces $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots\}$. Se puede observar que:

$2 \in A;\ 45 \in A;\ 3 \in A;\ 5 \notin A;\ 1 \in N;\ 8 \in N;\ 200 \in N; -2 \notin N$.

Un conjunto está expresado en forma comprensiva cuando sus elementos están representados mediante una o más variables que cumplen una determinada condición o proposición abierta.

Por ejemplo:

$$S = \{x/P(x)\};\ S = \{x \in A/P(x)\};\ S = \{(x, y) \in A \times B/P(x, y)\};\ S = \{x \in A^2/P(x)\}.$$

Según lo anterior:

$x \in S, si\ y\ solo\ sí, P(x)$.

$x \in S, si\ y\ solo\ sí, x \in A$ y $P(x)$.

$(x, y) \in S\ si\ y\ solo\ sí, (x, y) \in A \times B$ y $P(x, y)$.

En cada caso, S es el conjunto solución de la proposición abierta $P(x)$ o $P(x, y)$ considerando el conjunto de referencia.

Los siguientes conjuntos están expresados en forma comprensiva:

$M = \{x/x \in A \vee x \in B\}$.

$N = \{x/x \in A \wedge x \in B\}$.

$C = \{x \in \mathbb{N}/x < 10\}$.

El conjunto C en forma Extensiva, se expresa así:

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

El conjunto C, corresponde al conjunto solución de la siguiente Proposición Abierta: $x < 10$, donde, $x \in \mathbb{N}$.

2.1.4 Inclusión de Conjuntos y Subconjuntos

Para indicar Inclusión de Conjuntos o Subconjuntos se utiliza el siguiente símbolo " $\subset$ ".

Para dos conjuntos A, B, en la expresión $A \subset B$, se lee: A es subconjunto de B; A está contenido en B; A esta incluido en B; o también B contiene a A.

A es subconjunto de B, sí y solo sí, todos los elementos de A son elementos de B.

En forma simbólica, se representa así:

$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A{:}\, x \in B)$, o también: $A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \longrightarrow x \in B)$

Según la última expresión, al símbolo de la Inclusión " $\subset$ " le corresponde el símbolo de la Implicación " $\longrightarrow$ ".

Ejemplos:

Sean los conjuntos: $A = \{2, 4, 5, 6, 10, 12\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 16\}$. Se observa que:

$\{2, 4, 5, 6, 10, 12\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 16\}$; es decir, $A \subset B$.

Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

Los siguientes conjuntos son subconjuntos de A:

$B = \{a, b, c, d\}$; $C = \{a\}$; $D = \{a, b\}$; $E = \{a, b, d\}$; $F = \{b, c, d\}$.

2.1.5 Propiedades de Inclusión de Conjuntos

Reflexiva: todo conjunto es subconjunto de sí mismo, es decir, $A \subset A$.

Transitiva: Si $A \subset B \wedge B \subset C$, entonces, $A \subset C$.

Nota:

En algunos textos se utiliza el símbolo $\subset$, para indicar Subconjunto Propio y lo realizan la siguiente definición:

A es Subconjunto Propio de B ($A \subset B$) sí y solo sí, todos los elementos de A son elementos de B y existe al menos un elemento de B que no es elemento de A.

En este texto, para definir la inclusión de conjuntos, se utiliza el símbolo " $\subseteq$ ".

Por tanto, A es Subconjunto de B ($A \subseteq B$) sí y solo sí, para todo $x \in A$: $x \in B$.

2.1.6 Clasificación de conjuntos

Conjunto vacío: es el conjunto que no tiene elementos; se lo representa con la letra "∅".

El conjunto vacío es subconjunto de cualquier conjunto; esto es, si A es cualquier conjunto, entonces, $\emptyset \subset A$.

Son ejemplos de conjuntos vacíos, los siguientes:

$\{x \in \mathbb{N}/x < 0\}$.

$\{x \in \mathbb{N}/x < 20 \wedge x > 20\}$.

$\{x/P(x) \wedge \sim P(x)\}$.

Conjunto unitario: es todo conjunto constituido por un solo elemento.

Son ejemplos de conjuntos unitarios, los siguientes:

$\{30\}$; $\{m\}$; $\{44\}$; $\{222\}$.

Conjunto universal: es el conjunto que se toma como referencia en el desarrollo de algunos procesos, en el estudio de alguna teoría o de algún tema específico.

Por ejemplo, en el desarrollo de la teoría de números naturales, el conjunto universal o de referencia, es el conjunto $\mathbb{N}$; de modo que, cualquier conjunto que se considere dentro de esta teoría, es Subconjunto de $\mathbb{N}$.

En el estudio "abstracto" (o en general) de la teoría de conjuntos, el conjunto universal se suele representar con $\boldsymbol{U}$, por lo cual, cualquier conjunto que se tome dentro de esta teoría es Subconjunto de $\boldsymbol{U}$.

2.1.7 Partes de un conjunto

Sea A un Conjunto Arbitrario; la expresión $\boldsymbol{P}(A)$ se lee partes de A y representa el conjunto de todos los subconjuntos de A. Simbólicamente, se define así:

$\boldsymbol{P}(A) = \{X/X \subset A\}$.

De modo que: $X \in \boldsymbol{P}(A)$ sí y solo sí, $X \subset A$.

Ejemplo:

Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$.

Todos los subconjuntos de A son:

$\{a\}$; $\{b\}$; $\{ c\}$; $\{a, b\}$; $\{a, c\}$; $\{ b, c\}$; $\{a, b, c\} = A$ y $\emptyset$.

Entonces:

$\boldsymbol{P}(A) = \{\{a\};\ \{b\};\ \{ c\};\ \{a, b\};\ \{a, c\}, \{ b, c\}, A, \emptyset \}$.

El conjunto A tiene tres (3) elementos, por lo cual, P(A) tiene $2^3 = 8$ elementos o subconjuntos de A.

En general, si un conjunto A tiene n elementos, entonces, hay 2^n subconjuntos de A y en consecuencia, $P(A)$ tiene 2^n elementos.

En la teoría de conjuntos, si A, B, C, D son conjuntos, entonces $A, B, C, D \in \boldsymbol{P}\ (\boldsymbol{U})$.

2.2 Igualdad de Conjuntos

Definición.

$A = B, si\ y\ solo\ si, para\ todo\ x \in A: x \in B \wedge\ para\ todo\ x \in B: x \in A$.

Otras formas para definir la igualdad, son las siguientes:

$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$.

$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Rightarrow x \in A)$.

Finalmente, de la última expresión, se obtiene que:

$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

2.2.1 Correspondencia de la Igualdad

Según la última expresión y teniendo en cuenta que, $A \leftrightarrow x \in A$, $B \leftrightarrow x \in B$, entonces, al símbolo " = " de Igualdad de Conjuntos, le corresponde el símbolo de la equivalencia " $\Leftrightarrow$ " de proposiciones.

Esta correspondencia se indica así: $= \leftrightarrow \Leftrightarrow$.

Para demostrar que dos conjuntos M y N son iguales, se debe demostrar la siguiente proposición: $x \in M \Leftrightarrow x \in N$.

Según la definición, dos conjuntos son iguales cuando todos los elementos de un conjunto pertenecen al otro.

Ejemplo:

$\{2,7,9\} = \{2,9,7\} = \{9,7,2\}$.

$\{1,4,5,1,5,2\} = \{1,2,4,5\} = \{5,4,2,1\}$.

$\{4,4\} = \{4\}$.

$\{2,2,2\} = \{2\}$.

Los conjuntos que siguen, son Unitarios: $\{4,4\}$; $\{2,2,2\}$.

Nota:

Para el caso de conjuntos expresados en forma extensiva, no importa el orden en que se listen sus elementos; además, los elementos repetidos se pueden escribir una sola vez.

El conjunto $\{4,8,8,4\}$ tiene dos elementos, 4 y 8.

2.2.2 Propiedades de la Igualdad de Conjuntos

Reflexiva: todo conjunto es igual a sí mismo, es decir, $A = A$.

Simétrica: Si $A = B$, entonces, $B = A$.

Transitiva: Si $A = B \wedge B = C$, entonces: $A = C$.

2.3 Operaciones entre Conjuntos

Para todo $A, B, C \in \boldsymbol{P}(\boldsymbol{U})$, se define:

Unión: $A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$.

Intersección: $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$.

Diferencia: $A – B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\}$.

Diferencia Simétrica: $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$.

Según lo anterior:

$x \in (A \cup B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

$x \in (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$.

$x \in (A - B) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$.

$x \in (A \triangle B) \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$.

2.3.1 Correspondencias entre Operadores de Conjuntos y Operadores Lógicos

Según las cuatro últimas expresiones, se obtienen las siguientes correspondencias:

$\cup \leftrightarrow \vee$.

$\cap \leftrightarrow \wedge$.

$\triangle \leftrightarrow \underline{\vee}$.

$- \leftrightarrow \sim \longrightarrow$ (negación de una Implicación).

La cuarta expresión se la obtendrá más adelante.

2.3.2 Propiedades y expresiones particulares

1. $A \cup A = A$.
2. $A \cap A = A$.
3. $A \cup B = B \cup A$.
4. $A \cap B = B \cap A$.
5. $A \cup \emptyset = A;\ A \cap U = A$.
6. $A \cap \emptyset = \emptyset; U \cup U = U$.
7. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.
8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.
9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
10. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Según las propiedades 1 y 2, se dice que la unión y la intersección son idempotentes.

Según 3 y 4, la unión y la intersección son conmutativas.

Según 5, la unión e intersección, son modulativas. Los conjuntos $\emptyset, U$ son los respectivos módulos o elementos neutros.

De 7 y 8, se afirma, que la unión e intersección son asociativas.

En 9 y 10, se afirma que: la intersección se distribuye respecto a la unión y la unión se distribuye respecto a la intersección.

Nota 1:

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, se efectúan las siguientes afirmaciones:

La unión de los Conjuntos A con B está constituida por todos los elementos de A y todos los de B. Si hay elementos comunes se los escribe una sola vez.

La intersección de A con B está constituida por todos los elementos que están tanto en A como en B, es decir, por los elementos comunes.

$A - B$ es constituido por todos los elementos que están en A (primer conjunto) pero que no estén en B (segundo conjunto).

De igual manera, $B - A$ es constituido por todos los elementos que estén en B pero que no estén en A.

$A \triangle B$ es constituido por todos los elementos que estén en A pero que no estén en B, junto con todos los elementos que estén B pero que no estén en A.

Nota 2:

Si $A \cap B = \emptyset$, se afirma que A y B son conjuntos Disjuntos o Disyuntos.

Nota 3:

Si $A \subset B$, entonces:

$A \cup B = B$.

$A \cap B = A$.

$A - B = \emptyset$.

$A \triangle B = B - A$.

Ejemplos:

Para $A = \{5, 7, 8, 10, 12, 15, 20, 30, 50\}$; $B = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 12, 14, 15, 18\}$, se tiene:

$A \cup B = \{2,4,5,6,7,8,9,12,14,15,18,20,30,50\}$.

$A \cap B = \{5,7,12,15\}$.

$A - B = \{8,10,20,30,50\}$.

$B - A = \{2,4,6,9,14,18\}$.

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A) = \{2,4,6,8,9,14,18,20,30,50\}$.

También se puede observar que:

$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$= $\{2,4,5,6,7,8,9,12,14,15,18,20,30,50\} - \{5,7,12,15\}$.

$A \triangle B = \{2,4,6,8,9,14,18,20,30,50\}$.

Como ejemplos de demostraciones en Teoría de Conjuntos se demuestran las siguientes igualdades:

1. $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

2. $A \cap (A \cup B) = A$.

3. $A \cup (A \cap B) = A$.

En el proceso, se aplican las definiciones establecidas en operaciones con conjuntos, las leyes lógicas establecidas en la unidad Álgebra Proposicional. Una Tautología o proposición verdadera, se la denota con la letra "$\boldsymbol{T}$" y una proposición falsa o Contradicción se la denota con la letra "$\boldsymbol{C}$".

2.3.3 Complemento de un conjunto

Si $A \subset B$, entonces el complemento de A respecto a B, se indica así: C_B^A

$C_B^A = \{x/x \in B \wedge x \notin A\}$.

De la definición, se deduce que:

$C_B^A = B - A$.

De modo que, C_B^A está constituido por todos los elementos que le faltan al conjunto A para ser igual al conjunto B.

2.3.4 Complemento respecto al conjunto universal

Vale recordar que, si $\boldsymbol{U}$ es el Conjunto de Referencia (Universal) en una determinada teoría, por ejemplo, en la Teoría de Conjuntos, entonces, cuando se considera n los conjuntos $A, B, C, D, \cdots$; todos son subconjuntos de $\boldsymbol{U}$.

En este caso, el conjunto C_U^A se indica por A'.

Luego, $C_U^A = \boldsymbol{U} - A = A'$.

Además, $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$ o también, $x \in A \Leftrightarrow x \notin A'$.

Esto es, si un elemento está en un conjunto, dicho elemento no está en el complemento del conjunto; y si un elemento no está en un conjunto, dicho elemento está en el complemento del conjunto.

Otras notaciones para C_U^A son A^c y$\overline{A}$.

2.4 Propiedades y Casos Especiales

Leyes de D'Morgan:

$(A \cup B)' = A' \cap B'$.

$(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Ley Involutiva:

$(A')' = A$.

Leyes de Complemento:

$A \cup A' = \boldsymbol{U}$.

$A \cap A' = \emptyset$.

$\boldsymbol{U}' = \emptyset$.

$\emptyset' = \boldsymbol{U}$.

Ejemplos:

Sean los siguientes conjuntos, A y B:

$A = \{5, 9, 10, 12, 40, 50 ,80\}$.

$B = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 30, 40, 50, 60, 70, 80\}$.

Como $A \subset B$, entonces $C_B^A = \{2, 3, 6, 8, 11, \ 15, 30, 60, 70\} = B - A$.

Sea el Conjunto de Referencia: $\boldsymbol{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 12, 14, 15\}$ y los conjuntos A, B y C, definidos como sigue:

$A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$; $C = \{1, 4, 7, 10, 12, 15\}$.

Los respectivos complementos de estos conjuntos, son los siguientes:

$A' = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$.

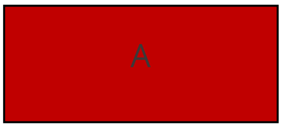
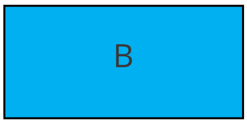
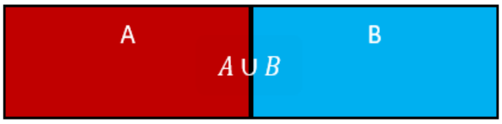
$B' = \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

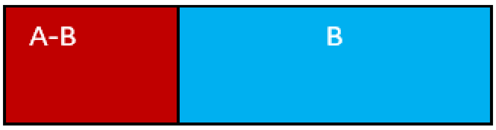
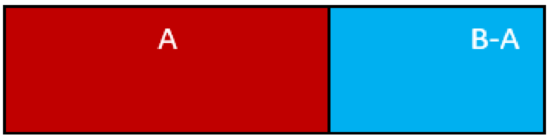
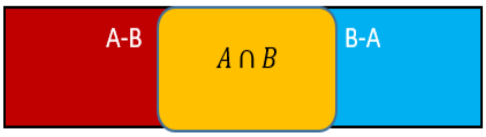
$C' = \{2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 13, 14\}$.

2.4.1 Diagramas de Venn

En el Cuadro 8, se representan los diagramas de Venn de dos conjuntos A y B, y las operaciones de unión, intersección, diferencia y diferencia simétrica entre ellos.

Cuadro 8
Ejemplos de diagramas de Venn

		
A	B	$\boldsymbol{A \cup B}$

	
$\boldsymbol{A - B}$	$\boldsymbol{B - A}$
	
$\boldsymbol{A \cap B}$	$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

2.4.2 Correspondencia entre Álgebra Proposicional y Teoría de Conjuntos

El Cuadro 9, presenta la correspondencia entre álgebra proposicional y teoría de conjuntos.

Cuadro 9.
Correspondencia entre Álgebra Proposicional y Teoría de Conjuntos

Teoría de Conjuntos	Álgebra Proposicional
Conjunto A	Proposición $x \in A$
Conjunto Universal U	$\boldsymbol{T}$ (Tautología o Proposición Verdadera: $x \in U$)
Conjunto Vacío $\emptyset$	C (Contradicción o Proposición Falsa: $x \in \emptyset$)
Inclusión $\subset$	Implicación $\rightarrow$
Igualdad $=$	Equivalencia $\Leftrightarrow$
Unión $\cup$	Disyunción $\vee$
Intersección $\cap$	Conjunción $\wedge$
Diferencia $-$	Negación de Implicación $\sim(\longrightarrow)$
Diferencia Simétrica $\triangle$	Disyunción Excluyente $\underline{\vee}$
Complemento A'	Negación $\sim$
2^n número de subconjuntos de un conjunto con n elementos	2^n número de combinaciones de valores de verdad para n Proposiciones Simples

A continuación, se presentan correspondencias entre expresiones con conjuntos y expresiones con proposiciones: el símbolo $\leftrightarrow$ no le lee sí y solo sí, y se lo utiliza para relacionar o hacer corresponder expresiones; las proposiciones son verdadera o Tautologías y la mayoría de ellas tienen nombre propio.

Las proposiciones $x \in A$, $x \in B$, $x \in C$, respectivamente, se representan por $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$. Así pues, al conjunto A, le corresponde la proposición $\boldsymbol{p}$, a B le corresponde $\boldsymbol{q}$ y a C le corresponde $\boldsymbol{r}$.

Ejemplo:

A la expresión $\mathrm{A} \subset A$ le corresponde $\boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{p}$, lo cual se indica así: $A \subset A \leftrightarrow p \longrightarrow p$.

$Si\ A \subset B \wedge B \subset C, entonces\text{:}\ A \subset C \leftrightarrow Si\ p \rightarrow q \wedge q \rightarrow r, entonces\text{:}\ p \rightarrow r.$

$Si\ A = B \wedge B = C, entonces\text{:}\ A = C \leftrightarrow\ Si\ p \Leftrightarrow q \wedge q \Leftrightarrow r, entonces\text{:}\ p \Leftrightarrow r.$

$Si\ A = B, entonces, B = A\ \leftrightarrow\ Si\ (p\ \ \Leftrightarrow\ \ q), entonces\ (q\ \ \Leftrightarrow\ \ p).$

$A = B \leftrightarrow (p \Leftrightarrow q).$

$A = A \leftrightarrow (p \Leftrightarrow p).$

$A \cup B \leftrightarrow p \vee q.$

$A \cap B \leftrightarrow p \wedge q.$

$A \triangle B \leftrightarrow p \underline{\vee} q.$

$A\text{–}B \leftrightarrow p \wedge \sim q.$

$A\text{–}B \leftrightarrow \sim(p \longrightarrow q).$

$B\text{–}A \leftrightarrow \sim(q \longrightarrow p).$

$A \cup A = A \leftrightarrow (p \vee p) \Leftrightarrow p.$

$A \cap A = A \leftrightarrow (p \wedge p) \Leftrightarrow p.$

$A \cup \emptyset = A \leftrightarrow (p \vee \boldsymbol{C}) \Leftrightarrow p.$

$A \cup B = B \cup A \leftrightarrow (p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p).$

$A \cap B = B \cap A \leftrightarrow (p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p).$

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \leftrightarrow p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r.$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r.$

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \leftrightarrow p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r).$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \leftrightarrow p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r).$

$(A \cup B)' = (A'\text{Ç}B') \leftrightarrow \sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q).$

$(A \cap B)' = (A' \cup B') \leftrightarrow \sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q).$

$(A')' = A \leftrightarrow \sim(\sim p) \Leftrightarrow p.$

$A \cup A' = U \leftrightarrow (p \vee \sim p) \Leftrightarrow T.$

$A \cap A' = f \leftrightarrow (p \wedge \sim p) \Leftrightarrow C.$

$U' = \emptyset \leftrightarrow \sim T \Leftrightarrow C.$

$\emptyset' = U \leftrightarrow \sim C \Leftrightarrow T.$

Para demostrar una expresión o una propiedad utilizando conjuntos, se aplica la misma propiedad con proposiciones. Por ejemplo, para demostrar que la Unión se distribuye con respecto a la Intersección, se aplica la Propiedad Distributiva de Disyunción, con respecto a la Conjunción.

2.5 Ejercicios

1. Expresar cada conjunto en forma extensiva:

$A = \{x \in N / x < 5\}$.

$B = \{x \in Z / -3 < x \wedge x < 2\}$.

$C = \{x \in Z / x^2 = 4 \vee x^2 = 25 \vee x^2 = 81\}$.

$D = \{x \in Z / x^2 = 5 \vee x^2 = 10\}$.

$A \cup B; A \cap B; A - B; B - A; A \triangle B; C \cup D; C \cup D$.

2. Obtener el conjunto complemento, respecto al conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ (Referencia Universal) de cada de los siguientes conjuntos:

$\mathbb{Z}^*, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_i, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^-, E = \{x \in Z / x \leq -3 \wedge 2 < x\};\ F = \{0\}$.

donde:

$\mathbb{Z} = \{\cdots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$.

$\mathbb{Z}^* = \{\cdots, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots\} = \mathbb{Z} - \{0]$.

$\mathbb{Z}_p = \{\cdots, -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, \cdots\}$.

$\mathbb{Z}_i = \{\cdots, -11, -9, -7, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots\}$

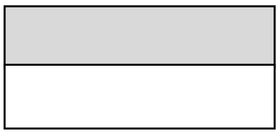
$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, \cdots\}$

$\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, -14, \cdots\}$

3. Sean el Conjunto Universal U y los Subconjuntos A y B. Las regiones sombreadas, representan los respectivos conjuntos.

U

A



B

Debajo de cada diagrama que sigue, sombrear los conjuntos que se indican:

$\boldsymbol{A \cup B}$	$\boldsymbol{A \cap B}$	$\boldsymbol{A - B}$	$\boldsymbol{A \triangle B}$
A'	B'	$(A \cup B)'$	$(A \cap B)'$
$(A - B)'$	$(B - A)'$	$(A \triangle B)'$	$A' \cup B'$

4. A los conjuntos A, B, C respectivamente se asignan las proposiciones: $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}$. Con base en lo anterior, asignar a cada expresión con conjuntos la correspondiente e “inmediata” proposición, y a cada proposición, la correspondiente expresión con conjuntos.

AË$B \leftrightarrow$ ___________

$(p \longrightarrow q) \leftrightarrow$ ___________

$A – B \leftrightarrow$ ___________

$A' \triangle B \leftrightarrow$ ___________

$p{\sim}({\sim}p) \leftrightarrow$ ___________

$(B \cup C)' \leftrightarrow$ ___________

$(p \Leftrightarrow q) \leftrightarrow$ ___________

$B' \leftrightarrow$ ___________

${\sim}[{\sim}(q \underline{\vee} r)] \leftrightarrow$ ___________

$[(A = B) \wedge (B = C)] \Leftrightarrow (A = C) \leftrightarrow$ ____________

$A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B) \leftrightarrow$ ____________

$A \cap (A \cup B) = A \leftrightarrow$ ____________

$A \cup (A \cap B) = A \leftrightarrow$ ____________

$A \cap \emptyset = \emptyset \leftrightarrow$ ____________

$A' \triangle A = \emptyset \leftrightarrow$ ____________

CAPÍTULO 3

Aspectos Generales en una Teoría Matemática

CAPÍTULO 3
ASPECTOS GENERALES EN UNA TEORÍA MATEMÁTICA

Las partes fundamentales de una Teoría Axiomática, como lo es una teoría matemática, son las siguientes: los Términos No Definidos o Términos Primitivos, los Axiomas y/o Postulados, los Términos Definidos o Definiciones, los Teoremas, los Lemas y los Corolarios.

3.1 Términos No Definidos

Los términos no definidos, son los primeros elementos, palabras y expresiones a partir de los cuales, junto con los Axiomas y Postulados, inicia una Teoría Axiomática. Muchos de estos términos se los concibe en forma intuitiva o por uso frecuente en el lenguaje común. A partir de estos, empieza la abstracción matemática pero dan "vía libre" para la obtención de otros elementos o entes matemáticos, evitando de esta forma, caer en un círculo cuando se trata de establecer o definir otros términos.

Por ejemplo, en Geométrica Euclidiana, entes matemáticos como punto, recta, la palabra "entre", son ejemplos de términos primitivos. En Aritmética, la palabra "número" puede considerarse como término primitivo.

3.2 Definiciones

3.2.1 Axioma

Un Axioma es una afirmación evidente, es decir, que su verdad es incuestionable, irrefutable, indiscutible, por lo tanto, no necesita demostración.

3.2.2 Postulado

Un Postulado es una afirmación que no es evidente pero que se acepta como verdadera porque es necesaria como soporte para otros razonamientos; los postulados no requieren demostración.

Para algunos autores, un Axioma es lo mismo que un postulado; en cualquier caso, son proposiciones verdaderas.

3.2.3 Sobre las definiciones

En matemáticas, una definición es una proposición que se establece para definir (delimitar) un objeto o ente matemático, por tal razón, es una proposición verdadera y no tiene sentido afirmar que una definición sea falsa. En general, en Matemáticas, una definición se establece mediante una proposición $P \Leftrightarrow Q$ y por definición, es verdadera.

La proposición P expresa aquello que se define y en la proposición Q se estable la condición o condiciones que se deben cumplir.

Como $P \Leftrightarrow Q$ es equivalente a la proposición $\sim P \Leftrightarrow \sim Q$, entonces $\sim P \Leftrightarrow \sim Q$, también es verdadera.

Ejemplos:

Un número entero $\boldsymbol{p}$ es par, sí y solo sí, existe un número entero t, tal que $\boldsymbol{p} = 2t$.

En este ejemplo, se define número par; la igualdad $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{2t}$, donde t es número entero, es la condición que se debe cumplir para llamar a $\boldsymbol{p}$ número par.

La proposición: un número entero $\boldsymbol{p}$, no es par, sí y solo sí, no existe un número entero t, tal que $\boldsymbol{p} = 2t$; es verdadera, la cual también se la puede expresar así:

Un número entero $\boldsymbol{p}$ no es par, sí y solo sí, $\boldsymbol{p} \neq 2t$, donde t es número entero.

3.2.4 Teorema

Un Teorema es una proposición cuyo valor de verdad se puede demostrar mediante un proceso lógico, apoyándose en Términos Primitivos, Axiomas o Postulados, Definiciones y otros elementos, que previamente se establecen, tales como, Leyes Lógicas, Propiedades; inclusive, se puede apoyar en otros teoremas que se hayan demostrado.

Se puede afirmar, que los Axiomas y Postulados son las “reglas de juego” o “condiciones impuestas” que se establecen y, los teoremas son las “jugadas” que resultan de dichos Axiomas y de las Definiciones.

3.2.5 Lema

Un Lema es un teorema preliminar sencillo y corto que se establece para la demostración de un teorema.

3.2.6 Corolario

Un Corolario es una consecuencia inmediata de un teorema; puede constituir en una generalización o bien un caso particular de un teorema demostrado.

Ejemplos:

Teorema:

Entre dos números racionales diferentes existe siempre, otro número racional.

Corolario:

Entre dos números racionales diferentes existen infinitos números racionales.

Nota:

Si $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son números racionales diferentes, entonces, uno es menor que el otro.

Si se considera $\boldsymbol{m} < \boldsymbol{n}$ y $\boldsymbol{m} < r < \boldsymbol{n}$, entonces $\boldsymbol{r}$ está entre $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$.

En consecuencia, en este caso, la palabra “entre” significa mayor que el número menor y menor que el número mayor.

Muchos autores de libros en el área de Matemáticas, no utilizan los términos, Lema, Corolario, inclusive ni Teorema y las reemplazan por Afirmación, Teorema o Propiedad.

3.2.7 Ejemplos sobre definiciones

A continuación, se presentan definiciones en el área de aritmética, las cuales se utilizan en los ejemplos sobre demostración.

Un número entero $\mathbf{m}$ es múltiplo de un número entero $\mathbf{n}$, sí y solo sí, $\mathbf{m} = \mathbf{n}\mathrm{k}$, donde k es número entero.

Un número $\boldsymbol{n}$ es divisor de un número entero $\boldsymbol{m}$, sí y sólo sí, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}t$, donde t es número entero.

Un número entero $\boldsymbol{m}$ es divisible de un número entero $\boldsymbol{n}$, sí y solo sí, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}k$, donde k es número entero.

Un número $\boldsymbol{n}$ es factor de un número entero $\boldsymbol{m}$, sí y solo sí, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}t$, donde t es número entero.

Un número $\boldsymbol{n}$ divide a un número entero $\boldsymbol{m}$, sí y solo sí, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}t$, donde t es número entero.

Un número entero $\boldsymbol{p}$ es número par, sí y solo sí, existe un entero r tal que $\boldsymbol{p} = 2r$.

Un número entero $\boldsymbol{q}$ es número impar, sí y solo sí, existe un entero a tal que

$\boldsymbol{q} = 2a + 1$.

Un número $\boldsymbol{r}$ es redondo, sí y solo sí, $\boldsymbol{r} = 10b$; b es número entero.

Un número real $\boldsymbol{x}$ es positivo, sí y solo sí, $\boldsymbol{x} > 0$.

Un número real $\boldsymbol{x}$ es negativo, sí y solo sí, $\boldsymbol{x} < 0$.

Para números reales x, y, se cumple lo siguiente:

11. $\boldsymbol{x}$ es menor que $\boldsymbol{y}$, sí y solo sí, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$, donde $\boldsymbol{z} > 0$

12. $\boldsymbol{x}$ es menor o igual que y, sí y solo sí, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$, donde $\boldsymbol{z} \geq 0$

13. $|\boldsymbol{x}| = \boldsymbol{x}$, sí y solo sí, $\boldsymbol{x} \geq 0$

14. $|\boldsymbol{x}| = -\boldsymbol{x}$, sí y solo sí, $\boldsymbol{x} < 0$

Las definiciones 13 y 14, comúnmente se la establece así: $|x| = \begin{cases} x, & \text{cuando } x \geq 0 \\ -x, & \text{cuando } x < 0 \end{cases}$

Nota:

En las anteriores definiciones, en la proposición $\boldsymbol{P}$, haciendo relación con la explicación inicial, se han definido factores, divisores, múltiplos, divisibilidad, números pares, impares, reales positivos, negativos, relación de desigualdad, valor absoluto.

En la expresión $|\boldsymbol{x}|$ se lee, valor absoluto de $\boldsymbol{x}$.

En la proposición $\boldsymbol{Q}$ se han establecido las condiciones en cada una de las definiciones.

Hay diversas maneras de establecer una definición sin cambiar la esencia o sentido de ella. Por ejemplo, la definición No.1 se la puede expresar así:

Un número entero $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de un número entero $\boldsymbol{n}$, sí y solo sí, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}k$; k es número entero (se eliminó la palabra donde).

Un número $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de un número entero $\boldsymbol{n}$, sí y solo sí, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}k$; k es número entero (se eliminaron las palabras entero y donde)

Un número $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de un entero $\boldsymbol{n}$, sí y solo sí, existe un entero k, tal que

$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}k$.

Observar que si esta definición se la expresará así:

Un número m es múltiplo de un número n, sí y solo sí, m = nk; k es número entero; en este caso se pierde o no expresa la definición No. 1 o sus equivalentes, se eliminó la palabra entero antes de n.

Con este caso se comprueba el "error": $\boldsymbol{m} = 3$; $\boldsymbol{n} = (3/2)$, $k = 2$ (entero) y $3 = (3/2)2$, pero 3 no es múltiplo de $3/2$.

Afirmando que $\boldsymbol{n}$ y k son enteros, entonces se puede afirmar que $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}k$ es entero (el producto de enteros es otro entero).

También pierde el sentido, si en la definición no se establece que k es entero:

Un número entero $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de un entero $\boldsymbol{n}$, sí y solo sí, $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}k$.

Por ejemplo, 10 y 7 son enteros y $10 = 7(10/7)$ y 10 no es múltiplo de 7.

Para números reales x, y, en la expresión $x < y$ se lee: x es menor que y.

$x < y$ sí y solo sí, $x + z = y$, donde z es real positivo ($z > 0$).

$x \leq y$ sí y solo sí, $x + z = y$, donde z es real positivo o cero ($z \geq 0$).

3.2.8 Propiedades

Sean x, y números reales.

Si se multiplica los dos miembros de una desigualdad por un mismo número real positivo, se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

Si $x < y$ y $c > 0$, entonces: $cx < cy$.

Si se multiplica los dos miembros de una desigualdad por un mismo número real negativo, se obtiene una desigualdad de sentido contrario.

Si $x < y$ y $c < 0$, entonces $cx > cy$.

Si se elevan al cuadrado los dos miembros de una desigualdad de reales positivos, se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

Si x, y son positivos, siendo $x < y$, entonces $x^2 < y^2$.

Si se elevan al cuadrado los dos miembros de una desigualdad de reales negativos, se obtiene una desigualdad de sentido contrario.

Si x, y son negativos, con la condición $x < y$, entonces $x^2 > y^2$.

Si se extrae la raíz cuadrada a los dos miembros de una desigualdad de cuadrados de reales positivos, entonces se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

Si x, y son positivos, con la condición $x^2 < y^2$, entonces $x < y$.

Si se extrae la raíz cuadrada a los dos miembros de una desigualdad de cuadrados de reales negativos, entonces se obtiene otra desigualdad de sentido contrario.

Si x, y son reales negativos con la condición que $x^2 < y^2$, entonces $x > y$.

Nota:

Se afirma que, se obtiene una desigualdad del mismo sentido respecto a otra, cuando se aplica alguna acción sobre los dos miembros de una desigualdad, tales como, sumar, restar, multiplicar, extraer la raíz cuadrada, elevar al cuadrado, entre otras. En la nueva Desigualdad, la cantidad o número menor, es la resultante de la aplicación de la acción, a la cantidad menor de la desigualdad inicial. Algunos autores prefieren utilizar la expresión "la desigualdad no cambia de sentido", en lugar de la expresión "la desigualdad es del mismo sentido".

Cuando la cantidad o número mayor en la nueva desigualdad, es la resultante de la aplicación de la acción a la cantidad menor de la primera, entonces se afirma que se obtiene una desigualdad de sentido contrario. Algunos autores prefieren utilizar la expresión "la desigualdad cambia de sentido", en lugar de la expresión "la desigualdad es de sentido contrario".

Ejemplo:

Si $x < y$, entonces $x + c < y + c$. La cantidad menor de la primera desigualdad es x, y la cantidad menor en la nueva desigualdad es $x + c$. Por esto, se afirma que se obtiene una desigualdad del "mismo sentido".

Si $x < y$, entonces $-5x > -5y$. La cantidad menor de la primera desigualdad es x y la cantidad mayor en la nueva desigualdad es $-5x$. Por esto, se afirma, que se obtiene una desigualdad de "sentido contrario".

Se establecerán otras definiciones, propiedades, afirmaciones, que son necesarias para aplicarlas en demostraciones que se van a realizar y proponer.

Inicialmente, se explica en qué consiste cada proceso, para luego, en cada caso, realizar ejemplos sobre demostraciones.

CAPÍTULO 4
Métodos de Demostración

CAPÍTULO 4
MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN

Antes de realizar demostraciones se establecen ciertas aclaraciones, propiedades, definiciones, teoremas y otros aspectos que se utilizan en el proceso; esto con el fin comprender de una mejor manera los diversos pasos a seguir, sobre todo, en las justificaciones.

No es necesario hacer esto en las demostraciones, pero se lo hace en este libro porque no se aborda o estudia una asignatura de Matemáticas en particular, salvo el tema de Lógica Proposicional y de Conjuntos que se revisa en un buen porcentaje. Estos temas que se exponen previamente incluyen los conocimientos que se deben tener para desarrollar una demostración. Como ya se planteó anteriormente, la parte central de libro es la de presentar ejemplos sobre demostraciones que sirvan de guía para efectuar otras y comprender algunos métodos que se utilizan para este propósito.

Por otra parte, los procesos a seguir no son únicos, es decir, se pueden utilizar otros pasos, otras alternativas o desarrollar las demostraciones aplicando otros temas afines o relacionados con el tema objeto de la demostración. De todas maneras, cada paso debe ser coherente y considerar los conocimientos previos. En algunas justificaciones, se anexa explicaciones adicionales con el fin de facilitar la comprensión del proceso. Además, al final de una demostración, en algunos casos, se presenta una nota u observación adicional aclaratoria, con el fin de precisar algo que contribuya a la comprensión de las demostraciones. De hecho, esto no es necesario en un proceso de demostración, pero en este caso, por tratarse de unas notas de clase, sirven para asimilar y comprender mejor los procesos que se realizan.

En el símbolo $\Leftrightarrow$ se debe leer “equivalente”; este es análogo a la igualdad en Aritmética y Álgebra. El símbolo $\Rightarrow$ corresponde a una Implicación Tautológica.

4.1 Método Directo

Consiste en demostrar que una proposición q es verdadera o que se obtiene la proposición q a partir de una proposición p que se asume verdadera; es decir, consiste en demostrar, que la Implicación $p \Longrightarrow q$ es verdadera.

Según los valores de verdad de una Implicación, no tiene sentido considerar que la proposición p sea falsa, porque de serlo o considerarse falsa, no habría nada que demostrar, ya que la Implicación sería verdadera independiente del valor de verdad de la proposición q. Por esta razón se afirma que, el valor de verdad de p constituye una verdad hipotética.

En algunos casos, el antecedente p es la hipótesis y el consecuente q es la tesis. En otros casos, a una proposición $p \Longrightarrow q$ también se la denomina enunciado condicional porque p es la condición que se debe cumplir para obtener la proposición q; también se dice que la proposición p es una condición necesaria para la proposición q.

En el proceso de la demostración se "parte" de p y se aplican definiciones, axiomas, teoremas, corolarios, propiedades, leyes lógicas, establecidas anteriormente a la demostración; en algunos casos se aplican teoremas demostrados, hasta "llegar" a la proposición q. De esta manera, se obtiene una secuencia de implicaciones conectadas con el operador lógico $\boldsymbol{y}$ ($\wedge$), así:

$(p \Longrightarrow p_1) \wedge (p_1 \Longrightarrow p_2) \wedge (p_2 \Longrightarrow p_3) \wedge \cdots p_k \Longrightarrow q.$

Con este proceso se demuestra que $p \Longrightarrow q$ es verdadera. Siendo que p es verdadera y $p \Longrightarrow q$ también es verdadera, se deduce que q también es verdadera. Ver el Silogismo Hipotético: Tautología 1.2.11 (p.25).

En el paso de una Implicación a la siguiente se debe establecer la justificación respectiva.

Para mayor facilidad en el proceso, la anterior secuencia se acepta tomarla así:

$p \Longrightarrow p_1 \Longrightarrow p_2 \Longrightarrow p_3 \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow p_k \Longrightarrow q.$

Recordar que, un teorema es una proposición verdadera y que generalmente se debe demostrar, entonces, cuando el teorema se establece como una Implicación $p \Longrightarrow q$, esta proposición es verdadera y como p constituye una verdad hipotética, entonces q también es verdadera. Por lo tanto, el proceso de la demostración se reduce a obtener la proposición q, es decir, que se cumpla q.

La proposición $[(p \Longrightarrow q) \wedge p] \Longrightarrow q$ es una Tautología, corresponde al Modus Ponendo Ponens, Tautología 1.2.12 (p. 25).

En muchos casos, cuando se desea demostrar un bicondicional $p \Leftrightarrow q$, es posible iniciar con la proposición p y luego, mediante una “cadena” de bicondicionales obtener la proposición q. Esto es:

$p \Leftrightarrow p_1 \Leftrightarrow p_2 \Leftrightarrow p_3 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow p_k \Leftrightarrow q.$

Esto sucede, por ejemplo, con muchas proposiciones y en igualdad de conjuntos, tal como se verá en las demostraciones que se desarrollan como ejemplos.

Cuando no es posible proceder de esta manera, se demuestra la proposición $p \Leftrightarrow q$ en dos partes: primero, se demuestra la Implicación $p \Longrightarrow q$, luego, la Implicación recíproca $q \Longrightarrow p$.

4.1.1 Ejemplos del Álgebra Proposicional y Lógica Matemática

Ejemplo 1:

1. Demostrar que: $(m \Longrightarrow n) \Leftrightarrow (\sim n \Longrightarrow \sim m)$.

Demostración:

$(m \Longrightarrow n) \Leftrightarrow (\sim m \vee n)$

$\Leftrightarrow (n \vee \sim m)$

$\Leftrightarrow \left(\sim (\sim n)\text{Ú} \sim m\right)$

$\Leftrightarrow (\sim n \Longrightarrow \sim m)$

Justificaciones:

Paso 1. Por equivalencia de la Implicación.

Paso 2. Propiedad Conmutativa de la Disyunción.

Paso 3. Ley Involutiva $n = \sim(\sim n)$

Paso 4. Equivalencia de la Implicación.

Nota:

En el ejemplo se ha demostrado que las proposiciones contra recíprocas son equivalentes.

Ejercicio 1:

Demostrar que: $(k \Longrightarrow h) \Leftrightarrow (\sim h \Longrightarrow \sim k)$ (Aplicar un razonamiento similar al utilizado en el ejemplo 1).

Ejemplo 2:

Demostrar que: $(m \Leftrightarrow n) \Leftrightarrow (\sim m \Leftrightarrow \sim n)$.

Demostración:

$(m \Leftrightarrow n) \quad \Leftrightarrow (m \Rightarrow n) \wedge (n \Rightarrow m)$

$\Leftrightarrow (\sim n \Rightarrow \sim m) \wedge (\sim m \Rightarrow \sim n)$

$\Leftrightarrow (\sim m \Rightarrow \sim n) \wedge (\sim n \Rightarrow \sim m)$

$\Leftrightarrow (\sim m \Leftrightarrow \sim n)$

Justificaciones:

Paso 1. Equivalencia o abreviación del bicondicional $\Leftrightarrow$.

Paso 2. En las dos proposiciones, se aplicó la equivalencia demostrada en el ejemplo 1.

Paso 3. Propiedad conmutativa de la conjunción.

Paso 4. Equivalencia o abreviación del Bicondicional.

Nota:

Se ha demostrado una de las equivalencias del Bicondicional.

Ejemplo 3:

Demostrar que: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q (MPP)$.

Demostración:

$(p \Rightarrow q) \wedge p \Leftrightarrow \left(\sim p\text{Ú}\, q\right) \wedge p$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge p) \vee (q \wedge p)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{C} \vee (q \wedge p)$

$\Leftrightarrow (q \wedge p)$

$\Rightarrow q$

Justificaciones:

Paso 1. Equivalencia de la implicación.

Paso 2. Propiedad Distributiva de $\wedge$ respecto a $\vee$.

Paso 3. $(\sim p \wedge p)$ es una Contradicción C.

Paso 4. Ley de Identidad o Modulativa de la Disyunción.

Paso 5. Ley de la Contracción Conjuntiva o Simplificación.

Nota:

En los cuatro primeros pasos se aplicaron equivalencias, pero en el paso 5, $(q \wedge p)$ no es equivalente con q, porque la Ley de Contracción Conjuntiva es una Implicación. Por esta ley, en este último paso, también se puede obtener p, pero el objetivo es obtener q. En este caso, no tiene sentido concluir p porque desde el principio se lo puede hacer, aplicando la simplificación: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow p$.

También, desde el principio, se puede utilizar la implicación en lugar de " $\Leftrightarrow$ " ; esto se puede hacer porque la una proposición induce (implica) la otra.

Ejemplo 4:

Demostrar que, $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p(MTT)$.

Demostración:

$(p \Rightarrow q) \wedge \sim q \Leftrightarrow (\sim p \vee q) \wedge \sim q$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q) \vee \boldsymbol{C}$

$\Leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

$\Rightarrow \sim p$

Justificaciones:

Paso 1. Equivalencia de una Implicación.

Paso 2. Propiedad Distributiva por la derecha de ∧ respecto a ∨

Paso 3. $(q \wedge \sim q)$ es una Contradicción C.

Paso 4. Ley de Identidad o Modulativa de la Disyunción.

Paso 5: Ley de la Contracción Conjuntiva o Simplificación.

Nota:

Como se observa en este ejemplo, se realizan los mismos pasos del caso anterior, igual sucede con las justificaciones y la nota aclaratoria.

Ejercicio:

Demostrar las siguientes proposiciones (MTP o Silogismo Disyuntivo):

$[(p \vee q) \wedge \sim q] \Rightarrow p$

$[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$

Los procesos son similares al ejemplo 4.

Ejemplo 5:

Demostrar que, $[p \vee (p \wedge q)] \Leftrightarrow p$.

Demostración:

$p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (\mathrm{p} \ \wedge \boldsymbol{T})$ Ú $(\mathrm{p} \ \wedge \ \mathrm{q})$. Ley de Identidad de la Conjunción.

$\Leftrightarrow (p \wedge (\boldsymbol{T} \vee q)$. Propiedad Distributiva de ∧ respecto a ∨.

$\Leftrightarrow (p \wedge \boldsymbol{T})$. Se reemplazó $(\boldsymbol{T} \vee q)$ por $\boldsymbol{T}$, porque $(\boldsymbol{T} \vee q) \Leftrightarrow \boldsymbol{T}$ (Ver Tautología número 23.).

$\Leftrightarrow p$. Nuevamente, se aplicó Ley de Identidad o Modulativa de la Conjunción.

Nota:

En el proceso anterior, se establecen las justificaciones en cada paso. En el primer paso, se aplicó la ley $(p \wedge \boldsymbol{T}) \Leftrightarrow p$; donde $\boldsymbol{T}$ es tautología. En el segundo, se aplicó la ley distributiva de ∧ respecto a ∨, en "sentido contrario" o de "derecha a izquierda" que en Aritmética y Algebra, lo cual se denomina Factorización.

Al aplicar propiedad distributiva a la proposición $p \wedge (q \vee r)$, se obtiene:

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$.

Escrito de "derecha a izquierda", se obtiene: $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \Leftrightarrow p \wedge (q \vee r)$.

Observe que, de "derecha a izquierda" es como haber "Factorizado" p.

En forma análoga, en Aritmética y Algebra al distribuir la expresión $\boldsymbol{a}(b+c)$, se obtiene:

$\boldsymbol{a}(b+c) = \boldsymbol{a}b + \boldsymbol{a}c$.

Escribiendo de derecha a izquierda la expresión anterior, se obtiene lo siguiente:

$\boldsymbol{a}b + \boldsymbol{a}c = \boldsymbol{a}(b+c)$. Observe que se ha Factorizado a.

Ejemplo 6:

Demostrar que: $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$.

Demostración:

$[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow (p \vee \boldsymbol{C}) \wedge (p \vee q)$.

Se aplicó Ley de Identidad de la Disyunción: $(p \vee \boldsymbol{C}) \Leftrightarrow p$; donde C es Contradicción.

$(p \vee \boldsymbol{C}) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \vee (\boldsymbol{C} \wedge q)$.

Se aplicó Propiedad Distributiva de ∨ respecto a ∧.

$(p \vee (\boldsymbol{C} \wedge q) \Leftrightarrow (p \vee \boldsymbol{C})$.

Se reemplazó $(\boldsymbol{C} \wedge q)$ por C, porque $(\boldsymbol{C} \wedge q) \Leftrightarrow \boldsymbol{C}$. Ver Tautología 1.2. 23 (p. 28).

$(p \vee \boldsymbol{C}) \Leftrightarrow p$.

Se aplicó nuevamente la Ley de Identidad o Modulativa de la Disyunción.

En resumen:

$[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow (p \vee \boldsymbol{C}) \wedge (p \vee q)$

$\Leftrightarrow (p \vee (\boldsymbol{C} \wedge q)$

$\Leftrightarrow (p \vee (\boldsymbol{C} \wedge q)$

$\Leftrightarrow (p \vee \boldsymbol{C})$

$\Leftrightarrow p$

Por tanto,

$[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$

Nota:

En el proceso anterior, se establecen las justificaciones en cada paso. En el paso 1, se aplicó la ley $(p \vee \boldsymbol{C}) \Leftrightarrow p$, donde C es tautología. En el Paso 2, se aplicó la Ley Distributiva de " ∨ " respecto a " ∧ ", en “sentido contrario” o de “derecha a izquierda”.

Al aplicar la propiedad distributiva a la expresión $p \vee (q \wedge r)$ se obtiene:

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

Al escribir de derecha a izquierda la expresión anterior, se obtiene:

$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \Leftrightarrow p \vee (q \wedge r)$, es como haber “Factorizado” p.

En Aritmética o en Algebra no existe una expresión análoga a la anterior; pues, al distribuir
$\boldsymbol{a} + (bc)$, se obtiene $\boldsymbol{a} + (bc) \neq (\boldsymbol{a} + b)(\boldsymbol{a} + c)$.

por lo tanto: $\boldsymbol{a} + (bc) \neq (\boldsymbol{a} + b)(\boldsymbol{a} + c)$.

En el siguiente ejemplo se presenta otra manera de demostrar la anterior proposición.

Ejemplo 7:

Demostrar que, $[p \wedge (p \vee q)] \Leftrightarrow p$.

Demostración:

$p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge p) \vee (p \wedge q)$.

Se aplicó Propiedad Distributiva de " $\wedge$ " respecto a " $\vee$ ".

$(p \wedge p) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow$ p Ú (p $\wedge$ q).

Se aplicó Ley de Idempotencia de la Conjunción: $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$.

$\mathrm{p} \vee (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \Leftrightarrow p$.

Se aplicó la proposición demostrada en el ejemplo 5.

Nota:

Se debe recordar que las proposiciones de los ejemplos 5 y 6 se denominan Leyes de Absorción Total.

Ejemplo 8:

$[p \wedge (\sim p \vee q)] \Leftrightarrow p \wedge q$.

Demostración:

$p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$ Se aplicó Propiedad Distributiva de $\wedge$ respecto a $\vee$.

$(p \wedge \sim p)$ es una Contradicción C.

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow \boldsymbol{C} \vee (p \wedge q)$.

$\boldsymbol{C} \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow (p \wedge q)$ Se aplicó Ley de Identidad o Modulativa de la Disyunción.

Por lo tanto, $[p \wedge (\sim p \vee q)] \Leftrightarrow p \wedge q$.

En resumen:

$p \wedge (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{C} \vee (p \wedge q)$

$\Leftrightarrow (p \wedge q)$

Ejercicio:

Demostrar la proposición: $[p \vee (\sim p \wedge q)] \Leftrightarrow p \vee q$. (Se requiere un proceso similar al seguido en el ejemplo 8).

Nota:

Las proposiciones del ejemplo 8 y del anterior ejercicio, son las Leyes de Absorción Parcial.

Ejercicios:

Demostrar las siguientes proposiciones:

Absorción Total: $[\sim m \wedge (\sim m \vee h)] \Leftrightarrow \sim m.$

Absorción Parcial: $[\sim m \wedge (m \vee h)] \Leftrightarrow \sim m \wedge h.$

Los pasos en las demostraciones son los mismos que se aplicaron en los ejemplos 6 y en 8.

Ejemplo 9:

$[((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow \sim t) \wedge t] \Rightarrow (\sim p \vee \sim q)$

Demostración:

$((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow \sim t) \wedge t \Rightarrow$ Aplicación de Silogismo Hipotético:

$((p \wedge q) \Rightarrow \sim t) \wedge t \Rightarrow$ Aplicación de la equivalencia de una Implicación:

$(\sim (p \wedge q) \vee \sim t) \wedge t \Rightarrow$ Por Ley de D'Morgan a $\sim(p \wedge q)$ se obtiene:

$((\sim p \vee \sim q) \vee \sim t) \wedge t \Rightarrow$ Distribución de una Conjunción respecto a una Disyunción:

$((\sim p \vee \sim q) \wedge t) \vee (\sim t \wedge t) \Rightarrow (\sim t \wedge t)$ es una Contradicción C.

$((\sim p \vee \sim q) \wedge t) \vee \boldsymbol{C} \Rightarrow$ Por Ley Modulativa de una Disyunción:

$(\sim p \vee \sim q) \wedge t \Rightarrow$ Por Contracción Conjuntiva:

$(\sim p \vee \sim q)$

Nota:

Partiendo de $((p \wedge q) \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow \sim t) \wedge t$ se obtuvo $(\sim p \vee \sim q)$, por lo cual, la proposición planteada en el ejemplo 9, es verdadera.

Algunas tautologías son demostrables únicamente mediante tablas de verdad.

Utilizando tablas de verdad, demostrar las siguientes tautologías:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim p \vee q)$$

$$\sim (m \Leftrightarrow n) \Leftrightarrow (m \vee n)$$

$$\sim (m \Leftrightarrow n) \Leftrightarrow (\sim m \Leftrightarrow n)$$

$$\sim (m \Leftrightarrow n) \Leftrightarrow (m \Leftrightarrow \sim n)$$

La primera es la equivalencia de la Implicación y las otras son la negación de la negación del bicondicional.

Ejemplo 10:

Demostrar la equivalencia: $(\sim m \Leftrightarrow n) \Leftrightarrow (m \Leftrightarrow \sim n)$ (Observación planteada en las Tautologías 1.2.18) (p. 26).

Demostración:

$(\sim m \Leftrightarrow n) \quad \Leftrightarrow \sim (m \Leftrightarrow n) \Leftrightarrow (m \Leftrightarrow \sim n)$

Justificaciones:

Paso 1: Se aplicó la tautología c de la lista anterior.

Paso 2: Se aplicó la tautología d, de la lista anterior.

Nota:

las tautologías c y d, las cuales expresan la negación del bicondicional (ver tautologías 1.218, p. 26) también son demostrables mediante procesos deductivos, para ello se utilizan las siguientes leyes lógicas: equivalencia del bicondicional, equivalencia de la implicación, leyes de d'Morgan, propiedad distributiva, ley del tercio excluido, ley modulativa de la conjunción, equivalencia de la implicación, paso de disyunción a implicación y el último paso, equivalencia del bicondicional, pasando de conjunción a doble implicación. el proceso es extenso, por lo cual, es conveniente demostrar la equivalencia de las proposiciones utilizando tablas de verdad.

Ejemplo 11:

Demostrar que, $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

Demostración:

$\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (\sim p \vee q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$

Justificaciones:

Paso 1. Equivalencia de la Implicación.

Paso2: Ley de D'Morgan.

Ejemplo 12:

Demostrar que, $(m \Leftrightarrow n) \Leftrightarrow (\sim m \Leftrightarrow \sim n)$.

Demostración:

$(m \Leftrightarrow n) \quad \Leftrightarrow \sim [\sim (m \Leftrightarrow n)]$

$\Leftrightarrow \sim (\sim m \Leftrightarrow n)$

$\Leftrightarrow (\sim m \Leftrightarrow \sim n)$

Justificaciones:

Paso 1. Por Ley Involutiva.

Paso 2. Negación del Bicondicional.

Paso 3. Negación del Bicondicional.

Nota:

En el paso 2, se aplicó la negación del Bicondicional, negando la primera proposición y el paso 3, negando la segunda proposición.

Esta proposición se demostró en el ejemplo 2; pero en este caso se aplicaron otros pasos para su demostración.

Ejercicio:

Demostrar la equivalencia $(m \Leftrightarrow n) \Leftrightarrow (\sim m \Leftrightarrow \sim n)$, aplicando los siguientes pasos: equivalencia de la doble implicación para obtener una conjunción, equivalencia de las contra recíprocas, propiedad conmutativa de la conjunción y finalmente, equivalencia de la doble implicación, pasando de conjunción al bicondicional.

Como se había explicado al inicio de los ejemplos, en muchos casos, los pasos seguidos en las demostraciones no son únicos, es decir, se puede demostrar siguiendo otros razonamientos, aplicando otros conocimientos previos, otros teoremas o proposiciones ya demostradas.

Ejercicio:

Demostrar la Implicación: $[(p \Leftrightarrow (q \wedge r)) \wedge \sim] \Rightarrow (\sim q \vee \sim r)$

Sugerencias:

En la demostración se pueden hacer lo siguiente: partir del antecedente y aplicar equivalencia de " $\Leftrightarrow$ " para obtener la respectiva conjunción; aplicar Propiedad

Asociativa de " $\wedge$ " agrupando la segunda Implicación con $\sim p$, aplicar Ley de la Simplificación para "eliminar" la primera Implicación; aplicar la Tautología MTT (ver tautología 1.2.13, p. 19) y finalmente, Ley de D'Morgan, con lo cual, se obtiene $(\sim q \vee \sim r)$.

4.1.2 Ejemplos del Álgebra de Conjuntos

En las demostraciones con conjuntos es necesario tener presentes temas de la Teoría de Conjuntos, por lo cual, en esta sección se abordan algunos temas.

$\boldsymbol{U}$ es el Conjunto Universal, $x \in \boldsymbol{U}$ es una proposición verdadera que se la representa por "$\boldsymbol{T}$", "$\emptyset$" es el Conjunto Vacío; la proposición $x \in \emptyset$ es falsa y se la reemplaza por "C".

De las diversas formas para definir igualdad de conjuntos, se utilizará la siguiente: $M = N \Leftrightarrow (x \in M \Leftrightarrow x \in N)$, esto porque es la más conveniente para aplicar el Método Directo y, además, es posible utilizar las equivalencias con proposiciones constituyendo una cadena de " $\Leftrightarrow$ ".

Si se toma cualquiera de las definiciones que siguen, se debe demostrar por separado cada proposición de la Conjunción, esto es, se debe aplicar el método de casos separados.

$M = N \Leftrightarrow (\forall x \in M: x \in N) \wedge (\forall x \in N: x \in M)$

$M = N \Leftrightarrow (x \in M \Rightarrow x \in N) \wedge (x \in N \Rightarrow x \in M)$

$M = N \Leftrightarrow (M \subset N) \wedge (N \subset M)$

Así pues, para demostrar que $M = N$ se demuestra la proposición $(x \in M \Leftrightarrow x \in N)$ partiendo de $x \in M$ y concluyendo u obteniendo $x \in N$. En este proceso, se debe aplicar Leyes Lógicas y otras Tautologías.

Las siguientes Implicaciones, corresponden a una Ley del Complemento y constituyen tautologías. Si un elemento está en un conjunto entonces dicho elemento no pertenece a su complemento y, si pertenece al complemento de un conjunto entonces no pertenece al conjunto:

$x \in A \Rightarrow x \notin A'$

$x \in A' \Rightarrow x \notin A$

$x \notin A \Rightarrow x \in A'$

$x \notin A' \Rightarrow x \in A$

Ejemplo 1:

Demostrar que $A \cup A = A$.

Demostración:

$x \in (A \cup A) \quad \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in A)$

$\Leftrightarrow x \in A$

En consecuencia, por la definición de Igualdad de Conjuntos se cumple que $A \cup A = A$.

Justificaciones:

Paso 1. Por definición de Unión de Conjuntos.

Paso 2. Por Idempotencia de la Disyunción.

Nota:

En el ejemplo anterior se ha demostrado la Idempotencia de la Unión de Conjuntos, para lo cual, se aplicó la Idempotencia de la Disyunción. En este caso, el conjunto M que se estableció en la definición corresponde al conjunto $A \cup A$ y el conjunto N está representado por A.

Ejemplo 2:

Demostrar que $A \cap B = B \cap A$.

Demostración:

$x \in (A \cap B) \quad \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow (x \in B \wedge x \in A)$

$\Leftrightarrow x \in (B \cap A)$

Luego, por definición de igualdad de conjuntos, la proposición dada en el ejemplo 2, es verdadera.

Justificaciones:

Paso 1. Por definición de Intersección de Conjuntos.

Paso 2. Por Propiedad Conmutativa de la Conjunción.

Paso3. Por definición de Intersección de Conjuntos.

Nota:

Se ha demostrado la conmutatividad de la intersección de conjuntos; en el proceso se aplicó la propiedad conmutativa de la conjunción de proposiciones. En este caso, el conjunto M que se estableció en la definición, corresponde al conjunto $A \cap B$ y el conjunto N está representado por $B \cap A$.

Ejemplo 3:

$A \triangle B = B \triangle A$.

Demostración:

$x \in (A \triangle B) \quad \Leftrightarrow \left(x \in A \underline{\vee} x \in B\right)$

$\Leftrightarrow \left(x \in B \underline{\vee} x \in A\right)$

$\Leftrightarrow x \in (B \triangle A)$.

En consecuencia, por definición de Igualdad de Conjuntos, la igualdad dada en 3, es verdadera.

Justificaciones:

Paso 1. Por definición de diferencia simétrica.

Paso 2. Por propiedad conmutativa de la disyunción excluyente.

Paso 3. Por definición de diferencia simétrica.

Nota:

Se ha demostrado, la conmutatividad de la diferencia simétrica; en el proceso se aplicó la propiedad conmutativa de la disyunción excluyente. En este caso, el conjunto M, está representado por el conjunto $A \triangle B$ y el conjunto N corresponde al conjunto $B \triangle A$.

Ejemplo 4:

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Demostración:

$x \in [A \cup (B \cup C)] \quad \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in (B \cup C)]$

$\Leftrightarrow [x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)]$

$\Leftrightarrow [(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C]$

$\Leftrightarrow [x \in (A \cup B) \vee x \in C]]$

$\Leftrightarrow x \in [(A \cup B) \cup C]]$

De aquí se deduce que, se cumple la igualdad $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Justificaciones:

Paso 1. Definición de unión de conjuntos aplicado a la primera unión.

Paso2. Definición de unión de conjuntos aplicada a la segunda unión.

Paso3. Por propiedad asociativa de la disyunción.

Paso4. Definición de unión, aplicada a la primera disyunción.

Paso5. Definición de unión, aplicada a la segunda disyunción.

Nota:

se ha demostrado la propiedad asociativa de la unión; aquí se aplicó la propiedad asociativa de la disyunción. Ahora, el conjunto M es $A \cup (B \cup C)$ y el conjunto N corresponde al conjunto $(A \cup B) \cup C$.

Ejemplo 5:

$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

Demostración:

$x \in [A \triangle (B \triangle C)] \quad \Leftrightarrow [x \in A \vee x \in (B \triangle C)]$

$\Leftrightarrow [x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)]$

$\Leftrightarrow [(x \in A \vee x \in B) \vee x \in C]$

$\Leftrightarrow [x \in (A \triangle B) \vee x \in C]]$

$\Leftrightarrow x \in [(A \triangle B) \triangle C]]$

Por lo tanto, por definición de la igualdad de conjuntos, se cumple que:

$A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.

Justificaciones:

Paso 1. Definición de diferencia simétrica, aplicada a la primera expresión.

Paso2. Definición de diferencia simétrica, aplicada a la segunda expresión.

Paso3. Por propiedad asociativa de la disyunción excluyente.

Paso4. Definición de diferencia simétrica, aplicada a la primera disyunción excluyente.

Paso5. Definición de diferencia simétrica, aplicada a la segunda.

Nota:

Se ha demostrado la propiedad asociativa de la diferencia simétrica; para el efecto, se aplicó la propiedad asociativa de la disyunción excluyente.

Ejemplo 6:

$A \cup \emptyset = A.$

Demostración:

$x \in (A \cup \emptyset) \quad \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in \emptyset)$

$\Leftrightarrow (x \in A \vee \boldsymbol{C})$

$\Leftrightarrow x \in A$

Entonces, por definición de igualdad de conjuntos, es verdadera la igualdad $A \cup \emptyset = A$.

Justificaciones:

Paso 1. Definición de Unión

Paso 2. x ∈ es proposición falsa y se reemplazó por C

Paso 3. Ley Modulativa (Identidad) de la Disyunción.

Nota:

Se demostró la Ley Modulativa (identidad) de la Unión de Conjuntos, para lo cual, se aplicó la Ley Modulativa de la Disyunción.

Dado que, la Unión es Conmutativa, entonces: $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$

Ejemplo 7:

$A \cap \boldsymbol{U} = A.$

Demostración:

$x \in (A \cap \boldsymbol{U}) \quad \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in \boldsymbol{U})$

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge \boldsymbol{T})$

$\Leftrightarrow x \in A.$

En consecuencia, por definición de Igualdad de Conjuntos, es verdadera la igualdad $A \cap \boldsymbol{U} = A$.

Justificaciones:

Paso 1. Definición de Intersección.

Paso 2. $x \in U$ es proposición verdadera y se reemplazó por $\boldsymbol{T}$.

Paso 3. Ley Modulativa (Identidad) de la Conjunción.

Nota:

Se demostró la Ley Modulativa (Identidad) de la Intersección de Conjuntos. En el proceso, se aplicó la Ley Modulativa de la Conjunción. Como la Intersección de Conjuntos es Conmutativa, entonces, $A \cap \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U} \cap A = A$.

Ejemplo 8:

$A - A = \emptyset$

Demostración:

$x \in (A - A) \iff (x \in A \wedge x \notin A)$

$\iff \boldsymbol{C}$

$\iff x \in \emptyset$.

Por lo tanto, la proposición $A - A = \emptyset$ es verdadera.

Justificaciones:

Paso 1. Definición de diferencia de conjuntos.

Paso 2. La proposición es una contradicción o proposición falsa y se la reemplazó por "C".

Paso 3. La proposición $x \in \emptyset$ es falsa y reemplazó a C.

Ejemplo 9:

$A - f = A$

Demostración:

$x \in (A - \emptyset) \iff (x \in A \wedge x \notin \emptyset)$

$\iff (x \in A \wedge \boldsymbol{T})$

$\iff x \in A$

Luego, la proposición $A - f = A$ es verdadera.

Justificaciones:

Paso 1. Definición de diferencia de conjuntos.

Paso 2. Se reemplazó la proposición $x \notin \emptyset$ por T.

Paso 3. Por propiedad modulativa de la conjunción.

Nota:

La proposición $x \in \emptyset$ es falsa y su negación: $x \notin \emptyset$ es verdadera, la cual se la reemplazó por $\boldsymbol{T}$.

Ejemplo 10:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Demostración:

$x \in [A \cap (B \cup C)] \quad \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \in (B \cup C)]$; definición de Intersección.

$\Leftrightarrow [x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)]$; definición de Unión.

$\Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)]$; Distributiva de $\wedge$ respecto a $\vee$.

$\Leftrightarrow [x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)]$; definición de Intersección.

$\Leftrightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$; definición de Unión.

Por lo tanto, la igualdad planteada en el ejemplo 10, es verdadera.

Nota:

La igualdad dada es verdadera, puesto que, se cumple la proposición:

$x \in [A \cap (B \cup C)] \Leftrightarrow x \in [(A \cap B) \cup (A \cap C)]$.

En este caso, el conjunto M corresponde a $[A \cap (B \cup C)]$ y el conjunto N está representado por $[(A \cap B) \cup (A \cap C)]$.

Se debe tener en cuenta que, M y N son los conjuntos que se tomaron antes de iniciar los ejemplos sobre demostraciones con el fin de recordar la definición de Igualdad de Conjuntos, la cual se estableció en la Teoría de Conjuntos.

Ejemplo 11:

$(A')' = A$.

Demostración:

$x \in (A')' \quad \Leftrightarrow x \notin (A')$

$\Leftrightarrow x \in (A)$

Luego, la igualdad $(A')' = A$, es verdadera.

Justificaciones:

Paso 1. Ley del Complemento.

Paso2. Ley del Complemento.

Nota:

La demostración corresponde a la Ley Involutiva de Conjuntos.

Ejemplo 12:

$(A \cup B)' = (A' \cap B')$.

Demostración:

$x \in (A \cup B)' \ \Leftrightarrow x \notin (A \cup B)$; por Ley del Complemento.

$\Leftrightarrow \sim(x \in (A \cup B))$; por indicación de la negación.

$\Leftrightarrow \sim(x \in A \vee x \in B)$; por definición de unión de conjuntos.

$\Leftrightarrow \sim(x \in A) \wedge \sim(x \in B)$; aplicación Ley de D'Morgan a una disyunción.

$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$; por aplicación de la negación.

$\Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B'$; por Ley del Complemento.

$\Leftrightarrow x \in (A' \cap B')$; por aplicación de la definición de intersección de conjuntos.

Aplicando la definición de igualdad de conjuntos, se cumple que $(A \cup B)' = (A' \cap B')$.

Nota:

Se ha demostrado la Ley de D'Morgan para la unión de conjuntos.

Se dice negación indicada, cuando se pasa de una proposición $x \notin A$ a la proposición $\sim (x \in A)$; y al pasar de $\sim (x \in A)$ a $x \notin A$, se aplica la negación.

Ejemplo 13:

$(B - A')' = (A \cap B)'$.

Demostración:

$x \in (B - A')' \Leftrightarrow x \notin (B - A')$

$\Leftrightarrow \sim [x \in (B - A')]$

$\Leftrightarrow \sim [x \in B \wedge x \notin A']$

$\Leftrightarrow \sim [x \in B \wedge x \in A]$

$\Leftrightarrow \sim [x \in (B \cap A)]$

$\Leftrightarrow x \notin (B \cap A)$

$\Leftrightarrow x \in (B \cap A)'$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B)'$

Por lo tanto, la igualdad planteada en el ejemplo 13, es verdadera.

Justificaciones:

Paso1. Por Ley del Complemento.

Paso2. Por indicación de la negación.

Paso3. Por definición de diferencia.

Paso4. Por Ley del Complemento.

Paso5. Por definición de intersección.

Paso6. Por aplicación de la negación.

Paso7. Por Ley del complemento.

Paso8. Por propiedad conmutativa de la intersección.

Demostrados algunos teoremas o proposiciones se los puede aplicar para demostrar otros teoremas o proposiciones, sin necesidad de tomar elementos de los conjuntos, tal como se ha realizado en las demostraciones anteriores.

Ejemplo 14:

$(A \cup C')' = A' \cap C$.

Demostración:

$(A \cup C')' \quad = (A' \cap (C')')$

$= (A' \cap C)$

Justificaciones:

Paso 1. Ley de D'Morgan.

Paso 2. Ley Involutiva.

Ejemplo 15:

$A \triangle B = B \triangle B$.

Demostración:

$A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

$= (B - A) \cup (A - B)$

$= B \triangle A$

Justificaciones:

Paso 1. Definición de diferencia simétrica.

Paso2. Por propiedad conmutativa de la unión de conjuntos.

Paso3: Nuevamente aplicación de la definición de diferencia simétrica.

Ejemplo 16:

$F \triangle G = F' \triangle G'$

Demostración:

$x \in (F \triangle G) \quad \Leftrightarrow x \in F \vee x \in G$; aplicación de definición de la Diferencia Simétrica.

$\Leftrightarrow x \notin F' \vee x \notin G'$; por Ley del Complemento.

$\Leftrightarrow \sim(x \in F') \vee \sim(x \in G')$; indicación de la Negación.

$\Leftrightarrow \sim[x \in F' \vee \sim(x \in G')]$; por negación de la disyunción excluyente.

$\Leftrightarrow \sim[\sim(x \in F' \vee x \in G')]$; por negación de la disyunción excluyente.

$\Leftrightarrow x \in F' \vee x \in G'$; por Ley Involutiva.

$\Leftrightarrow \ x \in (F' \triangle G')$; por aplicación de la definición de disyunción excluyente.

Por definición de igualdad de conjuntos, se deduce que se cumple la igualdad $F \triangle G = F' \triangle G'$.

Nota:

Recordar que:

$\sim (p \veebar q) \Leftrightarrow (\sim p \veebar q)$

$\sim (p \veebar q) \Leftrightarrow (p \veebar \sim q)$

En el proceso anterior, se aplicó esta ley de derecha a izquierda.

A continuación, se demuestra la misma igualdad, siguiendo otros pasos u otro orden respecto a lo realizado en la demostración anterior.

$x \in (F \triangle G) \quad \Leftrightarrow x \in F \vee x \in G$; aplicación de definición de la diferencia simétrica.

$\Leftrightarrow \sim(\sim[x \in F \vee x \in G])$; por Ley Involutiva.

$\Leftrightarrow \sim(x \notin F \vee x \in G)$; por negación de la disyunción excluyente.

$\Leftrightarrow x \notin F \vee x \notin G$; por negación de la disyunción excluyente.

$\Leftrightarrow x \in F' \vee x \in G$; por Ley del Complemento.

$\Leftrightarrow \ x \in (F' \triangle G')$; aplicación de definición de la diferencia simétrica.

Nota:

En los pasos 3 y 4, se aplicó la negación de la Disyunción Excluyente de izquierda a derecha; en 3, a la primera proposición y en 4, a la segunda.

Ejemplo 17:

$A \subset B \wedge B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

Demostración:

$A \subset B \wedge B \subset C \Longrightarrow [(x \in A \Longrightarrow x \in B) \wedge (x \in B \Longrightarrow x \in C)]$; definición Inclusión de Conjuntos.

$\Longrightarrow (x \in A \Longrightarrow x \in C)$; por Silogismo Hipotético.

$\Longrightarrow A \subset C$; por definición de Inclusión de Conjuntos.

Ejemplo 18:

$(A \cap B) \subset A$

Demostración:

$x \in (A \cap B) \quad \Longrightarrow (x \in A \wedge x \in B)$

$\Longrightarrow x \in A$

Justificaciones:

Paso 1. Definición de Intersección.

Paso2. Contracción Conjuntiva.

Ejemplo 19:

$A \subset (A \cup B)$.

Demostración:

$x \in A \quad \Longrightarrow (x \in A \vee x \in B)$

$\Longrightarrow x \in (A \cup B)$

$\Longrightarrow A \subset (A \cup B)$

Justificaciones:

Paso 1. Adición Disyuntiva.

Paso2. Definición de Unión de Conjuntos.

Paso 3: Por definición de Inclusión de Conjuntos.

Nota:

En el paso3, se concluye que $A \subset (A \cup B)$ porque se demuestra la proposición:

$x \in A \Longrightarrow x \in (A \cup B)$.

Cualquiera de las implicaciones.$p \Longrightarrow p \vee q$; $p \Longrightarrow p \vee r$; $p \Longrightarrow p \vee t$, se refieren a la Ley de la Adición.

En el proceso, por conveniencia, a la proposición $x \in A$ se adicionó la proposición $x \in B$.

Según lo anterior, se cumplen las siguientes relaciones:

$A \subset (A \cup C); A \subset (A \cup D); A \subset (A \cup F)$.

Ejemplo 20:

$(A \cap B) \cup A = A$.

Demostración:

$x \in [(A \cap B) \cup A] \quad \Leftrightarrow \; x \in (A \cap B) \vee x \in A$; por definición de Unión.

$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee x \in A$; por definición de Intersección.

$\Leftrightarrow \; x \in A$; por Ley de Absorción Total.

Por Igualdad de Conjuntos se deduce, que se cumple la igualdad dada $(A \cap B) \cup A = A$.

Nota:

La proposición $(p \wedge q) \vee p$ o bien $p \vee (p \wedge q)$ son equivalentes con la proposición p (Absorción Total).

Se ha demostrado una Ley de Absorción Total con Conjuntos.

Ejemplo 21:

$(A' \cap B) \cup A = A \cup B$.

Demostración:

$x \in [(A' \cap B) \cup A] \quad \Leftrightarrow \; x \in (A' \cap B) \vee x \in A$; por definición de Unión.

$\Leftrightarrow (x \in A' \wedge x \in B) \vee x \in A$; por definición de Intersección.

$\Leftrightarrow (x \notin A \wedge x \in B) \vee x \in A$; por Ley del Complemento.

$\Leftrightarrow (\sim(x \in A) \wedge x \in B)$Ú$x \in A$; indicación de la negación.

$\Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$; por Ley de Absorción Parcial.

$\Leftrightarrow \; x \in (A \cup B)$; por definición de Unión.

Por Igualdad de Conjuntos, se cumple la igualdad dada en el ejemplo 21.

Nota:

Se ha demostrado una Ley de Absorción Parcial con Conjuntos (ver Absorción Parcial con Proposiciones).

4.1.3 Ejercicios sobre Álgebra de Conjuntos

Demostrar las siguientes igualdades:

1. $A \cap A = A$	2. $A \cup B = B \cup A$	3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \triangle \emptyset = A$	5. $A \cup \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}$	6. $A \cap \emptyset = \emptyset$
7. $A \triangle A = \emptyset$	8. $A \triangle \boldsymbol{U} = A'$	9. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
10. $(A \cap B)' = (A' \cup B')$	11. $A \cup A' = \boldsymbol{U}$	12. $A \cap A' = \emptyset$
13. $\boldsymbol{U}' = \emptyset$	14. $\emptyset' = \boldsymbol{U}$	15. $A' \triangle A = \boldsymbol{U}$
16. $(D \cup E')' = D' \cap E$	17. $(F \triangle G)' = F' \triangle G$	18. $(F \triangle G)' = F \triangle G'$
19. $F' - G' = G - F$	20. $B \subset (A \cup B)$	21. $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$
22. $(A \cup B) \cap A = A$	23. $(A \cap B) \subset B$	24. $(M - N) - R = M \cap (N \cup R)'$

25. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

26. $M - (N \cup R) = (M - N) \cap (M - R)$

27. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (C - A)$

28. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$

4.1.4 Ejemplos del Matemáticas Generales, Aritmética y Álgebra

Ejemplo 1:

Si un número entero $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 15, entonces, $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 3.

Demostración:

Si un número entero $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 15, entonces, $\boldsymbol{m} = 15k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$; por definición de Múltiplo.

Si $\boldsymbol{m} = 15k$, para algún $k \in \mathbb{Z}$, entonces, $\boldsymbol{m} = 3(5k) = 3h$, donde $h = 5k, para\ algún\ \ k \in \mathbb{Z}$; por Factorización.

Si $\boldsymbol{m} = 3h$, para algún $h \in \mathbb{Z}$, entonces $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 3; por definición de Múltiplo.

Nota:

Como 5 y k son enteros, entonces $h = 5k$ es entero, ya que el producto de números enteros es un número entero.

Ejemplo 2:

Si un número entero $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 10, entonces $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 2 y de 5.

En forma simbólica, se expresa así:

$\boldsymbol{m} = 10k$, $\exists\ k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow \boldsymbol{m} = 2h$ y $\boldsymbol{m} = 5t$, $\exists\ h, t \in \mathbb{Z}$.

Demostración:

$\boldsymbol{m} = 10k$, $\exists k \in Z \Longrightarrow \boldsymbol{m} = 2(5k)$ y $\boldsymbol{m} = 5(2k)$, $\exists\ k \in \mathbb{Z}$; por Factorización.

$\Longrightarrow \boldsymbol{m} = 2h$ y $\boldsymbol{m} = 5t$, donde $h = 5k \in Z$ y $t = 2k \in \mathbb{Z}$; por asignación de h a $5k$ y t a $2k$.

Ejemplo 3:

Si $\boldsymbol{n}$ divide a $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{m}$ divide a $\boldsymbol{r}$, entonces $\boldsymbol{n}$ divide a $\boldsymbol{r}$.

Demostración:

Si $\boldsymbol{n}$ divide a $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{m}$ divide a $\boldsymbol{r}$, entonces $\exists\ d, f \in \mathbb{Z}$ tales que $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}d$ y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{m}f$; por definición de divisibilidad en enteros.

Si $\boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}d$ y $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{m}f$, entonces $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{n}d)f$; se reemplazó en la segunda igualdad, $\boldsymbol{m}$ por $\boldsymbol{n}d$.

Si $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{n}d)f$, entonces, $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}(df) = \boldsymbol{n}g$, donde $g = df \in \mathbb{Z}$; Propiedad Asociativa de la Multiplicación y Asignación.

Si $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{n}g$, $\exists\ g \in \mathbb{Z}$, entonces, $\boldsymbol{n}$ divide a $\boldsymbol{r}$.

Nota:

Mediante el ejemplo 3, se demostró la propiedad transitiva de la relación de divisibilidad en los enteros.

Ejemplo 4:

La suma de dos números impares es número par.

Demostración:

Si $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ son números impares, entonces $m = 2\boldsymbol{a} + 1$ y $n = 2\boldsymbol{b} + 1$; $\exists\ \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}$; definición de Número Impar.

Si $m = 2\boldsymbol{a} + 1$ y $n = 2\boldsymbol{b} + 1; \exists\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{Z}$, entonces, $m + n = (2\boldsymbol{a} + 1) + (2\boldsymbol{b} + 1)$; Ley Uniforme de la Igualdad.

Si $m + n = (2\boldsymbol{a} + 1) + (2\boldsymbol{b} + 1)$, entonces, $m + n = 2(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 1) = 2\boldsymbol{c}$, donde $\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 1) \in \mathbb{Z}$; se aplicó propiedades de la Aritmética: Conmutativa, Asociativa, Factorización, y se asignó $\boldsymbol{c}$ a la expresión $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + 1) \in \mathbb{Z}$.

Dado que, $m + n = 2\boldsymbol{c}$, $c \in \mathbb{Z}$. En consecuencia, por definición de número par, $m + n$ es número par.

Nota:

En forma simbólica la anterior proposición se la puede formular así:

$m = 2\boldsymbol{a} + 1 \wedge n = 2\boldsymbol{b} + 1, \exists a, b \in \mathbb{Z} \implies m + n \in \mathbb{Z}_p$. (donde $\mathbb{Z}_p$ es el conjunto de los números enteros pares).

Utilizando esta formulación es más corta la demostración, tal como se verá en los ejemplos que siguen.

Ejemplo 5:

Si $x = 2a + 1 \wedge y = 2b + 1, \exists\, a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $x, y \in \mathbb{Z}_i$ (el producto de dos impares, es número impar).

Demostración:

$x = 2a + 1 \wedge y = 2b + 1, \exists\, a, b \in \mathbb{Z} \implies$

$xy = (2a + 1)(2b + 1) = (4ab + 2a + 2b + 1) = 2(2ab + a + b) + 1 = 2c + 1,$

donde $c = (2ab + a + b) \in \mathbb{Z}$; por Ley Uniforme.

Se aplicó propiedad distributiva, factorización y se asignó c a la expresión $(2ab + a + b)$, el cual, es un número entero.

Dado que, $xy = 2c + 1$, $\exists\, c \in \mathbb{Z}$, entonces, $xy \in \mathbb{Z}_i$

Nota:

$\mathbb{Z}_i$ es el conjunto de los números enteros impares.

Como un caso particular de lo anterior, se obtiene el corolario que sigue:

Corolario:

Si $\boldsymbol{n}$ es un número impar, entonces $\boldsymbol{n^2}$ es número impar.

Es un caso particular, porque para $x = y = \boldsymbol{n}$, se cumple que $xy = \boldsymbol{n^2} = 2c + 1 \in \mathbb{Z}$

Sin embargo, si se desea demostrar, se puede seguir exactamente los mismos pasos realizados en la demostración anterior, en tal caso se escribe $\boldsymbol{n}$ en lugar de $\boldsymbol{x}$, y $\boldsymbol{n}$ en lugar de $\boldsymbol{y}$.

Ejemplo 6:

Si $x = 2a \wedge y = 2b, \exists\, a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $x, y \in \mathbb{Z}_p$ (El producto de dos pares, es número par).

Demostración:

Si $x = 2a \wedge y = 2b, \exists\, a, b \in \mathbb{Z}$, entonces, por propiedad uniforme de la igualdad, propiedad asociativa, conmutativa y factorización, se tiene:

$xy = (2a)(2b) = 4(ab) = 2(2ab) = 2c; c = 2ab \in \mathbb{Z}$.

Dado que, $xy = 2c$ y $c \in \mathbb{Z}$, entonces, $xy \in \mathbb{Z}_p$.por definición de número par.

Nota:

Como un caso particular del ejemplo 6, se obtiene el corolario que sigue.

Corolario:

Si $\boldsymbol{n}$ es un número par, entonces $\boldsymbol{n^2}$ es número par.

Este corolario, es un caso particular del ejemplo 6, porque si $x = y = \boldsymbol{n}$, claramente se tiene que: $xy = \boldsymbol{n^2} = 2c, \exists\, c \in \mathbb{Z}$.

No obstante, si se desea demostrar se puede seguir exactamente los mismos pasos realizados en el ejemplo 6, para lo cual, se escribe $\boldsymbol{n}$ en lugar de $\boldsymbol{x}$, y $\boldsymbol{n}$ en lugar de y.

Ejemplo 7:

$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_p; (x - y) \in \mathbb{Z}_p$; esto es, la diferencia de dos de números pares, es número par.

Demostración:

$\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_p: x = 2a \wedge y = 2b, \exists\, a, b \in \mathbb{Z}$, por definición de Número Par.

Si $x = 2a \wedge y = 2b, \exists\, a, b \in \mathbb{Z}$, entonces, por ley uniforme, se obtiene:

$x - y = (2a) - (2b) = 2(a - b) = 2c; c = (a - b) \in \mathbb{Z}$; por factorización y asignación a c a la expresión $(a - b)$.

Dado que, $x - y = 2c, \exists\, c \in \mathbb{Z}$, entonces, $(x - y) \in \mathbb{Z}_p$; por definición de número par.

Nota:

La proposición anterior se puede expresar en términos de implicación, así:

$x, y \in \mathbb{Z}_p \Longrightarrow (x - y) \in \mathbb{Z}_p$.

Ejemplo 8:

Para números reales x, y, z: $x < y \wedge z < 0 \Longrightarrow xz > yz$

Demostración:

$x < y \wedge z < 0 \Longrightarrow$ aplicando la definición del Orden en los Reales:

$x + t = y, \exists\, t > 0 \wedge z < 0 \Longrightarrow$; por Ley Uniforme y Propiedad Distributiva, se tiene que:

$(x + t)z = yz \Longrightarrow x\,z\; +\; t\,z \;=\; y\,z \;\Longrightarrow$ reemplazando (tz) por k y considerando que k es real negativo, $xz + k = yz \Longrightarrow$ aplicando trasposición de términos:

$xz = yz + (-k) \Longrightarrow$ aplicando la definición del orden en los Reales, y que $-k$ es positivo, se tiene: $xz > yz$.

Nota:

La anterior proposición se enuncia así:

Si se multiplica los dos miembros de una desigualdad por un mismo real negativo, entonces se obtiene una desigualdad de “sentido contrario”.

Otra forma para demostrar la proposición, es la siguiente:

$x < y \wedge z < 0 \Longrightarrow$

$x - y < 0 \wedge z < 0 \Longrightarrow$ Por propiedad de la desigualdad.

$(x - y)z > 0 \Longrightarrow$ El producto de reales negativos, es un real positivo.

$xz - yz > 0 \Longrightarrow$ Aplicación de propiedad distributiva.

$xz > yz$ Por propiedad de la desigualdad.

Ejemplo 9:

Para m, n reales negativos: $m < n \Longrightarrow m^2 > n^2$.

Demostración:

$m < n \Longrightarrow$

$mm > nm$ y $mn > nn \Longrightarrow$ Por la propiedad anterior.

$m^2 > nm$ y $mn > n^2 \Longrightarrow$ Por notación exponencial.

$m^2 > n^2$ Por propiedad transitiva de la desigualdad.

Nota:

La proposición del ejemplo 9, se puede enunciar así:

Si se eleva al cuadrado los dos miembros de una desigualdad de reales negativos, se obtiene una desigualdad de "sentido contrario".

Ejemplo 10:

Para m, n reales positivos, $m^2 < n^2 \Longrightarrow m < n$.

Demostración:

$m^2 < n^2 \Longrightarrow$

$m^2 - n^2 < 0 \Longrightarrow$ Por propiedad de la desigualdad de reales.

$(m + n)(m - n) < 0 \Longrightarrow$ Por diferencia de cuadrados:

$\frac{(m+n)(m-n)}{m+n} < \frac{0}{m+n} \Longrightarrow$ Se divide ambos miembros de la desigualdad por el real positivo $(m + n)$.

$(m–n) < 0 \Longrightarrow$ Se efectúa la división.

$m < n$ Por propiedad de la desigualdad de reales.

Nota:

Cuando se multiplica o divide los dos miembros de una desigualdad por un real positivo, se obtiene una desigualdad de "idéntico sentido". Observe que $(m + n)$ es real positivo porque es la suma de reales positivos.

La proposición del ejemplo 10, se puede formular así:

Si se extrae la raíz cuadrada a los dos términos de una desigualdad de cuadrados de reales positivos, entonces se obtiene una desigualdad "del mismo sentido".

4.1.5 Ejercicios propuestos de Matemáticas Generales

Si un número entero $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 15, entonces, $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 3 y de 5.

La suma de dos números pares es un número par.

Si $x = 2a \wedge y = 2b + 1, \exists\ a, b \in \mathbb{Z}$, entonces, $xy \in \mathbb{Z}_p$ (El producto de un par con un impar, es par).

Si $x = 2a \wedge y = 2b + 1, \exists\ a, b \in \mathbb{Z}$, entonces $(x + y) = 2c + 1, \exists\ c \in \mathbb{Z}$ (La suma de un par con un impar, es impar).

$x, y \in \mathbb{Z}_i \Longrightarrow (x - y) \in \mathbb{Z}_p$ (La diferencia de números impares, es número par).

$n \in \mathbb{Z}_i \Longrightarrow n^2 \in \mathbb{Z}_i$.

$n \in \mathbb{Z}_p \Longrightarrow n^2 \in \mathbb{Z}_p$.

Para números reales x, y, z: $x < y \wedge z > 0 \Longrightarrow xz < yz$.

Para x, y reales negativos: $x^2 < y^2 \Longrightarrow x > y$.

Para x, y reales positivos: $x < y \Longrightarrow x^2 < y^2$.

Nota:

Las proposiciones de los ejercicios 8, 9 y 10, se pueden formular de la siguiente manera:

Si se multiplica los dos miembros de una desigualdad por un mismo real positivo, entonces se obtiene otra desigualdad del "mismo sentido".

Si se extrae la raíz cuadrada a los dos miembros de una desigualdad de cuadrados de reales negativos, se obtiene una desigualdad de "sentido contrario".

Si se eleva al cuadrado ambos miembros de una desigualdad de reales positivos, se obtiene una desigualdad del "mismo sentido".

4.2. Métodos Indirectos

Consiste en demostrar que una proposición q es verdadera o que se obtiene la proposición q a partir de una proposición p que se asume verdadera, sin partir necesariamente de p.

4.2.1 Método por Contraposición o Contra Recíproca

Consiste en demostrar un teorema o una afirmación de la forma $p \Longrightarrow q$, evidenciando la veracidad de su contra recíproca $\sim q \Longrightarrow \sim p$. Esto es válido, porque la proposición $p \Longrightarrow q$ es equivalente a la proposición $\sim q \Longrightarrow \sim p$.

Esto es, si negando la tesis q se obtiene la negación de la hipótesis p, entonces la proposición $p \Longrightarrow q$ es verdadera.

La proposición $[(p \Longrightarrow q) \wedge \sim q] \Longrightarrow \sim p$ es Tautología; corresponde al Modus Tollendo Tollens.

Este método se aplica, sobre todo, cuando no es posible o se dificulta realizar la demostración de la proposición $p \Longrightarrow q$ por el Método Directo; no obstante, también se puede aplicar este método, aunque fuera posible realizar la demostración por el Método Directo.

4.2.1.1 Ejemplos de Aritmética y Álgebra Elemental

Ejemplo 1:

Si un número entero $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 3 y de 5, entonces, $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 15.

La Contra recíproca es la siguiente:

Si $\boldsymbol{m}$ no es múltiplo de 15, entonces, $\boldsymbol{m}$ no es múltiplo de 3 o no es múltiplo de 5.

Demostración:

Si $\boldsymbol{m}$ no es múltiplo de 15, entonces $\boldsymbol{m} \neq 15t$, $\forall\, t \in \mathbb{Z}$. Esto es una consecuencia de la definición de Multiplicidad.

Si $\boldsymbol{m} \neq 15t\ \forall\, t \in \mathbb{Z}$, entonces $\boldsymbol{m} \neq 3(5t)$ o $\boldsymbol{m} \neq 5(3t)$. Por Factorización.

Si $\boldsymbol{m} \neq 3(5t)$ o $\boldsymbol{m} \neq 5(3t)$, entonces $\boldsymbol{m} \neq 3(k)$ o $\boldsymbol{m} \neq 5(h)$. Se reemplazó $5t$ por k y $3t$ por h; $k, h \in \mathbb{Z}$.

Si $\boldsymbol{m} \neq 3k$ o $\boldsymbol{m} \neq 5h$, $\forall\, k, h \in \mathbb{Z}$. De aquí se deduce que, $\boldsymbol{m}$ no es múltiplo de 3 o $\boldsymbol{m}$ no es múltiplo de 5.

Nota:

Demostrar la proposición por el método directo, presenta dificultades o en algunos casos, puede ser imposible realizarlo.

Ejemplo 2:

Para $n \in \mathbb{Z}, n^2 \in \mathbb{Z}_p \Longrightarrow n \in \mathbb{Z}_p$.

Contra recíproca: para $n \in \mathbb{Z}, n \notin \mathbb{Z}_p \Longrightarrow n^2 \notin \mathbb{Z}_p$.

Demostración:

$$n \notin \mathbb{Z}\boldsymbol{p} \Longrightarrow n \in \mathbb{Z}_i \Longrightarrow n = 2\boldsymbol{a} + 1, \exists\, \boldsymbol{a} \in \mathbb{Z} \Longrightarrow n^2 = (2\boldsymbol{a} + 1)^2 = (4\boldsymbol{a^2} + 4\boldsymbol{a} + 1)$$
$$= 2(2\boldsymbol{a^2} + 2\boldsymbol{a}) + 1$$

$= 2(\boldsymbol{b}) + 1, \text{donde } b = 2\boldsymbol{a^2} + 2\boldsymbol{a} \in \mathbb{Z}$.

Como $n^2 = 2(\boldsymbol{b}) + 1, \exists\, b \in \mathbb{Z}$, entonces: $n^2 \in \mathbb{Z}_i \Longrightarrow n^2 \notin \mathbb{Z}_p$.

Justificaciones:

Paso 1. Cualquier entero, si no es par, entonces es impar y viceversa.

Paso 2. Por definición de Número Impar.

Paso 3. Se elevó al cuadrado cada miembro de la igualdad, se desarrolló el cuadrado del binomio, se factorizó y se asignó b a $(2\boldsymbol{a^2} + 2\boldsymbol{a})$, el cual es número entero.

Paso 4. Definición de número impar.

Paso 5: La misma justificación del paso 1.

Otro proceso para demostrar la contra recíproca, es el siguiente:

$n \notin \mathbb{Z}_p \Longrightarrow n \neq 2t, \forall \in \mathbb{Z} \Longrightarrow n^2 \neq (2t)^2 \Longrightarrow n^2 \neq 4t^2 \Longrightarrow n^2 \neq 2(2t^2) \Longrightarrow n^2 \neq 2(k), \forall\, k \in \mathbb{Z}$, donde $k = 2t^2 \in \mathbb{Z}$.

Ahora bien, $n^2 \neq 2(k), \forall\, k \in \mathbb{Z} \Longrightarrow n \notin \mathbb{Z}_p$.

Ejercicios propuestos:

Demostrar las siguientes proposiciones:

Si un número entero $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 2 y de 5, entonces, $\boldsymbol{m}$ es múltiplo de 10. También se la puede expresar así: $\boldsymbol{m} = 2\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{m} = 5\boldsymbol{b} \Longrightarrow \boldsymbol{m} = 10\boldsymbol{c}, \exists\, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{Z}$.

Para $n \in \mathbb{Z}, n^2 \in \mathbb{Z}_i \Longrightarrow n \in \mathbb{Z}_i$.

4.2.1.2 Ejemplos relacionados con conjuntos

Ejemplo 1:

$A \subset B \Longrightarrow B' \subset A'$.

La Contra recíproca es: $B' \not\subset A' \Longrightarrow A \not\subset B$.

Demostración:

$B' \not\subset A' \Longrightarrow (x \in B' \wedge x \notin A') \Longrightarrow (x \notin B \wedge x \in A) \Longrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \Longrightarrow A \not\subset B$.

Justificaciones:

Paso 1. Consecuencia de la definición de inclusión.

Paso 2. Por Ley de Complemento.

Paso 3. Propiedad conmutativa de la conjunción.

Paso 4. Consecuencia de la definición de inclusión.

Nota:

Por definición de inclusión de conjuntos, se tiene que: $M \subset N \Leftrightarrow (\forall\, x \in M \Longrightarrow x \in N)$. Este Bicondicional es verdadero por definición.

Negando ambas proposiciones del bicondicional, se obtiene: $M \not\subset N \Leftrightarrow (\exists\, x \in M \wedge x \notin N)$, que constituye un bicondicional verdadero.

Según lo anterior, $M \not\subset N \Longrightarrow (\exists\, x \in M \wedge x \notin N)$ pero $(\exists\, x \in M \wedge x \notin N) \Longrightarrow M \not\subset N$.

En el primer paso de la demostración del ejemplo anterior, se tomó la Implicación:

$M \not\subset N \Longrightarrow (\exists\, x \in M \wedge x \notin N)$.

Recordar que la proposición $p \Leftrightarrow q$ es equivalente a la contra recíproca:$\sim p \Leftrightarrow \sim q$.

Además, $\sim (p \Longrightarrow q)$ es equivalente con $p \wedge \sim q$; en este caso:

$\sim (\exists x \in M \Longrightarrow x \notin N) \Leftrightarrow (\exists\, x \in M \wedge x \notin N)$.

Ejemplo 2:

$(M \subset N) \wedge (N \subset M) \Longrightarrow M = N$.

Contra recíproca: $M \neq N \Longrightarrow (M \not\subset N) \vee (N \not\subset M)$.

Demostración:

$M \neq N \Longrightarrow \sim (\forall\, x \in M \Leftrightarrow x \in N)$

$\Longrightarrow \sim [(\forall\, x \in M \Longrightarrow x \in N) \wedge (\forall x \in N \Longrightarrow x \in M)]$

$\Longrightarrow \sim (\forall\, x \in M \Longrightarrow x \in N) \vee \sim(\forall\, x \in N \Longrightarrow x \in M)$

$\Longrightarrow \sim (M \subset N) \vee \sim(N \subset M) \Longrightarrow (M \not\subset N) \vee (N \not\subset M)$

Justificaciones:

Paso 1. Definición de la igualdad de conjuntos.

Paso2. Equivalencia del bicondicional.

Paso3. Ley de D'Morgan aplicada a una conjunción.

Paso4. Por definición de inclusión de conjuntos.

Paso4. Se aplica la negación.

Nota:

$M = N \Longleftrightarrow (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$ se puede considerar una definición o también, una consecuencia de la definición de igualdad de conjuntos.

Negando ambas proposiciones del bicondicional, se tiene: $M \neq N \Longleftrightarrow \sim (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$.

Según lo anterior, $M \neq N \Longrightarrow \sim (\forall\, x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$ pero $\sim (\forall x \in M \Longleftrightarrow x \in N) \Longrightarrow M \neq N$.

En el paso de la demostración, se consideró la primera, $M \neq N \Longleftrightarrow \sim (x \in M \Longleftrightarrow x \in N)$.

Se debe tener en cuenta que, si $(\forall\, x \in M \Longrightarrow x \in N)$, entonces $(M \subset N)$.

Ejercicios:

Demostrar por el método indirecto de contra recíproca y por el método directo, las siguientes proposiciones:

$B' \subset A' \Longrightarrow A \subset B$.

$A \subset B' \Longrightarrow B \subset A'$.

$A' \subset B \Longrightarrow B' \subset A$.

4.2.2 Método por Contradicción o Reducción al Absurdo

Consiste en demostrar un teorema o una afirmación T, evidenciando que la negación de T implica o conduce a una contradicción. Esto es, se asume o se supones que $\sim T$ es verdadera y se demuestra la proposición $\sim T \Longrightarrow \boldsymbol{C}$, donde $\boldsymbol{C}$, es una Contradicción o proposición falsa. De esta manera, dado que $\sim T \Longrightarrow \boldsymbol{C}$ es verdadera y $\boldsymbol{C}$ es falsa, entonces teniendo en cuenta los valores de verdad de una Implicación, se concluye que $\sim T$ es falsa y en consecuencia T es verdadera.

Cuando T es una proposición de la forma $p \Longrightarrow q$ (p es la hipótesis, q la tesis), entonces $\sim T$ es la proposición $\sim (p \Longrightarrow q)$ o su equivalente $p \wedge \sim q$ (hipótesis y negación de la tesis). Esta proposición conduce a una Contradicción C. De modo que, demostrando la proposición
$(p \wedge \sim q) \Longrightarrow \boldsymbol{C}$, se concluye que, $(p \wedge \sim q)$ que es $\sim T$, es falsa y en consecuencia $p \Longrightarrow q$ es verdadera.

En muchos casos la contradicción C es la proposición $p \wedge \sim p$.

4.2.2.1 Ejemplos

Ejemplos 1:

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \ldots\}$ el conjunto de los números naturales. Demostrar que $\mathbb{N}$ es infinito.

Demostración:

T: El conjunto $\mathbb{N}$ es infinito.

$\sim T$: El conjunto $\mathbb{N}$ no es infinito.

Si $\mathbb{N}$ no es infinito, entonces $\mathbb{N}$ es finito.

Si $\mathbb{N}$ es finito, entonces, existe un natural $\boldsymbol{m}$ tal que $\boldsymbol{m} \geq x$, para todo $x \in \mathbb{N}$.

Si $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{m} \geq x$, para todo $x \in \mathbb{N}$, entonces $(\boldsymbol{m}+1) \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{m} \geq (\boldsymbol{m}+1)$.

Con el anterior razonamiento, queda demostrada la proposición: $\sim T \Longrightarrow \boldsymbol{C}$, donde $\boldsymbol{C}$ es la proposición falsa: $(\boldsymbol{m}+1) \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{m} \geq (\boldsymbol{m}+1)$.

Como la implicación es verdadera y el consecuente es falso, entonces el antecedente $\sim T$ es falso y en consecuencia, la proposición T es verdadera; es decir, el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito.

Nota:

Si $\boldsymbol{m} \in \mathbb{N}$, la proposición $(\boldsymbol{m}+1) \in \mathbb{N}$ es verdadera; pero la proposición $\boldsymbol{m} \geq (\boldsymbol{m}+1)$ es falsa; por lo cual, es falsa la conjunción $(\boldsymbol{m}+1) \in \mathbb{N}$ y $\boldsymbol{m} \geq (\boldsymbol{m}+1)$.

Ejemplos 2:

Para $n \in \mathbb{Z}$, $T: Si\ n^2 \in \mathbb{Z}_i$ entonces $n \in \mathbb{Z}_i$

$\sim T: n^2 \in \mathbb{Z}_i$ y $n \notin \mathbb{Z}_i$.

Demostración:

$n^2 \in \mathbb{Z}_i$ y $n \notin \mathbb{Z}_i \quad \Longrightarrow n^2 \in \mathbb{Z}_i \;\wedge\; n \in \mathbb{Z}_p$

$\Longrightarrow n^2 \in \mathbb{Z}_i \;\wedge\; n^2 \in \mathbb{Z}_p$

$\Longrightarrow \boldsymbol{C}$, donde C es proposición falsa.

Como la Implicación $\sim T \Longrightarrow C$, es verdadera y C es falsa, entonces, $\sim T$ es falsa y en consecuencia, T es verdadera.

Justificaciones:

Paso 1. Si un entero no es impar, entonces es par.

Paso 2. El cuadrado de un entero par, es entero par.

Nota:

La proposición $C{:}\, n^2 \in \mathbb{Z}_i \;\wedge\; n^2 \in \mathbb{Z}_p$ es falsa, porque un número entero no puede ser impar y par a la vez.

Tener presente que la proposición T es, $T{:}\,\mathrm{Si}\; n^2 \in \mathbb{Z}_i$ entonces, $n \in \mathbb{Z}_i$.

La negación de una implicación $p \Longrightarrow q$ es $p \wedge \sim q$, por lo cual, en este caso, la proposición $\sim T$, es: $\sim T{:}\, n^2 \in \mathbb{Z}_i \;\wedge\; n \notin \mathbb{Z}_i$

4.2.2.2 Ejercicios

Sea $n \in \mathbb{Z}$, demostrar la proposición $T{:}\, si\; n^2 \in \mathbb{Z}_p$ entonces, $n \in \mathbb{Z}_p$.

$\sqrt{2}$ es irracional.

4.2.3 Método por Contraejemplo o Refutación

Se utiliza para demostrar que una proposición es falsa. Consiste en establecer un ejemplo con el cual se prueba la falsedad de la proposición.

Cuando la proposición es de la forma:

$\forall x \in A{:}\, P(x), \forall(x,y) \in A \times B{:}\, P(x,y)$ o $\forall(x,y) \in A^2{:}\, P(x,y)$

y es posible obtener un elemento x de $A, (x,y) de\; A \times B$ o $(x,y)\; de\; A^2$, para los cuales $P(x)$ es falsa, o $P(x,y)$ es falsa, entonces, es falsa la proposición dada.

Lo anterior, también se justifica por lo siguiente: según Ley de D'Morgan, la negación de la proposición $\forall x \in A{:}\, P(x)$ es la proposición $\exists x \in A{:} \sim P(x)$ y si esta proposición es verdadera, entonces $\forall x \in A{:}\, P(x)$ es falsa.

Ahora bien, es suficiente obtener un elemento $x \in A$ para el cual se cumpla la proposición $\sim P(x)$ para afirmar que la proposición $\exists x \in A: \sim P(x)$ es verdadera.

Este elemento $x \in A$, para el cual se cumple $\sim P(x)$, es un contraejemplo de la proposición a demostrar, con lo cual, se puede afirmar que $\forall x \in A: P(x)$ es falsa y a la vez, constituye un ejemplo para afirmar que la proposición $\exists x \in A: \sim P(x)$ es verdadera.

Por otra parte, teniendo en cuenta que, $\forall x \in A: P(x)$ es equivalente a la proposición $x \in A \Rightarrow P(x)$ y la negación de esta última es $x \in A \wedge \sim P(x)$, entonces, si se obtiene un elemento particular $x \in A$ (basta uno solo) para el cual se cumpla la proposición $x \in A \wedge \sim P(x)$, entonces, este constituye un contraejemplo para afirmar que: $\forall x \in A: P(x)$ o que $x \in A \Rightarrow P(x)$ es una proposición falsa.

El mismo análisis se hace para el caso de proposiciones cuantificadas o implicaciones en las cuales intervengan dos variables.

4.2.3.1 Ejemplos

Ejemplos 1:

Si $x \in \mathbb{R}$, entonces, x^2 es mayor que 0.

Se demuestra que la proposición es falsa, con el siguiente contraejemplo: $0 \in \mathbb{R}$ y 0^2 no es mayor que 0.

Nota:

$\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales. En este caso, es el único contraejemplo que se puede presentar.

La proposición si $x \in \mathbb{R}$, entonces, x^2 es mayor que 0, se la puede expresar en forma simbólica, como sigue: $x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 > 0$.

Ejemplos 2:

Para todo número natural $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{n}$ es mayor que 4.

Demostración:

Se demuestra que la proposición es falsa, con el siguiente contraejemplo: $4 \in \mathbb{N}$ y 4 no es mayor que 4.

Nota:

En este ejemplo, también sirven de contraejemplo las siguientes proposiciones:

$1 \in \mathbb{N}$ y 1 no es mayor que 4.

$2 \in \mathbb{N}$ y 2 no es mayor que 4.

$3 \in \mathbb{N}$ y 3 no es mayor que 4.

Ejemplos 3:

Si m^2 es número par, entonces m es número par.

Demostración:

Se demuestra que la proposición es falsa, con el siguiente contraejemplo:

$(\sqrt{6})^2$ es par y $\sqrt{6}$ no es número par.

Nota:

$(\sqrt{6})^2 = 6$ y 6 es número par.

Ejemplos 4:

$x \in \mathbb{R}^* \Longrightarrow x^2 > 1$

Demostración:

Se demuestra que la proposición es falsa, con el siguiente contraejemplo:

$0.5 \in \mathbb{R}^* \wedge (0.5)^2 \ngtr 1$.

Nota:

$\mathbb{R}^*$ es el conjunto de todos los números reales, excepto el cero. $(0.5)^2 = 0.25$ el cual no es mayor que 1.

Ejemplos 5:

$\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: $n^2 + 5n$ es múltiplo de 6.

Demostración:

Se demuestra que $P(n)$ es falsa con el siguiente contraejemplo:$2 \in \mathbb{N} \wedge 2^2 + 5 \times 2 = 14$ no es múltiplo de 6.

Nota:

Con el anterior contraejemplo se está asegurando que $P(2)$ es falsa. También son falsas: $P(4), P\ (5), P\ (7), P(8)$.

Recordar que la negación de la anterior afirmación es la siguiente: $\exists\ n \in \mathbb{N}$ tal que $n^2 + 5n$ no es múltiplo de 6, la cual es verdadera.

Ejemplos 6:

Existe un único número real x, tal que $x^2 = 10$.

Demostración:

Se demuestra que la proposición es falsa con el siguiente contraejemplo:

$\sqrt{10}, -\sqrt{10}$ son número reales y $(\pm\sqrt{10})^2 = 10$.

Nota:

La proposición es falsa, porque existen dos números reales cuyo cuadrado es 10.

4.2.3.2 Ejercicios

Demostrar por contraejemplo las siguientes proposiciones:

1. Si un número entero m es múltiplo de 3, entonces m es múltiplo de 15.
2. Si un número entero m es múltiplo de 5, entonces m es múltiplo de 15.
3. Si x es número real, entonces x es número irracional
4. $x\ \in\ \mathbb{R}^*\ \Longrightarrow\ x^2\ >\ 0.5.$
5. Todo número real es número racional.

Esta proposición en forma simbólica se expresa así:

$\forall\ x\ \in\ \mathbb{R}: x\ \in \mathbb{Q};$ o también $x\ \in\ \mathbb{R}\ \ \Longrightarrow\ x\ \in\ \mathbb{Q}.$

6. Si $\boldsymbol{\frac{a}{b}}$ es número racional, entonces a es entero y b es entero diferente de cero
7. Si m^2 es número impar, entonces m es número impar.

4.2.4 Demostración por casos separados

Para efectuar la demostración de algunas proposiciones es necesario considerar un número finito de casos y realizar la demostración de cada uno por separado.

Por ejemplo, para demostrar un bicondicional $p \Leftrightarrow q$ es necesario considerar los siguientes casos, mismos que se deben demostrar por separado:

Caso 1: $p \Longrightarrow q$.

Caso 2: $p \Longrightarrow q$.

Se debe recordar que el bicondicional $p \Leftrightarrow q$ es una "abreviación" de la siguiente conjunción:

$(p \Longrightarrow q) \wedge (q \Longrightarrow p)$.

Se utiliza el método de los casos separados cuando no es posible o se dificulta demostrar la afirmación "partiendo" de p para "llegar" u obtener q, aplicando el conectivo " $\Leftrightarrow$ " en cada paso. También se aplica este método en proposiciones que incluyen valor absoluto.

4.2.4.1 Ejemplos

Para los ejemplos que siguen, se consideran los números reales $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ y el real positivo k.

Ejemplo 1:

$|x - y| = |y - x|$.

Demostración:

Se presentan dos casos:

Caso 1: $x - y \geq 0$.

Caso 2: $x - y < 0$.

Caso 1:

Si $x - y \geq 0$, entonces por definición de valor absoluto $|x - y| = x - y$.

Por otra parte, si $x - y \geq 0$ entonces, multiplicando ambos lados por -1 y por aplicación de la propiedad de la desigualdad de reales, se obtiene: $y - x \leq 0$.

Si $y - x \leq 0$ entonces, por definición de valor absoluto: $|y - x| = -(y - x) = x - y$.

Dado que, $|x - y| = x - y \wedge |y - x| = x - y$, por propiedad transitiva de la igualdad, se tiene que: $|x - y| = |y - x|$.

Caso 2:

Si $x - y < 0$, entonces por definición de valor absoluto, $|x - y| = -(x - y) = y - x$.

Por otra parte, si $x – y < 0$, entonces multiplicando ambos lados por –1 y por aplicación de la propiedad de la desigualdad de reales, se obtiene: $y - x > 0$.

Si $y - x > 0$, entonces, por definición de valor absoluto: $|y - x| = y - x$.

Dado que, $|x - y| = y - x \wedge |y - x| = y - x$, por propiedad transitiva de la igualdad, se tiene que: $|x - y| = |y - x|$.

Nota:

Otra forma de presentar la demostración del Caso 1, es la siguiente:

Si $x - y \geq 0$, entonces $|x - y| = x - y \wedge y - x \leq 0$; esto por definición de valor absoluto y propiedad de la desigualdad de reales.

Si $|x - y| = x - y \wedge y - x \leq 0$, entonces $|x - y| = x - y \wedge |y - x| = -(y - x) = x - y$; por definición de valor absoluto.

Si $|x – y| = x – y \wedge |y – x| = x – y$, entonces, por propiedad transitiva de la igualdad, se tiene que: $|x - y| = |y - x|$.

Las justificaciones se las puede presentar al final del proceso, tal como se muestra en el Caso 2.

Si $x - y < 0$, entonces $|x - y| = -(x - y) = y - x \wedge y - x > 0$.

Si $|x - y| = y - x \wedge y - x > 0$, entonces $|x - y| = y - x \wedge |y - x| = y - x$.

Si $|x - y| = y - x \wedge |y - x| = y - x$, entonces $|x - y| = |y - x|$.

Justificaciones:

Paso 1: por definición de valor absoluto y propiedad de la desigualdad de reales.

Paso2: por definición de valor absoluto.

Paso3: por propiedad transitiva de la igualdad.

La propiedad de la desigualdad de reales, es la siguiente:

Si $a \leq b \text{ y } c < 0, \text{entonces } ac \geq bc$.

Esta propiedad también es válida con " $<$ ".

Ejemplo 2:

$|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$.

Caso a: $|x| \leq k \Longrightarrow -k \leq x \leq k$.

Subcaso a_1: $|x| \leq k \wedge 0 \leq x$.

Subcaso a_2: $|x| \leq k \wedge x < 0$.

Caso b:

$-k \leq x \leq k \Longrightarrow |x| \leq k$.

Subcaso b_1: $-k \leq x < 0$.

Subcaso b_2: $0 \leq x \leq k$.

Demostración:

Subcaso $\boldsymbol{a_1}$:

$Si\ |x| \leq k \wedge 0 \leq x, \text{entonces}, |x| \leq k \wedge |x| = x \wedge -x \leq 0 \wedge 0 \leq x.$

$Si\ |x| \leq k \wedge |x| = x \wedge -x \leq 0 \wedge 0 \leq x, \text{entonces}, x \leq k \wedge -x \leq x.$

$Si\ x \leq k \wedge -x \leq x, \text{entonces}, x \leq k \wedge -k \leq -x \wedge -x \leq x.$

$Si\ x \leq k \wedge -k \leq -x \wedge -x \leq x, \text{entonces}, x \leq k \wedge -k \leq x.$

$Si\ x \leq k \wedge -k \leq x, \text{entonces}, -k \leq x \wedge x \leq k.$

$Si\ -k \leq x \wedge x \leq k, \text{entonces}, -k \leq x \leq k.$

Justificaciones:

Paso 1. Definición de Valor Absoluto y por trasposición de términos en una desigualdad.

Paso 2. En $|x| \leq k$ se reemplazó $|x|$ por x; por Propiedad Transitiva de la Desigualdad, se tiene que: $(-x \leq 0 \wedge 0 \leq x \Longrightarrow -x \leq x)$

Paso 3. Trasposición de términos en una desigualdad: $(x \leq k \Longrightarrow -k \leq -x)$.

Paso 4. Por Propiedad Transitiva de la Desigualdad: $(-k \leq -x \wedge -x \leq x \Longrightarrow -k \leq x)$.

Paso 5. Por la Propiedad Conmutativa de la Conjunción.

Paso 6. La proposición $-k \leq x \wedge x \leq k$ se la puede expresar o abreviar así $-k \leq x \leq k$.

Nota:

Se puede realizar el anterior proceso empleado una cadena de implicaciones con el símbolo " $\Longrightarrow$ ", así:

$|x| \leq k \wedge 0 \leq x \Longrightarrow |x| \leq k \wedge |x| = x \wedge -x \leq 0 \wedge 0 \leq x \Longrightarrow x \leq k \wedge -x \leq x \Longrightarrow.$

$x \leq k \wedge -k \leq -x \wedge -x \leq x \Longrightarrow x \leq k \wedge -k \leq x \Longrightarrow -k \leq x \wedge x \leq k \Longrightarrow -k \leq x \leq k.$

La respectiva justificación para cada una de las seis implicaciones, son las mismas planteadas anteriormente.

Subcaso $\boldsymbol{a_2}$:

$|x| \leq k \wedge x < 0 \Rightarrow |x| \leq k \wedge |x| = -x \wedge x < 0 \wedge 0 < -x \Rightarrow -x \leq k \wedge x < -x.$

$\Rightarrow -k \leq x \wedge x < -x \wedge -x \leq k \Rightarrow -k \leq x \wedge x \leq k \Rightarrow -k \leq x \leq k.$

Justificaciones:

Paso 1. Definición de Valor Absoluto y por Trasposición de Términos en una Desigualdad.

Paso 2. En $|x| \leq k$ se reemplazó $|x|$ por $-x$ y por Propiedad Transitiva de la Desigualdad:
$(x < 0 \wedge 0 < -x \Rightarrow x < -x)$.

Paso 3. Trasposición de términos en una Desigualdad: $(-x \leq k \Rightarrow -k \leq x)$.

Paso 4. Por Propiedad Transitiva de la Desigualdad: $(x < -x \wedge -x \leq k \Rightarrow -k \leq x)$.

Paso 5. Por la forma abreviada de la proposición:$-k \leq x \wedge x \leq k$.

Nota:

El proceso también puede realizarse tal como la primera forma, en el subcaso a_1.

Demostrados los subcasos a_1 y a_2, queda demostrado el caso a.

Subcaso $\boldsymbol{b_1}$:

$-k \leq x < 0 \Rightarrow -x \leq k \wedge |x| = -x \Rightarrow |x| \leq k.$

Justificaciones

Paso 1. Por trasposición de términos y definición de valor absoluto.

Paso 2. En $-x \leq k$ se reemplazó $-x$ por $|x|$.

Subcaso $\boldsymbol{b_2}$:

$0 \leq x \leq k \Rightarrow x \leq k - |x| = x \Rightarrow |x| \leq k.$

Justificaciones:

Paso 1. Por definición de Valor Absoluto.

Paso 2. En $x \leq k$ se reemplazó x por $|x|$. También se justifica por la propiedad transitiva de la desigualdad.

Demostrados los subcasos b_1 y b_2, queda demostrado el caso b.

Finalmente, demostrados los casos a y b, queda demostrada la proposición:

$|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$.

Ejemplo 3:

Si r es número entero, entonces $r(r \ + 1)$ es número par.

Demostración:

Se presentan dos casos:

Caso a: r entero par.

Caso b: r entero impar.

Caso a:

Si r entero par, entonces $r = 2k$, donde k es número entero.

Si $r = 2k$, entonces $r(r+1) = 2k(2k+1) = 2(2k+k) = 2h$; donde $h = (2k+k)$, es número entero.

Si $r(r+1) = 2h$, donde h es número entero, entonces $r(r+1)$ es número par.

Justificaciones:

Paso 1. Por definición de número par.

Paso 2: En $r(r+1)$ se reemplaza r por $2k$ y luego se realiza una factorización, distribución y una asignación.

Paso 3: Se aplica definición de número par.

Caso b:

Si r entero impar, entonces; $r = 2k + 1$, donde k es número entero.

Si $r = 2k + 1$, entonces:

$$r(r+1) = (2k+1)((2k+1)+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) = 2h$$

donde $h = (2k+1)(k+1)$, es número entero.

Si $r(r+1) = 2h$, donde h es número entero, entonces $r(r+1)$ es Número Par.

Justificaciones:

Paso 1. Por definición de número impar.

Paso 2. En $r(r+1)$ se reemplaza r por $2k+1$ y luego se realiza una suma, se factoriza 2 y se efectúa una asignación.

Paso 3. Se aplica definición de número impar.

Demostrados los casos a y b, queda demostrada la proposición dada del ejemplo 3.

4.2.4.2 Ejercicios

Utilizando el método indirecto de casos separados, demostrar las siguientes proposiciones:

1. $n \in \mathbb{Z}_p \Leftrightarrow n^2 \in \mathbb{Z}_p$ para $n \in \mathbb{Z}$.

2. $n \in \mathbb{Z}_i \Leftrightarrow n^2 \in \mathbb{Z}_i$ $para$ $n \in \mathbb{Z}$.

3. $|xy| = |x||y|$.

4. $|x| \geq k \Leftrightarrow x \leq -k$ o $k \leq x$.

Sugerencias respecto a los casos que se presentan para la demostración de estas proposiciones:

Para 1. Caso a: $n \in \mathbb{Z}_p \Longrightarrow n^2 \in \mathbb{Z}_p$; Caso b: Para $n \in \mathbb{Z}; n^2 \in \mathbb{Z}_p \Longrightarrow n \in \mathbb{Z}_p$.

Para 2. Caso a: $n \in \mathbb{Z}_i \Longrightarrow n^2 \in \mathbb{Z}_i$; Caso b: Para $n \in \mathbb{Z}; n^2 \in \mathbb{Z}_i \Longrightarrow n \in \mathbb{Z}_i$.

Para 3. Caso a: $0 \leq x \wedge 0 \leq y$; Caso b: $x \leq 0 \wedge y \leq 0$.

Caso c: $x \leq 0 \wedge 0 \leq y$; Caso d:$0 \leq x \wedge y \leq 0$.

Para 4:

Caso a: $|x| \geq k \Longrightarrow x \geq -k \vee k \leq x$.

Subcaso $\boldsymbol{a_1}$:$|x| \leq k \wedge 0 \leq x$.

Subcaso $\boldsymbol{a_2}$: $|x| \leq k \wedge x < 0$.

Caso b: $x \leq -k \vee k \leq x \Longrightarrow |x| \leq k$.

Subcaso $\boldsymbol{b_1}$: $x \leq -k$.

Subcaso $\boldsymbol{b_2}$: $k \leq x$.

4.2.5 Demostración por el Principio de Inducción Matemática

Este método se aplica, fundamentalmente, en proposiciones planteadas en términos de números naturales, es decir, en proposiciones de la siguiente forma:

$\forall n \in \mathbb{N}: P(n)$ o $P(n), \forall n \in \mathbb{N}$.

El proceso consiste en dos pasos:

Paso 1. Comprobar que $P(1)$ es verdadera.

Paso 2. Demostrar la proposición $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$.

Según esto, si $P(1)$ es verdadero y $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$ es verdadera, entonces $P(n)$ es verdadera "n $\in \mathbb{N}$.

Tener en cuenta que, para demostrar una implicación, el antecedente es una proposición verdadera. Se la considera verdadera, por esto se dice que es una verdad hipotética. En este caso, $P(k)$ es verdadera.

Si $P(1)$ es verdadera, entonces, aplicando la implicación del Paso 2, $P(2)$ es verdadera, $P(3)$ es verdadera, $P(4)$ es verdadera, $P(5)$ es verdadera. De aquí se concluye que, $P(n)$ es verdadera para todo número natural n.

Afirmar que $P(1)$ es verdadera, es lo mismo afirmar que $P(n)$ es verdadera o que se cumple para $n = 1$.

La proposición $P(k+1)$ es la proposición siguiente a $P(k)$, donde k es un número natural cualquiera.

En pocos casos la proposición puede estar planteada así: $P(n), \forall n \in M$ donde M es un subconjunto de $\mathbb{N}$.

Por ejemplo, $M = \{n \in \mathbb{N}/n \geq a\} = \{a, a+1, a+2, a+3, \cdots\}$; como caso particular,

$M = \{3,4,5,6,7, \cdots\}$.

En estos casos, el Paso 1, consiste en comprobar si $P(n)$ se cumple para $n = a$.

Otro ejemplo:

$M = \{x \in N/x = 3h, \text{donde } h \in N\} = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, \cdots\}$.

En este caso, el Paso 1, consiste en comprobar que $P(3)$ es verdadera, la cual es la “primera” proposición. La siguiente proposición es $P(6)$, la siguiente a esta, es $P(9)$. En general, la proposición siguiente a $P(k)$, donde $k \in M, \text{es } P(k+3)$.

4.2.5.1 Temas preliminares

En algunos casos, se utiliza el símbolo sigma $\sum$ (Sumatoria) para abreviar una suma de términos en los cuales hay una ley de formación; en este caso, los términos están representados por una variable i (índice) que toma valores naturales.

Ejemplos:

El Cuadro 10, contiene varios ejemplos de expresiones con sumatorias.

Cuadro 10.
Ejemplos de sumatorias

$1+2+3+4+5+6=\sum_{i=1}^{6}(i)$	Suma de los primeros seis números naturales.
$1+2+3+4+5+6+\ldots+\boldsymbol{n}=\sum_{i=1}^{n} i$	Suma de los primeros $\boldsymbol{n}$ números naturales.
$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+\boldsymbol{n^2}$	Suma de los cuadrados de los primero $\boldsymbol{n}$ números naturales.
$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+\boldsymbol{n^3}$	Suma de los cubos de los primeros n números naturales.
$\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=(2*1-1)+\cdots+(2n-1)$	Sumatoria de i= 1 hasta i= n; de (2i-1).

Propiedad y casos particulares

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{k} i + \sum_{i=k+1}^{n} i \;;\; \text{para } k<n.$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k} i\right)+(k+1)=\sum_{i=1}^{k+1} i.$$

$$\sum_{i=1}^{4} i^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3.$$

$$\sum_{i=1}^{4}(2i-1)=(2\times 1-1)+(2\times 2-1)+(2\times 3-1)+(2\times 4-1)=1+3+5+7=16.$$

Nota:

Si para todo número natural n, $P(n)\colon \sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$, entonces $P(k)\colon \sum_{i=1}^{k} i=\frac{k(k+1)}{2}$ y siguiendo el orden de los números naturales, la proposición que sigue a la proposición $P(k)$ es $P(k+1)$, donde $P(k+1)\colon \sum_{i=1}^{k+1} i=\frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$.

En las expresiones anteriores, se reemplaza n por k y se obtiene $P(k)$ y se reemplaza n por $k+1$ y se obtiene $P(k+1)$.

4.2.5.2 Ejemplos

Ejemplo 1:

Demostrar que:

$$P(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración:

Paso 1:

$$P(1): \sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2} \longrightarrow 1 = \frac{1(2)}{2} = 1.$$

Se tiene que $P(1)$ es verdadera.

Paso 2:

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \longrightarrow \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (\mathrm{k}+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (\mathrm{k}+1)$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Luego, si $P(k): \sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, entonces $P(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)\,((k+1)+1))}{2}$.

Esto es, si $P(k)$ es verdadera, entonces $P(k+1)$ también es verdadera.

De los pasos 1 y 2, se deduce que $P(n)$ es verdadera; esto es:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Justificaciones del paso 2:

Se sumó $(k+1)$ a los dos lados de la igualdad: $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$, que corresponde a la proposición $P(k)$.

Se aplicó una Propiedad de la Sumatoria, se sumó fracciones y se factorizó $(k+1)$.

Con lo anterior, se obtiene la proposición $P(k+1)$: $\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$.

Nota:

En el Paso 1, se demostró que $P(\boldsymbol{n})$ es verdadera para $\boldsymbol{n} = 1$.

En el Paso 2, se demostró la proposición: $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$.

Se sumó $k+1$ a los dos miembros en $P(k)$, por lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{k}.$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + \mathrm{k} + (\mathrm{k}+1) = \sum_{i=1}^{k} i + (\mathrm{k}+1).$$

Ejemplo 2:

Demostrar que:

$$P(\boldsymbol{n}): \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración:

Paso 1:

$$P(1): \sum_{i=1}^{1} i^3 = \frac{1^2(1+1)^2}{4} \longrightarrow 13 = \frac{1(2)^2}{4} \longrightarrow 1 = \frac{4}{4} = 1.$$

Se observa que $P(1)$ es verdadera.

Paso 2:

Si $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$ entonces,

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2[k^2 + 4(k+1)]}{4} = \frac{(k+1)^2[k^2 + 4k + 4)]}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\longrightarrow \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2\,(k\ +2)^2}{4}$$

Esta igualdad corresponde a la proposición $P(k+1)$

En el Paso 2, se demostró la proposición: $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$

De los pasos 1 y 2, se deduce que $P(n)$ es verdadera para todo número natural n; esto es:

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Justificaciones del paso 2:

Se sumó $(k+1)^3$ a los dos lados de la igualdad $\sum_{i=1}^{k} i^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$, que corresponde a la proposición $P(k)$

Se aplicó una propiedad de la Sumatoria, se sumó fracciones y se factorizó $(k+1)^2$.

Se distribuyó y factorizó un trinomio cuadrado perfecto.

Con lo anterior, se obtuvo la proposición:

$$P(k+1): \sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}.$$

Nota:

Se suma $(k+1)^3$ a los dos miembros de $P(k)$, por lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \mathrm{k}^3.$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \mathrm{k}^3 + (k+1)^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3.$$

Ejemplo 3:

Demostrar que:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demostración:

Esta igualdad se puede demostrar por inducción matemática, sin embargo, utilizando los ejemplos 1 y 2 anteriores, se puede seguir otro proceso, así:

Dado que, $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$, entonces,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \sum_{i=1}^{n} i^3.$$

Justificaciones:

Se inicia con la proposición demostrada en el ejemplo 1.

Se eleva al cuadrado los dos lados de la igualdad.

Se aplica propiedad o Leyes de los Exponentes.

Se finaliza con la proposición demostrada en el ejemplo 2.

Nota:

Según la proposición del ejemplo 3, se tiene lo siguiente:

$(1+2+3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 \longrightarrow 6^2 = 1 + 8 + 27 \longrightarrow 36 = 36.$

$(1+2+3+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 \longrightarrow 10^2 = 1 + 8 + 27 + 64 \longrightarrow 100 = 36 + 64.$

$(1+2+3+4+5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \longrightarrow 15^2 = 1 + 8 + 27 + 64 + 125 \longrightarrow 225 = 100 + 125.$

Ejemplo 4:

Demostrar que:

$\forall n \in \mathbb{N}, P(n): n(n+1) = 2t$; donde $t \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Paso 1:

$P(1): 1(1+1) = 1 \times 2 = 2 \times 1 = 2 \times t; t = 1.$

Se observa que $P(1)$ es verdadera.

Paso 2:

Si $k(k+1) = 2\boldsymbol{d}$; donde $\boldsymbol{d} \in \mathbb{N}$, entonces,

$k(k+1) + 2(k+1) = 2\boldsymbol{d} + 2(k+1) \longrightarrow (k+1)(k+2) = 2(\boldsymbol{d} + k + 1) \longrightarrow$

$(k+1)(k+2) = 2\boldsymbol{r}$, donde $r = (\boldsymbol{d} + k + 1) \in \mathbb{N}$.

Luego, si $k(k+1) = 2\boldsymbol{d}, \exists\ \boldsymbol{d} \in \mathbb{N}$, entonces, $(k+1)(k+2) = 2\boldsymbol{r}, \exists\ \boldsymbol{r} \in \mathbb{N}$.

De los pasos 1 y 2, se deduce que, $P(n)$ es verdadera.

Explicación del paso 2:

Se suma $2(k+1)$ a los dos miembros de la igualdad: $k(k+1)=2\boldsymbol{d}$.

En la igualdad resultante, en el primer miembro se factoriza $(k+1)$ y en el segundo el 2.

Se reemplaza $(\boldsymbol{d}+k+1)$ por $\boldsymbol{r}$, el cual es número natural.

Nota:

En este ejemplo se demostró que $n(n+1)$ es múltiplo de 2 o que es número par para todo número natural n.

Dado que, $P(k): k(k+1)=2\boldsymbol{d}, \exists \boldsymbol{d} \in \mathbb{N}$ y $P(k+1): (k+1)(k+2)=2\boldsymbol{r}, \exists\, \boldsymbol{r} \in \mathbb{N}$, en el Paso 2 se demostró la implicación: $P(k) \Longrightarrow P(k+1)$; es decir, se demostró que si $k(k+1)$ es múltiplo de 2, entonces $(k+1)(k+2)$ es múltiplo de 2. Los literales $\boldsymbol{d}$ y $\boldsymbol{r}$ se toman arbitrariamente.

En muchos casos es necesario plantear la proposición $P(k+1)$ por aparte, en hoja borrador, para determinar qué acción debe realizarse en $P(k)$ con el fin de obtener la proposición
$P(k+1)$. Obviamente, esto no se incluye en la demostración, se trata de una estrategia que ayuda a realizar el Paso 2.

En este ejemplo, dado que $P(k): k(k+1)=2\boldsymbol{d}$ y $P(k+1): (k+1)(k+2)=2\boldsymbol{r}$, la cual se obtiene reemplazando n por $k+1$ en $P(n)$,se tiene lo siguiente:

$$P(k+1): (k+1)(k+2)=k2+3k+2=k2+k+2k+2=k(k+1)+2(k+1)=2\boldsymbol{r}.$$

Como se observa en lo anterior, para obtener la proposición $P(k+1)$ a partir de $P(k)$ se suma $2(k+1)$ a los dos miembros de la igualdad $k(k+1)=2\boldsymbol{d}$.

Ejemplo 5:

Demostrar que:

$\forall n \in N, P(n): n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 3.

Demostración:

Antes de realizar la demostración, se establecen las proposiciones:

$P(k): k(k+1)(k+2)$ es múltiplo de 3.

$P(k+1): (k+1)(k+2)(k+3)$ es múltiplo de 3.

Paso1:

Para $n = 1$: $1(1+1)(1+2) = 1 \times 2 \times 3 = 6$, y 6 es múltiplo de 3. Por lo tanto, la proposición $P(n)$ es verdadera para $n = 1$.

Paso2:

Si $k(k+1)(k+2)$ es múltiplo de 3, entonces,

$k(k+1)(k+2) = 3t$, donde $t \in \mathbb{N}$.

Si $k(k+1)(k+2) = 3t$, entonces,

$k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2) = 3t + 3(k+1)(k+2)$.

Si $k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2) = 3t + 3(k+1)(k+2)$, entonces,

$(k+1)(k+2)(k+3) = 3\big(t + (k+1)(k+2)\big) = 3h$.

Si $(k+1)(k+2)(k+3) = 3h$, donde $h = t + (k+1)(k+2) \in \mathbb{N}$, entonces,

$(k+1)(k+2)(k+3)$ es múltiplo de 3.

En el Paso 2 se demostró la implicación: $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

De los pasos 1 y 2, se deduce que la proposición $P(n)$ es verdadera.

Justificaciones y explicaciones del paso 2:

Se empieza con la proposición $P(k)$ y se aplica definición de multiplicidad, en este caso, para números naturales.

En la igualdad obtenida, a los dos miembros se suma: $3(k+1)(k+2)$.

En la igualdad resultante, en el primer miembro se factoriza $(k+1)(k+2)$ y en el segundo, el factor 3.

Se asigna h a la expresión $t + (k+1)(k+2)$ y se concluye la proposición $P(k+1)$.

Nota:

La proposición del ejemplo 5 se la puede establecer así:

$P(n): \forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2) = 3t, \exists\, t \in \mathbb{N}$; de esta forma, la demostración es un poco más corta.

La estrategia que facilita el paso de la proposición $P(k): k(k+1)(k+2) = 3t, \exists\, t \in \mathbb{N}$, a la proposición $P(k+1): (k+1)(k+2)(k+3) = 3h, \exists\, h \in \mathbb{N}$, que como ya se sabe, se obtiene reemplazando en la proposición $P(n)$, n por $k+1$, es la siguiente:

Al efectuar los productos en el primer miembro de $P(k)$, se obtiene:

$P(k): k^3 + 3k^2 + 2k = 3t$.

Al realizar la multiplicación en el primer miembro de $P(k+1)$, se obtiene:

$P(k+1) = k^3 + 3k^2 + 2k + 3k^2 + 9k + 6 = 3h.$

Como se observa, a los dos miembros de $P(k)$ se debe sumar:

$3k^2 + 9k + 6 = 3(k^2 + 3k + 2) = 3(k+1)(k+2).$

Otra manera mucho más corta, es la siguiente:

Al aplicar propiedad distributiva en el primer miembro de $P(k+1)$, dejando fijo $(k+1)(k+2)$ y distribuyendo $k+3$, se obtiene:

$(k+1)(k+2)(k+3) = k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2).$

Tener presente que $k(k+1)(k+2)$ es el primer miembro de la igualdad en $P(k)$.

En el paso 2, después de sumar $3(k+1)(k+2)$ a los dos miembros de la igualdad en $P(k)$, se factoriza $(k+1)(k+2)$, esto corresponde a un proceso contrario a la distribución que se realizó anteriormente.

Queda claro que, en muchos casos, los procesos en una demostración no son únicos, es decir, que puede haber varios caminos para realizar la demostración, siempre y cuando los pasos sean válidos, coherentes y que obedezcan a una teoría aceptada.

Tener en cuenta que, no se incluye en la demostración lo que se haga dentro de la “estrategia", tampoco lo que en este texto se escribe en las notas.

Ejemplo 6:

Demostrar que:

$P(n)\text{: 6 divide a } n^2 + 5n, \forall \in M = \{x \in \mathbb{N} / x = 3r, r \in \mathbb{N}\}.$

Demostración:

$P(k)\text{: 6 divide a } k^2 + 5k, \exists k \in M.$

$P\ (k+3)\text{: 6 divide a } (k+3)^2 + 5(k+3).$

Paso 1:

Para $n = 3$; $3^2 + 5 \times 3 = 9 + 15 = 24$ y 6 divide a 24; por tanto, $P(3)$ es verdadera.

Paso2:

Si 6 divide a $k^2 + 5k$, donde $k \in M$, entonces,

$k^2 + 5k = 6h, \exists\ h \in \mathbb{N}.$

$\text{Si } k^2 + 5k = 6h, \text{entonces,}$

$k^2 + 5k + 6k + 24 = 6h + 6k + 24$

$\longrightarrow k2 + 6k + 9 + 5k + 15 = 6(h + k + 4)$

$\longrightarrow (k + 3)^2 + 5(k + 3) = 6r, \text{donde } r = h + k + 4 \in \mathbb{N}$

$\text{Si } (k + 3)2 + 5(k + 3) = 6r, \exists \text{ r} \in \mathbb{N}, \text{entonces 6 divide a } (k + 3)^2 + 5(k + 3).$

En el Paso 2, se demuestra la implicación $P(k) \Longrightarrow P(k + 3)$.

Por el Paso 1 y el Paso 2, la proposición $P(n)$ es verdadera.

Justificaciones y Explicaciones del paso 2:

Se inicia con $P(k)$ y se aplica la definición de multiplicidad o de la relación divide a.

En la igualdad obtenida, se suma a ambos miembros $6k + 24$.

En el primer miembro de la igualdad resultante se forma un trinomio cuadrado perfecto, conmutando la suma $5k + 6k$ y expresando 24 como la suma $9 + 15$. En el segundo miembro, se factoriza el 6.

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto; se factoriza el 5 y se asigna o reemplaza $h + k + 4$ por r.

Finalmente se obtiene la proposición $P(k + 3)$.

Nota:

Teniendo en cuenta que $M = \{3, 6, 9, 12, 15, 18 ,21, 24, \cdots\}$ la "primera" proposición es $P(3)$ y la proposición que le sigue a $P(k)$, donde $k \in M$, es la proposición $P(k + 3)$, la cual, se obtiene al reemplazar n por $k + 3$ en la proposición $P(n)$.

La proposición del ejemplo 6 se puede establecer en otra forma, así:

$P(n)\text{: 6 divide } a\, n^2 + 5n, \forall n \in M, \text{donde } M = \{x \in \mathbb{N}/x = 3r, r \in \mathbb{N}\}.$

$P(n)\text{: } n^2 + 5n \text{ es múltiplo de } 6, \forall n \in M, \text{donde } M = \{x \in \mathbb{N}/x = 3r, r \in \mathbb{N}\}.$

$P(n)\text{: } n^2 + 5n = 6h, \text{donde } h \in \mathbb{N}, \forall n \in M, \text{donde } M = \{x \in \mathbb{N}/x = 3r, r \in \mathbb{N}\}.$

Para realizar la demostración, la última podría ser la más conveniente.

Ejemplo 7:

Demostrar que:

$P(n): 2^n < 2^{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

Paso1:

$P(1): 2^1 < 2^{1+1} \longrightarrow 2 < 2^2 \longrightarrow 2 < 4$.

Se observa que $P(1)$ es verdadera.

Paso2:

Si $P(k)$ es verdadera, entonces, $2^k < 2^{k+1}$.

Si $2^k < 2^{k+1}$, entonces, $(2^k)2 < (2^{k+1})2$.

Si $(2^k)2 < (2^{k+1})2$, entonces, $2^{k+1} < 2^{k+2}$.

Si $2^{k+1} < 2^{k+2}$, entonces, $P(k+1)$ es verdadera.

Justificaciones en el paso 2:

Iniciando en $P(k)$, se multiplica ambos lados de la desigualdad por 2, con lo cual, la desigualdad no cambia de sentido, porque 2 es positivo.

Luego, se aplica la ley de los exponentes al producto de potencias de la misma base y se obtiene la proposición $P(k+1)$.

De los pasos 1 y 2 se deduce que la proposición $P(n)$ es verdadera.

Ejemplo 8:

Recordar dos propiedades de la matemática general o fundamental:

Un número real es menor o igual que su valor absoluto: $x \leq |x|$.

Para $k > 0, |x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$.

Expresiones en el álgebra lineal:

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||cos\theta$, donde es el ángulo positivo medido de $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ y $0 \leq \theta \leq 180°$.

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$ es un producto escalar o producto punto de los vectores $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ (n-tuplas de números reales).

Algunos autores toman la igualdad anterior como definición del producto punto.

$||\boldsymbol{u}||$ y $||\boldsymbol{v}||$ son la norma o módulo de los vectores $\boldsymbol{u}$ y de $\boldsymbol{v}$, respectivamente. La norma es un número real mayor o igual a cero.

Demostrar que, $|\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}| \leq ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||$.

Si θ es el ángulo positivo medido de u a v, entonces $0 \leq \theta \leq 180°$. Condición en la expresión $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \left||\boldsymbol{u}|\right||\boldsymbol{v}|| \cos\theta$.

Si $0 \leq \theta \leq 180°$, entonces $-1 \leq cos\theta \leq 1$; consecuencias trigonométricas.

Si $-1 \leq cos\theta \leq 1$ entonces, $||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}|| \leq ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}| \cos\theta \leq ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||$; propiedad de la desigualdad en los reales.

Si $-||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}|| \leq ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}| \cos\theta \leq ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||$, entonces, $-||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}|| \leq \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} \leq ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||$, porque $||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||cos\theta = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$.

Si $-||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}|| \leq \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} \leq ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||$, entonces, $|\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}| \leq ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||$; propiedad de valor absoluto.

Nota:

El anterior proceso se puede realizar con una cadena de Implicaciones, así:

θ es el ángulo positivo medido de u a v, entonces,

$0 < \theta < 180° \Rightarrow -1 \leq \cos\theta \leq 1$

$\Rightarrow -||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}|| \leq ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}| \cos\theta \leq ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||$

$\Rightarrow -\left||\boldsymbol{u}|\right||\boldsymbol{v}|| \leq \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} \leq \left||\boldsymbol{u}|\right||\boldsymbol{v}||$

$\Rightarrow |\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}| \leq ||\boldsymbol{u}||||\boldsymbol{v}||$.

4.2.5.3 Ejercicios

$P(n): \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2, \forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$.

$P(n): \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} = n^2 - 1, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

$P(n): \forall n \in \mathbb{N}, n(n+1)(n+2) = 6t, \exists\, t \in \mathbb{N}$.

Sugerencias:

En la proposición del numeral 3, para realizar el paso 2, aplicar los ejemplos 4 y 5 demostrados anteriormente. Además, esta proposición expresa que $n(n+1)(n+2)$ es múltiplo de 6, o que 6 divide a $n(n+1)(n+2)$, para cualquier número natural n.

En la proposición del ejercicio 1, obtener $P(3), P(4), P(5), P(6), P(7)$, desarrollando la sumatoria correspondiente para cada caso.

En la proposición del ejercicio 2, obtener $P(3), P(4), P(5), P(6), P(7)$, desarrollando la sumatoria correspondiente para cada caso.

4. $P(n): \sum_{i=1}^{n}(2i-1)\, 3^{i} = (n-1)3^{n+1} + 3, \forall n \in \mathbb{N}$.

Sugerencia:

Tener en cuenta que $P(k): \sum_{i=1}^{k}(2i-1)\, 3^{i} = (k-1)3^{k+1}$+3; el último término de la Sumatoria es $(2k-1)^{3k}$.

$$P(k+1): \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)\, 3^{i} = (k+1-1)3^{k+1+1} + 3$$

$$P(k+1) \sum_{i=1}^{k+1}(2i-1)\, 3^{i} = (k)3^{k+2} + 3.$$

Los dos últimos términos de la sumatoria, son:

$(2k-1)3^{k}$ y $(2(k+1)-1)3^{k+1} = (2k+1)3^{k+1}$.

Según lo anterior, ya se conoce qué acción se debe realizar en $P(k)$ para obtener $P(k+1)$; obviamente, considerando los demás procesos algebraicos necesario para el efecto.

5. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n): n(n-1)$ es múltiplo de 2.

6. $\forall n \in \mathbb{Z}^{-}, P(n): n(n+1)$ es múltiplo de 2.

Sugerencia:

Dado que $n \in \mathbb{Z}^{-}$, entonces $-n \in \mathbb{Z}^{+}$ y $P(-n): -n(-n+1)$ es múltiplo de 2.

Cambiar en $P(n)$ la variable n por otra, de tal manera que esta nueva variable pertenezca a $\mathbb{Z}^{+} = \{1, 2, 3, 4, 5 \cdots\}$, luego realice la demostración tal como en el ejemplo 2.

7. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n): n(n+1)(2n+1) = 6t, \exists\, t \in \mathbb{N}$.

8. $P(n): \sum_{i=1}^{n} i^{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

9. $P(n): \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{(n+1)}, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

En algunas demostraciones se utiliza o se establecen previamente ciertos artificios, con los cuales, se viabiliza o permiten desarrollar el proceso de la demostración. Esto no es tan fácil de hacerlo, depende de la habilidad, experiencia y de los conocimientos que tenga quien realiza la demostración; se trata de una forma recursiva, por lo cual, en este texto no se presentan ejemplos.

En otras demostraciones, al menos inicialmente, no se sigue algún método de los estudiados en este texto, en su lugar, se empieza con expresiones, definiciones, propiedades estudiadas, ya sea de la misma asignatura, dentro de la cual se realiza la demostración, o de temas estudiados en asignaturas anteriores.

BIBLIOGRAFÍA

Caicedo, Z. S. J., & Portilla, O. H. J. (2020). Fundamento de Matemáticas Generales. Colombia: Editorial Universidad de Nariño.

Fleming, W., & Varberg, D. (2003). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Prentice - Hall.

Frank, A. (1980). Fundamentos de Matemáticas Superiores. México: McGraw-Hill.

Pinzón, Á. (1973). Conjuntos y Estructuras, Edición revisada. Teoría, 350 problemas resueltos, 433 ejercicios propuestos. México: Harla.

Portilla, O., H. J., & Caicedo Z., S. J. (2019). Introducción a los Fundamentos de Matemáticas Generales. Colombia: Editorial Universidad de Nariño.

Acerca de los Autores

ACERCA DE LOS AUTORES

Héctor Jairo Portilla Obando.

Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana; Licenciado en Educación especialidad Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Profesor de Tiempo Completo, categoría Asociado en el escalafón docente, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño; jairopor@gmail.com.

Segundo Javier Caicedo-Zambrano.

Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima; Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga; Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana; Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño; Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño; Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Profesor de Tiempo Completo, categoría Asociado en el escalafón docente, adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño; jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co.

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS
UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Editorial
Universidad de Nariño

INTRODUCCIÓN A LOS MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN MATEMÁTICA

En el estudio de asignaturas del área de matemáticas, una de las grandes dificultades que tienen los estudiantes, es la de realizar demostraciones de teoremas, proposiciones, propiedades o de cualquier afirmación del o de los temas que se tratan en las asignaturas.

El presente libro expone los métodos más usuales en demostraciones matemáticas: Método Directo y Métodos Indirectos, como los siguientes: Contrarrecíproco, Contradicción o Reducción al Absurdo; Casos Separados; Método de Contra ejemplo y el método de Inducción Matemática.

Además de explicar en qué consiste cada método, se realizan ejemplos sobre demostraciones que sirven de modelos o guías para la demostración de otras afirmaciones similares con el fin de que el lector adquiera mayor comprensión y experiencia en estos procesos.

El libro no aborda una asignatura en particular, por lo cual, previamente se plantearán temas teóricos, definiciones y propiedades que se utilizarán en los diversos ejemplos sobre los métodos de demostración.

Precisamente, dado que las demostraciones son procesos deductivos que se fundamenten en teoremas, reglas de inferencia, leyes de lógica matemática, inicialmente se expondrán elementos de lógica matemática o algebra proposicional y de teoría de conjuntos. Además, se realizan varios ejemplos para comprender aún más el sentido de las leyes lógicas y de conjuntos. También se presentan otros elementos que son necesarios y afines al contenido teórico, que también contribuyen a comprender de una manera más clara las demostraciones.

También contiene explicaciones adicionales, que no hacen parte en sí de las demostraciones, en la perspectiva de que el lector adquiera una mayor comprensión y asimile, de la mejor manera, los procesos de demostración, incluyendo el planteamiento inicial de las afirmaciones que se busca demostrar.

El libro constituye una guía y fuente de consulta para estudiantes de los primeros semestres de los programas profesionales que incluyen asignaturas de matemáticas, especialmente, en los programas cuyo proceso de formación requieran fundamentación matemática.

ISBN: 978-628-7509-38-2

9 786287 509382

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Universidad de Nariño
ACREDITADA DE ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 10567 - MAYO 23 DE 2017

Editorial
Universidad de Nariño