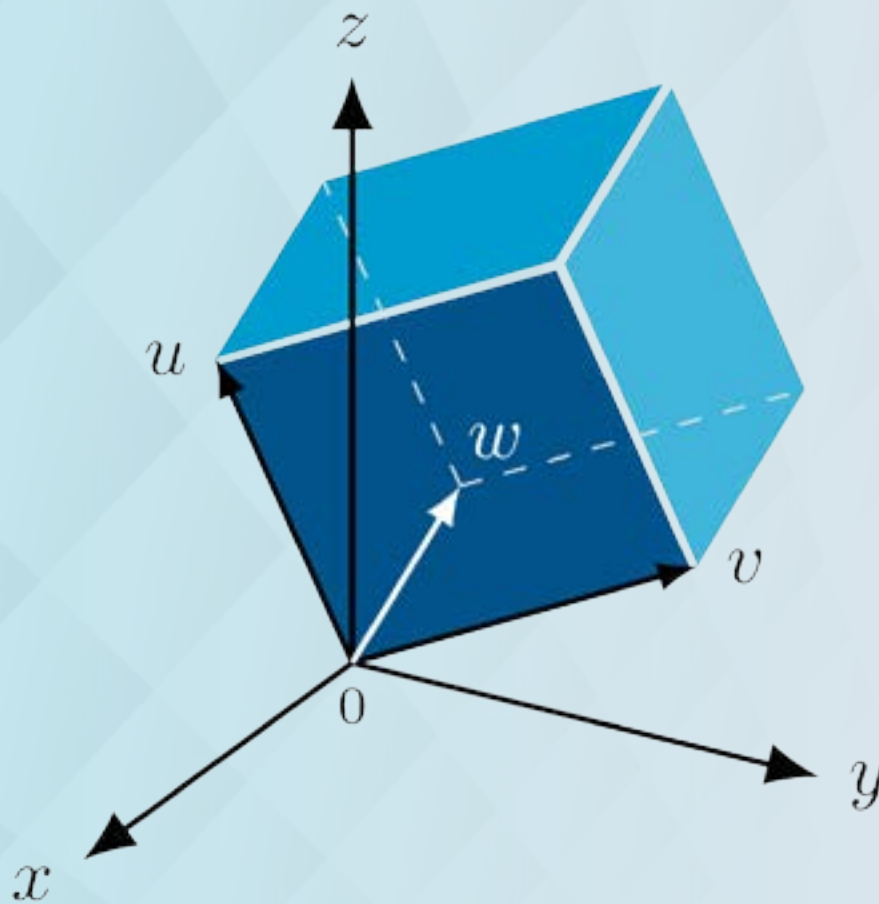


# Álgebra Lineal y problemas resueltos



Kevin Christian Chávez  
Jhoana P. Romero-Leiton



**Editorial**  
Universidad de Nariño



# Editorial

Universidad de Nariño

# **Álgebra lineal** **y problemas resueltos**

# Álgebra lineal y problemas resueltos

Kevin Christian Chávez  
Jhoana P. Romero-Leiton



**Editorial**  
Universidad de Nariño

Chávez, Kevin Christian

Algebra lineal y problemas resueltos / Kevin Christian Chávez, Jhoana P. Romero-Leiton.--  
1ª ed.-San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño, 2022.

233p.: fig.

Incluye bibliografía

ISBN: 978-628-7509-69-6

1. Algebra lineal—problemas ejercicios etc. 2 análisis matemático – problemas – ejercicios 3. Algebra lineal fundamentos - - problemas, ejercicios- 4. Definiciones – teoremas—algebra lineal

512.5 C512—SCDD-Ed. 22



Sección de Biblioteca  
"Alberto Quijano Guerrero"

## Álgebra lineal y problemas resueltos

© Kevin Christian Chávez  
kevin.chavez@yachaytech.edu.ec

© Jhoana P. Romero-Leiton  
jpatirom3@gmail.com  
jhoana.romero@umanitoba.ca

© Editorial Universidad de Nariño

ISBN: 978-628-7509-69-6

Primera edición

Corrección de estilo: Ana Cristina Chávez López  
Diseño y diagramación: Nathaly Johana Rivadeneira

Fecha de publicación: Abril de 2022  
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito, sin la autorización escrita de su Autor o de la Editorial Universidad de Nariño

# Agradecimientos

Christian Chávez agradece principalmente a sus padres, Hector Chávez e Inés Cadena, por su soporte constante y apoyo incondicional. Y, en especial, le gustaría agradecer a la Universidad de Investigación de Tecnología Experimental Yachay (Ecuador), lugar donde actualmente cursa sus estudios de Matemáticas.

Jhoana Romero agradece principalmente a Dios, a sus padres Fabian Romero y Lucila Leiton, y en especial a su pequeño niño Joan Villarroel por su amor y compañía incondicional en todos los momentos de su vida.

# Contenido

Prefacio.....	9
---------------	---

## Capítulo 1: Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

1.1. Vectores en el plano .....	12
1.1.1. Problemas resueltos.....	16
1.2. Producto escalar y proyecciones en $\mathbb{R}^2$ .....	20
1.2.1. Problemas resueltos.....	24
1.3. Vectores en el espacio .....	30
1.3.1. Problemas resueltos.....	32
1.4. Producto cruz .....	35
1.4.1. Problemas resueltos.....	38
1.5. Rectas y planos en el espacio.....	41
1.5.1. Problemas resueltos.....	46

## Capítulo 2: Matrices

2.1. Matrices y operaciones.....	52
2.1.1. Problemas resueltos.....	60
2.2. Sistemas de ecuaciones lineales y eliminación gaussiana.....	70
2.2.1. Problemas resueltos.....	76
2.3. Factorización $LU$ y $PA = LU$ .....	81
2.3.1. Problemas resueltos.....	86
2.4. Matriz inversa .....	93
2.4.1. Problemas resueltos.....	95

## Capítulo 3: Determinantes

3.1. Propiedades de los determinantes .....	107
3.2. Aplicaciones de los determinantes.....	108
3.3. Problemas resueltos .....	110

## Capítulo 4: Espacios vectoriales

4.1. La estructura de espacio vectorial.....	115
4.2. Subespacios vectoriales .....	118
4.2.1. Problemas resueltos.....	122
4.3. Independencia lineal.....	130
4.3.1. Problemas resueltos.....	135
4.4. Bases y dimensión .....	140
4.4.1. Problemas resueltos.....	145

4.5. Los cuatro subespacios fundamentales.....	147
4.5.1. Problemas resueltos.....	154

## Capítulo 5: Transformaciones lineales

5.1. Definición de transformación lineal.....	160
5.1.1. Problemas resueltos.....	165
5.2. Representación matricial de una transformación lineal.....	171
5.2.1. Problemas resueltos.....	174

## Capítulo 6: Valores y vectores propios

6.1. Valores y vectores propios de una matriz.....	183
6.1.1. Problemas resueltos.....	188
6.2. Diagonalización de matrices.....	193
6.2.1. Problemas resueltos.....	197
6.3. Aplicaciones.....	201
6.3.1. Cálculo de potencias de una matriz.....	201
6.3.2. Ecuaciones diferenciales.....	203

## Capítulo 7: Aplicaciones del álgebra lineal

7.1. La herencia mendeliana.....	208
7.2. Criptografía.....	213
7.2.1. Cifrado.....	213
7.2.2. La relación de congruencia.....	216
7.2.3. El algoritmo de Hill.....	218
7.2.4. Descifrado.....	219
7.2.5. Cifrado binario.....	223
7.3. Sistemas dinámicos: la resistencia antibiótica.....	226

Referencias.....	230
------------------	-----

Los autores.....	231
Kevin Christian Chávez.....	231
Jhoana P. Romero-Leiton.....	231

# Prefacio

El presente texto tiene como objetivo central ilustrar de manera clara, pedagógica y concisa, el planteamiento y solución de ciertos problemas que son muy útiles y comunes en álgebra lineal y sus aplicaciones. Estas notas empezaron como una guía para abordar problemas en el área, para los estudiantes del curso de álgebra lineal, en medio de la pandemia por COVID-19.

En la elaboración de estas notas se utilizó varios textos, especialmente el de Anton et al. (2019) y Restrepo et al. (1993), así como los de Lay et al. (2016), Aranda (2016), Larson (2017), y Grossman y Flores (2012). Por otra parte, estas notas pueden ser utilizadas como complemento o fuente de consulta para estudiantes universitarios de los cursos de álgebra lineal de los programas de Ingeniería de la Universidad de Nariño.

En este texto se plantea y resuelve un buen número de ejercicios y problemas. En el Capítulo 1 se expone los conceptos asociados a los vectores de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , así como sus propiedades. El concepto formal de vector se define en el Capítulo 4. En el Capítulo 2 se definen los conceptos y operaciones básicos referentes a matrices, para luego dar paso a los sistemas de ecuaciones lineales y el concepto de matriz inversa. En el Capítulo 3 se revisan brevemente las definiciones, teoremas y propiedades relativos a los determinantes. En el Capítulo 4 se trata a profundidad conceptos propios del álgebra lineal, como por ejemplo, los conceptos de espacio y subespacio vectorial. En el Capítulo 5 se hace una introducción a las transformaciones lineales y en el Capítulo 6 se estudia los conceptos y propiedades de valores y vectores propios de una matriz. Finalmente, en el Capítulo 7 se exponen aplicaciones prácticas del álgebra lineal.

Al inicio de cada capítulo se presenta enunciados y definiciones de los conceptos matemáticos que el lector debe conocer previamente, para poder abordar los problemas propuestos. Aunque también se expone los teoremas más importantes, éstos no son demostrados ya que, como se dijo anteriormente, la intención de estas notas es ser breves y enfatizar en la resolución de problemas. Por otra parte, se hace hincapié en que la utilización de este texto supone, por parte del lector, el conocimiento y manejo de las técnicas básicas de conocimientos previos, como por ejemplo las ideas básicas de la lógica simbólica.

A veces encontrará la expresión “i.e.” (abreviación del latín para *id est*) que significa “es decir”, o la expresión “e.g.” (abreviación del latín para *exempli gratia*) que significa “por ejemplo”. Al final de los problemas se coloca el símbolo  $\square$  para indicar que hemos terminado de resolverlos, y también lo usaremos al final de exponer los ejemplos.

Apreciaremos mucho recibir sus observaciones, correcciones y errores a través de [kevin.chavez@yachaytech.edu.ec](mailto:kevin.chavez@yachaytech.edu.ec) o [jpatirom3@gmail.com](mailto:jpatirom3@gmail.com).

Capítulo 1:

▶ **Vectores en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$**

## Capítulo 1:

# ► Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

El álgebra lineal se ocupa principalmente de dos tipos de objetos matemáticos: vectores y matrices (aunque después veremos que una matriz es también un vector).

En este capítulo desarrollaremos las ideas y propiedades básicas de los vectores en el plano y en el espacio, que son nombres alternativos para referirnos a  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$  dado que podemos visualizarlos. Estos conjuntos no son más que el producto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  y  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , respectivamente. Como bien debe saber el lector,  $\mathbb{R}$  denota el conjunto de números reales, por lo que  $\mathbb{R}^2$  no es más que el conjunto de pares (ordenados) de números reales, y en el caso de  $\mathbb{R}^3$  el conjunto de ternas (ordenadas) de escalares. Una vez que se ha establecido un sistema de coordenadas y fijado su origen, podemos asociar a cada punto del espacio (o del plano) una única terna (o par) de escalares de manera unequívoca.

El concepto que generaliza a los pares y ternas ordenados se llama tupla ordenada. Entiéndase por tupla a una lista de números en la que importa el orden. Más precisamente, cuando se habla de  $\mathbb{R}^n$  (el producto cartesiano de  $\mathbb{R}$  con  $\mathbb{R}$ ,  $n$  veces), se habla del conjunto de  $n$ -tuplas ordenadas. Debido a que estos elementos cumplen ciertas propiedades (que describiremos en el Capítulo 4) es que adquieren el nombre de vectores.

Las nociones de vector y escalar que estudiaremos tuvieron sus orígenes principalmente en la física, pero con ellos se construye estructuras matemáticas que son fundamentales por orígenes en varias ciencias. Los físicos e ingenieros distinguen entre dos tipos de cantidades, las escalares y las vectoriales. Una cantidad escalar es aquella que puede ser descrita con un solo número, e.g. una temperatura de 20 °C, una rapidez de 5m, una masa de 9.8 kg, etc. Por contraparte, una cantidad vectorial requiere de un número que nos diga cuánto y una dirección que nos indique a dónde está dirigida tal cantidad, e.g. una fuerza de 800N aplicada hacia abajo, una aceleración de 10  $\text{m/s}^2$  hacia el sur, una velocidad de 7.5  $\text{m/s}$  en dirección noroeste, etc. En el Capítulo 4 renovaremos nuestro concepto de vector y ampliaremos muchos otros. Por ahora, escalar significará lo mismo que número real.

Es usual denotar a los vectores de  $\mathbb{R}^n$  con letras minúsculas en negrita, e.g.  $\mathbf{v}$ , pero no lo haremos así porque de cierta manera es innecesario y el contexto siempre aclarará las cosas.

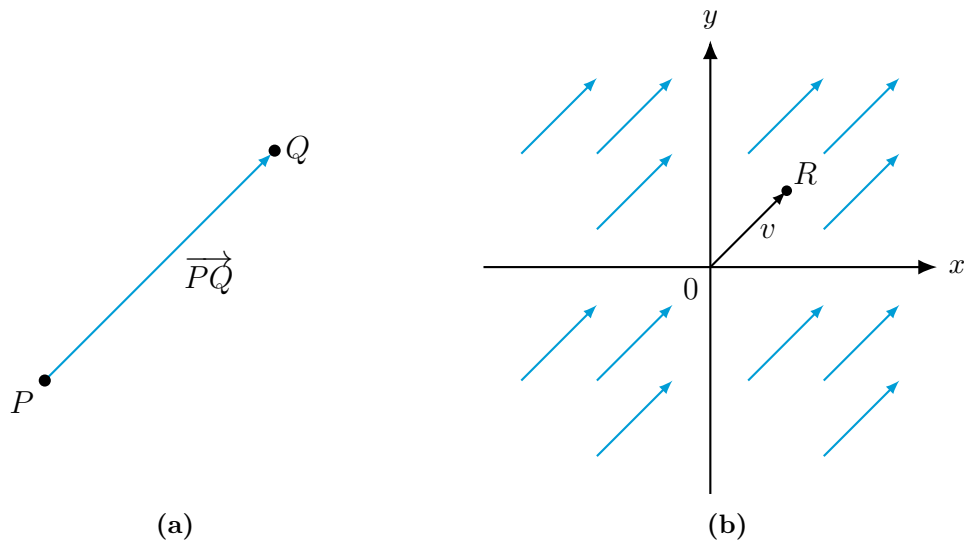


## 1.1. Vectores en el plano

Posiblemente el lector tenga alguna noción básica de lo que es un vector de  $\mathbb{R}^2$ , especialmente la noción geométrica en la que estos se representan como flechas en un sistema de coordenadas rectangulares. A veces es útil pensar en las tuplas ordenadas de esta forma porque ello facilita la comprensión de magnitudes físicas como la aceleración, el momento, la fuerza, entre otras. Una flecha es un segmento de recta pero que apunta en alguna dirección, por eso le llamaremos *segmento de recta dirigido*.

El segmento de recta dirigido con *punto inicial* en  $P$  y *punto final* en  $Q$ , denotado por  $\overrightarrow{PQ}$ , es la porción de recta que empieza en  $P$  y termina en  $Q$ , apuntando en este sentido hacia  $Q$  (Figura 1.1.1a). Un segmento de recta dirigido puede moverse libremente y en cualquier posición representa al mismo vector. Note que, dados dos puntos  $A$  y  $B$ , se pueden formar dos segmentos de recta dirigidos diferentes, a saber,  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{BA}$ .

A pesar de que podemos escoger cualquier representación, nos será más cómodo representar gráficamente a un vector como el segmento de recta dirigido que empieza en  $(0,0)$  y termina en un punto  $R$ . El conjunto de representaciones de un vector contiene segmentos de recta dirigidos que son *equivalentes* entre sí (Figura 1.1.1b).<sup>1</sup>



**Figura 1.1.1:** (a) Segmento de recta dirigido  $\overrightarrow{PQ}$  (diferente de  $\overrightarrow{QP}$ ). (b) Segmentos de recta dirigidos equivalentes a  $v = \overrightarrow{OR}$ .

**Definición 1.1** (Definición geométrica de un vector, tomada de Grossman y Flores (2012)). *El conjunto de todos los segmentos de recta dirigidos equivalentes a un segmento de recta dirigido dado se llama **vector**. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se denomina **representación** del vector.*

**Nota 1.1.** El vector cuyos puntos inicial y final coinciden se llama *vector cero*, que denotaremos con  $0$ . Este vector es el único que no tiene dirección definida y cuya magnitud

<sup>1</sup>Podemos representar un par  $(a, b)$  como un punto o un segmento de recta dirigido; esto dependerá del contexto y de nuestras necesidades, pues punto y segmento de recta dirigido no son más que dos interpretaciones geométricas distintas de lo mismo, un vector (de  $\mathbb{R}^2$ ).

es cero. No debería haber confusión entre el vector cero y el escalar 0 ya que el contexto hará claro a qué hace referencia este símbolo.

**Definición 1.2** (Definición algebraica de un vector). *Un vector de  $\mathbb{R}^2$  es un par ordenado de escalares, conocidos como sus **componentes**.*

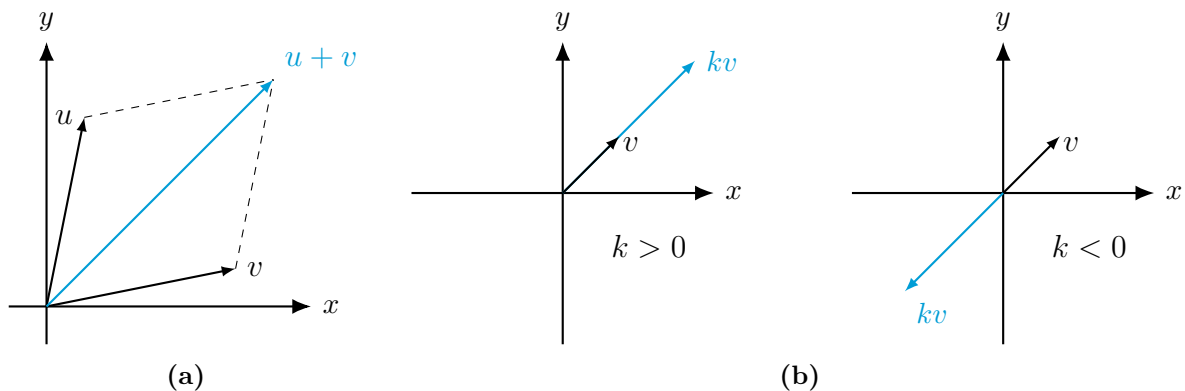
**Nota 1.2.** Es común que escribamos el vector  $x = (x_1, x_2)$  como una columna:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Esta forma de representar a un vector nos permite pensar en él como una *matriz* (de orden  $2 \times 1$ , porque tiene dos filas y una columna.) Veremos, en el Capítulo 2, que su transpuesta, i.e.  $x^T = [x_1 \ x_2]$ , es también una matriz (de orden  $1 \times 2$ ), la cual no debemos interpretar como una forma alternativa de escribir  $x = (x_1, x_2)$ .

Existen dos operaciones básicas entre vectores: suma vectorial y multiplicación por escalar. Geométricamente, la suma de dos vectores del plano puede verse como la diagonal del paralelogramo formado entre ellos cuando parten del origen (Figura 1.1.2a), y la multiplicación por escalar da lugar a un nuevo vector paralelo (que llamaremos *múltiplo escalar*) cuya longitud es mayor o menor, según el escalar por el que se multiplique (Figura 1.1.2b). Algebraicamente, sumar dos vectores corresponde a sumar sus componentes correspondientes y multiplicar un vector por un escalar significa multiplicar sus componentes por ese escalar.

**Nota 1.3.** Note que la suma de dos vectores es conmutativa, es decir,  $u + v = v + u$  para cualesquiera  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . También, siempre acostumbramos escribir un múltiplo escalar de un vector  $v$  como  $kv$  y no como  $vk$ .



**Figura 1.1.2:** Operaciones entre vectores y escalares. (a) Suma gráfica de dos vectores. (b) el efecto que tiene multiplicar a un vector por un escalar dependiendo de si este es positivo o negativo.

**Definición 1.3.** La **magnitud** (o **norma**) de un vector  $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  está dada por el escalar

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

y la denotamos  $\|v\|$ . Un vector se dice **unitario** si su magnitud es 1.

**Definición 1.4** (Dirección de un vector de  $\mathbb{R}^2$ ). Sea  $v = (a, b)$  un vector de  $\mathbb{R}^2$ . La **dirección** de  $v$  es el ángulo en el intervalo  $[0, 2\pi)$  que este (o un segmento de recta dirigido equivalente) forma con el eje  $x$  positivo.

Supongamos que  $a \neq 0$ . El ángulo  $\theta$  de la definición anterior está dado por

$$\theta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } v \text{ está en el primer cuadrante,} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } v \text{ está en el segundo o tercer cuadrante,} \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi & \text{si } v \text{ está en el cuarto cuadrante.} \end{cases} \quad (1.1)$$

Si  $a = 0$ , entonces  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

**Nota 1.4.** Dado que un vector tiene múltiples representaciones, su magnitud y dirección son las mismas que la magnitud y dirección de cualquiera de sus representaciones. Note también que la definición de magnitud de un vector es una consecuencia del teorema de Pitágoras aplicado a sus componentes. Por último, también se suele denotar como  $|v|$  a la magnitud de  $v$ , pero no la usaremos para evitar ambigüedades.

### Ejemplos 1.1.

1. Los vectores  $u = (1^3, \sqrt{4})$  y  $v = (1, 2)$  son iguales porque sus correspondientes componentes son iguales.
2. La suma de  $(-1, 2)$  y  $(1, -2)$  es el vector  $(-1 + 1, 2 - 2) = (0, 0)$ .
3. La *resta* entre un vector  $u$  y un vector  $v$  es la suma vectorial  $u + (-1)v$ . Abreviaremos  $(-1)v$  como  $-v$  y diremos que es el opuesto aditivo de  $v$  (porque  $v - v = 0$ ).
4. La suma  $(1 - 5, 8) + (\pi, \sqrt{2}) + (8, -7)$  da lugar al vector  $(4 + \pi, 1 + \sqrt{2})$ .
5. El vector  $(5\pi, 5\sqrt{3})$  tiene una magnitud cinco veces mayor que el vector  $(\pi, \sqrt{3})$ .
6. Si  $k = 0$  o  $v = (0, 0)$ , entonces  $kv$  es el vector cero.
7. El vector  $-u$  tiene dirección opuesta a la de  $u$ .

□

**Definición 1.5** (Ángulo entre dos vectores). Sean  $u$  y  $v$  dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  diferentes de cero. Entonces el **ángulo**  $\theta$  **entre  $u$  y  $v$**  está definido como el ángulo más pequeño entre las representaciones de  $u$  y  $v$  que tienen el origen como punto inicial. Note que  $\theta \in [0, \pi]$ .

**Definición 1.6** (Vectores paralelos, tomada de Grossman y Flores (2012)). Dos vectores diferentes de cero son **paralelos** si el ángulo entre ellos es  $0$  o  $\pi$ . Obsérvese que los vectores paralelos tienen la misma dirección o direcciones opuestas.

En la siguiente sección mostraremos cómo hallar el ángulo entre dos vectores de  $\mathbb{R}^2$ .

**Teorema 1.1.** Dos vectores  $u$  y  $v$  son **paralelos** si y sólo si uno es múltiplo escalar del otro, o sea

$$u = \lambda v$$

para algún  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Un múltiplo escalar de un vector  $v \neq (0, 0)$  tiene o la misma dirección de  $v$  o dirección opuesta, no hay otra posibilidad. El ángulo que forman es, en el primer caso, 0 y, en el segundo,  $\pi$ . Sólo cuando se multiplica por el escalar 0 se obtendrá un vector que no tiene dirección: el vector cero. Además, si  $\lambda v$  es múltiplo escalar de  $v$ , entonces su magnitud es  $|\lambda|$  veces la magnitud de  $v$ , i.e.  $\|\lambda v\| = |\lambda|\|v\|$ .

Una consecuencia del Teorema 1.1 es que todo vector tiene asociado un vector unitario que tiene su misma dirección. Es decir, dado un vector  $v \in \mathbb{R}^2$ , el múltiplo escalar

$$\frac{1}{\|v\|}v$$

tiene norma 1 y por tanto es unitario paralelo a  $v$ . Se suele escribir  $\frac{v}{\|v\|}$  como abreviatura de  $\frac{1}{\|v\|}v$ , pero no se debe interpretar como una “división”, tal cosa no está definida.

En  $\mathbb{R}^2$  es común denotar por  $\hat{i}$  al vector  $(1, 0)$  y por  $\hat{j}$  al vector  $(0, 1)$ . Estos vectores conforman lo que se llama la *base canónica* (o *estándar*) de  $\mathbb{R}^2$ . Note además que ambos son unitarios y que están en la dirección de los ejes  $x$  y  $y$ , respectivamente. Por este hecho es que siempre podemos representar a un vector  $(a, b)$  como la combinación  $a\hat{i} + b\hat{j}$ . Si  $u \in \mathbb{R}^2$  es un vector unitario, entonces podremos expresarlo como  $u = (\cos \theta)\hat{i} + (\sin \theta)\hat{j}$ , donde  $\theta$  es su dirección.

### Ejemplos 1.2.

1. La dirección del vector  $\hat{i}$  es  $\arctan(0) = 0$ .
2. La dirección del vector  $\hat{j}$  es  $\pi/2$ .
3. Si  $k$  es un escalar, entonces la dirección de  $k\hat{j}$  es  $\frac{\pi}{2}$  si  $k > 0$ , o  $\frac{3\pi}{2}$  si  $k < 0$ . Note que no podemos usar la fórmula (1.1) porque en ese caso  $a = 0$ .
4. La magnitud del vector  $2\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$  es

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}.$$

5. El vector unitario  $(-1, 1)$  puede escribirse como  $\hat{j} - \hat{i}$ .
6. Tanto  $(9, 63)$  como  $(-1, -7)$  son paralelos a  $(2, 14)$ , pues

$$(9, 63) = \frac{9}{2}(2, 14) \quad \text{y} \quad (-1, -7) = -\frac{1}{2}(2, 14).$$

7. Los vectores  $(1, \pi)$  y

$$\left(\frac{1}{1 + \pi^2}, \frac{\pi}{1 + \pi^2}\right)$$

son paralelos porque el segundo es el unitario obtenido al *normalizar* el primero. Además, tienen la misma dirección.

8. La dirección de  $u = -6\hat{i} - 6\hat{j}$  es opuesta a la dirección de  $-\lambda u = 6\lambda\hat{i} + 6\lambda\hat{j}$  para  $\lambda > 0$  y en tal caso  $\theta_u = \theta_{-\lambda u} + \pi$ .

9. Estaríamos errados al decir que la dirección del vector  $(-1, -\sqrt{3})$  es  $\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right)$  debido a que está en el tercer cuadrante. Su dirección es

$$\arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{-1}\right) + \pi = \frac{4}{3}\pi$$

como podrá comprobarlo gráficamente.

10. Si sabemos que  $u$  es unitario con dirección  $\frac{\pi}{4}$ , entonces  $u$  es el vector

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{i} + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\hat{j}.$$

□

**Definición 1.7.** Un vector que se puede expresar en términos de la suma de (múltiplos escalares de) otros vectores se dice que es una **combinación lineal** de esos vectores.

Dado que todo vector  $(a, b)$  puede expresarse como  $a\hat{i} + b\hat{j}$ , podemos decir que cada vector del plano es una combinación lineal de  $a\hat{i}$  y  $b\hat{j}$ , pero estos vectores son múltiplos escalares de  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  así que, de hecho, cada vector del plano es una combinación lineal de  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$ . Redefiniremos a la Definición 1.7 en el Capítulo 4.

Suponga que se tiene un vector  $v \in \mathbb{R}^2$ , entonces cualquier múltiplo escalar de  $v$  se encuentra sobre la misma recta en la que está  $v$ . Esto lo expresamos al decir que tales vectores son *colineales* (porque comparten la misma línea) y es equivalente a decir que son paralelos (aunque las representaciones de estos vectores pueden moverse libremente). De esto se sigue que, por ejemplo, todos los múltiplos escalares de un vector conforman una recta que pasa por el origen del plano.

### 1.1.1. Problemas resueltos

La mayoría (si no todos) de los enunciados de los problemas que se presentan en esta sección fueron tomados o adaptados de Grossman y Flores (2012).

**Problema 1.1.** Sean  $u = (2, 3)$  y  $v = (-5, 4)$ . Encuentre y bosqueje los siguientes vectores (a)  $3u$ , (b)  $-\frac{2}{3}v$  (c)  $u + v$ , (d)  $v - u$ , y (e)  $-2u + \frac{1}{20}v$ .

**Solución.**

(a)  $3u = 3(2, 3) = (6, 9)$

(b)  $-\frac{2}{3}v = -\frac{2}{3}(-5, 4) = (10/3, -8/3)$

(c)  $u + v = (2, 3) + (-5, 4) = (-3, 7)$

(d)  $v - u = (-5, 4) - (2, 3) = (-5, 4) + (-2, -3) = (-7, 1)$

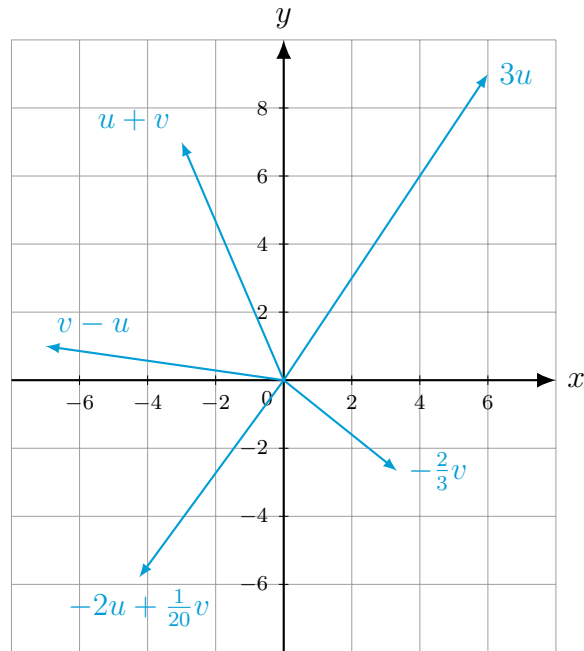
(e)  $-2u + \frac{1}{20}v = -2(2, 3) + \frac{1}{20}(-5, 4) = (-4, -6) + (-1/4, 1/5) = (-17/4, -29/5)$

□

**Problema 1.2.** Demuestre que si  $v = a\hat{i} + b\hat{j} \neq 0$ , entonces

$$u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\hat{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\hat{j}$$

es un vector unitario que tiene la misma dirección que  $v$ .



**Figura 1.1.3:** Problema 1.1.

**Solución.** Al multiplicar a un vector por el recíproco de su norma obtenemos un vector unitario en su misma dirección. El recíproco de la norma de  $v$  es

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

de modo que

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(a\hat{i} + b\hat{j}) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\hat{i} + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\hat{j} = u$$

es un vector unitario cuya dirección es la de  $v$ , pues su norma es

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sqrt{\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}} = 1 \end{aligned}$$

y su dirección está dada por

$$\theta_u = \arctan\left(\frac{\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \theta_v$$

□

**Problema 1.3.** Si  $v = a\hat{i} + b\hat{j} \neq 0$ , demuestre que

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos(\theta) \quad \text{y} \quad \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin(\theta),$$

donde  $\theta$  es la dirección de  $v$ .

**Solución.** Partiendo de que  $\sec^2(\theta) = \tan^2(\theta) + 1$  y que  $\cos(\theta) = 1/\sec(\theta)$  se tiene que  $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\tan^2(\theta)+1}}$ . También se sabe que  $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$  y entonces

$$\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\frac{b^2}{a^2} + 1}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Utilizando la identidad trigonométrica  $\tan(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$  y el resultado anterior obtenemos

$$\text{sen}(\theta) = \cos(\theta) \tan(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

□

**Problema 1.4.** Encuentre un vector  $v$  que tenga la magnitud y dirección dadas a continuación.

(a)  $\|v\| = 9, \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$

(b)  $\|v\| = 3, \quad \theta = \frac{-5\pi}{4}$

**Solución.** Si  $v = a\hat{i} + b\hat{j}$ , entonces  $\text{sen}(\theta) = \frac{b}{\|v\|}$  y  $\cos(\theta) = \frac{a}{\|v\|}$ , es decir  $a = \|v\| \cos(\theta)$  y  $b = \|v\| \text{sen}(\theta)$ . Esto nos permite escribir  $v = \|v\| \cos(\theta)\hat{i} + \|v\| \text{sen}(\theta)\hat{j}$ .

(a)  $v = 9 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\hat{i} + 9 \text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\hat{j} = \frac{-9}{2}\hat{i} + \frac{9\sqrt{3}}{2}\hat{j}$

(b)  $v = 3 \cos\left(\frac{-5\pi}{4}\right)\hat{i} + 3 \text{sen}\left(\frac{-5\pi}{4}\right)\hat{j} = \frac{-3\sqrt{2}}{2}\hat{i} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\hat{j}$

□

**Problema 1.5.** Sean los vectores  $u = 3\hat{i} + 2\hat{j}$  y  $v = 2\hat{i} - \hat{j}$ . Encuentre un vector unitario que tenga la misma dirección que (a)  $u + v$ , y (b)  $2u - 3v$ .

**Solución.**

(a) Es fácil ver que  $u + v = 5\hat{i} + \hat{j}$  y que  $\|u + v\| = \sqrt{5^2 + 1^2} = \sqrt{26}$ , luego

$$\frac{u + v}{\|u + v\|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(5\hat{i} + \hat{j})$$

es un vector unitario con la misma dirección que  $u + v$ .

(b) De manera análoga, como  $2u - 3v = 6\hat{i} + 4\hat{j} - 6\hat{i} + 3\hat{j} = 7\hat{j}$ , y  $\|2u - 3v\| = 7$ , entonces

$$\frac{2u - 3v}{\|2u - 3v\|} = \hat{j}$$

es un vector unitario con la misma dirección que  $2u - 3v$ .

□

**Problema 1.6.** Encuentre un vector  $v$  de  $\mathbb{R}^2$  que tenga la magnitud y dirección dadas.

(a)  $\|v\| = 6$  y  $\theta = \pi/6$

(c)  $\|v\| = 6$  y  $\theta = 2\pi/3$

(b)  $\|v\| = 8$  y  $\theta = \pi/3$

(d)  $\|v\| = 67$  y  $\theta = 5\pi/6$

**Solución.** Recuerde que cualquier vector unitario  $u$  con dirección  $\theta$  está dado por  $u = (\cos \theta, \sin \theta)$  y que todo vector es múltiplo escalar de su unitario (el escalar es la magnitud del vector).

(a)  $v = 6 \left( \cos\left(\frac{\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right) = 6 \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = 3(\sqrt{3}, 1)$

(b)  $v = 8 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 8 \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 4(1, \sqrt{3})$

(c)  $v = 6 \left( \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right) = 6 \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 3(-1, \sqrt{3})$

(d)  $v = 67 \left( \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right), \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) \right) = 67 \left( -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right) = \frac{67}{2}(-\sqrt{3}, 1)$  □

**Problema 1.7.** Encuentre un vector  $v$  de  $\mathbb{R}^2$  que tenga la magnitud dada pero dirección opuesta a la que se da a continuación:

(a)  $\|v\| = 2$  y  $\theta = 4\pi/3$

(c)  $\|v\| = 4$  y  $\theta = \pi/3$

(b)  $\|v\| = 3$  y  $\theta = 5\pi/4$

(d)  $\|v\| = 3$  y  $\theta = 5\pi/6$

**Solución.** Cualquier vector unitario  $u$  con dirección  $\theta$  está dado por  $u = (\cos \theta, \sin \theta)$  y todo vector es múltiplo escalar de su unitario (el escalar es la magnitud del vector). La dirección opuesta a  $\theta$  es  $\theta + \pi$  (o alternativamente  $\theta - \pi$ ); recuerde que la dirección de un vector de  $\mathbb{R}^2$  debe estar en el intervalo  $[0, 2\pi)$ .

(a)  $v = 2 \left( \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right), \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \pi\right) \right) = (1, \sqrt{3})$

(b)  $v = 3 \left( \cos\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right), \sin\left(\frac{5\pi}{4} - \pi\right) \right) = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1, 1)$

(c)  $v = 4 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right), \sin\left(\frac{\pi}{3} - \pi\right) \right) = -2(1, \sqrt{3})$

(d)  $v = 3 \left( \cos\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right), \sin\left(\frac{5\pi}{6} - \pi\right) \right) = \frac{3}{2}(\sqrt{3}, -1)$  □

**Problema 1.8.** Sean  $u = 3\hat{i} + \alpha\hat{j}$  y  $v = 2\hat{i} + \beta\hat{j}$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ . Encuentre  $\alpha$  y  $\beta$  para que el ángulo entre  $u$  y  $v$  sea  $\frac{3\pi}{4}$ .

**Solución.** Denotemos por  $\theta_u$  y  $\theta_v$  la dirección de  $u$  y  $v$ , respectivamente. Necesitamos  $|\theta_u - \theta_v| = 3\pi/4$ , por lo que existen dos posibles casos (para  $\theta_u$  y  $\theta_v$ ) en los que el ángulo entre  $u$  y  $v$  es  $3\pi/4$ . Si se toma  $\theta_u < \theta_v$ , entonces se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tan(\theta_u - \theta_v) = \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) &\implies \frac{\tan(\theta_u) - \tan(\theta_v)}{1 + \tan(\theta_u)\tan(\theta_v)} = -1 \\ &\implies \frac{\alpha/3 - \beta/2}{1 + \alpha\beta/6} = -1 \\ &\implies \alpha = \frac{3\beta - 6}{2 + \beta} \end{aligned}$$

Cuando tome  $\theta_v < \theta_u$  y aplique la función tangente a esta diferencia de ángulos obtendrá  $\alpha = \frac{3\beta + 6}{2 - \beta}$ . Por lo tanto, para que el ángulo entre  $u$  y  $v$  sea  $3\pi/4$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  deben satisfacer

$$\alpha = \frac{3\beta \pm 6}{2 \mp \beta}.$$

□

---

## 1.2. Producto escalar y proyecciones en $\mathbb{R}^2$

**Teorema 1.2.** *El ángulo  $\phi$  entre dos vectores  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$  de  $\mathbb{R}^2$  satisface la siguiente expresión:*

$$\cos(\phi) = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\|u\|\|v\|}.$$

La expresión  $u_1v_1 + u_2v_2$  que aparece en el Teorema 1.2 es lo que definiremos a continuación como *producto escalar* de dos vectores.

**Definición 1.8** (Producto escalar en  $\mathbb{R}^2$ ). *Sean  $u = (u_1, u_2)$  y  $v = (v_1, v_2)$  dos vectores. El **producto escalar** de  $u$  y  $v$ , denotado por  $u \cdot v$ , está dado por*

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2.$$

**Nota 1.5.** Este es un caso particular del producto escalar en  $\mathbb{R}^n$ . El producto escalar también se conoce como *producto interno euclídeo* o *producto punto*. Se debe pensar en el producto escalar como una operación que relaciona dos objetos (dos vectores) y produce un tercero: un escalar.

Observe que ahora podemos expresar el ángulo entre dos vectores como

$$\arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}\right),$$

y se sigue también que  $u \cdot v = \|u\|\|v\|\cos(\phi)$  es una definición alternativa para el producto punto. El signo de  $u \cdot v$  determina el tipo de ángulo que existe entre  $u$  y  $v$ ; si  $u \cdot v > 0$ , entonces  $\phi$  es agudo; si  $u \cdot v = 0$ , entonces  $\phi = \frac{\pi}{2}$ ; si  $u \cdot v < 0$ , entonces  $\phi$  es obtuso. Por otra parte, note que si tomamos el producto escalar de un vector  $v = (a, b)$  consigo mismo, entonces  $v \cdot v = a^2 + b^2$ , lo cual corresponde al cuadrado de su norma, i.e.

$$\|v\|^2 = v \cdot v \iff \|v\| = \sqrt{v \cdot v}.$$

**Nota 1.6.** La expresión  $\frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$  es equivalente a  $\frac{u}{\|u\|} \cdot \frac{v}{\|v\|}$ .

El siguiente teorema es válido no sólo para vectores de  $\mathbb{R}^2$  sino para cualesquiera vectores de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 1.3.** Si  $u, v, w$  son tres vectores de  $n$  componentes y  $\alpha$  un escalar, entonces

- (i)  $u \cdot u = 0$  si y sólo si  $u = 0$ .
- (ii) (Simetría)  $u \cdot v = v \cdot u$
- (iii) (Propiedad distributiva)  $u \cdot (v \pm w) = u \cdot v \pm u \cdot w$
- (iv) (Homogeneidad)  $(\alpha u) \cdot v = \alpha(u \cdot v)$ .
- (v)  $v \cdot v \geq 0$

**Ejemplos 1.3.**

1. El ángulo más pequeño entre  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  es  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , por lo que su producto escalar debe ser cero; en efecto,  $\hat{i} \cdot \hat{j} = \|\hat{i}\| \|\hat{j}\| \cos(\pi/2) = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$ . En términos de sus componentes:  $\hat{i} \cdot \hat{j} = (1, 0) \cdot (0, 1) = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ .
2. El ángulo entre  $(7, -7)$  y  $(1, 5)$  es

$$\arccos\left(\frac{7 \cdot 1 + (-7) \cdot 5}{7\sqrt{2} \cdot \sqrt{26}}\right) = \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{13}}\right).$$

3. El cuadrado de la magnitud de  $(-\sqrt{2}, 3)$  es  $(-\sqrt{2})^2 + 3^2 = 11$ .
4. Si  $v$  es el vector  $(2, 7)$ , entonces forma un ángulo de 0 con el vector  $\frac{v \cdot v}{2}v$  porque es un múltiplo escalar suyo.
5. Si  $u$  y  $v$  son los vectores  $(7, -8)$  y  $(3, -4)$ , entonces

$$\begin{aligned} (u - 3v) \cdot (2u + 5v) &= u \cdot (2u + 5v) - 3v \cdot (2u + 5v) \\ &= 2(u \cdot u) + 5(u \cdot v) - 6(u \cdot v) - 15(v \cdot v) \\ &= 2\|u\|^2 - (u \cdot v) - 15\|v\|^2 \\ &= 2(113) - 2(21 + 32) - 15(25) \\ &= -255 \end{aligned}$$

□

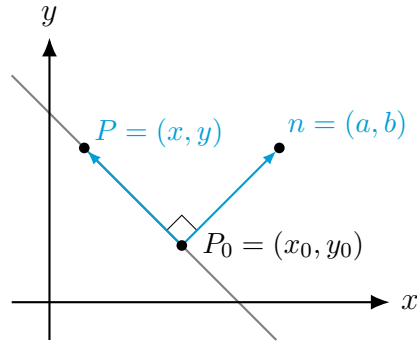
**Nota 1.7.** Es posible usar la notación  $\langle u, v \rangle$  para denotar el producto escalar de  $u$  y  $v$ , en lugar de  $u \cdot v$  si usar  $\cdot$  es causa de ambigüedad. Esto es parte del concepto más general denominado *producto interno*.

En geometría analítica se aprende que una recta en el plano está determinada por su pendiente y por uno de sus puntos. Una forma en la que podemos especificar la inclinación de una recta es usar un vector. En el caso particular de una recta de la forma  $ax + by = 0$  (con  $a, b \in \mathbb{R}$ ) podemos expresarla como  $(a, b) \cdot (x, y) = 0$ , i.e. el producto escalar de dos

vectores perpendiculares, donde  $(x, y)$  representa cualquier punto genérico sobre la recta.<sup>2</sup> Pero podemos hacer lo mismo para cualquier otra recta que no pase por el origen, dado que tiene la forma

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (1.2)$$

En tal caso la recta está dada por la ecuación  $n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$  donde  $P_0 = (x_0, y_0)$  es un punto conocido y  $n = (a, b)$  es *normal* (perpendicular) a cada punto de dicha recta (Figura 1.2.1).



**Figura 1.2.1:** Vectores ortogonales en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.9** (Vectores ortogonales). Dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  se dicen ser **ortogonales** si su producto escalar es cero, en cuyo caso forman un ángulo de  $\frac{\pi}{2}$  cuando se juntan sus respectivos puntos iniciales.

**Nota 1.8.** Los términos *ortogonal* y *perpendicular* significan exactamente lo mismo, pero usaremos con más frecuencia el primero. El concepto de ortogonalidad entre dos vectores sólo tiene sentido cuando tales vectores son diferentes del vector cero. A pesar de esto, podríamos decir que el vector  $(0, 0)$  es ortogonal a todo vector de  $\mathbb{R}^2$  porque su producto escalar con cualquier otro vector es el escalar cero.

**Teorema 1.4.** Cualquier par de vectores  $u$  y  $v$  satisface

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2u \cdot v + \|v\|^2.$$

Del teorema anterior y del hecho que dos vectores son ortogonales si su producto escalar es cero obtenemos el siguiente resultado.

**Corolario 1.4.1.** Sean  $u, v \in \mathbb{R}^2$ . Entonces  $u$  y  $v$  son **ortogonales** si y sólo si

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

**Ejemplos 1.4.**

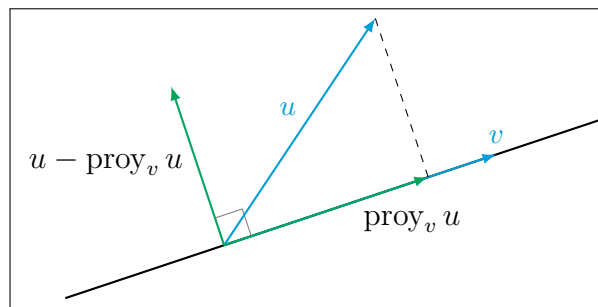
1. Los vectores  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  son ortogonales.
2. Cualquier múltiplo escalar de  $\hat{i}$  es ortogonal a cualquier múltiplo escalar de  $\hat{j}$ .
3. Dos múltiplos escalares no pueden ser ortogonales.

<sup>2</sup>Recuerde que nosotros podemos escoger la interpretación geométrica que nos convenga para representar a los elementos de  $\mathbb{R}^n$ .

4. Los vectores  $(3, 5)$  y  $(-3, -5)$  no son ortogonales porque su producto escalar es  $-3^2 - 5^2 = -34 \neq 0$ .
5. Para que los vectores  $(a, b)$  y  $(b, a)$  sean ortogonales sus componentes deben satisfacer  $ab + ba = 0$ , es decir  $ab = 0$ .
6. Los vectores  $(a, -b)$  y  $(-a, b)$  no pueden ser ortogonales, pues  $-a^2 - b^2 = 0$  resulta en  $a^2 = -b^2$ , lo cual es imposible para cualesquiera números reales  $a, b \neq 0$ .

□

A veces es útil descomponer a un vector como la suma de dos vectores perpendiculares. Por ejemplo, todo vector  $(a, b)$  de  $\mathbb{R}^2$  se puede expresar como la suma de dos vectores perpendiculares,  $a\hat{i}$  y  $b\hat{j}$ . Suponga que quiere *proyectar* un vector  $u$  sobre un vector  $v$ . Esto quiere decir que quiere encontrar un vector que sea la “sombra” de  $u$  que esté sobre  $v$ . Para este fin, basta trazar una perpendicular desde el punto terminal de  $u$  hasta  $v$  y luego construir un vector con el mismo punto inicial que  $u$  que se extienda hasta alcanzar a la perpendicular (Figura 1.2.2). Dado que este último vector, al que le llamamos proyección de  $u$  sobre  $v$  y denotamos  $\text{proy}_v u$ , se encuentra sobre la misma recta que  $v$ , es fácil deducir que debe ser un múltiplo escalar de este. Por último, el vector que se forma de la resta de  $u$  y  $\text{proy}_v u$  es perpendicular a  $v$ .



**Figura 1.2.2:** Proyección de vectores en  $\mathbb{R}^2$ .

**Definición 1.10** (Proyección de un vector sobre otro en  $\mathbb{R}^2$ ). *Dados dos vectores  $u$  y  $v$  de  $\mathbb{R}^2$  diferentes del vector cero, el vector*

$$\frac{(u \cdot v)}{\|v\|^2} v$$

*se denomina la **proyección** de  $u$  sobre  $v$  y se denota por  $\text{proy}_v u$ .*

De la definición anterior puede concluirse que el vector  $\text{proy}_v u$  es paralelo al vector  $v$ , esto es fácil de ver porque

$$\frac{(u \cdot v)}{\|v\|^2} v$$

es un múltiplo escalar de  $v$ ; véase el teorema que sigue. Además, el escalar  $\frac{u \cdot v}{\|v\|^2}$ , que en Grossman y Flores (2012) es (inadecuadamente) llamado “la componente de  $u$  en la dirección de  $v$ ”, es en realidad la magnitud del vector  $\text{proy}_v u$ . Note también que  $\frac{u \cdot v}{\|v\|^2}$  equivale a

$$\|u\| \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \|u\| \cos(\phi),$$

siendo  $\phi$  el ángulo entre  $u$  y  $v$ .

**Teorema 1.5** (Tomado de Grossman y Flores (2012)). *Sea  $v$  un vector diferente de cero. Para cualquier otro vector  $u$ , el vector*

$$w = u - \text{proy}_v u$$

*es ortogonal tanto a  $v$  como a  $\text{proy}_v u$  y además  $\text{proy}_v u$  es paralelo a  $v$ .*

**Ejemplos 1.5.**

1. La proyección de un vector sobre él mismo es el mismo vector.
2. La proyección de un vector  $u$  sobre cualquiera de sus múltiplos escalares es  $u$ .
3. La proyección del vector  $a = 3\hat{i} + 4\hat{j}$  sobre el vector  $b = -\hat{i}$  es

$$\text{proy}_b a = \frac{a \cdot b}{b \cdot b} b = \frac{3(-1) + 4(0)}{(-1)^2 + 0^2} (-\hat{i}) = 3\hat{i}.$$

Observe que tal proyección es la componente vectorial de  $a$  en el eje de las abscisas, i.e.  $a = \text{proy}_b a + 4\hat{j}$ . Observe también que usamos la igualdad  $b \cdot b = \|b\|^2$ . Aunque esta proyección no está sobre  $b$ , sí está sobre la misma línea que  $b$ .

4. Si se conoce que  $v = (5, -8)$  y  $\text{proy}_u v = (-2, -6)$  para un vector  $u = (a, b)$  en el primer cuadrante con magnitud  $\|u\| = 10$ , entonces debe cumplirse que

$$u \cdot (v - \text{proy}_u v) = 0 \iff (a, b) \cdot (7, -2) = 0$$

porque son ortogonales. Además,  $u \cdot u = 10^2$ . Si resuelve

$$\begin{cases} 7a - 2b = 0 \\ a^2 + b^2 = 100 \end{cases}$$

encontrará que  $a = 20/\sqrt{53}$  y  $b = 70/\sqrt{53}$ , por lo que  $u = \frac{1}{\sqrt{53}}(20, 70)$ . ¡Compruébelo!

5. La proyección de un vector sobre el vector cero no está definida, pero asumiremos que el vector cero es ortogonal a todo vector.

□

### 1.2.1. Problemas resueltos

La mayoría (si no todos) de los enunciados de los problemas que se presentan en esta sección fueron tomados o adaptados de Grossman y Flores (2012).

**Problema 1.9.** Calcule el producto escalar de los vectores  $u = \hat{i} + \hat{j}$  y  $v = \hat{i} - \hat{j}$ , y el coseno del ángulo entre ellos.

**Solución.** El producto escalar está dado por  $u \cdot v = (1)(1) + (1)(-1) = 0$ . Si  $\varphi$  es el ángulo entre  $u$  y  $v$ , entonces

$$\cos(\varphi) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = 0.$$

□

**Problema 1.10.** Demuestre que para cualquier par de números reales  $\alpha$  y  $\beta$ , los vectores  $u = \alpha\hat{i} + \beta\hat{j}$  y  $v = \beta\hat{i} - \alpha\hat{j}$  son ortogonales.

**Solución.** Obsérvese que

$$u \cdot v = (\alpha)(\beta) + (\beta)(-\alpha) = \alpha\beta - \alpha\beta = 0.$$

Como dos vectores son ortogonales siempre que su producto escalar es 0, lo anterior demuestra que  $u$  y  $v$  son ortogonales para cualquier  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Problema 1.11.** Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P$  y tiene a  $n$  como vector normal.

(a)  $P = (\sqrt{5}, -1), n = (3, 2)$

(c)  $P = (-7, 1), n = (5, 9)$

(b)  $P = (\pi, 3), n = (-13, 4)$

(d)  $P = (0, 6), n = (8, -8)$

**Solución.** Use la forma  $n \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$  de la ecuación (1.2) con  $Q = (x, y)$  arbitrario.

(a)  $3(x - \sqrt{5}) + 2(y + 1) = 0$

(c)  $5(x + 7) + 9(y - 1) = 0$

(b)  $-13(x - \pi) + 4(y - 3) = 0$

(d)  $8x - 8(y - 6) = 0$   $\square$

**Problema 1.12.** En cada caso determine  $\|\text{proy}_v w\|$ .

(a)  $v = (8, 3), w = (6, 7)$

(c)  $v = (\sqrt{7}, \sqrt{7}), w = (6, 17)$

(b)  $v = (2, 7), w = (16, -4)$

(d)  $v = (-2, 5), w = (.3, 1)$

**Solución.** Utilice la igualdad

$$\|\text{proy}_v w\| = \frac{|v \cdot w|}{\|v\|^2} \|v\| = \frac{|v \cdot w|}{\|v\|}.$$

(a)  $\|\text{proy}_v w\| = \frac{|8(6)+3(7)|}{\sqrt{8^2+3^2}} = \frac{69\sqrt{73}}{73}$

(b)  $\|\text{proy}_v w\| = \frac{|2(16)+7(-4)|}{\sqrt{2^2+7^2}} = \frac{4\sqrt{53}}{53}$

(c)  $\|\text{proy}_v w\| = \frac{|\sqrt{7}(6)+\sqrt{7}(17)|}{\sqrt{\sqrt{7}^2+\sqrt{7}^2}} = \frac{23\sqrt{2}}{2}$

(d)  $\|\text{proy}_v w\| = \frac{|-2(.3)+5(1)|}{\sqrt{2^2+5^2}} = \frac{22\sqrt{29}}{145}$   $\square$

**Problema 1.13.** Sean  $u = -3\hat{i} + 6\hat{j}$  y  $v = 2\hat{i} + \alpha\hat{j}$ . Determine  $\alpha$  tal que:

(a)  $u$  y  $v$  son ortogonales

(c) El ángulo entre  $u$  y  $v$  es  $\pi/4$

(b)  $u$  y  $v$  son paralelos

(d) El ángulo entre  $u$  y  $v$  es  $4\pi/3$ .

**Solución.**

(a) Dos vectores son ortogonales si y sólo si su producto escalar es 0. Así,  $u$  y  $v$  son ortogonales si y sólo si  $-6 + 6\alpha = 0$ , es decir, cuando  $\alpha = 1$ .

(b) Dos vectores son paralelos si y sólo si uno es múltiplo escalar del otro. Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $(-3, 6) = (2\lambda, \lambda\alpha)$ . De aquí obtenemos  $\lambda = -3/2$  y por tanto  $\alpha = -4$ .

(c) Si el ángulo entre  $u$  y  $v$  es  $\pi/4$ , entonces se satisface que  $\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$  lo que resulta en

$$\begin{aligned} \frac{-6 + 6\alpha}{\sqrt{45}\sqrt{4 + \alpha^2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \left(\frac{-2 + 2\alpha}{\sqrt{5}\sqrt{4 + \alpha^2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \\ &\implies \frac{4 - 8\alpha + 4\alpha^2}{20 + 5\alpha^2} = \frac{1}{2} \\ &\implies 3\alpha^2 - 16\alpha - 12 = 0 \\ &\implies (\alpha - 6)\left(\alpha + \frac{2}{3}\right) = 0. \end{aligned}$$

Luego  $\alpha = 6$ , pero  $\alpha \neq -2/3$  pues  $v$  se encontraría en el cuarto cuadrante y formaría un ángulo de más de  $\pi/2$  con  $u$ .

(d) De manera análoga, si el ángulo entre  $u$  y  $v$  es  $4\pi/3$ , entonces

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) &= \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} \implies \left(\frac{-2 + 2\alpha}{\sqrt{5}\sqrt{4 + \alpha^2}}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \\ &\implies \frac{4 - 8\alpha + 4\alpha^2}{20 + 5\alpha^2} = \frac{1}{4} \\ &\implies 11\alpha^2 - 32\alpha - 4 = 0 \\ &\implies \alpha = \frac{16 \pm 10\sqrt{3}}{11}. \end{aligned}$$

□

**Problema 1.14.** En el Problema 1.13 demuestre que existe un valor de  $\alpha$  para el que  $u$  y  $v$  tienen direcciones contrarias.

**Solución.** Como se vio en el Problema 1.13–(b),  $u$  y  $v$  son paralelos si  $\alpha = -4$ , luego

$$\arccos\left(\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}\right) = \arccos\left(\frac{-30}{\sqrt{45}\sqrt{20}}\right) = \pi,$$

es el ángulo entre  $u$  y  $v$  que hace que posean direcciones opuestas. (Se deja al lector verificar que no es posible que  $u$  y  $v$  tengan la misma dirección para cualquier valor de  $\alpha$ .)

□

**Problema 1.15.** Sean  $u = a_1\hat{i} + b_1\hat{j}$  y  $v = a_2\hat{i} + b_2\hat{j}$ . Establezca una condición sobre  $a_1, b_1, a_2, b_2$  que asegure que  $v$  y  $\text{proy}_v u$  tengan la misma dirección.

**Solución.** Calculamos

$$\text{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v = \left(\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}\right) (a_2 \hat{i} + b_2 \hat{j}).$$

Para que  $v$  y  $\text{proy}_v u$  tengan la misma dirección, el escalar  $\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$  debe ser positivo.

Dado que  $a_2^2 + b_2^2$  es mayor que 0 siempre que  $a_2 \cdot b_2 \neq 0$ , entonces necesariamente se debe cumplir que  $a_1 a_2 + b_1 b_2 \geq 0$ , lo que es equivalente a  $u \cdot v \geq 0$ . □

**Problema 1.16.** Encuentre el coseno de cada ángulo de un triángulo que tiene por vértices a los puntos  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$  y  $(a_3, b_3)$ .

**Solución.** Llamemos  $P = (a_1, b_1)$ ,  $Q = (a_2, b_2)$  y  $R = (a_3, b_3)$  a los vértices del triángulo. Tenemos que

$$\overrightarrow{PQ} = (a_2 - a_1, b_2 - b_1), \quad \overrightarrow{PR} = (a_3 - a_1, b_3 - b_1) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{QR} = (a_3 - a_2, b_3 - b_2)$$

son los segmentos de recta dirigidos que conforman los lados del triángulo. Luego, si  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  denotan cada ángulo, entonces

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{(a_2 - a_1, b_2 - b_1) \cdot (a_3 - a_2, b_3 - b_2)}{\sqrt{[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2][(a_3 - a_2)^2 + (b_3 - b_2)^2]}}, \\ \cos(\beta) &= \frac{(a_2 - a_1, b_2 - b_1) \cdot (a_3 - a_1, b_3 - b_1)}{\sqrt{[(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2][(a_3 - a_1)^2 + (b_3 - b_1)^2]}}, \quad \text{y} \\ \cos(\gamma) &= \frac{(a_3 - a_2, b_3 - b_2) \cdot (a_3 - a_1, b_3 - b_1)}{\sqrt{[(a_3 - a_2)^2 + (b_3 - b_2)^2][(a_3 - a_1)^2 + (b_3 - b_1)^2]}}. \end{aligned}$$

□

**Problema 1.17.** Sean  $u = \alpha\hat{j} + \hat{i}$  y  $v = 2\hat{i} + \beta\hat{j}$  con  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Determine  $\alpha$  y  $\beta$  tales que

- |                               |   |
|-------------------------------|---|
| (a) $u$ y $v$ son ortogonales | (c) El ángulo entre $u$ y $v$ es $\pi/4$  |
| (b) $u$ y $v$ son paralelos   | (d) El ángulo entre $u$ y $v$ es $3\pi/4$ |

**Solución.**

- (a) Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es 0. En este caso,  $u$  y  $v$  son ortogonales si  $2 + \alpha\beta = 0$ . Observe que el producto  $\alpha\beta$  no puede ser 0 porque  $2 \neq 0$ . El conjunto  $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : 2 + \alpha\beta = 0\}$  contiene todos los pares  $(\alpha, \beta)$  que hacen que  $u$  y  $v$  sean ortogonales.
- (b) Dos vectores son paralelos si uno es múltiplo escalar del otro. Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda(1, \alpha) = (2, \beta)$ , de donde se obtiene  $\lambda = 2$  y  $\lambda\alpha = \beta$ . Luego, si  $\alpha = \frac{\beta}{2}$ , entonces  $u$  y  $v$  son ortogonales.
- (c) Denotemos por  $\theta_u$  y  $\theta_v$  la dirección de  $u$  y  $v$ , respectivamente. Requerimos  $|\theta_u - \theta_v| = \pi/4$ , por lo que existen dos posibles casos (para  $\theta_u$  y  $\theta_v$ ) en los que el ángulo entre  $u$  y  $v$  es  $\pi/4$ .
- (i) Si  $\theta_v < \theta_u$ , entonces  $\theta_u - \theta_v = \pi/4$ , de donde se sigue lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tan(\theta_u - \theta_v) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &\implies \frac{\tan(\theta_u) - \tan(\theta_v)}{1 + \tan(\theta_u)\tan(\theta_v)} = 1 \\ &\implies \frac{\alpha - \beta/2}{1 + \alpha\beta/2} = 1 \\ &\implies \alpha = \frac{\beta + 2}{2 - \beta}. \end{aligned}$$

(ii) Si  $\theta_u < \theta_v$ , entonces  $\theta_v - \theta_u = \pi/4$ , de donde se sigue lo siguiente:

$$\begin{aligned} \tan(\theta_v - \theta_u) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) &\implies \frac{\tan(\theta_v) - \tan(\theta_u)}{1 + \tan(\theta_v)\tan(\theta_u)} = 1 \\ &\implies \frac{\beta/2 - \alpha}{1 + \alpha\beta/2} = 1 \\ &\implies \alpha = \frac{\beta - 2}{2 + \beta}. \end{aligned}$$

Resumiendo,  $\alpha$  toma dos valores por cada valor de  $\beta$ , y ambas están relacionadas por

$$\alpha = \frac{\beta \pm 2}{2 \mp \beta}.$$

(d) De manera análoga puede encontrarse que  $\alpha = \frac{\beta \mp 2}{2 \pm \beta}$ . □

**Problema 1.18.** Encuentre dos vectores que sean ortogonales al vector dado.

(a)  $a = (2, -3)$

(c)  $c = (10, 3)$

(b)  $b = (5, -5)$

(d)  $d = (-7, -9)$

**Solución.** Sea cualquier vector  $u \in \mathbb{R}^2$ , por ejemplo  $(1, 0)$ . Por el Teorema 1.5, el vector  $u - \text{proy}_v u$  es perpendicular a  $v$  pero también lo es cualquiera de sus múltiplos escalares, e.g.  $\text{proy}_v u - u$ .

(a)  $u - \text{proy}_a u = \left(\frac{9}{13}, \frac{6}{13}\right)$  y  $\text{proy}_a u - u = \left(\frac{-9}{13}, \frac{-6}{13}\right)$

(b)  $u - \text{proy}_b u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  y  $\text{proy}_b u - u = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$

(c)  $u - \text{proy}_c u = \left(\frac{9}{109}, \frac{-30}{109}\right)$  y  $\text{proy}_c u - u = \left(\frac{-9}{109}, \frac{30}{109}\right)$

(d)  $u - \text{proy}_d u = \left(\frac{81}{130}, \frac{-63}{130}\right)$  y  $\text{proy}_d u - u = \left(\frac{-81}{130}, \frac{63}{130}\right)$  □

**Problema 1.19.** Sean  $u = 2\hat{i} + 3\alpha\hat{j}$  y  $v = 3\hat{i} + 2\beta\hat{j}$ . Determine  $\alpha$  y  $\beta$  para que se cumplan las condiciones siguientes en cada caso:

(a)  $u$  y  $v$  son ortogonales

(c) El ángulo entre  $u$  y  $v$  es  $\pi/4$

(b)  $u$  y  $v$  son paralelos

(d) El ángulo entre  $u$  y  $v$  es  $5\pi/6$

**Solución.**

(a) Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es 0. Así,  $u$  y  $v$  son ortogonales si  $6 + 6\alpha\beta = 0$  o  $1 + \alpha\beta = 0$ . Observe que el producto  $\alpha\beta$  no puede ser 0 porque  $1 \neq 0$ . Se puede ver que  $\alpha$  y  $\beta$  están relacionadas hiperbólicamente mediante  $\alpha = -1/\beta$ .

(b) Dos vectores son paralelos si uno es múltiplo escalar del otro. Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda(2, 3\alpha) = (3, 2\beta)$ . De aquí se obtiene que  $\lambda = 3/2$  y por tanto  $\alpha = \frac{4\beta}{9}$ .

(c) Denotemos por  $\theta_u$  y  $\theta_v$ , la dirección de  $u$  y  $v$ , respectivamente. Buscamos  $|\theta_u - \theta_v| = \pi/4$ , por lo que existen dos posibles casos (para  $\theta_u$  y  $\theta_v$ ) en los que el ángulo entre  $u$  y  $v$  es  $\pi/4$ .

(i) Si  $\theta_v < \theta_u$ , entonces  $\theta_u - \theta_v = \pi/4$ . Utilizando la identidad  $\sin(\theta_u - \theta_v) = \sin(\theta_u) \cos(\theta_v) - \sin(\theta_v) \cos(\theta_u)$  se tiene

$$\frac{9\alpha - 4\beta}{\sqrt{(4 + 9\alpha^2)(9 + 4\beta^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1.3)$$

Por otra parte, como  $\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$ , entonces

$$\frac{6 + 6\alpha\beta}{\sqrt{(4 + 9\alpha^2)(9 + 4\beta^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1.4)$$

Si dividimos la ecuación (1.3) por la ecuación (1.4) obtenemos  $\frac{9\alpha - 4\beta}{6 + 6\alpha\beta} = 1$  y

por tanto  $\alpha = \frac{4\beta + 6}{9 - 6\beta}$ .

(ii) Si  $\theta_u < \theta_v$ , entonces  $\theta_v - \theta_u = \pi/4$ . Utilizando la identidad  $\sin(\theta_v - \theta_u) = \sin(\theta_v) \cos(\theta_u) - \sin(\theta_u) \cos(\theta_v)$  se tiene

$$\frac{4\beta - 9\alpha}{\sqrt{(4 + 9\alpha^2)(9 + 4\beta^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1.5)$$

Por otra parte, como  $\cos(\theta_v - \theta_u) = \cos(\theta_v) \cos(\theta_u) + \sin(\theta_v) \sin(\theta_u)$ , entonces

$$\frac{6 + 6\alpha\beta}{\sqrt{(4 + 9\alpha^2)(9 + 4\beta^2)}} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (1.6)$$

Si dividimos la ecuación (1.5) por la ecuación (1.6) obtenemos  $\frac{4\beta - 9\alpha}{6 + 6\alpha\beta} = 1$  y

por tanto  $\alpha = \frac{4\beta - 6}{9 + 6\beta}$ .

Resumiendo,  $\alpha$  toma dos valores por cada valor de  $\beta$ , y ambas están relacionadas por  $\alpha = \frac{4\beta \pm 6}{9 \mp 6\beta}$ .

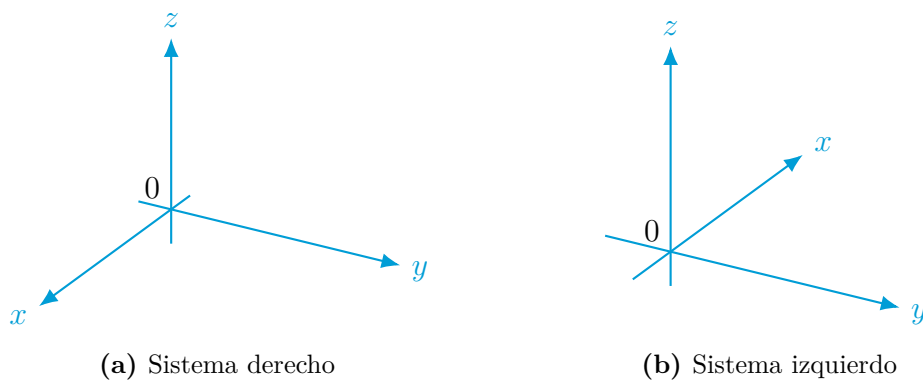
(d) Análogamente puede encontrarse que  $\alpha = \frac{4\beta \mp 2\sqrt{3}}{9 \pm 2\sqrt{3}\beta}$ . □



### 1.3. Vectores en el espacio

Así como representamos a los elementos de  $\mathbb{R}^2$  con un par de números reales, también es posible representar a los elementos de  $\mathbb{R}^3$  con una *terna* de escalares. Obviamente esta terna es ordenada. El conjunto de ternas ordenadas conforma el espacio tridimensional  $\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$  (o simplemente *espacio*).

Para representar un punto en el espacio debemos escoger un sistema conformado por tres rectas reales perpendiculares entre sí y cuya intersección es el origen de coordenadas del sistema. El sistema usual para representar a los vectores de  $\mathbb{R}^3$  se denomina *sistema derecho* (Figura 1.3.1a) aunque se puede utilizar una variante denominada *sistema izquierdo* (Figura 1.3.1b).



**Figura 1.3.1:** Los ejes  $x$ ,  $y$ , y  $z$  determinan tres planos perpendiculares: el plano  $xy$ , el plano  $xz$  y el plano  $yz$ . Estos planos dividen al espacio en ocho octantes.

Todas las definiciones y teoremas establecidos en las dos secciones anteriores también son válidos para vectores de  $\mathbb{R}^3$  y de hecho son un caso particular de los vectores de  $\mathbb{R}^n$ , a diferencia de la definición de dirección. En  $\mathbb{R}^3$  (y en  $\mathbb{R}^n$  en general) se toma la dirección de un vector como su unitario.<sup>3</sup> Quizá la generalización más importante a tener en cuenta es la del producto escalar. Para dos vectores  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  y  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , se tiene

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \dots + u_nv_n.$$

Así como  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  conforman la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , existen también tres vectores que conforman la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ : los vectores unitarios  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 1)$ . A estos vectores, que llamamos *vectores base*, los denotamos por  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ , respectivamente.<sup>4</sup>

#### Ejemplos 1.6.

1. Todo vector  $(a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  se puede expresar de manera única como la combinación lineal  $a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ .
2. La suma  $\hat{i} - \hat{j} - \hat{k} + 8\hat{j} + \sqrt{3}\hat{i} + \hat{k}$  da lugar al vector  $(1 + \sqrt{3})\hat{i} + 7\hat{j}$ .
3. La norma del vector  $v = (2, 1, 3)$  es  $\sqrt{v \cdot v} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ .

<sup>3</sup>En realidad, en  $\mathbb{R}^2$  también podemos tomar la dirección de un vector como su unitario.

<sup>4</sup>Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) “creó” lo que se conoce como *quaterniones*, que son los precursores del concepto de vector de  $\mathbb{R}^3$ . Él fue el primero en utilizar los símbolos  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ .

4. La dirección del vector  $w = (5, 7, 6)$  la da su unitario:

$$\frac{1}{\|w\|}w = \frac{1}{\sqrt{110}}(5, 7, 6).$$

5. Los vectores  $(a, b, c)$  y  $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$  con  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  tienen la misma dirección: el vector unitario

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(a, b, c).$$

6. Los vectores  $(-1, 3, \pi)$  y  $(\pi, -3\pi, -\pi^2)$  son paralelos (y colineales) porque uno es múltiplo escalar del otro.

7. El ángulo entre  $v = (1, 0, 8)$  y  $w = (0, 5, -4)$  está dado por

$$\phi = \arccos\left(\frac{1(0) + 0(5) + 8(-4)}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 8^2}\sqrt{0^2 + 5^2 + 4^2}}\right) = \arccos\left(-\frac{32}{\sqrt{2665}}\right)$$

y su producto escalar es  $v \cdot w = \sqrt{65}\sqrt{41}\cos(\phi) = -32$ .

8. La proyección de  $v = (-2, 7, 9)$  sobre  $w = (2, 0, 5)$  es el vector

$$\text{proy}_w v = \frac{v \cdot w}{\|w\|^2}w = \frac{-2(2) + 7(0) + 9(5)}{2^2 + 0^2 + 5^2}(2, 0, 5) = \frac{41}{29}(2, 0, 5).$$

Además, el vector

$$v - \text{proy}_w v = \left(-\frac{140}{29}, 7, \frac{56}{29}\right)$$

es ortogonal a cualquier múltiplo escalar de  $w$ .

9. Los vectores  $(0, 2, 0)$  y  $(0, 0, 3)$  son ortogonales porque

$$\|(0, 2, 0) + (0, 0, 3)\|^2 = \|(0, 2, 0)\|^2 + \|(0, 0, 3)\|^2.$$

Esto se sigue del teorema de Pitágoras (Corolario 1.4.1).

10. El producto escalar  $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k}$  es igual a 1.

11. El producto escalar  $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{i} \cdot \hat{k}$  es igual a cero.

□

En  $\mathbb{R}^3$  podemos definir la dirección de un vector  $v = (a, b, c)$  en términos de tres ángulos que  $v$  forma con los ejes  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Definimos  $\alpha$  como el ángulo entre  $v$  y el eje  $x$  positivo,  $\beta$  el ángulo entre  $v$  y el eje  $y$  positivo, y  $\gamma$  como el ángulo entre  $v$  y el eje  $z$  positivo (Grossman & Flores, 2012). Estos ángulos se denominan *ángulos directores* y satisfacen lo siguiente:

$$\cos(\alpha) = \frac{v \cdot \hat{i}}{\|v\|\|\hat{i}\|} = \frac{a}{\|v\|}, \quad \cos(\beta) = \frac{v \cdot \hat{j}}{\|v\|\|\hat{j}\|} = \frac{b}{\|v\|}, \quad \text{y} \quad \cos(\gamma) = \frac{v \cdot \hat{k}}{\|v\|\|\hat{k}\|} = \frac{c}{\|v\|}.$$

Los cosenos de estos ángulos se denominan *cosenos directores* y la suma de sus cuadrados es igual a 1:

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1.$$

Es fácil ver que, si  $v$  es un vector unitario, entonces

$$\cos(\alpha) = a, \quad \cos(\beta) = b, \quad \text{y} \quad \cos(\gamma) = c,$$

por lo que podemos escribir  $v = (\cos(\alpha), \cos(\beta), \cos(\gamma))$ ; o en general

$$v = (\|v\| \cos(\alpha), \|v\| \cos(\beta), \|v\| \cos(\gamma))$$

Por último, si  $v$  no es unitario, entonces llamamos *números directores* a los números  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

### Ejemplos 1.7.

1. Si nos piden encontrar los cosenos directores del vector  $w = (\sqrt{7}, \pi, 1)$ , entonces basta encontrar su unitario

$$\frac{w}{\|w\|} = \left( \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8 + \pi^2}}, \frac{\pi}{\sqrt{8 + \pi^2}}, \frac{1}{\sqrt{8 + \pi^2}} \right)$$

y tomar

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8 + \pi^2}}, \quad \cos(\beta) = \frac{\pi}{\sqrt{8 + \pi^2}}, \quad \text{y} \quad \cos(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{8 + \pi^2}}.$$

2. Los cosenos directores de cierto vector son  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ ,  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  y  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . Se cumple que la suma de los cuadrados de estos tres números es igual a 1:

$$\left( \frac{1}{\sqrt{6}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = \frac{4 + 8 + 12}{24} = 1.$$

Si el vector en cuestión es unitario, entonces él podría ser el vector  $\left( \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ . (¿Puede encontrar otro?)

□

**Definición 1.11** (Distancia). Sean  $u = (x_1, y_1, z_1)$  y  $v = (x_2, y_2, z_2)$  dos puntos en el espacio. La **distancia** entre  $u$  y  $v$ , denotada por  $d(u, v)$  está dada por

$$\|u - v\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

**Nota 1.9.** La Definición 1.11 es un caso particular de la definición de distancia en  $\mathbb{R}^n$  (que en realidad es una generalización).

### 1.3.1. Problemas resueltos

La mayoría (si no todos) de los enunciados de los problemas que se presentan en esta sección fueron tomados o adaptados de Grossman y Flores (2012).

**Problema 1.20.** Demuestre que no existe un vector unitario en  $\mathbb{R}^3$  cuyos ángulos directores sean  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  y  $\frac{\pi}{4}$ .

**Solución.** Si existiese tal vector unitario con tales ángulos directores, entonces la suma de los cuadrados de los cosenos de los ángulos directores sería igual a la unidad. Sin embargo,

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2} \neq 1,$$

por lo que no existe tal vector unitario.  $\square$

**Problema 1.21.** Los tres ángulos directores de cierto vector unitario son los mismos y están entre 0 y  $\frac{\pi}{2}$ . ¿Cuál es el vector?

**Solución.** Denotemos por  $u = (x, y, x)$  a tal vector. Tenemos

$$\cos(\alpha) = \cos(\beta) = \cos(\gamma) \iff \frac{x}{\|u\|} = \frac{y}{\|u\|} = \frac{z}{\|u\|},$$

donde  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  son los ángulos directores de  $u$ . Como  $u$  es unitario, entonces  $x = y = z$ . Así,  $u = (x, x, x) = x(1, 1, 1)$ . Además, se satisface que

$$\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1 \implies 3\cos^2(\alpha) = 1 \implies \cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Como  $\cos(\alpha) = x$ , entonces  $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ .  $\square$

**Problema 1.22.** Sean  $u = (-1, 2, -3)$ ,  $v = (2, -3, 5)$ ,  $w = (1, -4, 3)$  y  $t = (1, 2, -1)$ . Calcule (a) el producto  $(3t - 4u) \cdot (-2v + 3w)$  y (b) la proyección de  $w$  sobre  $t$ .

**Solución.**

(a) Se tiene  $3t - 4u = (7, -2, 9)$  y  $-2v + 3w = (-1, -6, 1)$ , por lo que

$$(3t - 4u) \cdot (-2v + 3w) = -7 + 12 - 9 = -4.$$

(b) Como  $w \cdot t = 1 - 8 - 3 = -10$  y  $\|t\|^2 = 6$ , entonces

$$\text{proy}_t w = \frac{w \cdot t}{\|t\|^2} t = -\frac{5}{3}(1, 2, -1).$$

$\square$

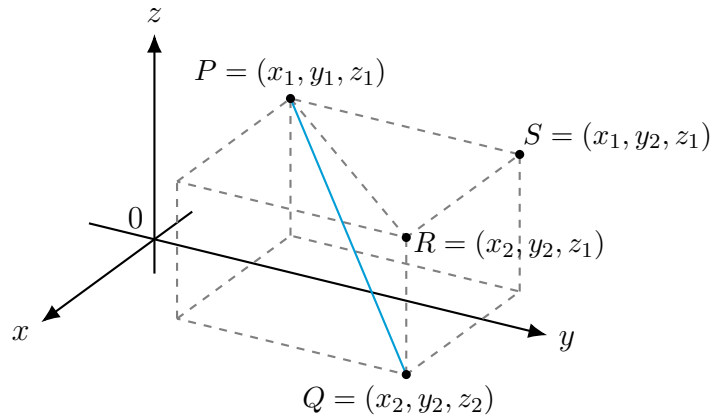
**Problema 1.23.** Pruebe, haciendo uso de la Figura 1.3.2, el Teorema 4.3.1 de Grossman y Flores (2012).

**Teorema 4.3.1.** Sean  $P = (x_1, y_1, z_1)$  y  $Q = (x_2, y_2, z_2)$  dos puntos en el espacio. La distancia  $\overline{PQ}$  entre  $P$  y  $Q$  está dada por  $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ .

**Solución.** Véase la Figura 1.3.2. De los triángulos  $\triangle PQR$  y  $\triangle PRS$  obtenemos  $\overline{PQ}^2 = \overline{QR}^2 + \overline{PR}^2$  y  $\overline{PR}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{RS}^2$ , respectivamente. Es claro que  $\overline{QR} = |z_1 - z_2|$ ,  $\overline{PS} = |y_1 - y_2|$ , y  $\overline{RS} = |x_1 - x_2|$ . Luego,

$$\begin{aligned} \overline{PQ}^2 &= \overline{QR}^2 + \overline{PR}^2 \\ &= (z_1 - z_2)^2 + \overline{PS}^2 + \overline{RS}^2 \\ &= (z_1 - z_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (x_1 - x_2)^2. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ .  $\square$



**Figura 1.3.2:** Problema 1.23. Adaptada de Grossman y Flores (2012).

**Problema 1.24.** Sean  $P = (3, 1, -3)$  y  $Q = (3, 6, -3)$ , encuentre el conjunto de los puntos  $R$  que satisfacen  $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$ .

**Solución.** Sea  $(x, y, z)$  el punto  $R$ . Tenemos

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} &= (x - 3, y - 1, z + 3), & y \\ \overrightarrow{PQ} &= (0, 5, 0).\end{aligned}$$

Dos vectores son ortogonales si su producto escalar es 0, luego

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 &\implies (x - 3, y - 1, z + 3) \cdot (0, 5, 0) = 0 \\ &\implies 5(y - 1) = 0 \\ &\implies y = 1.\end{aligned}$$

Por lo tanto, el conjunto  $\{(x, 1, z) \in \mathbb{R}^3 : x, z \in \mathbb{R}\}$  contiene a todos los puntos  $R$  tales que  $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$ .  $\square$

**Problema 1.25.** Sean  $P = (3, 2, 0)$  y  $Q = (4, 1, 5)$  puntos de  $\mathbb{R}^3$ . Caracterice a las componentes de un punto  $R$  si este cumple con  $\overrightarrow{PR} \perp \overrightarrow{PQ}$ .

**Solución.** Sea  $R = (x, y, z)$  un punto de  $\mathbb{R}^3$ . Calculamos  $\overrightarrow{PQ} = (1, -1, 5)$  y  $\overrightarrow{PR} = (x - 3, y - 2, z)$ . Luego,  $\overrightarrow{PR}$  y  $\overrightarrow{PQ}$  son ortogonales si y sólo si  $(x - 3, y - 2, z) \cdot (1, -1, 5) = 0$ , es decir si y sólo si las componentes de  $R$  satisfacen  $x - y + 5z = 1$ .  $\square$



## 1.4. Producto cruz

Ahora veremos ciertas propiedades (exclusivas) de los vectores de  $\mathbb{R}^3$ . Veremos un tipo de “multiplicación vectorial” que nos permite construir un vector perpendicular a dos vectores dados.

**Definición 1.12** (Producto cruz, tomada de Grossman y Flores (2012)). Sean dos vectores  $u = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ ,  $y v = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$ . El **producto cruz** (o **vectorial**) de  $u$  y  $v$  está definido por

$$u \times v = (b_1c_2 - c_1b_2)\hat{i} + (c_1a_2 - a_1c_2)\hat{j} + (a_1b_2 - b_1a_2)\hat{k}.$$

**Nota 1.10.** El producto cruz no está definido para vectores de  $\mathbb{R}^2$  ni vectores de  $\mathbb{R}^n$  con  $n \geq 4$ .

**Nota 1.11.** Un *determinante de orden 2* está definido por

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Por ejemplo,

$$\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -30 - (-12) = -18.$$

Dedicaremos el Capítulo 3 a hablar de determinantes de una manera más general.

**Teorema 1.6.** El producto cruz de  $u = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$  y  $v = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$  está dado por el determinante

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}.$$

**Nota 1.12.** En realidad, no se tiene un determinante porque  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$  no son números sino vectores. El usar la notación de determinantes simplemente es una mnemotecnica para calcular el producto cruz de dos vectores (Grossman & Flores, 2012). Piense en el producto cruz como una operación que toma dos vectores y produce otro vector, contrario a lo que hace el producto escalar. El vector resultante  $u \times v$  y cualquier múltiplo escalar de este es ortogonal o *normal* tanto a  $u$  como a  $v$  (o cualquiera de sus múltiplos escalares).

**Teorema 1.7.** Sean  $u, v$  dos vectores no nulos. Entonces  $u \times v$  es ortogonal tanto a  $u$  como a  $v$ .

### Ejemplos 1.8.

1. El producto vectorial  $\hat{i} \times \hat{j}$  es el vector  $\hat{k}$  así como  $\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$  y  $\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$ .
2. El producto vectorial de  $v = (1, 5, -2)$  y  $w = (3, 0, 1)$  es el vector

$$v \times w = \left( \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \right) = (5, -7, -15).$$

3. El vector  $u = (-5, 7, 15)$  es perpendicular tanto a  $v = (-1, -5, 2)$  como a  $w = (-3, 0, -1)$ , pues

$$\begin{aligned} u \cdot v &= -5(-1) + 7(-5) + 15(2) = 0, \quad y \\ w \cdot u &= -3(-5) + 0(7) - 1(15) = 0. \end{aligned}$$

Note que estos tres vectores son múltiplos escalares de los vectores del ítem anterior.

4. El producto vectorial de  $w = (3, 0, 1)$  y  $v = (1, 5, -2)$  es el vector

$$w \times v = \left( \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \right) = (-5, 7, 15).$$

¿Puede encontrar la relación entre los vectores  $v \times w$  y  $w \times v$ ?

□

**Teorema 1.8.** Sean  $u, v$  y  $w$  tres vectores diferentes de cero en  $\mathbb{R}^3$  y sea  $\lambda$  un escalar. Se tiene los siguientes resultados, donde  $0$  denota el vector cero de  $\mathbb{R}^3$ .

- (i)  $u \times 0 = 0 \times u = 0$
- (ii)  $u \times u = 0$
- (iii)  $(\lambda u) \times v = \lambda(u \times v)$  (Homogeneidad)
- (iv)  $u$  y  $v$  son paralelos si y sólo si  $u \times v = 0$ .
- (v)  $u \times v = -(v \times u)$  (Propiedad anticonmutativa del producto vectorial)
- (vi)  $u \times (v + w) = (u \times v) + (u \times w)$  (Propiedad distributiva del producto vectorial)
- (vii)  $(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$  (Triple producto escalar)
- (viii)  $\|u \times v\|^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2$  (Identidad de Lagrange)
- (ix)  $u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w$  (Triple producto vectorial)
- (x)  $(u \times v) \times w = (u \cdot w)v - (v \cdot w)u$  (Triple producto vectorial)

**Nota 1.13.** Escribir  $(u \cdot v) \times w$  no tiene sentido porque no podemos formar el producto vectorial de un escalar y un vector. Eso sugiere que no existe ninguna ambigüedad si escribimos  $u \cdot v \times w$  en lugar de  $u \cdot (v \times w)$ . Sin embargo, para mayor claridad, normalmente mantendremos los paréntesis (Anton et al., 2019).

### Ejemplos 1.9.

1. El producto cruz de un vector consigo mismo es el vector cero de  $\mathbb{R}^3$ .
2.  $\hat{i} \times (0, 0, 0) = (0, 0, 0) \times \hat{k} = \hat{j} \times (0, 0, 0) = (0, 0, 0)$
3. El vector  $\hat{i} \times (\hat{j} \times \hat{j})$  es diferente del vector  $(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{j}$  y no se cumple que  $\hat{i} \times (\hat{j} \times \hat{j}) = -(\hat{i} \times \hat{j}) \times \hat{j}$ .
4. Los vectores  $\hat{i}$  y  $-2\hat{i}$  son paralelos porque  $\hat{i} \times (-2\hat{i}) = 0$ .

5. El vector  $(3\hat{i}) \times (2\hat{j} + 5\hat{k})$  es igual a  $(3\hat{i}) \times (2\hat{j}) + (3\hat{i}) \times (5\hat{k}) = 6\hat{k} - 15\hat{j}$ .

6. El triple producto vectorial  $[(2, 0, 7) \times (0, 1, 3)] \times (-6, 5, 0)$  es el vector

$$-12(0, 1, 3) - 5(2, 0, 7) = (-10, -12, -71).$$

Este vector es ortogonal a  $(2, 0, 7) \times (0, 1, 3)$  ¡Compruébelo!

7. La identidad de Lagrange nos permite hallar la magnitud de un producto cruz sin calcular directamente el producto cruz de dos vectores. La magnitud de  $u \times v = (5, -2, -3) \times (0, 9, 1)$  es

$$\begin{aligned} \sqrt{\|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2} &= \sqrt{(5^2 + 2^2 + 3^2)(0^2 + 9^2 + 1^2) - (5(0) - 2(9) - 3(1))^2} \\ &= \sqrt{3116 - 441} \\ &= 5\sqrt{107}. \end{aligned}$$

Note además que  $\|u \times v\| = \|v \times u\|$ .

8. El triple producto escalar de tres vectores  $u, v$  y  $w$  puede ser calculado con la fórmula

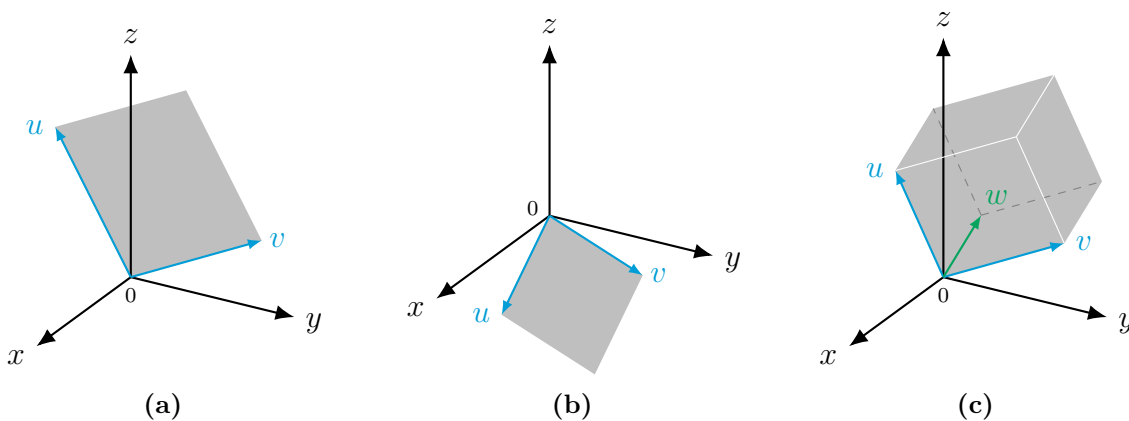
$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Compruebe que  $(3\hat{i} - 2\hat{j} - 5\hat{k}) \cdot ((\hat{i} + 4\hat{j} - 4\hat{k}) \times (3\hat{j} + 2\hat{k}))$  es igual a 49.

□

**Teorema 1.9.** Si  $u$  y  $v$  son dos vectores cualesquiera de  $\mathbb{R}^3$  y  $\phi$  el menor ángulo entre ellos, entonces

$$\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\sin(\phi). \tag{1.7}$$



**Figura 1.4.1:** (a) El producto vectorial de dos vectores representa geoméricamente el área del paralelogramo formado por esos vectores. (b) No podemos realizar el producto cruz entre vectores de  $\mathbb{R}^2$ , pero podemos pensar en ellos como puntos en el plano  $xy$  del espacio  $\mathbb{R}^3$  para aplicar este concepto. (c) Tres vectores en  $\mathbb{R}^3$  determinan un paralelepípedo cuyo volumen se puede calcular haciendo uso del triple producto escalar. Adaptada de Anton et al. (2019).

El producto vectorial de dos vectores  $u$  y  $v$  se puede interpretar geoméricamente como el área del paralelogramo que tiene a  $u$  y  $v$  como lados adyacentes, y que es igual a  $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\sin\phi$ , siendo  $\phi$  el ángulo entre  $u$  y  $v$  (Figura 1.4.1a). Dos vectores de  $\mathbb{R}^2$  también determinan un paralelogramo, pero dado que el producto cruz en ese caso no está definido, basta tomar a esos vectores y “añadirles” el número cero como tercera componente; así podemos calcular el área del paralelogramo que forman (que está en el plano  $xy$  de  $\mathbb{R}^3$ , Figura 1.4.1b) con la ecuación (1.7). Por otro lado, el volumen del paralelepípedo determinado por tres vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$  es igual al valor absoluto del triple producto escalar de aquellos vectores:  $|(u \times v) \cdot w|$ , (Figura 1.4.1c).

### 1.4.1. Problemas resueltos

La mayoría (si no todos) de los enunciados de los problemas que se presentan en esta sección fueron tomados o adaptados de Grossman y Flores (2012).

**Problema 1.26.** Encuentre dos vectores que sean ortogonales a  $u = \hat{i} - 3\hat{j} + 6\hat{k}$  y  $v = -2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$  a la vez. Tales vectores deben ser unitarios.

**Solución.** Sabemos que el producto cruz de dos vectores es un vector perpendicular a ambos, así

$$u \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & 6 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \hat{i} + \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \hat{k} = 14\hat{j} - 7\hat{k},$$

es un vector ortogonal tanto a  $u$  como a  $v$ , y  $\|u \times v\| = \sqrt{14^2 + 7^2} = 7\sqrt{5}$ . Por tanto

$$\frac{u \times v}{\|u \times v\|} = \frac{1}{7\sqrt{5}}(14\hat{j} - 7\hat{k}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{k}$$

y

$$-\frac{u \times v}{\|u \times v\|} = -\frac{1}{7\sqrt{5}}(14\hat{j} - 7\hat{k}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{k} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

son tales vectores unitarios. □

**Problema 1.27.** Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a  $u = -4\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$  como a  $v = -2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ .

**Solución.** El producto cruz de dos vectores es un vector perpendicular a ambos.

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= (-3 + 5)\hat{i} - (-4 + 10)\hat{j} + (4 - 6)\hat{k} = 2\hat{i} - 6\hat{j} - 2\hat{k} \end{aligned}$$

Cualquier múltiplo escalar de  $\eta = u \times v$  es perpendicular tanto a  $u$  como a  $v$ . Por tanto

$$\frac{\eta}{\|\eta\|} = \frac{1}{\sqrt{11}}(\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k}), \quad \text{y} \quad -\frac{\eta}{\|\eta\|} = -\frac{1}{\sqrt{11}}(\hat{i} - 3\hat{j} - \hat{k})$$

son los vectores unitarios buscados. □

**Problema 1.28.** Sean  $u = (2, -3, 4)$ ,  $v = (-2, -3, 5)$ ,  $w = (1, -7, 3)$  y  $t = (3, 4, 5)$ . Calcular (a)  $(3t - 2u) \cdot (5v + 2w)$  y (b) el ángulo entre  $t$  y  $w$ .

**Solución.**

(a) Como  $3t - 2u = (5, 18, 7)$  y  $5v + 2w = (-8, -29, 31)$ , entonces

$$(3t - 2u) \cdot (5v + 2w) = -40 - 522 + 217 = -345.$$

(b) Dado que  $\|t\|\|w\|\cos(\theta) = t \cdot w$ , el (menor) ángulo entre  $t$  y  $w$  está dado por

$$\arccos\left(\frac{t \cdot w}{\|t\|\|w\|}\right) = \arccos\left(\frac{3 - 28 + 15}{\sqrt{50}\sqrt{59}}\right) = \arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{59}}\right).$$

□

**Problema 1.29.** Encuentre el área del paralelogramo que tiene vértices adyacentes  $(4, 8, 10)$ ,  $(1, 28, 27)$  y  $(25, 7, 25)$ .

**Solución.** Llamemos  $P = (4, 8, 10)$ ,  $Q = (1, 28, 27)$  y  $R = (25, 7, 25)$  a los puntos de los vértices que forman el paralelogramo. Tenemos que  $\overrightarrow{PQ} = (-3, -16, -17)$  y  $\overrightarrow{RQ} = (-6, 15, 2)$  son los vectores que forman dos lados adyacentes del paralelogramo y su área está dada por  $\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{RQ}\|$ . Se tiene

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{RQ} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -16 & -17 \\ -6 & 15 & 2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -16 & -17 \\ 15 & 2 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} -3 & -17 \\ -6 & 2 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} -3 & -16 \\ -6 & 15 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= 223\hat{i} + 108\hat{j} - 151\hat{k}, \end{aligned}$$

y entonces  $\|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{RQ}\| = \sqrt{223^2 + 108^2 + 151^2} = \sqrt{81274}$ .

□

**Problema 1.30.** Demuestre que  $\|u \times v\| = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2$ . (*Sugerencia: escríbalo en términos de componentes.*)

**Solución.** Sean  $u = (a, b, c)$  y  $v = (x, y, z)$  vectores genéricos.

(i) Tenemos

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} b & c \\ y & z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a & c \\ x & z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a & b \\ x & y \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= (bz - cy)\hat{i} - (az - cx)\hat{j} + (ay - bx)\hat{k}, \end{aligned}$$

de donde  $\|u \times v\|^2 = (bz - cy)^2 + (az - cx)^2 + (ay - bx)^2$ .

(ii) Note además que

$$\begin{aligned}\|u\|^2\|v\|^2 &= (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \\ &= (ax)^2 + (ay)^2 + (az)^2 + (bx)^2 \\ &\quad + (by)^2 + (bz)^2 + (cx)^2 + (cy)^2 + (cz)^2.\end{aligned}$$

(iii) Y también

$$\begin{aligned}(u \cdot v)^2 &= (ax + by + cz)^2 \\ &= (ax)^2 + (by)^2 + (cz)^2 + 2(ax)(by) \\ &\quad + 2(ax)(cz) + 2(by)(cz).\end{aligned}$$

De (ii) y (iii) tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}\|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2 &= (ax)^2 + (ay)^2 + (az)^2 + (bx)^2 \\ &\quad + (by)^2 + (bz)^2 + (cx)^2 + (cy)^2 + (cz)^2 \\ &\quad - (ax)^2 - (by)^2 - (cz)^2 - 2(ax)(by) \\ &\quad - 2(ax)(cz) - 2(by)(cz) \\ &= (ay)^2 + (az)^2 + (bx)^2 + (bz)^2 + (cx)^2 + (cy)^2 \\ &\quad - 2(ax)(by) - 2(ax)(cz) - 2(by)(cz) \\ &= [(ay)^2 - 2(ax)(by) + (bx)^2] + [(az)^2 - 2(ax)(cz) + (cx)^2] \\ &\quad + [(bz)^2 - 2(by)(cz) + (cy)^2] \\ &= (ay - bx)^2 + (az - cx)^2 + (bz - cy)^2.\end{aligned}$$

Este fue el resultado que obtuvimos en (i). Por tanto queda demostrado que

$$\|u \times v\| = \|u\|^2\|v\|^2 - (u \cdot v)^2.$$

El lector debería ser capaz de demostrar—de una manera mucho más fácil—el mismo resultado haciendo uso de la definición de producto punto.  $\square$

**Problema 1.31.** Calcule el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores  $\overrightarrow{PQ}$ ,  $\overrightarrow{PR}$  y  $\overrightarrow{PS}$ , donde  $P = (2, 1, -1)$ ,  $Q = (-3, 1, 4)$ ,  $R = (-1, 0, 2)$  y  $S = (-3, -1, 5)$ .

**Solución.** Primero calculamos  $\overrightarrow{PQ} = (-5, 0, 5)$ ,  $\overrightarrow{PR} = (-3, -1, 3)$  y  $\overrightarrow{PS} = (-5, -2, 6)$ . El volumen del paralelepípedo está dado por  $V = |\overrightarrow{PS} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR})|$ . Se tiene

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PS} \cdot (\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}) &= \begin{vmatrix} -5 & -2 & 6 \\ -5 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -5 \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -5 & 5 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -25 + 0 + 30\end{aligned}$$

y finalmente  $V = 5$ .  $\square$

**Problema 1.32.** Utilice el producto cruz para encontrar el seno del ángulo  $\phi$  entre los vectores  $u = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  y  $v = -3\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ .

**Solución.** Sabemos que  $\|u \times v\| = \|u\|\|v\|\sin\phi$ . Tenemos  $\|u\| = \sqrt{6}$  y  $\|v\| = \sqrt{29}$ . Calculamos  $u \times v$  como sigue:

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= 2\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\sin\phi = \frac{\|u \times v\|}{\|u\|\|v\|} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{5}{29}}.$$

□

## 1.5. Rectas y planos en el espacio

La ecuación de una recta en  $\mathbb{R}^2$  puede determinarse conociendo uno de sus puntos y un vector normal a ella. Por contraparte, para hallar la ecuación de una recta  $L$  en  $\mathbb{R}^3$  necesitamos conocer dos puntos sobre ella o un punto de la recta y un vector  $v = (a, b, c)$  (paralelo) que le dé dirección llamado **vector director**. El caso más simple es el de las rectas que pasan por el origen. Estas rectas pueden determinarse siempre que se conozca el vector que les da dirección ya que, de hecho, ellas son el conjunto de todos los múltiplos escalares de dicho vector. Una recta que pasa por el origen tiene la forma

$$\overrightarrow{OR} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ta \\ tb \\ tc \end{bmatrix},$$

donde  $R = (x, y, z)$  es un punto cualquiera sobre ella y  $t$  es un escalar (Figura 1.5.1a). Una recta que no pasa por el origen no es muy diferente: sus coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$  se han desplazado a  $x_0$ ,  $y_0$  y  $z_0$ . Es decir,

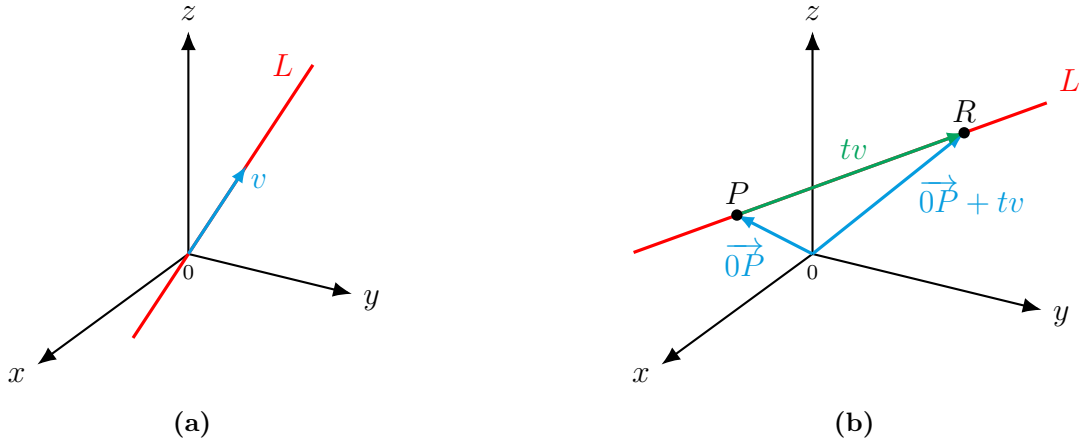
$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta, \\ y &= y_0 + tb, \\ z &= z_0 + tc \end{aligned}$$

que en forma vectorial es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

Note que, cuando se le asigna a  $t$  un valor específico, el lado derecho de esta igualdad es simplemente el vector  $\overrightarrow{OP} + tv$  con  $P = (x_0, y_0, z_0)$ . (Cada uno de los valores del *parámetro*

$t$  da un punto o vector sobre  $L$ .) Cuando variamos  $t$  en un intervalo dado obtenemos un segmento de recta, pero si dejamos que tome cualquier valor, entonces obtenemos la forma general de una recta de  $\mathbb{R}^3$  (Figura 1.5.1b). Gráficamente es más fácil notar por qué la expresión  $\vec{OR} = \vec{OP} + tv$  define a  $\vec{OR}$  como función de  $t$ .



**Figura 1.5.1:** (a) Una recta que pasa por el origen con vector director  $v$ . (b) Cualquier recta de  $\mathbb{R}^3$ , donde se ha tomado una representación de  $tv$  con punto inicial en  $P$  y  $t$  dado.

Existen tres formas de determinar o expresar a una recta en  $\mathbb{R}^3$ . Estas tres ecuaciones no son únicas; basta considerar diferentes puntos sobre  $L$  para ver que existe más de una ecuación diferente que describe a la misma recta. Tener esto en cuenta puede hacer más fácil la “manipulación” de una recta dada. Sean dos puntos  $P = (x_1, y_1, z_1)$  y  $Q = (x_2, y_2, z_2)$  sobre una recta  $L$ .

1. Ecuación vectorial:

$$\vec{OR} = \vec{OP} + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cualquier múltiplo escalar de  $v = \vec{PR}$  da dirección a la recta.

2. Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1), \\ z &= z_1 + t(z_2 - z_1). \end{aligned}$$

Son consecuencia de expandir las componentes de la ecuación vectorial de  $L$ .

3. Ecuaciones simétricas :

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c},$$

donde  $a = x_2 - x_1$ ,  $b = y_2 - y_1$  y  $c = z_2 - z_1$  son los *números directores* del vector  $v$ . Estas ecuaciones se encuentran al despejar  $t$  de las ecuaciones paramétricas y sólo se deben usar cuando  $a$ ,  $b$  y  $c$  son diferentes de cero.

### Ejemplos 1.10.

1. La recta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

no se puede expresar con ecuaciones simétricas porque una de las componentes de su vector director es cero. No obstante, dado que  $x = t$  y  $z = -3t$ , podemos expresarla como la intersección de los planos

$$x = -\frac{z}{3} \quad \text{y} \quad y = 0.$$

Pero también la podemos dar en forma paramétrica como

$$x = -\frac{t}{3}, \quad y = 0, \quad z = t.$$

2. Las ecuaciones simétricas de la recta de  $\mathbb{R}^3$  que pasa por el origen y tiene vector director  $v = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  son

$$-x = y = -z.$$

3. Las ecuaciones simétricas de la recta  $L$  que pasa por  $(5, 4, 6)$  y tiene vector director  $v = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$  son

$$5 - x = y - 4 = 6 - z.$$

La forma vectorial de  $L$  es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} - t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Las ecuaciones simétricas de la recta de  $\mathbb{R}^3$  que pasa por  $(-5, 1, 16)$  y tiene vector director  $v = (1 - \pi)\hat{i} + 2\hat{j} - \sqrt{2}\hat{k}$  son

$$\frac{x + 5}{1 - \pi} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 16}{-\sqrt{2}}.$$

5. La ecuación vectorial de la recta cuyas ecuaciones simétricas son  $-x = y - 4 = 6 - z$  se halla al asignar  $z = t$  y tomar  $-x = 6 - t$ ,  $y - 4 = 6 - t$ , de donde  $x = -6 + t$ , y  $y = 10 - t$ . Teniendo en cuenta que dos vectores son iguales si cada una de sus respectivas componentes son iguales, podemos escribir

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 10 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

6. La dirección de la recta que contiene a los puntos  $P = (-1, 2, 7)$  y  $Q = (7, 3, -8)$  la da el vector  $\overrightarrow{PQ} = (8, 1, -15)$ , por lo que su ecuación vectorial es

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OQ} + t\overrightarrow{PQ} \iff x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = 7\hat{i} + 3\hat{j} - 8\hat{k} + t(8\hat{i} + \hat{j} - 15\hat{k}).$$

□

Un *plano* en  $\mathbb{R}^3$  no puede ser descrito conociendo simplemente un punto y un vector en este plano, pues existen varios vectores en el mismo plano que tienen direcciones opuestas. Sin embargo, un vector perpendicular al plano sí especifica por completo su “inclinación” por el hecho de que cada vector del plano es ortogonal a tal vector. Por lo general, un plano

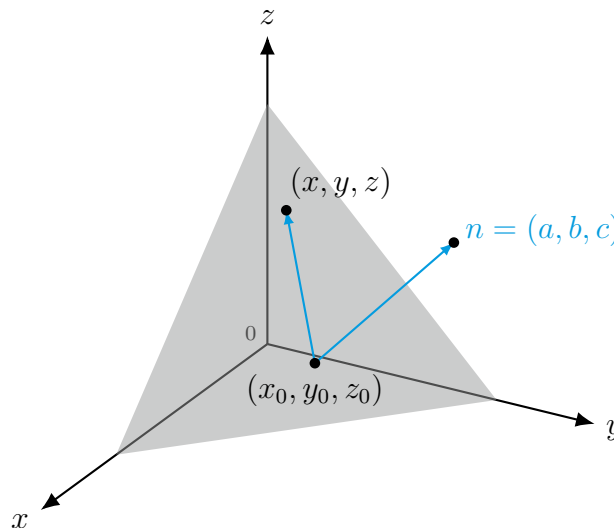
se denota por la letra griega  $\Pi$ . Un vector *normal* a un plano es aquel que es ortogonal a todos los vectores en tal plano. En resumen, podemos describir a un plano conociendo uno de sus puntos  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  y un vector  $n = (a, b, c)$  normal al plano (Figura 1.5.2). Si  $P = (x, y, z)$  es cualquier otro punto del plano, entonces el vector  $\overrightarrow{P_0P}$  está en tal plano y

$$n \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0. \quad (1.8)$$

Desarrollando esta expresión, denominada *ecuación vectorial del plano* obtenemos

$$\begin{aligned} (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 &\iff a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \\ &\iff ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0 \\ &\iff ax + by + cz + d = 0. \end{aligned}$$

Esta última expresión se conoce como la *ecuación cartesiana del plano*, con  $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ . En particular, el plano  $xy$  tiene la ecuación  $z = 0$ , el plano  $xz$  tiene la ecuación  $y = 0$  y el plano  $yz$  tiene la ecuación  $x = 0$ .



**Figura 1.5.2:** Un plano en  $\mathbb{R}^3$ . Adaptada de Anton et al. (2019).

**Definición 1.13** (Plano, tomada de Grossman y Flores (2012)). Sea  $P_0$  un punto conocido en el espacio y sea  $n$  un vector dado diferente de cero. El conjunto de todos los puntos  $P = (x, y, z)$ , que satisfacen  $\overrightarrow{P_0P} \cdot n = 0$ , constituye un **plano** en  $\mathbb{R}^3$ .

**Nota 1.14.** De manera alternativa, podemos determinar la ecuación de un plano  $\Pi$  si conocemos únicamente tres de sus puntos, digamos  $P$ ,  $Q$  y  $R$ . Es claro que los vectores  $\overrightarrow{PR}$  y  $\overrightarrow{PQ}$  están en  $\Pi$ . Usando lo establecido en la sección anterior podemos hallar un vector normal al plano: el vector  $\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}$ . Luego tomamos  $S = (x, y, z)$  y hacemos

$$(\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{PQ}) \cdot \overrightarrow{PS} = 0,$$

por ejemplo.

**Ejemplos 1.11.**

1. El plano  $\Pi$  que tiene vector normal  $(4, -6, 3)$  y pasa por el punto  $(5, 0, 9)$  tiene la ecuación

$$(4, -6, 3) \cdot (x - 5, y, z - 9) = 0 \iff 4(x - 5) - 6y + 3(z - 9) = 0,$$

que en su forma cartesiana es  $4x - 6y + 3z = 47$ . Este plano interseca al eje  $x$  cuando  $y = z = 0$ , es decir en  $x = \frac{47}{4}$ . Similarmente, interseca al eje  $y$  cuando  $x = z = 0$ , i.e. cuando  $y = -\frac{47}{6}$ . ¿En qué punto interseca al eje  $z$ ?

2. El plano  $\Pi$  que contiene los puntos  $P = (1, 2, 1)$ ,  $Q = (0, 3, 0)$  y  $R = (5, 0, 4)$  tiene por vector normal a (cualquier múltiplo escalar de)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RP} \times \overrightarrow{QR} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -4 & 2 & -3 \\ 5 & -3 & 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= -\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}. \end{aligned}$$

De ahí que su ecuación sea  $-(x - 5) + y + 2(z - 4) = 0$ , es decir  $\Pi : y - x + 2z = 3$ . Observe que si se toma  $-(x - 1) + (y - 2) + 2(z - 1) = 0$  o  $-x + (y - 3) + 2z = 0$  se llega a la misma expresión.

□

**Nota 1.15.** Dos puntos no son suficientes para determinar la ecuación de un plano puesto que hay infinitos planos que pasan por esos puntos. Además, tres puntos determinan un plano si y sólo si no son colineales. Eso quiere decir que no existe un único plano que pase por  $(-2, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$  y  $(\pi, 0, 0)$ , puesto que estos puntos están sobre la misma recta.

**Definición 1.14** (Planos paralelos). *Dos planos son **paralelos** si sus respectivos vectores normales son múltiplos escalares uno del otro.*

**Nota 1.16.** Observe que el producto cruz de los vectores normales de dos planos paralelos es cero. Por otra parte, si dos planos no son paralelos, entonces se intersecan en una línea recta. Dos planos paralelos o no se intersecan o su intersección contiene todos los puntos que los conforman, pero no ambos casos.

### Ejemplos 1.12.

- Los planos  $\Pi_1 : x + 2y - 3z = 4$  y  $\Pi_2 : x + 2y - 3z = 0$  son paralelos porque tienen el mismo vector normal.
- Los planos  $\Pi_1 : -x + 6y - 3z = 14$  y  $\Pi_2 : 2x - 12y + 6z = -\sqrt{5}$  son paralelos porque sus vectores normales son múltiplos escalares:

$$-2 \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -12 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

- Los planos  $\Pi_1 : -x + 6y - 3z = 14$  y  $\Pi_2 : 2x - 12y - z = 0$  no son paralelos porque  $(-1, 6, -3) \neq \lambda(2, -12, -1), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ .

□

**Definición 1.15** (Vectores coplanares). *Los vectores  $u$ ,  $v$  y  $w$  son **coplanares** si están sobre el mismo plano. En tal caso se satisface que su triple producto escalar es cero; es decir,  $u \cdot (v \times w) = 0$  o  $(u \times v) \cdot w = 0$ .*

**Nota 1.17.** Note que, debido a la definición de producto punto, el producto  $u \cdot (v \times w)$  es equivalente a  $(v \times w) \cdot u$ . Observe también que  $(u \cdot v) \times w$  no tiene sentido porque el producto cruz se realiza entre dos vectores.

**Nota 1.18.** La Definición 1.15 equivale a decir que los vectores  $u = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)$  y  $w = (w_1, w_2, w_3)$  son coplanares si y sólo si

$$u \cdot (v \times w) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

### 1.5.1. Problemas resueltos

La mayoría (si no todos) de los enunciados de los problemas que se presentan en esta sección fueron tomados o adaptados de Grossman y Flores (2012).

**Problema 1.33.** Halle una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta  $\ell$  que contiene a  $(-2, 3, 7)$  y es paralela a  $3\hat{j}$ .

**Solución.** Sean  $P = (-2, 3, 7)$  y  $v = (a, b, c) = 3\hat{j}$ , donde  $a = 0, b = 3$  y  $c = 0$  son los números directores de la recta buscada. La ecuación vectorial es

$$\ell : (x, y, z) = \overrightarrow{0P} + tv = (-2, 3 + 3t, 7),$$

donde  $t \in \mathbb{R}$ . Las ecuaciones paramétricas se obtienen al igualar las componentes de la ecuación vectorial. Así,

$$x = -2, \quad y = 3 + 3t, \quad z = 7.$$

Por último, sus ecuaciones simétricas no están definidas ya que no todos los números directores de  $v$  son distintos de cero. □

**Problema 1.34.** Encuentre una ecuación vectorial, las ecuaciones paramétricas y las simétricas de la recta que contiene a  $(6, 10, 3)$  y es paralela a  $-10\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}$ .

**Solución.** Llamemos  $P = (6, 10, 3)$  y  $v = -10\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}$ . Para cualquier punto  $R$  sobre la recta se tiene la siguiente ecuación vectorial:

$$\overrightarrow{0R} = \overrightarrow{0P} + tv = 6\hat{i} + 10\hat{j} + 3\hat{k} + t(-10\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}), \quad t \in \mathbb{R}$$

Las ecuaciones simétricas son

$$\frac{x - 6}{-10} = \frac{y - 10}{7} = \frac{z - 3}{9},$$

de donde  $x - 6 = -10t$ ,  $y - 10 = 7t$  y  $z - 3 = 9t$ , siendo  $t$  un parámetro. Despejando  $x$ ,  $y$  y  $z$  obtenemos sus ecuaciones paramétricas:

$$x = 6 - 10t, \quad y = 10 + 7t, \quad z = 3 + 9t.$$

□

**Problema 1.35.** Demuestre que las rectas

$$L_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-1} \quad \text{y} \quad L_2 : \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

son ortogonales.

**Solución.** Supongamos que  $L_1$  y  $L_2$  son ortogonales, luego cualquier vector director  $u$  de  $L_1$  será ortogonal a cualquier vector director  $v$  de  $L_2$ . En otras palabras, se satisface que  $u \cdot v = 0$ . Como los números directores de  $L_1$  son  $a = 2$ ,  $b = 4$  y  $c = -1$ , entonces  $u = 2\hat{i} + 4\hat{j} - 1\hat{k}$  es el vector director de  $L_1$  y, de manera análoga se observa que  $v = 5\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$  es el vector director de  $L_2$ . Se tiene entonces que

$$u \cdot v = (2)(5) + (4)(-2) + (-1)(2) = 10 - 8 - 2 = 0.$$

Por tanto, las rectas  $L_1$  y  $L_2$  son ortogonales.  $\square$

**Problema 1.36.** Encuentre una recta  $L$  ortogonal a las dos rectas dadas y que pase por el punto  $(4, 6, 0)$ .

$$x = 4 + 10t, \quad y = -4 - 8t, \quad z = 3 + 7t;$$

$$x = -2t, \quad y = 1 + 4t, \quad z = -7 - 3t.$$

**Solución.** Basta obtener el producto cruz entre los vectores directores de  $L_1$  y  $L_2$  para obtener un vector perpendicular a ambos. Este vector le dará dirección a la recta que se busca.<sup>5</sup>

Es fácil ver que  $u = (10, -8, 7)$  y  $v = (-2, 4, -3)$  son los vectores directores de cada recta. Luego

$$\begin{aligned} u \times v &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 10 & -8 & 7 \\ -2 & 4 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 7 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 10 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 10 & -8 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= -4\hat{i} + 16\hat{j} + 24\hat{k}, \end{aligned}$$

es perpendicular a ambos. Así, la recta que se busca tiene la ecuación vectorial

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= 4\hat{i} + 6\hat{j} + t(-4\hat{i} + 16\hat{j} + 24\hat{k}) \\ &= (4 - 4t)\hat{i} + (6 + 16t)\hat{j} + 24t\hat{k}, \end{aligned}$$

donde  $t$  es un parámetro.  $\square$

**Problema 1.37.** Encuentre la ecuación del plano con  $P = (0, 0, 0)$  y  $n = \hat{i}$ .

**Solución.** Sea un punto  $Q = (x, y, z)$  en el plano buscado; se tiene que  $\overrightarrow{PQ} \cdot n = 0$ , es decir

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0 \iff x = 0.$$

Por tanto,  $x = 0$  es la ecuación de dicho plano.  $\square$

**Problema 1.38.** Determine una expresión que describa a los puntos que pertenecen a la intersección de los planos  $\Pi_1 : 3x - 2y + 5z = 4$  y  $\Pi_2 : x + 4y - 6z = 1$ .

<sup>5</sup>Puede comprobar gráficamente los resultados en <https://www.geogebra.org/classic/zejnra4g>

**Solución.** Aquella expresión corresponde a la ecuación de una recta  $L$  de  $\mathbb{R}^3$ . Resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 4, \\ x + 4y - 6z = 1. \end{cases}$$

Si multiplica a la segunda ecuación por 3 y luego le resta la primera, obtendrá  $14y - 23z = -1$ . Asimismo, si multiplica a la primera ecuación por 2 y luego le suma la segunda obtendrá  $7x + 4z = 9$ . Ahora podemos decir que la recta que buscamos está en la intersección de los planos  $y = \frac{23z-1}{14}$  y  $x = \frac{9-4z}{7}$ . Si asignamos el parámetro  $t \in \mathbb{R}$  a  $z$ , podemos escribir las ecuaciones paramétricas de  $L$  así:

$$x = \frac{9 - 4t}{7}, \quad y = \frac{23t - 1}{14}, \quad z = t.$$

Por último, la ecuación vectorial de  $L$  es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9/7 \\ -1/14 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4/7 \\ 23/14 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(En el capítulo siguiente aprenderemos a resolver un sistema de ecuaciones de manera más eficiente.)  $\square$

**Problema 1.39.** Demuestre que las rectas  $L_1 : \{x = 1 + t, y = -3 + 2t, z = -2 - t\}$ , y  $L_2 : \{x = 17 + 3s, y = 4 + s, z = -8 - s\}$  tienen el punto  $(2, -1, -3)$  en común.

**Solución.** Un punto está sobre una recta si y sólo si satisface su ecuación. En ese sentido, deben existir  $t, s \in \mathbb{R}$  que satisfagan

$$2 = 1 + t, \quad -1 = -3 + 2t, \quad -3 = -2 - t,$$

$$2 = 17 + 3s, \quad -1 = 4 + s, \quad y \quad -3 = -8 - s.$$

Claramente  $t = 1$  y  $s = -5$  satisfacen estas ecuaciones, luego  $(2, -1, -3)$  está, en efecto, tanto en  $L_1$  como en  $L_2$ .  $\square$

**Problema 1.40.** Sean los puntos  $P = (2, 3, 2)$ ,  $Q = (-1, 4, 0)$  y  $R = (2, 1, 5)$ . Encuentre una expresión que describa al plano que pasa por estos puntos.

**Solución.** Construimos los vectores  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{QR}$  y tomamos  $n = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}$ . Como  $P, Q$  y  $R$  están en el plano, entonces  $\overrightarrow{PQ} = (-3, 1, -2)$  y  $\overrightarrow{QR} = (3, -3, 5)$  están también en el plano.

$$\begin{aligned} n &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & 5 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= -\hat{i} + 9\hat{j} + 6\hat{k}. \end{aligned}$$

Para cualquier otro punto  $(x, y, z)$  del plano en cuestión se debe cumplir

$$-(x - 2) + 9(y - 3) + 6(z - 2) = 0,$$

por lo que  $9y - x + 6z = 37$  describe al plano.  $\square$

**Problema 1.41.** Sean los planos  $\Pi_1 : x - y + z = 2$ , y  $\Pi_2 : 2x - 3y + 4z = 7$ . Encuentre la ecuación de la intersección de  $\Pi_1$  y  $\Pi_2$ .

**Solución.** La recta de intersección debe satisfacer las ecuaciones de los dos planos, lo que equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - 3y + 4z = 7 \end{cases}$$

Al restar dos veces la primera ecuación de la segunda se obtiene  $-y + 2z = 3$ , y al restar la segunda ecuación del resultado de multiplicar a la primera por 3 se obtiene  $x - z = -1$ . La variable  $z$  es una *variable libre* porque podemos expresar a  $x$  y  $y$  en función de ella, i.e.

$$x = t - 1, \quad y = 2t - 3, \quad z = t,$$

con  $t \in \mathbb{R}$ . Finalmente,

$$x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} = (t - 1)\hat{i} + (2t - 3)\hat{j} + t\hat{k},$$

es la ecuación que buscamos. □

**Problema 1.42.** Sean el punto  $P = (10, 0, 6)$  y el vector  $v = -8\hat{i} - 2\hat{j} + 9\hat{k}$ . Determine una ecuación vectorial de la recta que contiene a  $P$  y es ortogonal a  $v$ ; además, encuentre un conjunto de ecuaciones paramétricas y simétricas para la misma.

**Solución.** Si  $v$  es ortogonal a la recta  $L$  que buscamos, entonces podríamos pensar que cualquier vector ortogonal a  $v$  es paralelo a  $L$ . Sin embargo, existen infinitos vectores ortogonales a  $v$  (que en conjunto conforman un plano, y que no son necesariamente paralelos a  $L$ ), por lo que también existen infinitas rectas que contienen a  $P$  y son ortogonales a  $v$ . (Si  $L$  pasara por dos—y no sólo un—puntos conocidos, la historia sería diferente.) Necesitamos *un* vector ortogonal a  $v$  que le dé *dirección* a la recta. Sabemos que el producto cruz de dos vectores es ortogonal a ambos, de modo que el vector  $\eta = (-8, -2, 9) \times (1, 0, 0)$  es ortogonal tanto a  $v$  como a  $(1, 0, 0)$ . (El vector  $(1, 0, 0)$  no es especial, se podría haber escogido a cualquier otro vector que no sea múltiplo escalar de  $v$ .) Tenemos

$$\eta = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -8 & -2 & 9 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} -8 & 9 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} -8 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \hat{k} = 9\hat{j} + 2\hat{k}.$$

Ahora, la ecuación vectorial de  $L$  es  $\vec{OR} = \vec{OP} + \lambda\eta$ , con  $R = (x, y, z)$  en  $\mathbb{R}^3$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

De aquí podemos ver que  $L$  no posee ecuaciones simétricas, pero podemos expresarla como la intersección de dos planos:

$$x = 10, \quad y = \frac{z - 6}{2/9}.$$

Finalmente,

$$x = 10, \quad y = 9\lambda, \quad z = 6 + 2\lambda$$

son las ecuaciones paramétricas de  $L$ . □

**Problema 1.43.** Hallar la ecuación del plano  $\Pi$  que pasa por los puntos  $P = (1, 1, 2)$ ,  $Q = (-1, 2, -4)$  y  $R = (-1, -2, 3)$ .

**Solución.** Construimos los vectores  $\overrightarrow{PQ} = (-2, 1, -6)$  y  $\overrightarrow{QR} = (0, -4, 7)$  (los cuales están en  $\Pi$ ), y tomamos  $n = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{QR}$ .

$$\begin{aligned} n &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & -6 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -4 & 7 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= -17\hat{i} + 14\hat{j} + 8\hat{k}. \end{aligned}$$

Ahora, para cualquier punto  $(x, y, z)$  en el plano se debe satisfacer

$$-17(x - 1) + 14(y - 1) + 8(z - 2) = 0.$$

Esto es,  $\Pi : -17x + 14y + 8z = 13$  □

**Problema 1.44.** Una recta contiene al punto  $(6, 10, 3)$  y es perpendicular a  $-10\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}$ . Encuentre una ecuación vectorial, un conjunto de ecuaciones paramétricas, y uno de ecuaciones simétricas que la describan.

**Solución.** Existen infinitas rectas que son perpendiculares a  $w = -10\hat{i} + 7\hat{j} + 9\hat{k}$  y que contienen al punto  $P_0 = (6, 10, 3)$ . Un vector que le da dirección a la recta es aquel que es ortogonal a  $w$ , y, de hecho, los vectores de ese tipo están contenidos en el plano dado por

$$\begin{aligned} w \cdot \overrightarrow{PP_0} = 0 &\iff -10(6 - x) + 7(10 - y) + 9(3 - z) = 0 \\ &\iff 10x - 7y - 9z = -37, \end{aligned}$$

donde  $P = (x, y, z)$  es arbitrario. Es fácil ver que el punto  $Q = (0, 4, 1)$  satisface esta ecuación así que  $\overrightarrow{PQ} = (-6, -6, -2)$  está en plano y, en particular, le da dirección a la recta que buscamos. Por tanto, la ecuación vectorial de la recta es

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \\ 3 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} -6 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad r \in \mathbb{R}$$

mientras que

$$x = 6 - 6r, \quad y = 10 - 6r, \quad z = 3 - 2r,$$

son sus ecuaciones paramétricas y las simétricas están dadas por

$$\frac{6 - x}{6} = \frac{10 - y}{6} = \frac{3 - z}{2}.$$

Capítulo 2:

▶ **Matrices**

## Capítulo 2:

# ► Matrices

Las matrices son objetos matemáticos que aparecen en varios contextos. Por ahora, consideraremos a una matriz como una forma simplificada de presentar un arreglo rectangular. Los arreglos rectangulares aparecen con frecuencia cuando tratamos de almacenar datos o información de manera organizada. Un arreglo rectangular, como lo es una tabla, hace más fácil la manipulación de tales datos porque permite obtener información más fácilmente. El matemático James Joseph Sylvester hizo importantes contribuciones en cuanto a la teoría de matrices, y fue él de hecho quien acuñó el término matriz.

En este capítulo presentaremos las propiedades básicas de las matrices y veremos las operaciones que están definidas entre ellas; también las usaremos para resolver sistemas de ecuaciones lineales y por último trataremos el concepto de matriz inversa. En el Capítulo 6 dejaremos de ver a las matrices como simples arreglos rectangulares y cambiaremos ese concepto por uno más elegante que es en realidad como debemos pensar en ellas.



### 2.1. Matrices y operaciones

**Definición 2.1** (Matriz). Sean  $m$  y  $n$  enteros positivos. Una **matriz**  $A$  de orden  $m \times n$  es una disposición rectangular de escalares arreglados en  $m$  filas y  $n$  columnas:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Escribiremos en forma abreviada  $A = [a_{ij}]$ .

**Nota 2.1.** Denotaremos a una matriz que tiene  $m$  filas y  $n$  columnas como  $A_{m \times n}$ . La notación  $a_{ij}$  denota la componente en la fila  $i$  y en la columna  $j$  de  $A$ .  $A_i$  denota la  $i$ -ésima fila de  $A$  y  $A^{(j)}$  denota la  $j$ -ésima columna de  $A$ .

**Nota 2.2.** También es usual usar paréntesis para representar a una matriz. Por ejemplo, la matriz de la Definición 2.1 se representa como sigue.

$$A = \left( \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right)$$

Usaremos exclusivamente matrices cuadradas.

**Nota 2.3.** Cada fila de una matriz  $A_{m \times n}$  se puede considerar como una matriz de orden  $1 \times n$  y cada columna como una matriz de orden  $m \times 1$ .

El conjunto de matrices de orden (o tamaño)  $m \times n$  cuyas componentes son números reales se denotará por  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Análogamente,  $\mathbb{C}^{m \times n}$  denota el conjunto de matrices de orden  $m \times n$  cuyas componentes son números complejos. El conjunto  $\mathbb{K}^{m \times n}$  se notará a  $\mathbb{R}^{m \times n}$  o  $\mathbb{C}^{m \times n}$ . Así, decir que una matriz es de orden  $m \times n$  es lo mismo que decir que tal matriz pertenece a  $\mathbb{K}^{m \times n}$ . La matriz cero de orden  $m \times n$  es aquella cuyas componentes son todas cero y se denotará  $0_{m \times n}$ , o simplemente 0 con ayuda del contexto.

### Ejemplos 2.1.

1. Algunas matrices.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & \pi & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & 17^3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ \sqrt{3}/3 \end{bmatrix}, \quad [e \quad 0 \quad \ln(1 + \sqrt{7}) \quad 1]$$

2. La matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz cero de  $\mathbb{R}^{3 \times 2}$ .

3. Existe una “conexión” entre los vectores de  $\mathbb{R}^n$  y las matrices de  $n \times 1$ . Cada uno de ellos puede verse como una matriz de tamaño  $n \times 1$  y cada una de estas matrices puede verse como un vector de  $\mathbb{R}^n$ . Las columnas de la matriz

$$\begin{bmatrix} 14 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 5 & \pi & \log_2(10) \end{bmatrix}$$

son los vectores  $(14, 0, 5)$ ,  $(-2, 4, \pi)$  y  $(3, 0, \log_2(10))$ .

4. La matriz

$$\begin{bmatrix} 7 & i & 0 & 1+i \\ 4^i & 0 & -i & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ i-1 & 1/i & 9 & \sqrt{-13} \end{bmatrix}$$

pertenece a  $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ , y su componente en la fila 4 y columna 3 es el escalar 9.

5. Si se omitieran los corchetes de la matriz [7], sería imposible decir (sin un contexto dado) si 7 corresponde al escalar de  $\mathbb{R}$  o a la matriz de  $\mathbb{R}^{1 \times 1}$ . Por ello, nos acogemos a la convención de que  $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^{1 \times 1} = \mathbb{R}$ . Asimismo, no haremos distinción entre  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^{n \times 1}$ , i.e.  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$ .

□

**Definición 2.2** (Igualdad de matrices). *Dos matrices  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  son iguales si y sólo si son del mismo orden y  $a_{ij} = b_{ij}$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  y todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .*

**Definición 2.3** (Matriz cuadrada). Una matriz  $A$  de orden  $m \times n$  es cuadrada si  $m = n$  y puede escribirse como

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

En tal caso se dice que el orden de  $A$  es  $n$ .

**Ejemplos 2.2.**

1. Las matrices

$$A = \begin{bmatrix} \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) & 1 & 1 \\ 0 & 5\alpha & 1 \\ \alpha & \csc^2(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{\alpha+1}{\alpha+1} \\ 0 & 5\alpha & 1 \\ \alpha & 1 + \cot^2(\alpha) & 0 \end{bmatrix}$$

son iguales independientemente del valor de  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

2. Las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & \pi & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 6 & -e \\ \pi & -8 & 11 & 4 \end{bmatrix}$$

no son iguales porque no son del mismo tamaño.

3. Tanto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{como} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

son matrices cuadradas, pero no son iguales.

4. Las matrices cuadradas

$$\begin{bmatrix} 7 & \lambda & 5 \\ 13 & 21 & 37 \\ 53 & 67 & 109 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 7 & \lambda^2 - 2 & 5 \\ 13 & 21 & 37 \\ 53 & 67 & 109 \end{bmatrix}$$

son iguales si y sólo si  $\lambda = \lambda^2 - 2$ , en cuyo caso  $\lambda = -1$  o  $\lambda = 2$ .

□

**Definición 2.4** (Diagonal principal de una matriz). Sea una matriz cuadrada  $A = [a_{ij}]$  de orden  $n$ . Los escalares  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  conforman la **diagonal principal** de  $A$ . Si cada elemento de la diagonal principal de  $A$  es igual a 1, entonces diremos que  $A$  tiene **diagonal unitaria**.

**Definición 2.5.** Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz cuadrada de orden  $n$ .

- (i)  $A$  es una **matriz triangular superior** si  $a_{ij} = 0$ , cuando  $i > j$ .
- (ii)  $A$  es una **matriz triangular inferior** si  $a_{ij} = 0$ , cuando  $i < j$ .
- (iii)  $A$  es **matriz triangular** si es triangular inferior o triangular superior.

(iv)  $A$  es una **matriz diagonal** si y sólo si  $a_{ij} = 0$  cuando  $i \neq j$ . En otras palabras,  $A$  es diagonal si es triangular superior e inferior a la vez.

### Ejemplos 2.3.

1. Las matrices

$$\begin{bmatrix} 11 & 21 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 8 & -5 & 0 \\ 1 & \log(\pi) & 4 \end{bmatrix}$$

son triangulares. La primera es triangular superior mientras que la segunda es triangular inferior.

2. Toda matriz diagonal es triangular.

3. La matriz

$$\begin{bmatrix} 71 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

es diagonal, triangular inferior y triangular superior.

4. La matriz

$$\begin{bmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

no es diagonal, ni triangular inferior, ni triangular superior.

5. Las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

son diagonales, y la diagonal principal de la primera es unitaria. Es un error pensar que las componentes diagonales de una matriz diagonal deben ser distintas de cero.

6. Las matrices

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

no son diagonales.

□

**Definición 2.6** (Matriz identidad). Una matriz cuadrada de orden  $n$  con diagonal unitaria se denomina **matriz identidad de orden  $n$** . Se denotará  $I_n$ .

**Definición 2.7** (Traza de una matriz). Si  $A$  es una matriz cuadrada, entonces la **traza de  $A$** , denotada por  $\text{tr}(A)$ , corresponde a la suma de las entradas de su diagonal principal.

**Definición 2.8** (Suma de matrices). Sean  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$  dos matrices de orden  $m \times n$ . La suma de  $A$  y  $B$  es la matriz definida como

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix},$$

la cual se obtiene al sumar cada componente correspondiente de  $A$  y  $B$ . La matriz suma  $A + B$  es otra matriz de  $\mathbb{K}^{m \times n}$ .

**Nota 2.4.** Note que la suma de matrices está definida sólo si son del mismo orden.

**Teorema 2.1** (Propiedades de la suma de matrices). Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres matrices de orden  $m \times n$ . Se tiene que

$P1: A + 0_{m \times n} = A$  (Existencia del elemento neutro)

$P2: A + (-A) = 0$  (Existencia del inverso aditivo)

$P3: A + B = B + A$  (Propiedad conmutativa)

$P4: (A + B) + C = A + (B + C)$  (Propiedad asociativa)

**Definición 2.9** (Multiplicación de una matriz por un escalar). Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $m \times n$  y  $\alpha$  un escalar. La matriz  $\alpha A = [\alpha a_{ij}]$  está dada por

$$\alpha A = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix},$$

la cual resulta de multiplicar por  $\alpha$  a cada componente de  $A$ .

**Teorema 2.2** (Propiedades de la multiplicación por escalar). Sean  $A$  y  $B$  dos matrices de  $\mathbb{K}^{m \times n}$  y sean  $\alpha$  y  $\beta$  escalares. Se cumple que

$P1: \text{La matriz } \alpha A \text{ pertenece a } \mathbb{K}^{m \times n}.$

$P2: \text{La matriz } 1A \text{ es igual a } A.$

$P3: \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$  (Propiedad pseudoasociativa)

$P4: (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$  (Propiedad distributiva escalar)

$P5: \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$  (Propiedad distributiva matricial)

**Ejemplos 2.4.** Considere las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 6 & 9 & 2 & 6 \\ 8 & 7 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 14 & 1 & \pi \\ 3 & 6 & 0 & -1 & 61 \\ -4 & 7 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 14 & \pi \\ 6 & 0 & 6 \\ -4 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 13 & 0 & -5 & 11 \\ 0 & 0 & 10 & -1 \\ -14 & 6 & 0 & -11 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad F = \begin{bmatrix} 13 & 0 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & \sqrt{2} \\ -5 & 10 & 0 & 1 \\ 11 & -1 & -11 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se tiene lo siguiente.

1. La suma de  $A$  y  $B$  es

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 18 & 2 & 5 + \pi \\ 4 & 12 & 9 & 1 & 67 \\ 4 & 14 & 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

2. La suma de  $A$  y  $C$  no está definida, así como tampoco lo está  $B + C$ .

3. La suma  $E + F$  es la matriz

$$E + F = \begin{bmatrix} 26 & 0 & -19 & 11 \\ 0 & 0 & 16 & \sqrt{2} - 1 \\ -19 & 16 & 0 & -10 \\ 11 & \sqrt{2} - 1 & -10 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es *simétrica*.

4. La matriz  $2C - 3D$  es igual a

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 12 & 4 & 12 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -9 & -42 & -3\pi \\ -18 & 0 & -18 \\ 12 & -21 & -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -40 & 2 - 3\pi \\ -6 & 4 & -6 \\ 12 & -23 & -4 \end{bmatrix}.$$

5. La matriz  $0C$  es la matriz cero de  $\mathbb{K}^{3 \times 3}$ .

6. La matriz  $7F - 1(3F + 4F)$  es la matriz cero de  $\mathbb{K}^{4 \times 4}$ .

7. La expresión  $7B - 1(3F + 4A) + 3C$  no está definida.

□

**Definición 2.10** (Multiplicación de una matriz por un vector). Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $m \times n$  y  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  un vector de  $\mathbb{R}^n$ . El producto de  $A$  por  $X$  es un vector de  $\mathbb{R}^m$  y está dado por

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La anterior definición muestra que el producto de una matriz  $A$  por un vector columna es una *combinación lineal* de las columnas de  $A$ . Cada vez que tengamos una suma de múltiplos escalares de vectores columna o fila diremos que dicha suma es una combinación lineal de aquellos vectores. Este concepto es más amplio y lo definiremos en el Capítulo 4.

**Definición 2.11** (Multiplicación entre matrices). Sean dos matrices  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{K}^{n \times p}$  con  $A = [a_{ij}]$  y  $B = [b_{ij}]$ . El **producto**  $AB$  (de  $A$  por  $B$ ) es otra matriz  $C \in \mathbb{K}^{m \times p}$  cuya  $ij$ -ésima componente es el producto de la matriz fila  $i$  de  $A$  por el vector columna  $j$  de  $B$ , es decir

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{kj}).$$

**Nota 2.5.** Es importante tener en cuenta que para dos matrices  $A$  y  $B$ :

1. Su producto  $AB$  está definido únicamente si el número de columnas de  $A$  es igual al número de filas de  $B$ .
2. El producto entre ellas no es conmutativo, es decir,  $AB \neq BA$
3. El producto  $AB$  puede estar definido, pero  $BA$  puede no existir.
4. El producto  $AB = 0$  no implica que  $A = 0$  o que  $B = 0$ .

**Teorema 2.3** (Propiedades de la multiplicación de matrices). Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres matrices. Se verifican las siguientes propiedades, siempre que los productos estén definidos.

P1: Asociativa:  $A(BC) = (AB)C$

P2: Distributiva respecto a la suma

P2.1: (Por la izquierda)  $A(B + C) = AB + AC$

P2.2: (Por la derecha)  $(B + C)A = BA + CA$

P3: Distributiva respecto al producto escalar:  $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB)$

P4: Elemento neutro multiplicativo:  $I_m A = A$ ,  $A I_n = A$  para toda matriz  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ .

**Definición 2.12** (Matriz transpuesta). Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz de orden  $m \times n$ . La matriz  $B = [b_{ij}]$  de orden  $n \times m$  que se obtiene al colocar como columnas las filas de  $A$  se llama **matriz transpuesta de  $A$**  y se denota por  $A^T$ . Note que si  $B = A^T$ , entonces  $b_{ij} = a_{ji}$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y cada  $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ .

**Nota 2.6.** Observe que al transponer una matriz cuadrada se tiene cierta “simetría” respecto de la diagonal principal.

### Ejemplos 2.5.

1. Toda matriz (cuadrada o no cuadrada) posee transpuesta.
2. Las transpuestas de las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 15 & -\pi & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 9 & 2 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

son las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -\pi \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 5 & 1 & 9 \\ 6 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -7 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{bmatrix},$$

respectivamente.

3. La transpuesta de la matriz identidad es ella misma. Por ejemplo,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n^T.$$

4. La transpuesta de  $[8 \ 9 \ 7 \ 5]$  es la matriz

$$\begin{bmatrix} 8 \\ 9 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix},$$

que es también el vector  $(8, 9, 7, 5)$  de  $\mathbb{R}^n$ . No es correcto escribir  $[8 \ 9 \ 7 \ 5] = (8, 9, 7, 5)$ , pues  $[8 \ 9 \ 7 \ 5]$  pertenece a  $\mathbb{R}^{1 \times 4}$  mientras que  $(8, 9, 7, 5)$  pertenece a  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^{4 \times 1}$ . No obstante, sí es correcto escribir  $[8 \ 9 \ 7 \ 5]^T = (8, 9, 7, 5)$  (¿por qué?).

5. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

es triangular superior y su transpuesta es triangular inferior:

$$A^T = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. La transpuesta de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & \sqrt{4} & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que  $A = A^T$ .

7. La transpuesta de

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 0 & -7 \\ 5 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

es la matriz

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 7 \\ -5 & -7 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note que  $B = -B^T$ .

□

**Teorema 2.4** (Propiedades de la matriz transpuesta). Si  $A$  y  $B$  son dos matrices, entonces

(i)  $(A^T)^T = A$

(ii)  $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

(iii)  $(A + B)^T = A^T + B^T$ , siempre que la suma  $A + B$  esté definida.

(iv)  $(A - B)^T = A^T - B^T$ , siempre que la suma  $A - B$  esté definida.

(v)  $(AB)^T = B^T A^T$ , siempre que  $AB$  exista.

**Definición 2.13.** Sea  $A = [a_{ij}]$  una matriz cuadrada de orden  $m \times n$ .

(i) Se dice que  $A$  es **simétrica** si  $A = A^T$ . Es decir, una matriz simétrica es aquella que al trasponer sus filas por columnas no cambia. En tal caso,  $a_{ij} = a_{ji}$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

(ii) Se dice que  $A$  es **antisimétrica** si  $A = -A^T$ . En tal caso se tiene  $a_{ij} = -a_{ji}$  para todo  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  y todo  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Nota 2.7.** Ser antisimétrica no es la negación de ser simétrica. Existen matrices que no son ni una ni otra. Por otro lado, observe que las componentes de la diagonal principal de una matriz antisimétrica son todas iguales a 0, pues cuando  $i = j$  se tiene  $a_{ii} = -a_{ii}$ , lo cual implica que  $a_{ii} = 0$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

### 2.1.1. Problemas resueltos

**Problema 2.1.** Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Cuando resulte falso, dé un contraejemplo en caso de ser posible.

(a) Si  $A$  y  $B$  son dos matrices  $2 \times 2$  cualesquiera, entonces  $AB = BA$ .

(b) La matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$  no tiene diagonal principal.

(c) Una matriz  $m \times n$  tiene  $m$  vectores columna y  $n$  vectores fila.

(d) Si  $A, B, C$  son matrices del mismo tamaño tales que  $A - C = B - C$ , entonces  $A = B$ .

(e) Para cualquier matriz  $A$  es cierto que  $A = (A^T)^T$ .

**Solución.**

(a) Falso. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es claro que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{pero} \quad BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- (b) Verdadero. Sólo las matrices cuadradas tienen diagonal principal.
- (c) Falso. Una matriz  $m \times n$  tiene  $m$  vectores fila y  $n$  vectores columna.
- (d) Verdadero.
- (e) Verdadero, por el Teorema 2.4.

**Problema 2.2.** Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -7 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 10 & -1 & 13 \end{bmatrix},$$

encuentre:

- (a)  $A + B$
- (b)  $4A$
- (c)  $3A - 2B - 4C$
- (d)  $A^T - 2B^T$
- (e)  $5A^T + B^T + C^T$
- (f) Una matriz  $D$  tal que  $A + B - C + D$  sea la matriz cero de orden  $2 \times 3$
- (g) Una matriz  $E$  tal que  $A + 2B - C + 3E$  sea la matriz cero de orden  $2 \times 3$

**Solución.**

(a)

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 & 7 \\ 5 & 0 & -9 \end{bmatrix}$$

(b)

$$4A = 4 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 20 \\ 0 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

(c)

$$\begin{aligned} 3A - 2B - 4C &= 3 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -7 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 10 & -1 & 13 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & -3 & 15 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 8 & -4 \\ -10 & 2 & 14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & -24 & -32 \\ -40 & 4 & -52 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 28 & -19 & -21 \\ -50 & 9 & -44 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} A^T - 2B^T &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^T - 2 \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -7 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -10 \\ 8 & 2 \\ -4 & 14 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 8 & -10 \\ 7 & 3 \\ 1 & 12 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned} 5A^T + B^T + C^T &= 5 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ -4 & -1 \\ 2 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 10 \\ 6 & -1 \\ 8 & 13 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 5 \\ 25 & -10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & 15 \\ 2 & -2 \\ 10 & 6 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 15 \\ -3 & 3 \\ 35 & -4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(f) Planteamos  $A + B - C + D = 0_{2 \times 3}$ , de donde  $D = C - A - B$ . Es decir,

$$\begin{aligned} D &= \begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 10 & -1 & 13 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -6 & 7 & 3 \\ 10 & -2 & 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -3 & 11 & 1 \\ 5 & -1 & 22 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(g) Planteamos  $A + 2B - C + 3E = 0_{2 \times 3}$ . De aquí,  $E = \frac{1}{3}(C - A - 2B)$ . Esto es,

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -4 & 6 & 8 \\ 10 & -1 & 13 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 & 7 & 3 \\ 10 & -2 & 15 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -3 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -7 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & 15 & -1 \\ 0 & 0 & 29 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Problema 2.3.** Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -\alpha & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } C = \begin{bmatrix} \beta & -2 & 1 \\ 2 & \beta & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \end{bmatrix},$$

- (a) Hallar  $A + C$
- (b) ¿Para que valor de  $\alpha$  la matriz  $A$  es simétrica?
- (c) ¿Para que valores de  $\alpha$  y  $\beta$  la matriz  $C$  es antisimétrica?
- (d) ¿Para que valores de  $\alpha$  y  $\beta$  la matriz  $A + C$  es triangular?

**Solución.**

(a)

$$A + C = \begin{bmatrix} 2 & -\alpha & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta & -2 & 1 \\ 2 & \beta & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \beta & -2 - \alpha & 0 \\ 5 & \beta & \beta - 1 \\ \alpha - 1 & -1 & \beta - 2 \end{bmatrix}$$

(b) Se debe cumplir que  $A^T = A$ , i.e.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -\alpha & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\alpha & -1 \\ 3 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

de donde  $-\alpha = 3$ . Luego,  $\alpha = 3$  hace a  $A$  simétrica.

(c) Se debe cumplir que  $-C^T = C$ , i.e.

$$-\begin{bmatrix} \beta & 2 & \alpha \\ -2 & \beta & 0 \\ 1 & \beta & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & -2 & 1 \\ 2 & \beta & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -\beta & -2 & -\alpha \\ 2 & -\beta & 0 \\ -1 & -\beta & -\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & -2 & 1 \\ 2 & \beta & \beta \\ \alpha & 0 & \beta \end{bmatrix},$$

lo cual nos indica que  $\beta = -\beta$  y que  $1 = -\alpha$ . Así,  $\alpha = -1$  y  $\beta = 0$  hacen que  $C$  sea antisimétrica.

(d) Tenemos

$$A + C = \begin{bmatrix} 2 + \beta & -2 - \alpha & 0 \\ 5 & \beta & -\beta \\ \alpha - 1 & -1 & \beta - 2 \end{bmatrix}.$$

Para que  $A + C$  sea triangular necesitamos que esta matriz sea triangular inferior o triangular superior. Particularmente,  $A + C$  es triangular inferior si

$$\begin{bmatrix} 2 + \beta & -2 - \alpha & 0 \\ 5 & \beta & \beta - 1 \\ \alpha - 1 & -1 & \beta - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + \beta & 0 & 0 \\ 5 & \beta & 0 \\ \alpha - 1 & -1 & \beta - 2 \end{bmatrix},$$

de donde  $-2 - \alpha = 0$  y  $\beta - 1 = 0$ . Por tanto  $A + C$  es triangular si  $\alpha = -2$  y  $\beta = 1$ .

□

**Problema 2.4.** Para cada condición dada hallar una matriz  $A$  que la satisfaga.

- (a)  $A$  es a la vez triangular superior y triangular inferior.
- (b)  $A$  es a la vez simétrica y antisimétrica.
- (c)  $A^T = A$ .

(d)  $A^T = -A$ .

**Solución.**

(a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(b)  $A$  es simétrica y antisimétrica si  $A = -A$ , por lo que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(c)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(d)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

**Problema 2.5.** Sean

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad Y = [2 \quad -1 \quad 4].$$

(a) Hallar  $AX$ .

(b) Calcular  $YA$ .

(c) Expresar  $AX$  como una CL de las columnas de  $A$ .

(d) Expresar  $YA$  como una CL de las filas de  $A$ .

**Solución.**

(a)

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ -15 \\ 58 \end{bmatrix}$$

(b)

$$YA = [2 \quad -1 \quad 4] \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} = [25 \quad -10 \quad 25 \quad 38]$$

(c)

$$AX = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{aligned} YA &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \\ -1 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & -1 & 4 & 7 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1 & 4 & -3 & 0 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Problema 2.6.** Resolver el Problema 2.5 con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Y = X^T.$$

**Solución.**

(a)

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 25 \end{bmatrix}$$

(b)

$$YA = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -11 & -54 \end{bmatrix}$$

(c)

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{aligned} YA &= \begin{bmatrix} -3 & 5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} \\ &= -3 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -7 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

**Problema 2.7.** Sean

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcular  $AB$  por componentes, columnas, y filas.  
 (b) Expresar cada columna de la matriz producto  $AB$  como una combinación lineal de las columnas de  $A$ .  
 (c) Expresar cada fila de la matriz producto  $AB$  como una combinación lineal de las filas de  $B$ .

**Solución.**

- (a) • Por componentes:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (-2)(-1) + (4)(0) + (-3)(2) & (-2)(4) + (4)(1) + (-3)(-3) \\ (0)(-1) + (1)(0) + (-1)(2) & (0)(4) + (1)(1) + (-1)(-3) \\ (2)(-1) + (-1)(0) + (2)(2) & (2)(4) + (-1)(1) + (2)(-3) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- Por columnas: sea  $P = AB$ , luego

$$P = \begin{bmatrix} P^{(1)} & P^{(2)} \\ | & | \\ | & | \end{bmatrix},$$

donde  $P^{(j)} = AB^{(j)}$  con  $j = 1, 2$ . Ahora

$$P^{(1)} = AB^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

y

$$P^{(2)} = AB^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Por filas: sea  $P = AB$ , luego

$$P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix},$$

donde  $P_i = A_i B$  con  $i = 1, 2, 3$ . Ahora

$$P_1 = A_1 B = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = A_1B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}$$

y

$$P_3 = A_2B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$P = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)

$$AB^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = P^{(1)},$$

$$AB^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = P^{(2)}.$$

(c)

$$\begin{aligned} P_1 = A_1B &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= -2 \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} - 3 \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_2 = A_2B &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= 0 \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_3 = A_3B &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} -1 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Problema 2.8.** Sean

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Verificar la propiedad asociativa de la multiplicación con las matrices  $A$ ,  $B$ , y  $C$ .
- (b) Verificar la propiedad distributiva de la multiplicación de matrices con respecto a la suma con  $A$ ,  $B$ , y  $C^T$ .

- (c) Calcular las matrices  $(2A)B$  y  $A(3B) - C^T$ .  
 (d) Hallar una matriz  $D$  tal que  $3D - 2BC$  sea la matriz cero de orden  $3 \times 3$ .  
 (e) Verificar la igualdad entre  $(AB)^T$  y  $B^T A^T$ .

**Solución.**

- (a) Tenemos

$$\begin{aligned} (AB)C &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 11 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 & -1 & -2 \\ 18 & 1 & 4 \\ -4 & 22 & 8 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} A(BC) &= A \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 11 & 3 \\ 3 & 11 & 5 \\ -15 & 10 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 & -1 & -2 \\ 18 & 1 & 4 \\ -4 & 22 & 8 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto, se verifica que el producto de matrices es asociativo.

- (b) Comprobaremos que  $A(B + C^T) = AB + AC^T$ . Por una parte tenemos que

$$\begin{aligned} A(B + C^T) &= A \left( \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = A \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 8 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 8 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 10 & 6 \\ 3 & 10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\begin{aligned} AB + AC^T &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 11 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 0 \\ 10 & 6 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esto verifica la propiedad distributiva de la multiplicación de matrices.

- (c) Calculamos  $(2A)B$ :

$$(2A)B = 2 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -4 \\ 22 & 8 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}.$$

Calculamos  $A(3B) - C^T$ :

$$\begin{aligned} A(3B) - C^T &= A\left(3\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}\right) - \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 12 & 15 \\ -21 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -15 & -6 \\ 33 & 12 \\ 6 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -17 & -5 \\ 34 & 9 \\ 6 & 23 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(d) Buscamos  $D$  tal que  $3D - 2BC = 0_{3 \times 3}$ , o  $D = \frac{2}{3}BC$ . Así

$$D = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} -7 & 11 & 3 \\ 3 & 11 & 5 \\ -15 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

(e) Obsérvese que

$$\begin{aligned} (AB)^T &= \left( \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 5 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 11 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -5 & 11 & 2 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad y \\ B^T A^T &= \begin{bmatrix} -2 & 4 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 11 & 2 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Lo anterior verifica que  $(AB)^T = B^T A^T$ . □

**Problema 2.9.** Sean  $A$  y  $B$  matrices cuadradas de orden  $n$ . Verifique las siguientes afirmaciones:

- Si las matrices  $A$  y  $B$  son simétricas, entonces la matriz  $A + B$  es simétrica.
- La matriz  $A + A^T$  es simétrica y la matriz  $A - A^T$  es antisimétrica.
- Descomponer  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$  como la suma de una matriz simétrica y una matriz antisimétrica.

**Solución.**

- Dado que  $A = A^T$  y  $B = B^T$  tenemos que  $A + B = A^T + B^T$  y como la suma de las transpuestas es la transpuesta de la suma, tenemos

$$A + B = A^T + B^T = (A + B)^T.$$

Luego  $A + B$  es simétrica.



El producto de matrices nos permite escribir el sistema de forma simple como  $Ax = b$ , donde  $A = [a_{ij}]$  es la *matriz de coeficientes*,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  es el *vector de incógnitas* y  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  es el *vector de términos independientes* del sistema. Para abreviar más todavía, podemos considerar la matriz

$$[A|b] = \left[ \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_n \end{array} \right],$$

denominada *matriz aumentada* del sistema  $Ax = b$ , como su representación.

Una *solución* de un sistema de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  es una secuencia de  $n$  escalares  $s_1, s_2, \dots, s_n$  tales que

$$x_1 = s_1, \quad x_2 = s_2, \quad \dots, \quad x_n = s_n$$

para los cuales cada ecuación del sistema es válida. Si existe tal lista  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ , denominada *vector solución* de  $Ax = b$ , diremos que el sistema es *soluble* y si carece de solución lo llamaremos *inconsistente*. Un sistema es *consistente* si tiene al menos una solución. En general, existen tres casos: un sistema puede tener una única solución o infinitas soluciones o ninguna solución. No hay más posibilidades. Un vector solución de un sistema no homogéneo se denomina *solución particular* del sistema. Dos sistemas de  $m$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas son equivalentes cuando el conjunto de soluciones es el mismo para ambos.

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales es usual sumar ecuaciones, multiplicarlas por una constante e intercambiarlas; es decir, realizar operaciones sobre el sistema que no altere su conjunto de soluciones y que produzca un *sistema equivalente* más simple de resolver. Típicamente, las operaciones algebraicas involucradas son

- (i) Multiplicar una ecuación por una constante diferente de cero.
- (ii) Intercambiar dos ecuaciones.
- (iii) Sumar una ecuación multiplicada por una constante a otra ecuación del sistema.

Dado que las ecuaciones de un sistema lineal se pueden representar por las filas de su matriz aumentada, es factible pensar que existen tres tipos de operaciones que pueden realizarse con las filas de una matriz  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  y las llamaremos *operaciones elementales de fila*. Para  $r, s \in \{1, 2, \dots, m\}$  y un escalar  $c \neq 0$  se tiene

OE1: Sustituir una fila  $r$  por  $c$  veces  $r$ :  $M_r(c)$ .

OE2: Intercambiar dos filas  $r$  y  $s$ :  $P_{rs} = P_{sr}$ .

OE3: Sustituir una fila  $r$  por el resultado de sustraer de  $r$ ,  $c$  veces una fila  $s \neq r$ :  $E_{rs}(c)$ .

Así como existen tres tipos de operaciones elementales de fila, existen tres tipos de matrices elementales, cada una asociada a un tipo de operación elemental de fila.

**Definición 2.14** (Matriz elemental). *Cualquier matriz obtenida al realizar una única operación elemental de fila sobre la matriz identidad de orden  $n$  se denomina **matriz elemental de orden  $n$** . Sean  $r, s \in \{1, 2, \dots, n\}$  y  $c \neq 0$  un escalar. Denotamos*

- (i)  $M_r(c)$  a la matriz elemental obtenida al sustituir la fila  $r$  de  $I_n$  por la fila  $r$  multiplicada por un escalar  $c$ .  $M_r(c)$  siempre es una matriz diagonal y  $m_{rs} = c$ , donde  $m_{rs}$  es la entrada en la posición  $r, s$  de la matriz  $M_r(c)$ .
- (ii)  $P_{rs}$  a la matriz elemental obtenida al intercambiar las filas  $r$  y  $s$  de la matriz  $I_n$ . Las matrices  $P_{rs}$  y  $P_{sr}$  son las mismas.
- (iii) Para  $r \neq s$ ,  $E_{rs}(c)$  a la matriz elemental obtenida al sustituir en  $I_n$  la fila  $r$  por la resultante de sustraer de la fila  $r$ ,  $c$  veces la fila  $s$ , i.e. por  $r - cs$ .  $E_{rs}(c)$  tiene como componente  $e_{rs}$  al escalar  $-c$ . Si  $r < s$ , la matriz  $E_{rs}(c)$  es triangular superior con diagonal unitaria. Si  $r > s$ , la matriz  $E_{rs}(c)$  es triangular inferior con diagonal unitaria.

**Nota 2.8.** La notación para una matriz elemental y una operación elemental de fila es la misma pero el contexto siempre aclarará a qué se refiere en cada caso. Hemos adoptado esta notación de Restrepo et al. (1993) porque nos parece muy útil y más formal.

**Teorema 2.5** (Operaciones elementales de fila como producto de matrices). Sea  $E$  una matriz elemental y sea  $A$  una matriz de orden  $m \times n$ . El producto  $EA$  es la matriz que resulta al realizar sobre  $A$  la operación elemental de fila asociada a  $E$ .

**Nota 2.9.** En el teorema anterior, nótese que se multiplicó a  $A$  por la izquierda y que  $EA \neq AE$ .

Antes de enunciar un importante teorema acerca de las matrices elementales, damos la siguiente definición de matriz inversa. Dedicaremos la última sección de este capítulo a tratar este tema. Por ahora no nos interesa saber cómo calcularla, sino simplemente saber lo que significa.

**Definición 2.15** (Matriz inversa). Dada una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$ , decimos que  $A$  es **invertible** (o regular) si existe una matriz  $B$  de orden  $n$  tal que  $AB = BA = I_n$ . Denotamos  $B = A^{-1}$  y diremos que  $B$  es la **inversa** de  $A$ . Si  $B$  no existe, se dirá que  $A$  es no invertible (o singular).

El siguiente teorema nos muestra que si una matriz tiene una “inversa a derecha” y una “inversa a izquierda” ellas son iguales. Esto es, la inversa de una matriz es única.

**Teorema 2.6.** Sean  $A, B$  y  $C$  matrices cuadradas de orden  $n$ .

1. Si  $AB = I_n$  y  $CA = I_n$  entonces  $A$  es invertible y  $A^{-1} = B = C$ .
2.  $A$  es invertible si y sólo si  $A^T$  es invertible. Además  $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

**Teorema 2.7.** Toda matriz elemental de orden  $n$  es invertible y su inversa es una matriz elemental del mismo tipo. A saber,

- (i) Para  $r \neq 0$ ,  $(E_{rs}(c))^{-1} = E_{rs}(-c)$ .
- (ii)  $(P_{rs})^{-1} = P_{rs}$ .
- (iii) Para  $c \neq 0$ ,  $(M_r(c))^{-1} = M_r\left(\frac{1}{c}\right)$ .

**Corolario 2.7.1.** El producto de matrices elementales es una matriz invertible. Además, la inversa de este producto es el producto de las matrices elementales inversas en el orden contrario.

**Definición 2.16** (Matrices equivalentes por filas). Se dice que dos matrices  $A$  y  $B$  son **equivalentes por filas** si cada una puede obtenerse de la otra al realizar una determinada secuencia de operaciones elementales de fila.

**Teorema 2.8.**

- (i) Una matriz  $L$  triangular inferior es invertible si las componentes de su diagonal principal son todas distintas de 0. Además, su inversa  $L^{-1}$  también es triangular inferior.
- (ii) Una matriz  $U$  triangular superior es invertible si las componentes de su diagonal principal son todas distintas de 0. Además, su inversa  $U^{-1}$  también es triangular superior.

(iii) Si  $D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$  con  $d_i \neq 0$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , entonces  $D$  es

invertible y su inversa está dada por  $D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_n} \end{bmatrix}$ .

**Corolario 2.8.1.** Una matriz triangular con diagonal unitaria es invertible y su inversa es triangular con diagonal unitaria.

**Definición 2.17** (Matriz escalonada). Una matriz es **escalonada** por filas si satisface las siguientes condiciones, en las que llamaremos **pivote** a la primera componente distinta de cero en cada fila no nula.

- (i) Si existen filas de ceros, estas se sitúan en la parte inferior de la matriz.
- (ii) Cada pivote es igual a 1.
- (iii) El pivote de una fila que se sitúa debajo de otra está a la derecha del pivote de la fila anterior.
- (iv) Debajo de cada pivote, en la columna correspondiente, todas las componentes son iguales a cero.

**Definición 2.18** (Matriz escalonada reducida). Una matriz es **escalonada reducida** por filas si cumple las siguientes condiciones:

- (i) Es matriz escalonada.
- (ii) Arriba de cada pivote, en la columna correspondiente, todas las componentes son iguales a cero.

**Ejemplos 2.6.**

1. Algunas matrices en forma escalonada por filas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Algunas matrices en forma escalonada reducida por filas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Algunas matrices que no son escalonadas ni escalonadas reducidas.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Toda matriz escalonada reducida es una matriz escalonada (no es válido al contrario).

□

Una matriz cualquiera puede transformarse en una matriz escalonada o en una matriz escalonada reducida. El proceso de convertir una matriz, mediante operaciones elementales de fila, en una matriz escalonada se llama *eliminación gaussiana*<sup>1</sup> mientras que el proceso de convertir a una matriz en escalonada reducida se denomina *eliminación de Gauss-Jordan*. Es pertinente resaltar que la forma escalonada por filas de una matriz no es única, mientras que la forma escalonada reducida por filas sí lo es. La eliminación gaussiana nos permite resolver sistemas de ecuaciones lineales al encontrar un *sistema equivalente reducido*, lo cual se logra al transformar la matriz aumentada de un sistema  $Ax = b$  en una matriz escalonada y resolver por sustitución regresiva para encontrar el vector  $x$ . Este es el método de Gauss. Por otra parte, la eliminación de Gauss-Jordan nos permite resolver tal sistema de ecuaciones al convertir su matriz aumentada en una matriz escalonada reducida; el vector solución se encuentra por sustitución directa. Sin embargo, el método de Gauss-Jordan suele ser más largo.

### Ejemplos 2.7.

1. Para resolver el sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ x + 2z - y = 5 \\ 2y + 4z = 16 \end{cases},$$

mediante el método de Gauss, primero tomamos su matriz ampliada y luego realizamos sobre ella operaciones elementales de fila hasta obtener una matriz escalonada. Así

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{32}(-2/3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 10/3 & 44/3 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\begin{matrix} M_2(-1/3) \\ M_3(3/10) \end{matrix}]{M_2(-1/3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 22/5 \end{array} \right],$$

<sup>1</sup>En honor al matemático alemán Carl Friedrich Gauss.

y por sustitución regresiva

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 7 \\ y + \frac{1}{3}z = \frac{2}{3} \\ z = \frac{22}{5} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2\left(-\frac{4}{5}\right) - 3\left(\frac{22}{5}\right) = -\frac{23}{5} \\ y = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{22}{5}\right) = -\frac{4}{5} \\ z = \frac{22}{5} \end{cases}$$

encontramos que este sistema tiene como solución única a la terna  $\left(-\frac{23}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{22}{5}\right)$ .

2. Para resolver el sistema anterior usando eliminación de Gauss-Jordan, tomamos la matriz aumentada y procedemos así

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 16 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{32}(-2/3)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 10/3 & 44/3 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{M_2(-\frac{1}{3}) \\ M_3(\frac{3}{10})}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 & 22/5 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{E_{23}(1/3) \\ E_{13}(3)}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -31/15 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 22/5 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{12}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -23/5 \\ 0 & 1 & 0 & -4/5 \\ 0 & 0 & 1 & 22/5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

lo cual nos dice que el vector solución del sistema es la terna  $\left(-\frac{23}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{22}{5}\right)$ .

3. El siguiente sistema tiene más incógnitas que ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x_2 - 2x_3 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 1 \\ 5x_3 + 10x_4 = 5 \\ 2x_1 + 6x_2 + 8x_4 + 4x_5 = 6 \end{cases}$$

Lo resolvemos aplicando eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{P_{12} \\ P_{34}}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 0 & 5 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{31}(1)} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 0 & 5 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{43}(3/5)} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{E_{14}(-1/2)E_{34}(5/2) \\ M_4(1/4)}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & 6 & -5 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{E_{23}(-2/5) \\ M_3(1/5)E_{13}(-1)}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & 6 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{12}(2)} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{M_1(1/2) \\ M_2(1/3)}} \left[ \begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 \end{array} \right], \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\begin{cases} x_1 - 3x_5 = 1 \\ x_2 + \frac{5}{3}x_5 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 3x_5 \\ x_2 = -\frac{5}{3}x_5 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ahora asignamos a la variable libre  $x_5$  un parámetro  $t$ , y expresamos la solución de este sistema paramétricamente así:

$$x_1 = 1 + 3t, \quad x_2 = -\frac{5}{3}t, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = \frac{1}{2}, \quad x_5 = t.$$

También habríamos podido expresar la solución general de este sistema como una combinación lineal:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 3t \\ -\frac{5}{3}t \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nótese que  $t$  es cualquier escalar por lo que hay infinitas soluciones para este sistema de ecuaciones.

□

**Nota 2.10.** Cuando un sistema posee más incógnitas que ecuaciones, puede tener infinitas soluciones o ninguna solución pero jamás una solución única. Nótese también que en el ejemplo anterior denominamos a  $x_5$  *variable libre* ya que puede tomar cualquier valor. A las variables restantes las llamaremos *variables básicas* y pueden o no depender de las variables libres.

### 2.2.1. Problemas resueltos

**Problema 2.10.** Describa cada una de las operaciones elementales de fila indicadas a continuación y encuentre la matriz elemental de orden 4 correspondiente:

$$E_{21}(5/3), \quad E_{32}(-4), \quad P_{13}, \quad P_{23}, \quad M_3(1/7).$$

**Solución.**

- $E_{21}(5/3)$ : indica que hay que sustituir a la segunda fila por el resultado de sustraerle a esta la primera fila multiplicada por  $\frac{5}{3}$ .

$$E_{21}(5/3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5/3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $E_{32}(-4)$ : indica que hay que sustituir a la tercera fila por el resultado de sustraerle a esta la segunda fila multiplicada por  $-4$ .

$$E_{32}(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $P_{13}$ : consiste en intercambiar (permutar) las filas 1 y 3.

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $P_{23}$ : consiste en intercambiar (permutar) las filas 2 y 3.

$$P_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- $M_3(1/7)$ : señala que se debe multiplicar a la fila 3 por  $\frac{1}{7}$ .

$$M_3(1/7) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

**Problema 2.11.** Sea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -10 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Sin realizar directamente la multiplicación, encuentre los siguientes productos de matrices de orden 4.

- |                   |                         |                           |
|-------------------|-------------------------|---------------------------|
| (a) $E_{21}(-5)A$ | (c) $P_{23}A$           | (e) $E_{31}(-2)E_{21}(5)$ |
| (b) $E_{32}(4)A$  | (d) $E_{31}(-2)P_{14}A$ | (f) $E_{43}(-1)P_{24}$    |

**Solución.**

(a)

$$E_{21}(-5)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -10 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 20 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(b)

$$E_{32}(4)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -10 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -10 & 1 & 0 & -1 \\ 40 & -5 & 1 & 6 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(c)

$$P_{23}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -10 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -10 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

(d)

$$\begin{aligned} E_{31}(-2)P_{14}A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ -10 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 5 \\ -10 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & 5 \\ -10 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -7 & 7 & 12 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(e)

$$E_{31}(-2)E_{21}(5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(f)

$$E_{43}(-1)P_{24} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

**Problema 2.12.** Para cada una de las siguientes matrices de orden 3, explique por qué ella es invertible y encuentre su inversa:

(a)  $E_{21}(-3)$

(b)  $E_{32}(5)E_{21}(-1)$

(c)  $E_{32}(-1)E_{31}(2)E_{21}(3)$

(d)  $E_{32}(-4)E_{21}(1)P_{23}$

(e)  $M_2(-1/4)$

(f)  $M_3(1/2)M_2(-5)$

$$(g) D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

$$(h) A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(i) B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(j) C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Solución.**

(a)  $E_{21}(-3)$  es invertible por tratarse de una matriz elemental. Su inversa está dada por

$$(E_{21}(-3))^{-1} = E_{21}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b)  $E_{32}(5)E_{21}(-1)$  es invertible por tratarse del producto de matrices elementales. Su inversa está dada por

$$(E_{32}(5)E_{21}(-1))^{-1} = E_{21}(1)E_{32}(-5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c)  $E_{32}(-1)E_{31}(2)E_{21}(3)$  es invertible por tratarse de un producto de matrices elementales. Su inversa está dada por

$$\begin{aligned} (E_{32}(-1)E_{31}(2)E_{21}(3))^{-1} &= E_{21}(-3)E_{31}(-2)E_{32}(1) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(d)  $E_{32}(-4)E_{21}(1)P_{23}$  es invertible por tratarse de un producto de matrices elementales. Su inversa está dada por

$$\begin{aligned} (E_{32}(-4)E_{21}(1)P_{23})^{-1} &= P_{23}E_{21}(-1)E_{32}(4) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- (e)  $M_2(-1/4)$  es invertible por tratarse de una matriz elemental. Su inversa está dada por

$$(M_2(-1/4))^{-1} = M_2(-4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (f)  $M_3(1/2)M_2(-5)$  es invertible por tratarse de una matriz elemental. Su inversa está dada por

$$(M_3(1/2)M_2(-5))^{-1} = M_2(-1/5)M_3(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (g) Véase el Teorema 2.8. La matriz  $D$  es invertible porque es una matriz diagonal con  $d_i \neq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Su inversa está dada por

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{bmatrix}.$$

- (h) La matriz  $A$  es invertible porque es la matriz elemental  $P_{13}$ . Su inversa está dada por

$$A^{-1} = (P_{13})^{-1} = P_{13} = A.$$

- (i) La matriz  $B$  es invertible porque es el producto de matrices elementales:  $B = E_{31}(-2)E_{21}(4)$ . Su inversa está dada por

$$B^{-1} = (E_{31}(-2)E_{21}(4))^{-1} = E_{21}(-4)E_{31}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (j) La matriz  $C$  es invertible porque es el producto de matrices elementales:  $C = P_{23}M_1(3)M_2(2)M_3(5)$ . Su inversa está dada por

$$\begin{aligned} C^{-1} &= (P_{23}M_1(3)M_2(2)M_3(5))^{-1} \\ &= M_3(1/5)M_2(1/2)M_1(1/3)P_{23} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/5 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□



## 2.3. Factorización $LU$ y $PA = LU$

El método de Gauss y el método de Gauss-Jordan no son los únicos que podemos emplear para resolver sistemas de ecuaciones. Además, cuando el sistema es muy grande estos métodos no son convenientes ya que se vuelven muy largos. Existe otro método para resolver sistemas de ecuaciones lineales que se basa en la eliminación gaussiana y las matrices elementales para descomponer a una matriz como el producto de dos matrices: una matriz triangular inferior por una triangular superior. Este procedimiento nos permite resolver varios sistemas de ecuaciones que tengan la misma matriz de coeficientes, pues el esfuerzo está dedicado principalmente a encontrar tal factorización para esta matriz.

**Definición 2.19** (Factorización  $LU$ ). Si  $A$  es una matriz cuadrada y puede descomponerse como  $A = LU$ , donde  $L$  es una matriz triangular inferior y  $U$  es una matriz triangular superior, entonces dicha factorización se denomina **descomposición** o **factorización  $LU$  de  $A$** .

**Teorema 2.9.**

- (i) Si  $A$  es una matriz de orden  $m \times n$  que puede ser reducida a una matriz escalonada  $U$  usando eliminación gaussiana sin intercambios de filas, entonces  $A$  puede factorizarse como  $A = LU$  donde  $L$  es una matriz triangular inferior.
- (ii) Si  $A$  es una matriz cuadrada que puede reducirse sin la necesidad de intercambios de filas a una matriz escalonada con sus elementos de la diagonal diferentes de cero, entonces  $A$  puede factorizarse de manera única como  $A = LDU$ , donde  $L$  es una matriz triangular inferior con diagonal unitaria,  $D$  es una matriz diagonal y  $U$  es una matriz triangular superior con diagonal unitaria.

**Corolario 2.9.1.** Si la matriz  $A$  del Teorema 2.9 es simétrica y posee la factorización  $A = LDU$ , entonces  $U$  es la transpuesta de  $L$ , es decir,  $A = LDL^T$

Sabemos que los sistemas que poseen a una matriz de coeficientes escalonada son fáciles de resolver porque podemos usar sustitución regresiva. Si podemos descomponer a una matriz  $A$  como el producto  $LU$  y queremos resolver el sistema  $Ax = b$ , entonces podemos escribir al sistema como  $LUx = b$ . En particular, haciendo  $y = Ux$  podemos reescribir dicho sistema como  $Ly = b$  y resolver para  $y$ . Dado que  $L$  es triangular inferior podemos realizar *sustitución progresiva* de las variables (de arriba hacia abajo). Después sustituimos a  $y$  como vector de términos independientes en  $Ux = y$  y resolvemos para  $x$ , lo cual también es sencillo ya que se resuelve mediante sustitución regresiva pues  $Ux$  es el producto de una matriz triangular superior por un vector columna.

**Ejemplo 2.8.** Supongamos que queremos resolver el siguiente sistema utilizando la factorización  $LU$ .

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 2 \\ -3x_1 - 8x_2 = 2 \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Primero tomamos la matriz de coeficientes, que denotamos por  $A$ , y la llevamos a una forma escalonada utilizando eliminación gaussiana sin aplicar intercambios de filas, así:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(2)]{E_{21}(-3/2)} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-3)} \begin{bmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow[M_3(1/7)]{M_1(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U.$$

Ahora podemos expresar a  $U$  como

$$U = M_3(1/7)M_1(1/2)E_{32}(-3)E_{31}(2)E_{21}(-3/2)A.$$

No resta encontrar  $L$ , que es precisamente la inversa del producto de las matrices elementales (asociadas a las operaciones elementales de fila) que nos permitieron llegar desde  $A$  hasta  $U$ , es decir

$$\begin{aligned} L &= \left( M_3(1/7)M_1(1/2)E_{32}(-3)E_{31}(2)E_{21}(-3/2) \right)^{-1} \\ &= E_{21}(3/2)E_{31}(-2)E_{32}(3)M_1(2)M_3(7) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(Observe como obtuvimos el producto de estas matrices sólo teniendo en cuenta la posición de cada una de sus entradas.) Luego,  $A$  se factoriza como

$$A = LU = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora podemos reescribir el sistema en forma matricial como

$$LUx = b \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Además, haciendo  $Ux = y$  obtenemos

$$Ly = b \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

que es un sistema que puede resolverse para  $y$  utilizando sustitución progresiva, así:

$$\begin{cases} 2y_1 = 2 \\ -3y_1 + y_2 = 2 \\ 4y_1 - 3y_2 + 7y_3 = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 2 + 3y_1 = 5 \\ y_3 = \frac{1}{7}(3 - 4y_1 + 3y_2) = 2. \end{cases}$$

Por último, resolvemos  $Ux = y$  para  $x$  ahora que  $y$  es conocido:

$$Ux = y \iff \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Realizamos sustitución regresiva:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 3x_3 = 5 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 = 5 - 3x_3 = -1 \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 2.$$

□

**Nota 2.11.** Cabe mencionar que la matriz  $U$  del ejemplo anterior tiene diagonal unitaria porque se llevó  $A$  a una forma escalonada, haciendo uso del Teorema 2.9. Sin embargo,  $A$  se pudo haber reducido por filas para obtener una matriz triangular superior que no es necesariamente una matriz escalonada, es decir, una matriz triangular superior cuya diagonal principal no es necesariamente unitaria; el proceso es similar al de la eliminación gaussiana, pero sin hacer cada pivote igual a 1. En tal caso, si no realizan operaciones del tipo  $M_r(c)$ , la matriz  $L$  triangular inferior tendría diagonal unitaria (¿por qué?) y sería el producto de matrices elementales de un único tipo:  $E_{rs}(c)$ , con  $r > s$ . Nótese que la Definición 2.19 se estaría cumpliendo igualmente.

**Definición 2.20** (Rango de una matriz). *Sea  $A$  una matriz de orden  $m \times n$  y  $U$  una matriz escalonada obtenida a partir de  $A$  por operaciones elementales de fila. El número de filas no nulas de  $U$  es llamado **rango** de  $A$  y lo denotaremos  $\text{rank}(A)$ .*

**Nota 2.12.** El número de filas no nulas siempre es igual al número de pivotes. Entonces, el rango de una matriz es igual al número de pivotes una vez se la ha reducido a una matriz escalonada.

**Teorema 2.10.** Sean  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{K}^m$ .

- (i) Si  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b]$ , el sistema  $Ax = b$  es consistente.
- (ii) Si  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = n$ , el sistema  $Ax = b$  tiene solución única.
- (iii) Si  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] < n$ , el sistema  $Ax = b$  tiene infinitas soluciones.
- (iv) Si  $\text{rank}(A) < \text{rank}[A|b]$ , el sistema  $Ax = b$  es inconsistente.

**Corolario 2.10.1.** *El sistema homogéneo  $Ax = 0$ , donde  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  y  $m < n$ , tiene infinitas soluciones por tener más incógnitas que ecuaciones.*

Algunas veces es necesario realizar algunos intercambios de fila antes de proceder con la factorización  $LU$  de una matriz. Dado que dicha factorización se basa en la eliminación gaussiana y esta necesita de la existencia de los pivotes, es necesario que las filas nulas se acomoden en las últimas filas de la matriz. Más precisamente, a veces el proceso de eliminación se ve obstaculizado porque en la posición donde necesitamos un pivote se encuentra un cero; si al menos una componente en el resto de la columna es diferente de cero, entonces el problema se resuelve intercambiando dos filas (la que contiene al cero y la que contiene una componente diferente de cero). Esto nos permite continuar con el proceso de eliminación sobre la columna correspondiente. No obstante, si las componentes de la columna son todas iguales a cero, entonces el proceso de eliminación en tal columna está completo.

**Definición 2.21** (Matriz de permutación). Una **matriz de permutación** es un producto finito de matrices elementales del tipo  $P_{rs}$ .

Si no logramos realizar la descomposición  $LU$  de una matriz  $A$ , es posible que se necesite intercambiar (permutar) algunas de sus filas. La idea que nos ayuda a resolver este problema es crear una matriz de permutación  $P$  que realice todos los cambios necesarios primero, lo que resulta en la matriz  $PA$ . Además  $PA$  ya no necesita intercambios de fila adicionales por lo que se puede llevar a una forma escalonada sin problema, y por tanto podemos descomponer a  $PA$  como el producto  $LU$ , es decir

$$PA = LU$$

o, análogamente, podemos descomponer a  $A$  como  $P^{-1}LU$ . Notemos que la matriz  $P$  es una matriz invertible por tratarse de un producto de matrices elementales (del tipo  $P_{rs}$ ). Por esto, los sistemas  $Ax = b$  y  $PAx = Pb$  tienen el mismo conjunto de soluciones. Como  $PA = LU$ , podemos reescribir  $LUx = Pb$  lo cual ya sabemos resolver: (i) sustituyendo  $y = Ux$ , (ii) resolver para  $y$  en  $Ly = Pb$  y (iii) resolver para  $x$  en  $Ux = y$  una vez encontrado  $y$ . De lo anterior, se obtiene el resultado siguiente.

**Teorema 2.11.** A toda matriz  $A$  de orden  $m \times n$  se le puede asociar una matriz de permutación  $P$  de orden  $m \times m$ , una matriz triangular inferior  $L$  de orden  $m \times n$  y una matriz escalonada  $U$  de orden  $m \times n$ , tales que  $PA = LU$ . Además,

- (i) si no hay necesidad de intercambios de filas sobre  $A$ , entonces  $P = I_m$ ;
- (ii) si  $U$  se obtiene realizando únicamente intercambios de las filas de  $A$ , entonces  $L = I_m$ .

**Nota 2.13.** Dado que una matriz se puede llevar a varias formas escalonadas por filas, la factorización  $PA = LU$  de una matriz  $A$  no es única. Es decir, las matrices  $P$ ,  $L$  y  $U$  del teorema anterior no son únicas.

**Ejemplos 2.9.**

1. Supongamos que queremos realizar la factorización  $PLU$  de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -10 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Llevamos  $A$  a una forma *pseudoescalonada* (con pivotes no necesariamente iguales a 1) por filas

$$A \xrightarrow{P_{14}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -10 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} E_{21}(-2) \\ E_{31}(1) \end{matrix}]{\begin{matrix} E_{21}(-2) \\ E_{31}(1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{P_{23}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{34}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz no es la matriz  $U$  que estamos buscando ya que se expresa como el producto  $P_{34}P_{23}E_{21}(-2)E_{31}(1)P_{14}A$ , donde existen permutaciones de filas. Este paso sólo nos indicó los intercambios de filas que debemos realizar sobre  $A$ , los cuales son necesarios antes de llevar a  $PA$  a forma escalonada. En otras palabras, hemos hallado  $P$ , la cual es el producto  $P_{34}P_{23}P_{14}$  dado por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P. \end{aligned}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} PA &= P_{34}P_{23}P_{14} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -10 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \end{bmatrix} = P_{34}P_{23} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & -10 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \end{bmatrix} \\ &= P_{34} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -10 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -10 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esta sí es la matriz que debemos llevar a forma escalonada:

$$PA \xrightarrow[E_{41}(-2)]{E_{21}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} = U.$$

Nótese que  $E_{41}(-2)E_{21}(1)PA = U$ , lo que nos indica que  $L^{-1} = E_{41}(-2)E_{21}(1)$ , de donde  $L = (E_{41}(-2)E_{21}(1))^{-1} = E_{21}(-1)E_{41}(2)$ , y por tanto la descomposición  $LU$  de  $PA$  es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Así que la factorización  $PLU$  de  $A$  es

$$P^{-1}LU = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Recuerde que la inversa de una matriz de permutación es su transpuesta.

2. Para resolver el sistema  $Ax = b$  conociendo que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1}LU, \quad y \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

basta escribir  $PAx = Pb$  y sustituir  $PA$  por  $LU$ , i.e.  $LUx = Pb$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Recuerde que la inversa de una matriz elemental del tipo  $P_{rs}$  es ella misma. Hacemos el cambio  $y = Ux$  y resolvemos el sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 17 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

cuya solución es

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 2, \quad y_3 = \frac{12}{17}.$$

Ahora resolvemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{12}{17} \end{bmatrix}$$

y encontramos, por sustitución regresiva, que su solución es

$$x_1 = \frac{21}{17}, \quad x_2 = \frac{-14}{17}, \quad x_3 = \frac{12}{17}.$$

□

### 2.3.1. Problemas resueltos

**Problema 2.13.** Sea  $P_{12}A = LU$ . Describa los pasos necesarios para transformar un sistema  $Ax = b$  en un sistema reducido equivalente  $Ux = c$ . (No necesita encontrar la matriz  $A$ .)

**Solución.**

- (i) Multiplicar por  $P_{12}$  desde la izquierda:  $P_{12}Ax = P_{12}b$ .
- (ii) Sustituir  $P_{12}A$  por  $LU$ , i.e.  $LUx = P_{12}b$ .
- (iii) Resolver el sistema triangular  $Lc = P_{12}b$  para  $c$ .
- (iv) Escribir  $Ux = c$ .

□

**Problema 2.14.** Sean

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad c = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

tales que  $P_{23}A = LU$ .

- Describa los pasos del proceso de eliminación sobre el sistema  $Ax = b$  para obtener el sistema reducido  $Ux = c$ .
- ¿Cuál es el vector  $b$  del sistema  $Ax = b$  equivalente a  $Ux = c$ ?
- Resolver el sistema  $Ax = b'$  con  $b' = (2, -1, 5)$ .

**Solución.**

- Multiplicar por  $P_{12}$  desde la izquierda:  $P_{12}Ax = P_{12}b$ .
  - Sustituir  $P_{12}A$  por  $LU$ , i.e.  $LUx = P_{12}b$ .
  - Resolver el sistema triangular  $Lc = P_{12}b$  para  $c$ .
  - Escribir  $Ux = c$ .
- Dado que  $Lc = P_{23}b$ , se tiene que  $b = P_{23}^{-1}Lc = P_{23}Lc$ , i.e.

$$b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

- Primero hallamos  $c$  al resolver el sistema  $Lc = P_{23}b'$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ -3c_1 + c_2 = 5 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 = -1 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 5 + 3c_1 = 11 \\ c_3 = c_2 - 2c_1 - 1 = 6. \end{cases}$$

Encontramos que  $c = (2, 11, 6)$ . Ahora resolvemos  $Ux = c$ :

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 11 \\ 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ -x_2 + 3x_3 = 11 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(2 + x_2 - 2x_3) = -\frac{6}{5} \\ x_2 = 3x_3 - 11 = -2 \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

Por lo tanto,  $x = \left(-\frac{6}{5}, -2, 3\right)$  es la solución del sistema  $Ax = b'$ . Note que no hizo falta conocer explícitamente a la matriz  $A$ .

□

**Problema 2.15.** Para cada una de las matrices  $A$  y vectores  $b$  dados a continuación, determine si el sistema  $Ax = b$  es soluble y en tal caso encuentre su solución.

$$(a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & -2 \\ -6 & 4 & 10 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 20 \\ -2 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$(d) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 19 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$(e) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -7 & -3 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & -13 & -9 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(f) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

**Solución.** Procedemos con el proceso de eliminación gaussiana sobre la matriz  $[A|b]$  en cada caso. Véase el Teorema 2.10.

(a) Se tiene que

$$\begin{aligned} [A|b] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{31}(3)]{E_{21}(4)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & -14 & -14 & -42 \\ 0 & -13 & -8 & -19 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{32}(13/14)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & -14 & -14 & -42 \\ 0 & 0 & 5 & 20 \end{array} \right] \xrightarrow[M_3(1/5)]{M_2(-1/14)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right], \end{aligned}$$

Como  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = 3$ , el sistema  $Ax = b$  tiene solución única. Entonces

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 10 \\ x_2 + x_3 = 3 \\ x_3 = 4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 10 - 4x_2 - 3x_3 = 2 \\ x_2 = 3 - x_3 = -1 \\ x_3 = 4. \end{cases}$$

Por tanto,  $x = (2, -1, 4)$  es la solución del sistema  $Ax = b$ .

(b) Procedemos de manera análoga.

$$[A|b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & 20 \\ 4 & 2 & -2 & -2 \\ -6 & 4 & 10 & 30 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{c} E_{21}(2) \\ E_{31}(-3) \end{array}]{\begin{array}{c} E_{21}(2) \\ E_{31}(-3) \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & 20 \\ 0 & -14 & -14 & -42 \\ 0 & 28 & 28 & 90 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 6 & 20 \\ 0 & -14 & -14 & -42 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array} \right]$$

Luego el sistema  $Ax = b$  no es soluble, pues  $2 = \text{rank}(A) < \text{rank}[A|b] = 3$ .

(c) Procedemos de manera análoga.

$$[A|b] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{c} M_2(-1)M_1(1/2) \\ M_3(1/3) \end{array}]{\begin{array}{c} M_2(-1)M_1(1/2) \\ M_3(1/3) \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right],$$

Como  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = 3$ , el sistema  $Ax = b$  tiene solución única. Tenemos

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_2 - 2x_3 = -2 \\ x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - 3x_3 - 1) = -\frac{5}{2} \\ x_2 = 2x_3 - 2 = 2 \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Por tanto  $x = \left(\frac{-5}{2}, 2, 2\right)$  es la solución del sistema  $Ax = b$ .

(d) Procedemos de manera análoga.

$$[A|b] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 6 & 2 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & -1 & -5 & 19 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{c} E_{21}(-3) \\ E_{31}(-1) \end{array}]{\begin{array}{c} E_{21}(-3) \\ E_{31}(-1) \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 20 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow[\begin{array}{c} M_3(-1/5)M_2(1/5) \\ P_{24} \end{array}]{\begin{array}{c} M_3(-1/5)M_2(1/5) \\ P_{24} \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{34}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{array} \right],$$

Como  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = 4$ , el sistema  $Ax = b$  es soluble con solución única. Tenemos

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 + 5x_4 = -1 \\ x_3 + x_4 = 0 \\ x_4 = -4 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 2x_2 - x_3 = 43 \\ x_2 = x_3 - 5x_4 - 1 = 23 \\ x_3 = 4 \\ x_4 = -4. \end{cases}$$

Por tanto  $x = (43, 23, 4, -4)$  es la solución del sistema  $Ax = b$ .

(e) Procedemos de manera análoga.

$$[A|b] = \left[ \begin{array}{cccc|c} 4 & -7 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -13 & -9 & -3 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{12}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & -13 & -9 & -3 & 0 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c} E_{21}(4) \\ E_{31}(2) \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -19 & -15 & -5 & 0 \\ 0 & -19 & -15 & -5 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{c} M_2(-1/19) \\ E_{32}(1) \end{array}]{\begin{array}{c} M_2(-1/19) \\ E_{32}(1) \end{array}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 15/19 & 5/19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right],$$

Como  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = 2 < 3$ , el sistema  $Ax = b$  es soluble y posee infinitas soluciones. Continuamos el proceso de reducción por filas hasta encontrar la forma escalonada reducida de  $[A|b]$ :

$$\left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 15/19 & 5/19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{12}(3)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 12/19 & 4/19 & 0 \\ 0 & 1 & 15/19 & 5/19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Tenemos

$$\begin{cases} x_1 + \frac{12}{19}x_3 + \frac{4}{19}x_4 = 0 \\ x_2 + \frac{15}{19}x_3 + \frac{5}{19}x_4 = 0 \\ x_3 = r \\ x_4 = s \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{12}{19}r - \frac{4}{19}s \\ x_2 = -\frac{15}{19}r - \frac{5}{19}s \\ x_3 = r \\ x_4 = s \end{cases} \quad \text{con } r, s \in \mathbb{R}.$$

Así, los vectores solución son de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{12}{19}r - \frac{4}{19}s \\ -\frac{15}{19}r - \frac{5}{19}s \\ r \\ s \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -\frac{12}{19} \\ -\frac{15}{19} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\frac{4}{19} \\ -\frac{5}{19} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O, en otras palabras, el conjunto solución del sistema  $Ax = b$  es

$$\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -\frac{12}{19} \\ -\frac{15}{19} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -\frac{4}{19} \\ -\frac{5}{19} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ con } r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(f) Procedemos de manera análoga.

$$\begin{aligned} [A|b] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -1 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{c} E_{31}(2)E_{21}(2) \\ E_{51}(4)E_{41}(3) \end{array}]{\begin{array}{c} E_{31}(2)E_{21}(2) \\ E_{51}(4)E_{41}(3) \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -6 & -3 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \\ 0 & -9 & -9 & -9 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\begin{array}{c} M_3(-1/3)M_2(-1/3) \\ M_5(-1/9)M_4(-1/3) \end{array}]{\begin{array}{c} M_3(-1/3)M_2(-1/3) \\ M_5(-1/9)M_4(-1/3) \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{c} E_{32}(2) \\ E_{52}(1)E_{42}(1) \end{array}]{\begin{array}{c} E_{32}(2) \\ E_{52}(1)E_{42}(1) \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{c} M_3(-1/3) \\ M_5(-1/3) \end{array}]{\begin{array}{c} E_{53}(1/3) \\ M_3(-1/3) \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Luego el sistema  $Ax = b$  tiene solución única, pues satisface que  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = 3$ . Tenemos

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_2 = 1 - 2x_3 = 1 \\ x_3 = 0. \end{cases}$$

Por tanto,  $x = (0, 1, 0)$  es la única solución del sistema  $Ax = b$ .

□

**Problema 2.16.** Halle una matriz de permutación  $P$ , una matriz triangular inferior  $L$ , y una matriz triangular superior  $U$  tales que  $PA = LU$ . Utilice esto para resolver el sistema  $Ax = b$  siendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

**Solución.** Primero realizamos las permutaciones necesarias sobre  $A$ :

$$P_{23}P_{13}A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

Transformamos a esta matriz a una matriz triangular superior mediante operaciones elementales de fila:

$$E_{32}(-4)P_{23}P_{13}A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U.$$

Tomamos  $L = (E_{32}(-4))^{-1}$  y  $P = P_{23}P_{13}$ , i.e.

$$L = E_{32}(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ahora podemos escribir  $PA = LU$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

El sistema  $Ax = b$  equivale a  $PAx = Pb$ , pero, por el resultado anterior, este sistema es equivalente a

$$LUx = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = c.$$

Si tomamos  $y = (y_1, y_2, y_3) = Ux$ , entonces tenemos que resolver  $Ly = c$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

cuya solución es

$$y_1 = -2, \quad y_2 = 1, \quad y_3 = 4.$$

Finalmente, resta resolver  $Ux = y$ :

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(-2 - x_2 - 2x_3) = -\frac{21}{25} \\ x_2 = 2x_3 - 1 = \frac{3}{5} \\ x_3 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -21/5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

□

**Problema 2.17.** Resolver el sistema  $Ax = b$  del Problema 2.16 reduciendo por filas la matriz aumentada  $[A|b]$ .

**Solución.** Se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right] &\xrightarrow{P_{13}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{\begin{array}{l} M_1(1/5) \\ P_{23} \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1/5 & 2/5 & -2/5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{32}(-4)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1/5 & 2/5 & -2/5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array} \right] &\xrightarrow{\begin{array}{l} M_3(1/5) \\ M_2(-1) \end{array}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1/5 & 2/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4/5 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Resolviendo por sustitución regresiva el sistema

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_3 = -\frac{2}{5} \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_3 = \frac{4}{5} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{5}(-x_2 - 2x_3 - 2) \\ x_2 = 2x_3 - 1 \\ x_3 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -21/5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

□

**Problema 2.18.** Encuentre una matriz de permutación  $P$ , y matrices triangulares inferior y superior  $L$  y  $U$  tales que  $PA = LU$  y úselas para resolver el sistema  $Ax = b$ , si se tiene

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

**Solución.** Usemos operaciones elementales de fila para transformar a la matriz  $A$  en una matriz triangular superior  $U$ .

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{P_{12}} \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} &\xrightarrow{E_{31}(4/5)} \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -19/5 & 14/5 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{E_{32}(19/10)} \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -29/10 \end{bmatrix} = U \end{aligned}$$

Sean  $L = (E_{31}(4/5)E_{32}(19/10))^{-1} = E_{32}(-19/10)E_{31}(-4/5)$  y  $P = P_{12}$  tales que  $PA = LU$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 19/10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -29/10 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos a  $Ax = b$  por  $P$  desde la izquierda para obtener  $PAx = Pb$ , y luego sustituimos  $PA$  por  $LU$ , i.e.  $LUx = Pb$ . Tomamos  $y = Ux$  de tal manera que  $Ly = Pb$  y resolvemos este sistema triangular para  $y$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 19/10 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} y_1 = -1 \\ y_2 = 3 \\ y_3 = 2 - \frac{4}{5}y_1 - \frac{19}{10}y_2 = -\frac{29}{10}. \end{cases}$$

Ahora que conocemos  $y$ , resolvemos el sistema  $Ux = y$ :

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -29/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -29/10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - x_3 = -1 \\ -2x_2 + 3x_3 = 3 \\ -\frac{29}{10}x_3 = -\frac{29}{10}. \end{cases}$$

Por sustitución regresiva encontramos que la solución de este sistema, y por tanto de  $Ax = b$ , es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

□

## 2.4. Matriz inversa

**Definición 2.22** (Matriz inversa). Dada una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$ , decimos que  $A$  es **invertible** (o regular) si existe una matriz  $B$  de orden  $n$  tal que  $AB = BA = I_n$ . Denotamos  $B = A^{-1}$  y diremos que  $B$  es la **inversa** de  $A$ . Si  $B$  no existe, se dirá que  $A$  es no invertible (o singular).

**Nota 2.14.** Nótese que la inversa de una matriz sólo está definida para matrices cuadradas y no siempre existe. Además,  $A^{-1}$  no debe interpretarse como  $\frac{1}{A}$ , porque esto no está definido.

**Teorema 2.12.** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres matrices cuadradas de orden  $n$  y  $\lambda \neq 0$  un escalar.

- (i) Si  $A$  es una matriz invertible, entonces su inversa es única.
- (ii) Si  $A$  y  $B$  son invertibles, entonces  $AB$  es invertible (siempre que  $AB$  exista) y su inversa es  $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ .
- (iii) Si  $A$  es invertible, entonces  $\lambda A$  es invertible y  $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$ .

**Teorema 2.13.** La matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es invertible si y sólo si  $ad - bc \neq 0$ . Si se cumple dicha condición<sup>2</sup>, la inversa de  $A$  está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

<sup>2</sup>Tal condición corresponde a que el determinante de  $A$  sea diferente de cero:  $\det(A) = ad - bc \neq 0$

**Ejemplos 2.10.**

1. La inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 3 & -7 \end{bmatrix},$$

está dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{-42 - 15} \begin{bmatrix} -7 & -5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{57} \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/57 & 5/57 \\ 3/57 & -6/57 \end{bmatrix}.$$

2. La matriz  $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  no tiene inversa ya que su determinante es cero:  $(-2)(0) - (1)(0) = 0$ .

3. La inversa de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{0 - 1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es decir, su inversa es ella misma.

□

**Nota 2.15.** El producto de cualquier número de matrices invertibles es una matriz invertible y la inversa del producto es el producto de las inversas en el orden inverso. Si el producto de matrices es singular, entonces al menos una de aquellas matrices debe ser singular (¿por qué?).

**Teorema 2.14** (Tomado de Grossman y Flores (2012)). *Si  $A$  es una matriz cuadrada de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

- (i)  $A$  es invertible.
- (ii) El sistema homogéneo  $Ax = 0$  tiene solución única: la trivial,  $x = 0$ .
- (iii) El sistema  $Ax = b$  tiene solución única: el vector  $x = A^{-1}b$ .
- (iv)  $A$  es equivalente por filas a la matriz identidad de orden  $n$ .
- (v)  $A$  puede escribirse como el producto de matrices elementales.
- (vi) La forma escalonada de  $A$  por filas tiene  $n$  pivotes.

Para encontrar la inversa de una matriz invertible  $A$  de orden  $n$  se debe llevar  $A$  a su forma escalonada reducida por filas, es decir, realizar una secuencia de operaciones elementales de fila que conviertan a  $A$  en la matriz identidad de orden  $n$ . La inversa de  $A$  se halla al realizar la misma secuencia de operaciones elementales de fila sobre  $I_n$ .

**Ejemplo 2.11.** Para hallar la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

tomamos la matriz aumentada  $[A|I_3]$  dada por

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

y realizamos sobre ella operaciones elementales de fila para convertir el lado izquierdo en una matriz escalonada reducida. Esto convertirá el lado derecho en la matriz  $A^{-1}$ .

$$\begin{aligned} [A|I_3] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{E_{21}(2) \\ E_{31}(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{32}(-2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{13}(-3)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & 2 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{\substack{E_{12}(2) \\ M_3(-1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -2 & -1 \end{array} \right] = [I_3|A^{-1}]. \end{aligned}$$

Concluimos que la matriz inversa de  $A$  es

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

□

El ejemplo anterior muestra el proceso que debe llevarse a cabo para hallar la inversa de una matriz  $A$  de orden  $n$ . De hecho, se realizó eliminación de Gauss-Jordan para lograrlo. Sin embargo, no siempre sabremos de antemano si dicha matriz posee inversa. Si  $A$  no posee inversa, entonces una fila de ceros aparecerá en el lado izquierdo. En tal caso, diremos que  $A$  no es invertible.

### 2.4.1. Problemas resueltos

**Problema 2.19.** Para cada una de las siguientes afirmaciones diga si es verdadera o falsa. Si es verdadera demuéstrela y si es falsa dé un contraejemplo.

- Si  $A$  y  $B$  son matrices invertibles de orden  $n$ , entonces  $A+B$  es una matriz invertible.
- Si  $A$  es invertible, entonces  $A^2$  es invertible.
- Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son invertibles, entonces  $A^{-1}BC^{-1}$  es invertible.
- Si  $AB = AC$ , entonces  $B = C$ .

(e) Si  $A$  es invertible y  $AB = AC$ , entonces  $B = C$ .

**Solución.**

(a) Falso. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Claramente estas matrices son invertibles, por ser matrices elementales. Sin embargo,

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

no es invertible.

(b) Verdadero. Si  $A$  es invertible, entonces  $AA = A^2$  es invertible por tratarse del producto de matrices invertibles.

(c) Verdadero. Si  $A$ ,  $B$  y  $C$  son invertibles, entonces sus respectivas inversas son invertibles; es decir,  $A^{-1}$ ,  $B^{-1}$  y  $C^{-1}$  son invertibles. Dado que  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y sus inversas son invertibles, entonces el producto de cualesquiera de ellas es invertible. Particularmente,  $A^{-1}BC^{-1}$  es el producto de matrices invertibles y por tanto tiene inversa.

(d) Falso. Sean

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad AC = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

de modo que  $AB = AC$  pero  $B \neq C$ .

(e) Verdadero. Si  $A$  es invertible y  $AB = AC$ , entonces existe  $A^{-1}$  tal que

$$\begin{aligned} A^{-1}(AB) &= A^{-1}(AC) \iff (A^{-1}A)B = (A^{-1}A)C \\ &\iff IB = IC \\ &\iff B = C, \end{aligned}$$

donde  $I$  es la matriz identidad de orden  $n$ .

□

**Problema 2.20.** Diga si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Si alguna de ellas es falsa, dé un contraejemplo.

(a) Toda matriz triangular superior es invertible.

(b) Cada matriz elemental es invertible.

- (c) Si la matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es singular, entonces el sistema lineal  $Ax = b$ , con  $b \in \mathbb{R}^m$ , tiene infinitas soluciones.
- (d) Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es singular, entonces la matriz obtenida al permutar dos filas de  $A$  es invertible.
- (e) Sean  $A$  y  $B$  dos matrices del mismo tamaño. Si alguna de ellas es singular, entonces el producto  $AB$  es singular.

**Solución.**

- (a) Falso. Es claro que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es matriz triangular superior, pero no es invertible porque no es equivalente por filas a la matriz identidad de orden 3.

- (b) Verdadero, pues cada matriz elemental resulta de realizar una sola operación elemental de fila sobre la matriz identidad.
- (c) Falso. La matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es singular, pero el sistema  $Ax = b$  no tiene infinitas soluciones para cualquier vector  $b \in \mathbb{R}^3$ . Basta ver que, con  $b = (0, 0, 1)$ , el sistema  $Ax = b$  no tiene solución, pues  $\text{rank}(A) \neq \text{rank}[A|b]$ . Particularmente, dado cualquier vector  $(b_1, b_2, b_3)$  tal que  $b_3 \neq 0$ , el sistema  $Ax = b$  es inconsistente.

- (d) Falso. Intercambiar dos filas no altera la invertibilidad de una matriz.
- (e) Verdadero.

**Problema 2.21.** Encuentre la inversa de la matriz dada.

$$(a) \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

**Solución.** Use el Teorema 2.13 en cada caso.

- (a) El determinante de esta matriz es

$$\begin{aligned} \det(A) &= \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2 - \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})^2 \\ &= \frac{1}{4}[e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x} - (e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x})] \\ &= 1. \end{aligned}$$

Luego, su inversa es

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ -\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}.$$

(b) La inversa de esta matriz es

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Observe que su inversa es su transpuesta.

**Problema 2.22.** Use la información dada para hallar  $A$ .

(a)  $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

(c)  $(I + 2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

(b)  $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

(d)  $(I^3 - \lambda A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$

**Solución.** Use el Teorema 2.12 junto con el Teorema 2.4. La inversa de la inversa de una matriz es ella misma.

(a) La inversa de  $(7A)^{-1}$  es

$$7A = \frac{1}{6-7} \begin{bmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -3 \end{bmatrix},$$

luego  $A = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ .

(b) La inversa de  $(5A^T)^{-1}$  es

$$5A^T = \frac{1}{-6+5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -3 \end{bmatrix}$$

y por tanto  $A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ .

(c) La inversa de  $(I + 2A)^{-1}$  es

$$I + 2A = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tomando  $I = \frac{1}{13}(13I)$  se sigue que

$$\begin{aligned} 2A &= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -18 & 2 \\ 4 & -12 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

y así  $A = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} -9 & 1 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ .

(d) Cualquier potencia de la matriz identidad es la matriz identidad. La inversa de  $(I^3 - \lambda A^T)^{-1}$  es

$$I - \lambda A^T = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tome un múltiplo escalar de la matriz identidad y despeje

$$\begin{aligned}\lambda A^T &= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} + \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 18 & -2 \\ -4 & 12 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Finalmente,  $A = \frac{1}{13\lambda} \begin{bmatrix} 18 & -4 \\ -2 & 12 \end{bmatrix}$ .

**Problema 2.23.** Halle la inversa de la matriz dada.

$$\begin{aligned}\text{(a)} \quad A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \text{(c)} \quad C &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \text{(b)} \quad B &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{(d)} \quad D &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

**Solución.**

- (a) Tomamos  $[A|I_3]$  y realizamos sobre ella operaciones elementales de fila hasta transformar a la matriz  $A$  en la identidad.

$$\begin{aligned}& \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{31}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{32}(1)} \\ & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} E_{23}(-1/2)E_{13}(-1/2) \\ M_3(-1/2) \end{smallmatrix}]{\phantom{E_{32}(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right]\end{aligned}$$

Concluimos que  $\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$  es la inversa de  $A$ .

- (b) Note que  $B = P_{23}A$ , siendo  $A$  la matriz del ítem anterior. Eso nos permite usar el Teorema 2.12 y obtener

$$\begin{aligned}B^{-1} &= A^{-1}P_{32} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

- (c) Tomamos la matriz aumentada  $[C|I_3]$  y realizamos sobre ella operaciones elementales de fila hasta transformar  $C$  en la identidad.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} E_{12}(-\tan \alpha) \\ E_{21}(\tan \alpha) \end{smallmatrix}]{\phantom{E_{32}(1)}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \sec \alpha & 0 & 0 & 1 & \tan \alpha & 0 \\ 0 & \sec \alpha & 0 & -\tan \alpha & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} M_1(\cos \alpha) \\ M_2(\cos \alpha) \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Por tanto, la inversa de  $C$  es su transpuesta:

$$C^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(d) Del ítem anterior tenemos  $C^{-1} = C^T = D$  por lo que

$$D^{-1} = (C^{-1})^{-1} = C = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

**Problema 2.24.** Resuelva la ecuación matricial para  $X$  en cada caso.

(a)  $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix}$

(b)  $X \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} X - X \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

**Solución.**

(a) Multiplique a la igualdad por la izquierda por

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Recuerde que multiplicar una matriz por su inversa produce la identidad. Se tiene

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{31}^{-1/2}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{32}(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -9/2 & 1/2 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{13}(-2/9)]{E_{23}(2/9)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -2 & 0 & 0 & 10/9 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & -1 & 0 & -1/9 & 7/9 & -2/9 \\ 0 & 0 & -9/2 & 1/2 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\xrightarrow[M_3(-2/9)M_2(-1)]{M_1(-1/2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/9 & -1/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 1/9 & -7/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & -2/9 & -2/9 \end{array} \right],$$

luego

$$\begin{aligned} X &= -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -1 & 7 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 7 & 9 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 20+6+1 & 15+7+3 & 10+8+7 & 5+9+9 \\ -4+42-2 & -3+49-6 & -2+56-14 & -1+63-18 \\ 4+12+2 & 3+14+6 & 2+16+14 & 1+18+18 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 27 & 25 & 25 & 23 \\ 36 & 40 & 40 & 44 \\ 18 & 23 & 32 & 37 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b) Note que

$$X \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$$

equivale a  $XI = X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$ . Calcule aquella matriz inversa.

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-3)]{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow[M_1(-1)E_{23}(1/2)]{E_{32}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & | & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[M_2(2)]{E_{13}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned} X &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1-2 & -1+4 & 1-2 \\ -3-1+10 & 3+2-5 & -3-1+5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(c) Sea  $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Se tiene

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a

$$\begin{bmatrix} 2a - 2b & -4a + 3b \\ c - a - 2d & 2d - b - 4c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dos matrices son iguales si son del mismo tamaño y sus correspondientes entradas son iguales. Obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2a - 2b = 0 \\ -4a + 3b = 0 \\ c - a - 2d = 0 \\ 2d - b - 4c = 1 \end{cases}$$

Es fácil ver que las dos primeras ecuaciones se satisfacen si y sólo si  $a = b = 0$ , luego  $c - a - 2d = 0$  y  $2d - b - 4c = 1$  equivalen a  $c - 2d = 0$  y  $2d - 4c = 1$ . Estas dos ecuaciones se satisfacen para  $c = -1/3$  y  $d = -1/6$ . Por tanto

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$$

(d) Multiplique a la igualdad desde la izquierda por  $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}$  para obtener

$$X = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

La inversa que aparece en este producto se puede hallar como sigue:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow[M_3(-1)E_{21}(2)]{E_{12}(-1/3)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 5/3 & 0 & 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[E_{32}(2/5)]{M_2(1/5)M_1(3/5)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4/5 & 2/5 & -1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6+4 & -3 & 15-3 & 21 & 24+1 \\ -4+4 & 2 & -10-3 & -14 & -16+1 \\ -8+8-15 & 4-25 & -20-6+35 & -28-10 & -32+2-5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 10 & -3 & 12 & 21 & 25 \\ 0 & 2 & -13 & -14 & -15 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Capítulo 3:

▶ **Determinantes**

## Capítulo 3:

# ► Determinantes

El determinante puede considerarse una función. Así como existen funciones que asignan un valor real a una variable real, el determinante es una función que le asigna un número (que puede ser real o complejo, dependiendo de si la matriz es de entrada real o compleja) a una matriz cuadrada (Anton et al., 2019).

El determinante puede ser de ayuda para resolver sistemas de ecuaciones lineales (no tan grandes) y también para hallar la inversa de una matriz, como veremos en este capítulo. Más tarde veremos nos será de ayuda en el cálculo los *valores característicos* de una matriz. Sin embargo, entender lo que representa el determinante es más importante que saber calcularlo pues, como menciona Restrepo et al. (1993), “aunque los determinantes son importantes desde el punto de vista teórico, ... han perdido significancia desde el punto de vista computacional”.

**Definición 3.1** (Submatriz). Sea  $A$  una matriz de orden  $m \times n$ . Se denomina **submatriz** de  $A$  a cualquier matriz que resulta de eliminar un conjunto de sus filas o columnas.

**Ejemplo 3.1.** Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \pi & 0 & e^\pi \\ 7 & -1 & 5 & 3 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

Cada una de las matrices siguientes es una submatriz de  $A$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 7 & -1 & 5 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^\pi \\ 3 \\ 9 \end{bmatrix}, [7 \quad -1 \quad 5 \quad 3], \begin{bmatrix} 1 & \pi & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, [1].$$

¿Cuántas submatrices más puede hacer? □

**Definición 3.2** (Determinante de una matriz de orden  $n$ ). Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Sea  $A_{ij}$  la submatriz de  $A$  obtenida al eliminar su  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna. El **determinante de**  $A$ , denotado  $\det(A)$  o  $|A|$ , se define recursivamente como sigue:

- Si  $n = 1$ , entonces  $\det(A) = a_{11}$ .
- Si  $n \geq 2$ , entonces, dados  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , el determinante de  $A$  está dado por

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) && \text{[expansión por menores a lo largo de la fila } i\text{]} \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}) && \text{[expansión por menores a lo largo de la columna } j\text{]} \end{aligned}$$

La definición anterior define el determinante de una matriz en términos de una suma conocida como *expansión de Laplace por menores*. Un menor también es un determinante. Esto significa que, para calcular el determinante de una matriz de orden  $n$ , es necesario calcular el determinante de sus submatrices  $A_{ij}$  (de orden  $n-1$ ), y dado que estas también son matrices tendremos que repetir el proceso hasta llegar al caso base  $n=1$ . A esto se refiere la palabra *recursivamente* en la Definición 3.2. Damos la definición formal de menor a continuación.

**Definición 3.3** (Menor, Cofactor). *Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  con  $n \geq 2$ . El determinante de la submatriz que se obtiene al eliminar la fila  $i$  y la columna  $j$  de  $A$  se denomina **ij-ésimo menor de  $A$**  y se denota  $M_{ij}$ . El valor  $(-1)^{i+j}M_{ij}$  se denomina **ij-ésimo cofactor de  $A$**  y se denota  $C_{ij}$ .*

**Nota 3.1.** Obsérvese que  $(-1)^{i+j} = 1$  si  $i+j$  es par y  $(-1)^{i+j} = -1$  si  $i+j$  es impar. Así, cuando  $i+j$  es par, tenemos  $C_{ij} = M_{ij}$ , y cuando  $i+j$  es impar, tenemos  $C_{ij} = -M_{ij}$ . En algunos textos,  $M_{ij}$  se denomina *menor del elemento  $a_{ij}$*  y  $C_{ij}$  se denomina *cofactor del elemento  $a_{ij}$* . Recuerde: determinante, menor y cofactor son números reales (o complejos), no matrices. Además, no está definido el determinante de matrices que no son cuadradas.

Es posible definir el determinante de una matriz mediante una suma denominada *expansión por cofactores*. Por la Definición 3.3,  $M_{ij} = \det(A_{ij})$  y  $C_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$ . Así que,

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} \det(A_{ik}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{ik} C_{ik},$$

y

$$\det(A) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} \det(A_{kj}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{kj} M_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{kj} C_{kj}.$$

La suma

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} C_{ik} = a_{i1} C_{i1} + a_{i2} C_{i2} + \cdots + a_{in} C_{in}$$

se conoce como la expansión por cofactores a lo largo de la  $i$ -ésima fila de  $A$ , mientras que

$$\sum_{k=1}^n a_{kj} C_{kj} = a_{1j} C_{1j} + a_{2j} C_{2j} + \cdots + a_{nj} C_{nj}$$

es la expansión por cofactores a lo largo de su  $j$ -ésima columna. Independientemente de que expresión se escoja para calcular el determinante, el valor obtenido es el mismo. Es decir, podemos *desarrollar* el determinante de una matriz escogiendo cualquiera de sus filas o columnas, como muestra el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.** *Si  $A$  es una matriz de orden  $n$ , entonces, independientemente de qué fila o columna de  $A$  se elija, el número (el determinante) obtenido al multiplicar las entradas en esa fila o columna por los cofactores correspondientes y sumar los productos resultantes, siempre es el mismo.*

**Teorema 3.2** (Determinante de una matriz de orden 3). *Sea una matriz*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

El determinante de  $A$  está dado por

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} \\ &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 3.2.** No existe una única forma de calcular el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 10 \\ -2 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

1. Podemos calcular  $\det(A)$  usando el Teorema 3.2 como sigue:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 5(24 - (-20)) + 0 \\ &= -220 \end{aligned}$$

Esta es la expansión del determinante de  $A$  por cofactores a lo largo de su primera fila.

2. Podemos escoger la fila o columna que contenga más ceros. (Esto es de ayuda para calcular determinantes de matrices cuadradas que son grandes.) Desarrollamos el determinante de  $A$  por los cofactores de la segunda columna así:

$$\begin{aligned} \det(A) &= -5 \begin{vmatrix} 4 & 10 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -5(24 - (-20)) + 0 + 0 \\ &= -220. \end{aligned}$$

□

**Teorema 3.3.** Sea  $A$  una matriz de orden  $n$ . Si  $A = [a_{ij}]$  es una matriz triangular (superior, inferior o diagonal), entonces  $\det(A)$  es el producto de las componentes de la diagonal principal. Esto es,  $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$ .



## 3.1. Propiedades de los determinantes

La definición recursiva de determinante que se dió al inicio de este capítulo no es útil desde el punto de vista computacional. La expansión del determinante, ya sea por menores o cofactores, requiere una gran cantidad de operaciones conforme aumenta el orden de la matriz en cuestión. Para hacerse una idea, dada una matriz de orden  $10 \times 10$ , la expansión por cofactores de su determinante involucra 3 628 799 sumas y 6 235 300 productos. Esto representa 9 864 099 operaciones de *punto flotante*. Aún así, cualquier computadora de hoy de un día es capaz de realizar este cálculo en una fracción de segundo. No obstante, si el orden de la matriz fuera  $25 \times 25$ , una computadora común tardaría cerca de 500 000 años para obtener su determinante. En esta sección se listan algunos de los resultados que hacen posible el calcular determinantes de una manera más eficiente, específicamente al reducir enormemente el número de operaciones requeridas y al simplificar los cálculos involucrados.

**Propiedad 1.** Si  $A$  es una matriz cuadrada con al menos una fila nula, entonces

$$\det(A) = 0.$$

**Propiedad 2.** Sean  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  y  $B$  la matriz que se obtiene al multiplicar una fila de  $A$  por un escalar  $\alpha \neq 0$ . El determinante de  $B$  es  $\alpha$  veces el determinante de  $A$ . Esto es,

$$\det(B) = \alpha \det(A).$$

**Propiedad 3.** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  tres matrices cuadradas idénticas excepto por la  $i$ -ésima fila. Si la  $i$ -ésima fila de  $C$  es la suma de las  $i$ -ésimas filas de  $A$  y  $B$ , entonces

$$\det(C) = \det(A) + \det(B).$$

**Propiedad 4.** Sea  $A$  una matriz cuadrada. Si se intercambian dos filas de  $A$ , entonces el determinante de la matriz resultante es igual a  $-\det(A)$ .

**Propiedad 5.** Sea  $A$  una matriz cuadrada. Si dos filas de  $A$  son iguales o una puede obtenerse como múltiplo escalar de otra, entonces  $\det(A) = 0$ .

**Propiedad 6.** Sea  $A$  una matriz cuadrada. La operación elemental de fila que consiste en sustraer de una fila de  $A$  un múltiplo escalar de otra no altera el valor del determinante de  $A$ .

**Nota 3.2.** La Propiedad 3 no debe confundirse con  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ , igualdad que generalmente es falsa.

Como consecuencia de la Propiedad 6, el determinante de toda matriz elemental del tipo  $E_{rs}(c)$  es igual a 1. Las propiedades 2, 4 y 6 nos proporcionan un método más cómodo en operaciones que el desarrollo por cofactores. Si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  invertible, entonces existe una matriz triangular superior  $U$ , obtenida al realizar sobre  $A$  operaciones elementales de fila del tipo  $E_{rs}(c)$  y  $P_{rs}$ . La matriz  $U$  tiene  $n$  pivotes que

corresponden a las componentes de su diagonal principal. Haciendo uso del Teorema 3.3, podemos afirmar que

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^k \det(U) \\ &= (-1)^k u_{11}u_{22}u_{33} \cdots u_{nn}.\end{aligned}$$

Esto significa que el determinante de  $A$  es igual al producto de los pivotes de  $U$  multiplicado por  $(-1)^k$ , siendo  $k$  el número de intercambios de filas.

Basados en las propiedades 1 a 6, se tiene los siguientes resultados.

**Teorema 3.4.** Sean matrices  $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$  y  $\alpha$  un escalar.

(i)  $A$  es invertible si y sólo si  $\det(A) \neq 0$ .

(ii) Si  $A$  es invertible, entonces

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

(iii) El determinante de  $\alpha A$  es

$$\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A).$$

(iv) El determinante de un producto es el producto de los determinantes:

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

(v) Una matriz y su transpuesta tienen el mismo determinante:

$$\det(A) = \det(A^T).$$

**Nota 3.3.** Como consecuencia del Teorema 3.4 (v), se duplica la lista de propiedades de los determinantes ya que cada propiedad aplicable a las filas de una matriz es aplicable a sus columnas.



## 3.2. Aplicaciones de los determinantes

### En geometría analítica

**Teorema 3.5** (Área de un triángulo en el plano  $xy$ ). El área de un triángulo con vértices  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$  es

$$\frac{k}{2} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

donde  $k$  es igual a  $-1$  si el determinante es negativo, y es igual a  $1$  si el determinante es positivo.

**Nota 3.4.** Si los tres puntos del Teorema 3.5 estuvieran en la misma línea, es decir si fueran colineales, entonces el determinante de la expresión (3.1) sería nulo ya que no habría ningún área encerrada por tales puntos. De esto se sigue el siguiente teorema.

**Teorema 3.6** (Puntos colineales en el plano  $xy$ ). *Tres puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y  $(x_3, y_3)$  son colineales si y sólo si*

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

El uso del teorema anterior puede extenderse. Si son dados dos puntos en el plano, se puede hallar la ecuación de la recta que pasa por aquellos dos puntos.

**Teorema 3.7** (Ecuación de una recta en el plano). *La ecuación de la recta que pasa por dos puntos distintos  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  en el plano  $xy$  está dada por*

$$\det \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

**Teorema 3.8** (Volumen de un tetraedro). *El volumen de un tetraedro con vértices  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  y  $(x_3, y_3, z_3)$  es*

$$\frac{k}{6} \det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix},$$

donde  $k$  es  $-1$  si el determinante es negativo y es  $1$  si el determinante es positivo.

**Teorema 3.9** (Puntos coplanares en el espacio). *Los puntos  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$ ,  $(x_3, y_3, z_3)$  y  $(x_4, y_4, z_4)$  son coplanares (están en el mismo plano) si y sólo si*

$$\det \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

**Teorema 3.10** (Ecuación de un plano en el espacio). *La ecuación del plano que pasa por los puntos  $(x_1, y_1, z_1)$ ,  $(x_2, y_2, z_2)$  y  $(x_3, y_3, z_3)$  es*

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

## En el cálculo de la inversa de una matriz

**Definición 3.4** (Matriz de cofactores, Matriz adjunta). *Sea  $A \in \mathbb{R}^n$  una matriz y  $C_{ij}$  el cofactor de la componente  $a_{ij}$ . La matriz*

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

es la **matriz de cofactores** de  $A$ . La transpuesta de esta matriz, i.e  $C^T$ , es la **matriz adjunta** de  $A$  y se denota por  $\text{adj}(A)$ .

**Teorema 3.11.** Para toda matriz cuadrada de orden  $n$  se tiene que  $A \operatorname{adj}(A) = \det(A)I_n$ .

**Teorema 3.12.** Si  $A$  es una matriz invertible, entonces  $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A)$ .

**Nota 3.5.** En general, el método que nos proporciona el Teorema 3.12 es muy costoso en cuanto al número de operaciones que requiere para hallar la inversa de una matriz (si es que ésta posee inversa).

### En la solución de sistemas de ecuaciones lineales

**Teorema 3.13** (Regla de Cramer). Sea una matriz cuadrada  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  y un vector  $b \in \mathbb{K}^n$ . Si el sistema  $Ax = b$  tiene solución única, entonces esta se expresa paramétricamente como

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\det(B_n)}{\det(A)}.$$

La matriz  $B_j$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , se obtiene al sustituir la  $j$ -ésima columna de  $A$  por el vector  $b$  de términos independientes.

**Nota 3.6.** En la práctica, el método basado en la eliminación gaussiana implica muchas menos operaciones que la regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales.



## 3.3. Problemas resueltos

**Problema 3.1.** Calcule, usando las propiedades de los determinantes, el determinante de cada una de las siguientes matrices y diga cuáles de ellas son invertibles:

(a)  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(b)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ .

**Solución.**

(a) Tenemos

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{31}(-2)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dado que se presenta una fila nula, concluimos que  $\det(A) = 0$ , y por lo tanto  $A$  es no invertible.

(b) La expansión de  $\det(A)$  por cofactores a lo largo de la primera columna es

$$2 \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2(-2 + 6) = 8,$$

por lo que  $A$  es invertible.

□

**Problema 3.2.** Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Si  $\det(A) = \frac{-2}{3}$ , calcule el determinante de cada una de las siguientes matrices.

$$(a) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{bmatrix}$$

**Solución.**

(a) Obsérvese que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix} = M_2(-2)M_3(-1)A,$$

luego

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix} = \det(M_2(-2)) \det(M_3(-1)) \det(A) = -\frac{4}{3}.$$

(b) Obsérvese que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} \\ a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ 3a_{12} & 3a_{22} & 3a_{32} \\ 3a_{13} & 3a_{23} & 3a_{33} \end{bmatrix} = M_2(3)M_3(3) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Recuerde que una matriz y su transpuesta tienen el mismo determinante. Luego, el determinante de esta matriz es  $\det(M_2(3)M_3(3)A^T) = -6$ .

□

**Problema 3.3.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{5 \times 5}$  tal que  $\det(A) = -\frac{1}{3}$ .(a) Calcule  $\det(-A)$ ,  $\det(A^T)$ ,  $\det\left(\frac{3}{2}A\right)$ ,  $\det(A^2)$ ,  $\det(P_{23}A^T)$ ,  $\det(M_2(7)A)$ ,  $\det(E_{32}(-2)A^2)$  y  $\det(P_{24}E_{41}(4)A)$ .(b) ¿Es  $A$  invertible? En caso afirmativo, calcule  $\det(A^{-1})$  y  $\det(A^{-3})$ . Aquí,  $A^{-3}$  denota  $A^{-1}A^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^3$ .**Solución.**

- (a) (i)  $\det(-A) = (-1)^3 \det(A) = -\det(A) = \frac{1}{3}$   
(ii)  $\det(A^T) = \det(A) = \frac{-1}{3}$   
(iii)  $\det\left(\frac{3}{2}A\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 \det(A) = -\frac{9}{8}$   
(iv)  $\det(A^2) = \det(A) \det(A) = \frac{1}{9}$

- (v)  $\det(P_{23}A^T) = -\det(A) = \frac{1}{3}$
- (vi)  $\det(M_2(7)A) = 7\det(A) = -\frac{7}{3}$
- (vii)  $\det(E_{32}(-2)A^2) = \det(A^2) = \frac{1}{9}$
- (viii)  $\det(P_{24}E_{41}(4)A) = \det(P_{24}A) = -\det(A) = \frac{1}{3}$ .

(b)  $A$  es invertible ya que su determinante es diferente de cero. Como el determinante de la inversa de una matriz es igual al inverso del determinante de la matriz, entonces

- $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1} = -3$
- $\det(A^{-3}) = (\det(A^{-1}))^3 = -27$ . □

**Problema 3.4.** El determinante de Vandermonde de orden 3 está dado por

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \end{vmatrix}.$$

Muestre que  $D_3 = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)$ .

**Solución.** Sea  $M$  tal que  $\det(M) = D_3$ . Realizamos operaciones elementales de fila sobre  $M$  para obtener una matriz triangular:

$$M \xrightarrow[\begin{matrix} E_{31}(a_1^2) \\ E_{21}(a_1) \end{matrix}]{\begin{matrix} E_{32}(a_2+a_1) \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1^2 & a_3^2 - a_1^2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ 0 & 0 & a_3^2 - a_1^2 - (a_3 - a_1)(a_2 + a_1) \end{bmatrix}.$$

Por el Teorema 3.3, se tiene que

$$\begin{aligned} D_3 &= (a_2 - a_1)(a_3^2 - a_1^2 - (a_3 - a_1)(a_2 + a_1)) \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 + a_1 - a_2 - a_1) \\ &= (a_2 - a_1)(a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \end{aligned}$$

Queda demostrado. □

**Problema 3.5.** Dar un contraejemplo para  $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .

**Solución.** Tenemos que

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1,$$

pero

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 + 0 = 0.$$

□

**Problema 3.6.**

- (a) ¿Para cuáles valores de  $\alpha$  la matriz  $\begin{bmatrix} \alpha & -3 \\ 4 & 1 - \alpha \end{bmatrix}$  no es invertible?.

- (b) ¿Para cuáles valores de  $\alpha$  la matriz  $\begin{bmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 - \alpha & \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{bmatrix}$  no es invertible?.

**Solución.**

- (a) Una matriz es no invertible si su determinante es 0. Planteamos

$$\begin{vmatrix} \alpha & -3 \\ 4 & 1 - \alpha \end{vmatrix} = 0 \implies \alpha - \alpha^2 + 12 = 0 \implies (\alpha - 4)(\alpha + 3) = 0.$$

Por tanto, tal matriz es no invertible si  $\alpha \in \{-3, 4\}$ .

- (b) Note que la tercera fila de esta matriz es una combinación lineal de la primera y la segunda: se obtiene al multiplicar por 2 la segunda y luego sumarle la primera. Por las propiedades de los determinantes, esta matriz tiene determinante 0. Esto es, tal matriz no es invertible independientemente del valor de  $\alpha$ , o sea  $\alpha$  puede ser cualquier escalar.

□

**Problema 3.7.** Use la regla de Cramer para resolver el sistema  $Ax = b$ , donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

**Solución.** Siguiendo nuestra notación tenemos que

$$x_1 = \frac{\det(B_1)}{\det(A)}, \quad x_2 = \frac{\det(B_2)}{\det(A)}, \quad x_3 = \frac{\det(B_3)}{\det(A)}.$$

Aquí,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 6 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad B_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & 3 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se tiene que  $\det(A) = 51$ ,  $\det(B_1) = \det(B_2) = 17$ , y  $\det(B_3) = 0$ . Luego, la solución del sistema está dada por

$$x_1 = \frac{17}{51} = \frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{17}{51} = \frac{1}{3}, \quad x_3 = \frac{0}{51} = 0.$$

□

**Capítulo 4:**

**▶ Espacios vectoriales**

## Capítulo 4:

# ► Espacios vectoriales

Nos gustaría empezar citando a Aranda (2016) en su introducción a este mismo tópico:

*Los espacios vectoriales son probablemente las estructuras matemáticas más comunes que podemos encontrar. Todos los fenómenos calificados como “lineales” en multitud de contextos están vinculados de algún modo a un espacio vectorial, lo que da una idea de su importancia. Por otra parte, son estructuras muy sencillas que entrañan una interesante diversidad de propiedades. . . (p. 135).*

En el Capítulo 1 se vio que una  $n$ -tupla ordenada de escalares es un vector que y el conjunto de todas esas  $n$ -tuplas es  $\mathbb{R}^n$ . Se dice que  $\mathbb{R}^n$  un espacio vectorial (sobre  $\mathbb{R}$ ) porque satisface las propiedades de suma de vectores y de multiplicación por escalar. Generalizaremos estas propiedades para cualquier conjunto en el que se puedan definir tales operaciones.

Existen muchos espacios vectoriales. De hecho, cualquier conjunto que satisfaga aquellas propiedades se considera un espacio vectorial. Los más comunes son los espacios vectoriales reales, i.e.  $\mathbb{R}^1$ ,  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$  etc., pero también existen espacios vectoriales complejos (cuyos escalares son números complejos,  $\mathbb{C}$ ), así como espacios vectoriales más abstractos (como el conjunto de funciones derivables). Al conjunto de escalares se le llama cuerpo o campo; por lo que  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  son campos, por ejemplo.



### 4.1. La estructura de espacio vectorial

**Definición 4.1** (Espacio vectorial). Sea  $V$  un conjunto no vacío de objetos y  $\mathbb{K}$  un campo. Si los siguientes axiomas se satisfacen para  $u, v, w \in V$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , entonces se dice que  $V$  es un **espacio vectorial sobre el campo  $\mathbb{K}$** .

- Operación Interna

(i)  $V$  es **cerrado bajo la suma**:  $u + v$  está en  $V$ .

(ii) **Conmutatividad**:  $u + v = v + u$ .

(iii) **Asociatividad**:  $u + (v + w) = (u + v) + w$ .

(iv) Existe un objeto en  $V$ , llamado **vector cero** denotado por  $0$  y que satisface que  $0 + u = u + 0 = u$ , para todo objeto  $u \in V$ . Se dice que  $0$  es el elemento neutro para la suma.

(v) Para cada  $u$  en  $V$ , existe un objeto denotado por  $-u$  en  $V$ , llamado inverso aditivo de  $u$  y es tal que  $u + (-u) = (-u) + u = 0$ .

• Operación Externa

(vi)  $V$  es **cerrado bajo la multiplicación por escalar**:  $\alpha \cdot u = \alpha u$  está en  $V$ .

(vii) Propiedad distributiva:  $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ .

(viii) Propiedad distributiva:  $(\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ .

(ix) Propiedad asociativa:  $\alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$ .

(x) Identidad escalar:  $1 \cdot u = u$ .

Si  $V$  es espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ , entonces todo elemento de  $V$  es un **vector**.

Es importante decir que un espacio vectorial (EV) se conforma de cuatro entidades: un conjunto de vectores, un conjunto de escalares y dos operaciones (suma y multiplicación por escalar). Para expresar esto a veces se utiliza la notación  $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ , aunque la mayoría de veces nos referimos a esta estructura por el nombre del conjunto. Además, siempre que queramos mostrar que un conjunto es un espacio vectorial, se debe dejar claro cuáles son aquellas cuatro entidades. Cuando no se especifica cuál es el campo, se asumirá que es el conjunto de números reales; y a menos que se especifique otra cosa, las operaciones de suma y multiplicación por escalar serán las usuales elemento a elemento. En este contexto, y para ser breves, a veces nos referimos a *un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $\mathbb{K}$*  como un  $\mathbb{K}$ -espacio vectorial.

Se dice que la suma en un espacio vectorial  $V$  es una *operación interna* porque necesita elementos exclusivamente de  $V$  para producir un tercero, que también pertenece a  $V$ . Por el contrario, la multiplicación por escalar es una *operación externa* porque relaciona elementos de dos conjuntos de distinto tipo: toma un escalar y un vector para producir otro vector. Por otra parte, cualquier objeto puede ser un vector, siempre y cuando cumpla las diez condiciones antes descritas. Por ello es que las matrices, funciones, polinomios, entre otros, son vectores. Para mostrar que esto es verdad, se debe probar los diez axiomas de la Definición 4.1 con  $V$  como el conjunto de matrices, funciones o polinomios, en cada caso.

**Ejemplos 4.1** (Conjuntos que son espacios vectoriales).

1. Sea  $V$  un conjunto de un solo elemento, denotado por  $0$  y tal que

$$0 + 0 = 0 \quad \text{y} \quad k0 = 0,$$

para cualquier escalar  $k \in \mathbb{K}$ . Es fácil verificar que los diez axiomas se satisfacen. El conjunto  $V = \{0\}$  se denomina *espacio vectorial trivial* sobre el campo  $\mathbb{K}$ .

2. El conjunto de  $n$ -tuplas de números complejos  $\mathbb{C}^n$ , con la suma y multiplicación por escalar complejo, componente a componente, es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{C}$ .

3. Sea  $V$  el conjunto de matrices de orden  $2 \times 2$  con entradas reales. Si  $A = [a_{ij}]$ ,  $B = [b_{ij}]$ ,  $C = [c_{ij}] \in V$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , entonces

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \in V, \quad \text{y}$$

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{bmatrix} \in V.$$

Por lo que  $V$  es cerrado bajo la suma y cerrado bajo la multiplicación por escalar. Resta probar los axiomas 2 a 10 de la Definición 4.1; algunos de ellos son las propiedades ya conocidas de las operaciones con matrices. Sabemos por el Teorema 2.1 que

- $A + 0_{m \times n} = A$  *(Existencia del elemento neutro)*
- $A + (-A) = 0$  *(Existencia del inverso aditivo)*
- $A + B = B + A$  *(Propiedad conmutativa)*
- $(A + B) + C = A + (B + C)$  *(Propiedad asociativa)*

Esto confirma los axiomas 2 a 5 de la Definición 4.1. Además, por el Teorema 2.2 se tiene que

- La matriz  $1A$  es igual a  $A$ .
- $\alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$  *(Propiedad pseudoasociativa)*
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$  *(Propiedad distributiva escalar)*
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$  *(Propiedad distributiva matricial)*

Por lo tanto  $V$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

4. Sea  $\mathbb{R}^{m \times n} = \{A : A \text{ es un matriz de orden } m \times n \text{ y de componentes reales}\}$ . El conjunto  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , con la suma usual de matrices y la multiplicación por escalar real, es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .
5. Sea  $\mathcal{C} = \{(f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}) : f \text{ es función continua en } [a, b]\}$ . El conjunto  $\mathcal{C}$  es el conjunto de funciones continuas en el intervalo  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Dado que la suma de funciones continuas en el intervalo  $[a, b]$  es otra función continua en tal intervalo,  $\mathcal{C}$  es cerrado bajo la suma. Además, para cada escalar real  $c$  y cada función  $f$  en  $\mathcal{C}$ , se tiene que

$$\begin{aligned} cf : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (cf)(x) = cf(x). \end{aligned}$$

Esto quiere decir que  $\mathcal{C}$  es cerrado bajo la multiplicación por escalar. Los otro ocho axiomas también se cumplen (¡demuéstrelo!). Por lo tanto,  $\mathcal{C}$  es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . □

**Nota 4.1.** Basta que un conjunto no cumpla uno de los diez axiomas para que no sea un espacio vectorial. En otras palabras, no es necesario probar todas las condiciones de la Definición 4.1 una vez que una de ellas no se satisface.

**Ejemplos 4.2** (Conjuntos que no son espacios vectoriales).

1. Sea  $V = \{1\}$ . Es fácil ver que  $1 + 1 = 2 \notin V$ , esto quiere decir que, aunque 1 pertenece  $V$ , el objeto  $1 + 1$  no pertenece a este conjunto. Por tanto,  $V$  no es un EV ya que la cerradura bajo la suma (operación interna) no se cumple.

2. El conjunto de los enteros  $\mathbb{Z}$  no es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ . Basta ver que no es cerrado bajo el producto por escalar. Por ejemplo,  $2 \in \mathbb{Z}$  pero  $\frac{1}{3}(2) \notin \mathbb{Z}$ .
3. El conjunto de polinomios de grado 2 no es un EV ya que no es cerrado bajo la suma. Veamos que  $p(x) = x^2 + 1$  y  $q(x) = -x^2 + 3x - 4$  son polinomios de grado 2 pero  $p(x) + q(x) = 3x - 3$  es un polinomio de grado 1.
4. El conjunto de polinomios de grado  $n$  no es un EV porque no es cerrado bajo la suma.
5. El conjunto  $\{A : \det(A) = 0\}$  no es un EV debido a que no se cumple la cerradura bajo la suma (¿la suma de matrices singulares es una matriz singular?).
6. El conjunto  $\mathbb{R}^n$  no es EV sobre el campo  $\mathbb{C}$ . Es suficiente tener en cuenta que la multiplicación de una  $n$ -tupla de  $\mathbb{R}^n$  por un número complejo no pertenece necesariamente a  $\mathbb{R}^n$ .

□

**Teorema 4.1.** *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$ . Se tiene lo siguiente:*

- (i) *El elemento neutro de  $V$  es único.*
- (ii) *Para cada escalar  $\alpha \in \mathbb{K}$ , el producto de  $\alpha$  por el vector cero es el vector cero:  $\alpha \cdot 0 = 0 \in V$ .*
- (iii) *Para cada vector  $v \in V$ , el producto por el escalar cero de  $\mathbb{K}$  es igual al vector cero de  $V$ , es decir  $0 \cdot v = 0$ .*
- (iv) *Si  $\alpha \cdot v = 0$ , entonces  $\alpha = 0 \in \mathbb{K}$  o  $v = 0 \in V$  (o ambos).*
- (v) *Si el vector  $v$  está en  $V$ , entonces  $(-1) \cdot v = -v$  también está en  $V$  y se denomina opuesto aditivo de  $v$ .*

Nótese que el elemento neutro de un espacio vectorial, denotado por  $0$ , depende del tipo de espacio vectorial en cuestión. Por ejemplo, el elemento neutro de  $\mathbb{R}^n$  es  $(0, 0, \dots, 0)$ , mientras que el elemento de neutro del espacio de matrices de orden  $n$  es la matriz nula de orden  $n$ .



## 4.2. Subespacios vectoriales

Un espacio vectorial puede contener conjuntos que son por sí mismos espacios vectoriales, siempre y cuando cumplan con las condiciones para considerarse un EV. A estos conjuntos los llamaremos *subespacios vectoriales*.

**Definición 4.2** (Subespacio vectorial). *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$ . Un subconjunto  $S$  de  $V$  se denomina subespacio vectorial de  $V$  si satisface lo siguiente:*

- (i)  *$S$  es diferente del conjunto vacío.*
- (ii)  *$S$  es cerrado bajo la suma definida en  $V$ .*

(iii)  $S$  es cerrado bajo la multiplicación por escalar definida en  $V$ .

**Nota 4.2.** Observe que un subespacio vectorial  $S \subset V$  es un espacio vectorial sobre el mismo campo sobre el que actúa  $V$ .

En general, para mostrar que un subconjunto  $S$  (diferente del vacío) es un subespacio vectorial de  $V$ , basta mostrar que la operación interna y la operación externa definidas en  $V$  se mantienen en  $S$ . Ciertos axiomas no necesitan probarse ya que se *heredan* para todo subconjunto de  $V$ , por ejemplo la asociatividad.

### Ejemplos 4.3.

1. Toda función polinomial es diferenciable, así que  $\mathbb{P}$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{D}$ , el espacio de funciones diferenciables.
2. Toda función diferenciable es necesariamente continua, por lo que  $\mathcal{D}$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{C}$ , el espacio de funciones continuas.
3. Toda función continua es integrable, de modo que  $\mathcal{C}$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{J}$ , el espacio de funciones integrables.
4. Toda función integrable es función y por tanto  $\mathcal{J}$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{F}$ , el espacio de funciones reales.
5. Por los items anteriores:

$$\mathbb{P} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{C} \subset \mathcal{J} \subset \mathcal{F}.$$

□

**Teorema 4.2.** Si  $S$  es un subconjunto no vacío de un espacio vectorial  $V$ , entonces  $S$  es un subespacio vectorial de  $V$  si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen.

- (i) Cerradura bajo la suma: si  $u$  y  $v$  pertenecen a  $S$ , entonces  $u + v$  está también en  $S$ .
- (ii) Cerradura bajo la multiplicación por escalar: si  $k$  es un escalar y  $u$  es un vector en  $S$ , entonces  $ku$  pertenece a  $S$ .

Se deduce de lo anterior que el vector cero de un espacio vectorial  $V$  debe pertenecer a cada uno de sus subespacios (el vector  $v + (-v) = 0$  debe pertenecer a todo subespacio de  $V$ ). Esta es una condición necesaria. En otras palabras, si un subconjunto  $S$  de un espacio vectorial  $V$  no contiene al vector cero de  $V$ , entonces  $S$  no es subespacio de  $V$ . Por otra parte, es fácil ver que un conjunto es subconjunto de sí mismo, por lo que todo EV es subespacio de sí mismo. Todo espacio vectorial  $V$  contiene dos *espacios vectoriales triviales*: el mismo  $V$  y el conjunto  $\{0\}$ , donde  $0 \in V$ . A cualquier otro subespacio de  $V$  se le denomina subespacio vectorial *propio* (no trivial) de  $V$ .

**Ejemplo 4.4** (Un subespacio propio de  $\mathbb{R}^2$ ). Toda recta del plano  $\mathbb{R}^2$  que pase por el origen es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ . Tengamos en cuenta que una recta que pasa por el origen, considerada en  $\mathbb{R}^2$ , está dada por

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y = mx \right\},$$

donde  $m$  es un escalar fijo. Veamos que se satisface lo siguiente:

- (i) Claramente  $S \subset \mathbb{R}^2$ , es decir,  $S$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ .
- (ii)  $S$  es diferente del vacío, pues si  $x = 0$ , entonces  $y = mx = m(0) = 0$ . Esto es,  $(0, 0)$  está en  $S$ .
- (iii) Si  $u = (x_1, y_1)$  y  $v = (x_2, y_2)$  son elementos de  $S$ , entonces  $y_1 = mx_1$  y  $y_2 = mx_2$ . Además,

$$u + v = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix},$$

de donde  $y_1 + y_2 = mx_1 + mx_2 = m(x_1 + x_2)$ , lo que significa que  $u + v$  pertenece a  $S$ . Por esto,  $S$  es cerrado bajo la suma.

- (iv) Si  $u = (x_1, y_1)$  está en  $S$  y  $\alpha$  es un número real, entonces  $y_1 = mx_1$  y  $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1)$ . Luego  $\alpha y_1 = \alpha(mx_1) = m(\alpha x_1)$ , por lo que  $\alpha u$  está en  $S$ . Así,  $S$  es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

□

**Nota 4.3.** El ejemplo anterior se puede reinterpretar diciendo que la suma de dos vectores que están sobre una recta y la multiplicación de un vector por un escalar produce otro vector sobre la misma recta. Lo mismo ocurre en  $\mathbb{R}^3$ .

Ahora veremos que los vectores de un espacio vectorial  $V$  pueden ser expresados en términos de los vectores de algún subconjunto  $S$  de  $V$ . Los vectores de  $S$  pueden verse como los bloques que nos permiten construir todos los vectores en  $V$ . Esto hace que sea posible estudiar y deducir las propiedades de todo un espacio vectorial al enfocarse únicamente en unos cuantos de sus elementos.

**Definición 4.3** (Combinación lineal). *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  y sea  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  un conjunto finito de vectores de  $V$ . Se dice que  $v \in V$  es una **combinación lineal** (de ahora en adelante CL) de  $v_1, v_2, \dots, v_r$  (o que es una combinación lineal de los vectores de  $S$ ) si  $v$  puede ser expresado como*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r,$$

donde  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, r$ , son escalares.

**Ejemplo 4.5.** El vector  $u = (1, 2, -1)$  de  $\mathbb{R}^3$  es una combinación lineal de  $v = (6, 4, 2)$  y  $w = (9, 2, 7)$ , pues  $u = \frac{2}{3}v - \frac{1}{3}w$ . En efecto, esto se ve al tomar escalares  $k_1$  y  $k_2$  tales que  $u = k_1 v + k_2 w$ :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \iff \left[ \begin{array}{cc|c} 6 & 9 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \\ 2 & 7 & -1 \end{array} \right].$$

Resolvemos este sistema de ecuaciones lineales por eliminación gaussiana:

$$\begin{bmatrix} 6 & 9 & | & 1 \\ 4 & 2 & | & 2 \\ 2 & 7 & | & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{21}(2/3) \\ E_{31}(1/3)}} \begin{bmatrix} 6 & 9 & | & 1 \\ 0 & -4 & | & 4/3 \\ 0 & 4 & | & -4/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{32}(-1) \\ M_2(-1/4)M_1(1/6)}} \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & | & 1/6 \\ 0 & 1 & | & -1/3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} k_1 + \frac{3}{2}k_2 = \frac{1}{6} \\ k_2 = -\frac{1}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1 = \frac{1}{6} - \frac{3}{2}k_2 = \frac{2}{3} \\ k_2 = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Así encontramos que  $u$  se expresa en términos de  $v$  y  $w$  como  $u = \frac{2}{3}v - \frac{1}{3}w$ .

□

**Teorema 4.3.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  y  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  un subconjunto finito de vectores de  $V$ . El conjunto formado por todos los vectores que son combinación lineal de  $v_1, v_2, \dots, v_r$  es un subespacio vectorial de  $V$ .

**Definición 4.4.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  y  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  un subconjunto finito de vectores de  $V$ . El conjunto  $H$  que consta de todas las combinaciones lineales de  $v_1, v_2, \dots, v_r$  es llamado **subespacio generado por  $S$**  y se denota  $\text{gen}(S)$  o  $\text{gen}\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ . El conjunto  $S$  se llama **conjunto generador** de  $H$ .

**Nota 4.4.** Es conveniente aceptar que el subespacio generado por el conjunto vacío es el espacio trivial que contiene al vector cero, i.e.  $\text{gen}(\emptyset) = \{0\}$ .

#### Ejemplos 4.6.

1. El subespacio de  $\mathbb{R}^3$  generado por el vector  $v = (1, 3, -2)$  es una recta de  $\mathbb{R}^3$ . En efecto, un vector  $u$  del subespacio generado por  $v$  es una combinación lineal del tipo  $u = tv$  (donde  $t$  es un escalar), es decir,  $u$  es un múltiplo escalar de  $v$ . En otras palabras  $u$  pertenece a  $\text{gen}\{v\}$  si y sólo si existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $u = t(1, 3, -2)$ . Así,

$$\begin{aligned} \text{gen}\{v\} &= \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : u_1 = t, u_2 = 3t, u_3 = -2t, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : u_1 = \frac{u_2}{3} = \frac{u_3}{-2} \right\}. \end{aligned}$$

Podemos ver que  $\text{gen}\{v\}$  consta de todas las ternas ordenadas que conforman una recta de  $\mathbb{R}^3$  que pasa por el origen y cuyo vector director es  $v$ .

2. Los vectores  $v_1 = (1, 1, 2)$ ,  $v_2 = (1, 0, 1)$  y  $v_3 = (2, 1, 3)$  no generan a  $\mathbb{R}^3$ . Debemos verificar que, dado un vector genérico  $b = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ , este siempre se puede expresar como una combinación lineal de  $v_1$ ,  $v_2$  y  $v_3$ ; es decir, existen escalares  $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$  tales que

$$b = k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3.$$

Expresando la ecuación anterior en términos de componentes obtenemos

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Este es un sistema de ecuaciones lineales que es soluble si y solamente si el determinante de su matriz de coeficientes es diferente de cero. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0,$$

podemos concluir que este sistema no es consistente. Se ha verificado que los vectores  $v_1 = (1, 1, 2)$ ,  $v_2 = (1, 0, 1)$  y  $v_3 = (2, 1, 3)$  no generan a  $\mathbb{R}^3$ .

□

### 4.2.1. Problemas resueltos

**Problema 4.1.** Determine si las proposiciones siguientes son verdaderas o falsas.

- (a) El conjunto de matrices invertibles de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  conforma un espacio vectorial.
- (b) Cada subespacio vectorial de un espacio vectorial es un espacio vectorial.
- (c) El conjunto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 1\}$  es un espacio vectorial.
- (d) Existen espacios vectoriales especiales que no contienen al vector cero.
- (e) El conjunto  $\{0\}$ , donde  $0 \in \mathbb{R}$ , es espacio vectorial con las operaciones usuales de suma y producto por escalar en  $\mathbb{R}$ .
- (f) Todo subconjunto de un espacio vectorial  $V$  que contenga al vector cero de  $V$  es subespacio vectorial de  $V$ .

**Solución.**

- (a) Falso. La suma de dos matrices invertibles no es necesariamente invertible.
- (b) Verdadero.
- (c) Falso.
- (d) Falso.
- (e) Verdadero.
- (f) Falso.

**Problema 4.2.** Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  son subespacios vectoriales e interpretarlos geoméricamente. Si alguno de ellos no es subespacio, diga cuáles condiciones fallan.

(a)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0 \right\}$

(b)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 2x - y = 0 \right\}$

**Solución.**

- (a) Primero, es claro que  $S \neq \emptyset$  pues  $(0, 0) \in S \subset \mathbb{R}^2$ . Segundo, tenemos que  $(0, 1) \in S$  y  $(1, 0) \in S$  pero

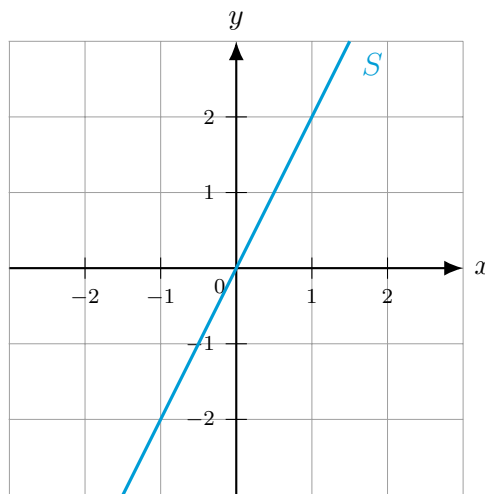
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin S,$$

por lo que  $S$  no es cerrado bajo la suma y por tanto no es subespacio vectorial. Geométricamente, este conjunto representa los ejes coordenados del plano  $\mathbb{R}^2$ .

- (b) Veamos que si  $x = 0$ , la igualdad  $2x - y = 0$  implica  $y = 2x = 0$ , por lo que  $(0, 0) \in S$ , de modo que  $S \neq \emptyset$ . Además  $S \subset \mathbb{R}^2$  por definición. Por otra parte, sean  $u = (x_1, y_1)$  y  $v = (x_2, y_2)$  elementos de  $S$ , se tiene que

$$\begin{aligned} u + v &= (x_1, y_1) + (x_2, y_2) \\ &= (x_1, 2x_1) + (x_2, 2x_2) \\ &= (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2)), \end{aligned}$$

luego  $u + v \in S$ , y consecuentemente  $S$  es cerrado bajo la suma. Por último, tomamos  $u$  y un escalar  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tenemos que  $\alpha u = (\alpha x_1, \alpha y_1) = (\alpha x_1, \alpha(2x_1))$ , i.e.  $(\alpha x_1, 2(\alpha x_1)) \in S$ . Así,  $S$  es cerrado bajo el producto por escalar. Por lo tanto,  $S$  es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$  (Figura 4.2.1).  $\square$



**Figura 4.2.1:** Problema 4.2 (b).

**Problema 4.3.** Para el conjunto  $S$  dado a continuación, determinar si  $S$  es o no subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $S$  no es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$ , decir cuáles condiciones fallan. Además, dar una interpretación geométrica de  $S$ .

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-3} = 2\left(z - \frac{1}{6}\right) \right\}$$

**Solución.** Notemos primero que  $S$  es el conjunto de todos los puntos de una recta  $L$  en  $\mathbb{R}^3$ , cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -3t - 1 \\ z = \frac{1}{6}(3t + 1). \end{cases}$$

Tomamos un nuevo parámetro  $r$  tal que  $r = \frac{1}{6}(3t + 1)$ . Ahora  $L$  se define por

$$\begin{cases} x = 6r \\ y = -6r \\ z = r. \end{cases}$$

Así, podemos denotar a  $S$  de la siguiente manera sin alterar su definición:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

(i) Si  $r = 0$  entonces  $(0, 0, 0) \in S$ , i.e.  $S \neq \emptyset$ . Además  $S \subset \mathbb{R}^3$ , por definición de  $S$ .

(ii) Sean  $u, v \in S$  tales que

$$u + v = r_1 \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} + r_2 \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} = (r_1 + r_2) \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{con } r_1, r_2 \in \mathbb{R}.$$

Como  $r_1 + r_2 \in \mathbb{R}$ , entonces  $u + v \in S$ . Así,  $S$  es cerrado bajo la suma.

(iii) Para cualquier  $r(6, -6, 1) \in S$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$  se cumple que

$$\alpha r \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \in S,$$

porque  $\alpha r$  es también un número real. Luego,  $S$  es cerrado bajo la multiplicación por escalar.

Por lo anterior, concluimos que  $S$  es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . Véase la Figura 4.2.2. □

**Problema 4.4.** Hallar el subespacio generado por cada uno de los siguientes conjuntos, en el espacio vectorial correspondiente:

(a)  $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(b)  $T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

(c)  $T = \{1, x, x^2, x^3\}$

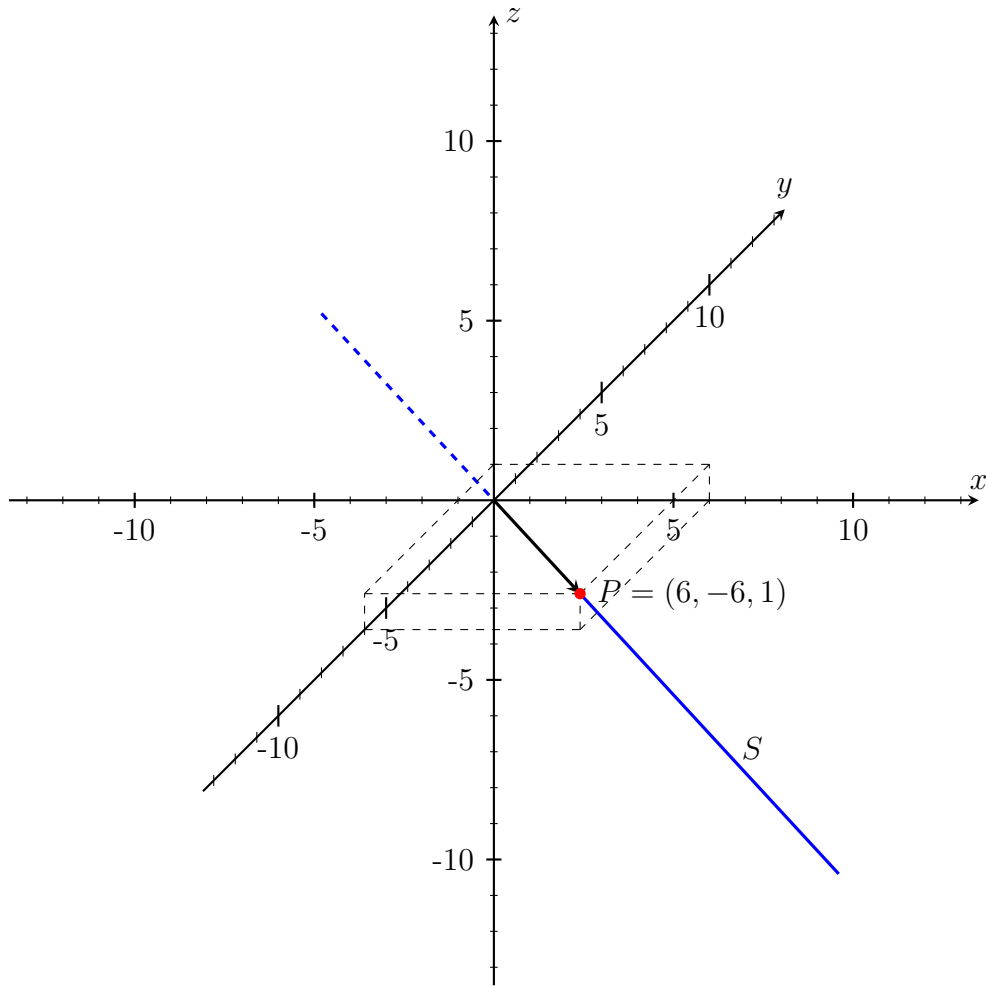
**Solución.**

(a) Sea  $v = (x, y) \in \text{gen}(T)$ . Se tiene

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

El subespacio generado por  $T$  está dado por

$$\text{gen}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2.$$



**Figura 4.2.2:** Interpretación geométrica del conjunto  $S$  del Problema 4.3.

(b) Sea  $w = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{gen}(T)$ . Se cumple que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

El subespacio generado por  $T$  es

$$\text{gen}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : a, d \in \mathbb{R} \right\},$$

el cual corresponde al conjunto de todas las matrices diagonales de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

(c) Un polinomio  $P \in \text{gen}(T) \subset \mathbb{P}_3$  es tal que

$$P(x) = \alpha(1) + \beta x + \gamma x^2 + \phi x^3; \quad \alpha, \beta, \gamma, \phi \in \mathbb{R}.$$

Luego el subespacio generado por  $T$  es

$$\text{gen}(T) = \left\{ \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \phi x^3 \in \mathbb{P}_3 : \alpha, \beta, \gamma, \phi \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{P}_3.$$

□

**Problema 4.5.** Para el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ 18 \end{bmatrix} \right\}$$

y el vector  $b = (9, -17, -17)$ ,

- encuentre el subespacio generado por  $S$  mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores, y
- encuentre todas las formas posibles de expresar a  $b$  como combinación lineal de  $S$ . Si esto es posible, halle una de ellas.

**Solución.**

- Sean un vector  $v = (x, y, z) \in \text{gen}(S)$  y escalares  $\alpha, \beta, \varphi$  tales que

$$\alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \varphi \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 11 \\ 5 & 3 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Sea  $A$  la matriz de coeficientes de este sistema. Tomamos  $[A|v]$  y hacemos uso del Teorema 2.10 de tal manera que este sistema sea consistente.

$$\begin{aligned} [A|v] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & x \\ 4 & -1 & 11 & y \\ 5 & 3 & 18 & z \end{array} \right] \xrightarrow{M_3(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & x \\ 4 & -1 & 11 & y \\ 10 & 6 & 36 & 2z \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[E_{31}(-5)]{E_{21}(-2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+2x \\ 0 & 11 & 11 & 2z+5x \end{array} \right] \xrightarrow{E_{32}(11)} \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & x \\ 0 & 1 & 1 & y+2x \\ 0 & 0 & 0 & 2z-11y-17x \end{array} \right] \end{aligned}$$

Se requiere que  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|v]$ , así que necesariamente  $17x + 11y - 2z = 0$ . Por lo tanto,

$$\text{gen}(S) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 17x + 11y - 2z = 0 \right\}.$$

- Queremos hallar todas las combinaciones lineales de los vectores de  $S$  tales que

$$\alpha \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \varphi \begin{bmatrix} -5 \\ 11 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -17 \\ -17 \end{bmatrix},$$

lo que corresponde a encontrar todas las soluciones posibles del sistema

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 11 \\ 5 & 3 & 18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -17 \\ -17 \end{bmatrix}.$$

Procedemos con eliminación gaussiana sobre la matriz ampliada  $[A | b]$ .

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & 9 \\ 4 & -1 & 11 & -17 \\ 5 & 3 & 18 & -17 \end{array} \right] \xrightarrow{M_3(2)} \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & 9 \\ 4 & -1 & 11 & -17 \\ 10 & 6 & 36 & -34 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c} E_{21}(-2) \\ E_{31}(-5) \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 11 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{32}(11)} \left[ \begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Obtenemos

$$\begin{cases} -2\alpha + \beta - 5\varphi = 9 \\ \beta + \varphi = 1 \\ \varphi = t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = -4 - 3t \\ \beta = 1 - t \\ \varphi = t, \end{cases}$$

donde  $t$  es un parámetro y dado que puede ser cualquier número real, hay infinitas formas de representar a  $b$  como combinación lineal de  $S$ .

□

**Problema 4.6.** Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  son subespacios vectoriales y dé una interpretación geométrica. Si alguno de ellos no es un subespacio vectorial, diga cuáles de las condiciones fallan.

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad S_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x - y + 5 = 0 \right\} & \text{(c)} \quad S_3 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{R} \text{ y } y \leq 0 \right\} \\ \text{(b)} \quad S_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x, y \text{ son enteros} \right\} \end{aligned}$$

**Solución.**

- (a) Geométricamente  $S_1 \subset \mathbb{R}^2$  representa una recta que no pasa por el origen y por tanto no es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ . Aunque no es vacío porque, por ejemplo,  $(0, 5)$  pertenece a  $S_1$ , este no es cerrado bajo la suma ni bajo el producto por escalar, pues

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \end{bmatrix} \notin S_1.$$

- (b) Notemos que  $S_2 \subset \mathbb{R}^2$  contiene puntos aislados en el plano y que es igual al producto cartesiano  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .  $S_2$  no está vacío pues  $(0, 0) \in S_2$ , y es cerrado bajo la suma porque la suma de enteros es un entero. Sin embargo,  $S_2$  no es cerrado bajo el producto por un escalar; por ejemplo,  $(1, 3)$  está en  $S_2$  pero

$$\frac{1}{2}(1, 3) = \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \notin S_2.$$

Luego  $S_2$  no es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ .

- (c) Claramente  $S_3 \subset \mathbb{R}^2$  no es vacío. Geométricamente, este conjunto representa el semiplano inferior del plano  $xy$ , por lo que es cerrado bajo la suma. Sin embargo,  $S_3$  no es cerrado bajo el producto por escalar ya que  $(0, -1) \in S_3$  pero  $-(0, -1) \notin S_3$ . De ahí que  $S_3$  no es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ .

□

**Problema 4.7.** Para cada espacio vectorial  $\mathcal{V}$  y el subconjunto  $S$ , dados a continuación, determine si  $S$  es o no un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$ . Si  $S$  no es un subespacio, diga cuáles condiciones fallan.

- (a)  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$   
 (b)  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $S = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & c \end{bmatrix} \text{ con } a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$

**Solución.**

- (a) Claramente  $(0, 0, 0)$  pertenece a  $S \subset \mathbb{R}^3$ , luego  $S \neq \emptyset$ . Sin embargo, aunque  $(1, 1, 0) \in S$ , se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \notin S, \quad \text{pues } 2^2 + 2^2 + 0^2 = 8 \not\leq 2.$$

De ahí que  $S$  no es cerrado bajo la suma ni bajo la multiplicación por escalar, i.e. no es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ .

- (b)  $S \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$  no es vacío porque la matriz cero de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  está en  $S$ . Sean las siguientes matrices, de entradas reales, elementos de  $S$ .

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \\ -p_2 & p_3 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \\ -q_2 & q_3 \end{bmatrix}$$

Dado que

$$P + \alpha Q = \begin{bmatrix} p_1 + \alpha q_1 & p_2 + \alpha q_2 \\ -(p_2 + \alpha q_2) & p_3 + \alpha q_3 \end{bmatrix}$$

entonces  $S$  es cerrado bajo la suma y bajo el producto por escalar. Por tanto  $S$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

□

**Problema 4.8.** Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  son subespacios vectoriales. Si alguno de ellos no es un subespacio, diga cuáles de las condiciones fallan.

- (a)  $S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^3 < 1\}$       (c)  $S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Q}\}$   
 (b)  $S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 3x\}$

**Solución.**

- (a) Es claro que  $S_1 \subset \mathbb{R}^2$  es diferente del vacío. Ahora, si tomamos  $(1/2, 0) \in S_1$  tenemos

$$\left(\frac{1}{2}, 0\right) + \left(\frac{1}{2}, 0\right) = 2\left(\frac{1}{2}, 0\right) = (1, 0)$$

que no pertenece a  $S_1$  porque  $1^2 + 0^3 \not< 1$ . Esto es,  $S_1$  no es cerrado bajo la suma ni bajo el producto por escalar, luego no es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ .

- (b)  $S_2 \subset \mathbb{R}^2$  no es vacío porque contiene al vector cero de  $\mathbb{R}^2$ . Claramente  $u = (u_1, 3u_1)$  y  $v = (v_1, 3v_1)$  pertenecen a  $S_2$ . Además, si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\lambda u + \lambda v = \lambda \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ 3(u_1 + v_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda(u_1 + v_1) \\ 3\lambda(u_1 + v_1) \end{bmatrix} \in S_2.$$

De ahí que  $S_2$  es cerrado bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar. Por tanto,  $S_2$  es subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^2$ .

- (c) Como  $(0, 0) \in S_3$ ,  $S_3 \in \mathbb{R}^2$  no es vacío. Dado que la suma de racionales es racional,  $S_3$  es cerrado bajo la suma. Por otro lado, el producto de un racional por un real no es necesariamente racional; por ejemplo  $(1, 0) \in S_3$  pero  $\sqrt{2}(1, 0) = (\sqrt{2}, 0)$  no pertenece a  $S_3$ , luego  $S_3$  no es cerrado bajo el producto por escalar y por lo tanto no es subespacio vectorial.  $\square$

**Problema 4.9.** Para cada espacio vectorial  $\mathcal{V}$  y el subconjunto  $S$ , dados a continuación, determine si  $S$  es o no un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$ . Si  $S$  no es un subespacio, diga cuáles condiciones fallan.

- (a)  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^3$ ,  $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} : x^3 + y^2 + z^2 \geq 2 \right\}$
- (b)  $\mathcal{V} = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ,  $S = \left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}, b \in \mathbb{R} \right\}$

**Solución.**

- (a) Claramente  $(1, 1, 0)$  pertenece a  $S \subset \mathbb{R}^3$ , luego  $S \neq \emptyset$ . Sin embargo,  $S$  no es cerrado bajo la suma ni bajo el producto por escalar, pues dados  $(1, 1, 1), (0, -1, -1) \in S$  se tiene

$$(1, 1, 1) + (0, -1, -1) = (1, 0, 0) \notin S, \quad \text{porque } 1^3 + 0^2 + 0^2 \not\geq 2.$$

Por tanto  $S$  no es un subespacio vectorial de  $\mathbb{R}^3$ . Observe que  $S$  no contiene a  $0 \in \mathbb{R}^3$ .

- (b) Veamos que  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in S \subset \mathbb{R}^{2 \times 2}$  por lo que  $S \neq \emptyset$ , pero

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

no pertenece a  $S$ . De aquí que  $S$  no es subespacio vectorial, pues fallan ambas propiedades de cerradura. Observe que  $S$  no contiene a  $0 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ .  $\square$

**Problema 4.10.** Sean  $v_1, v_2, \dots, v_n$  vectores arbitrarios de un espacio vectorial  $\mathcal{V}$ . Sea

$$\mathcal{H} = \{v \in \mathcal{V} : v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n\},$$

donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son escalares cualesquiera. Demuestre que  $\mathcal{H}$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$ .

**Solución.** Véase el Teorema 4.3. De la definición de  $\mathcal{H}$  es claro que  $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{V}$ . Además, si  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ , entonces el vector cero de  $\mathcal{V}$  pertenece a  $\mathcal{H}$ , y por tanto  $\mathcal{H} \neq \emptyset$ . Ahora, demostremos que  $\mathcal{H}$  es cerrado bajo la suma y la multiplicación por un escalar. Sean  $u, w \in \mathcal{H}$  arbitrarios tales que

$$\begin{aligned} u &= a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, \\ w &= b_1 v_1 + \dots + b_n v_n. \end{aligned}$$

Sea además  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Tenemos que

$$\begin{aligned} u + w &= (a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) + (b_1v_1 + \cdots + b_nv_n) \\ &= (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_n + b_n)v_n \in \mathcal{H}, \quad \text{y} \\ \lambda u &= \lambda(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) \\ &= (\lambda a_1)v_1 + \cdots + (\lambda a_n)v_n \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

Por tanto,  $\mathcal{H}$  es un subespacio vectorial de  $\mathcal{V}$ . □

### 4.3. Independencia lineal

La independencia lineal es un concepto que nos permite saber si los vectores de un conjunto están relacionados, en el sentido de que uno (o más de uno) puede ser expresado como una combinación lineal de los otros.

**Definición 4.5.** Una combinación lineal trivial de vectores es aquella en la que todos los escalares son iguales a cero. Es decir, dados  $r$  vectores  $v_1, v_2, \dots, v_r$ , la combinación lineal

$$\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_nv_n,$$

donde  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$  se denomina **combinación lineal trivial** de los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_r$ . En cualquier otro caso se dirá que se trata de una **combinación lineal no trivial** de dichos vectores.

**Definición 4.6.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  y sea  $S$  un subconjunto de  $V$ . Se dice que  $S$  es **linealmente independiente** (LI) si ningún vector en  $S$  puede obtenerse como una combinación lineal de los otros. Si  $S$  no es linealmente independiente, entonces se dirá que es **linealmente dependiente** (LD).

**Nota 4.5.** Obsérvese que ser LD es la negación de ser LI, además sólo existen dos posibilidades para un subconjunto de un espacio vectorial: ser LI o ser LD. En algunas ocasiones se dirá que los vectores  $v_1, v_2, \dots, v_r$  son LI (o LD) para expresar que el conjunto  $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es linealmente independiente (o linealmente dependiente).

**Teorema 4.4.** Un subconjunto no vacío  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  de un espacio vectorial  $V$  es linealmente independiente si y sólo si los escalares que satisfacen la ecuación

$$\alpha_1v_1 + \alpha_2v_2 + \cdots + \alpha_nv_n = 0$$

son  $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ . En otras palabras,  $S$  es linealmente independiente si y sólo si la única combinación lineal de sus vectores que produce el vector cero es la trivial.

**Teorema 4.5.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  y  $S$  un subconjunto finito de  $V$ .

- (i) Si  $S$  contiene al vector cero, entonces  $S$  es linealmente dependiente.
- (ii) Si  $S$  contiene un solo vector y este es distinto de cero, entonces  $S$  es linealmente independiente.

- (iii) Si  $S$  contiene al menos dos vectores tales que uno es múltiplo escalar del otro, entonces  $S$  es linealmente dependiente.

### Ejemplos 4.7.

1. El conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

es LD debido a que contiene al vector cero.

2. El conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

es LD ya que el tercer vector se puede expresar como la suma de los dos primeros.

3. El conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$

es LI ya que ningún vector puede ser expresado como una CL de los demás.

4. Dos vectores  $v_1$  y  $v_2$  de  $\mathbb{R}^3$  son LI si y sólo si no son paralelos, pues en tal caso ninguno es múltiplo escalar del otro.
5. Dos vectores  $u, v \in \mathbb{R}^3$  generan a un plano si y sólo si no son paralelos, i.e si y sólo si  $\{u, v\}$  es LI. Ningún vector  $w$  que se encuentre fuera de dicho plano podrá expresarse como una CL de  $u$  y  $v$ , por lo que el conjunto  $\{u, v, w\}$  es LI.
6. En  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , el conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

es LI ya que la única combinación lineal que produce el vector cero es la trivial. Sean escalares  $k_1, k_2, k_3, k_4$  tales que

$$k_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + k_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

lo cual implica que  $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ . Se ha verificado que  $S$  es LI.

7. El conjunto  $\{x\}$  en  $\mathbb{P}_2$  es linealmente independiente ya que contiene a un único vector que es distinto del vector cero.
8. Sea  $S = \{\cos^2(x), 1, \sin^2(x)\}$  un subconjunto del espacio vectorial

$$\mathcal{F} = \{(f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}) : f \text{ es función}\}.$$

Veamos que por la fórmula fundamental de la trigonometría se cumple que  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , lo cual es equivalente a

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) - 1 = 0.$$

Esto muestra que existe una CL no trivial de los vectores de  $S$  que produce el vector cero de  $\mathcal{F}$  y por tanto  $S$  es linealmente dependiente.

9. Las funciones  $f(x) = x$  y  $g(x) = \tan(x)$ , en el espacio de las funciones continuas, son linealmente independientes ya que ninguna es múltiplo escalar de la otra.
10. Las funciones  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por  $g(x) = \sin(2x)$  y  $h(x) = \sin(x) \cos(x)$  son vectores linealmente dependientes en el espacio vectorial de funciones reales en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . En efecto, la identidad trigonométrica  $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$  muestra que  $h$  es un múltiplo escalar de  $g$ .

□

**Teorema 4.6.** Sea  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  un subconjunto de vectores de  $\mathbb{R}^n$ . Si  $r > n$ , entonces  $S$  es linealmente dependiente.

**Nota 4.6.** Se sigue del Teorema 4.6 que un conjunto en  $\mathbb{R}^2$  con más de dos vectores es LD; análogamente un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  con más de tres vectores es linealmente dependiente.

**Teorema 4.7.** El conjunto  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es linealmente independiente si y solamente si el sistema homogéneo  $Ax = 0$ , donde las columnas o filas de  $A$  son los vectores de  $S$ , tiene únicamente la solución trivial, i.e. el vector cero.

**Nota 4.7.** Si la matriz  $A$  del teorema anterior es cuadrada, entonces basta verificar que su determinante sea distinto de cero ya que en tal caso  $A$  es invertible y por tanto la solución de  $Ax = 0$  es  $x = A^{-1}0 = 0$ .

**Corolario 4.7.1.** Si  $A$  es una matriz cuadrada, entonces

- (i)  $A$  es invertible si y sólo si sus columnas son linealmente independientes.
- (ii)  $A$  es invertible si y sólo si sus filas son linealmente independientes.

**Teorema 4.8.** Sea  $A$  una matriz de orden  $m \times n$ . Si el rango de  $A$  es  $\text{rank}(A) = r$ , entonces  $r$  filas (y  $r$  columnas) de  $A$  son linealmente independientes.

**Corolario 4.8.1.** Si  $A$  es una matriz de orden  $m \times n$ , entonces las columnas de  $A$  son linealmente independientes si y sólo si  $\text{rank}(A) = n$ . Análogamente, las filas de  $A$  son linealmente independientes si y sólo si  $\text{rank}(A) = m$ .

### Ejemplos 4.8.

1. Para determinar si los polinomios  $p_1(x) = 1 - x$ ,  $p_2(x) = 5 + 3x^2$  y  $p_3(x) = 1 + 3x - x^2$  son LI, busquemos escalares  $k_1, k_2, k_3$  tales que se satisfaga la ecuación

$$k_1 p_1(x) + k_2 p_2(x) + k_3 p_3(x) = 0.$$

Nótese que

$$k_1(1 - x) + k_2(5 + 3x^2) + k_3(1 + 3x - x^2) = 0$$

es equivalente a

$$(k_1 + 5k_2 + k_3) + (-k_1 + 3k_3)x + (3k_2 - k_3)x^2 = 0. \quad (4.1)$$

Como en el lado derecho de la ecuación (4.1) tenemos al polinomio 0 y dos polinomios son iguales si cada uno de sus coeficientes son iguales, tenemos que (4.1) se satisface si y sólo si

$$\begin{cases} k_1 + 5k_2 + k_3 = 0 \\ -k_1 + 3k_3 = 0 \\ 3k_2 - k_3 = 0. \end{cases}$$

Este es un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes es

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = B.$$

Se tiene que

$$\det(A) = \det(B) = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -17,$$

así que  $A$  es invertible. Luego, el vector solución de este sistema es  $x = A^{-1}0 = 0$ . Se ha mostrado que el conjunto  $\{p_1, p_2, p_3\}$  es linealmente independiente.

2. Para determinar si

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

es LI, reducimos por filas a la matriz  $A$ , cuyas columnas son los vectores de  $S$ . (Se puede escoger el orden preferido para colocar a los vectores de  $S$  como columnas de  $A$ , pues un orden apropiado podría simplificar el proceso de reducción por filas.)

$$\begin{aligned} A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} &\xrightarrow[\substack{E_{31}(-1/3) \\ P_{34}}]{\phantom{E_{31}(-1/3)}} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 8/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(3/8)} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 8/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 21/4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{E_{43}(2/5)} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 0 & 8/3 & -2/3 \\ 0 & 0 & 21/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Encontramos que  $\text{rank}(A) = 3$ , valor que coincide que coincide con el número de vectores en  $S$ , por lo tanto  $S$  es LI.

□

**Teorema 4.9.** *Sea  $M$  una matriz escalonada. Se cumple que*

- (i) *Las columnas de  $M$  que contienen pivote son linealmente independientes.*
- (ii) *Las filas no nulas de  $M$  son linealmente independientes.*

**Teorema 4.10.** *Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  y sea  $S$  un subconjunto de  $V$ . Se cumple lo siguiente.*

(i) *Si  $S$  es linealmente independiente pero  $\text{gen}(S) \neq V$ , entonces existe un  $u \in V$  tal que el conjunto  $S \cup \{u\}$  es también linealmente independiente.*

(ii) *Si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  y  $u$  es una combinación lineal de los vectores de  $S$  tal que*

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r = u,$$

*donde ningún escalar es igual a cero, entonces el conjunto  $S'$  que resulta de sustituir cualquier vector de  $S$  por  $u$  es también linealmente independiente. Esto es,  $\text{gen}(S) = \text{gen}(S')$ .*

(iii) *Si en  $S$  existe un vector  $u$  que es combinación lineal de los restantes, entonces el conjunto  $S'$  obtenido al descartar  $u$  de  $S$  es tal que  $\text{gen}(S) = \text{gen}(S')$ .*

Algunas veces se puede determinar la independencia lineal de dos o más funciones si se conoce ciertas identidades que nos ayuden a establecer una combinación lineal de dichas funciones. Pero no siempre es el caso; en realidad no existe un método general que nos permita hacerlo.

**Definición 4.7** (Wronskiano). *Si  $f_1, f_2, \dots, f_n$  son funciones que son  $n - 1$  veces diferenciables en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , entonces el determinante*

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

*es llamado el **Wronskiano** de  $f_1, f_2, \dots, f_n$ .*

Nótese que el Wronskiano es una función. El siguiente teorema es de utilidad cuando se quiere probar la independencia lineal de los vectores del espacio vectorial de funciones.

**Teorema 4.11.** *Si las funciones  $f_1, f_2, \dots, f_n$  tienen  $n - 1$  derivadas continuas en el intervalo  $(-\infty, \infty)$  y si el Wronskiano de aquellas funciones es diferente de cero en  $(-\infty, \infty)$ , entonces  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  es un conjunto linealmente independiente de vectores en  $C^{(n-1)}(-\infty, \infty)$ , el espacio de funciones  $n - 1$  veces continuamente diferenciables, sobre el intervalo  $(-\infty, \infty)$ .*

**Nota 4.8.** Observe que el teorema anterior no nos ayuda a determinar la independencia lineal de un conjunto de funciones si el Wronskiano es idénticamente igual a cero; en tal caso podría tratarse de un conjunto LI o LD. En otras palabras, si un conjunto de funciones es linealmente dependiente en un intervalo, esto implica que el Wronskiano correspondiente es cero en todo el intervalo, pero lo segundo no implica lo primero. Es decir, no se puede decidir sobre la independencia lineal de las funciones si el Wronskiano es igual a cero en todo el intervalo.

En la siguiente sección aprenderemos que todo vector de cada espacio vectorial se identifica con un vector de  $\mathbb{R}^n$ ; esto hará más fácil determinar la independencia lineal de un conjunto de vectores dado de un EV cualquiera.

**Ejemplo 4.9.**

1. Las funciones  $f_1(x) = x$  y  $f_2(x) = \cos(x)$  son linealmente independientes en  $\mathcal{C}^\infty(-\infty, \infty)$ , el espacio vectorial de funciones infinitamente diferenciables sobre el intervalo  $(-\infty, \infty)$ . Veamos que

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & \cos(x) \\ 1 & -\sin(x) \end{vmatrix} = -x \sin(x) - \cos(x).$$

Esta función no es igual a cero sobre todo el intervalo  $(-\infty, \infty)$ , por ejemplo

$$W(\pi) = -\pi \sin(\pi) - \cos(\pi) = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto,  $\{f_1, f_2\}$  es un conjunto LI.

2. Usemos el Wronskiano para ver que  $f_1(x) = 1$ ,  $f_2(x) = e^x$ ,  $f_3(x) = e^{3x}$  son vectores LI en  $\mathcal{C}^\infty(-\infty, \infty)$ . Tenemos

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & e^x & 2e^{2x} \\ 0 & e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & 2e^{2x} \\ e^x & 4e^{2x} \end{vmatrix} = 4e^{3x} - 2e^{3x} = 2e^{3x}.$$

Como  $W(x)$  no es igual a cero para ningún  $x \in (-\infty, \infty)$ , las funciones  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  forman un conjunto linealmente independiente.

□

**4.3.1. Problemas resueltos**

**Problema 4.11.** Para cada uno de los siguientes conjuntos  $S$ , determinar si  $S$  es linealmente independiente en el espacio vectorial correspondiente.

(a)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

(b)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

(c)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

(d)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

(e)  $S = \{e^x, e^{2x}, e^{3x}\}$

**Solución.**

- (a) Según el Teorema 4.6,  $S \subset \mathbb{R}^2$  es LD ya que tiene 3 vectores y  $3 > 2$ .

(b) Considere lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{41}(-1)]{E_{31}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{42}(-1)]{E_{32}(3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dado que esta matriz, cuyas columnas son los vectores de  $A$ , tiene rango 3 y además 3 son los vectores de  $S$ , concluimos que  $S$  es LI.

(c) Obsérvese que

$$-2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \\ -2 \end{bmatrix},$$

por lo que  $S$  no es LI.

(d) Claramente

$$0 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

es una CL no trivial que produce el vector cero. Por tanto,  $S$  no es LI.

(e) Sean  $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$ . Definimos las funciones  $f_1(x) = e^x$ ,  $f_2(x) = e^{2x}$ ,  $f_3(x) = e^{3x}$  y  $f(x) = 0$ . Se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha f_1(x) + \beta f_2(x) + \lambda f_3(x) = f(x) &\implies \alpha f_1'(x) + \beta f_2'(x) + \lambda f_3'(x) = f'(x) \\ &\implies \alpha f_1''(x) + \beta f_2''(x) + \lambda f_3''(x) = f''(x). \end{aligned}$$

Con estas ecuaciones formamos sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicamos eliminación gaussiana a su matriz de coeficientes:

$$\begin{bmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1)]{E_{21}(1)} \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & e^{2x} & 2e^{3x} \\ 0 & 3e^{2x} & 8e^{3x} \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(3)} \begin{bmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & e^{2x} & 2e^{3x} \\ 0 & 0 & 2e^{3x} \end{bmatrix} \\ \xrightarrow[M_3\left(\frac{e^{-3x}}{2}\right)M_2(e^{-2x})]{M_1(e^{-x})} \begin{bmatrix} 1 & e^x & e^{2x} \\ 0 & 1 & 2e^x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El determinante de esta matriz es 1, así que esta es invertible. Por lo tanto, la única combinación lineal que produce al vector cero (en el espacio de las funciones reales) es la trivial. Así,  $S$  es LI.

□

**Problema 4.12.** Supongamos que los vectores cuya independencia vamos a analizar se colocan como filas de una matriz  $A$ . Al terminar el proceso de eliminación ¿cuál es el criterio para decidir a favor o en contra de independencia lineal de las filas de  $A$ ? ¿Cómo está relacionado el rango de  $A$  con la independencia lineal de sus filas?

**Solución.** Si al terminar el proceso de eliminación gaussiana una fila de  $A$  es nula, entonces esta fila es una combinación lineal de las no nulas. Las filas no nulas son linealmente independientes. En ese caso, el conjunto de todas las filas de  $A$  son linealmente dependiente. Por el contrario, si ninguna de las filas de  $A$  es nula, entonces estas son linealmente independientes. A parte de lo mencionado, el rango de  $A$  nos indica la cantidad de sus filas que no son nulas (que son LI). Si  $A$  es de tamaño  $m \times n$  y  $\text{rank}(A) = m$ , entonces ninguna fila es nula; es decir, que las filas de  $A$  son linealmente independientes. Pero, si  $\text{rank}(A) < m$ , entonces existen  $m - \text{rank}(A)$  filas nulas, de modo que las filas de  $A$  son linealmente dependientes.  $\square$

**Problema 4.13.** Para cada uno de los conjuntos  $S \subset V$  dados a continuación,

- (i) probar que  $S$  es LI,
- (ii) hallar el subespacio generado por  $S$  mediante restricciones sobre las componentes de sus vectores, y
- (iii) hallar, si es posible, un vector  $v$  del espacio vectorial correspondiente, tal que el conjunto  $S'$  obtenido al agregar a  $S$  el vector  $v$ , sea también LI.

$$(a) \quad V = \mathbb{R}^3, S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(b) \quad V = \mathbb{R}^2, S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

**Solución.**

- (a) (i) Supongamos que  $S$  es LD; luego existe un  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ \alpha \end{bmatrix},$$

de donde  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 0$ , lo cual es una contradicción. Luego el supuesto es falso, es decir, que  $S$  es LI

- (ii) Construimos una matriz  $A$  cuyas columnas son los vectores de  $S$ . Buscamos todos los  $b = (b_1, b_2, b_3)$  de  $\mathbb{R}^3$  tales que  $Ax = b$  sea soluble. Considere lo siguiente:

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{21}(1)} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 1 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{32}(-1)} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -1 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array} \right].$$

El sistema  $Ax = b$  es soluble si  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b]$ . Por tanto,

$$\text{gen}(S) = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : b_1 - b_2 - b_3 = 0 \right\}.$$

(iii) Necesitamos un vector  $v \in \mathbb{R}^3$  tal que  $v \notin \text{gen}(S)$ . Claramente  $(1, 0, 0) \notin \text{gen}S$ , luego

$$S' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ es LI.}$$

(b) (i) Observe que no existe un escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

De ahí que  $S$  es LI.

(ii) Considere  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$  y  $b = (b_1, b_2)$ . Se tiene que

$$[A | b] = \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ -1 & 1 & b_2 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{21}(-1)} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 3 & b_1 + b_2 \end{array} \right].$$

Como  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b] = 2$ , el sistema  $Ax = b$  es soluble para cualquier  $b \in \mathbb{R}^3$ . Esto es,  $\text{gen}(S) = \mathbb{R}^2$ .

(iii) No es posible. Dado que  $\text{gen}(S) = \mathbb{R}^2$ , todo vector de  $\mathbb{R}^2$  está en  $\text{gen}(S)$ , o lo que es lo mismo  $\nexists v \in \mathbb{R}^2 (v \notin \text{gen}(S))$ . Por esto, es imposible agregar otro vector a  $S$  ya que sería una CL de sus vectores.  $\square$

**Problema 4.14.** Dado el vector  $v = (0, 0, -2, 5)$ , obtener, si es posible, un conjunto  $B$  que sea LI, que contenga exactamente 4 vectores y entre ellos esté  $v$ .

**Solución.** Claramente los vectores  $(1, 0, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1, 0)$  y  $(0, 0, 0, 1)$  son LI. Note que  $v = -2(0, 0, 0, 1) + 5(0, 0, 0, 1)$ , así que descartando ya sea  $(0, 0, 1, 0)$  o  $(0, 0, 0, 1)$ , obtenemos un conjunto LI. Así,

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

$\square$

**Problema 4.15.** Para cada uno de los siguientes conjuntos  $S$ , determinar si  $S$  es LI en el espacio vectorial correspondiente

$$(a) S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(b) S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(c) S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

**Solución.**

- (a) Considere el determinante de la matriz que tiene por columnas a los vectores de
- $S$
- :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 8 \neq 0.$$

De esto se sigue que tal matriz es invertible y por tanto, según el Teorema 4.7,  $S$  es LI.

- (b) Sean
- $c_1, c_2, c_3$
- escalares. Planteamos

$$\begin{aligned} c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \iff \begin{bmatrix} c_1 + c_3 & 2c_2 - 2c_3 \\ c_3 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De esto obtenemos que  $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ . Luego  $S$  es LI.

- (c)
- $S$
- es LD pues contiene al vector
- $0 \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$
- . Observe, por ejemplo, que

$$0 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Esta es una combinación lineal no trivial de los vectores de  $S$  que produce el vector cero.

□

**Problema 4.16.** Para cada uno de los siguientes conjuntos  $S$ , determinar si  $S$  es linealmente independiente en el espacio vectorial correspondiente

- (a)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$
- (b)  $S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$

**Solución.**

- (a) El conjunto
- $S$
- es linealmente independiente pues la matriz formada por los vectores de
- $S$
- como filas tiene determinante distinto de cero

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

- (b) Consideremos escalares
- $a, b, c, d \in \mathbb{R}$
- tales que

$$a \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{cases} 2a - b + 3c + d = 0 \\ b - c + d = 0 \\ b - c + d = 0 \\ a + d = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = 0.$$

La matriz de coeficientes este sistema tiene dos filas iguales, por lo que su determinante es cero. Se concluye que los vectores de  $S$  son LD.  $\square$

## 4.4. Bases y dimensión

Cuando tratamos con una recta, la vemos como un objeto de una dimensión; a un plano como un objeto bidimensional y al espacio como un lugar de tres dimensiones. En esta sección se verá qué quiere decir esto exactamente.

Hemos visto que dados ciertos vectores de un espacio vectorial, es posible expresar todos los demás vectores en términos de estos, y que en tal caso es posible generar al espacio vectorial mismo. El conjunto que contiene a dichos vectores puede contener a tantos vectores como sea posible; sin embargo, no todos podrían ser necesarios para generar al espacio vectorial en cuestión. Por esto surge el concepto de base.

**Definición 4.8** (Base de un espacio vectorial). *Un subconjunto finito  $B$  de un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $\mathbb{K}$  se denomina **base** de  $V$  si*

- (i)  $B$  genera a  $V$ , y
- (ii)  $B$  es linealmente independiente.

Conocer la base de un espacio vectorial nos permite estudiar y deducir sus propiedades. Esto significa que cada vector del EV es una CL de los vectores de su base, por lo que todo se reduce a estudiar los vectores que la conforman.

El hecho de que en la Definición 4.8 sea necesario que la base sea LI se debe a que la base de un EV siempre contiene al mínimo número posible de vectores. Si la base de un EV no fuera LI, entonces existiría al menos un vector que es una CL de los restantes y por lo tanto puede descartarse de la base sin afectar el espacio vectorial generado.

Nótese también que el conjunto  $B$  en la Definición 4.8 se dice finito debido a que los espacios vectoriales pueden ser de dos tipos. Un EV  $V$  es de *dimensión finita* si existe algún conjunto finito en  $V$  que lo genera; si tal conjunto no existe, entonces se dice que  $V$  es de *dimensión infinita*. Más adelante se definirá con precisión lo que es la *dimensión* de un espacio vectorial. En resumen, no todo EV contiene una base que consta de un número finito de vectores. Por ejemplo, el espacio vectorial de todos los polinomios es de dimensión infinita. (¿De que dimensión será  $V = \{0\}$ ?)

### Ejemplos 4.10.

1. El conjunto

$$\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

donde  $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  tiene un 1 en la componente  $i$ , es una base para  $\mathbb{R}^n$ . Esta base se denomina *base canónica* (o *base estándar*) de  $\mathbb{R}^n$ .

2. El conjunto  $\{1, x, \dots, x^n\}$  es la base canónica de  $\mathbb{P}_n$ .

3. El conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es la base canónica de  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ .

□

**Teorema 4.12.** Si  $V$  es un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  y una base para  $V$  consta de  $n$  vectores, entonces toda base de  $V$  contiene exactamente  $n$  vectores.

**Teorema 4.13.** Sea  $B$  una base con  $n$  vectores para un espacio vectorial  $V$ .

(i) Si un conjunto en  $V$  contiene más de  $n$  vectores, entonces es linealmente independiente.

(ii) Si un conjunto en  $V$  contiene menos de  $n$  vectores, entonces no genera a  $V$ .

**Teorema 4.14.** Sea  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base de un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $\mathbb{K}$ . Entonces todo vector en  $V$  puede escribirse de manera única como combinación lineal de los vectores en  $B$ . Esto es, para todo  $u \in V$  existen unos únicos escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tales que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n.$$

Hasta ahora se ha visto que una base de un EV es un subconjunto de  $V$  de modo que el orden no importa, siempre que genere al EV y sea LI; por ejemplo,  $\{v_1, v_2, v_3\}$  es el mismo conjunto que  $\{v_3, v_1, v_2\}$ . Sin embargo, en algunos casos el orden de los vectores de una base de cierto EV importa. Así, en el ejemplo anterior, ambos conjuntos son la misma base del mismo EV pero en diferente orden.

**Definición 4.9.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  y sea  $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base ordenada para  $V$ . Los escalares  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$  tales que

$$u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n,$$

para un  $u \in V$  específico, se denominan **coordenadas de  $u$  respecto a la base  $B$** . El vector  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  en  $\mathbb{K}^n$  construido con aquellas coordenadas (en ese mismo orden) se llama **vector de coordenadas** (o **representación**) de  $u$  respecto a la base  $B$  y se denota

$$[u]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

¿Qué pasaría si la base  $B$  de la definición anterior no fuera ordenada? Nosotros podemos escoger el orden apropiado para cualquier base de un EV pero hay que tener en cuenta que las coordenadas de un vector en dicha base serán diferentes de sus coordenadas respecto a la misma base si está en otro orden.

**Ejemplos 4.11.**

1. ¿Cuáles son las coordenadas del vector  $(1, -2, 3)$  respecto de la base canónica de  $\mathbb{R}^3$ ,  $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ? Basta observar que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-2) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

por lo que  $1, -2$  y  $3$  son las coordenadas de  $u$  respecto a la base  $B$ . Además  $[u]_B = (1, -2, 3) = u$ , esto es así porque las coordenadas de un vector de  $\mathbb{R}^n$  respecto a su base canónica son precisamente las componentes de dicho vector.

2. Es claro que  $B = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$  es una base para  $\mathbb{R}^3$ . ¿Cuál es el vector de coordenadas de  $(1, -2, 3)$  respecto a  $B$ ? Es fácil ver que tal vector se expresa como la siguiente combinación lineal de los vectores de  $B$ :

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = (-2) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto  $[(1, -2, 3)]_B = (-2, 1, 3)$  es el vector de coordenadas de  $u$  respecto de la base  $B$ .

3. El vector de coordenadas de  $p(x) = 1 - x + 3x^3$  respecto de la base canónica de  $\mathbb{P}_3$  es aquel con los coeficientes de  $p$ , i.e.  $(1, -1, 0, 3)$ .
4. El vector de coordenadas de  $p(x) = 1 - x + 3x^3$  respecto de la base canónica de  $\mathbb{P}_4$  es aquel con los coeficientes de  $p$ , i.e.  $(1, -1, 0, 3, 0)$ .

□

**Nota 4.9.** Obsérvese que el vector de coordenadas de cierto vector de un EV respecto a una de sus bases es siempre un vector de  $\mathbb{K}^n$ . Por ejemplo, si consideramos al espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a  $n$ , entonces podemos hallar una correspondencia *uno-a-uno* entre sus vectores y los vectores de  $\mathbb{K}^n$ . Lo mismo sucede con otros espacios vectoriales. Este hecho facilita, por ejemplo, comprobar la independencia lineal de ciertos vectores de un EV al estudiar si sus vectores de coordenadas (respecto a una base dada) son LI en  $\mathbb{K}^n$ .

**Teorema 4.15.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  y  $B$  una base ordenada para  $V$ .

(i) Para cualesquiera vectores  $u, v \in V$  y todo escalar  $\lambda \in \mathbb{K}$  se tiene

(i-1) El vector de coordenadas de una suma es igual a la suma de los vectores de coordenadas.

$$[u + v]_B = [u]_B + [v]_B$$

(i-2) El vector de coordenadas de un múltiplo escalar de  $u$  es igual a un múltiplo escalar del vector de coordenadas de  $u$ .  $[\lambda u]_B = \lambda[u]_B$

(i-3) El vector de coordenadas del vector cero de  $V$  es el vector cero de  $\mathbb{K}$ .

$$[u]_B = 0 \iff u = 0$$

(i-4) Dos vectores iguales tienen representaciones iguales.

$$[u]_B = [v]_B \iff u = v$$

(ii) Para cada  $w \in \mathbb{K}^n$  existe un único vector  $u \in V$  tal que  $w = [u]_B$ .

(iii) Si el conjunto  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  es linealmente independiente en  $V$ , entonces

$$\{[x_1]_B, [x_2]_B, \dots, [x_n]_B\}$$

es linealmente independiente en  $\mathbb{K}^n$ .

**Definición 4.10** (Dimensión de un espacio vectorial). Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$ . Si  $V \neq \{0\}$  y  $B$  es una base para  $V$  que tiene  $n$  vectores, entonces la **dimensión** de  $V$  es  $n$  y se denota por  $\dim(V)$ .

En palabras simples, la dimensión de un EV es el número de vectores de cualquiera de sus bases. Si  $V = \{0\}$ , se dirá que la dimensión de  $V$  es cero porque no existe una base para  $V$  (¿por qué?). Sin embargo, es útil definir al conjunto vacío como base para este espacio vectorial trivial.

### Ejemplos 4.12.

1. La dimensión de  $\mathbb{R}^n$  es  $n$ .

2. La dimensión de  $\mathbb{P}_n$  es  $n + 1$ .

3. La dimensión de  $\mathbb{R}^{m \times n}$  es  $mn$ .

4. Si  $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y = z \right\}$ , entonces  $\dim(H) = 1$ . En este caso,  $H$  es el conjunto de todas las ternas que conforman una recta en  $\mathbb{R}^3$ .

5. Si  $H = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y - z = 0 \right\}$ , entonces  $\dim(H) = 2$ . En este caso,  $H$  es el conjunto de todas las ternas que conforman un plano en  $\mathbb{R}^3$ .

□

**Teorema 4.16.** Sea  $V$  un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  tal que  $\dim(V) = n$  y sea  $S$  un subespacio vectorial finito de  $V$ .

(i) Si  $S$  es linealmente independiente, entonces existe una base para  $V$  que contiene al conjunto  $S$ .

(ii) Si  $S$  genera a  $V$ , entonces existe una base para  $V$  que está contenida en el conjunto  $S$ .

**Corolario 4.16.1.** Si  $V$  es un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  con  $\dim(V) = n$ , entonces ningún subconjunto de  $V$  que contenga menos de  $n$  vectores genera a  $V$ .

**Corolario 4.16.2.** Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre un campo  $\mathbb{K}$  y  $S$  es un subespacio de  $V$ , entonces  $\dim(S) \leq \dim(V)$ .

El Teorema 4.16 nos proporciona un método para hallar una base para un espacio vectorial dado. Para hallar una base de un espacio vectorial  $V$  podemos empezar con un subconjunto  $S$  de  $V$  que contenga al menos un vector diferente del cero y que sea LI. Luego escogemos cualquier vector  $u$  que no sea parte de  $\text{gen}(S)$  y construimos un nuevo conjunto  $S \cup \{u\}$ , el cual es también LI. Repetimos este procedimiento con  $S \cup \{u\}$  hasta que haya exactamente tantos vectores como la dimensión de  $V$ . Si el conjunto con  $n$  vectores es linealmente independiente y genera a  $V$ , entonces tal conjunto es una base para tal EV.

**Ejemplos 4.13.**

1. Para hallar una base para  $\mathbb{R}^2$  que contenga a  $u = (1, 1)$  basta encontrar un vector  $v$  que no sea CL de  $u$  (esto es lo mismo que hallar un vector que no esté en  $\text{gen}\{u\}$ ). Veamos que  $(0, 1)$  no es un múltiplo escalar de  $u$ , luego

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es base para  $\mathbb{R}^2$ .

2. El conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

no es una base para  $\mathbb{R}^3$  ya que  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$  y  $S$  sólo tiene dos vectores. Observemos, sin embargo, que  $S$  es LI así que es posible hallar otro conjunto que contenga a  $S$  y que sea base para  $\mathbb{R}^3$ . Es obvio que el vector  $v = (1, 1, 0)$  jamás podrá ser expresado como una CL de los vectores de  $S$ . Así, el conjunto

$$B = S \cup \{v\} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base para  $\mathbb{R}^3$ . Esto se puede verificar al calcular el determinante de la matriz cuyas columnas son los vectores de  $B$ . Este determinante será diferente de cero.

3. El conjunto  $S = \{1, x, 2x - 1, x^2\}$  no es una base para  $\mathbb{P}_2$  pues uno de sus vectores es CL de los demás, i.e.  $S$  es LD. Cualquier base de  $\mathbb{P}_2$  debe tener tres vectores, ya que  $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ . Observe que

$$2x - 1 = (-1) \cdot 1 + (2) \cdot x,$$

por lo que, descartando a  $2x - 1$  de  $S$  obtenemos un conjunto LI con exactamente tres vectores. Esto es,  $B = S \setminus \{2x - 1\}$  es una base para  $\mathbb{P}_2$ . De hecho,  $B$  es su base canónica.

□

**Nota 4.10.** El siguiente teorema nos permite mostrar de manera más fácil si un conjunto de vectores es base de un espacio vectorial  $V$ . Conocida la dimensión de  $V$  basta probar cualquiera de las dos condiciones que se establecen a continuación.

**Teorema 4.17.** Si  $V$  es un espacio vectorial sobre un campo  $\mathbb{K}$  tal que  $\dim(V) = n$ , entonces

- (i) Todo subconjunto de  $V$  que sea linealmente independiente y que contenga  $n$  vectores es una base para  $V$ .
- (ii) Todo subconjunto de  $V$  que genere a  $V$  y contenga  $n$  vectores es una base para  $V$ .

### 4.4.1. Problemas resueltos

**Problema 4.17.** Probar que los únicos subespacios no triviales de  $\mathbb{R}^3$  son las rectas y los planos que pasan por el origen.

**Solución.** El espacio  $\mathbb{R}^3$  es de dimensión finita, así que cualquier subespacio  $S$  de  $\mathbb{R}^3$  es tal que  $\dim(S) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ . Hay cuatro posibles casos:

- (a)  $\dim(S) = 0$
- (b)  $\dim(S) = 1$
- (c)  $\dim(S) = 2$
- (d)  $\dim(S) = 3$

Nos enfocaremos en (b) y (c) ya que (a) y (d) corresponden a los dos subespacios triviales de  $\mathbb{R}^3$ .

- (b) Si  $\dim(S) = 1$ , entonces  $\exists v \in S (v \neq 0 \rightarrow \text{gen}\{v\} = S)$ . Si  $v = (a, b, c)$ , entonces existe  $u = (x, y, z) \in S$  tal que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x = at \\ y = bt \\ z = ct \end{cases} \implies \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$$

que corresponde a una recta en  $\mathbb{R}^3$ .

- (c) Tenemos

$$\begin{aligned} \dim(S) = 2 &\iff \forall u \in S \exists v \in S \forall \alpha \in \mathbb{R} (u \neq \alpha v \rightarrow \text{gen}\{u, v\} = S) \\ &\implies \forall w \in S \exists r, s \in \mathbb{R} (w = ru + sv) \\ &\implies \forall v \in S \forall \beta \in \mathbb{R} ((u \in S \wedge u \neq \beta v) \rightarrow n = u \times v \notin S) \end{aligned}$$

Si  $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ , entonces

$$\begin{aligned} n &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\hat{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\hat{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{k} \\ &= \alpha\hat{i} + \beta\hat{j} + \gamma\hat{k}, \end{aligned}$$

donde  $\alpha = u_2v_3 - u_3v_2$ ,  $\beta = -u_1v_3 + u_3v_1$ ,  $\gamma = u_1v_2 - u_2v_1$  son números reales. Ahora, si tomamos  $w = (x, y, z)$ , se tiene  $w \cdot n = w \cdot (u \times v) = 0$ . Es decir  $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$  corresponde a la ecuación de un plano en  $\mathbb{R}^3$  con vector normal  $n$ .

Por lo tanto, los únicos subespacios propios de  $\mathbb{R}^3$  son los conjuntos de vectores que se encuentran en un plano o una recta que contienen al vector  $(0, 0, 0)$ .  $\square$

**Problema 4.18.** Para el espacio vectorial indicado a continuación, halle una base y su dimensión. Encuentre además la representación del vector dado como CL de los vectores de la base hallada.

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 0 \right\}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

**Solución.** Todo vector  $v \in V$  es tal que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 3y - 2x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Luego

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base para  $V$  y  $\dim(V) = 2$ . Sean escalares  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Planteamos

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/3 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 3\beta - 2\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Así

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5/3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{5}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$\square$

**Problema 4.19.** Para cada espacio vectorial  $V$  y el correspondiente subconjunto  $S$ , determinar si  $S$  es una base para  $V$ .

$$(a) \quad V = \mathbb{R}^3, \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$(b) \quad V = \mathbb{R}^3, \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

**Solución.**

(a) Obsérvese que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Es decir que  $S$  no es LI, de modo no es una base para  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Consideremos la matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Tenemos

$$A \xrightarrow[E_{31}(2)]{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix},$$

por lo que  $\text{rank}(A) = 3$ , de modo que  $S \subset \mathbb{R}^3$  es LI. Además,  $S$  tiene 3 vectores y  $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$ . Por tanto,  $S$  es una base para  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$



## 4.5. Los cuatro subespacios fundamentales

### Espacio columna

Ahora veremos qué relación debe existir entre la matriz de coeficientes y el vector de términos independientes de un sistema de ecuaciones lineales para que este sea soluble. Recordemos que la multiplicación de una matriz por un vector columna es una combinación lineal de las columnas de la matriz. Así, dado un sistema  $Ax = b$  de ecuaciones lineales, este puede expresarse como

$$x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \cdots + x_n A^{(n)} = b,$$

de donde es claro que el vector  $b$  es una combinación lineal de las columnas de  $A$ . Esto es, básicamente, lo que nos permite decir si un sistema de ecuaciones lineales es o no soluble.

**Teorema 4.18.** Sean una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y un vector  $b \in \mathbb{R}^m$ . El sistema de ecuaciones lineales  $Ax = b$  es soluble si y sólo si el vector  $b$  es una combinación lineal de las columnas de  $A$ .

**Nota 4.11.** Podemos deducir que el vector  $b$  del teorema anterior pertenece al subespacio generado por los vectores que constan como columnas de  $A$ . En efecto, las columnas de una matriz generan un subespacio vectorial.

**Corolario 4.18.1.** Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^m$ , entonces el conjunto que contiene a todos los vectores  $b$  tales que  $Ax = b$  es soluble es un subespacio de  $\mathbb{R}^m$ . Más precisamente, dicho conjunto es el subespacio de  $\mathbb{R}^m$  generado por las columnas de  $A$ .

**Definición 4.11** (Espacio columna). Sea  $A$  una matriz de orden  $m \times n$  y de componentes reales. El subespacio generado por las columnas de  $A$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^m$ , se denomina **espacio columna de  $A$**  y se denota por  $\mathcal{R}(A)$ . La dimensión de  $\mathcal{R}(A)$  es el **rank** de  $A$  y se denota  $\text{rank}(A)$ .

Resumiendo lo anterior, para una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se tiene

$$\mathcal{R}(A) = \text{gen}\{A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}\} = \{b \in \mathbb{R}^m : \text{El sistema } Ax = b \text{ es soluble}\}.$$

Esto significa que un sistema  $Ax = b$  es soluble si y sólo si  $b$  pertenece al espacio columna de  $A$ .

**Teorema 4.19.** *Sea una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y un vector  $b \in \mathbb{R}^m$ . Con respecto a la solubilidad del sistema  $Ax = b$ ,*

- (i) *Si  $\text{rank}(A) = m$ , entonces el sistema  $Ax = b$  es soluble para todo vector  $b \in \mathbb{R}^m$ .*
- (ii) *Si  $\text{rank}(A) < m$ , entonces existen  $m - \text{rank}(A)$  restricciones sobre las componentes de  $b$  para que el sistema  $Ax = b$  sea soluble.*

**Ejemplos 4.14.**

1. Si  $A$  es la matriz cero de orden  $m \times n$ , entonces  $\mathcal{R}(A)$  tiene como único elemento al vector cero de  $\mathbb{R}^m$ . Esto se debe a que cualquier combinación lineal de las columnas de  $A$  (vectores cuyas componentes son todas cero) siempre produce el vector cero.
2. Si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  y es invertible, entonces el espacio columna de  $A$  es igual a  $\mathbb{R}^n$ . Para cada vector  $b$  de  $\mathbb{R}^n$  el sistema  $Ax = b$  siempre tiene solución, dada por  $x = A^{-1}b$ ; por eso todo vector  $b$  de  $\mathbb{R}^n$  está en  $\mathcal{R}(A)$  y viceversa.
3. El subespacio de  $\mathbb{R}^4$  generado por

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

corresponde a encontrar el espacio columna de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

En efecto, veamos que un vector  $b \in \mathbb{R}^4$  pertenece a  $\text{gen}(S)$  si y sólo si  $b$  es CL de los vectores de  $S$ . Esto es, existen escalares  $r, s$  tales que

$$r \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}.$$

Así que encontrar  $\text{gen}(S)$  equivale a hallar  $\mathcal{R}(A)$ . Reducimos por filas la matriz aumentada de este sistema de ecuaciones como sigue:<sup>1</sup>

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ -2 & 1 & b_2 \\ 1 & -1 & b_3 \\ 2 & -1 & b_4 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{41}(2)E_{31}(1)]{E_{21}(-2)} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 + 2b_1 \\ 0 & -1 & b_3 - b_1 \\ 0 & -1 & b_4 - 2b_1 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{42}(-1)]{E_{32}(-1)} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 + 2b_1 \\ 0 & 0 & b_3 + b_1 + b_2 \\ 0 & 0 & b_4 + b_2 \end{array} \right]$$

Este sistema es soluble si y sólo si se satisfacen las ecuaciones  $b_1 + b_2 + b_3 = 0$  y  $b_2 + b_4 = 0$ , pues en ese caso  $\text{rank}(A) = \text{rank}[A|b]$ . Por lo tanto,

$$\text{gen}(S) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{R}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} b_1 + b_2 + b_3 = 0, \\ b_2 + b_4 = 0 \end{array} \right\}.$$

<sup>1</sup>no es necesario llevar a una matriz escalonada ni escalonada reducida.

4. Para hallar el espacio columna de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

se deben hallar todos los vectores  $b \in \mathbb{R}^4$  tales que el sistema  $Ax = b$  es soluble. El conjunto que contiene a todos aquellos vectores es el espacio columna de  $A$ . Reducimos por filas la matriz ampliada del sistema  $Ax = b$ .

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & b_1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & b_2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 & b_3 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & b_4 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{E_{21}(-1) \\ E_{31}(2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & b_2 + b_1 \\ 0 & 4 & -3 & 0 & b_3 - 2b_1 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & b_4 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\substack{E_{32}(4) \\ E_{42}(-2)}} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & -7 & -12 & b_3 - 6b_1 - 4b_2 \\ 0 & 0 & 4 & 7 & b_4 + 2b_2 + 2b_1 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{E_{43}(-4/7)} \left[ \begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & -7 & -12 & b_3 - 6b_1 - 4b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/7 & b_4 + \frac{4}{7}b_3 - \frac{2}{7}b_2 - \frac{10}{7}b_1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Dado que no existe ninguna fila nula (la matriz de coeficientes es invertible), concluimos que el espacio generado por las columnas de  $A$  es  $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^4$ . □

**Teorema 4.20.** Sea  $M$  la matriz obtenida al llevar a una matriz  $A$  a una forma escalonada por filas. Los vectores columna de  $M$  que contienen pivote forman una base para  $\mathcal{R}(A)$ .

**Ejemplo 4.15.** Veamos que la matriz

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es escalonada por filas. Por el Teorema 4.20 tenemos que

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base para  $\mathcal{R}(C)$  y por tanto  $\text{gen}(B) = \mathcal{R}(C)$ . □

**Nota 4.12.** Si la matriz del ejemplo anterior no fuera escalonada, entonces hubiéramos realizado sobre ella operaciones elementales de fila que nos conduzcan a una matriz escalonada por filas. Las columnas de la matriz no escalonada que se corresponden con aquellas que tienen pivote (en la escalonada) conforman una base del espacio columna de la matriz no escalonada; otra base es aquella dada por los vectores que contienen pivote en su forma escalonada.

## Espacio nulo

**Teorema 4.21.** Sea  $A$  una matriz de orden  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . El conjunto solución del sistema homogéneo  $Ax = 0$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 4.12** (Espacio nulo). Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . El conjunto solución del sistema homogéneo  $Ax = 0$  es llamado **espacio nulo de  $A$**  y se denota  $\mathcal{N}(A)$ . La dimensión de  $\mathcal{N}(A)$  se denomina **nulidad** de  $A$  y se denota  $\text{nul}(A)$ .

**Nota 4.13.** Nótese que, en comparación con el espacio nulo de una matriz, el conjunto solución de un sistema  $Ax = b$  no tiene porque ser un subespacio vectorial.

### Ejemplos 4.16.

1. Si  $A$  es la matriz cero de orden  $m \times n$ , entonces para todo vector  $x' \in \mathbb{R}^n$  se cumple que  $Ax = 0$ . Esto quiere decir que cualquier vector  $x' \in \mathbb{R}^n$  es solución de  $Ax = 0$  y por tanto  $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^n$ .
2. Si  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es invertible, entonces el sistema homogéneo  $Ax = 0$  tiene por solución a la trivial, es decir, sólo el vector cero de  $\mathbb{R}^n$  satisface  $Ax = 0$ . De ahí que  $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ , donde  $0 \in \mathbb{R}^n$ .
3. El espacio nulo de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

es el conjunto solución del sistema homogéneo  $Ax = 0$ . Para resolver este sistema debemos llevar su matriz aumentada a su forma escalonada reducida por filas, pero dado que la columna derecha de  $[A|0]$  es el vector cero, simplemente tomaremos a la matriz  $A$ .

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} E_{31}(1) \\ E_{21}(3) \end{smallmatrix}]{\phantom{E_{32}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{E_{32}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Como las variables básicas son las correspondientes a las columnas que contienen pivote, tenemos que

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = -x_4 \end{cases}$$

y dado que las variables libres pueden tomar cualquier valor, podemos representar la solución de  $Ax = 0$  en forma paramétrica como

$$x_1 = -2s - 3t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = -t, \quad x_4 = t,$$

donde  $s, t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto la solución general de este sistema homogéneo es

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2s - 3t \\ s \\ -t \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observemos que toda solución particular de  $Ax = 0$  es combinación lineal de

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

por lo que el espacio nulo de  $A$  es

$$\mathcal{N}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Por último, una base para  $\mathcal{N}(A)$  es

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

□

**Nota 4.14.** En general, una base para el espacio nulo de una matriz  $A$  está dada por los vectores que aparecen en la solución general del sistema homogéneo  $Ax = 0$ .

**Teorema 4.22** (Dimensión del espacio nulo). *Sea una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . La dimensión de  $\mathcal{N}(A)$  es  $n - \text{rank}(A)$ .*

**Teorema 4.23.** *Sea  $Ax = b$  un sistema de ecuaciones lineales consistente. Si  $x_0$  es cualquier solución de  $Ax = b$  y si  $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  es una base para  $\mathcal{N}(A)$ , entonces cada solución de  $Ax = b$  puede expresarse como*

$$x = x_0 + \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r, \quad (4.2)$$

donde  $\alpha_i$ ,  $i \in \{1, \dots, r\}$ , es un escalar.

La combinación lineal  $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_r v_r$ , que aparece en (4.2) se conoce como la *solución general de  $Ax = 0$* . En cambio, la *solución general de  $Ax = b$*  es la expresión completa de (4.2). Una *solución particular de  $Ax = b$*  es aquella que se obtiene de su solución general y que está libre de la elección de parámetros; por ejemplo, al hacer cada escalar igual a 0 en (4.2) se obtiene la solución particular  $x = x_0$ . Dicho esto, el Teorema 4.23 se puede entender así: la solución general de un sistema consistente  $Ax = b$  puede expresarse como la suma de una solución particular de dicho sistema y la solución general del sistema homogéneo asociado a la matriz  $A$ .

Hemos visto que una matriz tiene asociados dos espacios vectoriales: el espacio columna y el espacio fila. Si consideramos su transpuesta, obtenemos otros dos espacios vectoriales adicionales.

## Espacio fila

**Definición 4.13** (Espacio fila). Sea  $A$  una matriz de orden  $m \times n$  y de componentes reales. El espacio vectorial generado por las filas de  $A$ , denotado por  $\mathcal{R}(A^T)$ , es un subespacio de  $\mathbb{R}^n$  y se denomina **espacio fila de  $A$** .

**Nota 4.15.** Obsérvese que el espacio fila de una matriz es igual al espacio columna de su transpuesta. De ahí nuestra notación  $\mathcal{R}(A^T)$ .

**Teorema 4.24** (Dimensión del espacio fila). Sea una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . La dimensión de  $\mathcal{R}(A^T)$  es igual a  $\text{rank}(A^T)$ .

**Teorema 4.25.** Sea  $M$  la matriz obtenida al reducir  $A$  a una forma escalonada por filas. Los vectores fila de  $M$  que contienen pivote forman una base para  $\mathcal{R}(A^T)$ .

**Ejemplo 4.17.** Veamos que la matriz

$$F = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

está en su forma escalonada. Por el Teorema 4.25, el conjunto

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}^T \right\}$$

es una base para  $\mathcal{R}(F^T)$  y por tanto  $\text{gen}(B) = \mathcal{R}(F^T)$ .

□

## Espacio nulo izquierdo

**Definición 4.14** (Espacio nulo izquierdo). Sea  $A$  una matriz de orden  $m \times n$  y de componentes reales. El conjunto solución del sistema homogéneo  $A^T x = 0$  se denomina **espacio nulo izquierdo de  $A$**  y se denota por  $\mathcal{N}(A^T)$ .

**Teorema 4.26** (Dimensión del espacio nulo izquierdo). Sea una matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . La dimensión de  $\mathcal{N}(A^T)$  es igual a  $m - \text{rank}(A^T)$ .

**Teorema 4.27** (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA LINEAL). Para cada matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  se tiene que

- (i)  $\dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{R}(A^T)) = \text{rank}(A)$ ,
- (ii)  $\dim(\mathcal{R}(A^T)) + \dim(\mathcal{N}(A)) = n$ ,
- (iii)  $\dim(\mathcal{R}(A)) + \dim(\mathcal{N}(A^T)) = m$ .

**Ejemplo 4.18.** Sea

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0, w = -z \right\}.$$

Hallar

- (a) Una matriz  $A$  tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{N}(A)$ .
- (b) Una base y la dimensión de  $\mathcal{H}$ .
- (c) Una matriz  $B$  tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{R}(B^T)$ .
- (d) Una matriz  $C$  de columnas LI tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{R}(C)$ .
- (e) Una matriz  $D$  tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{N}(D^T)$ .

**Solución.**

- (a) Un vector  $X = (x, y, z, w)$  está en  $\mathcal{H}$  si y sólo si satisface las ecuaciones  $x - y + z = 0$  y  $w = -z$ , o equivalentemente  $X \in \mathcal{H}$  si y sólo si  $X$  es solución del siguiente sistema homogéneo

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ z + w = 0 \end{cases}$$

cuya forma matricial es

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

En otras palabras,  $\mathcal{H} = \mathcal{N}(A)$  con  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

- (b) Una base para  $\mathcal{H} = \mathcal{N}(A)$  se obtiene de la solución general del sistema  $Ax = 0$  dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y + w \\ y \\ -w \\ w \end{bmatrix} = y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}; y, w \in \mathbb{R}.$$

Luego, una base para  $\mathcal{H}$  es  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  y  $\dim(\mathcal{H}) = 2$ .

- (c) Para hallar  $B$  tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{R}(B^T)$ , basta tomar como filas de  $B$ , los vectores de una base de  $\mathcal{H}$ , así

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (d) Para hallar una matriz  $C$  de columnas LI tal que  $\mathcal{H} = \mathcal{R}(C)$ , basta colocar como columnas de  $C$ , los vectores de una base para  $\mathcal{H}$ . Esto sugiere que

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (e) Como  $\mathcal{H} = \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(\left(A^T\right)^T\right)$ , entonces podemos elegir

$$D = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

### 4.5.1. Problemas resueltos

**Problema 4.20.** Sea la matriz  $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y los vectores  $b$  y  $b'$  en  $\mathbb{R}^3$  dados a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 14 \end{bmatrix}, \quad b' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Hallar todos los vectores  $d \in \mathbb{R}^3$  tales que  $Ax = d$  es soluble.  
 (b) Hallar  $\mathcal{R}(A)$ .  
 (c) Hallar  $\mathcal{N}(A)$ .  
 (d) Determinar si  $Ax = b$  y  $Ax = b'$  son solubles. Si alguno de ellos es soluble, entonces  
 (i) Expresar la solución en términos de una solución particular y la solución general del sistema homogéneo asociado  $Ax = 0$ .  
 (ii) Expresar el vector de términos independientes como una combinación lineal de las columnas de  $A$ .  
 (e) Dar una interpretación geométrica, si es posible, para  $\mathcal{R}(A)$ ,  $\mathcal{N}(A)$  y el conjunto solución de cada sistema que resulte soluble.

**Solución.**

- (a) Sea un vector  $d = (d_1, d_2, d_3)$  en  $\mathbb{R}^3$ . El sistema  $Ax = d$  es soluble si  $d$  es combinación lineal de las columnas de  $A$ , i.e. si  $d \in \mathcal{R}(A)$ . Procedemos con eliminación gaussiana sobre  $[A|d]$ :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & d_1 \\ -4 & 2 & -2 & d_2 \\ 6 & -2 & 4 & d_3 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{array}{l} E_{21}(-2) \\ E_{31}(3) \end{array}]{\rightarrow} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 + 2d_1 \\ 0 & 1 & 1 & d_3 - 3d_1 \end{array} \right] \xrightarrow{P_{23}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & d_1 \\ 0 & 1 & 1 & d_3 - 3d_1 \\ 0 & 0 & 0 & d_2 + 2d_1 \end{array} \right].$$

Luego todos los vectores  $d \in \mathbb{R}^3$  tales que  $Ax = d$  es soluble, satisfacen  $2d_1 + d_2 = 0$ .

(b) Por (a) sabemos que

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2d_1 + d_2 = 0 \right\}.$$

(c) (Deducimos de (a).) El sistema reducido  $Ux = 0$  equivalente a  $Ax = 0$  es

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 = 0, \\ x_3 = t, \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(x_2 - x_3) = -t, \\ x_2 = -t, \\ x_3 = t, \end{cases}$$

así, los vectores  $x$  que son solución de  $Ux = 0$  tienen la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De aquí concluimos que

$$\mathcal{N}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(d) Tenemos que  $2(5) + (-10) = 0$ , luego  $b \in \mathcal{R}(A)$  por lo que  $Ax = b$  es soluble. Por otra parte  $2(0) + (1) = 1 \neq 0$  de modo que  $Ax = b'$  no es soluble pues  $b' \notin \mathcal{R}(A)$ .

(i) Resolvemos  $Ax = b$  utilizando la forma escalonada de  $[A|d]$  encontrada en (a):

$$\begin{aligned} [A|b] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 14 - 3 \cdot 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 + 2 \cdot 5 \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\longrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ x_3 = t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(5 + x_2 - x_3) = 2 - t \\ x_2 = -1 - x_3 = -1 - t \\ x_3 = t. \end{cases} \end{aligned}$$

Entonces, todos los vectores  $x = (x_1, x_2, x_3)$  tales que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Sol. Particular}} + t \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\text{Sol. General de } Ax = 0}, \quad t \in \mathbb{R},$$

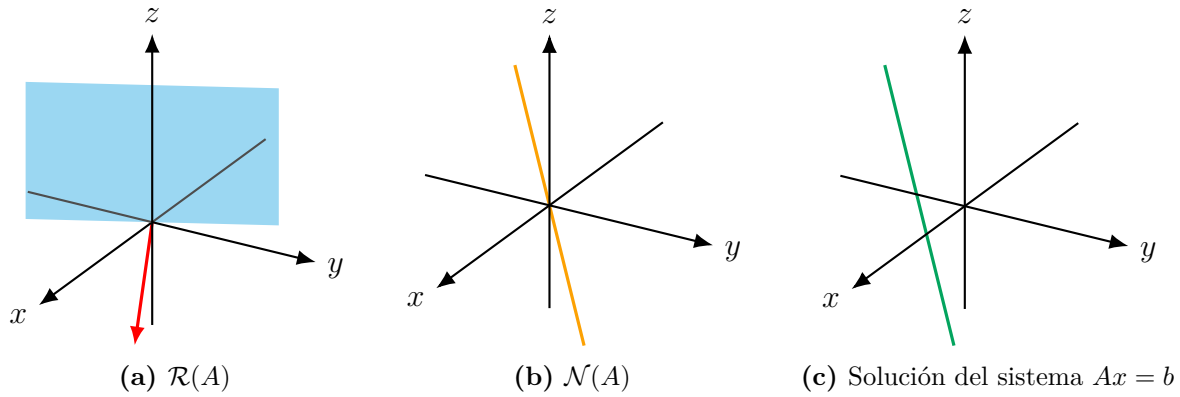
son solución del sistema  $Ax = b$ .

(ii) Hacemos  $t = 0$  y obtenemos que  $(2, -1, 0)$  es solución de  $Ax = b$ :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 6 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

Así,

$$\begin{bmatrix} 5 \\ -10 \\ 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix} - 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$



**Figura 4.5.1:** Problema 4.20 (e). Nótese que la solución de  $Ax = b$  y  $\mathcal{N}(A)$  son dos rectas paralelas, pero sólo  $\mathcal{N}(A)$  pasa por el origen ya que es un espacio vectorial.

(e) Obsérvese la Figura 4.5.1.

□

**Problema 4.21.** Dados  $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -2 \\ -17 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$  y  $b' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,

- (a) Hallar todos los vectores  $d \in \mathbb{R}^3$  tales que el sistema  $Ax = d$  tiene solución.
- (b) Hallar  $\mathcal{R}(A)$  y  $\mathcal{N}(A)$ .
- (c) Determinar si los sistemas  $Ax = b$  y  $Ax = b'$  son solubles.

**Solución.**

- (a) Consideremos  $d = (d_1, d_2, d_3) \in \mathbb{R}^3$ . Llevemos a una forma escalonada la matriz aumentada del sistema  $Ax = d$ .

$$\begin{aligned} & \left[ \begin{array}{ccc|c} -3 & 1 & 1 & d_1 \\ 4 & 2 & -2 & d_2 \\ -17 & -1 & 7 & d_3 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{32}(-4)]{E_{12}(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & d_1 + d_2 \\ 4 & 2 & -2 & d_2 \\ -1 & 7 & -1 & d_3 + 4d_2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow[E_{31}(-1)]{E_{21}(4)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & d_1 + d_2 \\ 0 & -10 & 2 & -4d_1 - 3d_2 \\ 0 & 10 & -2 & d_1 + 5d_2 + d_3 \end{array} \right] \xrightarrow[M_2(-1/10)]{E_{32}(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & d_1 + d_2 \\ 0 & 1 & -1/5 & (4d_1 + 3d_2)/10 \\ 0 & 0 & 0 & -3d_1 + 2d_2 + d_3 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Esto nos dice que los vectores  $d \in \mathbb{R}^3$ , tales que  $Ax = d$  es soluble, son todos aquellos cuyas componentes satisfacen  $-3d_1 + 2d_2 + d_3 = 0$ .

- (b) Como  $\mathcal{R}(A) = \{d \in \mathbb{R}^3 : Ax = d \text{ es soluble}\}$  se tiene que

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ \left[ \begin{array}{c} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{array} \right] \in \mathbb{R}^3 : -3d_1 + 2d_2 + d_3 = 0 \right\}.$$

Por otro lado, sabemos de (a) que  $A$  es equivalente por filas a

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} x_1 = x_3 - 3x_2 \\ x_2 = \frac{1}{5}x_3 \\ x_3 = t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

y así cualquier solución de  $Ux = 0$  (y por tanto de  $Ax = 0$ ) tiene la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2/5 \\ 1/5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{N}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}.$$

- (c) Basta determinar si  $b = (2, 3, 2)$  y  $b' = (1, 1, 1)$  pertenecen o no a  $\mathcal{R}(A)$ . El vector  $b$  no pertenece a  $\mathcal{R}(A)$  ya que  $-3(2) + 2(3) + 2 = 2 \neq 0$ , luego  $Ax = b$  no es soluble. Por el contrario,  $b'$  sí pertenece a  $\mathcal{R}(A)$  porque  $-3(1) + 2(1) + 1 = 0$ , luego  $Ax = b'$  es soluble.

□

**Problema 4.22.** Sea

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}.$$

Hallar:

- Una matriz  $A$  tal que  $\mathbb{H} = \mathcal{N}(A)$
- Una base para  $\mathbb{H} = \mathcal{N}(A)$
- Una matriz  $B$  tal que  $\mathbb{H} = \mathcal{R}(B^T)$
- Una matriz  $C$  de columnas LI tal que  $\mathbb{H} = \mathcal{R}(C)$
- Una matriz  $D$  tal que  $\mathbb{H} = \mathcal{R}(D^T)$ .

**Solución.** Note que las condiciones que definen al conjunto  $\mathbb{H}$  conforman un sistema de ecuaciones que se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Llamaremos  $A$  a la matriz de coeficientes de este sistema.

- El espacio nulo de  $A$  es justamente  $\mathbb{H}$  debido a cómo  $A$  fue construida.

- (b) Una base para  $\mathbb{H} = \mathcal{N}(A)$ , se obtiene de la solución general del sistema  $Ax = 0$  que en forma paramétrica es

$$x_1 = -5r + 3s, \quad x_2 = r, \quad x_3 = s, \quad x_4 = 16r - 9s;$$

donde  $r, s \in \mathbb{R}$ . Estas ecuaciones son consecuencia de las ecuaciones que definen a  $\mathbb{H}$ . Entonces, podemos expresar lo siguiente.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5r + 3s \\ r \\ s \\ 16r - 9s \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Por tanto,

$$\left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix} \right\}$$

es base para  $\mathbb{H}$ .

- c) Para hallar  $B$  tal que  $\mathbb{H} = \mathcal{R}(B^T)$  basta tomar como filas de  $B$  los vectores de una base de  $\mathbb{H}$ :

$$B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 & 16 \\ 3 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}.$$

- d) Basta tomar como columnas de  $C$  los vectores de una base para  $\mathbb{H}$ :

$$C = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 16 & -9 \end{bmatrix}.$$

- (e) Como  $\mathbb{H} = \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}((A^T)^T)$ , entonces podemos elegir

$$D = A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Capítulo 5:

▶ **Transformaciones lineales**

## Capítulo 5:

# ► Transformaciones lineales

En matemáticas a menudo aparecen objetos como conjuntos y funciones, que son los “building blocks” de esta ciencia. En este capítulo introduciremos cierto tipo de funciones llamadas transformaciones lineales que son frecuentes en el estudio de las matemáticas. Los conjuntos sobre los que se construye estas funciones son espacios vectoriales, que pueden ser de dimensión finita o infinita. Aunque nos centraremos solamente en los de dimensión finita, es en los de dimensión infinita en los que las aplicaciones de las transformaciones lineales son de gran importancia. Sin embargo, conocer sobre ellas nos hará posible mirar al álgebra lineal desde otra perspectiva.

Una transformación lineal construida sobre espacios vectoriales de dimensión finita puede llamarse *transformación matricial*. Como veremos, lo que hace una transformación lineal sobre los elementos de su dominio es básicamente lo mismo que haría una matriz si se multiplicara por tales elementos. Dejaremos de ver a las matrices como meros arreglos rectangulares y las usaremos para *transformar* un vector en otro mediante la multiplicación matricial.



### 5.1. Definición de transformación lineal

Recordemos que una función es una regla que asocia a cada elemento  $a$  de su dominio  $A$  un y sólo un elemento  $b$  de su codominio  $B$ , en cuyo caso escribimos  $b = f(a)$  para denotar que  $b$  es la imagen de  $a$  bajo  $f$ . Esto se resume al escribir lo siguiente, que se lee “la función  $f$  definida de  $A$  en  $B$  tal que lleva a  $a$  en  $f(a)$ ”.

$$\begin{array}{lcl} f : A & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & f(a) \end{array}$$

Como toda función, una transformación lineal (TL) relaciona a un elemento de su dominio con un único elemento de su codominio. La principal diferencia con las funciones “comunes” del cálculo de una variable radica en que los conjuntos de partida y de llegada son espacios vectoriales (usualmente  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  con  $m, n \in \mathbb{N}$ ), y que, además, una transformación lineal obedece dos propiedades importantes enunciadas en la siguiente definición.

**Nota 5.1.** Es usual emplear letras mayúsculas en lugar de minúsculas para denotar a una TL, pero no debería haber ningún problema si no fuere así.

**Definición 5.1** (Transformación lineal). Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales sobre un campo  $\mathbb{K}$ . A una función  $T : V \rightarrow W$  se le denomina **transformación lineal** (o **aplicación**) si se cumple las siguientes dos propiedades:

- (i) (Homogeneidad) Para todo  $\lambda \in \mathbb{K}$  y cualquier  $u \in V$  se tiene  $T(\lambda u) = \lambda T(u)$ .
- (ii) (Aditividad) Para todo  $v, w \in V$  se satisface  $T(v + w) = T(v) + T(w)$ .

Si  $V = W$ , entonces  $T$  se **denomina operador lineal** en  $V$ .

La segunda propiedad de la definición anterior puede interpretarse así: la imagen de una combinación lineal es la combinación lineal de las imágenes. En algunos textos se dice que una transformación lineal preserva las operaciones de suma vectorial y multiplicación por escalar porque no importa si se realiza las operaciones antes o después de aplicar la TL, el resultado es el mismo.

Para mostrar que una función  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal basta mostrar que, dados  $u, v \in V$  y  $\alpha \in K$ ,  $T$  cumple

$$T(\alpha u + v) = \alpha T(u) + T(v),$$

lo cual es resultado del caso general en el que

$$T(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n) = k_1 T(v_1) + k_2 T(v_2) + \cdots + k_n T(v_n),$$

para  $k_1, \dots, k_n$  escalares. Incluso se tiene el teorema siguiente:

**Teorema 5.1.** Si  $T : V \rightarrow W$  es transformación lineal, entonces

- (i)  $T(0) = 0$ .
- (ii)  $T(-v) = -T(v)$  para todo  $v \in V$ .
- (iii)  $T(u - v) = T(u) - T(v)$  para todo  $u, v \in V$ .

En la sección 2.2 vimos que un sistema de ecuaciones lineales de tamaño  $m \times n$  puede ser representado utilizando la notación matricial

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

o simplemente como  $Ax = b$ . Desde otra perspectiva, podemos decir que la expresión  $Ax = b$  transforma el vector  $x$  en el vector  $b$  al multiplicar a  $x$  por  $A$  desde la izquierda. Llamamos a esta transformación *transformación matricial* y la denotamos  $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ , porque las entradas de  $A$  pertenecen a  $\mathbb{K}$  y el tamaño esta matriz es  $m \times n$ . (Si  $n = m$ , la llamaremos *operador matricial*.)

**Ejemplos 5.1** (Algunas transformaciones lineales).

1. (Transformación nula) Si  $A$  es la matriz cero de  $\mathbb{R}^{m \times n}$ , entonces

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\longmapsto Ax = 0 \end{aligned}$$

es la TL que envía cada vector de  $\mathbb{R}^n$  en el vector cero de  $\mathbb{R}^m$ .

2. (Operador identidad) Si  $I$  es la matriz identidad de orden  $n \times n$ , entonces

$$\begin{aligned} T_I : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto Ix = x \end{aligned}$$

es transformación lineal.

3. Sea  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$  un polinomio de  $\mathbb{P}_n$ . La función  $f : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_{n+1}$  tal que  $f(p(x)) = xp(x) = a_n x^{n+1} + a_{n-1} x^n + \cdots + a_1 x^2 + a_0 x$  es una TL.

□

**Ejemplos 5.2** (Algunas transformaciones no lineales).

1. Las funciones trigonométricas no son lineales, por ejemplo:

$$\begin{aligned} S : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \text{sen}(x) \end{aligned}$$

2. Las funciones logarítmica y exponencial no son lineales, por ejemplo:

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (t, \log(t)) \end{aligned}$$

3. Las funciones escalares no son necesariamente lineales, por ejemplo:

$$\begin{aligned} U : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

□

En el ejemplo anterior se habló de funciones no lineales. Esto es porque ellas no conservan las propiedades de la línea recta: ser recta. Piense, por ejemplo, en una línea recta como un conjunto de puntos (o vectores) del plano  $\mathbb{R}^2$ . Cuando se aplique una TL a ese conjunto de puntos, estos seguirán siendo parte de una recta, y asimismo, todas las rectas siempre quedan igualmente espaciadas después de haber sido transformadas. Dado que una TL respeta la estructura de EV, el vector cero (de su dominio) siempre es llevado en el vector cero (de su codominio) porque de no ser así, eso supondría (geoméricamente) que el espacio no sólo se ha transformado sino que también se ha desplazado. En pocas palabras, vea a una transformación lineal, desde un punto de vista geométrico, como una función que transforma el espacio sin curvarlo, y manteniendo su origen fijo.

**Definición 5.2.** Sea  $T : V \rightarrow W$  transformación lineal. El subconjunto de vectores de  $V$  que  $T$  envía (o transforma) en el vector cero de  $W$  se denomina **núcleo** de  $T$  y se denota  $\ker(T)$ :

$$\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0\}.$$

El subconjunto de vectores de  $W$  que son la imagen de (al menos) un vector de  $V$  bajo  $T$  se denomina **imagen** de  $T$  y se denotará  $\text{Im}(T)$ :

$$\text{Im}(T) = \{w \in W : w = T(v) \text{ para algún } v \in V\}.$$

Básicamente podemos decir que una transformación lineal es aquella función que respeta la estructura de espacio vectorial porque preserva la cerradura bajo la suma y la multiplicación por escalar. Si suma dos de sus preimágenes, el resultado es un vector que pertenece al conjunto de preimágenes (el dominio de la TL); asimismo, sumar dos de sus imágenes da lugar a un vector que pertenece al conjunto de sus imágenes. Lo mismo pasa con el producto por escalar.

**Teorema 5.2.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal.

(i) El núcleo de  $T$  es un subespacio vectorial de  $V$ .

(ii) El rango de  $T$  es un subespacio vectorial de  $W$ .

**Ejemplo 5.3.** Sea  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$T(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

Veamos que  $T$  tiene asociada una matriz  $A$  de orden  $2 \times 3$  tal que  $T(x) = Ax$ . En efecto, para cualquier  $x \in \mathbb{R}^3$  se tiene

$$T(x) = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = Ax.$$

Ahora, para cada par de vectores  $x, y \in \mathbb{R}^3$  y cualquier  $r \in \mathbb{R}$  se tiene

$$T(x + ry) = A(x + ry) = Ax + rAy = T(x) + rT(y),$$

que resulta simplemente de aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación entre matrices. Esto muestra que  $T$  es una TL.  $\square$

**Nota 5.2.** En el ejemplo anterior escribimos  $T(x_1, x_2, x_3)$ ; sin embargo, es más usual escribir  $T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ . Esta notación es una abreviación de  $T \left( \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right)$  que, aunque es correcta, no es muy útil y tampoco imprescindible.

**Definición 5.3.** Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal tal que su núcleo e imagen son espacios vectoriales de dimensión finita. La dimensión de  $\ker(T)$  se llama **nulidad** de  $T$ . La dimensión de  $\text{Im}(T)$  se denomina **rango** de  $T$ .

**Ejemplos 5.4.**

1. (Transformación derivada) Sea la función  $D_x : C^1[a, b] \rightarrow C[a, b]$  donde  $C^1[a, b]$  denota el conjunto de funciones con primera derivada continua en  $[a, b]$ . Sabemos que la derivada de una suma es la suma de las derivadas y que la derivada de un múltiplo escalar es el múltiplo escalar de la derivada; así, si  $f, g \in C^1[a, b]$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} D_x(f + \alpha g) &= \frac{d}{dx}(f + \alpha g) \\ &= \frac{d}{dx}(f) + \frac{d}{dx}(\alpha g) \\ &= \frac{d}{dx}(f) + \alpha \frac{d}{dx}(g) \\ &= D_x(f) + \alpha D_x(g) \end{aligned}$$

Esto muestra que  $D_x$  es una transformación lineal. Por otra parte,

$$\ker(D_x) = \left\{ f \in C^1[a, b] : \frac{df}{dx} = 0 \right\} = \left\{ f \in C^1[a, b] : f \text{ es constante en } [a, b] \right\},$$

$$\text{Im}(D_x) = \left\{ \frac{dg}{dx} \in C[a, b] : g \text{ es función derivable en } [a, b] \right\} = C[a, b].$$

Este es un ejemplo de una transformación entre espacios vectoriales de dimensión infinita.

2. Considere la función  $T : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$  (del espacio de funciones polinomiales en  $\mathbb{R}$ ) definida por

$$T(p) = \int_a^b p(x) dx,$$

donde  $p$  es una función polinomial. Usando las propiedades de la integral definida podemos escribir

$$T(p + q) = \int_a^b (p(x) + q(x)) dx = \int_a^b p(x) dx + \int_a^b q(x) dx = T(p) + T(q)$$

para cualesquiera funciones polinomiales  $p$  y  $q$ . Además,

$$T(kp) = \int_a^b k(p(x)) dx = k \int_a^b p(x) dx = kT(p),$$

donde  $k$  es un escalar. El núcleo e imagen de  $T$  son  $\ker(T) = \{p(x) = 0\}$  y  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}$ .

3. (Operador integral) Sea

$$\begin{aligned} T : C[a, b] &\longrightarrow C[a, b] \\ f &\longmapsto \int_a^x f(t) dt. \end{aligned}$$

Veamos que  $T$  es transformación lineal. Para cada par de funciones  $f, g \in C[a, b]$ , cada  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $x \in [a, b]$  se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} T(\alpha f + g) &= \int_a^x (\alpha f + g)(t) dt \\ &= \int_a^x [\alpha f(t) + g(t)] dt \\ &= \alpha \int_a^x f(t) dt + \int_a^x g(t) dt \\ &= \alpha T(f) + T(g) \end{aligned}$$

Esto muestra que, efectivamente,  $T$  es TL. Finalmente, el núcleo de  $T$  contiene todas las funciones  $f \in C[a, b]$  tal que

$$\int_a^x f(t) dt = 0.$$

Si derivamos ambos lados (teniendo en cuenta la regla de la cadena) obtenemos

$$f(x) \frac{d}{dx} (x) - f(a) \frac{d}{dx} (a) = 0 \implies f(x) = 0.$$

Esto es,  $\ker(T) = \{0\}$ , donde 0 denota la función constante cero de  $C[a, b]$ . Por otra parte,

$$\operatorname{Im}(T) = \left\{ g \in C[a, b] : g(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ para algún } f \in C[a, b] \right\}.$$

Note que la expresión que define a  $\operatorname{Im}(T)$  es equivalente a  $g'(x) = f(x)$ . Como tomamos  $f$  en  $C[a, b]$ , entonces  $g'$  también es continua. Eso quiere decir que  $g$  pertenece<sup>1</sup> a  $C^1[a, b]$ . Además, es claro que  $g(a) = 0$  y por tanto

$$\operatorname{Im}(T) = \left\{ g \in C^1[a, b] : g(a) = 0 \right\}.$$

□

**Teorema 5.3.** *Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal. Si  $V$  es dimensionalmente finito, entonces la imagen de  $T$  es de dimensión finita y*

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{Im}(T)) = \dim(V).$$

### 5.1.1. Problemas resueltos

**Problema 5.1.** Determine cuáles de las siguientes funciones  $T$  son transformaciones lineales. En caso de que  $T$  sea una transformación lineal encuentre su núcleo y su imagen.

- (a)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $T(x, y) = xy$
- (b)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x, y) = (2, x)$
- (c)  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $T(a, b) = (0, a)$
- (d)  $T : \mathbb{K}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{K}^{n \times m}$  tal que  $T(A) = A^T$

**Solución.**

- (a) Sean  $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$  vectores de  $\mathbb{R}^2$  arbitrarios y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} T(u + \alpha v) &= T \begin{bmatrix} u_1 + \alpha v_1 \\ u_2 + \alpha v_2 \end{bmatrix} \\ &= (u_1 + \alpha v_1)(u_2 + \alpha v_2) \\ &= u_1 u_2 + \alpha u_1 v_2 + \alpha v_1 u_2 + \alpha^2 v_1 v_2 \\ &= T(u) + \alpha u_1 v_2 + \alpha u_2 v_1 + \alpha^2 T(v) \\ &\neq T(u) + T(v), \end{aligned}$$

por lo que  $T$  no es una TL.

- (b) Basta un contraejemplo para ver que  $T$  no es TL. Sea  $\alpha \in \mathbb{R}$ , se tiene  $T(\alpha(1, 1)) = T(\alpha, \alpha) = (2, \alpha) \neq \alpha T(1, 1)$ . Luego  $T$  no es transformación lineal. Geométricamente,  $T$  envía los vectores de  $\mathbb{R}^2$  a la recta  $x = 2$  perpendicular al eje  $x$  y que no pasa por el origen. ¿Puede ver ahora por qué no es lineal?

---

<sup>1</sup>El conjunto  $C^1[a, b]$  se llama conjunto de las funciones de clase  $C^1$  en  $[a, b]$ , i.e. de funciones con primera derivada continua en  $[a, b]$ .

(c) Sean  $u = (a, b)$  y  $v = (c, d)$  elementos de  $\mathbb{R}^2$  y  $\alpha$  un escalar. Se tiene

$$T(u + \alpha v) = T \begin{bmatrix} a + \alpha c \\ b + \alpha d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a + \alpha c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 0 \\ c \end{bmatrix} = T(u) + \alpha T(v).$$

Por tanto,  $T$  es TL. Geométricamente,  $T(a, b)$  representa una recta que pasa por el origen del plano  $\mathbb{R}^2$  y es perpendicular al eje de las abscisas: la recta  $x = 0$ , la cual define el eje  $y$ . El núcleo de  $T$  es

$$\begin{aligned} \ker(T) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\}, \end{aligned}$$

y la imagen de  $T$  es

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ para algún } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \right\}. \end{aligned}$$

¿Puede explicar por qué  $\ker(T) = \text{Im}(T)$ ?

(d) Sean

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}$$

matrices de  $\mathbb{K}^{m \times n}$  y  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Se tiene

$$\begin{aligned}
 T(A + \lambda B) &= T \begin{bmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{12} + \lambda b_{12} & \cdots & a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ a_{21} + \lambda b_{21} & a_{22} + \lambda b_{22} & \cdots & a_{2n} + \lambda b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + \lambda b_{m1} & a_{m2} + \lambda b_{m2} & \cdots & a_{mn} + \lambda b_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & a_{21} + \lambda b_{21} & \cdots & a_{m1} + \lambda b_{m1} \\ a_{12} + \lambda b_{12} & a_{22} + \lambda b_{22} & \cdots & a_{m2} + \lambda b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} + \lambda b_{1n} & a_{2n} + \lambda b_{2n} & \cdots & a_{mn} + \lambda b_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda b_{11} & \lambda b_{21} & \cdots & \lambda b_{m1} \\ \lambda b_{12} & \lambda b_{22} & \cdots & \lambda b_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_{1n} & \lambda b_{2n} & \cdots & \lambda b_{mn} \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}^T + \lambda \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}^T \\
 &= T(A) + \lambda T(B).
 \end{aligned}$$

Por lo que  $T$  es TL. Es evidente que  $A$  está en el núcleo de  $T$  si y sólo si  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  y  $T(A) = 0$ , es decir cuando  $A^T = 0$ , pero esto es equivalente a que  $A$  sea la matriz cero de  $\mathbb{K}^{m \times n}$ . Así,  $\ker(T) = \{0\} \subset \mathbb{K}^{m \times n}$ . Por otra parte, tenga en cuenta que cualquier matriz de  $\mathbb{K}^{n \times m}$  tiene una transpuesta que pertenece a  $\mathbb{K}^{m \times n}$ , de ahí que  $\text{Im}(T) = \mathbb{K}^{n \times m}$ . (¿Puede comprobar esto usando el Teorema 5.3?)  $\square$

**Problema 5.2.** Dada la función  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix},$$

encuentre una matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  tal que  $T(x) = Ax$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . ¿Es  $T$  una TL? Justifique su respuesta. Además, dé una interpretación geométrica del trabajo que  $T$  realiza sobre los vectores de  $\mathbb{R}^2$ .

**Solución.** Nótese que

$$\begin{bmatrix} -x \\ -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x + 0y \\ 0x - y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

luego  $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  es tal que  $T(x) = Ax$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$ . Sean  $u, v \in \mathbb{R}^2$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , tenemos  $T(u + \alpha v) = A(u + \alpha v)$ . Aplicando la propiedad distributiva matricial se obtiene

$$Au + \alpha Av = T(u) + \alpha T(v).$$

Esto muestra que  $T$  es transformación lineal. La interpretación geométrica que se pide la contiene la matriz  $A$ , pues ella nos dice cómo se ha transformado el espacio (vectorial), i.e.

el plano. La primera columna de  $A$  nos dice que el vector  $(1, 0)$  se ha transformado en el vector  $(-1, 0)$  (se reflejó sobre el eje  $y$ ) y la segunda nos indica que  $(0, 1)$  se transformó en  $(0, -1)$  (se reflejó sobre el eje  $x$ ). Juntando esa información, podemos concluir que cada uno de los vectores del plano rotaron  $180^\circ$  (esto es lo mismo que decir que se reflejaron sobre la recta  $y = -x$ .)  $\square$

**Problema 5.3.**

(a) Halle una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + 3z = 0 \right\}.$$

(b) Halle una transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$$\text{Im}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0 \right\}.$$

**Solución.**

(a) Recuerde que toda transformación lineal entre espacios finitos dimensionales tiene asociada una matriz. Reinterpretemos la propiedad del conjunto que define a  $\ker(T)$ . El plano  $2x - y + 3z = 0$  corresponde al producto punto de  $(2, -1, 3)$  y  $(x, y, z)$  asumiendo que son perpendiculares. Al producto escalar  $(2, -1, 3) \cdot (x, y, z) = 0$  lo podemos ver como el producto matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = [0].$$

Dado que necesitamos una matriz de orden  $3 \times 3$  (porque  $T$  es un operador lineal en  $\mathbb{R}^3$ ), basta con colocar dos filas de ceros a la primera matriz, así

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  es tal que  $\mathcal{N}(A) = \ker(T)$ . Así,  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  tal que

$T(v) = Av$  para todo  $v \in \mathbb{R}^3$  es la transformación lineal buscada.

(b) Buscamos una matriz  $B$  tal que  $\mathcal{R}(B) = \text{Im}(T)$ . Un vector  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  pertenece a  $\text{Im}(T)$  si y sólo si  $x = y - 2z$ . De esa manera podemos asignar los parámetros  $s$  y  $t$  a  $y$  y  $z$ , respectivamente, y expresar

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0r + s - 2t \\ 0r + s + 0t \\ 0r + 0s + t \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix}; \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Esta expresión nos sugiere que las imágenes de  $T$  son el resultado de multiplicar al vector  $(r, s, t)$  (del dominio de  $T$ ) por la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por la izquierda. Note que fue necesario incluir una columna de ceros para que  $B$  sea de tamaño  $3 \times 3$  porque  $T$  es un operador lineal en  $\mathbb{R}^3$ . (De no ser así,  $T$  estaría dada de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ ). La matriz  $B$  es tal que  $T(v) = Bv$  para todo  $v \in \mathbb{R}^3$ .  $\square$

**Problema 5.4.** Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  una transformación lineal tal que

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Encuentre la regla de asignación de  $T$ .

**Solución.** Sabemos cómo actúa  $T$  sobre los vectores de la base canónica de  $\mathbb{R}^2$ , por lo que podemos saber cómo actúa sobre cualquier otro vector de  $\mathbb{R}^2$ . Un vector  $(x, y)$  de su dominio puede expresarse como  $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$ , luego

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(x(1, 0) + y(0, 1)) \\ &\stackrel{(1)}{=} T(x(1, 0)) + T(y(0, 1)) \\ &\stackrel{(2)}{=} xT(1, 0) + yT(0, 1) \\ &= x \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3y - x \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aquí, (1) por la aditividad de  $T$ , (2) por la homogeneidad de  $T$ .  $\square$

**Problema 5.5.** Considere la función  $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $T(x) = (x, x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Determine si  $T$  es o no una transformación lineal. En caso de serlo, encuentre su núcleo, su imagen y su matriz asociada.

**Solución.** Sean  $x, y, \alpha \in \mathbb{R}$ , arbitrarios, se tiene

$$T(x + \alpha y) = \begin{bmatrix} x + \alpha y \\ x + \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} = T(x) + \alpha T(y)$$

luego  $T$  es una transformación lineal. Para cualquier  $x \in \mathbb{R}$

$$T(x) = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

entonces  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  es la matriz asociada a  $T$ . El núcleo de  $T$  es

$$\ker(T) = \left\{ x \in \mathbb{R} : T(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \{0\}.$$

Por último,

$$\begin{aligned} \text{Im}(T) &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = T(x) \text{ para algún } x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \text{ para algún } x \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a = b \right\}. \end{aligned}$$

□

**Problema 5.6.** Encuentre el núcleo, imagen, rango y nulidad de la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

**Solución.** Llamemos  $A$  a la matriz asociada a  $T$ . Hallar el núcleo de  $T$  es equivalente a encontrar el espacio nulo de  $A$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} E_{31}(1) \\ E_{21}(2) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} E_{21}(2) \\ E_{31}(1) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} M_2(1/5) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} E_{13}(1/5)E_{32}(-1) \\ E_{32}(-1) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

La solución del sistema homogéneo  $Ax = 0$  es la misma que la solución del sistema  $Ux = 0$ :

$$x_1 = -2t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = 0; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Así,

$$\mathcal{N}(A) = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \ker(T),$$

y por tanto, la nulidad de  $T$  es  $\dim(\ker(T)) = 1$ . Por otra parte, hallar la imagen de  $T$  es equivalente a encontrar el espacio columna de  $A$ . Sea  $b = (b_1, b_2, b_3)$  un vector de  $\mathbb{R}^3$ ; se tiene

$$\begin{aligned} [A \mid b] &= \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_1 \\ 2 & 4 & 3 & b_2 \\ 1 & 2 & -6 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow[\begin{smallmatrix} E_{31}(1) \\ E_{21}(2) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} E_{21}(2) \\ E_{31}(1) \end{smallmatrix}} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & 5 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & -5 & b_3 - b_1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{32}(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & 5 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & -3b_1 + b_2 + b_3 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Luego

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -3b_1 + b_2 + b_3 = 0 \right\} = \text{Im}(T),$$

y entonces el rango de  $T$  es  $\dim(\text{Im}(T)) = 2$  (porque  $\text{Im}(T)$  es un plano en  $\mathbb{R}^3$ ). □



## 5.2. Representación matricial de una transformación lineal

En el Ejemplo 5.3 vimos que  $T(x)$  podía expresarse como el producto  $Ax$ . Ahora veremos que eso puede hacerse para cualquier transformación lineal entre espacios finitos dimensionales, es decir, toda TL tiene una matriz asociada (que es única) si se define en espacios de dimensión finita. De forma recíproca, toda matriz  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  induce la función

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^m \\ x &\longmapsto T_A(x) = Ax \end{aligned}$$

la cual cumple las propiedades de homogeneidad y linealidad, i.e. es una transformación lineal. Representar una TL con una matriz es siempre posible si su dominio y codominio son espacios de dimensión finita.

**Teorema 5.4.** *Sea  $T : V \rightarrow W$  una transformación lineal, para la cual  $V$  es de dimensión finita. Si  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  es una base para  $V$ , entonces la imagen de cualquier vector  $v \in V$  puede expresarse como la combinación lineal*

$$T(v) = k_1T(v_1) + k_2T(v_2) + \dots + k_nT(v_n),$$

donde  $k_1, k_2, \dots, k_n$  son escalares.

Para asociar una matriz a determinada transformación lineal, basta saber como esta última actúa sobre los vectores de la base de su dominio. Una vez que se conoce la imagen de cada vector de la base, encontrar la imagen de cualquier otro vector es muy fácil. Supongamos que  $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  es una base de cierto espacio vectorial  $V$ . Es claro que cualquier  $v \in V$  puede expresarse como combinación lineal de los vectores de  $B$ :

$$v = v_1e_1 + v_2e_2 + \dots + v_n e_n.$$

Si  $T : V \rightarrow W$  es TL, y la aplicamos a  $v$  se tiene

$$\begin{aligned} T(v_1e_1 + v_2e_2 + \dots + v_n e_n) &= v_1T(e_1) + v_2T(e_2) + \dots + v_nT(e_n) \\ &= \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \dots & T(e_n) \\ \left| \right. & \left| \right. & & \left| \right. \\ \left| \right. & \left| \right. & & \left| \right. \\ \left| \right. & \left| \right. & & \left| \right. \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La matriz  $A = [T(e_1) \ T(e_2) \ \dots \ T(e_n)]$ , de tamaño  $\dim(W) \times \dim(V)$ , es justamente la matriz con la que la aplicación lineal  $T$  se identifica; es tal que  $T(x) = Ax$ . Ella contiene todo acerca de  $T$ , nos permite conocer su núcleo e imagen, nos dice cómo actúa  $T$  sobre los vectores de su dominio y en caso de que  $T$  posea una *función inversa* nos hará posible calcularla. Hay que hacer énfasis en que la matriz asociada a  $T$  es única respecto de las bases de  $V$  y  $W$ , pero cambiará si sus bases cambian.

Existen muchas funciones definidas de  $\mathbb{K}^n$  en  $\mathbb{K}^m$ , pero sólo aquellas a las que se les puede asociar una matriz son transformaciones lineales.

En la sección 4.4 se vio que si  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  es una base ordenada de un espacio vectorial  $V$  sobre un campo  $\mathbb{K}$ , entonces las coordenadas de un vector  $v \in V$  respecto de  $B$  están dadas por un vector  $[v]_B = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  en virtud de que  $v$  sea la combinación lineal

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n.$$

La tupla de escalares  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  pertenece a  $\mathbb{K}^n$  y es la representación de  $v$  en la base  $B$ . Observe que la representación de un vector depende de la base escogida para  $V$  y del orden de tal base.

**Teorema 5.5** (Matriz de representación una TL). *Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre un campo  $\mathbb{K}$ , y sean  $B, B'$  dos bases ordenadas para  $V$  y  $W$ , respectivamente. Si  $T : V \rightarrow W$  es una transformación lineal, entonces existe una única matriz  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  tal que*

$$[T(x)]_{B'} = A[x]_B$$

para todo  $x \in V$ . Nos referimos a  $A$  como **matriz de representación de  $T$  de la base  $B$  en la base  $B'$** , y se le denota  $[T]_B^{B'}$ .

**Nota 5.3.** La matriz del teorema anterior es única y sus columnas son las representaciones de las imágenes de los vectores de la base  $B$  en la base  $B'$ . En el caso en el que  $T$  sea un operador lineal, entonces llamaremos a  $B$  matriz de representación de  $T$  en la base  $B$  y la denotaremos simplemente  $[T]_B$ . Por último, recuerde que el subíndice en la notación  $[T]_B^{B'}$  denota la base del dominio de  $T$  y el superíndice la de su codominio.

Para aclarar lo establecido en el Teorema 5.5, recordemos lo establecido en el Teorema 4.15 y notemos lo siguiente: un vector  $x \in V$  se puede expresar como combinación lineal de los vectores de una base de  $V$ , e.g.  $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ . Así,  $x = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n$  con  $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ , un escalar. Si aplicamos  $T : V \rightarrow W$  a  $x$ , obtenemos  $T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n)$  y si representamos este vector en la base  $B'$  de  $W$ , tenemos

$$\begin{aligned} [T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n)]_{B'} &= [\lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2) + \dots + \lambda_n T(u_n)]_{B'} \\ &= [\lambda_1 T(u_1)]_{B'} + [\lambda_2 T(u_2)]_{B'} + \dots + [\lambda_n T(u_n)]_{B'} \\ &= \lambda_1 [T(u_1)]_{B'} + \lambda_2 [T(u_2)]_{B'} + \dots + \lambda_n [T(u_n)]_{B'} \\ &= \begin{bmatrix} [T(u_1)]_{B'} & [T(u_2)]_{B'} & \dots & [T(u_n)]_{B'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \\ &= [T]_B^{B'} [x]_B \end{aligned}$$

Resumiendo, para cada  $x \in V$  se tiene  $[T(x)]_{B'} = [T]_B^{B'} [x]_B$ . La matriz  $[T]_B^{B'}$  contiene toda la información sobre lo que  $T$  hace al transformar los vectores de la base  $B$ . ¿Puede demostrar el lector que  $[T]_B^{B'}$  es una matriz invertible? Simplemente tenga en cuenta que sus columnas son vectores LI.

**Corolario 5.5.1.** *Si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es TL y  $B, B'$  son las bases canónicas de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente, entonces para cualquier  $x \in \mathbb{R}^n$  se tiene  $[T(x)]_{B'} = T(x)$  y  $[x]_B = x$ . Aún*

más,

$$\begin{aligned} [T]_B^{B'} &= \begin{bmatrix} [T(e_1)]_{B'} & [T(e_2)]_{B'} & \cdots & [T(e_n)]_{B'} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde  $e_1, e_2, \dots, e_n$  conforman la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 5.6** (Cambio de base). Sea  $I : V \rightarrow V$  el operador identidad. Si  $V$  es un espacio vectorial de dimensión finita y  $B, B'$  son dos bases ordenadas para  $V$ , entonces

$$[x]_{B'} = [I]_B^{B'} [x]_B$$

para todo  $x \in V$ . La matriz  $[I]_B^{B'}$  se llama **matriz de cambio de base** (o de cambio de coordenadas) de  $B$  a  $B'$ .

**Nota 5.4.** La matriz  $[I]_B^{B'}$  nos permite encontrar las coordenadas de un vector  $v \in V$  en una base  $B'$  si se conoce previamente sus coordenadas en otra base  $B$  de  $V$ .

**Teorema 5.7.** Sean  $V$  y  $W$  espacios vectoriales de dimensión finita sobre un campo  $K$ , con bases  $B$  y  $B'$ , respectivamente. Si  $T : V \rightarrow W$  es transformación lineal y  $A = [T]_B^{B'}$ , entonces

- (i) Un vector de  $V$  pertenece al núcleo de  $T$  si y sólo si su representación en  $B$  es un elemento del espacio nulo de  $A$ .

$$\forall v \in V : v \in \ker(T) \iff [v]_B \in \mathcal{N}(A)$$

- (ii) Un vector de  $W$  está en la imagen de  $T$  si y sólo si su representación en  $B'$  es un vector del espacio columna de  $A$ .

$$\forall w \in W : w \in \text{Im}(T) \iff [w]_{B'} \in \mathcal{R}(A)$$

**Corolario 5.7.1.** La transformación lineal  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , con  $B$  y  $B'$  bases canónicas de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$ , respectivamente, es tal que

- (i) Su núcleo es igual al espacio nulo de  $[T]_B^{B'}$ .  
(ii) Su imagen es igual al espacio columna de  $[T]_B^{B'}$ .

Del Corolario 5.7.1 se deduce que para encontrar el núcleo e imagen de una TL definida de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$  basta con encontrar el espacio nulo y espacio columna de la matriz asociada a tal TL, siempre y cuando las bases con las que tomemos a  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  sean sus bases canónicas.

**Nota 5.5.** Si se tuviera una TL entre espacios vectoriales sobre el campo de los complejos  $\mathbb{C}$ , los resultados de esta sección siguen siendo válidos.

### 5.2.1. Problemas resueltos

**Problema 5.7.** Sea  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  la transformación lineal cuya matriz asociada respecto de las bases  $B = \{(-1, 0), (1, 2)\}$  y  $B' = \{1, 2x, -x^2 + x\}$  es

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (a) Hallar  $[T]_S^{S'}$ , donde  $S = \{(2, 1), (2, 0)\}$  y  $S' = \{2, 1 - x, 1 + x^2\}$ .  
 (b) Demuestre que  $S'$  es una base para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ .

**Solución.**

- (a) (Haga uso del Teorema 5.5.) Por la información que tenemos,  $T$  toma vectores de  $\mathbb{R}^2$  pero respecto de la base  $B$ . En particular, esto quiere decir que, si quisiéramos saber cómo actúa  $T$  sobre un vector cualquiera de  $\mathbb{R}^2$ , primero debemos hallar sus coordenadas en  $B$ , y sólo ahí aplicar  $T$  (a tales coordenadas); como resultado, obtendremos las coordenadas de un polinomio de  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  respecto de la base  $B'$ . En nuestro caso, debemos hacer un cambio de base de  $S$  a  $B$ , luego aplicar  $[T]_B^{B'}$  (la matriz del enunciado) y después hacer otro cambio de base (de  $B'$  a  $S'$ ). En resumen,  $[T]_S^{S'}$  es el producto

$$[I]_{B'}^{S'} [T]_B^{B'} [I]_S^B.$$

La primera columna de la matriz  $[I]_S^B$  es el vector  $[(2, 1)]_B = (k_1, k_2)$  tal que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -k_1 + k_2 = 2 \\ 2k_2 = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_1 = -\frac{3}{2} \\ k_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

y la segunda es el vector  $[(2, 0)]_B = (k_3, k_4)$  tal que

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = k_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} -k_3 + k_4 = 2 \\ 2k_4 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} k_3 = -2 \\ k_4 = 0 \end{cases}$$

Así,

$$[I]_S^B = \begin{bmatrix} -3/2 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Por otra parte, la primera columna de  $[I]_{B'}^{S'}$  es el vector  $[1]_{S'} = (k_5, k_6, k_7)$  cuyas coordenadas satisfacen

$$1 = k_5(2) + k_6(1 - x) + k_7(1 + x^2).$$

Como dos polinomios son iguales si y sólo si sus coeficientes son iguales, entonces  $k_5 = 1/2$  y  $k_6 = k_7 = 0$ . De manera análoga encontrará que  $[2x]_{S'} = (1, -2, 0)$ . Otra forma de encontrar  $[-x^2 + x]_{S'}$  es tomar escalares  $k_8, k_9, k_{10}$  tal que  $-x^2 + x = k_8(2) + k_9(1 - x) + k_{10}(1 + x^2)$ , lo cual ocurre si y sólo si

$$(k_{10} + 1)x^2 + (-1 - k_9)x + (2k_8 + k_9 + k_{10}) = 0 \implies \begin{cases} k_{10} + 1 = 0 \\ -1 - k_9 = 0 \\ 2k_8 + k_9 + k_{10} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} k_{10} = -1 \\ k_9 = -1 \\ k_8 = 1 \end{cases}$$

Finalmente

$$[I]_{S'}^{B'} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

En conclusión, la matriz que buscamos es

$$\begin{aligned} [T]_S^{S'} &= [I]_{B'}^{S'} [T]_B^{B'} [I]_S^B \\ &= \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3/2 & -2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9/2 & -6 \\ 7 & 10 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- (b) Use el Wronskiano para determinar si  $S'$  es base para  $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$  (Teorema 4.11). Se tiene

$$\begin{vmatrix} 2 & 1-x & 1+x^2 \\ 0 & -1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1-x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2(-2) = -4 \neq 0$$

luego  $S'$  es LI. Ahora veamos que  $\text{gen}(S') = \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ ; en efecto, cualquier polinomio  $a_0 + a_1x + a_2x^2$  con coeficientes reales es CL de los vectores de  $S'$ , pues

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 &= 2c_1 + (1-x)c_2 + (1+x^2)c_3 \\ &= 2c_1 + c_2 - c_2x + c_3 + c_3x^2 \\ &= (2c_1 + c_2 + c_3) + (-c_2)x + c_3x^2 \end{aligned}$$

donde  $a_0 = 2c_1 + c_2 + c_3$ ,  $a_1 = -c_2$  y  $a_2 = c_3$  son números reales cualesquiera.  $\square$

**Problema 5.8.** Sean  $V$  y  $W$  dos espacios vectoriales sobre  $\mathbb{K}$ . Para cada una de las siguientes transformaciones lineales  $T : V \rightarrow W$

- Halle  $[T]_B^{B'}$ . Suponga, a menos que se diga otra cosa, que  $B$  y  $B'$  son, respectivamente, las bases canónicas de  $V$  y  $W$ .
- Utilizando  $[T]_B^{B'}$ , halle una base para  $\ker(T)$  y una base para  $\text{Im}(T)$ .
- Halle el núcleo y la imagen de  $T$ .
- Compruebe que  $\dim(V) = \dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T))$ .

$$(i) \quad T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ tal que } T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 \\ -2x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \quad T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_1 \text{ tal que } T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 + 2a_2x.$$

**Solución.**

- (i) (a) Como  $V = W$ , tenemos  $B = B' = \{e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$ . Por ello,  $[T(x)]_B^{B'} = T(x)$  para todo  $x \in V$ . Veamos que

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T(e_3) = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Luego } [T]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Resolvemos el sistema homogéneo  $Ax = 0$  donde  $A = [T]_B^{B'}$ . Se tiene

$$A \xrightarrow[E_{31}(-1/2)]{E_{21}(1/4)} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 5/4 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2/5)} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 5/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & -9/5 \end{bmatrix},$$

por lo que  $A$  es invertible, lo cual implica que la solución de  $Ax = 0$  es la trivial; por eso, no existe una base para  $\ker(T)$ . Por otra parte, dado que  $A$  es invertible, todo vector  $b \in \mathbb{R}^3$  pertenece a  $\mathcal{R}(A)$  y por tanto las columnas de  $A$  generan a  $\mathbb{R}^3$ . Entonces,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

es base para  $\text{Im}(T)$ .

- (c) Sabemos de (b) que  $\mathcal{N}(A) = \{0\}$  y que  $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^3$ . Luego,  $\ker(T) = \{0\}$  y  $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^3$ .  
 (d) Se verifica

$$\dim(\mathbb{R}^3) = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im}(T)) \iff 3 = 0 + 3.$$

- (ii) (a) (Haga uso del Teorema 5.5.) Por el enunciado,  $B = \{1, x, x^2\}$  y  $B' = \{1, x\}$  son las bases canónicas de  $\mathbb{P}_2$  y  $\mathbb{P}_1$ , respectivamente. Sólo necesitamos conocer como actúa  $T$  sobre los vectores de  $B$ . Notemos que

$$\begin{aligned} T(1) &= T(1 + 0x + 0x^2) = 0 + 2(0)x = 0, \\ T(x) &= T(0 + 1x + 0x^2) = 1 + 2(0)x = 1, \\ T(x^2) &= T(0 + 0x + 1x^2) = 0 + 2(1)x = 2x. \end{aligned}$$

Para hallar la matriz  $[T]_B^{B'}$  debemos hallar  $[T(1)]_{B'}$ ,  $[T(x)]_{B'}$  y  $[T(x^2)]_{B'}$ . Sean escalares  $\alpha_i$  y  $\beta_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) tales que

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_1(1) + \beta_1(x) \implies \alpha_1 = \beta_1 = 0, \\ 1 &= \alpha_2(1) + \beta_2(x) \implies \alpha_2 = 1, \beta_2 = 0 \\ 2x &= \alpha_3(1) + \beta_3(x) \implies \alpha_3 = 0, \beta_3 = 2 \end{aligned}$$

Luego  $[T(1)]_{B'} = (0, 0)$ ,  $[T(x)]_{B'} = (1, 0)$ , y  $[T(x^2)]_{B'} = (0, 2)$  y por tanto, la matriz  $[T]_B^{B'}$  viene dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A.$$

(b) Para hallar una base para  $\ker(T)$  debemos tener en cuenta que, si

$$\{[w_1]_{B'}, [w_2]_{B'}, \dots, [w_n]_{B'}\}$$

es base para  $\mathcal{N}(A)$ , entonces  $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  es base para  $\ker(T)$ . En nuestro caso, el sistema homogéneo asociado a  $\mathcal{N}(A)$  es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} p = t, \\ q = 0, \\ r = 0. \end{cases}$$

Así que los vectores que pertenecen al espacio nulo de  $A$  son de la forma

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

De ahí que una base para  $\mathcal{N}(A)$  es  $\{(1, 0, 0)\}$  y, como consecuencia, una base para  $\ker(T)$  está dada por un polinomio que es combinación lineal de los vectores de  $B$ , los escalares de tal CL son las componentes de  $(1, 0, 0)$ . En otras palabras, como  $(1, 0, 0)$  es un vector de la base para  $\mathcal{N}(A)$ , entonces  $1(1) + 0(x) + 0(x^2) = 1$  es un vector de la base para  $\ker(T)$ . Así,  $\{1\}$  es una base para  $\ker(T)$ . Por otro lado, podemos descartar a cualquier vector que sea combinación lineal de los demás vectores del conjunto generador de  $\mathcal{R}(A)$ , i.e. el conjunto que contiene a las columnas de  $A$ . Así que

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base para  $\mathcal{R}(A)$ . El conjunto  $H$  contiene las coordenadas de los vectores de la base de  $\text{Im}(T)$ . Del primer vector obtenemos  $1(1) + 0(x) = 1$ , y del segundo  $0(1) + 2(x) = 2x$ . Por tanto,  $\{1, 2x\}$  es base para  $\text{Im}(T)$ .

- (c) Del ítem anterior sabemos que  $\{1\}$  es base para  $\ker(T)$ . Luego  $\ker(T) = \text{gen}\{1\}$ . Asimismo, como  $\{1, 2x\}$  es base para  $\text{Im}(T)$ , se tiene que  $\text{Im}(T) = \text{gen}\{1, 2x\} = \mathbb{P}_1$ .
- (d) Del ítem anterior se sabe que hay un vector en la base de  $\ker(T)$ , luego  $\dim(\ker(T)) = 1$ ; asimismo, dado que hay dos vectores en la base de  $\text{Im}(T)$  su dimensión es 2. Se verifica que

$$\dim(\ker(T)) + \dim(\text{Im}(T)) = 3 = \dim(\mathbb{P}_2).$$

□

**Problema 5.9.** Para cada uno de los siguientes espacios vectoriales  $V$  y cada par de bases  $B$  y  $B'$  para  $V$ , encuentre la matriz de cambio de base de  $B$  a  $B'$ .

(a) En  $\mathbb{R}^2$ ,  $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ , y  $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ .

(b) En  $\mathbb{P}_2$ ,  $B = \{1 + x, 2 - x + x^2, 1 - x^2\}$ , y  $B'$  la base canónica de  $\mathbb{P}_2$ .

**Solución.**

- (a) La matriz de cambio de base es la que contiene como columnas a las coordenadas de los vectores de  $B'$ :

$$[I]_B^{B'} = \left[ \begin{array}{c|c} [(1, 2)]_{B'} & [(1, -1)]_{B'} \\ \hline & \end{array} \right].$$

Para hallar las representaciones (coordenadas) de los vectores de  $B$  en  $B'$  debemos buscar escalares  $\alpha, \beta, \gamma, \lambda$  tales que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad y$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \lambda \end{bmatrix}.$$

Como estos dos sistemas poseen la misma matriz de coeficientes y diferente vector de términos independientes, podemos resolverlos simultáneamente como sigue:

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{21}(1/3)]{E_{12}(1)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2/3 & 5/3 & -4/3 \end{array} \right] \xrightarrow[M_2(3/2)]{M_1(1/2)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 5/2 & -2 \end{array} \right]$$

Obtenemos  $(\alpha, \beta) = (-1/2, 5/2) = [(1, 2)]_{B'}$  y  $(\gamma, \lambda) = (1, -2) = [(1, -1)]_{B'}$ . Por lo tanto,

$$[I]_B^{B'} = \begin{bmatrix} -4/3 & 8/3 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}.$$

- (b) Hallamos las representaciones de los vectores de  $B$  en  $B'$ . Para ello, recordemos que dos polinomios son iguales si sus coeficientes son iguales. Sean escalares  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$  con  $(1 \leq i \leq 3)$ ; se tiene

$$\begin{aligned} 1 + x &= \alpha_1(1) + \beta_1(x) + \gamma_1(x^2) &\implies & (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = (1, 1, 0) \\ 2 - x + x^2 &= \alpha_2(1) + \beta_2(x) + \gamma_2(x^2) &\implies & (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2) = (2, -1, 1) \\ 1 - x^2 &= \alpha_3(1) + \beta_3(x) + \gamma_3(x^2) &\implies & (\alpha_3, \beta_3, \gamma_3) = (1, 0, -1) \end{aligned}$$

donde  $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i) = [v]_{B'}$  para cada  $v \in B$ . Por tanto,

$$[I]_B^{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es la matriz de cambio de base buscada. □

**Problema 5.10.** Sean  $B$  la base canónica de  $\mathbb{P}_2$ ,  $B' = \{-1 + x + x^2, x + x^2, 1 + x^2\}$ , y los polinomios  $p(x) = \frac{3}{2} + x^2$ ,  $q(x) = -1 + 2x - \frac{x^2}{3}$  y  $r(x) = 2x - x^2$ .

- (a) Muestre que  $B'$  es una base para  $\mathbb{P}_2$ .  
 (b) Encuentre la matriz  $C$  de cambio de base de  $B$  a  $B'$ .

(c) Utilizando la matriz  $C$  y el Teorema (5.6), encuentre  $[p]_{B'}$ ,  $[q]_{B'}$  y  $[r]_{B'}$ .

**Solución.**

(a) Dado que  $\dim(\mathbb{P}_2) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ , basta mostrar que las coordenadas de los vectores de  $B'$  en la base canónica de  $\mathbb{P}_2$  son una base para  $\mathbb{R}^3$ . Sean escalares  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ); tenemos

$$\begin{aligned} [-1 + x + x^2]_B &= (-1, 1, 1), \\ [x + x^2]_B &= (0, 1, 1), \\ [1 + x^2]_B &= (1, 0, 1) \end{aligned}$$

Ahora calculamos el determinante de la matriz que tiene por columnas a tales vectores:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Como este determinante es diferente de cero, los vectores son LI, y en consecuencia  $B'$  es base para  $\mathbb{P}_2$ .

(b) Con el resultado obtenido en (a), es fácil ver que  $A$  es la matriz de cambio de base de  $B'$  a  $B$ :  $[I]_{B'}^B$ . Ahora, dado que una matriz de cambio de base es siempre invertible (ver Teorema 5.6) y dado que  $[P]_B = [I]_{B'}^B [P]_{B'}$  para todo  $P \in \mathbb{P}_2$ , entonces

$$\begin{aligned} [P]_B = [I]_{B'}^B [P]_{B'} &\iff ([I]_{B'}^B)^{-1} [P]_B = ([I]_{B'}^B)^{-1} [I]_{B'}^B [P]_{B'} \\ &\iff [I]_{B'}^{B'} [P]_B = [P]_{B'} \\ &\iff [P]_{B'} = [I]_{B'}^{B'} [P]_B. \end{aligned}$$

Así, la matriz  $C$  que buscamos es precisamente  $A^{-1}$ . Hallamos la inversa de  $A$  con eliminación de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} &\left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{31}(-1)]{E_{21}(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{E_{32}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{23}(1)]{E_{13}(1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{M_1(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $C = [I]_{B'}^{B'} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ .

(c) Las representaciones de  $p, q, r \in \mathbb{P}_2$  en la base  $B'$  son

$$\begin{aligned} [p]_{B'} &= C[p]_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}, \\ [q]_{B'} &= C[q]_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/3 \\ 10/3 \\ -7/3 \end{bmatrix}, \\ [r]_{B'} &= C[r]_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} p(x) &= -\frac{1}{2}(-1 + x + x^2) + \frac{1}{2}(x + x^2) + 1(1 + x^2), \\ q(x) &= -\frac{4}{3}(-1 + x + x^2) + \frac{10}{3}(x + x^2) - \frac{7}{3}(1 + x^2), \quad y \\ r(x) &= -3(-1 + x + x^2) + 5(x + x^2) - 3(1 + x^2) \end{aligned}$$

son los vectores  $p, q, r \in \mathbb{P}_2$  expresados respecto a la base  $B'$ . □

**Problema 5.11.** Sea  $\mathcal{B} = \{1, x\}$  la base estándar de  $\mathbb{P}_1$ .

- (a) Muestre que  $\mathcal{C} = \{1 - x, 2 + x\}$  es otra base para  $\mathbb{P}_1$ .
- (b) Encuentre la matriz de cambio de base de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{C}$ .
- (c) Encuentre  $[p]_{\mathcal{C}}$  para  $p = 2 - 3x$ .

**Solución.**

- (a) Para mostrar que  $\mathcal{C}$  es conjunto LI en  $\mathbb{P}_1$ , es suficiente mostrar que las representaciones de sus elementos respecto de  $\mathcal{B}$  son vectores linealmente independientes de  $\mathbb{R}^2$ . De hecho, los vectores

$$[1 - x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad y \quad [2 + x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

son LI en  $\mathbb{R}^2$  porque

$$\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 3 \neq 0.$$

Esto, junto con el hecho de que  $\dim(\mathbb{P}_1) = 2$  es igual al número de elementos de  $\mathcal{C}$ , muestra que  $\mathcal{C}$  es base para  $\mathbb{P}_1$ .

- (b) Debemos encontrar  $[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} [1]_{\mathcal{C}} & [x]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix}$ . Para hallar las representaciones de los polinomios 1 y  $x$  en la base  $\mathcal{C}$  deben existir escalares  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) tales que

dichos polinomios se pueden expresar como combinación lineal de los polinomios de  $\mathcal{C}$ ; es decir, tales que

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda_1(1-x) + \lambda_2(2+x), \\ x &= \lambda_3(1-x) + \lambda_4(2+x). \end{aligned}$$

Resolvamos esto usando el hecho que dos vectores iguales (respecto a una base) tienen representaciones iguales respecto a una base dada (Teorema 4.15) (nosotros podemos escoger la base que nos convenga). Así,

$$\begin{aligned} [1]_{\mathcal{B}} &= \lambda_1[(1-x)]_{\mathcal{B}} + \lambda_2[(2+x)]_{\mathcal{B}} \iff \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ [x]_{\mathcal{B}} &= \lambda_3[(1-x)]_{\mathcal{B}} + \lambda_4[(2+x)]_{\mathcal{B}} \iff \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La ventaja de hacer esto es que nos permite resolver ambos sistemas de ecuaciones a la vez, porque tienen la misma matriz de coeficientes.

$$\left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{21}(-1)]{E_{12}(2)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[M_2(1/3)]{M_1(1/3)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right]$$

Luego,  $[1]_{\mathcal{C}} = (\lambda_1, \lambda_2) = (1/3, 1/3)$  y  $[x]_{\mathcal{C}} = (\lambda_3, \lambda_4) = (1/3, -2/3)$ . En consecuencia,

$$[I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz buscada.

(c) Dado que  $[q]_{\mathcal{C}} = [I]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}[q]_{\mathcal{B}}$  para cada  $q \in \mathbb{P}_1$ , entonces

$$[p]_{\mathcal{C}} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8/3 \\ -1/3 \end{bmatrix},$$

y por tanto  $p(x) = \frac{8}{3}(1-x) - \frac{1}{3}(2+x)$ . □

Capítulo 6:

▶ **Valores y vectores propios**

## Capítulo 6:

# ► Valores y vectores propios

En este capítulo estudiaremos un tipo de escalares y vectores conocidos como *eigenvalues* y *eigenvectors* en inglés, cuyo prefijo (eigen) significa ‘propio’ en alemán. Fue el matemático alemán David Hilbert, a comienzos del siglo XX, quien introdujo por primera vez estos términos. La razón de que reciban ese nombre es que ellos están relacionados con ciertos vectores que esencialmente no cambian después de que el espacio es transformado. Sus aplicaciones tienen lugar en muchos campos distintos como las ciencias computacionales, dinámica de poblaciones, mecánica cuántica e incluso economía, sólo por nombrar algunos.



### 6.1. Valores y vectores propios de una matriz

En el capítulo anterior vimos que aplicar una TL a un vector es esencialmente lo mismo que multiplicarlo por una matriz. Ahora nos enfocaremos en encontrar vectores que no cambien después de aplicar una transformación lineal, o que a lo mucho sean múltiplos escalares de ellos mismos.

**Definición 6.1** (Valor propio, Vector propio). Sea  $A$  una matriz cuadrada. Un vector  $x$  (diferente de cero) se denomina **vector propio** (o **autovector**) de  $A$  si  $Ax$  es un múltiplo escalar de  $x$ . El escalar  $\lambda$  (real o complejo) tal que

$$Ax = \lambda x$$

se llama **valor propio** (o **autovalor**) de  $A$ , y se dice que  $x$  es un vector propio correspondiente a  $\lambda$ .

#### Ejemplos 6.1.

1. El vector  $v = (2, 4)$  es un autovector de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

correspondiente al autovalor  $\lambda = 3$  dado que

$$Av = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

El vector  $v$  ha sido “estirado” por un factor de 3 al multiplicarlo por  $A$ .

2. ¿Es  $(0, 0)$  un vector propio de  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ? ¡No! Por definición, el vector cero no puede ser vector propio de ninguna matriz. Sin embargo, sí es posible que 0 sea un valor propio.
3. Para encontrar los vectores propios de

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

sabiendo que 2 es un valor propio de  $A$ , tomamos  $Ax = 2x$  para un vector genérico  $x$ . Es evidente que podemos reescribir  $Ax = 2x$  como  $Ax - 2Ix = 0$  (porque multiplicar  $x$  por la matriz identidad es lo mismo que hacer nada). Resolvemos el sistema homogéneo  $(A - 2I)x = 0$ .

$$\begin{aligned} (A - 2I)x = 0 &\iff \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Tenemos  $x_1 = -t/2$ ,  $x_2 = t$  con  $t \in \mathbb{R}$ . Luego, la solución de  $(A - 2I)x = 0$  es

$$x = t \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

por lo que cada vector de la forma  $t(-1/2, 1)$  (con  $t \neq 0$ ) es un vector propio de  $A$  asociado a  $\lambda = 2$ .

□

En el ejemplo anterior obtuvimos un sistema homogéneo cuya matriz de coeficientes era singular (no invertible). Esto no fue una casualidad. Notemos que siempre podemos formar la ecuación

$$(A - \lambda I)x = 0 \tag{6.1}$$

siendo  $I$  la matriz identidad de orden  $n$ ,  $A$  una matriz cuadrada y  $x \in \mathbb{R}^n$ . Si la solución de este sistema homogéneo fuera la trivial, entonces  $x$  no sería un vector propio de  $A$ , por la Definición 6.1. Para que  $\lambda$  sea un autovalor de  $A$ , la ecuación (6.1) debe tener solución no trivial, lo cual ocurre siempre que la matriz  $A - \lambda I$  tenga determinante cero.

**Definición 6.2** (Polinomio característico). *Sea  $\lambda$  un valor característico de  $A$  de orden  $n$ . El polinomio de orden  $n$  dado por*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

se llamada **polinomio característico** de  $A$  (en la variable  $\lambda$ ). La ecuación  $p(\lambda) = 0$  es la **ecuación característica** de  $A$ .

**Teorema 6.1.** *Sea  $A$  una matriz cuadrada. El escalar  $\lambda$  es un valor propio de  $A$  si y sólo si este satisface la ecuación*

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

**Nota 6.1.** La expresión  $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$  designa un polinomio. A diferencia de esto,  $\det(A - \lambda I) = 0$  es una ecuación no un polinomio.

El teorema fundamental del álgebra establece que un polinomio de grado  $n > 0$  tiene exactamente  $n$  raíces, contando multiplicidades. Aquellas raíces pueden ser números reales, complejos o pueden estar repetidas. Por ello es que una matriz puede tener autovalores complejos aunque sea de entradas reales. Para asegurar la existencia de  $n$  autovalores para una matriz debemos trabajar sobre  $\mathbb{C}$ ; sin embargo, en los resultados siguientes, dejaremos que  $\mathbb{K}$  denote a  $\mathbb{R}$  o a  $\mathbb{C}$ .

**Definición 6.3** (Multiplicidad algebraica). *Sea  $A$  una matriz cuadrada y  $\lambda_0$  un valor característico de  $A$ . El número de veces que  $\lambda_0$  aparece como raíz en el polinomio característico de  $A$  se denomina **multiplicidad algebraica** (MA) de  $\lambda_0$ .*

### Ejemplos 6.2.

1. Para encontrar los valores característicos de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

encontramos las raíces de su polinomio característico, i.e. resolvemos  $\det(A - \lambda I) = 0$ .

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 3 & 2 - \lambda & 0 \\ 2 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 &\iff 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 - \lambda \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (3 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 3 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff -3 + 6\lambda + (3 - \lambda)[(1 - \lambda)(2 - \lambda) - 6] = 0 \\ &\iff \lambda^3 - 6\lambda^2 - \lambda + 15 = 0 \end{aligned}$$

Resolver esta ecuación a mano puede ser complicado pero usando programas de computadora, e.g. Wolfram Alpha, obtendrá que sus soluciones (los valores propios de  $A$ ) son

$$\lambda_1 \simeq 5.71, \quad \lambda_2 \simeq 1.77, \quad \lambda_3 \simeq -1.48.$$

2. Para encontrar los valores propios de la matriz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

basta hacer uso del Teorema 6.1 y del Teorema 3.3. Tenemos

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 3 - \lambda & 4 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda \end{vmatrix}$$

y por tanto  $p(\lambda) = (1 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda)$ . Así,  $\lambda = 1, 3, 5$ .

□

**Teorema 6.2.** *Si  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n$ , y si  $A$  es matriz triangular inferior, superior o diagonal, entonces los valores propios de  $A$  son las entradas de su diagonal principal.*

En el tercer ítem de los Ejemplos 6.1 se dijo que cualquier vector de la forma  $t(-1/2, 1)$  es un vector propio de  $A$  asociado al autovalor  $\lambda = 2$ , si  $t \neq 0$ . Esto es así porque, de hecho, el espacio nulo de la matriz  $A - \lambda I$  es un espacio vectorial. O, dado que  $A$  induce la función  $T_{A-\lambda I} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , podemos ver a dicho conjunto como el núcleo de  $T_{A-\lambda I}$ .

**Teorema 6.3.** *Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$  y  $\lambda$  un valor propio de ella. La unión de  $\{0\}$  y el conjunto de todos los vectores propios asociados a  $\lambda$  es un subespacio vectorial de  $\mathbb{K}^n$ . Este espacio vectorial,*

$$E_\lambda = \{x : x \text{ es un vector propio de } A \text{ asociado a } \lambda\} \cup \{0\},$$

*se denomina **espacio propio** (o **característico**) de  $A$  correspondiente a  $\lambda$ .*

**Nota 6.2.** El Teorema 6.3 pudo haberse enunciado diciendo que el conjunto de vectores propios de  $A$  asociados a  $\lambda$  es un espacio vectorial, pero esto no es del todo correcto. Si tiene claro el concepto de EV, observará que, por definición, el vector  $0$  es elemento de todo EV y sin embargo, el vector cero no es un vector propio, por la Definición 6.1.

**Teorema 6.4.** *Si  $A$  es una matriz cuadrada con valores propios distintos, entonces los vectores propios correspondientes son linealmente independientes.*

**Teorema 6.5.** *Una matriz cuadrada es invertible si y sólo si el escalar  $\lambda = 0$  no es un valor propio de  $A$ .*

**Definición 6.4** (Multiplicidad geométrica). *Sean  $A$  una matriz cuadrada y  $\lambda$  un valor característico de  $A$ . La **multiplicidad geométrica** (MG) de  $\lambda$  se define como la dimensión del espacio característico correspondiente a  $\lambda$ :*

$$MG(\lambda) = \dim(E_\lambda).$$

**Ejemplo 6.3.** La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

es invertible, claramente; luego, estamos seguros de que  $0$  no es valor propio de  $A$ . El polinomio característico de  $A$  es

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^3,$$

su ecuación característica es  $(\lambda - 2)^3 = 0$  y su único valor propio es  $2$ , que se repite tres veces, i.e. su multiplicidad algebraica es  $3$ . Veamos que la solución del sistema homogéneo  $(A - 2I)x = 0$  es

$$x = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Los vectores  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 0, 1)$  forman una base para el espacio nulo de  $A - 2I$ . Estos vectores son los vectores propios de  $A$  asociados a  $\lambda$ ; más aún, son LI y por tanto  $\dim(E_2) = 2$ . Note que

$$\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$$

es una base para  $E_2$ . Como esta base contiene dos vectores, entonces la multiplicidad geométrica de  $\lambda = 2$  es  $2$ . □

**Teorema 6.6.** Sea  $A$  una matriz cuadrada. Para cada valor propio de  $A$ , su multiplicidad geométrica es menor o igual a su multiplicidad algebraica:

$$1 \leq [MG] \leq [MA].$$

**Nota 6.3.** La multiplicidad geométrica de un valor propio  $\lambda$  nunca es cero, pues la mera existencia de tal escalar implica la existencia de, al menos, un vector propio asociado. Si existe un solo vector propio asociado a  $\lambda$ , entonces la dimensión del espacio propio asociado a  $\lambda$  es 1 porque su base tiene exactamente un vector.

En esta sección fueron definidos los conceptos de valor y vector propio en términos de matrices, pero, debido a que toda matriz  $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$  induce una función  $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ , habrían podido ser enunciados en términos de transformaciones lineales. Un escalar  $\lambda$  es un *valor propio* de  $T_A$  cuando existe un vector  $x \neq 0$  tal que  $T_A(x) = \lambda x$ . El vector  $x$  es un *vector propio* de  $T_A$  correspondiente a  $\lambda$ . Asimismo, el conjunto que incluye al vector cero y a todos los vectores propios de  $\lambda$  se dice *espacio propio* de  $\lambda$ .

A continuación describimos los pasos necesarios para hallar los valores y vectores propios de una matriz.

Sea  $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$  y  $\lambda$  un escalar.

1. Halle  $\det(A - \lambda I)$ . Este debe ser un polinomio de grado  $n$ .
2. Encuentre las soluciones de la ecuación característica. Estas son las raíces del polinomio característico de  $A$ , y pueden ser reales o complejas.
3. Para cada valor propio  $\lambda_i$ , encuentre los vectores propios correspondientes resolviendo el sistema homogéneo  $(A - \lambda_i I)x = 0$ . Cualquier forma escalonada de la matriz de coeficientes debe tener al menos un fila de ceros ya que es singular.

El siguiente teorema resume los resultados más importantes que se han expuesto a lo largo de este texto hasta la presente sección.

**Teorema 6.7** (Véase Grossman y Flores (2012)). Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ . Las siguientes afirmaciones son equivalentes.

- (i) La matriz  $A$  es invertible.
- (ii) La única solución del sistema homogéneo  $Ax = 0$  es la trivial.
- (iii) Para cada vector  $b \in \mathbb{R}^n$ , el sistema  $Ax = b$  tiene única solución:  $x = A^{-1}b$ .
- (iv)  $A$  es equivalente por filas a la matriz identidad.
- (v)  $A$  se puede expresar como el producto de matrices elementales.
- (vi) Toda forma escalonada de  $A$  tiene  $n$  pivotes.
- (vii) Las columnas y filas de  $A$  son linealmente independientes.
- (viii) El determinante de  $A$  es diferente de cero:  $\det(A) \neq 0$ .
- (ix) Ningún valor propio de  $A$  es igual a cero.

- (x) El rango de  $A$  es  $n$ :  $\text{rank}(A) = n$ .
- (xi) La nulidad de  $A$  es igual a cero:  $\text{nul}(A) = 0$ .
- (xii) Las columnas (y filas) de  $A$  conforman una base para  $\mathbb{R}^n$ .

### 6.1.1. Problemas resueltos

**Problema 6.1.** Determine los valores propios y los espacios propios de la matriz

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Si la multiplicidad algebraica de un valor propio es mayor que 1, calcule su multiplicidad geométrica.

**Solución.** Sea  $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ , entonces

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 0 \\ 0 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (-3 - \lambda)^2 = (\lambda + 3)^2 = 0.$$

Luego  $\lambda = -3$  es un valor propio de  $A$  con multiplicidad algebraica 2. Resolvemos el siguiente sistema homogéneo.

$$(A + 3I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \begin{cases} x_1 = t \in \mathbb{R} \\ x_2 = r \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Así,  $E_{-3} = \mathbb{R}^2$  es el espacio propio de  $A$  correspondiente a  $\lambda = -3$ . Como  $\dim(E_{-3}) = 2$ , entonces la multiplicidad geométrica de  $\lambda = -3$  es 2.  $\square$

**Problema 6.2.** Encuentre los valores y los espacios propios de la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Si la multiplicidad algebraica de un valor característico es mayor que 1, calcule su multiplicidad geométrica.

**Solución.** Sea  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (1 - \lambda)[(2 - \lambda)(1 - \lambda) - 1] + \lambda - 1 \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda = p(\lambda). \end{aligned}$$

Buscamos las raíces del polinomio característico de  $A$ .

$$\begin{aligned} p(\lambda) = 0 &\implies -\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 3) = 0 \\ &\implies -\lambda(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \\ &\implies \lambda = 0, 3, 1. \end{aligned}$$

Luego, los valores propios  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 1$  tienen cada uno una multiplicidad algebraica de 1. Para encontrar el espacio propio asociado a  $\lambda_1$  resolvemos el sistema homogéneo  $(A - \lambda_1 I)x = 0$ , llevando a una forma escalonada su matriz de coeficientes, i.e. la matriz  $A - \lambda_1 I = A$ .

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución de este sistema es

$$x_1 = t, \quad x_2 = t, \quad x_3 = t; \quad t \in \mathbb{R}$$

por lo que

$$E_0 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es el espacio propio asociado  $\lambda_1$ . Ahora resolvemos  $(A - \lambda_2 I)x = 0$ . Procedemos de manera análoga. Tenemos

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} E_{21}(-1/2) \\ E_{32}(1/2) \end{smallmatrix}]{M_1(-1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde

$$\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_4 = -\frac{1}{2}x_5, \\ x_5 = -2x_6, \\ x_6 = r \in \mathbb{R} \end{cases}$$

por lo que

$$E_3 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Finalmente, hallamos la solución de  $(A - \lambda_3 I)x = 0$ . Dado que

$$A - \lambda_3 I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} E_{23}(-1) \\ E_{13}(1) \end{smallmatrix}]{E_{13}(1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_7 = s \in \mathbb{R}, \\ x_8 = 0, \\ x_9 = -x_7 \end{cases}$$

y por tanto

$$E_1 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

□

**Problema 6.3.** Demuestre que si  $A$  es una matriz diagonal, entonces los valores propios de  $A$  son las componentes de la diagonal de  $A$ .

**Solución.** Sea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

una matriz diagonal. Su polinomio característico  $p(\lambda)$  está dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I_n) &= \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda) \begin{vmatrix} a_{22} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{33} - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda). \end{aligned}$$

En efecto, el determinante de una matriz diagonal es igual al producto de las componentes de la diagonal principal. Así,  $\lambda = a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  son las raíces del polinomio

$$p(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda).$$

Por lo tanto, los valores propios de  $A$  son

$$\lambda_1 = a_{11}, \quad \lambda_2 = a_{22}, \quad \cdots, \quad \lambda_n = a_{nn}.$$

□

**Problema 6.4.** Sea la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

con  $b \neq 0$ . Si  $m$  es una raíz real (o compleja) de la ecuación

$$bm^2 + (a - d)m - c = 0, \tag{6.2}$$

entonces muestre que  $a + bm$  es un valor propio de  $A$  cuyo vector propio asociado es  $(1, m)$ .

**Solución.** Supongamos que  $\lambda = a + bm$  no es un valor propio de  $A$ , entonces se debe cumplir que  $\det(A - \lambda I) \neq 0$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) \neq 0 &\implies \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} \neq 0 \\ &\implies (a - \lambda)(d - \lambda) - bc \neq 0 \\ &\implies \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc \neq 0 \\ &\implies (a + bm)^2 - (a + d)(a + bm) + ad - bc \neq 0 \\ &\implies a^2 + 2abm + b^2m^2 - (a^2 + (d + bm)a + bdm) + ad - bc \neq 0 \\ &\implies a^2 + 2abm + b^2m^2 - a^2 - ad - abm - bdm + ad - bc \neq 0 \\ &\implies abm + b^2m^2 - bdm - bc \neq 0 \\ &\implies am + bm^2 - dm - c \neq 0 \\ &\implies bm^2 + (a - d)m - c \neq 0. \end{aligned}$$

Lo anterior contradice a la hipótesis, ya que  $m$  sí es raíz de la ecuación característica; en consecuencia,  $\lambda = a + bm$  es un valor propio de  $A$ . Resolvemos el sistema homogéneo  $(A - \lambda I)x = 0$ .

$$\begin{aligned} (A - \lambda I) &= \begin{bmatrix} -bm & b \\ c & d - a - bm \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{matrix} M_1(-1/b) \\ M_2(m) \end{matrix}]{\begin{matrix} M_1(-1/b) \\ M_2(m) \end{matrix}} \begin{bmatrix} m & -1 \\ cm & (d - a)m - bm^2 \end{bmatrix} \\ &\xrightarrow{E_{21}(c)} \begin{bmatrix} m & -1 \\ 0 & (d - a)m - bm^2 + c \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Ecuación (6.2)}} \begin{bmatrix} m & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Luego

$$Ax = 0 \iff \begin{bmatrix} m & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies mx_1 - x_2 = 0 \implies x_2 = mx_1.$$

Entonces un vector  $x$  solución de  $Ax = 0$  es de la forma

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ mx_1 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ m \end{bmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, el vector  $(1, m)$  es un vector propio asociado a  $\lambda = a + bm$ .  $\square$

**Problema 6.5.** Considere la matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

- Determine los valores propios de  $A$ .
- Determine los espacios propios de  $A$ .
- Determine dos bases distintas para  $\mathbb{C}^2$  formada por vectores propios de  $A$ .

**Solución.**

- Resolvemos  $(A - \lambda I)x = 0$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 &\iff (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 5 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \end{aligned}$$

Esta última ecuación no tiene solución en  $\mathbb{R}$ , sin embargo sí que la tiene en  $\mathbb{C}$ . Los valores propios de  $A$  están dados por las raíces del polinomio  $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ , las cuales son  $\lambda_1 = 1 + i$  y  $\lambda_2 = 1 - i$ .

(b) Resolvemos  $(A - \lambda_1 I)x = 0$ . Dado que

$$\begin{bmatrix} 3 - (1 + i) & -5 \\ 1 & -1 - (1 + i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - i & -5 \\ 1 & -2 - i \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{M_1(\frac{1}{2-i}) \\ E_{21}(\frac{1}{2-i})}]{\phantom{}} \begin{bmatrix} 1 & -2 - i \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 - i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + (-2 - i)x_2 = 0, \\ x_2 = t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Por tanto

$$E_{1+i} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 + i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para hallar  $E_{1-i}$  procedemos de manera similar. Tenemos

$$\begin{bmatrix} 3 - (1 - i) & -5 \\ 1 & -1 - (1 - i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + i & -5 \\ 1 & -2 + i \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{M_1(\frac{1}{2+i}) \\ E_{21}(\frac{1}{2+i})}]{\phantom{}} \begin{bmatrix} 1 & i - 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de donde se sigue que

$$\begin{bmatrix} 1 & i - 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_3 + (i - 2)x_4 = 0, \\ x_4 = s \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

y así

$$E_{1-i} = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} 2 - i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(c) Tenga en cuenta que cualquier múltiplo escalar de los vectores de  $E_{1+i}$  y  $E_{1-i}$  es un vector propio de  $A$ , excepto el que produce el vector 0. Los conjuntos

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 + i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 - i \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \text{y} \quad B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -i - 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 2 + i \end{bmatrix} \right\}$$

son bases para  $\mathbb{C}^2$ . Cada uno de estos conjuntos genera a  $\mathbb{C}^2$  porque cada uno tiene dos vectores LI.

□

**Problema 6.6.** Pruebe que si  $\lambda$  es un valor propio de una matriz  $A$  con vector asociado  $v$  y  $k$  es un entero positivo, entonces  $\lambda^k$  es un valor propio de la matriz  $A^k$  con vector propio asociado  $v$ .

**Solución.** Procedamos por inducción matemática.

- (i) Por hipótesis  $A^1 v = \lambda^1 v$ , i.e.  $Av = \lambda v$ . Este es el caso más simple (caso base).
- (ii) Asumamos que  $A^k v = \lambda^k v$  se cumple para algún entero fijo  $k = j > 1$ , es decir  $A^j v = \lambda^j v$ . Mostremos que  $A^k v = \lambda^k v$  también se cumple para  $k = j + 1$ . En efecto,

$$\begin{aligned} A^{j+1} v &= A^j Av \\ &= A^j(\lambda v), \quad \text{por hipótesis} \\ &= \lambda A^j v \\ &= \lambda(\lambda^j v), \quad \text{por la hipótesis inductiva} \\ &= \lambda^{j+1} v \end{aligned}$$

Así,  $A^k v = \lambda^k v$  se satisface para  $k = j + 1$ .

Por el principio de inducción matemática,  $\lambda^k$  es un valor propio de  $A^k$  con vector propio asociado  $v$ .



## 6.2. Diagonalización de matrices

En muchos casos, la información que contiene una matriz  $A$  acerca de sus valores y vectores propios puede expresarse en una factorización útil de la forma  $PDP^{-1}$ , donde  $P$  tiene por columnas a los vectores propios de  $A$  y  $D$  contiene, en su diagonal, los valores propios de  $A$ . La razón de por qué buscamos tal descomposición es que las matrices diagonales son, claramente, más fáciles y sencillas de manipular (son fáciles de multiplicar, de invertir, etc.) Veremos que, en caso de existir,  $A$  y  $D$  comparten muchas de sus propiedades.

Note que la igualdad  $A = PDP^{-1}$  puede ser expresada como  $D = P^{-1}AP$ . Este producto puede verse como la imagen de una función cuya preimagen es  $A$ . Este tipo de función, denominada transformación de semejanza, toma la matriz cuadrada  $A$  y nos devuelve la matriz diagonal  $P^{-1}AP$ . Tales transformaciones son importantes porque preservan muchas de las propiedades de  $A$ . Sin embargo, no siempre podremos descomponer a una matriz en un producto de este tipo, pero, cuando podamos, veremos que  $A$  y  $P^{-1}AP$  tienen el mismo determinante, polinomio característico, autovalores e incluso el mismo rango, nulidad y traza.

A lo largo de esta sección describiremos los conceptos básicos y veremos el proceso que se debe seguir para diagonalizar a una matriz, en caso de ser posible.

**Definición 6.5** (Matriz semejante). Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas. Se dice que  $A$  y  $B$  son **semejantes** (o **similares**) si existe una matriz invertible  $P$  tal que

$$B = P^{-1}AP.$$

**Nota 6.4.** Note que, alternativo a lo que establece la definición anterior, se puede decir que dos matrices  $A$  y  $B$  son semejantes si existe una matriz  $P$  tal que  $AP = PB$ .

**Nota 6.5.** Si  $B$  es similar a  $A$ , también es cierto que  $A$  es similar a  $B$  pues podemos expresar  $A = PBP^{-1}$ . Siendo este el caso, diremos que  $A$  y  $B$  son matrices semejantes si cualquiera es semejante a la otra.

**Ejemplo 6.4.** Las matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

son similares porque existe la matriz  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

¡Compruébelo!

□

**Teorema 6.8** (Propiedades invariantes bajo semejanza). Sean  $A$  y  $P$  dos matrices cuadradas del mismo tamaño.

- (i)  $A$  y  $P^{-1}AP$  tienen el mismo determinante.
- (ii)  $A$  es invertible si y sólo si  $P^{-1}AP$  es invertible.
- (iii)  $A$  y  $P^{-1}AP$  tienen el mismo rango.
- (iv)  $A$  y  $P^{-1}AP$  tienen la misma nulidad.
- (v)  $A$  y  $P^{-1}AP$  tienen la misma traza.
- (vi)  $A$  y  $P^{-1}AP$  tienen el mismo polinomio característico.
- (vii)  $A$  y  $P^{-1}AP$  tienen los mismos valores propios.
- (viii) Si  $\lambda$  es un valor propio correspondiente a  $A$ , entonces el espacio propio de  $A$  correspondiente a  $\lambda$  tiene la misma dimensión que el espacio propio de  $P^{-1}AP$  correspondiente a  $\lambda$ .

**Nota 6.6.** Es importante tener en cuenta que  $A$  y  $P^{-1}AP$  no necesariamente tienen los mismos vectores propios.

**Definición 6.6** (Matriz diagonalizable). Una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$  se dice **diagonalizable** si  $A$  es similar a una matriz diagonal. En otras palabras,  $A$  es diagonalizable si existe una matriz  $P$  tal que  $P^{-1}AP$  es matriz diagonal. En tal caso se dice que  $P$  diagonaliza a  $A$ .

**Ejemplos 6.5.**

1. Toda matriz diagonal  $D$  es diagonalizable porque ella se puede expresar como el producto  $I^{-1}DI$ . Dicho de otra manera,  $D$  es diagonalizable porque ella es semejante a ella misma.
2. La matriz identidad es diagonalizable pues  $I = I^{-1}II = III = I$ .

3. La matriz  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$  es diagonalizable porque  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  tiene la propiedad que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

¡Compruébelo!

□

**Teorema 6.9.** Una matriz de orden  $n$  es diagonalizable si y solamente si tiene  $n$  vectores propios linealmente independientes.

**Nota 6.7.** El Teorema 6.9 puede entenderse así: una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es diagonalizable si tiene suficientes vectores propios para formar una base de  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 6.6.** La matriz identidad tiene sólo un valor propio ( $\lambda = 1$ ) con multiplicidad algebraica 3. El espacio propio correspondiente a  $\lambda$  es todo  $\mathbb{R}^3$ .  $\square$

**Teorema 6.10** (Condición suficiente de diagonalización). *Si una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tiene  $n$  valores propios distintos, entonces el conjunto de los correspondientes vectores propios es linealmente independiente y  $A$  es diagonalizable.*

**Nota 6.8.** La condición del Teorema 6.10 es suficiente pero no necesaria porque una matriz puede ser diagonalizable aunque no tenga valores propios distintos. En otras palabras, que una matriz de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  tenga exactamente  $n$  vectores propios LI no implica que esta tenga  $n$  valores propios diferentes.

El Teorema 6.9 y el Teorema 6.10 sugieren un método general de diagonalización que enunciaremos a continuación.

Sea  $A$  una matriz cuadrada de orden  $n$ .

1. Determine si  $A$  es diagonalizable, i.e. busque  $n$  vectores propios LI. Si no existen  $n$  vectores propios LI, entonces  $A$  no es diagonalizable.
2. Si  $A$  es diagonalizable, forme una matriz  $P$  cuyas columnas sean los vectores propios de  $A$ . (El orden no importa.)
3. Forme el producto  $P^{-1}AP$ . Esta es una matriz diagonal que tiene los valores propios de  $A$  en su diagonal principal. Estos aparecerán en el orden que corresponde a las columnas de  $P$ .

### Ejemplos 6.7.

1. Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como  $A$  es triangular, entonces sus autovalores son  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  (con MA 2).  $A$  sólo tiene dos valores propios distintos pero esto no implica que no sea diagonalizable aunque, de hecho,  $A$  no es diagonalizable.

2. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -17 & 8 \end{bmatrix}$$

tiene tres autovalores distintos  $\lambda_1 = 4$ ,  $\lambda_2 = 2 + \sqrt{3}$  y  $\lambda_3 = 2 - \sqrt{3}$  (¡Compruébelo!) Luego  $A$  es diagonalizable y

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 + \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \sqrt{3} \end{bmatrix},$$

siendo  $P$  una matriz invertible (que se puede obtener al colocar a los vectores propios de  $A$  como sus columnas en el orden adecuado). Note que no fue necesario calcular  $P$  para encontrar la matriz diagonal.

3. Una matriz triangular, cuya diagonal principal tenga componentes distintas, es diagonalizable.
4. Queremos encontrar una matriz  $P$  que diagonalice a

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Veamos si es que  $A$  tiene 3 vectores propios LI. Para ello hallamos las soluciones de la ecuación característica  $\det(A - \lambda I) = 0$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 &\iff (2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (2-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = 0 \\ &\iff (2-\lambda)^2(\lambda - 1) = 0 \end{aligned}$$

por lo que  $\lambda_1 = 1$  (MA 1) y  $\lambda_2 = 2$  (MA 2) son los autovalores de  $A$ . Resolvemos  $(A - \lambda_1 I)u = 0$  de la manera usual. Tenemos

$$A - I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} E_{31}(-1) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} E_{21}(-1) \\ E_{31}(-1) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1,$$

luego  $(A - \lambda_1 I)u = 0$  es soluble si y sólo si  $U_1 u = 0$ , con  $u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ . Se obtiene

$$u_1 = -2t, \quad u_2 = t, \quad u_3 = t \in \mathbb{R}.$$

Esto nos dice que  $(-2, 1, 1)$  es vector propio asociado a  $\lambda_1$  y que  $\{(-2, 1, 1)\}$  es base para  $E_1 = E_{\lambda_1}$ . Ahora resolvemos  $(A - \lambda_2 I)v = 0$ .

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} M_1(-1/2) \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} E_{31}(-1/2)E_{21}(-1/2) \\ E_{31}(-1/2) \end{smallmatrix}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2$$

Luego, la solución de  $U_2 v = 0$  tiene la forma

$$v = r \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

de modo que  $\{(0, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$  es base para  $E_2$ . En resumen,  $A$  tiene tres vectores propios LI. El conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

forma una base para  $\mathbb{R}^3$ . Por tanto, la matriz

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

diagonaliza a  $A$ . Verifique que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

5. Suponga que se quiere calcular

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{10}.$$

A primera vista, esto podría parecer muy tedioso; sin embargo, del ítem anterior sabemos que  $A$  es diagonalizable, luego podemos expresarla como  $A = PDP^{-1}$ . Note que

$$\begin{aligned} A^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^2P^{-1}, \\ A^3 &= (PD^2P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^3P^{-1}, \\ A^4 &= (PD^3P^{-1})(PDP^{-1}) = PD^4P^{-1}, \\ &\vdots \\ A^{10} &= PD^{10}P^{-1}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A^{10} &= P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{10} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2^{10} & 2^{10} & 2^{10} \\ 2^{10} & 0 & 2^{11} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 - 2^{10} & 0 & 2 - 2^{11} \\ 2^{10} - 1 & 2^{10} & 2^{10} - 1 \\ 2^{10} - 1 & 0 & 2^{11} - 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Esto sugiere que calcular potencias de una matriz es relativamente más fácil si la matriz es diagonalizable.

□

### 6.2.1. Problemas resueltos

**Problema 6.7.** Determine si

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable. Encuentre una matriz  $P$  diagonalizante y su matriz diagonal asociada.

**Solución.** Del Problema 6.5 sabemos que  $A$  posee 2 valores propios distintos y que

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix}$$

son sus vectores propios. Claramente, estos vectores son LI. Por lo anterior,  $A$  es diagonalizable y

$$P = \begin{bmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es su matriz diagonalizante. La matriz diagonal asociada a  $A$  es  $D = P^{-1}AP$ :

$$D = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{bmatrix}.$$

**Problema 6.8.** Considere la siguiente matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

- Diga si  $A$  es o no diagonalizable.
- Si  $A$  es diagonalizable, encuentre una matriz  $P$  diagonalizante y su matriz diagonal asociada  $D$ .
- Si  $n$  es el orden de  $A$ , encuentre *una* base para  $\mathbb{C}^n$  formada por vectores propios de  $A$ , de ser posible.

**Solución.**

- Tenemos

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (5-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 4 & 5-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda + 10 = 0 \end{aligned}$$

Por la regla de Ruffini,

$$1 \begin{vmatrix} 1 & -12 & 21 & -10 \\ & 1 & -11 & 10 \\ & & 1 & -10 \\ & & & 1 \end{vmatrix}, \quad 1 \begin{vmatrix} 1 & -11 & 10 \\ & 1 & -10 \\ & & 1 \end{vmatrix}$$

de manera que

$$\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 1)^2(\lambda - 10) = 0.$$

Luego  $\lambda_1 = 1$  (MA=2) y  $\lambda_2 = 10$  (MA=1) son los valores propios de  $A$ . Para determinar si  $A$  es o no diagonalizable veamos si posee tres vectores propios LI. La matriz de coeficientes de este sistema homogéneo es

$$A - I = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1/2)E_{21}(1)]{M_1(1/4)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_1.$$

Además

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ x_2 = r \in \mathbb{R}, \\ x_3 = s \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

por lo que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es la solución de  $U_1x = 0$  y por tanto

$$E_1 = \text{gen} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es el espacio propio de  $A$  asociado a  $\lambda_1$ . Ahora consideramos  $A - \lambda_2 I = A - 10I$ . Tenemos

$$A - 10I = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 2 & 2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-2/5)E_{21}(-4/5)]{M_1(-1/5)} \begin{bmatrix} 1 & -4/5 & -2/5 \\ 0 & -9/5 & 18/5 \\ 0 & 18/5 & -36/5 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{32}(-2)]{M_2(-5/9)} \begin{bmatrix} 1 & -4/5 & -2/5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-4/5)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U_2.$$

La solución de  $U_2x = 0$  es

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

y entonces

$$E_{10} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es el espacio propio de  $A$  asociado a  $\lambda_2$ . Notemos que la suma de  $\dim(E_1)$  y  $\dim(E_{10})$  es igual a la cantidad columnas de  $A$ , lo que nos dice que  $A$  es diagonalizable.

(b) La matriz

$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

diagonaliza a  $A$ , y

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

es su matriz diagonal asociada.

(c) Dado que

$$\det \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1/2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

los vectores propios de  $A$  son linealmente independientes, y entonces

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

es una base para el espacio vectorial  $\mathbb{C}^3$  sobre el campo  $\mathbb{C}$ .

□

**Problema 6.9.** Sea  $A \in \mathbb{C}_{n \times n}$  tal que su polinomio característico es

$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda - c)^n$$

con  $c \in \mathbb{C}$ . Demuestre que si  $A$  es diagonalizable entonces  $A = cI$ .

**Solución.** Si  $A$  es diagonalizable, entonces existe una matriz diagonal  $D$  que es semejante a  $A$ ; las componentes de su diagonal principal son los valores propios de  $A$ . Además, existe una matriz invertible  $C$ , cuyas columnas son los vectores característicos linealmente independientes de  $A$ . Esto es,

$$D = C^{-1}AC. \tag{6.3}$$

Por otra parte, por cómo  $p$  está definido, este tiene  $n$  raíces complejas (repetidas) con multiplicidad algebraica  $n$ , i.e.  $\lambda = c \in \mathbb{C}$ . El número  $c$  es un valor propio de  $A$  y aparece en cada entrada de la diagonal principal de  $D$ , por lo que podemos expresar  $D = cI$ . Sustituyendo esto en la ecuación (6.3), obtenemos

$$\begin{aligned} cI = C^{-1}AC &\iff C(cI) = C(C^{-1}AC) \\ &\iff c(CI) = (CC^{-1})AC \\ &\iff cC = IAC \\ &\iff (cC)C^{-1} = (IAC)C^{-1} \\ &\iff c(CC^{-1}) = A(CC^{-1}) \\ &\iff cI = A. \end{aligned}$$

Queda demostrado.

□



## 6.3. Aplicaciones

### 6.3.1. Cálculo de potencias de una matriz

Una aplicación importante de las matrices diagonalizables es calcular las potencias de las matrices cuadradas. Una potencia  $k$  de una matriz  $A$  es otra matriz  $A^k$  que resulta de multiplicar  $A$  por sí misma  $k$  veces. El siguiente ejemplo ilustra que calcular potencias de una matriz diagonal es fácil de realizar:

**Ejemplo 6.8.** Si  $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$  entonces

$$DD = D^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix}$$

y

$$DDD = DD^2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^2 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3^3 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{bmatrix}.$$

En general,

$$D^k = \begin{bmatrix} 3^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \quad \text{para } k \geq 1. \quad \square$$

Si una matriz  $A$  de orden  $n$  es diagonalizable, entonces existe una matriz diagonal  $D$  tal que  $D = P^{-1}AP$ , donde  $P$  diagonaliza a  $A$ . Usando este hecho podemos calcular cualquiera de sus potencias. Observe que

$$\begin{aligned} D^2 &= (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2P \\ D^3 &= (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^3P \\ D^4 &= (P^{-1}A^3P)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^4P \\ &\vdots \\ D^k &= P^{-1}A^kP \end{aligned}$$

y entonces  $A^k = PD^kP^{-1}$ , es decir

$$A^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

donde cada  $\lambda_i$  es un valor propio de  $A$ .

#### Ejemplos 6.9.

1. Los valores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

son las soluciones de la ecuación  $\det(\lambda I - A) = 0$ . Tenemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -2 \\ -1 & \lambda - 2 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = 0 &\iff \lambda \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & \lambda - 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff \lambda(\lambda - 2)(\lambda + 1) - 2(\lambda - 2) = 0 \\ &\iff (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0. \end{aligned}$$

Se sigue que los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  y  $\lambda_3 = -2$ . Se deja al lector verificar que los vectores propios asociados son

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

respectivamente. Entonces

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

diagonaliza a  $A$ . Hallamos su inversa.

$$\begin{aligned} [P \mid I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[E_{31}(1/2)E_{21}(-1)]{M_1(1/2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1/2 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[M_3(1/6)]{E_{23}(-1/2)E_{13}(-1/3)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 3/4 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/12 & 0 & 1/6 \end{array} \right] = [I \mid P^{-1}] \end{aligned}$$

Luego, una potencia  $k$  de  $A$  es una matriz  $A^k$  tal que

$$A^k = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^k P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 3/4 & 1 & 1/2 \\ -1/12 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Entonces, por ejemplo

$$A^{101} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{101} & 0 \\ 0 & 0 & (-2)^{101} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 3/4 & 1 & 1/2 \\ -1/12 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}.$$

Calcular este producto es más sencillo que calcular  $A^{101}$  directamente (¡Compruébelo!).

2. Considere la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Esta matriz es triangular y sus valores propios son las entradas de su diagonal principal, i.e.  $\lambda_1 = 1$  (con MA 2), y  $\lambda_2 = 2$  (con MA 1). Los vectores propios asociados son  $v_1 = (0, 1, 5)$  y  $v_2 = (0, 0, 1)$ , respectivamente. Como  $A$  es de orden 3 y sólo tiene dos vectores propios LI, entonces no es diagonalizable y por tanto no podemos usar el método visto para calcular sus potencias.

□

**Nota 6.9.** El método expuesto requiere más tiempo y cálculos para diagonalizar a la matriz que para calcular las potencias propiamente. Una vez que hemos diagonalizado a la matriz, podemos calcular cualquiera de sus potencias.

### 6.3.2. Ecuaciones diferenciales

Una *ecuación diferencial* es una ecuación en la que aparece una función (que no conocemos) y sus derivadas. Por ejemplo, si  $y = f(x)$ , entonces

$$\alpha y = y' \tag{6.4}$$

es una ecuación diferencial, donde  $\alpha$  es un escalar arbitrario. La *solución* a esta ecuación es una función de la forma  $y = ce^{\alpha x}$ , con  $c \in \mathbb{R}$ . Un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{cases} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$$

donde  $y_1, y_2, \dots, y_n$  son funciones diferenciables con derivadas  $y_1', y_2', \dots, y_n'$  y las constantes  $a_{ij}$  son no todas iguales a cero. Este es un sistema de ecuaciones diferenciales de *primer orden* (porque el orden de la mayor derivada es 1). Note que podemos usar la notación matricial para expresar este sistema:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Si tomamos  $y' = (y_1', y_2', \dots, y_n')$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  y llamamos  $A$  a la matriz de coeficientes, entonces podemos escribir  $y' = Ay$ . Dado que la multiplicación por una matriz y la derivada de una función son transformaciones lineales, este sistema es *lineal*. Obsérvese que si dos vectores  $u$  y  $v$  son soluciones de este sistema, entonces  $k_1u + k_2v$  también lo es, pues

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(k_1u + k_2v) &= k_1 \frac{d}{dx}(u) + k_2 \frac{d}{dx}(v) \\ &= k_1u' + k_2v' \\ &= k_1(Au) + k_2(Av) \\ &= A(k_1u + k_2v). \end{aligned}$$

#### Ejemplos 6.10.

1. El sistema

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 \\ y_2' = -5y_2 \end{cases}$$

puede ser escrito en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

De la ecuación (6.4) obtenemos que su solución es

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{2x} \\ c_2 e^{-5x} \end{bmatrix}.$$

2. La solución del sistema

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

es

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-2x} \\ c_2 e^x \\ c_3 e^{-3x} \end{bmatrix}.$$

Si además tiene por *condiciones iniciales* a

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ y_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^0 \\ c_2 e^0 \\ c_3 e^0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \\ 4e^{-3x} \end{bmatrix}$$

es la solución que las satisface.

□

**Nota 6.10.** En el ejemplo anterior, resolver los sistemas de ecuaciones fue fácil porque sus matrices de coeficientes eran diagonales. Pero no todos los sistemas de ecuaciones tienen una matriz de coeficientes diagonal.

Si la matriz de coeficientes del sistema  $y' = Ay$  es diagonalizable, entonces existe una matriz  $P$  que la diagonaliza. Esto es lo que nos hará posible resolver tal sistema de ecuaciones cuando su matriz de coeficientes no sea diagonal. Si el vector incógnita  $y$  se relaciona con un nuevo vector  $v$  mediante  $y = Pv$ , entonces  $y' = Pv'$  y además

$$\begin{aligned} y' = Ay &\iff Pv' = A(Pv) \\ &\iff P^{-1}Pv' = P^{-1}(APv) \\ &\iff v' = (P^{-1}AP)v. \end{aligned}$$

Como  $P$  diagonaliza a  $A$ , entonces existe una matriz diagonal  $D$  tal que  $v' = Dv$ .

**Ejemplos 6.11.**

1. Para resolver el sistema  $\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_1 + y_2 \end{cases}$ , que en forma matricial es

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \iff y' = Ay,$$

primero buscamos una matriz  $P$  que diagonalice a la matriz de coeficientes del sistema. Para ello, buscamos sus valores y vectores propios.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) = 0 &\iff \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\iff (1 - \lambda)^2 - 4 = 0 \\ &\iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \end{aligned}$$

Los valores propios de  $A$  son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = 3$ . Resolviendo los sistemas  $(A - \lambda_1 I)x = 0$  y  $(A - \lambda_2 I)x = 0$  obtenemos los vectores propios  $(1, -2)$  y  $(1, 2)$ , respectivamente. Ahora podemos formar la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix},$$

y entonces

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

es tal que  $D = P^{-1}AP$ . Por otra parte, si hacemos  $y = Pv$  para un vector arbitrario  $v = (v_1, v_2)$ , entonces

$$\begin{aligned} v' = Dv &\iff \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-x} \\ c_2 e^{3x} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esto en  $y = Pv$  y resolviendo para  $y$  obtenemos la solución del sistema  $y' = Ay$ :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 e^{-x} \\ c_2 e^{3x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} \\ -2c_1 e^{-x} + 2c_2 e^{3x} \end{bmatrix}.$$

2. Si en el ítem anterior tuviéramos como condiciones iniciales a  $y_1(0) = 0$  y  $y_2(0) = 7$ , entonces

$$\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^0 + c_2 e^0 \\ -2c_1 e^0 + 2c_2 e^0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 \\ -2c_1 + 2c_2 \end{bmatrix}.$$

Al resolver este sistema obtenemos  $c_1 = -\frac{7}{4}$  y  $c_2 = \frac{7}{4}$  y por tanto

$$y_1 = -\frac{7}{4}e^{-x} + \frac{7}{4}e^{3x}, \quad y_2 = \frac{7}{2}e^{-x} + \frac{7}{2}e^{3x}$$

satisfacen tales condiciones iniciales.

□

En resumen, para resolver un sistema de la forma  $y' = Ay$ , siga los siguientes pasos:

1. Encuentre una matriz  $P$  que diagonalice a  $A$ .
2. Tome un vector arbitrario  $v$  tal que  $y = Pv$  (y por tanto tal que  $y' = Pv'$ ) y forme el sistema  $v' = Dv$ , donde  $D = P^{-1}AP$ .
3. Encuentre la solución de  $v' = Dv$ .
4. Determine  $y$  al sustituir de vuelta el vector  $v$  en  $y = Pv$ .

Capítulo 7:

▶ **Aplicaciones del álgebra lineal**

## Capítulo 7:

# ► Aplicaciones del álgebra lineal

### 7.1. La herencia mendeliana

El contenido de esta sección se basa en el capítulo 10 de Anton et al. (2019) y varios de los conceptos relacionados a la genética fueron extraídos de Reece et al. (2011).

Todos los días observamos características hereditarias (como ojos marrones, verdes o azules) entre los individuos de una población. Estas son transmitidas de padres a hijos. Se dice que una característica que se hereda es un carácter, por ejemplo el color de ojos. Obviamente, existen muchos colores de ojos; es decir, varios tipos de ese carácter. A cada variante de un carácter, como ojos cafés o azules, se le denomina rasgo.

La hipótesis de la herencia “particulada” propone que los padres transmiten la información genética en unidades hereditarias llamadas genes, que conservan sus identidades separadas en la descendencia. Un rasgo es la expresión (física) visible de un par de genes; este par de genes se llama genotipo del individuo. Nos referiremos a estos como  $A$  y  $a$ . Dependiendo de las combinaciones de estos dos genes, el rasgo será diferente. En general, se dice que  $A$  es dominante (sobre  $a$ ) y que  $a$  es recesivo (al gen  $A$ ), lo que significa que siempre que el gen  $A$  esté presente en el par, el rasgo visible será el correspondiente a  $A$ ; por el contrario, la única forma de que  $a$  se exprese es que el par sea  $aa$ .

En el tipo de herencia denominado autosómico, un individuo recibe un gen de cada par de genes de sus padres. Es decir, cada individuo (de cualquier género) tiene un par de genes de un rasgo particular y contribuirá con uno de ellos a su descendencia. Es cuestión de azar cuál de los dos genes de un padre pasa a la descendencia. Las posibles combinaciones son  $AA$ ,  $Aa$  y  $aa$ . Si un padre es  $Aa$ , es igualmente probable que su descendencia herede, ya sea el gen  $A$  o el gen  $a$ . En la Tabla 7.1.1 se lista las diferentes probabilidades de los posibles genotipos de la descendencia, dependiendo de las combinaciones de los genotipos de los padres.

**Tabla 7.1.1:** Adaptada de Anton et al. (2019).

Genotipo de la descendencia	Genotipo de los padres					
	$AA - AA$	$AA - Aa$	$AA - aa$	$Aa - Aa$	$Aa - aa$	$aa - aa$
$AA$	1	$1/2$	0	$1/4$	0	0
$Aa$	0	$1/2$	1	$1/2$	$1/2$	0
$aa$	0	0	0	$1/4$	$1/2$	1

En esta sección veremos cómo el álgebra lineal puede ayudarnos a predecir la propagación de un rasgo conforme es pasado de generación en generación. Se usarán conceptos como lo son la diagonalización y el cálculo de potencias de una matriz.

**Ejemplo 7.1** (Tomado de Anton et al. (2019)). Suponga que un agricultor tiene una gran población de plantas que pueden tener uno de los tres posibles genotipos  $AA$ ,  $Aa$  y  $aa$ . El agricultor siempre fertiliza a las plantas con una planta de genotipo  $AA$ ; luego de que dé lugar a su descendencia, la planta es retirada. Queremos derivar una expresión para la distribución de los tres posibles genotipos en la población después de un número de generaciones determinado, es decir, la fracción de cada genotipo existente en la población.

Sean

- $a_n$  : fracción de plantas de genotipo  $AA$  en la  $n$ -ésima generación
- $b_n$  : fracción de plantas de genotipo  $Aa$  en la  $n$ -ésima generación
- $c_n$  : fracción de plantas de genotipo  $aa$  en la  $n$ -ésima generación.

Así,  $a_0$ ,  $b_0$  y  $c_0$  corresponden a la distribución (o frecuencia relativa) inicial de los genotipos, por lo que

$$a_n + b_n + c_n = 1, \quad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Como cada planta ( $AA$ ,  $Aa$ , o  $aa$ ) es fertilizada con una planta  $AA$ , entonces la probabilidad de que se obtenga una planta hija  $AA$ ,  $Aa$  o  $aa$  es como se observa en las tres primeras columnas de la Tabla 7.1.1. Por tanto, siempre que se escoja una planta  $AA$  para ser fertilizada, se obtendrá una planta  $AA$ ; sin embargo, si se toma una planta  $Aa$ , la mitad de las veces se obtendrá una planta  $AA$ . Razonando de manera similar podemos establecer las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} \\ b_n = c_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} \\ c_n = 0. \end{cases}$$

Aquí  $n \geq 1$ , y  $n-1$  denota a la generación precedente. Usando notación matricial podemos escribir  $x_n = Gx_{n-1}$ , es decir

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Pero, dado que la generación  $n-1$  tiene una generación precedente  $n-2$ , tenemos

$$\begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-2} \\ b_{n-2} \\ c_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Si se sustituye esto en  $x_n = Gx_{n-1}$ , obtenemos  $x_n = G^2x_{n-2}$ . En general, para  $n$  generaciones se tiene  $x_n = G^n x_0$ . Esto nos permitirá predecir la proporción de los genotipos de las plantas después de  $n$  generaciones si conocemos únicamente las proporciones iniciales de los diferentes tipos. Además, podemos dar una expresión concreta para  $x_n$  si encontramos una expresión explícita para  $G^n$ , lo cual se logra al diagonalizar  $G$ .

Dejamos al lector verificar que los vectores propios de  $G$  son

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

siendo sus respectivos valores propios  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ , y  $\lambda_3 = 1$ . Ahora podemos escribir

$$G = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$$

y por tanto

$$\begin{aligned} x_n &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x_0 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 - \frac{1}{2^n} & 1 - \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{2^n} & \frac{1}{2^{n-1}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Realizando este producto matricial y teniendo en cuenta que  $a_0 + b_0 + c_0 = 1$  obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} a_n = 1 - \frac{1}{2^n}b_0 - \frac{1}{2^{n-1}}c_0 \\ b_n = \frac{1}{2^n}b_0 + \frac{1}{2^{n-1}}c_0 \\ c_n = 0. \end{cases}$$

Ahora ya podemos hacer predicciones. Suponiendo que inicialmente se tenía 100 plantas, 5 del genotipo  $AA$ , 40 del genotipo  $Aa$  y 55 del genotipo  $aa$ , entonces al cabo de 5 generaciones el 95.31 % serán  $AA$  y el 4.69 % serán  $Aa$ . Las plantas  $aa$  “desaparecen” justo después de la primera fertilización. Note también que el número de plantas con el genotipo  $AA$  fue el menor originalmente.

Finalmente, si se toma el límite cuando  $n \rightarrow \infty$ , se obtiene que  $a_n \rightarrow 1$  y  $b_n \rightarrow 0$ , lo que significa que, al final, todas las plantas terminarán teniendo el genotipo  $AA$ .

□

A continuación presentamos una modificación del ejemplo anterior:

**Ejemplo 7.2.** En el Ejemplo 7.1, suponga que al inicio las plantas son fertilizadas con plantas del genotipo  $AA$ , que la primera generación es fertilizada con plantas del genotipo  $Aa$ , la segunda con el genotipo  $AA$  y así sucesivamente, alternando entre estos dos tipos.

Hallaremos una expresión que nos permita conocer el porcentaje de plantas de cada genotipo presentes en la  $n$ -ésima generación. Designamos como  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$  al porcentaje de plantas del tipo  $AA$ ,  $Aa$  y  $aa$ , respectivamente. Dado que  $a_n$ ,  $b_n$  y  $c_n$  representan una fracción del total, podemos establecer que

$$a_n + b_n + c_n = 1.$$

Ahora, como ya sabemos, si se fertiliza a las plantas inicialmente con el genotipo  $AA$ , los porcentajes relativos de la primera generación están dados por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} a_1 = a_0 + \frac{1}{2}b_0 \\ b_1 = \frac{1}{2}b_0 + c_0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

Además, cuando este conjunto de plantas es fertilizado con el genotipo  $Aa$ , obtenemos la segunda generación que está distribuida de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}b_1 \\ b_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}b_1 + \frac{1}{2}c_1 \\ c_2 = \frac{1}{4}b_1 + \frac{1}{2}c_1 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

Para obtener estas expresiones, simplemente nos fijamos en las columnas de la Tabla 7.1.1 que corresponden a las plantas que tienen al menos un padre del genotipo  $Aa$ . Sustituyendo (7.1) en (7.2), se obtiene

$$\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}.$$

Ahora, es claro darse cuenta que la tercera generación tendrá una distribución de genotipos dada por un conjunto de expresiones similares a las de la primera, pues las plantas de la tercera generación se obtienen de fertilizar las de la segunda con el genotipo  $AA$ . Asimismo, las plantas de la cuarta generación tendrán una distribución dada por expresiones similares a las de la segunda generación. En general, los porcentajes de los genotipos existentes entre las plantas dependerá si estas son fertilizadas un número par o impar de veces. Dejamos al lector verificar que en un número par de fertilizaciones  $n = 2k$ , con  $k = 1, 2, 3, \dots$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{2k} \\ b_{2k} \\ c_{2k} \end{bmatrix} &= \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para un número impar de fertilizaciones  $n = 2k - 1$  con  $k = 1, 2, 3, \dots$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{2k-1} \\ b_{2k-1} \\ c_{2k-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por otra parte, si queremos obtener expresiones explícitas que nos permitan calcular la frecuencia relativa en una generación dada, entonces debemos diagonalizar la matriz

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Dejamos al lector verificar que sus valores propios son  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{4}$  y  $\lambda_3 = 1$ , cuyos vectores propios asociados son

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{respectivamente.}$$

Con esto podemos construir una matriz  $P$  diagonalizante y su inversa:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,  $M = PDP^{-1}$ , de modo que  $M^k = PD^kP^{-1}$  y entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{2k} \\ b_{2k} \\ c_{2k} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 5 + 4^{1-k} & 5 - 4^{\frac{1}{2}-k} & 5 - 4^{\frac{3}{2}-k} \\ 6 & 6 & 6 \\ 1 + 4^{1-k} & 1 + 4^{\frac{1}{2}-k} & 1 + 4^{\frac{3}{2}-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Simplificando lo anterior un poco obtenemos que

$$\begin{cases} a_{2k} = \frac{5}{12} + \frac{1}{6(4^k)}(2a_0 - b_0 - 4c_0), \\ b_{2k} = \frac{1}{12}(6a_0 + 6b_0 + 6c_0) = \frac{1}{2}, \\ c_{2k} = \frac{1}{12} - \frac{1}{6(4^k)}(2a_0 - b_0 - 4c_0). \end{cases}$$

Para hallar el vector  $(a_{2k-1}, b_{2k-1}, c_{2k-1})$  no necesitamos diagonalizar ninguna matriz puesto que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a_{2k-1} \\ b_{2k-1} \\ c_{2k-1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{4}\right)^k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -4 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 + 4^{1-k} & 5 - 4^{\frac{1}{2}-k} & 5 - 4^{\frac{3}{2}-k} \\ 6 & 6 & 6 \\ 1 + 4^{1-k} & 1 + 4^{\frac{1}{2}-k} & 1 + 4^{\frac{3}{2}-k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + 4^{-k} & 2 - 4^{-\frac{1}{2}-k} & 2 - 4^{\frac{1}{2}-k} \\ 1 - 4^{-k} & 1 + 4^{-\frac{1}{2}-k} & 1 + 4^{\frac{1}{2}-k} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{cases} a_{2k-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6 \cdot 4^k}(2a_0 - b_0 - 4c_0) \\ b_{2k-1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6 \cdot 4^k}(2a_0 - b_0 - 4c_0) \\ c_{2k-1} = 0 \end{cases}$$

Finalmente, en el caso en el que las plantas son fertilizadas un número par de veces, tomando el límite cuando  $k \rightarrow \infty$  se tiene  $a \rightarrow \frac{5}{12}$ ,  $b = \frac{1}{2}$  y  $c \rightarrow \frac{1}{12}$ . Lo que significa que,

aproximadamente, un 41.67% de las plantas tiene el genotipo  $AA$ , 50% tiene el genotipo  $Aa$  y sólo el 8.33% tiene el genotipo  $aa$ . De manera análoga se puede concluir que, en el caso impar, aproximadamente un 66.67% de las plantas tiene el genotipo  $AA$ , 33.33% tiene el genotipo  $Aa$  y ninguna planta tiene el genotipo  $aa$ . Note que en cualquier caso las plantas del genotipo  $aa$  son las menos favorecidas, debido obviamente a que el gen  $a$  es recesivo.  $\square$



## 7.2. Criptografía

En esta sección, basada en el trabajo de Murray (1999), veremos cómo el álgebra lineal puede ayudarnos a cifrar o descifrar un mensaje usando matrices.

En palabras simples, la criptografía estudia las maneras en las que un mensaje puede ser enviado de modo seguro para que sólo el receptor y el remitente puedan ver o entender su contenido. Esto significa que aunque alguien más encuentre el mensaje, no será capaz de saber lo que dice, a menos que tenga la *clave*. Se distinguen tres conceptos claves: texto plano, texto cifrado o encriptado y clave de cifrado. El primero es el mensaje que se quiere cifrar (que cualquiera entiende), el segundo es el mensaje cifrado y el tercero es lo que nos permite cifrar (y descifrar) el mensaje.

### 7.2.1. Cifrado

Los cifrados más simples que existen son los de sustitución. Por ejemplo, podríamos reemplazar cada letra del alfabeto con la letra que está en la tercera posición a partir de ella; así, la palabra ABECEDARIO corresponde a DEHFHGDULR. Este es el método que Julio Cesar usaba para encriptar sus mensajes. En un texto cifrado largo, un simple análisis probabilístico podría ayudarnos a descifrar el mensaje que oculta; por ejemplo, teniendo en cuenta que la letra más frecuente en español es la “e”. En lo que sigue de esta sección nos referiremos al alfabeto como un conjunto de caracteres que tienen asociados un número entero cada uno. En particular, hemos construido el nuestro como se muestra en la Tabla 7.2.1.

Un algoritmo para encriptar mensajes usando matrices es el siguiente:

1. Dividir el mensaje en grupos de  $n$  letras, cada uno con la misma cantidad de letras. De obtener un grupo incompleto al final, añadir un espacio.
2. Asignar arbitrariamente un número a cada letra. (En particular, puede usarse la relación establecida en la Tabla 7.2.1.)
3. Formar un vector de  $\mathbb{R}^n$  con aquellos números por cada grupo.
4. Multiplicar a ese vector por una matriz invertible (cualquiera) de  $\mathbb{R}^{n \times n}$  para obtener un nuevo vector que representa el mensaje codificado.

A continuación exponemos un ejemplo sencillo que hace uso de este algoritmo:

**Tabla 7.2.1**

–	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	?	
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	

**Ejemplo 7.3.** Usemos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para encriptar el mensaje “ATACAR AHORA”. Dado que esta matriz es de tamaño  $3 \times 3$ , agrupamos las letras (y espacio) del mensaje en grupos de tres y les asignamos números usando la Tabla 7.2.1. Tenemos entonces

$$\begin{bmatrix} A \\ T \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 21 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} C \\ A \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 19 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} - \\ A \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} O \\ R \\ A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora multiplicamos a cada uno de estos vectores por  $A$  desde la izquierda. El resultado, en orden respectivo es:

$$\begin{bmatrix} 24 \\ 22 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 42 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 37 \\ 20 \\ 33 \end{bmatrix}.$$

Hemos encriptado el mensaje, el cual podemos escribir como el vector

$$(24, 22, 3, 42, 20, 25, 17, 9, 8, 37, 20, 33).$$

El receptor necesitará conocer la forma en que lo hemos encriptado para decodificarlo, i.e., la (inversa de la) matriz usada, además de la correspondencia entre números y letras de la Tabla 7.2.1. No obstante, este encriptado es todavía bastante sencillo.  $\square$

**Nota 7.1.** La elección del tamaño de los grupos de letras puede ser cualquiera. Tenga en cuenta que si aumenta el tamaño de la matriz, será más difícil decodificar el mensaje, pues existen  $29^{n^2}$  posibilidades para una matriz de tamaño  $n \times n$ , usando únicamente los 29 caracteres de la Tabla 7.2.1. De hecho, podríamos tratar al mensaje como un único grupo, lo que resulta en el uso de una matriz de dimensión grande. Por otro lado, es necesario que la matriz no sea singular, pues de serlo, no sería posible recuperar el mensaje. Para desencriptar el mensaje multiplicamos cada vector (en orden) por la inversa de la matriz escogida desde la izquierda y al asociar cada número con la letra correspondiente, obtenemos el mensaje original.

El Ejemplo 7.3 lo expusimos con el propósito de introducir lo que se conoce como cifrado poligráfico, el cual es más complicado que uno de sustitución simple. Aquí, el *texto sin formato* se divide en grupos de letras del mismo tamaño y luego cada grupo se transforma en un grupo diferente de letras (cifradas). Esto significa que el receptor

obtendrá una cadena de caracteres que, en principio, no tiene sentido. Un texto plano que difiera por una única letra del original puede tener asociado un texto cifrado muy diferente de este.

Un tipo de cifrado poligráfico es el método proporcionado por el *algoritmo de Hill*, creado por Lester Hill en 1929 (Hill, 1929). Este se basa en la multiplicación matricial y la inversa de una matriz para encriptar un mensaje y lo que lo hace particular es el uso de la aritmética modular. El método de Hill se consideró sofisticado y poderoso en su época, pero hoy en día es fácil de “romper”. En la siguiente subsección daremos las definiciones necesarias que nos permitan establecer de manera formal este algoritmo. Por ahora damos la siguiente definición y luego un ejemplo que ilustra una versión sencilla de cómo usarlo.

**Definición 7.1.** *Dados dos números enteros  $a, b$  con  $a > 0$ , existen dos enteros  $q$  y  $r$  tales que*

$$b = aq + r, \quad 0 \leq r < a.$$

El número  $r$  se denomina **resto** o **residuo**, y  $q$  se denomina **cociente**.

**Ejemplo 7.4.** Cifremos el mensaje “ATACAR AHORA” usando la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

mediante un cifrado de Hill. Ya sabemos que los vectores cifrados son

$$\begin{bmatrix} 24 \\ 22 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 42 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 37 \\ 20 \\ 33 \end{bmatrix}.$$

Así, por ejemplo, sustituyendo los números por letras según la Tabla 7.2.1, obtenemos lo siguiente para el primer vector

$$\begin{bmatrix} 24 \\ 22 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W \\ U \\ C \end{bmatrix}.$$

Sin embargo, como ya habrá notado, al intentar hacer esto con las componentes de los vectores restantes nos encontramos con que los números 42, 37 y 33 no están asignados a ninguna letra. Para resolver esto, simplemente podríamos continuar añadiendo los números siguientes a los 29 caracteres, como se muestra en la Tabla 7.2.2.

**Tabla 7.2.2**

–	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	?
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57

Alternativamente, podríamos sustituir cada número mayor o igual que 29 (el número de caracteres en la Tabla 7.2.1) por el residuo que resulta de dividir este número por 29. Esto es, hacer uso de la Definición 7.1. Así, 42 es sustituido por  $42 - 29(1) = 13$ , el 37 por

8 y el 33 por 4. Esto es exactamente lo mismo que se obtiene con la Tabla 7.2.2. Por lo tanto,

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ S \\ X \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ I \\ H \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H \\ S \\ D \end{bmatrix}.$$

Finalmente, el texto encriptado mediante el método de Hill es

“MSXPIHHSD”.

□

**Nota 7.2.** Debido a que la matriz que se usó en el ejemplo anterior es de tamaño  $3 \times 3$ , nos referimos a esta como un 3-cifrado de Hill. En general, para agrupaciones de  $n$  letras, la matriz que se usa para encriptar el mensaje se llama  $n$ -cifrado de Hill.

Para formalizar lo que acabamos de exponer, introduciremos la relación de congruencia

### 7.2.2. La relación de congruencia

**Definición 7.2.** Sea  $m > 1$  un número entero. Se dice que los enteros  $a$  y  $b$  son **congruentes módulo  $m$**  si  $a - b$  es divisible por  $m$ . Denotamos esto como

$$a \equiv b \pmod{m}.$$

Usando la Definición 7.1, podemos ver que dos enteros  $a$  y  $r$  son congruentes módulo  $m$  si  $a = qm + r$  para algún  $q \in \mathbb{Z}$ , pues el entero  $a - r$  es un múltiplo de  $m$ , es decir que  $m$  lo divide. De esto se deduce que si sumamos o multiplicamos dos números del conjunto  $\{0, 1, 2, \dots, m - 1\}$  y tomamos el residuo de la suma o producto, obtenemos un entero que pertenece a este mismo conjunto.<sup>1</sup> Denotaremos a este conjunto como  $\mathbb{Z}_m$ ,

#### Ejemplos 7.5.

1. Para  $m = 2$ , todo entero es congruente módulo 2 con 0 o con 1.
2. Para  $m = 3$ , todo entero es congruente módulo 3 con 0 o con 1 con 2.
3. Tomemos  $m = 4$ . En el conjunto  $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$  se tiene  $2 + 4 = 2$  porque  $2 + 4 = 6 \equiv 2 \pmod{4}$ ; asimismo,  $3 \cdot 3 = 1$  porque  $3 \cdot 3 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$ .

□

**Nota 7.3.** La relación de congruencia tiene un comportamiento parecido al de la relación de igualdad. De hecho, podemos sumar, restar y multiplicar congruencias como si fueran ecuaciones ordinarias. Sin embargo, no siempre que dividamos una congruencia por un entero obtendremos números que sean congruentes.

El principal motivo por el que estamos tratando estos conceptos es que, una vez cifrado el mensaje mediante el método de Hill, necesitamos la clave inversa de cifrado; es decir, lo que le permite al receptor obtener el mensaje original. En este caso, se trata de la inversa de la matriz de cifrado. Dado que utilizamos congruencias para obtener los vectores correspondientes al texto encriptado, no podemos simplemente hallar la inversa de la matriz dada y decir que con ella descifraremos el mensaje. Lo que sucede es que debemos hallar su inversa usando “álgebra lineal modular”, o sea aplicando las congruencias a sus componentes.

<sup>1</sup>Esto significa que este conjunto es cerrado bajo la suma y producto así definidos.

**Ejemplo 7.6.** Podemos escribir lo siguiente para denotar que hemos usado aritmética módulo 29 sobre las componentes de los vectores del Ejemplo 7.3:

$$\begin{bmatrix} 24 \\ 22 \\ 3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 24 \\ 22 \\ 3 \end{bmatrix} \pmod{29}, \quad \begin{bmatrix} 42 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 13 \\ 20 \\ 25 \end{bmatrix} \pmod{29},$$

$$\begin{bmatrix} 17 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 17 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix} \pmod{29}, \quad \begin{bmatrix} 37 \\ 20 \\ 33 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 8 \\ 20 \\ 4 \end{bmatrix} \pmod{29}.$$

□

Siendo precisos, la matriz de un  $n$ -cifrado de Hill debe tener por componentes a los elementos de  $\mathbb{Z}_m$ , siendo  $m$  el número de caracteres en el alfabeto utilizado, que en nuestro caso está conformado por las 27 letras del abecedario en español, más el espacio y el símbolo “?” listados en la Tabla 7.2.1. La razón de que añadamos dos caracteres extra es que al hacerlo obtenemos un alfabeto con un número primo de elementos. Esto es importante por razones que aclararemos a continuación:

**Definición 7.3.** Sea  $\mathbb{Z}_m$  con  $m > 1$ . El conjunto  $\mathbb{Z}_m$  es un **campo** si y sólo si  $m$  es un número primo y además  $\mathbb{Z}_m$  satisface las siguientes diez condiciones:

- (i) Para todo  $a, b \in \mathbb{Z}_m$ ,  $a + b = b + a$ .
- (ii) Para todo  $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$ ,  $(a + b) + c = a + (b + c)$ .
- (iii) Para cada  $a \in \mathbb{Z}_m$ , existe un elemento denotado por  $0$  y al que llamamos neutro aditivo que cumple  $a + 0 = 0 + a = 0$ .
- (iv) Para cada  $a \in \mathbb{Z}_m$ , existe un único  $x \in \mathbb{Z}_m$  llamado inverso aditivo de  $a$  y que satisface  $a + x = x + a = 0$ .
- (v) Para todo  $a, b \in \mathbb{Z}_m$ ,  $ab = ba$ .
- (vi) Para todo  $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$ ,  $(ab)c = a(bc)$ .
- (vii) Para cada  $a \in \mathbb{Z}_m$ , existe un elemento denotado por  $1$  llamado neutro multiplicativo tal que  $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ .
- (viii) Para cada  $a \in \mathbb{Z}_m$ , con  $a \neq 0$ , existe un único elemento  $a^{-1} \in \mathbb{Z}_m$  llamado el inverso multiplicativo de  $a$  y es tal que  $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ .
- (ix) Para todo  $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$ ,  $a(b + c) = ab + ac$ .
- (x) En  $\mathbb{Z}_m$ ,  $1 \neq 0$ .

**Nota 7.4.** El inverso aditivo de  $a \in \mathbb{Z}_m$  no es el entero  $-a$  sino que es el residuo de  $-a$  módulo  $m$ . Por ejemplo, el inverso aditivo de 3 en  $\mathbb{Z}_5$  es 2 ya que  $3 + 2 \equiv 0 \pmod{5}$ . Otro punto a tener en cuenta es que si  $m$  no es primo, entonces no necesariamente todos los elementos de  $\mathbb{Z}_m$  poseen un inverso multiplicativo. Por ejemplo, en  $\mathbb{Z}_4$ , 3 tiene por inverso multiplicativo a 3, dado que  $3 \cdot 3 = 1$ , o sea  $3 \cdot 3 = 9 \equiv 1 \pmod{4}$ ; no así 2 porque  $2 \cdot 0 = 0$ ,  $2 \cdot 1 = 2$ ,  $2 \cdot 2 = 0$  y  $2 \cdot 3 = 2$ , i.e., ninguno produce  $1 \in \mathbb{Z}_4$ .

**Nota 7.5.** Si  $a$  y  $m$  no tienen factores primos en común, entonces  $a$  tiene un único inverso multiplicativo módulo  $m$ . En otro caso,  $a$  no tiene un inverso multiplicativo módulo  $m$ . Esto explica por qué construimos nuestro alfabeto con 29 elementos: en  $\mathbb{Z}_{29}$  ningún elemento es múltiplo de 29, lo que asegura que cada uno de ellos tenga un inverso multiplicativo. Por comodidad para el lector, listamos los inversos multiplicativos de cada uno de los elementos de  $\mathbb{Z}_{29}$  en la Tabla 7.2.3.

**Tabla 7.2.3**

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	1	15	10	22	6	5	25	11	13	3	8	17	9	27	2	20	12	21	26	16	18	4	24	23	7	19	14	28

Estas definiciones las damos para establecer de manera formal una transformación lineal de  $\mathbb{Z}_m$  en  $\mathbb{Z}_m$ , con  $m > 1$ , que es justamente lo que los cifrados de Hill hacen: tomar vectores con entradas en  $\mathbb{Z}_m$  y hacer aritmética módulo  $m$  sobre ellas. En consecuencia, operaciones como adición y multiplicación matricial, operaciones elementales de fila, entre otras operaciones de un espacio vectorial, son posibles en  $\mathbb{Z}_m$ . A pesar de esto, sólo cuando  $m$  es primo es posible hallar la matriz inversa de una matriz dada (i.e., la clave de descifrado), pues en tal caso  $\mathbb{Z}_m$  es un campo así como  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{Q}$  son también campos de escalares.

### 7.2.3. El algoritmo de Hill

La transformación lineal  $T : \mathbb{Z}_m^n \rightarrow \mathbb{Z}_m^n$  sobre  $\mathbb{Z}_m$  tiene asociada una matriz  $A \in \mathbb{Z}_m^{n \times n}$  conocida como  $n$ -cifrado de Hill. Para  $A$ , el algoritmo de Hill para encriptar un texto plano (mensaje) es como sigue:

1. Construya un conjunto de  $m$  caracteres (símbolos o letras). Este conjunto es su alfabeto y cada elemento tiene asociado un número de entre  $0, 1, 2, \dots, m - 1$ , correspondiente a su posición.
2. Agrupar los caracteres del texto plano (tomados del alfabeto) en  $k$  grupos de  $n$  caracteres. Si el grupo final está incompleto, repita el último carácter las veces que sea necesario hasta que la longitud del grupo sea  $n$ .
3. Asignar el número correspondiente a la posición a cada letra según indica el alfabeto.
4. Formar un vector de  $\mathbb{Z}_m^n$  por cada grupo de números. Deben existir  $k$  vectores.
5. Multiplicar por la izquierda a cada uno de estos vectores por  $A$  usando aritmética módulo  $m$ .
6. Formar un vector de  $\mathbb{Z}_m^{kn}$  al concatenar las entradas de los vectores resultantes, en orden.
7. Reemplazar las entradas de tal vector por las letras correspondientes en el alfabeto.

El resultado es el texto cifrado de un  $n$ -cifrado de Hill asociado al texto plano original. Para descifrar el mensaje necesitamos la matriz inversa de  $A$ .

**Definición 7.4.** Sea  $m$  un entero mayor que 1. Una matriz cuadrada con componentes en  $\mathbb{Z}_m$  es **invertible módulo  $m$**  si existe una matriz  $B$  con entradas en  $\mathbb{Z}_m$  que satisface

$$AB = BA \equiv I \pmod{m}.$$

Si  $m$  no es primo y ciframos un mensaje con una matriz  $A$  que tiene entradas en  $\mathbb{Z}_m$ , entonces  $A$  no es necesariamente invertible. Esto significa que si el número de elementos en nuestro alfabeto no es primo, entonces las entradas de la matriz de cifrado deben ser escogidas adecuadamente, con el fin de que tenga inversa. En la aritmética ordinaria, una matriz es invertible si y sólo si su determinante es diferente de cero, o sea si tiene un inverso multiplicativo. En la aritmética modular existe un resultado similar.

**Teorema 7.1.** Sea  $A$  una matriz de  $\mathbb{Z}_m^{n \times n}$ . Esta matriz es invertible módulo  $m$  si y sólo si el residuo de  $\det(A)$  módulo  $m$  tiene un inverso multiplicativo módulo  $m$ . Esto es, si y sólo si  $m$  y  $\det(A)$  módulo  $m$  tienen factores primos en común.

### Ejemplos 7.7.

1. Es seguro que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

tiene inversa módulo 29 porque 29 es primo y sus entradas están tomadas en  $\mathbb{Z}_{29}$ .

2. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 37 & 2 \end{bmatrix}$$

no tiene inversa módulo 29 porque, a pesar de que 29 es primo, no todas sus entradas están tomadas en  $\mathbb{Z}_{29}$ .

3. La matriz

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

no tiene inversa módulo 8 porque el residuo de  $\det(A) = 18$  y 8 es 2, el cual es un factor común de 8 y 2.

□

## 7.2.4. Descifrado

**Ejemplo 7.8.** Supongamos que queremos calcular la inversa de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

módulo 29. Para ello, tomamos la matriz aumentada  $[A|I]$  y realizamos sobre ella operaciones elementales de fila, como es usual para hallar la inversa, pero utilizando aritmética módulo 29. Sin embargo, en lugar de dividir para obtener 1 como pivote, multiplicamos por el inverso multiplicativo módulo 29.

$$\begin{aligned}
 [A|I] &= \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{M_1(15)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 30 & 15 & 15 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 15 & 15 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right] \pmod{29} \\
 &\xrightarrow{E_{21}(4)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & -55 & -60 & 1 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 3 & 27 & 1 \end{array} \right] \pmod{29} \\
 &\xrightarrow{M_2(10)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 30 & 270 & 10 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 15 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \end{array} \right] \pmod{29} \\
 &\xrightarrow{E_{12}(15)} \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -120 & -150 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 25 & 24 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \end{array} \right] \pmod{29}
 \end{aligned}$$

Note que multiplicar por  $1/2$  a la primera fila en el primer paso hubiese tenido el efecto de que las dos entradas adyacentes de la matriz sean  $1/2$ , el cual no es entero. En lugar de esto, se multiplicó por 15, pues este es el inverso multiplicativo de 2 (mod 29), como se puede observar en la Tabla 7.2.3. La inversa de  $A$  es, por tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 25 & 24 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

Se comprueba además que

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25 & 24 \\ 9 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 59 & 58 \\ 145 & 146 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I \pmod{29},$$

como era de esperarse. □

**Nota 7.6.** En el ejemplo anterior, tomamos residuos módulo 29 después de realizar cada operación de fila, pero también es posible esperar hasta el final para hacer esto, siempre y cuando no sea necesario multiplicar una fila por un escalar, o cuando este tipo de operación se realice al final de la reducción; sólo tenga en cuenta que podría obtener valores muy grandes en el proceso de reducción por filas (estos siempre deben ser enteros). El siguiente ejemplo ilustra esto.

**Ejemplo 7.9.** Hallemos la clave de cifrado inversa del Ejemplo 7.3. Es decir, la matriz inversa módulo 29 de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para lograr esto, simplemente tomamos la matriz aumentada  $[A|I]$  y la reducimos por filas pero siempre utilizando aritmética módulo 29. La reducción de filas se realizará como de costumbre hasta que necesitemos tener un pivote en cada fila. Normalmente, esto lo logramos al dividir la fila por el valor del número en la posición pivote. Ahora, sin embargo, tenemos que multiplicar a la fila por el inverso multiplicativo módulo 29 de la componente que ocupa tal posición.

$$[A|I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{E_{31}(2)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c} E_{32}(-2) \\ E_{12}(1) \end{array} \rightarrow \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 2 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[M_3(-1)]{E_{23}(-1)E_{13}(-1)} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \end{array} \right]$$

La matriz obtenida en el lado derecho no es la inversa de  $A$  módulo 29, puesto que aún no hemos tomado los residuos módulo 29. La matriz

$$\begin{bmatrix} 28 & 1 & 1 \\ 27 & 3 & 1 \\ 2 & 27 & 28 \end{bmatrix}$$

sí es la inversa de  $A$  módulo 29 y por tanto es nuestra clave de descifrado. Se deja al lector comprobar que

$$\begin{aligned} A^{-1}B &= \begin{bmatrix} 28 & 1 & 1 \\ 27 & 3 & 1 \\ 2 & 27 & 28 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 24 & 13 & 17 & 8 \\ 22 & 20 & 9 & 20 \\ 3 & 25 & 8 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 697 & 409 & 493 & 248 \\ 717 & 436 & 494 & 280 \\ 726 & 1266 & 501 & 668 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 16 \\ 21 & 1 & 1 & 19 \\ 1 & 19 & 8 & 1 \end{bmatrix} \pmod{29}. \end{aligned}$$

Aquí,  $B$  tiene por columnas a los vectores cifrados del mensaje del Ejemplo 7.3. Lo hacemos así para ser más breves. El producto  $A^{-1}B$  tiene por columnas a los vectores asociados al texto plano original. Así,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 16 \\ 21 & 1 & 1 & 19 \\ 1 & 19 & 8 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C & - & O \\ T & A & A & R \\ A & R & H & A \end{bmatrix}$$

□

Concluimos esta sección con un ejemplo de descifrado más.

**Ejemplo 7.10.** Alguien nos ha enviado un mensaje muy importante encriptado poligráficamente mediante el algoritmo de Hill. El mensaje es “I?O?YXTVZ-?L” y sabemos que la clave de cifrado es

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}.$$

Veamos cómo podemos obtener el mensaje original. Dividimos el texto cifrado en grupos de tres caracteres y les asignamos el valor dado en la Tabla 7.2.1. Expresamos esto en forma vectorial, como sigue:

$$\begin{bmatrix} I \\ ? \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 28 \\ 16 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ? \\ Y \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 26 \\ 25 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} T \\ V \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 23 \\ 27 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} - \\ ? \\ L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 28 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Para ser breves, construimos la matriz

$$\begin{bmatrix} 9 & 28 & 21 & 0 \\ 28 & 26 & 23 & 28 \\ 16 & 25 & 27 & 12 \end{bmatrix}.$$

Tenemos que multiplicar a estos vectores por la clave de descifrado, la cual encontramos a continuación:

$$\begin{aligned} [A|I] &= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 7 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ \xrightarrow{M_1(25)} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 175 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \pmod{29} \\ \xrightarrow{\substack{E_{21}(3) \\ E_{31}(2)}}} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & -70 & 1 & -75 & 1 & 0 \\ 0 & -49 & 7 & -50 & 0 & 1 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 17 & 1 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 8 & 0 & 1 \end{array} \right] \pmod{29} \\ \xrightarrow{M_2(12)} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 204 & 12 & 144 & 12 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 8 & 0 & 1 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 28 & 12 & 0 \\ 0 & 9 & 7 & 8 & 0 & 1 \end{array} \right] \pmod{29} \\ \xrightarrow{E_{32}(9)} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 28 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -101 & -244 & -108 & 1 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 28 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 17 & 8 & 1 \end{array} \right] \pmod{29} \\ \xrightarrow{M_3(2)} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 28 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 30 & 34 & 16 & 2 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 28 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 16 & 2 \end{array} \right] \pmod{29} \\ \xrightarrow{E_{23}(12)} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -32 & -180 & -24 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 16 & 2 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 25 & 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 26 & 23 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 16 & 2 \end{array} \right] \pmod{29} \\ \xrightarrow{E_{12}(25)} & \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -625 & -575 & -125 \\ 0 & 1 & 0 & 26 & 23 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 16 & 2 \end{array} \right] \equiv \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 13 & 5 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 26 & 23 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 16 & 2 \end{array} \right] \pmod{29}. \end{aligned}$$

De este modo,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 13 & 5 & 20 \\ 26 & 23 & 5 \\ 5 & 16 & 2 \end{bmatrix}$$

y entonces

$$\begin{aligned} A^{-1}B &= \begin{bmatrix} 13 & 5 & 20 \\ 26 & 23 & 5 \\ 5 & 16 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & 28 & 21 & 0 \\ 28 & 26 & 23 & 28 \\ 16 & 25 & 27 & 12 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 577 & 994 & 928 & 380 \\ 958 & 1451 & 1210 & 704 \\ 525 & 606 & 527 & 472 \end{bmatrix} \\ &\equiv \begin{bmatrix} 26 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 21 & 8 \\ 3 & 26 & 5 & 8 \end{bmatrix} \pmod{29} \end{aligned}$$

Finalmente, el vector

$$(26, 1, 3, 8, 1, 26, 0, 21, 5, 3, 8, 8)$$

corresponde al texto plano original del mensaje. Dejamos como tarea al lector usar la Tabla 7.2.1 para completar el descifrado.  $\square$

### 7.2.5. Cifrado binario

Para finalizar esta sección mostramos con un ejemplo como lo anteriormente expuesto puede generalizarse para encriptar mensajes en código binario. El código binario es un sistema que consiste de dos símbolos: usualmente 0 y 1. Una secuencia de estos dos símbolos puede usarse para representar un texto, instrucciones de computadora o cualquier otro tipo de información. En nuestro caso, si a cada letra del alfabeto construido en la Tabla 7.2.1 se le asigna una secuencia de 0's y 1's en lugar de enteros que van del 0 al 28, entonces podemos traducir cualquier texto plano a binario (Tabla 7.2.4).<sup>2</sup> Esto nos hace posible trabajar en  $\mathbb{Z}_2$  en lugar de  $\mathbb{Z}_{29}$ . El conjunto  $\mathbb{Z}_2$  también es un campo, así que utilizaremos aritmética módulo 2.

**Tabla 7.2.4:** Secuencias binarias asignadas a las 27 letras del alfabeto español y 5 símbolos adicionales.

–	00000	H	01000	O	10000	W	11000
A	00001	I	01001	P	10001	X	11001
B	00010	J	01010	Q	10010	Y	11010
C	00011	K	01011	R	10011	Z	11011
D	00100	L	01100	S	10100	?	11100
E	00101	M	01101	T	10101	!	11101
F	00110	N	01110	U	10110	&	11110
G	00111	Ñ	01111	V	10111	\$	11111

**Ejemplos 7.11.** Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

como matriz de cifrado.

1. Supongamos que se quiere encriptar el mensaje “DOSPM’ haciendo uso de  $A$ . De acuerdo con la Tabla 7.2.4, este texto se representa como

$$0010010000101001000101101.$$

<sup>2</sup>La Tabla 7.2.4 no es la traducción del código ASCII a binario del alfabeto en español. De hecho, las secuencias de 0's y 1's no tienen que ser las que se muestran en esta tabla, basta que cada símbolo tenga asignado una secuencia diferente. La razón de completar todas las permutaciones posibles es excluir la posibilidad de que al cifrar un mensaje se obtenga una secuencia que no está listada en la tabla.

Formando ternas ordenadas obtenemos los vectores

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ y } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por facilidad, denotemos por  $B$  a la matriz cuyas columnas son estos vectores. La matriz producto  $AB$  tiene en sus columnas a los vectores cifrados:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \pmod{2}. \end{aligned}$$

Luego, el mensaje encriptado es

$$1110010100010001000101011,$$

y utilizando de nuevo la Tabla 7.2.4 obtenemos el texto cifrado “?SHPK”.

2. La inversa módulo 2 de la matriz de cifrado se encuentra como sigue:

$$\begin{aligned} [A|I] &= \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow[\substack{E_{31}(1) \\ P_{24}}]{\phantom{}} \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\ &\equiv \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \pmod{2} \\ &\xrightarrow[\substack{E_{32}(1) \\ E_{12}(1)}]{\phantom{}} \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \pmod{2} \\
&\xrightarrow[E_{23}(1)]{E_{14}(1)} \left[ \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
&\equiv \left[ \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \pmod{2} \\
&\xrightarrow[P_{34}E_{25}(1)]{E_{13}(1)} \left[ \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
&\equiv \left[ \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \pmod{2} \\
&\xrightarrow[E_{45}(1)]{E_{15}(1)} \left[ \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \\
&\equiv \left[ \begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \pmod{2}
\end{aligned}$$

Así,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se como tarea al lector verificar que  $A^{-1}AB \equiv B \pmod{2}$ . □



### 7.3. Sistemas dinámicos: la resistencia antibiótica

Una de las aplicaciones del álgebra lineal está dada en el análisis de estabilidad de los sistemas dinámicos. Existen muchos ejemplos de estos en la literatura. En esta sección mostraremos con un ejemplo en resistencia bacteriana a los antibióticos, tomado de Esteva et al. (2011), cómo el álgebra lineal se utiliza a la hora de determinar la estabilidad asintótica local de los puntos de equilibrio de un sistema dinámico en ecuaciones diferenciales ordinarias.

**Ejemplo 7.12.** Se entiende por resistencia bacteriana, la capacidad que tienen las bacterias de soportar los efectos de los antibióticos destinados a eliminarlas o controlarlas. Un antibiótico es cualquier compuesto químico utilizado para eliminar o inhibir el crecimiento de organismos infecciosos tales como las bacterias. Cuando las bacterias son expuestas a un antibiótico, pueden sufrir algún tipo de mutación que se define como cualquier cambio en la secuencia de ADN, hecho que proporciona un mecanismo genético para la producción de nuevas actividades y funciones genéticas en el interior de la bacteria; es por ello que las mutaciones ocasionadas por la exposición de la bacteria a un antibiótico tienen el potencial de proporcionar un mecanismo para la evolución que explique el origen de la resistencia a los antibióticos.

Teniendo en cuenta lo anterior, hacemos referencia al modelo matemático formulado por Esteva et al. (2011). En dicho modelo consideran la interacción entre bacterias sensibles, resistentes y la concentración del antibiótico en el tiempo  $t$  denotados por  $S(t)$ ,  $R(t)$  y  $C(t)$ :

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \beta_s S \left(1 - \frac{S+R}{K}\right) - \alpha_s CS - \mu_s S \\ \frac{dR}{dt} &= \beta_r R \left(1 - \frac{S+R}{K}\right) + q\alpha_s CS - \mu_r R \\ \frac{dC}{dt} &= \Lambda - \mu_c C. \end{aligned} \tag{7.3}$$

El anterior es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) para las variables  $S$ ,  $R$ , y  $C$  y el conjunto de parámetros  $\beta_s$ ,  $K$ ,  $\alpha_s$ ,  $\mu_s$ ,  $\beta_r$ ,  $q$ ,  $\mu_r$ ,  $\Lambda$ , y  $\mu_c$ . Cada uno de estos parámetros son tasas y tienen una interpretación específica en el contexto del problema, como Esteva et al. (2011) argumentan. Con el fin de reducir el número de parámetros, se introduce el siguiente cambio de variables:

$$s = \frac{S}{K}, \quad r = \frac{R}{K}, \quad c = \frac{C}{\Lambda/\mu_c}, \quad \text{y} \quad \alpha_s = \alpha_s \frac{\Lambda}{\mu_c}.$$

Por lo tanto, el modelo (7.3) puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \beta_s s [1 - (s+r)] - \alpha_s cs - \mu_s s \\ \frac{dr}{dt} &= \beta_r r [1 - (s+r)] + q\alpha_s cs - \mu_r r \\ \frac{dc}{dt} &= \mu_c - \mu_c c. \end{aligned} \tag{7.4}$$

En EDOs se llama punto de equilibrio (o solución estacionaria) de una ecuación diferencial a una solución  $y(t) = a$  constante para todo  $t \in \mathbb{R}$ . En otras palabras, las soluciones de equilibrio son aquellas cuyas gráficas son rectas horizontales. El concepto de solución de equilibrio, es muy útil y común en EDOs a la hora de hacer análisis de estabilidad (Zill et al., 2002). Las soluciones de equilibrio del sistema (7.4) se obtienen resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_s s - \beta_s(s+r)s - \alpha_s cs - \mu_s s, \\ 0 &= \beta_r r - \beta_r(s+r)r + q\alpha_s cs - \mu_r r, \\ 0 &= \mu_c(1-c). \end{aligned} \quad (7.5)$$

Definiendo los siguientes umbrales:

$$R_r = \frac{\beta_r}{\mu_r} \quad \text{y} \quad S_0 = \frac{\beta_s}{\alpha_s + \mu_s}, \quad (7.6)$$

y haciendo algunas manipulaciones algebraicas se obtienen las siguientes soluciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} E_0 &= (0, 0, 1), \\ E_1 &= \left(0, \frac{R_r - 1}{R_r}, 1\right), \quad \text{y} \\ E_2 &= \left(\frac{S_0 - 1}{S_0} \frac{\mu_r \left(1 - \frac{R_r}{S_0}\right)}{q\alpha_s + \mu_r \left(1 - \frac{R_r}{S_0}\right)}, \frac{q\alpha_s(S_0 - 1)}{(q\alpha_s + \mu_r)\left(S_0 - \frac{\mu_r}{\mu_r + q\alpha_s} R_r\right)}, 1\right). \end{aligned}$$

Con el fin de que las soluciones de equilibrio tengan sentido en el contexto biológico, se ponen restricciones para que todas las entradas (o componentes) de los vectores  $E_0$ ,  $E_1$  y  $E_2$  sean positivas. La estabilidad asintótica local (Zill et al., 2002) de las anteriores soluciones de equilibrio del sistema (7.4) se obtiene determinando el signo de la parte real de los valores propios de la matriz jacobiana asociada al campo vectorial dado por el lado derecho del sistema (7.4), la cual viene dada por:

$$J(s, r, c) = \begin{bmatrix} \beta_s - \mu_s - \beta_s(2s+r) - \alpha_s c & -\beta_s s & -\alpha_s s \\ -\beta_r r + q\alpha_s c & \beta_r - \mu_r - \beta_r(s+2r) & q\alpha_s s \\ 0 & 0 & -\mu_c \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

Evaluando la matriz jacobiana  $J$  en  $E_0$  se obtiene

$$J(E_0) = \begin{bmatrix} (\alpha_s + \mu_s)(S_0 - 1) & 0 & 0 \\ q\alpha_s & \mu_r(R_r - 1) & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_c \end{bmatrix}.$$

Obsérvese que la matriz anterior es triangular inferior, por lo tanto, el polinomio característico de  $J(E_0)$  está dado por el determinante

$$\begin{aligned} p(\xi) &= \begin{vmatrix} \xi - (\alpha_s + \mu_s)(S_0 - 1) & 0 & 0 \\ -q\alpha_s & \xi - \mu_r(R_r - 1) & 0 \\ 0 & 0 & \xi + \mu_c \end{vmatrix} \\ &= [\xi - (\alpha_s + \mu_s)(S_0 - 1)][\xi - \mu_r(R_r - 1)](\xi + \mu_c). \end{aligned}$$

Así, los valores propios de  $J(E_0)$  están dados por

$$\begin{aligned}\xi_1 &= (\alpha_s + \mu_s)(S_0 - 1), \\ \xi_2 &= \mu_r(R_r - 1), \\ \xi_3 &= -\mu_c.\end{aligned}$$

Dado que  $\xi_1$  y  $\xi_2$  son negativos cuando  $S_0 < 1$  y  $R_r < 1$  respectivamente, entonces  $E_0$  es localmente asintóticamente estable. De forma análoga, para determinar las condiciones para las cuales la solución de equilibrio  $E_1$  es localmente asintóticamente estable, se evalúa la matriz jacobiana (7.7) en la solución de equilibrio  $E_1$ . Por lo tanto,

$$J(E_1) = \begin{bmatrix} (\alpha_s + \mu_s)\left(\frac{S_0}{R_r} - 1\right) & 0 & 0 \\ \mu_r(1 - R_r) + q\alpha_s & \mu_r(1 - R_r) & 0 \\ 0 & 0 & -\mu_c \end{bmatrix}.$$

Siguiendo un procedimiento similar al caso anterior (la matriz resultante es triangular inferior), se tiene que los valores propios de  $J(E_1)$  son

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= (\alpha_s + \mu_s)\left(\frac{S_0}{R_r} - 1\right), \\ \zeta_2 &= \mu_r(1 - R_r), \\ \zeta_3 &= -\mu_c.\end{aligned}$$

Lo anterior implica que  $\zeta_1 < 0$  si y sólo si  $S_0 < R_r$  y  $\zeta_2 < 0$  si y sólo si  $R_r > 1$ . Por lo tanto,  $E_1$  es localmente asintóticamente estable cuando  $S_0 < R_r$  y  $R_r > 1$ .

Para finalizar el análisis de estabilidad local se va a determinar las condiciones de estabilidad asintótica local para la solución de equilibrio  $E_2$ . La matriz jacobiana (7.7) evaluada en  $E_2$  es

$$\begin{bmatrix} (\alpha_s + \mu_s)\left[S_0(1 - (2s + r)) - 1\right] & -\beta_s s & -\alpha_s s \\ -\beta_r r + q\alpha_s & \beta_r[1 - (s + 2r)] - \mu_r & q\alpha_s s \\ 0 & 0 & -\mu_c \end{bmatrix}. \quad (7.8)$$

De las ecuaciones de equilibrio dadas en (7.5) se tiene que

$$\begin{aligned}\beta_s - \mu_s - \beta_s(2s + r) - \alpha_s &= (\alpha_s + \mu_s)\left[S_0(1 - (2s + r)) - 1\right] \\ &= -\beta_s s, \\ \beta_r - \mu_r - \beta_r(s + 2r) &= \beta_r[1 - (s + 2r)] - \mu_r \\ &= -\frac{1}{r}(q\alpha_s s + \beta_r r^2).\end{aligned}$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la matriz jacobiana (7.8) tenemos que

$$J(E_2) = \begin{bmatrix} -\beta_s s & -\beta_s s & -\alpha_s s \\ -\beta_r \bar{r} + q\alpha_s & -\frac{1}{\bar{r}}(q\alpha_s s + \beta_r r^2) & q\alpha_s s \\ 0 & 0 & -\mu_c \end{bmatrix}. \quad (7.9)$$

Se puede verificar que los valores propios de  $J(E_2)$  definida en (7.9) están dados por  $-\mu_c$  y las raíces de la ecuación cuadrática

$$(\chi + \beta_s s)\left(\chi + \frac{1}{s}[q\alpha_s s + \beta_r r^2]\right) + \beta_s s(-\beta_r r + q\alpha_s) = 0.$$

Después de algunas simplificaciones, la ecuación cuadrática anterior se reescribe como

$$\chi^2 + a_1\chi + a_2 = 0, \quad (7.10)$$

donde

$$a_1 = \beta_s s + \beta_r r + q\alpha_s \frac{s}{r},$$

$$a_2 = \beta_s q\alpha_s s \left(1 + \frac{s}{r}\right).$$

El criterio de Routh Hurwitz<sup>3</sup> para un polinomio de grado dos afirma que las raíces de la ecuación cuadrática (7.10) tienen parte real negativa si y sólo si sus coeficientes son mayores que cero. Dado que  $a_1$  y  $a_2$  son positivos, se concluye que los valores propios de  $J(E_2)$  son negativos, por lo tanto  $E_2$  es localmente asintóticamente estable siempre que exista (esto es cuando  $S_0 > 1$  y  $S_0 > R_r$  pues así las componentes de  $E_2$  son positivas).  $\square$

Aunque el modelo matemático formulado por Esteva et al. (2011), dado en (7.3), es simple, dada la complejidad del fenómeno de adquisición de resistencia a los antibióticos, puesto que existen muchos otros mecanismos de adquirir resistencia, lo interesante es que este se analiza en términos de umbrales  $S_0$  y  $R_r$  respectivamente, y basados en él, mostramos una de las muchas aplicaciones del álgebra lineal. Como podemos ver, el análisis cualitativo del modelo muestra la existencia de una solución de equilibrio  $E_0$  donde las poblaciones de bacterias sensibles y resistentes no están presentes, localmente asintóticamente estable si  $S_0 < 1$  y  $R_r < 1$ . Cuando  $R_r > 1$  existe un equilibrio  $E_1$ , donde las bacterias sensibles no están presentes; además, si  $S_0 < R_r$ , esta solución de equilibrio es localmente asintóticamente estable, indicando la adquisición total de resistencia por parte de las bacterias sensibles o eliminación total debido al suministro de antibiótico de las bacterias sensibles. Finalmente, si  $S_0 > R_r$  y  $S_0 > 1$  existe un equilibrio donde coexisten bacterias sensibles, resistentes y la concentración de antibiótico  $E_2$ , localmente asintóticamente estable, indicando que una vez suministrado el antibiótico, no todas las bacterias sensibles adquirieron resistencia, y tampoco murieron a causa de su efecto letal.

---

<sup>3</sup>Ver DeJesus y Kaufman (1987) para más detalles.

# Referencias

- Anton, H., Rorres, C., & Kaul, A. (2019). *Elementary linear algebra: Applications version* (12.<sup>a</sup> ed.). Wiley.
- Aranda, E. (2016). *Álgebra lineal con aplicaciones y python*. Ernesto Aranda Ortega bajo licencia Creative Commons.
- DeJesus, E. X., & Kaufman, C. (1987). Routh-Hurwitz criterion in the examination of eigenvalues of a system of nonlinear ordinary differential equations. *Physical Review A*, *35*(12), 5288-5290. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevA.35.5288>
- Esteva, L., Ibargüen, E., & Romero-Leiton, J. (2011). Un modelo matemático sobre bacterias sensibles y resistentes a antibióticos. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, *19*(2), 55-73. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=46822255005>
- Grossman, S. I., & Flores, J. J. (2012). *Álgebra lineal* (7.<sup>a</sup> ed.). McGrawHill Educación.
- Hill, L. S. (1929). Cryptography in an algebraic alphabet. *The American Mathematical Monthly*, *36*(6), 306-312. <https://doi.org/10.1080/00029890.1929.11986963>
- Larson, R. (2017). *Elementary linear algebra* (8.<sup>a</sup> ed.). Cengage Learning.
- Lay, D., Lay, S., & McDonald, J. (2016). *Linear algebra and its applications* (5.<sup>a</sup> ed.). Pearson Education.
- Murray, E. (1999). Hill ciphers and modular linear algebra. <https://www.math.hkust.edu.hk/~yangwang/Course/2016FSMath4999/Week%201/hillcipher-eisenberg.pdf>
- Reece, J. B., Urry, L. A., Cain, M. L., Wasserman, S. A., Minorsky, P. V., & Jackson, R. B. (2011). *Campbell biology* (9.<sup>a</sup> ed.). Benjamin Cummings.
- Restrepo, P., Franco, R., & Muñoz, L. (1993). *Álgebra lineal con aplicaciones* (3.<sup>a</sup> ed.). Universidad Nacional de Colombia.
- Zill, D., Hernández, A., & López, E. (2002). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado*. Thomson Learning México.

# Los autores



## Kevin Christian Chávez

Es estudiante de la carrera de Matemáticas en la Universidad de Investigación de Tecnología Experimental Yachay, Ecuador. Actualmente, es un estudiante destacado y de alto rendimiento. Sus intereses de estudio están orientados hacia las matemáticas puras.



## Jhoana P. Romero-Leiton

Egresó del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño en el año 2007. Seguidamente, culminó sus estudios de Maestría en Biomatemáticas en la Universidad del Quindío, en el año 2011. Fue docente tiempo completo en la Universidad de Antioquia, durante los años 2012 a 2018.

Cursó sus estudios de Doctorado en Matemáticas en la misma institución obteniendo su título de Doctora en Matemáticas en el año 2017. Fue docente/investigadora de tiempo completo en la Universidad de Investigación de Tecnología experimental Yachay Tech (Ecuador) durante los años 2018 a 2020. Durante los años 2020 a 2022 tomó estudios en Estadística Aplicada y obtuvo un Certificado en Big Data Analytics en Georgian College (Canadá). Realizó una estancia postdoctoral en Colombia financiada por la Fundación Ceiba en el proyecto “*Mathematical modeling on biology, health and biodiversity: stability, dynamics and optimal control*”, y actualmente, es investigadora postdoctoral en la Universidad de Manitoba (Canadá) en el proyecto “*One Health Modelling Network for Emerging Infections/ Réseau une seule santé sur la modélisation des infections (OMNI-RÉUNIS)*”. Sus intereses de investigación son las matemáticas aplicadas en la biología y salud, así como también la analítica de datos



**Editorial**  
Universidad de **Nariño**

Fecha de publicación: Abril de 2022  
San Juan de Pasto - Nariño - Colombia

El presente texto tiene como objetivo ilustrar de forma clara y concisa, cómo abordar la solución de ciertos problemas que son muy útiles y comunes en Álgebra Lineal y sus aplicaciones. Éstas notas fueron motivadas, en primera medida, debido a la pandemia de COVID-19, pues al convertirse la educación 100% virtual y a la imposibilidad de interactuar directamente con los estudiantes, hubo que reinventar la forma de enseñanza y orientación en la solución de problemas del curso de Álgebra Lineal.

En la elaboración de este texto se utilizaron varios textos clásicos en el área, como lo son los de Stanley Grossman y Howard Anton, pero en particular el texto de Patricia Restrepo, de la Universidad Nacional de Colombia.

En este texto, hacemos un recorrido por los temas más importantes del Álgebra Lineal, como son: vectores de  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^3$ , matrices y operaciones, sistemas lineales, determinantes, espacios vectoriales, transformaciones lineales, valores y vectores propios de una matriz y algunas aplicaciones.

Finalmente, este texto puede ser utilizadas como complemento o fuente de consulta para estudiantes universitarios de los cursos de álgebra lineal de los programas de Ingeniería de la Universidad de Nariño.



**Editorial**  
**Universidad de Nariño**