Universidad de Nariño

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Teoría de Maxwell-Chern-Simons Libre y en Interacción con Campo Fermiónico

TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:

Físico

KEVIN ALEXIS LUNA MUÑOZ

San Juan de Pasto, Colombia

Noviembre 2015

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Teoría de Maxwell-Chern-Simons Libre y en Interacción con Campo Fermiónico

KEVIN ALEXIS LUNA MUÑOZ

TRABAJO DE GRADO

Director:

Ph.D. Germán Enriquez Ramos Zambrano

San Juan de Pasto, Colombia
Noviembre 2015

Nota de Aceptación

Director

Jurado

Jurado

San Juan de Pasto, Noviembre 2015

Agradecimientos

Dedicado a Carlos Luna, Steban Luna y Elva Muñoz.

"No hemos encontrado nada equivocado en la teoría de la electrodinámica cuántica. Por lo tanto, yo diría que es la joya de la física, la posesión de la que estamos más orgullosos."

Richard Phillips Feynman

Teoría de Maxwell-Chern-Simons Libre y en Interacción con Campo Fermiónico

Resumen

En este trabajo se estudia, mediante el método de Dirac, la estructura canónica de las teorías de Chern-Simons pura (C-S) y Maxwell-Chern-Simons libre (MCS)*, además del campo fermiónico libre en* $(2+1)$ *dimensiones y la electrodinámica cuántica bidimensional con el término de Chern-Simons* (QED_{2+1}).

Free Maxwell-Chern-Simons Theory and Interaction with Fermionic Field

Abstract

In this paper we study, through Dirac's method, the canonical structure of pure Chern-Simons (C-S) and free Maxwell-Chern-Simons (MCS) *theories, as well as, the free fermionic field in* $(2+1)$ *dimensions and the bidimensional quantum electrodynamics with Chern-Simons term* (QED_{2+1}).

Índice general

Glosario

Campo: Describe el comportamiento de magnitudes que se definen en todo punto de una región del espacio y del tiempo. Representa la distribución espacial de una magnitud física que muestra cierta variación en una región del espacio.

Funcional: Integral definida sobre un contorno cerrado, de manera que el dominio de la funcional es un espacio de funciones, y su rango es el conjunto de números reales.

Lagrangiano: Para un sistema físico conservativo con un número finito de grados de libertad, es una función que describe la dinámica del sistema físico. Se define como la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial expresadas en términos de las coordenadas generalizadas.

Acción: Funcional definida en un intervalo de tiempo y construida a partir del Lagrangiano. La acción determina la dinámica de un sistema físico.

Espacio de Minkowski o espacio-tiempo: Espacio de cuatro dimensiones usado para describir los fenómenos físicos en el marco de la teoría especial de la relatividad de Einstein. Un punto o un evento del espacio-tiempo, esta determinado por un conjunto de cuatro coordenadas: tres espaciales y una temporal.

Transformaciones de Lorentz: Las coordenadas de un mismo evento medidas en diferentes sistemas de referencia inerciales se relacionan por medio de las transformaciones de Lorentz.
Las transformaciones de Lorentz son interpretadas como una rotación continua en el espacio-tiempo.

Densidad Lagrangiana: escalar de Lorentz que describe la dinámica y las propiedades de un sistema físico representado por campos.

Ecuaciones de Campo: Conjunto de ecuaciones diferenciales que determinan la evolución temporal de un sistema físico representado por campos en el espacio de configuraciones.

Hamiltoniano canónico: Para sistemas conservativos es equivalente a la energía. El Hamiltoniano canónico determina la dinámica del sistema físico en el espacio de fase.

Transformaciones gauge locales: grupo de simetría infinito que depende de un conjunto de r parámetros definidos en el espacio-tiempo. Son transformaciones de algún grado de libertad interno, que no modifican ninguna propiedad de las observables físicas.

Hamiltoniano primario: Combinación lineal del Hamiltoniano canónico y los vínculos primarios, determina la dinámica en el espacio de fase completo.

Hamiltoniano extendido: Combinación lineal del Hamiltoniano canónico, los vínculos primarios de primera y segunda clase, y los vínculos secundarios de primera clase.

Condiciones gauge: Vínculos arbitrarios que se introducen con el objetivo de eliminar los vínculos de primera clase.

Vínculo: Expresión que relaciona las variables del espacio de configuraciones o del espacio de fase.

Bosón: Partícula elemental de la naturaleza que se caracterizan por tener spin entero.

Fermión: Partícula elemental que se caracteriza por tener espín semi-entero y cumplir el principio de exclusión de Pauli.

QED: Acrónimo en ingles de electrodinámica cuántica. Describe los fenómenos que implican las partículas eléctricamente cargadas que obran recíprocamente por medio de la fuerza electromagnética.

Grados de libertad: Es el número mínimo de coordenadas generalizadas necesarias definir el estado de un sistema físico.

Superespacio: Es un espacio físico costruido con variables del álgebra conmutativa y del álgebra de Grassmann.

Paréntesis de Poisson: denotados como PP, es un operador que define la evolución temporal de un sistema dinámico en la formulación Hamiltoniana.

Paréntesis de Berezín o Bose-Fermi: denotados como PB, se definen como el PP entre las variables canónicas de un superespacio de fase.

Paréntesis de Dirac: denotados como PD, definen nuevos PP consistentes con los vínculos de un sistema, permiten eliminar los vínculos de segunda clase.

Capítulo 1

Introducción

El constante avance en estudios de superconductividad, materia condensada, efecto Hall cuántico [1] y en general en sistemas cuya dinámica se desarrolla esencialmente en un espacio bidimensional, ha permitido que teorías relativistas que se restringen a una dimensión temporal y apenas a dos dimensiones espaciales, adquieran una importancia comparable con las teorías que estudian sistemas en un espacio-tiempo ordinario.

Las teorías gauge que analizan el comportamiento de partículas fundamentales en el plano, presentan diferencias interesantes con las teorías que las estudian en el espacio-tiempo de tres dimensiones espaciales y una dimensión temporal. Tal es el caso de un nuevo tipo de teoría gauge, completamente diferente de la teoría electromagnética de Maxwell, inmersa en $(2+1)$ dimensiones. Esta teoría se conoce como teoría de Chern-Simons (C-S) [2] y se caracteriza por ser invariante bajo transformaciones de Lorentz y presentar una simetría de gauge local.

Generalmente, la Lagrangiana de C-S es considerada como un elemento adicional de determinadas teorías gauge restringidas a $(2+1)$ dimensiones. En particular, el acople del término de C-S a la teoría electromagnética de Maxwell da origen a una nueva teoría gauge, denominada teoría de Maxwell-Chern-Simons (MCS) [3, 4]; entre las características más relevantes de tal acoplamiento, puede destacarse el surgimiento de un término topológico de masa asociado a los fotones descritos por el potencial fundamental A_α. De igual manera, pueden mencionarse los estudios resultantes de la inclusión de la teoría de C-S a campos de materia (campo escalar o campo fermiónico), tal como ocurre con la electrodinamica cúantica bidimensional con el término de C-S, QED_{2+1}, que describe el fenómeno de interacción entre electrones, positrones y fotones masivos en el plano [5].

Las teorías de C-S, MCS y QED_{2+1}, son descritas por densidades Lagrangianas singulares, es decir, son sistemas dinámicos con vínculos [6]. Por consiguiente, bajo el formalismo Lagrangiano se espera que no todas las aceleraciones puedan ser determinadas, mientras que en el estudio de las teorías bajo el formalismo Hamiltoniano no será posible escribir todos los momentos canónicos en términos de las variables del espacio de fase, dicho de otro modo, en ambas formulaciones las variables que describen los sistemas físicos no serán independientes entre sí. Por tal razón, este tipo de teorías requieren de un tratamiento especial, que en este trabajo en particular, se llevará a cabo mediante el método de Dirac para sistemas singulares. A través de este método se buscará obtener los paréntesis generalizados entre los grados de libertad para cada teoría, conocidos como Paréntesis de Dirac [6, 7, 8].

Para llevar a cabo el estudio de las teorías mencionadas previamente, resulta indispensable reconocer algunas generalidades de la teoría de Maxwell en $(2+1)$ dimensiones. Usualmente la teoría electromagnética de Maxwell es definida en términos del campo fundamental $A^{\mu} \equiv (A_0, \boldsymbol{A})$, siendo A_0 el potencial escalar y $\boldsymbol{A}$ el potencial vectorial. La densidad Lagrangiana asociada a la teoría de Maxwell es:

$$\mathscr{L}_M = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{1.1}$$

la cual está expresada en términos del tensor de campo electromagnético:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{1.2}$$

que es un tensor antisimétrico que satisface la siguiente condición:

$$F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \tag{1.3}$$

Tanto el tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ como la densidad Lagrangiana de Maxwell son invariantes bajo la transformación gauge local:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \Lambda, \tag{1.4}$$

donde $\Lambda = \Lambda(x)$ es una función arbitraria del espacio y del tiempo. Del mismo modo, son tambíen invariantes bajo esta transformación las ecuaciones de campo derivadas de la densidad Lagrangiana (1.1) y que están dadas por:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \tag{1.5}$$

La teoría electromagnética de Maxwell puede facilmente ser definida en cualquier dimensión espacio-temporal [2], basta con extender el rango del indice espacio-temporal μ del campo fundamental A_μ a un espacio-tiempo de d-dimensiones, de manera que dicho índice tomará los valores $\mu = 0, 1, 2, \ldots (d-1)$. Bajo esta extensión, el tensor de campo electromagnético presentará aún la estructura del tensor antisimétrico definido en (1.2). Del mismo modo, es importante resaltar que la densidad Lagrangiana de la teoría y las ecuaciones de campo, tampoco se verán alteradas en este procedimiento. La única diferencia significativa radica en que el número de campos independientes contenidos en el tensor de campo $F_{\mu\nu}$, diferirá para la dimensión particular en consideración.

No obstante, resulta relevante mencionar que cuando se restringe la teoría de Maxwell a $(2+1)$ dimensiones, el campo magnético es un escalar definido por:

$$B \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}F_{ij} = \varepsilon_{ij}\partial_i A_j, \tag{1.6}$$

mientras que en la teoría de campo electromagnético en el espacio-tiempo ordinario, esta cantidad toma la forma de un vector, dado por $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. Esto se debe particularmente a que en $(2+1)$ dimensiones el potencial vectorial $\boldsymbol{A}$ es un vector en dos dimensiones y por tanto, el rotacional en dos dimensiones del mismo producirá un escalar [2]. De la misma forma, bajo esta restricción, el campo eléctrico será un vector en dos dimensiones y presentará la siguiente estructura:

$$E_i \equiv F_{i0}, \tag{1.7}$$

En virtud de la forma de los campos eléctrico y magnético en $(2+1)$ dimensiones, el tensor de campo electromagnético $F_{\mu\nu}$ será una matriz antisimétrica 3×3 que tendrá tres componentes no nulas: dos para el campo eléctrico y una para el campo magnético. Dicha matriz presenta la forma mostrada a continuación:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 \\ E_1 & 0 & B \\ E_2 & -B & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.8}$$

La organización de este trabajo de grado es la siguiente:

En el capítulo 2, se estudia la teoría de C-S pura. Este capitulo se estructura en las siguientes secciones: en la primera se estudia su invariancia gauge local, posteriormente, se realiza un estudio del formalismo Lagrangiano y finalmente, un análisis canónico de la teoría bajo el método de Dirac.

En el capítulo 3 se análiza la teoría de MCS, esta se estudia inicialmente en el formalismo Lagrangiano, se analiza su invariancia gauge local, el origen de un término topológico de masa asociado a los fotones descritos por el campo fundamental A_α y finalmente, se estudia la estructura canónica de la teoría en el gauge de Coulomb [8, 9].

En el capítulo 4 se estudia la teoría de campo fermiónico en $(2+1)$ dimensiones en la formulación Lagrangiana y Hamiltoniana. En esta última, se hace necesario emplear el método de Dirac, puesto que la teoría es descrita por un Lagrangiano singular.

En el capítulo 5, con el propósito de analizar la teoría de interacción que surge del acople entre la teoría de MCS y de campo fermíonico, se estudia a nivel Lagrangiano la teoría de QED_{2+1}, se demuestra su invariancia gauge local y se lleva a cabo un análisis canónico de la misma en el gauge de Coulomb, empleando para ello el método de Dirac para sistemas singulares.

Finalmente, en el capítulo 6 se presentan las conclusiones y recomendaciones del trabajo.

Capítulo 2

Teoría de Chern-Simons Pura

La densidad Lagrangiana que describe la teoría de C-S es [3]:

$$\mathscr{L} \equiv \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left(\partial_\alpha A_\beta\right) A_\gamma, \tag{2.1}$$

donde k es una constante de acomplamiento adimensional y A_α es el campo vectorial fundamental, tal que $\alpha = 0, 1, 2$ denota sus componentes espacio-temporales. Además, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ denota el tensor antísimetrico de Levi-Civita, cuyas propiedades en $(2+1)$ dimensiones [10], se estudian en el **Apéndice A**.

Inicialmente se puede resaltar que esta densidad Lagrangiana contiene explícitamente en su estructura al campo A_α en lugar del tensor de campo electromagnético $F_{\alpha\beta}$. No obstante, cumple con el criterio de invariancia gauge local [2]. Por otra parte, la densidad Lagrangiana de C-S es de primer orden en las derivadas espacio temporales. Así pues, la estructura canónica de esta teoría difiere significativamente de la teoría electromagnética de Maxwell [2].

En adición, a las anteriores características, se puede mencionar que debido a la presencia del tensor antisimétrico de Levi-Civita, la densidad Lagrangiana (2.1) no puede ser escrita como un término en el espacio-tiempo usual de $(3+1)$ dimensiones. Generalmente, es posible escribir el término de C-S en cualquier dimensión impar del espacio-tiempo, pero solamente en $(2+1)$ dimensiones la densidad Lagrangiana es cuadrática en el campo gauge A_α [2].

Finalmente, es importante tener en cuenta que la teoría de C-S pura es descrita por una densidad Lagrangiana singular, lo que implica para este caso en particular, el surgimiento tanto de vínculos de primera clase como vínculos de segunda clase [6, 7, 8]. Por tal motivo, el análisis clásico y el tratamiento de los vínculos de esta teoría se efectuará en el gauge de radiación, en virtud a los lineamientos del método de Dirac.

2.1. Invariancia Gauge Local

Obsérvese que a partir del carácter antisimétrico del tensor de Levi-Civita y la estructura del tensor de campo electromagnético, es posible reescribir la densidad Lagrangiana (2.1) del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathscr{L} &= \frac{k}{8\pi}\left[\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_\alpha A_\beta\right)A_\gamma + \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_\alpha A_\beta\right)A_\gamma\right] \\ &= \frac{k}{8\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}A_\gamma. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Bajo una transformación gauge de la forma (1.4), la densidad Lagrangiana de C-S será:

$$\mathscr{L}' = \frac{k}{8\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F'_{\alpha\beta}A'_\gamma. \tag{2.3}$$

Debido a que el tensor de campo electromagnético $F_{\alpha\beta}$ es invariante bajo este tipo de transformaciones, es evidente que:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}' &= \frac{k}{8\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}\left(A_\gamma + \frac{1}{e}\partial_\gamma\Lambda\right) \\ &= \frac{k}{8\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}A_\gamma + \frac{k}{8e\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}\partial_\gamma\Lambda \\ &= \mathscr{L} + \partial_\gamma\left(\frac{k}{8e\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}\Lambda\right) - \frac{k}{8e\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_\alpha F_{\beta\gamma}\right)\Lambda. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Cabe anotar que para la consecución del resultado previo se hizo uso de la antisimetría del tensor de Levi-Civita y del tensor de campo electromagnético. Sin embargo, de la identidad mostrada a continuación (véase **Apéndice B**):

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0, \tag{2.5}$$

la densidad Lagrangiana (2.4) se reduce a:

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} + \partial_\gamma\left(\frac{k}{8e\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}\Lambda\right), \tag{2.6}$$

Es posible eliminar el segundo sumando de la expresión anterior, para demostrarlo se partirá de la integral de acción asociada a la Lagrangiana (2.6) definida como:

$$\mathscr{A}\left[A_\beta\right] \equiv \int d^3x \mathscr{L}\left[A_\beta, \partial_\alpha A_\beta\right] + \int d^3x \partial_\gamma \left(\frac{k}{8e\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}\Lambda\right). \tag{2.7}$$

Resulta impotante destacar que el segundo sumando de la expresión previa se anula a causa de las condiciones de frontera impuestas sobre el campo gauge A_α [2] y que están dadas por [11]:

$$\delta A_\alpha(\boldsymbol{x}, t_1) = \delta A_\alpha(\boldsymbol{x}, t_2) = 0, \tag{2.8}$$

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty} A_\alpha(\boldsymbol{x}, t) = 0 \tag{2.9}$$

Para mostrarlo, nótese que al expandir el índice α en el segundo término de (2.7), es posible escribir:

$$\begin{aligned}\int d^3x \partial_\gamma \left(\frac{k}{8e\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}F_{\alpha\beta}\Lambda\right) &= \int d^2x \int_{t_1}^{t_2} \partial_0 \left(\frac{k}{8e\pi}\varepsilon^{0\beta\gamma}F_{0\beta}\Lambda\right) + \\ &\quad \int dt \int d^2x \partial_i \left(\frac{k}{8e\pi}\varepsilon^{i\beta\gamma}F_{i\beta}\Lambda\right) \\ &= \int d^2x \left[\frac{k}{8e\pi}\varepsilon^{0\beta\gamma}F_{0\beta}\Lambda\right]_{t_1}^{t_2} + \\ &\quad \int dt \oint dr_i \left(\frac{k}{8e\pi}\varepsilon^{i\beta\gamma}F_{i\beta}\Lambda\right). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Para el cálculo anterior se hizo uso del teorema de Gauss restringido a dos dimensiones. Es evidente que de acuerdo a la condición de extremos fijos (2.8), la integral del primer sumando de (2.10) es nula. Similarmente, se puede observar que el segundo sumando de (2.10) es una integral cerrada calculada sobre el contorno de una superficie que se exitende hacia el infitnito, regíon en la cual, de acuerdo a la condición de frontera (2.9), el campo A_α tiende a cero. Por tales motivos, se comprueba que la expresión (2.7) se reduce a:

$$\mathscr{A}\left[A_\beta\right] \equiv \int d^3x \mathscr{L}\left[A_\beta, \partial_\alpha A_\beta\right], \tag{2.11}$$

que es la integral de acción asociada a la densidad Lagrangiana de C-S (2.1). Este resultado implica que el Lagrangiano que describe al sistema no es único [12] y que es posible eliminar el término presente en el segundo sumando de (2.6), pues bajo este procediminento se obtendrán las mismas ecuaciones de campo. Por lo anterior, se concluye que:

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L}. \tag{2.12}$$

La relación (2.12) implica que la densidad Lagrangiana de la teoría de C-S pura es invariante bajo transformaciones gauge locales.

2.2. Formalismo Lagrangiano

Nótese que la densidad Lagrangiana citada en (2.1) es función del campo fundamental A_α y de sus derivadas espacio-temporales en $(2+1)$ dimensiones. Luego, la integral de acción asociada a la densidad Lagrangiana de la teoría de C-S pura es definida por [11, 13]:

$$\mathscr{A}\left[A_\beta\right] = \int d^3x \mathscr{L}\left[A_\beta, \partial_\alpha A_\beta\right]. \tag{2.13}$$

Para deducir las ecuaciones de campo de la teoría, se considerará la variación de la acción presente en la ecuación inmediatamente anterior, considerando variaciones arbitrarias e independientes del potencial A_α [11, 13]. Así pues, la variación de (2.13) es:

$$\delta\mathscr{A}\left[A_\beta\right] = \delta \int d^3x \mathscr{L}\left[A_\beta, \partial_\alpha A_\beta\right]. \tag{2.14}$$

Como se han tenido en cuenta variaciones arbitrarias e independientes del campo A_α más no de las coordenadas, es posible escribir la anterior relación como sigue:

$$\delta\mathscr{A}\left[A_\beta\right] = \int d^3x \delta\mathscr{L}\left[A_\beta, \partial_\alpha A_\beta\right]. \tag{2.15}$$

Se sabe que la densidad Lagrangiana es función del campo gauge A_β y de sus derivadas espacio-temporales $\partial_\alpha A_\beta$. Por consiguiente, la variación de dicha densidad Lagrangiana debida a variaciones arbitrarias e independientes del potencial gauge se escribe como:

$$\delta\mathscr{L}\left[A_\beta, \partial_\alpha A_\beta\right] = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\beta}\delta A_\beta + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\delta\left(\partial_\alpha A_\beta\right). \tag{2.16}$$

Introduciendo este resultado en (2.15), se observa que la variación de la integral de acción de la teoría en cuestión es ahora:

$$\delta\mathscr{A}\left[A_\beta\right] = \int d^3x \left[\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\beta}\delta A_\beta + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\delta\left(\partial_\alpha A_\beta\right)\right]. \tag{2.17}$$

Pese a que solamente se han considerado variaciones del campo A_α y no de las coordenadas, se puede establecer que:

$$\delta\left(\partial_\alpha A_\beta\right)=\partial_\alpha\left(\delta A_\beta\right). \tag{2.18}$$

Bajo esta resultado, se expresará el segundo sumando de la ecuación (2.17) del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\delta\left(\partial_\alpha A_\beta\right) &= \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\partial_\alpha\left(\delta A_\beta\right)\\ &= \partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\delta A_\beta\right]-\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\right)\delta A_\beta.\end{aligned} \tag{2.19}$$

Tras reemplazar (2.19) en la variación de la integral de acción (2.17), se puede verificar que:

$$\delta\mathscr{A}\left[A_\beta\right]=\int d^3x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\beta}-\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\right)\right]\delta A_\beta+\int d^3x\partial_\alpha\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\delta A_\beta\right]. \tag{2.20}$$

Es importante destacar que el segundo sumando de la expresión previa se anula como consecuencia de las condiciones de frontera impuestas sobre el campo gauge A_α, de este modo la variación de la integral de acción de la teoría de C-S pura se reduce a:

$$\delta\mathscr{A}\left[A_\beta\right]=\int d^3x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\beta}-\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\right)\right]\delta A_\beta.$$

El prinicipio de Hamilton establece que la trayectoria real seguida por el sistema es aquella que extremiza la integral de acción de la teoría [11], matemáticamente esto puede sinterizarse como sigue:

$$\delta\mathscr{A}\left[A_\beta\right]=\int d^3x\left[\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\beta}-\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\right)\right]\delta A_\beta=0. \tag{2.21}$$

Nuevamente, haciendo hincapíe en que la variación de la integral de acción es debida solamente a variaciones arbitrarias e independientes de las componentes de A_α, bajo el lema fundamental del cálculo de variaciónes [12, 13], la igualdad en (2.21) se cumple sí:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial A_\beta}-\partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\right)=0. \tag{2.22}$$

Estas relaciones son las ecuaciones clásicas de Euler-Lagrange de la teoría de C-S pura. La forma expícita de las ecuaciones de campo, implica calcular las siguientes derivadas de la densidad Lagrangiana (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A_\beta} &= \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\mu A_\nu\right)\frac{\partial A_\rho}{\partial A_\beta} \\ &= \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\left(\partial_\mu A_\nu\right)\delta_\rho^\beta \\ &= -\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}\partial_\gamma A_\alpha. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Para este razonamiento se ha empleado el caráter antisimétrico del tensor de Levi-Civita. De forma análoga, se puede deducir que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)} &= \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\frac{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}A_\rho \\ &= \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}A_\rho\delta_\mu^\alpha\delta_\nu^\beta \\ &= -\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}A_\gamma. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Cabe anotar que nuevamente se ha considerado la antisimetría del tensor $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ en los indices α,β,γ. Sustituyendo las relaciones (2.23) y (2.24) en las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.22), se encuentra que las ecuaciones de campo clásicas de la teoría C-S pura son:

$$\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}\left(\partial_\alpha A_\gamma-\partial_\gamma A_\alpha\right)=\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}F_{\alpha\gamma}=0. \tag{2.25}$$

Nótese que la invariancia gauge de la densidad Lagrangiana de la teoría de C-S pura se ve reflejada claramente en las ecuaciones de movimiento, debido a la presencia del tensor de campo electromagnético $F_{\alpha\gamma}$.

2.3. Formalismo Hamiltoniano

Ahora, se procederá a realizar un estudio canónico de la teoría [11]. Para tal objetivo, primero se definirá el momento canónico asociado al campo A_α de la siguiente manera:

$$\pi^\beta=\pi^\beta\left(\boldsymbol{x},t\right)\equiv\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_0 A_\beta\right)}=\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0\beta\gamma}A_\gamma. \tag{2.26}$$

Al estudiar la componente temporal del momento canónico, se observa que:

$$\pi_0 = \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{00\gamma}A_\gamma = 0. \tag{2.27}$$

Del mismo modo, para $\beta = i$ se puede verificar:

$$\pi^i = \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0i\gamma}A_\gamma.$$

Nótese que como consecuencia del carácter antisimétrico del tensor $\varepsilon^{0i\gamma}$, el único valor no nulo ocurre cuando $\gamma = j$, por tal razón:

$$\pi^i(\boldsymbol{x},t) = \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{ij}A_j(\boldsymbol{x},t). \tag{2.28}$$

Donde se ha utilizado la notación $\varepsilon^{0i\gamma} = \varepsilon^{i\gamma}$ (véase **Apéndice A**)

Debido a que ni en la expresión (2.27) ni en la expresión (2.28) se presentan velocidades, es decir, derivadas en relación al tiempo de los campos, se verifica que ambas relaciones son vínculos primarios, pues dichas estructuras son consecuencia de la definición de los momentos canónicos de la teoría [6, 7, 8]. Se denotarán los vínculos primarios de la teoría de C-S pura como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0(\boldsymbol{x},t) \approx 0, && (2.29)\\ \chi_i &= \chi_i(\boldsymbol{x},t) \equiv \pi_i + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j \approx 0, && (2.30)\end{aligned}$$

donde el símbolo $\approx$, denota igualdad debil [6, 7, 8]. Aún cuando los momentos canónicos del sistema no pueden ser expresados en términos de coordenadas y velocidades, es posible construir bajo una transformación de Legendre [7], la densidad Hamiltoniana canónica de la teoría del siguiente modo:

$$\mathscr{H}_c = \partial_0 A_\beta \pi^\beta - \mathscr{L}\left[A_\beta, \partial_\alpha A_\beta\right].$$

De la estructura de la densidad Lagrangiana de la teoría de C-S pura (2.1) y del momento canónico asociado al campo gauge A_α (2.26), se encuentra que la densidad Hamiltoniana canónica del sistema es:

$$\mathscr{H}_c = \frac{k}{4\pi}\left[\varepsilon_{ij}\left(\partial_0 A_i\right)A_j - \varepsilon^{0\beta\gamma}\left(\partial_0 A_\beta\right)A_\gamma - \varepsilon^{i\beta\gamma}\left(\partial_i A_\beta\right)A_\gamma\right].$$

Expandiendo ahora los indices β, γ y utilizando la antisimetría del tensor de Levi-Civita, se obtiene que:

$$\mathscr{H}_c = \frac{k}{4\pi}\left[\varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_0\right)A_j - \varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_j\right)A_0 - \varepsilon^{ijm}\left(\partial_i A_j\right)A_m\right]. \tag{2.31}$$

Sin embargo, debido a que la teoría se restringe a $(2+1)$ dimensiones, el último sumando de la relación preliminar es nulo (véase **Apéndice B**), por esta razón, la densidad Hamiltoniana canónica de C-S se reduce a:

$$\mathscr{H}_c = \frac{k}{4\pi}\left[\varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_0\right)A_j - \varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_j\right)A_0\right]. \tag{2.32}$$

El Hamiltoniano canónico de la teoría de C-S, es dado por [11]:

$$\begin{aligned} H_c &= \int d^2x\mathscr{H}_c \\ &= \frac{k}{4\pi}\int d^2x\left[\varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_0\right)A_j - \varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_j\right)A_0\right]. \end{aligned} \tag{2.33}$$

A fin de presentar de forma más compacta la estructura del Hamiltoniano canónico del sistema, se reescribirá utilizando la siguiente identidad:

$$\left(\partial_i A_0\right)A_j = \partial_i\left(A_0A_j\right) - \left(\partial_i A_j\right)A_0.$$

Introduciendo esta relación en (2.33), se puede verificar que:

$$\begin{aligned} H_c &= -\frac{k}{2\pi}\int d^2x\varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_j\right)A_0 + \frac{k}{4\pi}\int d^2x\varepsilon_{ij}\partial_i\left(A_0A_j\right) \\ &= -\frac{k}{2\pi}\int d^2x\varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_j\right)A_0 + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\oint dr_i\left(A_0A_j\right). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Cabe anotar que para llegar al segundo sumando de la deducción preliminar, se empleo el teorema de Gauss en dos dimensiones. Dicho término no es más que una integral cerrada realizada sobre el contorno de una superficie que se extiende hacia el infinito, luego, de acuerdo a la condición de frontera (2.9), se comprueba que la integral de camino en cuestión es cero. Con estos lineamientos, se concluye entonces que el Hamiltoniano canónico de la teoría de C-S pura es:

$$H_c = -\frac{k}{2\pi}\int d^2x\varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_j\right)A_0. \tag{2.35}$$

Sin embargo, el Hamiltoniano canónico está bien definido solo en el subespacio de fase de los vínculos y por tanto se puede extender arbitrariamente fuera de la superficie de estos. Dicho de otro modo, el Hamiltoniano canónico no está unívocamente determinado, pues es posible añadirle cualquier combinación lineal de los vínculos del sistema [6, 7, 8]. Por ende, si se añade una combinación lineal de los dos vínculos primarios π_0 y χ_i, se deduce que el Hamiltoniano primario de la teoría de C-S es:

$$\begin{aligned} H_p &= H_c + \int d^2x \left[\lambda_0 \pi_0 + \lambda_i \chi_i\right] \\ &= \int d^2x \left[-\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_j\right) A_0 + \lambda_0 \pi_0 + \lambda_i \chi_i\right]. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Expresión en la que los términos $\lambda_0 = \lambda_0(\boldsymbol{x}, t)$ y $\lambda_i = \lambda_i(\boldsymbol{x}, t)$, son funciones arbitrarias del espacio y del tiempo, conocidas como multiplicadores de Lagrange [6, 7, 8].

Para continuar con el analisis canónico de la teoría de C-S será necesario construir los parentesis de Poisson entre variables del espacio de fase. El espacio de fase del sistema está definido por el par canónico (A_α, π^α), luego, si $C(\boldsymbol{x}, t) \equiv C(A_\alpha, \pi^\alpha)$ y $D(\boldsymbol{x}, t) \equiv D(A_\alpha, \pi^\alpha)$ son dos variables dinámicas de dicho espacio, el parentesis de Poisson a tiempos iguales (PP) entre ellas se define como [11]:

$$\left\{C(\boldsymbol{x}, t), D\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} \equiv \int d^2z \left[\frac{\delta C(\boldsymbol{x}, t)}{\delta A_\alpha(\boldsymbol{z}, t)} \frac{\delta D\left(\boldsymbol{y}, t\right)}{\delta \pi^\alpha(\boldsymbol{z}, t)} - \frac{\delta C(\boldsymbol{x}, t)}{\delta \pi^\alpha(\boldsymbol{z}, t)} \frac{\delta D\left(\boldsymbol{y}, t\right)}{\delta A_\alpha(\boldsymbol{z}, t)}\right]. \tag{2.37}$$

A partir de (2.37) se determina que los PP fundamentales entre las variables dinámicas son:

$$\left\{A_\alpha(\boldsymbol{x}, t), \pi_\beta\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} = \eta_{\alpha\beta}\delta^2\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\right), \tag{2.38}$$

$$\left\{A_\alpha(\boldsymbol{x}, t), A_\beta\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} = 0 = \left\{\pi_\alpha(\boldsymbol{x}, t), \pi_\beta\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\}. \tag{2.39}$$

Ahora, la evolución dinámica de cualquier variable del espacio de fase $R(\boldsymbol{x}, t) \equiv R(A_\alpha, \pi^\alpha)$, estará dada por la ecuación de movimiento de Hamilton [6, 11]:

$$\dot{R}(\boldsymbol{x}, t) \approx \left\{R(\boldsymbol{x}, t), H_p\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\}. \tag{2.40}$$

2.3.1. Análisis de consistencia de vínculos

Ahora, por consistencia, se debe garantizar que los vínculos de la teoría de C-S se conserven durante toda la evolución dinámica del sistema. Este análisis permitirá establecer además, si surgirán o no nuevos vínculos [6, 7, 8]. Si como resultado de este requerimiento se originan nuevas estructuras que relacionen las variables del espacio de fase entre sí, será necesario estudiar tambíen la consistencia de cada uno de los nuevos vínculos, esto con el fin de lograr establecer el conjunto completo de vínculos de la teoría en desarrollo. Por tal razón, se determinará a continuación las condiciones de consistencia de los vínculos primarios π_0 y χ_i.

Por consistencia, el vínculo π_0, de acuerdo a la relación (2.40), deberá satisfacer:

$$\begin{aligned} \dot{\pi}_0 &= \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), H_p\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \\ &= \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), H_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} + \int d^2y \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), \lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right) + \lambda_i\left(\boldsymbol{y},t\right)\chi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \\ &\approx 0. \end{aligned} \tag{2.41}$$

Con el propósito de simplificar los cálculos concernientes a la condición de consistencia del vínculo π_0, se procederá a resolver por aparte cada uno de los sumandos presentes en la ecuación (2.41). Luego, a partir de (2.29), la estructura del Hamiltoniano canónico dada por (2.35) y las propiedades de los PP, se obtiene:

$$\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), H_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx \frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j. \tag{2.42}$$

Por otro lado, en virtud a los PP fundamentales se encuentra que:

$$\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), \pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0. \tag{2.43}$$

Bajo este resultado, es evidente que el PP presente en el segundo sumando de la ecuación (2.41) se anula debilmente:

$$\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), \lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx \lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), \pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0. \tag{2.44}$$

Finalmente, de la definición del vínculo χ_i presente en (2.30) y los PP fundamentales, se determina:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\chi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\pi_i(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned} \tag{2.45}$$

A partir de la relación (2.45), se comprueba que:

$$\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\lambda_i\left(\boldsymbol{y},t\right)\chi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx\lambda_i\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\chi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx 0. \tag{2.46}$$

Introduciendo lo obtenido en las fórmulas (2.42), (2.44) y (2.46) en (2.41), se encuentra que la consistencia del vínculo primario π_0 es:

$$\dot{\pi}_0(\boldsymbol{x},t)=\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t)\approx 0. \tag{2.47}$$

La forma de esta ecuación presenta nuevamente relaciones entre las variables del espacio de fase, de allí que el requerimiento de consistencia para π_0 ha dado como resultado un vínculo secundario [6, 7, 8], que se definirá como:

$$\xi=\xi(\boldsymbol{x},t)\equiv\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t)\approx 0. \tag{2.48}$$

Debido a que ha surgido un nuevo vínculo en la teoría, se estudiará su consistencia, esto con el propósito de garantizar que se conserve durante la evolución dinámica del sistema, dicho de otro modo, se debe cumplir:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(\boldsymbol{x},t) &= \left\{\xi(\boldsymbol{x},t),H_p\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &= \left\{\xi(\boldsymbol{x},t),H_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}+\\ &\quad\int d^2y\left\{\xi(\boldsymbol{x},t),\lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)+\lambda_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned} \tag{2.49}$$

Tomando como punto de partida los PP fundamentales y las ecuaciones tanto del vínculo ξ como del Hamiltoniano canónico de C-S expresadas en (2.48) y (2.35) respectivamente, inmediatamente se observa que:

$$\left\{\xi(\boldsymbol{x},t),H_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx 0. \tag{2.50}$$

De la misma manera, en virtud a estas fórmulas se comprueba:

$$\left\{\xi\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx 0. \tag{2.51}$$

Relación que se empleará para resolver el PP que prosigue:

$$\left\{\xi\left(\boldsymbol{x},t\right),\lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx\lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{\xi\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx 0. \tag{2.52}$$

De forma análoga, a partir de los PP fundamentales se demuestra que el PP calculado entre el vínculo secundario ξ y el vínculo primario χ_i (véase **Apéndice C**), es dado por:

$$\left\{\xi\left(\boldsymbol{x},t\right),\chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx\varepsilon_{ji}\partial_i^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{2.53}$$

Usando este resultado, es posible deducir:

$$\left\{\xi\left(\boldsymbol{x},t\right),\lambda_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx\lambda_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{\xi\left(\boldsymbol{x},t\right),\chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx\varepsilon_{ji}\lambda_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\partial_i^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{2.54}$$

Tras sustituir los razonamientos llevados a cabo en los procedimientos matemáticos (2.50), (2.52) y (2.54) en (2.49), se verifica que el requerimiento de consistencia del vínculo secundario ξ da como resultado:

$$\dot{\xi}\left(\boldsymbol{x},t\right)=\varepsilon_{ji}\partial_i^x\lambda_j\left(\boldsymbol{x},t\right)\approx 0. \tag{2.55}$$

La ecuación (2.55) no da origen a nuevos vínculos pues permite establecer condiciones sobre el multiplicador de Lagrange λ_i [6, 7, 8].

Continuando con el análisis de consistencia de los vínculos del sistema, se precisa ahora encontrar la consistencia para el vínculo primario χ_i, luego, su derivada temporal debe anularse debilmente, esto es:

$$\begin{aligned}\dot{\chi}_i\left(\boldsymbol{x},t\right) &= \left\{\chi_i\left(\boldsymbol{x},t\right),H_p\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &= \left\{\chi_i\left(\boldsymbol{x},t\right),H_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}+\\ &\quad\int d^2y\left\{\chi_i\left(\boldsymbol{x},t\right),\lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)+\lambda_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned} \tag{2.56}$$

Mediante las propiedades de los PP y las fórmulas (2.30) y (2.35), referentes al vínculo χ_i y el Hamiltoniano canónico de la teoría respectivamente, se deduce que:

$$\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t), H_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t). \tag{2.57}$$

Cabe anotar que para la obtención del resultado previo se empleo la antisimetría del tensor de Levi-Civita y se tuvo en cuenta además, que la derivada de una función cuyo argumento depende de la diferencia de dos variables (para este caso la función delta de Dirac en dos dimensiones) satisface la propiedad mostrada a continuación:

$$\partial_j^y \delta\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right) = -\partial_j^x \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{2.58}$$

Para el calculo de (2.57) se recomienda estudiar los PP deducidos en el **Apéndice C**.

Para fijar completamente el requerimiento de consistencia del vínculo χ_i, resta tener en cuenta que el PP entre los dos vínculos primarios χ_i y π_0 se anula debilmente, es decir:

$$\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t), \pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0. \tag{2.59}$$

Este resultado implica en efecto que:

$$\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t), \lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx \lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t), \pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0. \tag{2.60}$$

Similarmente, utilizando los PP fundamentales (2.38), (2.39) y aprovechando la antisimetría del tensor ε_{ij}, se comprueba el PP mostrado a continuación:

$$\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t), \chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{2.61}$$

Para observar los cálculos pertinentes para la resolución del PP anterior dirigirse al **Apéndice C**. Como consecuencia de la relación preliminar se puede verificar que:

$$\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t), \lambda_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx \lambda_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t), \chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\lambda_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{2.62}$$

Reemplazando (2.57), (2.60) y (2.62) en (2.56), se llega a que la condición de consistencia del vínculo primario χ_i es dada por:

$$\dot{\chi}_i(\boldsymbol{x},t) = -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\left[\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t) + \lambda_j(\boldsymbol{x},t)\right] \approx 0. \tag{2.63}$$

Si ahora, se multiplica a ambos lados de la fórmula previa por el tensor ε_{im}, (véase Apéndice A), se comprueba que:

$$\begin{aligned} -\frac{k}{2\pi}\delta_{mj}\left(\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t) + \lambda_j(\boldsymbol{x},t)\right) &\approx 0 \\ -\frac{k}{2\pi}\left[\partial_m^x A_0(\boldsymbol{x},t) + \lambda_m(\boldsymbol{x},t)\right] &\approx 0. \end{aligned} \tag{2.64}$$

Luego, se concluye que el requerimiento de consistencia del vínculo primario χ_i, arrojá como resultado la siguiente ecuación:

$$\partial_i^x A_0(\boldsymbol{x},t) + \lambda_i(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{2.65}$$

Esta ecuación permite fijar condiciones sobre el multiplicador de Lagrange λ_i, por tal motivo, es posible afirmar que (2.63) no constituye un vínculo [6, 7, 8]. Esto se evidencia tambíen, en que (2.55) es inmediatamente satisfecha por (2.65), este hecho puede ser observardo si a partir (2.65) se despeja:

$$\lambda_j(\boldsymbol{x},t) \approx -\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t)\,. \tag{2.66}$$

Sustituyendo este resultado en (2.55), se encuentra que:

$$-\varepsilon_{ij}\partial_i^x\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{2.67}$$

Que es una expresión válida, pues se sabe que ε_{ij} es un tensor antisimétrico en los indices i, j, mientras que $\partial_i^x\partial_j^x$ es simétrico en los mismos indices, por tal razón, el producto entre los dos tensores es nulo.

Se puede concluir parcialmente que el conjunto de vínculos de la teoría de C-S pura está conformado por:

$$\begin{cases} \pi_0 \approx 0 \\ \chi_i = \pi_i + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j \approx 0 \\ \xi = \varepsilon_{ij}\partial_i A_j \approx 0 \end{cases}$$

2.3.2. Clasificación de vínculos de primera y segunda clase

La distinción de vínculos primarios y secundarios no es relevante, pues todos ellos son vistos como elementos de un mismo conjunto. Por lo tanto, el siguiente paso en el análisis canónico de la teoria de C-S, consiste en la clasificación de los vínculos encontrados, en vínculos de primera y segunda clase. Para tal fin, se debe tener en cuenta que de anularse todos los PP calculados entre un vínculo determinado y el resto de vínculos que conforman el sistema, este será clasificado como de primera clase, si por otra parte, existe almenos un PP que no se anule debilmente, se dirá entonces que se trata de un vínculo de segunda clase [6, 7, 8].

Recurriendo a las estructuras (2.43), (2.51) y (2.59), se comprueba que todos PP calculados entre π_0 y el conjunto de vínculos de la teoría son debilmente iguales a cero, bajo este resultado, se puede inferir que el vínculo primario π_0 es de primera clase.

Por otro lado, a partir las ecuaciones (2.53) y (2.61), se observa que no todos los PP entre χ_i, ξ y el conjunto total de vínculos son debilmente nulos. Por consiguiente, se determina que tanto el vínculo primario χ_i como el vínculo secundario ξ son de segunda clase.

En virtud a los vínculos χ_i y ξ, cuyas estructuras se indican en (2.30) y (2.48), respectivamente, se comrpueba que en principio se cuenta con un total de tres vínculos de segunda clase, que serán denotados de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\theta_1(\boldsymbol{x},t) &\equiv \chi_1(\boldsymbol{x},t)\,,\\
\theta_2(\boldsymbol{x},t) &\equiv \chi_2(\boldsymbol{x},t)\,,\\
\theta_3(\boldsymbol{x},t) &\equiv \xi(\boldsymbol{x},t)\,.
\end{aligned}$$

A fin de tratar los vínculos de segunda clase mediante los planteamientos del método de Dirac, se procederá a construir una matriz conformada por los PP entre los vínculos de segunda clase de la teoría de C-S, donde los elementos de matriz se definen como:

$$V_{lm}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \equiv \left\{\theta_l\left(\boldsymbol{x},t\right),\theta_m\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}, \tag{2.68}$$

con $l,m = 1,2,3$. Cuya forma explícita (véase **Apéndice D**) es dada por:

$$V\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{2\pi} & \partial_2^x \\ \frac{k}{2\pi} & 0 & -\partial_1^x \\ \partial_2^x & -\partial_1^x & 0 \end{pmatrix} \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{2.69}$$

El método de Dirac, establece que los vínculos de segunda clase surgen cuando la matriz (2.69) no se anula sobre la superficie de vínculos (no todos los PP son debilmente nulos). Sin embargo, los vínculos de segunda clase pueden ser tratados bajo la definición de paréntesis de Dirac (PD), siempre que la matriz de vínculos de segunda clase sea regular [6, 7, 8].

Como se puede observar la matriz de vínculos de segunda clase (2.69), es una matriz funcional, pues sus componentes dependen de la función delta de Dirac y sus derivadas. Con el objetivo de comprobar si se trata de una matriz regular o singular, se debe calcular su determinante. Para tal fin, se realizará antes la transformada de Fourier de cada una de sus componentes (véase **Apéndice D**), procedimiento que da como resultado la siguiente matriz:

$$\widetilde{V}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{2\pi} & ip_2 \\ \frac{k}{2\pi} & 0 & -ip_1 \\ ip_2 & -ip_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.70}$$

Esta matriz, a diferencia de (2.69), presenta componentes con valores númericos, luego, es posible calcular su determinante. Se puede comprobar que el determinante de la matriz (2.70) es nulo, es decir:

$$\det\left[\widetilde{V}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right] = 0.$$

De allí que $\widetilde{V}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ es una matriz singular. Este resultado implica necesariamente que la matriz de vínculos $V\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ sea tambíen una matriz singular y no invertible. Debido a que la inversa de la matriz de vínculos (2.69) no puede ser determinada, los paréntesis de Dirac no estarán bien definidos y se conluye que χ_i y ξ no constituyen un conjunto máximo de vínculos de segunda clase. Esto es un indicador de que la teoría posee en realidad un vínculo de primera clase adicional que debe ser fijado [8].

2.3.3. Construcción de un vínculo de primera clase

Con el fin de deducir el vínculo de primera clase, se propone la siguiente combinación lineal:

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}(\boldsymbol{x}, t) \equiv \int d^2 y \left[C_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \chi_i(\boldsymbol{y}, t) + D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \xi(\boldsymbol{y}, t) \right]. \tag{2.71}$$

Donde los coeficientes $C_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ y $D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ son arbitrarios y se determinarán teniendo en cuenta que si $\bar{\xi}$ es un vínculo de primera clase, entonces se debe satisfacer:

$$\left\{ \bar{\xi}(\boldsymbol{x}, t), \chi_j(\boldsymbol{y}, t) \right\} \approx 0, \tag{2.72}$$

$$\left\{ \bar{\xi}(\boldsymbol{x}, t), \xi(\boldsymbol{y}, t) \right\} \approx 0. \tag{2.73}$$

Inicialmente, a partir de la definición (2.71), los PP deducidos en el **Apéndice C** y las propiedades de los PP, se verifica que:

$$\begin{aligned} \left\{ \bar{\xi}(\boldsymbol{x}, t), \chi_j(\boldsymbol{y}, t) \right\} &\approx \int d^2 z C_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \left\{ \chi_i(\boldsymbol{z}, t), \chi_j(\boldsymbol{y}, t) \right\} + \\ &\quad \int d^2 z D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \left\{ \xi(\boldsymbol{z}, t), \chi_j(\boldsymbol{y}, t) \right\} \\ &\approx \varepsilon_{ij} \left[-\frac{k}{2\pi} C_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \partial_i^y D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \right] \approx 0. \end{aligned} \tag{2.74}$$

Para deducir la anterior relación se empleo tambíen la propiedad (2.58). La ecuación (2.74) se satisface si:

$$-\frac{k}{2\pi} C_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \partial_i^y D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \approx 0,$$

de la que se puede determinar que:

$$C_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \approx \frac{2\pi}{k} \partial_i^y D(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}). \tag{2.75}$$

De forma análoga, el PP (2.73), puede ser resuelto mediante la definición (2.71), del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\left\{\overline{\xi}(\boldsymbol{x},t),\xi\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \int d^2z\left[C_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\left\{\chi_i(\boldsymbol{z},t),\xi\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}+D(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\left\{\xi(\boldsymbol{z},t),\xi\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\right]\approx 0\\ &\approx -\varepsilon_{ij}\partial_j^y C_i\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\approx 0. \end{aligned} \tag{2.76}$$

Cabe anotar que para la consecución del resultado previo se tuvo en cuenta los PP encontrados en el **Apéndice C**:

Reemplazando en (2.76) el coeficiente $C_i\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ encontrado en (2.75), se deduce que:

$$-\frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\partial_j^y\partial_i^y D\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\approx 0. \tag{2.77}$$

El producto tensorial $\varepsilon_{ij}\partial_j^y\partial_i^y$ no es más que el producto entre un tensor antisimétrico ε_{ij} y un tensor simétrico $\partial_j^y\partial_i^y$, cuyo resultado es cero. Por tal motivo, si se incluye este precepto en la ecuación (2.77) se encuentra que el coeficiente $D\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ es completamente indeterminado.

Se escogerá entonces un valor conveniente para la función $D\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$,dado por:

$$D\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\equiv\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{2.78}$$

Insertando esta elección en (2.75) y empleando la propiedad (2.58), se puede verificar que:

$$\begin{aligned}C_i\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) &\approx \frac{2\pi}{k}\partial_i^y\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\ &\approx -\frac{2\pi}{k}\partial_i^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \end{aligned} \tag{2.79}$$

Hasta este punto se han determinado ya los dos coeficientes de la combinación lineal asociada al vínculo $\overline{\xi}$. Sustituyendo entonces (2.78) y (2.79) en la definición (2.71), se deduce que el vínculo de primera clase que se deseaba fijar es:

$$\begin{aligned}\overline{\xi}(\boldsymbol{x},t) &\equiv -\frac{2\pi}{k}\partial_i^x\int d^2y\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\chi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)+\int d^2y\xi\left(\boldsymbol{y},t\right)\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\ &= \xi(\boldsymbol{x},t)-\frac{2\pi}{k}\partial_i^x\chi_i(\boldsymbol{x},t)\approx 0. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Finalmente se tiene que la teoría de C-S está conformada por el siguiente conjunto de vínculos:

$$\begin{cases} \pi_0 \approx 0 \\ \bar{\xi} = \varepsilon_{ij}\partial_i A_j - \frac{2\pi}{k}\partial_i \chi_i \approx 0 \\ \chi_i = \pi_i + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j \approx 0 \end{cases}$$

Las dos primeras ecuaciones del conjunto ilustrado previamente son vínculos de primera clase, mientras que la última relación del mismo conjunto es de segunda clase.

2.3.4. Hamiltoniano extendido y dinámica en el espacio de fase completo

La existencia de vínculos en la teoría conlleva a la inclusión de multiplicadores de Lagrange al Hamiltoniano que describe el sistema. Los multiplicadores de Lagrange asociados a vínculos de segunda clase pueden ser fijados de manera única bajo la definición directa de Parénteis de Dirac. Sin embargo, los multiplicadores asociados a vínculos de primera clase, que son generadores de transformaciones gauge locales, seguirán siendo arbitrarios, de modo que, tal arbitrariedad se verá reflejada en la dinámica del sistema físico, es decir, que la evolución temporal del mismo en el espacio de fase completo no se determina de manera única [6, 7, 8].

En base a lo anterior, el método de Dirac establece que la dinámica en el espacio de fase completo, vendrá dada por el Hamiltoniano extendido [6], que se define como combinación lineal del Hamiltoniano primario y todos los vínculos de primera clase existentes. Así pues, el Hamiltoniano extendido para la teoría de C-S pura es:

$$\begin{aligned} H_E &\equiv H_c + \int d^2x \left[\lambda_1(\boldsymbol{x},t)\phi_1(\boldsymbol{x},t) + \lambda_2(\boldsymbol{x},t)\phi_2(\boldsymbol{x},t) + u_i(\boldsymbol{x},t)\chi_i(\boldsymbol{x},t)\right] \\ &= H_c + \int d^2x \lambda_i(\boldsymbol{x},t)\phi_i(\boldsymbol{x},t) + u_i(\boldsymbol{x},t)\chi_i(\boldsymbol{x},t), \end{aligned} \tag{2.81}$$

donde λ_i y u_i con $i = 1,2$ son multiplicadores de Lagrange y donde se ha denotado:

$$\begin{aligned} \phi_1(\boldsymbol{x},t) &\equiv \pi_0(\boldsymbol{x},t) \approx 0. &(2.82)\\ \phi_2(\boldsymbol{x},t) &\equiv \xi(\boldsymbol{x},t) - \frac{2\pi}{k}\partial_i\chi_i(\boldsymbol{x},t) \approx 0. &(2.83)\end{aligned}$$

De esta manera, la evolución temporal de una variable dinámica del espacio de fase completo $F(\boldsymbol{x},t) \equiv F(A_\alpha, \pi^\alpha)$, es dada por la siguiente ecuación de Hamilton:

$$\dot{F}(\boldsymbol{x},t) \approx \left\{F(\boldsymbol{x},t), H_E(\boldsymbol{y},t)\right\}. \tag{2.84}$$

El objetivo ahora, es determinar la evolución temporal de los campos canónicos de la teoría $[A_\alpha, \pi^\alpha]$. Obsérvese que a partir de la relación (2.84), los vínculos (2.82), (2.83), el Hamiltoniano canónico de C-S (2.35) y los PP fundamentales se encuentra que:

$$\begin{aligned} \dot{A}_0(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{A_0(\boldsymbol{x},t), H_E(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx \int d^2y\lambda_1(\boldsymbol{y},t)\left\{A_0(\boldsymbol{x},t), \phi_1(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx \lambda_1(\boldsymbol{x},t). \end{aligned} \tag{2.85}$$

Relación que indica que la evolución temporal de A_0 es completamente arbitraria. Similarmente, en base a (2.84) se determina que la dinámica en el espacio de fase completo de la componente espacial del potencial fundamental, viene dada por:

$$\begin{aligned} \dot{A}_i(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), H_E(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), H_c(\boldsymbol{y},t)\right\} + \int d^2y\left[\lambda_1(\boldsymbol{y},t)\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_1(\boldsymbol{y},t)\right\} + \right.\\ &\quad \left.\lambda_2(\boldsymbol{y},t)\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_2(\boldsymbol{y},t)\right\} + u_j(\boldsymbol{y},t)\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \chi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Usando los PP fundamentales y los siguientes resultados deducidos en el **Apéndice C**:

$$\begin{aligned} \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), H_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx 0, &(2.87)\\ \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_2(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx -\frac{2\pi}{k}\nabla_x^2\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), &(2.88)\\ \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \chi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \eta_{ij}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), &(2.89)\end{aligned}$$

se verifica que (2.86) se reduce a:

$$\dot{A}_i(\boldsymbol{x},t) \approx -\frac{2\pi}{k}\nabla_x^2\lambda_2(\boldsymbol{x},t) - u_i(\boldsymbol{x},t). \tag{2.90}$$

lo que pone en evidencia la arbitrariedad existente en la dinámica del campo A_i. De forma análoga, la evolución temporal del campo π_0 vendrá determinada por:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_0(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), H_E(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), H_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx \frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t),\end{aligned} \tag{2.91}$$

donde se ha empleado la ecuación (2.42) y los PP fudamentales. Por otro lado, la evolución temporal de la componente espacial del momento canónico viene dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_i(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), H_E(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), H_c(\boldsymbol{y},t)\right\} + \int d^2y\left[\lambda_1(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_1(\boldsymbol{y},t)\right\} + \right.\\ &\left.\lambda_2(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_2(\boldsymbol{y},t)\right\} + u_j(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\chi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\right].\end{aligned} \tag{2.92}$$

A partir de los PP fundamentales y las siguiente relaciones deducidas en el **Apéndice C**:

$$\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), H_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t), \tag{2.93}$$

$$\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), \phi_2(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{2.94}$$

$$\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), \chi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{2.95}$$

se comprueba que (2.92) se convierte en:

$$\dot{\pi}_i(\boldsymbol{x},t) \approx -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t) + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\lambda_2(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}u_j(\boldsymbol{x},t). \tag{2.96}$$

De esta forma, se concluye que la evolución temporal de los campos canónicos $[A_\alpha, \pi^\alpha]$ en teoría de C-S pura, calculada a partir de la ecuación de Hamilton (2.84), viene dada por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c}\dot{A}_0(\boldsymbol{x},t) \approx \lambda_1(\boldsymbol{x},t)\\ \dot{A}_i(\boldsymbol{x},t) \approx -\frac{2\pi}{k}\nabla_x^2\lambda_2(\boldsymbol{x},t)\\ \dot{\pi}_0(\boldsymbol{x},t) \approx \frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t)\\ \dot{\pi}_i(\boldsymbol{x},t) \approx -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t) + \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\lambda_2(\boldsymbol{x},t)\end{array}\right.$$

Donde se ha considerado $u_i \approx 0$ pues se trata de una función arbitraria. Nótese que las ecuaciones de Hamilton preliminares son expresadas en términos de igualdades debiles, del mismo modo, la presencia de multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase, implica que exite arbitrariedad en la dinámica de los campos canónicos.

Debido a que π_0 es un vínculo que se anula debilmente, la ecuación de Hamilton (2.91) se escribe como se muestra a continuación:

$$\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t) \approx 0, \tag{2.97}$$

expresión que es debilmente equivalente a la ecuación de campo (2.25) para $\beta = 0$. Por otro lado, de la ecuación (2.90) se encuentra que:

$$\lambda_2(\boldsymbol{x},t) \approx -\frac{k}{2\pi}\frac{1}{\nabla_x^2}\dot{A}_i(\boldsymbol{x},t), \tag{2.98}$$

reemplazando este resultado en (2.96) se llega a:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_i(\boldsymbol{x},t) &\approx -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{4\pi}\frac{1}{\nabla_x^2}\partial_0\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t)\\ &\approx -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t),\end{aligned} \tag{2.99}$$

donde se ha empleado la expresión deducida previamente en (2.97). Nótese ahora, que de la definición de momento canónico (2.28) es posible determinar:

$$\dot{\pi}_i(\boldsymbol{x},t) = -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_0^x A_j(\boldsymbol{x},t). \tag{2.100}$$

Tras igualar (2.99) y (2.100) se obtiene que:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij}\left[\partial_0^x A_j(\boldsymbol{x},t) - \partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t)\right] &\approx 0\\ \varepsilon_{ij}F_{0j}(\boldsymbol{x},t) &\approx 0,\end{aligned} \tag{2.101}$$

donde se ha empleado la definición de tensor de campo electrogamnético. La relación preliminar es debilmente equivalente a la ecuación de campo (2.25) cuando $\beta = i$. De esta manera, a partir de los resultados deducidos en (2.97) y (2.101) se concluye que las ecuaciones de Hamilton de la teoría de C-S son debilmente equivalentes a las ecuaciones de campo deducidas en el formalismo Lagrangiano, es decir:

$$\varepsilon^{\beta\alpha\gamma} F_{\alpha\gamma} \approx 0. \tag{2.102}$$

2.3.5. Tratamiento de vínculos de segunda clase

Inicialmente se procederá a eliminar los vínculos de segunda clase dados por (2.30), los cuales permiten reconocer que existe un número determinado de grados de libertad en la teoría, más no especificar cuales son. En consecuencia, se debe definir unos nuevos PP entre los grados de libertad determinados a partir de (2.30) y que se denominan Paréntesis de Dirac a tiempos iguales (PD) [6, 7, 8], definidos por:

$$\begin{aligned} \left\{M(\boldsymbol{x},t), N\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} \quad \equiv \quad & \left\{M(\boldsymbol{x},t), N\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{M(\boldsymbol{x},t), \chi_i(\boldsymbol{u},t)\right\}\right. \\ & \left. C^{-1}_{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\chi_j(\boldsymbol{v},t), N\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Donde $M(\boldsymbol{x},t) \equiv M(A_\alpha, \pi^\alpha)$ y $N(\boldsymbol{x},t) \equiv N(A_\alpha, \pi^\alpha)$ son dos variables dinámicas arbitrarias del espacio de fase. Aquí $C^{-1}_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ se interpreta como las componentes de la inversa de la matriz de vínculos $C_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$, la cual es definida por:

$$C_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \equiv \left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t), \chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}, \tag{2.104}$$

con χ_i dado por la ecuación (2.30). Es posible mostrar que la matriz de vínculos de segunda clase $C_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ es, (véase **Apéndice C**):

$$C_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{2.105}$$

Antes de poder especificar los PD entre los grados de libertad, será necesario construir la inversa de la matriz de vínculos $C_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$, matriz que se deducirá teniendo en cuenta que se debe satisfacer:

$$\int d^2z C_{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) C^{-1}_{jm}\left(z,\boldsymbol{y}\right) = \delta_{im}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{2.106}$$

Reemplazando en esta relación la estructura de la matriz de vínculos dada en (2.105), se observa que:

$$-\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij} C^{-1}_{jm}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \delta_{im}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{2.107}$$

Multiplicando ahora a ambos lados de la igualdad (2.107) por el tensor ε_{in}, se puede deducir:

$$\begin{aligned} -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{in}\varepsilon_{ij}C^{-1}_{jm}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) &= \varepsilon_{in}\delta_{im}\delta^{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right) \\ -\frac{k}{2\pi}C^{-1}_{nm}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) &= \varepsilon_{mn}\delta^{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \end{aligned}$$

Cabe anotar que para el cálculo previo se tuvo en cuenta que $\varepsilon_{in}\varepsilon_{ij}=\delta_{nj}$ (véase **Apéndice A**). A partir de esta expresión se puede especificar que la inversa de la matríz de vínculos $C_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ está dada por:

$$C^{-1}_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\delta^{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{2.108}$$

Una vez encontrada la inversa de la matriz de vínculos, se estudiarán los PD entre los grados de libertad. Es imporante resaltar que bajo la definición de PD (2.103), se cumple que el vínculo de segunda clase χ_i es fuertemente igual a cero, esto es:

$$\pi_i+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j=0. \tag{2.109}$$

Como se menciono anteriormente, el vínculo (2.109) da indicios de la existencia de un determinado número de grados de libertad en la teoría, sin embargo la selección de tales variables independientes es completamente arbitraria. Por este motivo, se escogerán como campos independientes a las componentes del campo fundamental A_j, luego, el nuevo espacio de fase para la teoría de C-S estará constituido por $[A_\alpha,\pi_0]$.

En principio, a partir de la definición (2.103), se procederá a determinar el siguiente PD:

$$\begin{aligned} \left\{A_i\left(\boldsymbol{x},t\right),A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} &= \left\{A_i\left(\boldsymbol{x},t\right),A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}-\int d^2u\,d^2v\left[\left\{A_i\left(\boldsymbol{x},t\right),\chi_m\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}\right. \\ &\quad \left. C^{-1}_{mn}\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\left\{\chi_n\left(\boldsymbol{v},t\right),A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{2.110}$$

Utilizando los paréntesis de PP (2.38) y (2.39) y los PP entre el campo A_i y el vínculo χ_i, (véase **Apéndice C**), la relación previa puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left\{A_i\left(\boldsymbol{x},t\right),A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} &= -\int d^2u\,d^2v\left(\eta_{im}\delta^{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\right)\right)C^{-1}_{mn}\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\left(-\eta_{jn}\delta^{2}\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}\right)\right) \\ &= C^{-1}_{ij}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \\ &= \frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\delta^{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \end{aligned} \tag{2.111}$$

De igual forma, se deducirá ahora, el PD entre los campos A_0 y π_0. De la definición (2.103) habrá que resolver:

$$\begin{aligned} \left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} &= \left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\chi_m(\boldsymbol{u},t)\right\}\right. \\ & \left. C^{-1}_{mn}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\chi_n(\boldsymbol{v},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{2.112}$$

De acuerdo a los PP fundamentales es posibe deducir que:

$$\begin{aligned} \left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} &= \left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \\ &= \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \end{aligned} \tag{2.113}$$

En sintesis, el primer conjunto de PD no nulos entre las variables canónicas del espacio de fase, deducidos a partir de la definición (2.103) son:

$$\begin{cases} \left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right) \\ \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = \frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right) \end{cases}$$

Relaciones bajo las cuales se han eliminado apenas los vínculos de segunda clase de la teoría. Nótese que debido a que el vínculo χ_i es fuertemente igual a cero, de la identidad (2.109) es posible determinar que:

$$\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j = -\frac{4\pi}{k}\pi_i, \tag{2.114}$$

reemplazando este resultado en (2.35) se obtiene que el Hamiltoniano canónico de C-S es ahora:

$$H_c = 2\int d^2x\varepsilon_{ij}\left(\partial_i\pi_i\right)A_0. \tag{2.115}$$

Sustituyendo este resultado en (2.81) se encuentra que la dinámica del sistema en el espacio de fase completo es determinada por el siguiente Hamiltoniano extendido:

$$H_E = 2\int d^2x\varepsilon_{ij}\left[\partial^x_i\pi_i(\boldsymbol{x},t)\right]A_0(\boldsymbol{x},t) + \int d^2y\lambda_i(\boldsymbol{x},t)\phi_i(\boldsymbol{x},t), \tag{2.116}$$

con $i = 1,2$ y donde los multiplicadores de Lagrange $\lambda_i(\boldsymbol{x},t)$ son arbitrarios.

Para culminar en su totalidad el análisis canónico de la teoría de C-S pura es de interés ahora, estudiar los vínculos de primera clase π_0 y $\overline{\xi}$ que no son más que generadores de transformaciones gauge locales y cuyos multiplicadores de Lagrange implican arbitrariedad en la dinámica del sistema. [6, 7, 8] Esta situación naturalmente inducirá la imposición de un total de dos condiciones de gauge adicionales, de forma que el nuevo conjunto de vínculos pueda ser tratado bajo la definición de Paréntesis de Dirac [8].

2.3.6. Tratamiento de vínculos de primera clase y condiciones gauge

Hasta esta parte se han tratado convenientemente los vínculos de segunda clase χ_i con $i = 1,2$, dados por la ecuación (2.30). Para resolver completamente la teoría de C-S, en esta subsección se estudiará los vínculos de primera clase π_0 y $\overline{\xi}$. La idea fundamental del tratamiento de estos vínculos es que a través de la inclusión de dos vínculos adicionales, conocidos como condiciones gauge, se logre obtener un conjunto constituido solamente por vínculos de segunda clase [6, 7, 8], de esta forma, además de eliminar los vínculos de primera clase, será posible determinar los multiplicadores de Lagrange asociados a estos, de manera única.

Dado que la imposición de condiciones gauge es completamente arbitraria, se recurrirá a analizar la teoría de C-S en el gauge de radiación [8], condición que es definida imponiendo:

$$A_0(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{2.117}$$

$$\partial_i A_i(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{2.118}$$

Por consiguiente, el conjunto de vínculos del sistema vendrá determinado ahora, por las ecuaciones (2.29), (2.80) y el gauge de radiación citado en los renglones previos, dicho de otro modo, el conjunto de vínculos en cuestión es:

$$\phi_1(\boldsymbol{x},t) \equiv \pi_0(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{2.119}$$

$$\phi_2(\boldsymbol{x},t) \equiv \xi(\boldsymbol{x},t) - \frac{2\pi}{k}\partial_i\chi_i(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{2.120}$$

$$\phi_3(\boldsymbol{x},t) \equiv A_0(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{2.121}$$

$$\phi_4(\boldsymbol{x},t) \equiv \partial_i A_i(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{2.122}$$

Teniendo en cuenta que ahora el sistema se constituye de un total de cuatro vínculos de segunda clase (véase **Apéndice E**), se procederá a estudiarlos de manera análoga al tratamiento desarrollado en la subsección anterior, es decir, bajo la definición de un nuevo conjunto de PD.

Considerando entonces, dos variables dinámicas arbitrarias del espacio de fase reducido $P(\boldsymbol{x},t) \equiv P(A_\alpha)$ y $Q(\boldsymbol{x},t) \equiv Q(A_\alpha)$, se define un segundo PD entre ellas como:

$$\begin{aligned}\left\{P(\boldsymbol{x},t),Q(\boldsymbol{y},t)\right\}_D \equiv{}& \left\{P(\boldsymbol{x},t),Q(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} - \int d^2u\,d^2v \Big[\left\{P(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} \\ & S^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),Q(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1}\Big].\end{aligned} \tag{2.123}$$

Donde $S^{-1}_{lm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ es la inversa de la matriz de vínculos $S_{lm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, cuyas componentes se definen como:

$$S_{lm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \left\{\phi_l(\boldsymbol{x},t),\phi_m(\boldsymbol{y},t)\right\}. \tag{2.124}$$

Con $l,m = 1,...,4.$. Cabe anotar que los PD: $\left\{P(\boldsymbol{x},t),Q(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1}$, serán calculados bajo la definición (2.103).

Nótese que con el propósito de simplificar los calculos concernientes al estudio de los vínculos de segunda clase de la teoría de C-S, se procedió a resolver inicialmente, bajo la definición de PD (2.103), los vínculos de segunda clase χ_i con $i = 1,2$. Mientras que en esta subseccción, a partir de la definición de PD dada por (2.123), se tratarán los vínculos remanentes ϕ_l con $l = 1, ..., 4$. Es relevante resaltar que los resultados derivados por este método iterativo, serían exactamente los mismos a los obtenidos si se tratase el total de seis vínculos de segunda clase de la teoría (χ_i, ϕ_l), en un solo paso [8].

La forma matricial de $S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es dada por (véase **Apéndice F**):

$$S(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{k}\nabla_x^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\pi}{k}\nabla_x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \tag{2.125}$$

donde ∇_x^2 es el operador Laplaciano en dos dimensiones.

Sin embargo, los PD (2.123) están escritos en términos de la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase, luego, está será calculada a partir de la siguiente condición:

$$\int d^2z S_{lr}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) S_{rm}^{-1}(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y}) = \delta_{lm}\delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}). \tag{2.126}$$

La matriz $S^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, tiene la forma mostrada a continuación, (véase **Apéndice f**):

$$S^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{2\pi}\frac{1}{\nabla_x^2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{2\pi}\frac{1}{\nabla_x^2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}). \tag{2.127}$$

Donde la expresión:

$$F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), \tag{2.128}$$

es la función de Green asociada al operador Laplaciano en dos dimensiones. De la definición de función de Green [13], se sabe que (2.127) satisface la siguiente ecuación diferencial:

$$\nabla_x^2 F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}). \tag{2.129}$$

Por medio del método de funciones de Green y la condición de frontera que establece que los campos se anulan en el infinito, se encuentra que la función de Green del operador

Laplaciano en dos dimensiones es de la forma [7]:

$$F\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\frac{1}{4\pi}\ln\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)^{2}. \tag{2.130}$$

Debido a que la matriz $S^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ ha sido determinada, se procederá ahora, a calcular los PD entre las variables del espacio de fase reducido del sistema. Sin embargo, es necesario tener en cuenta que bajo la definición de PD (2.123), los vínculos de seguda clase ϕ_l, serán ahora igualdades fuertes, es decir:

$$\begin{aligned}
\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right) &= 0,\\
\xi\left(\boldsymbol{x},t\right)-\frac{2\pi}{k}\partial_i\chi_i\left(\boldsymbol{x},t\right) &= 0,\\
A_0\left(\boldsymbol{x},t\right) &= 0,\\
\partial_iA_i\left(\boldsymbol{x},t\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Observesé que el espacio de fase reducido está conformado por apenas tres campos (A_α). Sin embargo, bajo la inclusión de las condiciones del gauge de radiación, se tiene un total de cuatro vínculos que relacionan las variables del espacio de fase, esta situación permite inferir que la teoría no posee grados de libertad. Cabe anotar que esta es una consecuencia del estudio de una teoría en $(2+1)$ dimensiones. Aún así, se procederá a calcular los PD entre los campos A_0,π_0 y A_i.

El PD entre las variables A_0 y π_0, vendrá dado por la expresión que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\left\{A_0\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D &= \left\{A_0\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}-\int d^2u d^2v\left[\left\{A_0\left(\boldsymbol{x},t\right),\phi_l\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}_{D_1}\right.\\
&\left. S^{-1}_{lm}\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\left\{\phi_m\left(\boldsymbol{v},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}\right].
\end{aligned} \tag{2.131}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\left\{A_0\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}=\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).$$

y usando los siguientes resultados, (véase **Apéndice G**):

$$\begin{aligned}\left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} &= \left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\phi_1(\boldsymbol{u},t)\right\}=\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}),\\ \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\pi_0(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} &= \left\{\phi_3(\boldsymbol{v},t),\pi_0(\boldsymbol{y},t)\right\}=\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}).\end{aligned}$$

La ecuación (2.123) se escribe como:

$$\begin{aligned}\left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\pi_0(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})-\int d^2u d^2v S^{-1}_{13}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})\,\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v})\\ &= \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})-S^{-1}_{13}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}).\end{aligned}$$

A partir de la estructura matricial (2.127) se puede concluir que:

$$\left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\pi_0(\boldsymbol{y},t)\right\}_D=0. \tag{2.132}$$

De manera análoga, a partir de la definición (2.123), se calculará el siguiente PD:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1}-\int d^2u d^2v\Big[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1}\\ &\quad S^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1}\Big].\end{aligned} \tag{2.133}$$

La integral presente en el segundo sumando de la relación preliminar será diferente de cero para los valores $l,m=2,4$. Luego, empleando tanto el PD (2.113) como los valores posibles que toma la integral de la relación (2.133), (véase **Apéndice G**), el PD que se desea determinar vendrá dado por:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\\ &\quad \frac{2\pi}{k}\left[\varepsilon_{mj}\partial^x_m\partial^x_i-\varepsilon_{mi}\partial^x_m\partial^x_j\right]\frac{1}{\nabla^2_x}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\end{aligned} \tag{2.134}$$

Cabe anotar que los PD y los valores correspondientes a los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase, dependerán de la condición gauge en la que se estudia el sistema. Sin embargo, es relevante tener en cuenta que debido a las características de esta teoría, definida en el plano, las condiciones gauge seleccionadas terminarán anulando el Hamiltoniano canónico. Razón por la cual, se concluye que en la teoría de C-S pura no existe dinámica para los campos que se emplean en su descripción. Este resultado verifica que la importancia y los efectos de esta teoría se verán reflejados cuando el término de C-S se acople a otras teorías particulares que estudian sistemas en el espacio-tiempo de $(2+1)$ dimensiones [2].

Capítulo 3

Teoría de Maxwell-Chern-Simons

Teniendo en cuenta que tanto la teoría electromagnética de Maxwell como la teoría de Chern-Simons pura, son teorías gauge en $(2+1)$ dimensiones, resulta natural considerar una densidad Lagrangiana que las incluya simultaneamente [2]. El acoplamiento de estas, da como resultado una nueva teoría gauge denominada teoría de Maxwell-Chern-Simons (MCS) , cuya densidad Lagrangiana en $(2+1)$ dimensiones, es descrita de la siguiente manera:

$$\mathscr{L}_{MCS} \equiv -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left(\partial_\alpha A_\beta \right) A_\gamma, \tag{3.1}$$

la cual presenta inviariancia de gauge local y de Lorentz. Una característica fundamental de esta teoría en particular, es que la adición del término de C-S al campo electromagnético en $(2+1)$ dimensiones, permite la generación de una masa topológica asociada a los fotones descritos por el campo gauge fundamental A_α [3, 4].

Al igual que la teoría de C-S pura, la teoría de MCS es descrita por una densidad Lagrangiana singular, es decir, que es una teoría con vínculos. Es importante resaltar que en el análisis clásico de esta teoría en el formalismo Hamiltoniano, se orginarán dos vínculos de primera clase [6, 7]. Luego, en base a los planteamientos del método de Dirac para el tratamiento de sistemas singulares, será necesario introducir dos vínculos adicionales, conocidos como condiciones gauge [6, 7]. Motivo por el cual, el análisis canónico de la teoría de MCS se llevará a cabo en el gauge de Coulomb [4, 8, 9].

Nótese que (3.1) se construye como una combinación de la densidad Lagrangiana de Maxwell en $(2+1)$ dimensiones y la densidad Lagrangiana de C-S. Debido a la presencia del tensor de campo electromagnético $F_{\alpha\beta}$, que es invariante bajo la transformación gauge local (1.4), es evidente que el primer sumando de la Lagrangiana de MCS es tambíen invariante bajo este tipo de transformaciones. Análogamente, en el capítulo previo se logro mostrar que pese a que la densidad Lagrangiana de C-S no contiene explicitamente en su estructura al tensor de campo electromagnético $F_{\alpha\beta}$, esta tambíen es invariante gauge local. En virtud a lo mencionado anteriormente, se establece que bajo una transformación de la forma citada en (1.4), la densidad Lagrangiana de la teoría de MCS:

$$\mathscr{L}'_{MCS} = \mathscr{L}_{MCS}, \tag{3.2}$$

es invariante bajo transformaciones gauge locales.

3.1. Formalismo Lagrangiano

La densidad Lagrangiana de esta teoría depende tanto del potencial fundamental A_α como de sus respectivas derivadas espacio-temporales en $(2+1)$ dimensiones. Por consiguiente, el espacio de configuración, para este sistema en particular, es definido por los campos $[A_\alpha, \partial_0 A_\alpha]$ con $\alpha = 0, 1, 2$. El estudio de la teoría de MCS en el formalismo Lagrangiano, requiere de la deducción de las ecuaciones de campo asociadas al potencial A_α. Estas relaciones se encontrarán a partir de las ecuaciones clásicas de Euler-Lagrange propias del sistema, que de acuerdo al principio de Hamilton y las condiciones de frontera del campo fundamental A_α [11, 13] , son dadas por:

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{MCS}}{\partial A_\beta} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}_{MCS}}{\partial \left(\partial_\alpha A_\beta \right)} \right) = 0. \tag{3.3}$$

Para determinar las ecuaciones de campo, se procederá a estudiar cada uno de los términos presentes en la relación anterior. Obsérvese que a partir de (3.1), es posible deducir:

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{MCS}}{\partial A_\beta} = -\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\beta\alpha\gamma} \partial_\gamma A_\alpha. \tag{3.4}$$

Cabe anotar, que esta expresión se dedujo en (2.23) cuando se estudio la teoría de C-S en el formalismo Lagrangiano. De forma similar, el segundo sumando presente en la ecuación de Euler-Lagrange (3.3), se convierte en:

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{MCS}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)} = -\frac{1}{4}\frac{\partial\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\mu\nu\rho}\frac{\partial\left(\partial_\mu A_\nu\right)}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}A_\rho. \tag{3.5}$$

El segundo término de esta ecuación se encontro con anterioridad en (2.24). Luego, resta resolver la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\frac{\partial\left(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\right)}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)} &= -\frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\phi}\left[\frac{\partial\left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu\right)}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}F_{\lambda\phi} + F_{\mu\nu}\frac{\partial\left(\partial_\lambda A_\phi - \partial_\phi A_\lambda\right)}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\right] \\ &= -\frac{1}{4}\eta^{\mu\lambda}\eta^{\nu\phi}\left[\left(\delta^\alpha_\mu\delta^\beta_\nu - \delta^\alpha_\nu\delta^\beta_\mu\right)F_{\lambda\phi} + F_{\mu\nu}\left(\delta^\alpha_\lambda\delta^\beta_\phi - \delta^\alpha_\phi\delta^\beta_\lambda\right)\right] \\ &= -F^{\alpha\beta}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

para el cual se empleo tanto la definición del tensor de campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$ como el caracter antisimétrico del mismo. Reemplazando (2.24) y (3.6) en (3.5) se llega a:

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{MCS}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)} = -F^{\alpha\beta}. \tag{3.7}$$

Finalmente, tras sustituir los resultados encontrados en (3.4) y (3.7) en (3.3), se obtiene que las ecuaciones de campo clásicas de la teoría de MCS son:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}F_{\alpha\gamma} = 0. \tag{3.8}$$

Obsérvese que la invariancia gauge local de estas ecuaciones se ve reflejada de manera natural debido a la presencia explícita del tensor de campo electromagnético $F^{\alpha\beta}$.

3.1.1. Ecuaciones de Maxwell-Chern-Simons

Hasta este punto se ha logrado determinar la ecuación de campo asociada a la teoría de MCS. A partir de esta relación es posible estudiar las ecuaciones de campo electromagnético derivadas como consecuencia del acople del término de C-S a la densidad Lagrangiana de Maxwell en $(2+1)$ dimensiones [5].

1. Ley de Gauss:

   La ley de Gauss para la teoría de MCS se deduce cuando en la ecuación de campo (3.8) el índice β toma el valor particular $\beta = 0$, esto es:

$$-\partial_i F_{i0} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}F_{ij} = 0. \tag{3.9}$$

   Expresión en la que se han expandido los índices α y γ, bajo la consideración de que $\alpha, \gamma = 0, 1, 2$. De la misma manera, se ha empleado el carácter antisimétrico del tensor de campo electromagnético y del tensor de Levi-Civita.

   Bajo las definiciones de campo magnético y campo eléctrico en $(2+1)$ dimensiones, introducidas a partir de las ecuaciones (1.6) y (1.7), se encuentra que la ley de Gauss para le teoría de MCS, es dada por:

$$\nabla \cdot E - \frac{k}{2\pi}B = 0. \tag{3.10}$$

2. Ley de Amper:

   Si por otro lado, en la ecuación de campo (3.8) se considera el valor particular $\beta = i$, se comprueba que:

$$\partial_0 F_{i0} + \partial_i F_{ij} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}F_{j0} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}F_{j0} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{ijm}F_{jm} = 0, \tag{3.11}$$

   en la relación preliminar el término:

$$\varepsilon^{ijm}F_{jm} = 0, \tag{3.12}$$

   es consecuencia de estudiar una teoría en $(2+1)$ dimensiones. Bajo el planteamiento previo, se encuentra que la ecuación (3.11) se simplifica como sigue:

$$\partial_0 F_{i0} + \partial_i F_{ij} + \frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}F_{j0} = 0. \tag{3.13}$$

Expresión, que tras incluir las definiciones de los campos magnético y eléctrico en $(2+1)$ dimensiones dadas en (1.6) y (1.7), se convierte en:

$$\dot{E}_i + (\nabla \times B)_i + \frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}E_j = 0. \tag{3.14}$$

3. Ley de Faraday:

Con el propósito de deducir la ley de Faraday para le teoría de MCS, se usará la siguiente identidad (demostrada en el **Apéndice B):**

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0.$$

Tras considerar la antisimetría del tensor de Levi-Civita, la relación previa se reescribirá de la siguiente manera:

$$\varepsilon^{0ij}\partial_0 F_{ij} + \varepsilon^{i0j}\partial_i F_{0j} + \varepsilon^{ij0}\partial_i F_{j0} + \varepsilon^{ijm}\partial_i F_{jm} = 0.$$

Debido al carácter antisimétrico del tensor de Levi-Civita, el último sumando de esta ecuación es nulo (véase **Apéndice B)**, razón por la cual se deduce:

$$\varepsilon_{ij}\partial_0 F_{ij} + \varepsilon_{ij}\partial_i F_{j0} + \varepsilon_{ij}\partial_i F_{j0} = 0. \tag{3.15}$$

Finalmente, en términos del campo magnético y el campo eléctrico, se encuentra que la ley de Faraday en la teoría de MCS presenta la forma mostrada a continuación:

$$\dot{B} + \nabla \times E = 0. \tag{3.16}$$

Nótese que debido a que la teoría de MCS se restringe al espacio-tiempo de $(2+1)$ dimensiones, no se ha obtenido una ecuación análoga a la ley de Gauss para el campo magnético.

3.1.2. Término topológico de masa asociado a fotones

Una de las características más relevantes de la teoría de MCS, es la aparición de una masa topológica asociada al campo fundamental A_α que surge del acople del término de C-S a la densidad Lagrangiana de campo electromagnético libre en $(2+1)$ dimensiones. La manera más directa de observar la aparición de la masa topológica del sistema, es reescribiendo la ecuación de campo (3.8) en términos del vector dual del tensor de campo electromagnético [2, 5], que es definido por:

$$\widetilde{F}^{\mu} \equiv \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}. \tag{3.17}$$

El tensor de campo electromagnético $F_{\alpha\beta}$ puede expresarse en términos de su dual, si se multiplica a ambos lados de la relación previa por el tensor $\varepsilon_{\mu\alpha\gamma}$, hecho esto se encuentra que:

$$F^{\alpha\beta} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\widetilde{F}_{\gamma}. \tag{3.18}$$

A continuación, se procederá a sustituir tanto la definición de tensor dual (3.17) como la ecuación (3.18) en la ecuación de campo (3.8):

$$\left(\eta^{\alpha\beta} + \frac{2\pi}{k}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_{\gamma}\right)\widetilde{F}_{\beta} = 0. \tag{3.19}$$

Cabe anotar, que para la obtención de este resultado, se ha empleado la métrica de Minkowski en $(2+1)$ dimensiones y la antisimetría del tensor de Levi-Civita. Si ahora, se multiplica la relación previa, a ambos lados, por el término $\left(\eta_{\mu\alpha} - \frac{2\pi}{k}\varepsilon_{\mu\alpha\lambda}\partial^{\lambda}\right)$, se obtiene que:

$$\eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\beta}\widetilde{F}_{\beta} + \frac{2\pi}{k}\eta_{\mu\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_{\gamma}\widetilde{F}_{\beta} - \frac{2\pi}{k}\eta^{\alpha\beta}\varepsilon_{\mu\alpha\lambda}\partial^{\lambda}\widetilde{F}_{\beta} - \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{2}\varepsilon_{\mu\alpha\lambda}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial^{\lambda}\partial_{\gamma}\widetilde{F}_{\beta} = 0. \tag{3.20}$$

En virtud a las propiedades de la métrica de Minkowski en $(2+1)$ dimensiones (véase **Apéndice A)**, es posible deducir las siguientes expresiones:

$$\eta_{\mu\alpha}\eta^{\alpha\beta} = \delta^{\beta}_{\mu}, \tag{3.21}$$

$$\eta^{\alpha\beta}\widetilde{F}_{\beta} = \widetilde{F}^{\alpha}. \tag{3.22}$$

De la misma manera, el factor presente en el segundo sumando de (3.20) es equivalente a:

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\alpha}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_{\gamma}\widetilde{F}_{\beta} &= \eta^{\alpha}_{\mu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial^{\gamma}\widetilde{F}^{\beta} \\ &= \varepsilon_{\mu\alpha\lambda}\partial^{\lambda}\widetilde{F}^{\alpha}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Por otro lado el producto tensorial $\varepsilon_{\mu\alpha\lambda}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ puede ser escrito del siguiente modo:

$$\varepsilon_{\mu\alpha\lambda}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = -\varepsilon_{\mu\lambda\alpha}\varepsilon^{\beta\gamma\alpha} = -\left(\delta^{\beta}_{\mu}\delta^{\gamma}_{\lambda} - \delta^{\beta}_{\lambda}\delta^{\gamma}_{\mu}\right). \tag{3.24}$$

Es importante mencionar que en la ecuación anterior se han empleado las reglas de contracción del tensor de Levi-Civita en $(2+1)$ dimensiones (véase **Apéndice A).** Reemplazando los resultados deducidos en las ecuaciones (3.21) a (3.24) en la relación (3.20), se verifica que la ecuación de campo de la teoría MCS, se convierte en:

$$\widetilde{F}_{\mu} + \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \partial^{\lambda}\partial_{\lambda}\widetilde{F}_{\mu} - \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \partial_{\mu}\partial_{\lambda}\widetilde{F}^{\lambda} = 0. \tag{3.25}$$

Nótese ahora que (véase **Apéndice B**):

$$\begin{aligned} \partial_{\mu}\widetilde{F}^{\mu} &= \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\alpha\beta}\partial_{\mu}F_{\alpha\beta} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Reemplazando este resultado en (3.25), se encuentra que la ecuación de campo para la teoría de MCS en términos del vector dual $\widetilde{F}_{\mu}$ es dada por:

$$\left(\Box + u^2\right)\widetilde{F}_{\mu} = 0, \tag{3.27}$$

donde se ha introducido el operador DÁlembertiano en $(2+1)$ dimensiones definido como $\Box \equiv \partial^{\lambda}\partial_{\lambda}$ con $\lambda = 0, 1, 2$. Y donde se ha denotado

$$u \equiv \frac{k}{2\pi}. \tag{3.28}$$

Se puede observar que (3.27) se interpreta como la ecuación de Klein-Gordon para un campo vectorial de masa u [11]. Por ende, se afirma que las componentes del vector dual $\widetilde{F}_{\mu}$ se propagan como campos libres de masa u.

Es evidente entonces, que tras la adición del término de C-S a la teoría de Maxwell en $(2+1)$ dimensiones, ha surgido un término topológico de masa asociado a los fotones descritos por el campo A_{α}.

3.2. Formalismo Hamiltoniano

Dentro del estudio clásico de la teoría de MCS en el formalismo Hamiltoniano, se busca determinar las ecuaciones de Hamilton para el sistema. No obstante, el análisis canónico de esta teoría en particular, se enfocará tambíen en la deducción de los PD fundamentales entre los grados de libertad inducidos por los vínculos que surgen de la misma.

En el formalismo Lagrangiano, la teoría se estudia en un espacio definido por el campo fundamental A_α y sus derivadas espacio-temporales en $(2+1)$ dimensiones. Por otro lado, el formalismo Hamiltoniano efectuará el análisis clásico del sistema en un espacio de fase definido por el par canónico $[A_\alpha, \pi^\alpha]$ con $\alpha = 0,1,2$, siendo π^α el momento canónico conjugado al campo A_α, que es definido por [11, 12]:

$$\pi^\beta = \pi^\beta(\boldsymbol{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathscr{L}_{MCS}}{\partial\left(\partial_0 A_\beta\right)} = F^{\beta 0} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0\beta\gamma}A_\gamma. \tag{3.29}$$

Es válido indicar que para el desarrollo matemático previo, basto con hacer $\alpha = 0$ en la expresión (3.7) y emplear la antisimetría del tensor de campo electromagnético y del tensor de Levi-Civita. Obsérvese que para el valor particular $\beta = 0$, la componente temporal del campo canónico (3.29) es:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= F^{00} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{00\gamma}A_\gamma \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.30}$$

De la misma manera, haciendo $\beta = i$ en (3.29), se verifica:

$$\pi_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j, \tag{3.31}$$

donde se ha empleado la definición del tensor de campo electromagnético dada en (1.2). A su vez, de la definición (1.6) se puede apreciar que para la teoría de MCS el campo eléctrico presenta la siguiente estructura:

$$E_i = \pi_i + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j. \tag{3.32}$$

A partir de las ecuaciones (3.30) y (3.31), es posible apreciar que apenas la componente espacial del campo π^β presenta derivadas temporales del potencial A_α. Por ende, se concluye que la relación (3.31), concerniente a la componente temporal del momento π^β, es un vínculo primario [6, 7, 8] que se denotará del siguiente modo:

$$\pi_0 \approx 0. \tag{3.33}$$

Una vez definido el momento canónico asociado al campo A_α, es ahora de interés construir, mediante una transformación de Legendre [12], la densidad Hamiltoniana canónica de la teoría. Dicha cantidad física, vendrá definida por:

$$\mathscr{H}_{c(MCS)} = \partial_0 A_\beta \pi^\beta - \mathscr{L}\left[A_\beta, \partial_\alpha A_\beta\right]. \tag{3.34}$$

Mediante la estructura de la densidad Lagrangiana de MCS (3.1) y del momento canónico asociado al campo A_α (3.29), es posible expresar la densidad Hamiltoniana canónica como sigue:

$$\mathscr{H}_{c(MCS)} = \partial_0 A_\beta \pi^\beta + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left(\partial_\alpha A_\beta\right) A_\gamma. \tag{3.35}$$

Usando los siguientes resultados (deducidos en el **Apéndice H**):

$$\begin{aligned}
\partial_0 A_\beta \pi^\beta &\approx -\pi_i \partial_i A_0 + \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} \pi_i A_j + \pi_i \pi_i, && (3.36)\\
\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2}\left[\pi_i + \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} A_j\right]^2 + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\right)^2, && (3.37)\\
\frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_\alpha A_\beta\right) A_\gamma &= -\frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} \pi_i A_j - \left(\frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} A_j\right)^2 + \frac{k}{4\pi} A_0 \varepsilon_{ij} \partial_i A_j, && (3.38)
\end{aligned}$$

se encuentra, por tanto, que la densidad Hamiltoniana canónica para la teoría de MCS, presenta la siguiente forma:

$$\mathscr{H}_{c(MCS)} \approx \frac{1}{2}\left[\pi_i + \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} A_j\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\right]^2 - \pi_i \partial_i A_0 - \frac{k}{4\pi} A_0 \varepsilon_{ij} \partial_i A_j. \tag{3.39}$$

En base a esto, se obtiene que el Hamiltoniano canónico de la teoría de MCS en $(2+1)$

dimensiones es dado por:

$$\begin{aligned} H_{c(MCS)} &= \int d^2x \mathscr{H}_{c(MCS)} \\ &\approx \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[\pi_i + \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} A_j \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{ij} \partial_i A_j \right]^2 - \pi_i \partial_i A_0 - \right. \\ & \left. \frac{k}{4\pi} A_0 \varepsilon_{ij} \partial_i A_j \right\}. \end{aligned} \tag{3.40}$$

Se puede escribir el segundo sumando de la relación anterior de la manera que prosigue:

$$\pi_i \partial_i A_0 = \partial_i \left(\pi_i A_0 \right) - A_0 \partial_i \pi_i .$$

Tras reemplazar este resultado en el Hamiltoniano canónico (3.40) se llega a:

$$\begin{aligned} H_{c(MCS)} &\approx \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[\pi_i + \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} A_j \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{ij} \partial_i A_j \right]^2 + A_0 \left(\partial_i \pi_i - \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} \partial_i A_j \right) \right\} - \\ & \int d^2x \partial_i \left(\pi_i A_0 \right) \\ &\approx \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[\pi_i + \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} A_j \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{ij} \partial_i A_j \right]^2 + A_0 \left(\partial_i \pi_i - \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} \partial_i A_j \right) \right\} - \\ & \oint dr_i \left(\pi_i A_0 \right). \end{aligned}$$

Donde se ha aplicado el teorema de Gauss en dos dimensiones, para llevar la integral de superficie del segundo sumando a una integral de camino realizada sobre el contorno de una superficie que se extiende hacia el infinito. Luego, de la condición de frontera (2.9) se concluye que el Hamiltoniano canónico de la teoría de MCS es:

$$\begin{aligned} H_{c(MCS)} \approx & \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \left[\pi_i + \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} A_j \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\varepsilon_{ij} \partial_i A_j \right]^2 + \right. \\ & \left. A_0(\boldsymbol{x}, t) \left[\partial_i \pi_i - \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} \partial_i A_j \right] \right\}. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Considerando que la teoría en análisis es una teoría con vínculos, el método de Dirac establece que es posible construir el Hamiltoniano primario del sistema si se añade una combinación lineal de los vínculos primarios que este posea [6, 7, 8]. Como para este caso se cuenta apenas con el vínculo π_0, el Hamiltoniano primario de la teoría de MCS, vendrá dado por:

$$H_{p(MCS)} \equiv H_{c(MCS)} + \int d^2x \lambda_0 \left(\boldsymbol{x}, t \right) \pi_0 \left(\boldsymbol{x}, t \right), \tag{3.42}$$

donde el multiplicador de Lagrange $\lambda_0(\boldsymbol{x},t)=\lambda_0$, es una función arbitraria del espacio y del tiempo.

Como se menciono anteriormente, el espacio de fase del sistema en consideración está definido por los campos $[A_\alpha,\pi^\alpha]$. Por consiguiente, los PP para la teoría de MCS se calcularán a partir de la definición (2.37) llevada a cabo en el estudio de la teoría de C-S pura. Del mismo modo, los PP fundamentales para esta teoría serán equivalentes a los deducidos previamente en las relaciones (2.38) y (2.39).

3.2.1. Análisis de consistencia de vínculos

Hasta este punto, se ha logrado determinar que la teoría de MCS tiene un vínculo primario dado por la relación (3.33). Con la finalidad de que el análisis canónico de la teoría sea consistente, se debe garantizar que este vínculo se conserve durante la evolución dinámica del sistema [6, 7, 8] , es decir, que se debe cumplir el siguiente criterio de consistencia:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_0 &= \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),H_{p(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &= \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),H_{c(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\}+\int d^2y\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned}\tag{3.43}$$

Tomando como base la estructura del Hamiltoniano canónico deducido en la anterior sección y el PP fundamental (2.38), se puede deducir el siguiente término:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),H_{c(MCS)}\right\} &\approx \int d^2y\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),A_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\left[\partial_i\pi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_iA_j(\boldsymbol{y},t)\right]\\ &\approx -\left[\partial_i\pi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_iA_j(\boldsymbol{x},t)\right].\end{aligned}\tag{3.44}$$

Del mismo modo, a partir de los PP fundamentales se encuentra inmediatamente que:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned}\tag{3.45}$$

Por consiguiente, al sustituir (3.44) y (3.45) en (3.43), se puede apreciar que el requerimiento de consistencia del vínculo primario π_0 da como resultado:

$$\dot{\pi}_0(\boldsymbol{x},t) = -\left[\partial_i \pi_i(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t)\right] \approx 0, \tag{3.46}$$

ecuación que como se puede observar, manifiesta nuevamente relaciónes entre las variables del espacio de fase. Por este motivo y teniendo encuenta que (3.46) ha surgido del requerimiento de consistencia del vínculo primario (3.33), se afirma que se trata de un vínculo secundario [6, 7, 8] y que se denotará como sigue:

$$G = G(\boldsymbol{x},t) \equiv \partial_i \pi_i(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{3.47}$$

La ecuación previa puede ser expresada en términos del campo electrico y el campo magnético, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \partial_i^x \pi_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t) &\approx 0 \\ \nabla \cdot E(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{2\pi}B(\boldsymbol{x},t) &\approx 0, \end{aligned}$$

que es equivalente a la relación (3.10) que denota la ley de Gauss de la teoría de MCS [4, 9]. Dado que la teoría tiene ahora un nuevo vínculo, se debe analizar la consistencia del mismo. Tal procedimiento además de garantizar que el vínculo se conserve durante la evolución dinámica del sistema, permitirá especificar la existencia de nuevos vínculos. Matemáticamente lo mencionado se traduce como:

$$\begin{aligned} \dot{G}(x) &= \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), H_{p(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &= \left\{G(\boldsymbol{x},t), H_{c(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\} + \int d^2y \left\{G(\boldsymbol{x},t), \lambda_0(\boldsymbol{y},t)\pi_0(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx 0. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Para la resolución del anterior término, se tendrá en cuenta el siguiente PP (resuelto en el **Apéndice I**):

$$\left\{G(\boldsymbol{x},t), H_{c(MCS)}\right\} \approx 0. \tag{3.49}$$

De forma análoga, empleando tanto la forma de la ley de Gauss de la teoría (3.47) y los PP fundamentales, se demuestra que:

$$\left\{G(\boldsymbol{x},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx 0, \tag{3.50}$$

resultado que permite deducir el siguiente término:

$$\begin{aligned}\left\{G(\boldsymbol{x},t),\lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &= \lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{G(\boldsymbol{x},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned} \tag{3.51}$$

Sustituyendo los razonamientos efectuados previamente en (3.49) y (3.51) en la relación (3.48), se concluye que el requerimiento de consistencia del vínculo G, es en efecto debilmente igual a cero:

$$\dot{G}(\boldsymbol{x},t)\approx 0. \tag{3.52}$$

La deducción preliminar permite establecer que el análisis de la ley de Gauss de la teoría de MCS, no generá más vínculos. Por consiguiente, hasta este punto, el conjunto completo de vínculos de la teoría está conformado por un vínculo primario y un secundario:

$$\begin{cases}\pi_0(\boldsymbol{x},t)\approx 0\\ G(\boldsymbol{x},t)=\partial_i\pi_i(\boldsymbol{x},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t)\approx 0\end{cases}$$

3.2.2. Clasificación de vínculos de primera y segunda clase

El siguiente paso en el análisis canónico de la teoria de MCS, consiste en clasificar el conjunto de vínculos del sistema en vínculos de primera o segunda clase [6, 7, 8]. Bajo los planteamientos del método de Dirac, tal clasificación se efectúa en razón a los PP calculados entre los vínculos de la teoría, de manera que, un vínculo será de primera clase siempre que su PP con cada vínculo del conjunto se anule debilmente, de no cumplirse esta condición, se dice que el vínculo es de segunda clase.

En virtud a los PP fundamentales y al PP determinado anteriormente en (3.50), se puede establecer que el vínculo π_0 es de primera clase. Análogamente, con el propósito de determinar si el vínculo G es de primera o segunda clase, es importante tener en cuenta el siguiente PP (véase **Apéndice I**):

$$\left\{G(\boldsymbol{x},t), G\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0. \tag{3.53}$$

De acuerdo con el resultado previo y la ecuación (3.50), se concluye que el vínculo G es también de primera clase.

3.2.3. Hamiltoniano extendido y dinámica en el espacio de fase completo

Se ha logrado establecer que la teoría de MCS posee un conjunto de dos vínculos de primera clase, este tipo de vínculos se caracteriza por generar transformaciones de equivalencia entre las variables empleadas para describir la dinámica del sistema [6, 7, 8], situación que implica que la evolución temporal de una variable determinada no puede ser fijada unívocamente. No obstante, es posible construir el Hamiltoniano extendido de la teoría del siguiente modo:

$$H_{E(MCS)} \equiv H_{c(MCS)} + \int d^2x \left[\lambda_1(\boldsymbol{x},t)\phi_1(\boldsymbol{x},t) + \lambda_2(\boldsymbol{x},t)\phi_2(\boldsymbol{x},t)\right], \tag{3.54}$$

donde se ha denotado:

$$\phi_1(\boldsymbol{x},t) \equiv \pi_0(\boldsymbol{x},t) \approx 0, \tag{3.55}$$

$$\phi_2(\boldsymbol{x},t) \equiv \partial_i^x \pi_i(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{3.56}$$

Nótese que la arbitrariedad en la dinámica, impuesta por los vínculos de primera clase se ve reflejada en los multiplicadores de Lagrange $\lambda_1(\boldsymbol{x},t)$ y $\lambda_2(\boldsymbol{x},t)$. De acuerdo a la conjetura de Dirac [6, 7, 8], la expresión (3.54) define la dinámica de cualquier campo en el espacio de fase completo. Así pues, la evolución temporal de una variable del espacio de fase $F(\boldsymbol{x},t) \equiv F(A_\alpha, \pi^\alpha)$ vendrá dada por el siguiente PP:

$$\dot{F}(\boldsymbol{x},t) = \left\{F(\boldsymbol{x},t), H_{E(MCS)}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}. \tag{3.57}$$

Con el objeto de observar la arbitrariedad que implica la presencia de vínculos de primera clase en la teoría de MCS, se procederá a determinar la evolución temporal de los campos canónicos $[A_\alpha, \pi^\alpha]$. A partir del Hamiltoniano extendido (3.54), los vínculos de primera clase (3.55), (3.56) y los PP fundamentales es posible deducir:

$$\dot{A}_0 \approx \lambda_1 (\boldsymbol{x}, t)\,. \tag{3.58}$$

Análogamente, de (3.57) se establece que la evolución temporal de la componente espacial del campo fundamental A_i es dada por:

$$\begin{aligned}\dot{A}_i (\boldsymbol{x}, t) &\approx \left\{A_i (\boldsymbol{x}, t), H_{E(MCS)} \left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} \\ &\approx \left\{A_i (\boldsymbol{x}, t), H_{c(MCS)} \left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} + \int d^2 y \left[\lambda_1 \left(\boldsymbol{y}, t\right) \left\{A_i (\boldsymbol{x}, t), \phi_1 \left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} + \right. \\ &\left. \lambda_2 \left(\boldsymbol{y}, t\right) \left\{A_i (\boldsymbol{x}, t), \phi_2 \left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\}\right].\end{aligned} \tag{3.59}$$

Usando los PP fundamentales y los siguientes resultados deducidos en el **Apéndice I:**

$$\begin{aligned}\left\{A_i (\boldsymbol{x}, t), H_{c(MCS)} \left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} &\approx -\pi_i (\boldsymbol{x}, t) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} A_j (\boldsymbol{x}, t) + \partial_i^x A_0 (\boldsymbol{x}, t)\,, \\ \left\{A_i (\boldsymbol{x}, t), \phi_2 \left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} &\approx \partial_i^x \delta^2 \left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\right),\end{aligned} \tag{3.60}$$

se encuentra que (3.59) da como resultado:

$$\dot{A}_i (\boldsymbol{x}, t) \approx -\pi_i (\boldsymbol{x}, t) - \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} A_j (\boldsymbol{x}, t) + \partial_i^x A_0 (\boldsymbol{x}, t) + \partial_i^x \lambda_2 (\boldsymbol{x}, t)\,. \tag{3.61}$$

Por otra parte, a partir de (3.44), (3.57) y los PP fundamentales se puede establecer que:

$$\dot{\pi}_0 (\boldsymbol{x}, t) \approx -\partial_i^x \pi_i (\boldsymbol{x}, t) + \frac{k}{4\pi} \varepsilon_{ij} \partial_i^x A_j (\boldsymbol{x}, t). \tag{3.62}$$

Mientras que la evolución temporal de la componente espacial del momento canónico es dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_i (\boldsymbol{x}, t) &\approx \left\{\pi_i (\boldsymbol{x}, t), H_{E(MCS)} \left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} \\ &\approx \left\{\pi_i (\boldsymbol{x}, t), H_{c(MCS)} \left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} + \int d^2 y \left[\lambda_1 \left(\boldsymbol{y}, t\right) \left\{\pi_i (\boldsymbol{x}, t), \phi_1 \left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} + \right. \\ &\left. \lambda_2 \left(\boldsymbol{y}, t\right) \left\{\pi_i (\boldsymbol{x}, t), \phi_2 \left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\}\right],\end{aligned} \tag{3.63}$$

expresión que en base a los siguientes resultados deducidos en el **Apéndice I:**

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),H_{c(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\pi_j(\boldsymbol{x},t)+2\left(\frac{k}{4\pi}\right)^2\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\\ &\quad+\partial_j^x F_{ij}(\boldsymbol{x},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t), \qquad (3.64)\\ \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_2(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\lambda_2(\boldsymbol{y},t)\,\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \qquad (3.65)\end{aligned}$$

se reduce a:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_i(\boldsymbol{x},t) &\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\pi_j(\boldsymbol{x},t)+2\left(\frac{k}{4\pi}\right)^2 A_i(\boldsymbol{x},t)+\partial_j^x F_{ij}(\boldsymbol{x},t)\\ &\quad-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\lambda_2(\boldsymbol{x},t). \qquad (3.66)\end{aligned}$$

De este modo, se concluye que la evolución temporal de los campos canónicos $[A_\alpha,\pi^\alpha]$ en teoría de MCS, calculada a partir de la ecuación de Hamilton (3.57), viene dada por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c}\dot{A}_0\approx\lambda_1(\boldsymbol{x},t)\\ \dot{A}_i(\boldsymbol{x},t)\approx-\pi_i(\boldsymbol{x},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)+\partial_i^x A_0(\boldsymbol{x},t)+\partial_i^x\lambda_2(\boldsymbol{x},t)\\ \dot{\pi}_0(\boldsymbol{x},t)\approx-\partial_i^x\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t)\\ \dot{\pi}_i(\boldsymbol{x},t)\approx-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\pi_j(\boldsymbol{x},t)+2\left(\frac{k}{4\pi}\right)^2 A_i(\boldsymbol{x},t)+\partial_j^x F_{ij}(\boldsymbol{x},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\lambda_2(\boldsymbol{x},t)\end{array}\right.$$

Nótese que las ecuaciones de Hamilton previas son expresadas en términos de igualdades debiles, del mismo modo, la presencia de multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase, permite inferir que existe arbitrariedad en la dinámica de los campos canónicos.

A continuación se procederá se escribir las ecuaciones de Hamilton de forma más compacta. Teniendo en cuenta que π_0 es un vínculo, se puede apreciar que (3.62) se anula debilmente, es decir:

$$-\partial_i^x\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t)\approx 0, \qquad (3.67)$$

que a partir de la definición de momento canónico (3.31) y de la antisimetría del tensor de campo electromagnético, puede reescribirse como se muestra a continuación:

$$\partial_i^x F_{0i}(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{3.68}$$

La anterior ecuación es debilmente equivalente a la ecuación de campo (3.8) para $\beta = 0$. Por otro lado, reemplazando la definición de momento canónico (3.31) en la ecuación de Hamilton (3.61) se deduce que:

$$\partial_i^x \lambda_2(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{3.69}$$

Sustituyendo (3.31) y (3.69) en (3.66) se llega a la siguiente expresión:

$$\dot{\pi}_i(\boldsymbol{x},t) \approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}F_{j0} + \partial_j^x F_{ij}(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t). \tag{3.70}$$

Sin embargo, a partir de la definición (3.31) se determina que:

$$\dot{\pi}_i(\boldsymbol{x},t) = \partial_0 F_{i0}(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_0 A_j(\boldsymbol{x},t), \tag{3.71}$$

tras igualar (3.70) y (3.71) se obtiene el resultado que se muestra a continuación:

$$\partial_0 F_{i0}(\boldsymbol{x},t) + \partial_i^x F_{ij}(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}F_{j0}(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{3.72}$$

Relación que equivale debilmente a la ecuación de campo (3.8) para el valor $\beta = i$. En base los resultados deducidos en (3.68) y (3.72) se concluye que las ecuaciones de Hamilton de la teoría de MCS son debilmente equivalentes a las ecuaciones de campo obtenidas en el formalismo Lagrangiano, es decir:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}F_{\alpha\gamma} \approx 0. \tag{3.73}$$

3.2.4. Tratamiento de vínculos de primera clase y condiciones gauge

Los vínculos de primera clase requieren de un tratamiento particular, pues son generadores de transformaciones gauge. En base al método de Dirac, estos deben ser transformardos en vínculos de segunda clase, procedimiento que se logra incluyendo condiciones gauge en razón al número de vínculos de primera clase presentes en el sistema [6, 7, 8].

Previamente se determinó que la teoría de MCS posee un total de dos vínculos de primera clase. Por consiguiente, el análisis canónico de la misma se llevará a cabo en el gauge de Coulomb convencional [8, 11], el cual es definido por la condición:

$$\phi_4\left(\boldsymbol{x},t\right) \equiv \partial_i^x A_i\left(\boldsymbol{x},t\right) \approx 0. \tag{3.74}$$

Dado que es necesaria una condicion gauge adicional, esta se deducirá del requerimiento de consistencia del vínculo (3.74). Es importante resaltar, que tal análisis de consistencia se fijará a partir del PP entre el gauge de Coulomb y el Hamiltoniano canónico de MCS, luego, habrá que resolver:

$$\dot{\phi}_4 = \left\{\phi_4\left(\boldsymbol{x},t\right), H_{c(MCS)}\right\} \approx 0. \tag{3.75}$$

Este PP da como resultado la siguiente ecuación (véase **Apendice I**):

$$\partial_i^x\partial_i^x A_0\left(\boldsymbol{x},t\right) - \partial_i^x\left[\pi_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right] \approx 0. \tag{3.76}$$

Nótese que esta expresión se trata de un vínculo, pues expresa relaciones entre las variables del espacio de fase. La ecuación (3.76) será entonces la segunda condición gauge que se incluirá para el estudio de la teoría de MCS. Hecho esto, el conjunto de vínculos del sistema estará conformado por:

$$\begin{aligned}
\phi_1\left(\boldsymbol{x},t\right) &\equiv \pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right) \approx 0, && (3.77)\\
\phi_2\left(\boldsymbol{x},t\right) &\equiv \partial_i^x\pi_i\left(\boldsymbol{x},t\right) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t) \approx 0, && (3.78)\\
\phi_3\left(\boldsymbol{x},t\right) &\equiv \partial_i^x\partial_i^x A_0\left(\boldsymbol{x},t\right) - \partial_i^x\left[\pi_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right] \approx 0, && (3.79)\\
\phi_4\left(\boldsymbol{x},t\right) &= \partial_i^x A_i\left(\boldsymbol{x},t\right) \approx 0. && (3.80)
\end{aligned}$$

Es posible mostrar que los únicos PP no nulos entre los vínculos (3.77) a (3.80) (véase **Apendice I**) son:

$$\begin{aligned}
\left\{\phi_1\left(\boldsymbol{x},t\right), \phi_3\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx -\nabla_x^2\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right), && (3.81)\\
\left\{\phi_4\left(\boldsymbol{x},t\right), \phi_2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \nabla_x^2\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right), && (3.82)
\end{aligned}$$

donde ∇_x^2 es el operador Laplaciano en dos dimensiones. Se puede apreciar que la inclusión de las condiciones gauge (3.79) y (3.80) al análisis canónico de la teoría de MCS, efectivamente ha permitido obtener un conjunto constituido por cuatro vínculos de segunda clase.

Los vínculos ϕ_l con $l = 1, ..., 4$, indican que existe un determinado número de grados de libertad en el sistema. Sin embargo, estos no proporcionan noción alguna de las variables del espacio de fase que serán independientes. Con el objetivo de construir PP fundamentales que sean consistentes con los vínculos de la teoría de MCS, se recurrirá a la definición de PD, bajo la consideración de que el espacio de fase está definido por el par canónico $[A_\alpha, \pi^\alpha]$ con $\alpha = 0, 1, 2$.

Sean $M(\boldsymbol{x}, t) \equiv M(A_\alpha, \pi^\alpha)$ y $N(\boldsymbol{x}, t) \equiv N(A_\alpha, \pi^\alpha)$ dos variables dinámicas arbitrarias del espacio de fase, se define el PD en tiempos iguales entre ellas por:

$$\begin{aligned}\left\{M(\boldsymbol{x},t), N\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D \quad \equiv \quad & \left\{M(\boldsymbol{x},t), N\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{M(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}\right. \\ & \left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), N(\boldsymbol{x},t)\right\}\right], \end{aligned} \tag{3.83}$$

donde $C^{-1}_{lm}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ es la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase $C_{lm}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$, la cual definida por las siguientes componentes:

$$C_{lm}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \equiv \left\{\phi_l(\boldsymbol{x},t), \phi_m\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}, \tag{3.84}$$

con $l, m = 1, ..., 4$. Empleando los PP deducidos en el **Apéndice I**, se determina que $C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ presenta la forma matricial mostrada a continuación:

$$C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla^2_x \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{3.85}$$

No obstante, la definición de PD (3.83) está definida en términos de la inversa de la matriz de vínculos. Para determinar la estructura de $C^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ se hará uso de la siguiente condición [8]:

$$\int d^2z C_{lr}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}) C^{-1}_{rm}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) = \delta_{lm}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{3.86}$$

Tras efectuar los cálculos pertinentes (observar **Apéndice J**), se verifica que $C^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ presenta la siguiente forma:

$$C^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{3.87}$$

Matriz en la que:

$$F\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)=\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)=\frac{1}{4\pi}\ln\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)^2,$$

es la función de Green asociada al operador Laplaciano en dos dimensiones [7].

Antes de determinar los PD fundamentales para la teoría de MCS, es indispensable tener en cuenta que en base a la definición de PD (3.83), los vinculos del sistema se convierten en igualdades fuertes, esto es:

$$\begin{aligned} \pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right) &= 0, && (3.88)\\ \partial_i^x\pi_i\left(\boldsymbol{x},t\right)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j\left(\boldsymbol{x},t\right) &= 0, && (3.89)\\ \partial_i^x\partial_i^x A_0\left(\boldsymbol{x},t\right)-\partial_i^x\left[\pi_i\left(\boldsymbol{x},t\right)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j\left(\boldsymbol{x},t\right)\right] &= 0, && (3.90)\\ \partial_i^x A_i\left(\boldsymbol{x},t\right) &= 0. && (3.91) \end{aligned}$$

El espacio de fase del sistema esta en principio constituido por seis campos. No obstante, el sistema posee cuatro vínculos de segunda clase, resultado del análisis canónico de la teoría de MCS en el gauge de Coulomb. Por lo tanto, se puede determinar que la teoría tendrá apenas dos grados de libertad que pueden ser elegidos arbitrariamente, pues los vínculos dan noción de la existencia de variables independientes más no especifican de cuales se tratan. Luego, para este caso en particular, se calcularán los PD entre las variables $\left[A_i,\pi^i\right]$ con $i=1,2$.

Inicialmente, de la definición (3.83), se encontrará:

$$\begin{aligned} \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}\right. \\ & \left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{3.92}$$

Utilizando el siguiente resultado (véase **Apéndice I**):

$$\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\} \approx \begin{cases} \partial^x_i \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \text{ si } l=2 \\ -\partial^x_i \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \text{ si } l=3 \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases} \tag{3.93}$$

Se esperaría que la integral presente en el segundo sumando de (3.92) sea diferente de cero, para los valores $l,m=2,3$. Sin embargo, de la matriz (3.87), se observa que para estos valores particulares $C_{lm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$. Por este motivo, el PD (3.92) se reduce a:

$$\begin{aligned} \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.94}$$

Similarmente, empleando la definición (3.83), se resolverá el siguiente PD:

$$\begin{aligned} \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}\right. \\ & \left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), \pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{3.95}$$

A partir de la expresión (3.93) y del siguiente PP (véase **Apéndice I**):

$$\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), \pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx \begin{cases} -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial^y_i \delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}) \text{ si } m=2,3 \\ \partial^y_j \delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}) \quad \text{ si } m=4 \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases} \tag{3.96}$$

Se puede apreciar que en principio, la integral presente en el segundo sumando de (3.95) arrojaría valores no nulos siempre que $l=2,3$ y $m=2,3,4$. No obstante, de la estructura (3.87) es posible observar que para estos valores particulares, la única componente distinta de cero ocurre cuando $l=2$ y $m=4$. Por lo tanto, el PD (3.95), se reduce a:

$$\begin{aligned} \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_2(\boldsymbol{u},t)\right\}\right. \\ & \left. C^{-1}_{24}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_4(\boldsymbol{v},t), \pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\right] \\ &= -\left(\delta_{ij} - \partial^x_i \partial^x_j \frac{1}{\nabla^2_x}\right) \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \end{aligned} \tag{3.97}$$

donde se han empleado las ecuaciones (3.93), (3.96), (3.95). La expresión al lado derecho de (3.98) se conoce como la función delta transversal [4].

Finalmente, resta determinar el siguiente PD:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D &= \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}\right. \\ &\quad \left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Según la expresión (3.96) y el siguiente PP, (determinado en el **Apéndice I):**

$$\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\} \approx \begin{cases} -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial^x_j\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \text{ si } m=2,3 \\ -\partial^x_i\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \quad \text{si } m=4 \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases} \tag{3.99}$$

la integral presente en el segundo sumando de (3.98) sería no nula siempre que $l,m = 2,3,4$. No obstante, si se observa ahora la forma de la matriz deducida previamente en (3.87), se puede verificar que solo las componentes matriciales $C^{-1}_{24}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ y $C^{-1}_{42}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ son diferentes de cero. Bajo este razonamiento, (3.98) se reduce a:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D &= \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_2(\boldsymbol{u},t)\right\}\right. \\ &\quad C^{-1}_{24}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_4(\boldsymbol{v},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_4(\boldsymbol{u},t)\right\}\right. \\ &\quad \left. C^{-1}_{42}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\right] \\ &= \frac{k}{4\pi}\left(\varepsilon_{mi}\partial^x_m\partial^x_j - \varepsilon_{mj}\partial^x_m\partial^x_i\right)\frac{1}{\nabla^2_x}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \end{aligned} \tag{3.100}$$

En conclusión el conjunto completo de PD fundamentales de la teoría de MCS es:

$$\begin{cases} \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D = 0 \\ \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D = -\left(\delta_{ij} - \partial^x_i\partial^x_j\frac{1}{\nabla^2_x}\right)\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right) \\ \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D = \frac{k}{4\pi}\left(\varepsilon_{mi}\partial^x_m\partial^x_j - \varepsilon_{mj}\partial^x_m\partial^x_i\right)\frac{1}{\nabla^2_x}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right) \end{cases}$$

Se puede comprobar que los PD definidos por (3.83) cumplen las mismas propiedades que los PP [8].

3.2.5. Ecuaciones de Hamilton

El tratamiento del conjunto total de vínculos de la teoría de MCS ha permitido determinar que esta posee apenas dos grados de libertad que pueden seleccionarse de manera arbitraria. Por esta razón, se procederá a determinar la ecuación de campo asociada al potencial fundamental A_i, con $i = 1,2$. La dinámica de un campo arbitrario del espacio de fase es definida por el Hamiltoniano que describe al sistema. Nótese entonces, que de acuerdo a la identidad (3.89), el Hamiltoniano canónico de MCS (3.41) puede ser reescrito del siguiente modo:

$$H_{MCS} = \frac{1}{2}\int d^2x \left\{ \left[\pi_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right]^2 + \left[\varepsilon_{ij}\partial_i A_j(\boldsymbol{x},t)\right]^2 \right\}. \tag{3.101}$$

La evolución temporal de cualquier campo canónico en el espacio de fase completo, se determina de manera única bajo la condición gauge elegida, así pues, bajo la definición de PD la ecuación de campo asociada al potencial A_i en el gauge de Coulomb, vendrá dada por [6, 7, 8]:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_i(x) &= \{A_i(\boldsymbol{x},t), H_{MCS}\}_D \\
&= \frac{1}{2}\int d^2x \left\{ A_i(\boldsymbol{x},t), \left[\pi_j(\boldsymbol{y},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]^2 + \left[\varepsilon_{jm}\partial_j A_m(\boldsymbol{y},t)\right]^2 \right\}_D \\
&= \int d^2x \left\{ A_i(\boldsymbol{x},t), \left[\pi_j(\boldsymbol{y},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}_D \left[\pi_j(\boldsymbol{y},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right],
\end{aligned} \tag{3.102}$$

resultado en el que se han empleado los PD fundamentales. Si se tiene en cuenta que:

$$\left\{ A_i(\boldsymbol{x},t), \left[\pi_j(\boldsymbol{y},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}_D = \left(\delta_{ij} - \partial_i^x\partial_j^x\frac{1}{\nabla_x^2}\right)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{3.103}$$

se encuentra que (3.102) se reduce a:

$$\begin{aligned}
\dot{A}_i(x) &= -\int d^2y \left(\delta_{ij} - \partial_i^x\partial_j^x\frac{1}{\nabla_x^2}\right)\left[\pi_j(\boldsymbol{y},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= -\int d^2y\,\delta_{ij}\left[\pi_j(\boldsymbol{y},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&\quad + \int d^2y \frac{1}{\nabla_y^2}\partial_i^y\partial_j^y\left[\pi_j(\boldsymbol{y},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{3.104}$$

No obstante, de la identidad (3.90), es posible despejar:

$$A_0(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\nabla_x^2}\partial_i^x\left[\pi_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right], \tag{3.105}$$

reemplazando esta expresión en (3.104), se deduce que la evolución temporal del campo fundamental A_i es:

$$\dot{A}_i(\boldsymbol{x},t) = -\pi_i(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t) + \partial_i^x A_0(\boldsymbol{x},t). \tag{3.106}$$

Capítulo 4

Campo Fermiónico en $(2+1)$ Dimensiones

Las partículas elementales que obedecen el principio de exclusión de Pauli y en consecuencia, satisfacen la estadística de Fermi-Dirac, se denominan fermiones [14]. Una descripción relativista para fermiones es proporcionada por la ecuación de Dirac [10, 11, 15], caracterizada por estudiar partículas masivas de espín $1/2$. La ecuación de Dirac para una partícua libre de masa m, en unidades naturales $\hbar = c = 1$, es dada por:

$$\left(i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha} - m\right)\psi = 0, \tag{4.1}$$

donde, en $(2+1)$ dimensiones, el campo de Dirac fundamental $\psi \equiv \psi(\boldsymbol{x}, t)$ denota un espinor de dos componentes $\psi_b \equiv \psi_b(\boldsymbol{x}, t)$ con $b = 1, 2$ y γ^{α} con $\alpha = 0, 1, 2$ son matrices 2×2 que se eligen en la representación de Dirac [10]. Estas matrices son proporcionales a las matrices de Pauli σ_i con $i = 1, 2, 3$ y sus propiedades se estudian con detalle en el **Apéndice K**.

Se define el campo de Dirac adjunto como:

$$\overline{\psi} \equiv \psi^{\dagger}(\boldsymbol{x}, t)\gamma^{0}, \tag{4.2}$$

que satisface la ecuación de Dirac adjunta:

$$\overline{\psi}\left(i\gamma^{\alpha}\overleftarrow{\partial}_{\alpha} + m\right) = 0. \tag{4.3}$$

Clásicamente, los campos fundamentales de Dirac ψ y $\overline{\psi}$ son representados por campos Grassmannianos [8, 16], tal que sus componentes $b, c = 1, 2$ satisfacen las siguientes relaciones de anticonmutación:

$$\begin{aligned} \psi_b\psi_c + \psi_c\psi_b &= 0, && (4.4)\\ \psi_b\overline{\psi}_c + \overline{\psi}_c\psi_b &= 0, && (4.5)\\ \overline{\psi}_b\overline{\psi}_c + \overline{\psi}_c\overline{\psi}_b &= 0. && (4.6) \end{aligned}$$

Las ecuaciones de Dirac asociadas a los campos ψ y $\overline{\psi}$ se derivan de a partir de la siguiente densidad Lagrangiana:

$$\mathscr{L}_D = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi - \left(\partial_{\alpha}\overline{\psi}\right)\gamma^{\alpha}\psi\right] - m\overline{\psi}\psi, \tag{4.7}$$

cuya forma explícita en términos de las componentes de los campos ψ_b, $\overline{\psi}_b$ y de las matrices $\gamma^{\alpha} : \gamma^{\alpha}_{bc}$, es dada por

$$\mathscr{L}_D = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}_b\gamma^{\alpha}_{bc}\partial_{\alpha}\psi_c - \left(\partial_{\alpha}\overline{\psi}_b\right)\gamma^{\alpha}_{bc}\psi_c\right] - m\overline{\psi}_b\psi_b. \tag{4.8}$$

Cabe anotar que en la expresión preliminar se suma sobre índices matriciales repetidos. La expresión (4.7) es conocida como Lagrangiana simetrizada de Dirac [11] y se caracteriza por ser invariante de Lorentz. Finalmente, es importante mencionar que los campos de Dirac fundamentales satisfacen las siguientes condiciones de frontera:

$$\delta\psi_b(\boldsymbol{x}, t_1) = \delta\psi_b(\boldsymbol{x}, t_2) = \delta\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x}, t_1) = \delta\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x}, t_2) = 0, \tag{4.9}$$

$$\lim_{|\mathbf{x}|\to\infty}\psi_b(\boldsymbol{x}, t) = \lim_{|\mathbf{x}|\to\infty}\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x}, t) = 0. \tag{4.10}$$

4.1. Formalismo Lagrangiano

La densidad Lagrangiana que describe la teoría de campo fermiónico libre depende de los campos de Dirac y sus respectivas derivadas espacio-temporales en $(2+1)$ dimensiones. Por consiguiente, el espacio de configuración del sistema será definido por el siguiente conjunto de campos: $\left[\psi, \overline{\psi}, \partial_0\psi, \partial_0\overline{\psi}\right]$. A partir del principio de Hamilton extendido a campos fermiónicos y de las condiciones de frontera (4.9) y (4.10), se determina que los campos ψ_b y $\overline{\psi}_b$ satisfacen las siguientes ecuaciones de Euler-Lagrange [8, 11]:

$$\frac{\partial\mathscr{L}_D}{\partial\psi_b} - \partial_{\alpha}\left(\frac{\partial\mathscr{L}_D}{\partial\left(\partial_{\alpha}\psi_b\right)}\right) = 0, \tag{4.11}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}_D}{\partial\overline{\psi}_b} - \partial_{\alpha}\left(\frac{\partial\mathscr{L}_D}{\partial\left(\partial_{\alpha}\overline{\psi}_b\right)}\right) = 0, \tag{4.12}$$

donde las derivadas calculadas respecto a los campos fermiónicos serán, de ahora en adelante, derivadas izquierdas (véase **Apéndice L**). Con el objetivo de determinar las ecuaciones de campo asociadas a ψ_b y $\overline{\psi}_b$, se calculan a partir de (4.7) las siguientes derivadas izquierdas:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}_D}{\partial \psi_b} &= \frac{\partial}{\partial \psi_b}\left[-\frac{i}{2}\left(\partial_\alpha \overline{\psi}_c\right)\gamma^\alpha_{cd}\psi_d - m\overline{\psi}_c\psi_c\right] \\
&= \frac{i}{2}\frac{\partial \psi_d}{\partial \psi_b}\partial_\alpha \overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cd} + m\frac{\partial \psi_c}{\partial \psi_b}\overline{\psi}_c \\
&= \frac{i}{2}\delta_{bd}\partial_\alpha \overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cd} + m\delta_{cb}\overline{\psi}_c \\
&= \frac{i}{2}\partial_\alpha \overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cb} + m\overline{\psi}_b. \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Análogamente, es posible solucionar:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}_D}{\partial\left(\partial_\alpha \psi_b\right)} &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\alpha \psi_b\right)}\left[\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^\mu_{cd}\partial_\mu \psi_d\right] \\
&= -\frac{i}{2}\frac{\partial\left(\partial_\mu \psi_d\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \psi_b\right)}\overline{\psi}_c\gamma^\mu_{cd} \\
&= -\frac{i}{2}\delta^\alpha_\mu\delta_{bd}\overline{\psi}_c\gamma^\mu_{cd} \\
&= -\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cb}. \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

Cabe anotar, que en los cálculos previos se ha considerado que los campos de Dirac anticonmutan entre sí. Sustituyendo (4.13) y (4.14) en la ecuación de Euler-Lagrange (4.11), se deduce que la ecuación de campo asociada a $\overline{\psi}_b$ es:

$$
i\partial_\alpha \overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cb} + m\overline{\psi}_b = 0 \quad \text{o bien} \quad \overline{\psi}\left(i\gamma^\alpha \overleftarrow{\partial}_\alpha + m\right) = 0. \qquad (4.15)
$$

Similarmente, de (4.7) es posible determinar:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}_D}{\partial \overline{\psi}_b} &= \frac{\partial}{\partial \overline{\psi}_b}\left[\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cd}\partial_\alpha \psi_d - m\overline{\psi}_c\psi_c\right] \\
&= \frac{i}{2}\frac{\partial \overline{\psi}_c}{\partial \overline{\psi}_b}\gamma^\alpha_{cd}\partial_\alpha \psi_d - m\frac{\partial \overline{\psi}_c}{\partial \overline{\psi}_b}\psi_c \\
&= \frac{i}{2}\delta_{bc}\gamma^\alpha_{cd}\partial_\alpha \psi_d - m\delta_{bc}\psi_c \\
&= \frac{i}{2}\gamma^\alpha_{bd}\partial_\alpha \psi_d - m\psi_b. \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{L}_D}{\partial\left(\partial_\alpha \overline{\psi}_b\right)} &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\alpha \overline{\psi}_b\right)}\left[-\frac{i}{2}\left(\partial_\mu \overline{\psi}_c\right)\gamma^\mu_{cd}\psi_d\right] \\ &= -\frac{i}{2}\frac{\partial\left(\partial_\mu \overline{\psi}_c\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \overline{\psi}_b\right)}\gamma^\mu_{cd}\psi_d \\ &= -\frac{i}{2}\delta^\alpha_\mu \delta_{bc}\gamma^\mu_{cd}\psi_d \\ &= -\frac{i}{2}\gamma^\alpha_{bd}\psi_d. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Reemplazando (4.16) y (4.17) en la ecuación de Euler-Lagrange (4.12), se obtiene que la ecuación de campo asoaciada a ψ_b viene dada por:

$$i\gamma^\alpha_{bd}\partial_\alpha\psi_d - m\psi_b = 0 \quad \text{o bien} \quad \left(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m\right)\psi = 0. \tag{4.18}$$

4.2. Formalismo Hamiltoniano

La descripción de la teoría en el formalismo de Hamilton, se lleva a cabo empleando como variables canónicas los campos fundamentales de Dirac $\psi_b, \overline{\psi}_b$ y sus momentos canónicos conjugados, que se definen respectivamente como:

$$\pi_b = \pi_b(\boldsymbol{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathscr{L}_D}{\partial\left(\partial_0 \psi_b\right)} = -\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^0_{cb}, \tag{4.19}$$

$$\overline{\pi}_b = \overline{\pi}_b(\boldsymbol{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathscr{L}_D}{\partial\left(\partial_0 \overline{\psi}_b\right)} = -\frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\psi_d, \tag{4.20}$$

con $b = 1, 2$. Es importante resaltar que para obtener las ecuaciones previas se emplearon las derivadas izquierdas presentes en (4.14) y (4.17). De este modo, se tiene que el espacio de fase del sistema es definido por un total de ocho campos fermiónicos: $\left[\psi_b, \overline{\psi}_b, \pi_b, \overline{\pi}_b\right]$. Obsérvese que las expresiones (4.19) y (4.20) presentan relaciones entre las variables del espacio de fase, esto se debe a que en ninguna de las dos ecuaciones existen términos que incluyan derivadas temporales de los campos canónicos ψ_b y $\overline{\psi}_b$. A causa de esto, se determina que (4.19) y (4.20) son vínculos primarios [6, 7, 8], que serán denotados como se muestra a continuación:

$$\Gamma_b^1 \equiv \Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t) \equiv \pi_b + \frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^0 \approx 0, \tag{4.21}$$

$$\Gamma_b^2 \equiv \Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t) \equiv \overline{\pi}_b + \frac{i}{2}\gamma_{bd}^0\psi_d \approx 0. \tag{4.22}$$

La densidad Hamiltoniana canónica, bajo la definición de derivada izquierda, para la teoría de campo fermiónico libre en $(2+1)$ dimensiones tiene la siguiente forma:

$$\mathscr{H}_{c(D)} \equiv \left(\partial_0\psi_b\right)\pi_b + \left(\partial_0\overline{\psi}_b\right)\overline{\pi}_b - \mathscr{L}_D. \tag{4.23}$$

Sustituyendo (4.8), (4.21) y (4.22) en (4.23) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\mathscr{H}_{c(D)} &= \frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^0\partial_0\psi_b - \frac{i}{2}\left(\partial_0\overline{\psi}_b\right)\gamma_{bd}^0\psi_d - \frac{i}{2}\overline{\psi}_b\gamma_{bc}^0\left(\partial_0\psi_c\right) - \frac{i}{2}\overline{\psi}_b\gamma_{bc}^j\partial_j\psi_c + \\
&\quad \frac{i}{2}\left(\partial_0\overline{\psi}_b\right)\gamma_{bc}^0\psi_c + \frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}_b\right)\gamma_{bc}^j\psi_c + m\overline{\psi}_b\psi_b \\
&= -\frac{i}{2}\overline{\psi}_b\gamma_{bc}^j\partial_j\psi_c + \frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}_b\right)\gamma_{bc}^j\psi_c + m\overline{\psi}_b\psi_b,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

con $j = 1,2$. La dinámica de cualquier variable del espacio de fase es determinada por el Hamiltoniano canónico, que es definido como:

$$\begin{aligned}
H_{c(D)} &\equiv \int d^2x \mathscr{H}_{c(D)} \\
&= \int d^2x \left[-\frac{i}{2}\overline{\psi}_b\gamma_{bc}^j\partial_j\psi_c + \frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}_b\right)\gamma_{bc}^j\psi_c + m\overline{\psi}_b\psi_b\right].
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Teniendo en cuenta la siguiente identidad:

$$\partial_j\left[\overline{\psi}_b\gamma_{bc}^j\psi_c\right] - \overline{\psi}_b\gamma_{bc}^j\partial_j\psi_c = \left(\partial_j\overline{\psi}_b\right)\gamma_{bc}^j\psi_c, \tag{4.26}$$

es posible reescribir (4.25) del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
H_{c(D)} &= \int d^2x \left[-i\overline{\psi}_b\gamma_{bc}^j\partial_j\psi_c + m\overline{\psi}_b\psi_b\right] + \frac{i}{2}\int d^2x\partial_j\left[\overline{\psi}_b\gamma_{bc}^j\psi_c\right] \\
&= \int d^2x \left[-i\overline{\psi}_b\gamma_{bc}^j\partial_j\psi_c + m\overline{\psi}_b\psi_b\right] + \frac{i}{2}\oint dr_j\left[\overline{\psi}_b\gamma_{bc}^j\psi_c\right],
\end{aligned} \tag{4.27}$$

donde se ha empleado el teorema de Gauss restringido a dos dimesiones para convertir la integral del segundo sumando de (4.27) en una integral de camino realizada sobre el contorno de una superficie que se extiende hacia el infinito. Teniendo en cuenta, que la condición de frontera (4.10) establece que en el infinito los campos de Dirac fundamentales se anulan, se obtiene que (4.27) se reduce a:

$$H_{c(D)} = \int d^2x \left[-i\overline{\psi}_b \gamma^j_{bc} \partial_j \psi_c + m\overline{\psi}_b \psi_b \right]. \tag{4.28}$$

Expresión que puede escribirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} H_{c(D)} &= \int d^2x \overline{\psi} \left[-i\gamma^j \partial_j + m \right] \psi \\ &= \int d^2x \overline{\psi} \left[-i\boldsymbol{\gamma} \cdot \nabla + m \right] \psi. \end{aligned} \tag{4.29}$$

El Hamiltoniano canónico está definido en el subespacio de fase donde $\Gamma^i_b = 0$ con $i = 1, 2$. No obstante, la dinámica en el espacio de fase completo es definida por el Hamiltoniano primario, que se construye como combinación lineal del Hamiltoniano canónico y los vínculos primarios del sistema, es decir:

$$H_{p(D)} \equiv H_{c(D)} + \int d^2x \left[\Gamma^1_b \lambda^1_b + \lambda^2_b \Gamma^2_b \right], \tag{4.30}$$

donde $\lambda^i_b = \lambda^i_b(\boldsymbol{x}, t)$ con $i = 1, 2$ son funciones fermiónicas arbitrarias del espacio y del tiempo conocidas como multiplicadores de Lagrange. Nótese, que (4.30) posee paridad par.

Por otro lado, se sabe que el espacio de fase del sistema está constituido por campos fermiónicos, es decir, variables de Grassmann de paridad impar [16]. Los PP a tiempos iguales calculados entre dos variables fermiónicas se conocen como paréntesis de Berezín (PB), que se definen formalmente en términos de derivadas funcionales izquierdas de la siguiente manera [16]:

$$\begin{aligned} \left\{ F_1(\boldsymbol{x}, t), F_2(\boldsymbol{y}, t) \right\} \equiv & -\int d^2z \left[\frac{\delta F_1(\boldsymbol{x}, t)}{\delta \psi_b(\boldsymbol{z}, t)} \frac{\delta F_2(\boldsymbol{x}, t)}{\delta \pi_b(\boldsymbol{z}, t)} + \frac{\delta F_2(\boldsymbol{x}, t)}{\delta \psi_b(\boldsymbol{z}, t)} \frac{\delta F_1(\boldsymbol{x}, t)}{\delta \pi_b(\boldsymbol{z}, t)} + \frac{\delta F_1(\boldsymbol{x}, t)}{\delta \overline{\psi}_b(\boldsymbol{z}, t)} \frac{\delta F_2(\boldsymbol{x}, t)}{\delta \overline{\pi}_b(\boldsymbol{z}, t)} + \right. \\ & \left. \frac{\delta F_2(\boldsymbol{x}, t)}{\delta \overline{\psi}_b(\boldsymbol{z}, t)} \frac{\delta F_1(\boldsymbol{x}, t)}{\delta \overline{\pi}_b(\boldsymbol{z}, t)} \right] + \int d^2z \left[\frac{\delta F_1(\boldsymbol{x}, t)}{\delta A_\alpha(\boldsymbol{z}, t)} \frac{\delta F_2(\boldsymbol{x}, t)}{\delta \pi^\alpha(\boldsymbol{z}, t)} - \frac{\delta F_2(\boldsymbol{x}, t)}{\delta A_\alpha(\boldsymbol{z}, t)} \frac{\delta F_1(\boldsymbol{x}, t)}{\delta \pi^\alpha(\boldsymbol{z}, t)} \right], \end{aligned} \tag{4.31}$$

donde $F_1(\boldsymbol{x},t) \equiv F_1\left[\psi_b,\overline{\psi}_b,\pi_b,\overline{\pi}_b\right]$ y $F_2(\boldsymbol{x},t) \equiv F_2\left[\psi_b,\overline{\psi}_b,\pi_b,\overline{\pi}_b\right]$ son variables fermiónicas arbitrarias del espacio de fase. De la definición (4.31) se determina que los únicos PB fundamentales no nulos son:

$$\begin{aligned} \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\pi_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &= -\delta_{bc}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), && (4.32)\\ \left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\pi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &= -\delta_{bc}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). && (4.33)\end{aligned}$$

Así pues, en tÃ©rminos de los PB, la evolución temporal de una variable arbitraria del espacio de fase $F(\boldsymbol{x},t) \equiv F\left[\psi_b,\overline{\psi}_b,\pi_b,\overline{\pi}_b\right]$ vendrá dada por:

$$\dot{F}(\boldsymbol{x},t) \approx \left\{F(\boldsymbol{x},t), H_{p(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\}. \tag{4.34}$$

4.2.1. Análisis de consistencia de vínculos

Por consistencia se debe garantizar que los vínculos Γ_b^i se conserven durante la evolución dinámica del sistema, es decir, que se debe satisfacer la siguiente condición:

$$\dot{\Gamma}_b^i(\boldsymbol{x},t) = \left\{\Gamma_b^i(\boldsymbol{x},t), H_{p(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx 0. \tag{4.35}$$

Inicialmente, se procederá a estudiar el requerimiento de consistencia del vínculo fermiónico (4.21):

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}_b^1(\boldsymbol{x},t) &= \left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t), H_{p(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &= \left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t), H_{c(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} + \int d^2y \left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t), \Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\lambda_c^1(\boldsymbol{y},t) + \lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx 0. \end{aligned} \tag{4.36}$$

Usando los PB fundamentales y el Hamiltoniano canónico dado por (4.28), se puede determinar el siguiente resultado:

$$\begin{aligned} \left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t), H_{c(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \int d^2y \left[-i\gamma_{cd}^j\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\partial_j^y\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} + m\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\right]\\ &\approx \int d^2y \left[i\gamma_{cd}^j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\partial_j^y\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} - m\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\right]\\ &\approx i\gamma_{cb}^j\partial_j^x\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t) + m\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), \end{aligned} \tag{4.37}$$

Cabe anotar, que en la relación previa se tienen PB de la forma $\{F_1, F_2 F_3\}$, donde F_i con $i = 1,2,3$ son variables fermiónicas. Por otro lado, de los siguientes resultados deducidos en el **Apéndice M:**

$$\begin{aligned} \left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx 0, &(4.38)\\ \left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma^2_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx -i\gamma^0_{cb}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), &(4.39)\end{aligned}$$

se puede determinar que:

$$\begin{aligned} \left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\lambda^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda^1_c(\boldsymbol{y},t) - \Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), \lambda^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx \left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda^1_c(\boldsymbol{y},t)\\ &\approx 0, &(4.40)\end{aligned}$$

además:

$$\begin{aligned} \left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), \lambda^2_c(\boldsymbol{y},t)\Gamma^2_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), \lambda^2_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\Gamma^2_c(\boldsymbol{y},t) - \lambda^2_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma^2_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx -\lambda^2_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma^2_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx i\lambda^2_c(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{cb}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). &(4.41)\end{aligned}$$

Reemplazando (4.37), (4.40) y (4.41) en (4.36) se obtiene:

$$\dot{\Gamma}^1_b(\boldsymbol{x},t) = i\gamma^j_{bc}\partial^x_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t) + m\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t) + i\lambda^2_b(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{bc} \approx 0. \tag{4.42}$$

Como se puede observar, el requerimiento de consistencia del vínculo fermiónico Γ^1_b ha dado como resultado una expresión que permitirá fijar condiciones sobre el multiplicador de Lagrange λ^2_b, situación que permite inferir que no surgirán más vínculos asociados a Γ^1_b. De igual manera, a partir de (4.30) se verifica que el análisis de consistencia del vínculo Γ^2_b es dado por:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}^2_b(\boldsymbol{x},t) &= \left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t), H_{p(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &= \left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t), H_{c(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} + \int d^2y\left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\lambda^1_c(\boldsymbol{y},t) + \lambda^2_c(\boldsymbol{y},t)\Gamma^2_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx 0. &(4.43)\end{aligned}$$

Empleando las relaciones (4.22) y (4.28) se determina:

$$\begin{aligned}\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),H_{c(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \int d^2y\left[-i\gamma_{cd}^j\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\partial_j^y\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}+m\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\right]\\ &\approx \int d^2y\left[-i\gamma_{cd}^j\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\partial_j^y\psi_d(\boldsymbol{y},t)+m\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right]\\ &\approx i\gamma_{bd}^j\partial_j^x\overline{\psi}_d(\boldsymbol{x},t)-m\psi_b(\boldsymbol{x},t).\end{aligned} \tag{4.44}$$

Por otra parte, de los siguientes resultados deducidos en el **Apéndice M**:

$$\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx -i\gamma_{bc}^0\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{4.45}$$

$$\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx 0. \tag{4.46}$$

se puede determinar que:

$$\begin{aligned}\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\lambda_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t)\Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda_c^1(\boldsymbol{y},t)-\Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\lambda_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx \left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t)\Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda_c^1(\boldsymbol{y},t)\\ &\approx -i\gamma_{bc}^0\lambda_c^1(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\end{aligned} \tag{4.47}$$

igualmente:

$$\begin{aligned}\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\}\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)-\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx -\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned} \tag{4.48}$$

Sustituyendo (4.44), (4.47) y (4.48) en (4.43) se encuentra que el requiermiento de consistencia del vínculo Γ_b^2 es:

$$\dot{\Gamma}_b^2(\boldsymbol{x},t)=i\gamma_{bd}^j\partial_j^x\overline{\psi}_d(\boldsymbol{x},t)-m\psi_b(\boldsymbol{x},t)-i\gamma_{bc}^0\lambda_c^1(\boldsymbol{x},t)\approx 0. \tag{4.49}$$

La expresión preliminar no constituye un vínculo, pues permite fijar condiciones sobre el multiplicador de Lagrange λ_c^1. De los resultados deducidos en (4.42) y (4.49) se concluye que el conjunto completo de vínculos fermiónicos de la teoría es:

$$\begin{cases}\Gamma_b^1=\pi_b+\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^0\approx 0\\ \Gamma_b^2=\overline{\pi}_b+\frac{i}{2}\gamma_{bd}^0\psi_d\approx 0\end{cases}$$

4.2.2. Clasificación de vínculos de primera y segunda clase

El método de Dirac ofrece una clasificación alternativa para los vínculos presentes en un sistema singular [6, 7, 8], que dependerá de los PB calculados entre el conjunto total de vínculos. De modo que, un vínculo será clasificado como de primera clase, siempre que todos los PB entre el y el resto de vínculos, se anulen debilmente, de encontrarse al menos un PB no nulo, implicará que sea clasificado como de segunda clase. Así pues, como consecuencia de las expresiones (4.39) y (4.45), se establece que los vínculos fermiónicos Γ^i_b son de segunda clase.

4.2.3. Hamiltoniano extendido y dinámica en el espacio de fase completo

Dado que la teoría de campo fermiónico libre en $(2+1)$ dimensiones no posee vínculos de primera clase, los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de segunda clase podrán ser fijados de manera única, a través de la definición de PD. Otra implicación importante de la ausencia de vínculos de primera clase es que el Hamiltoniano extendido será equivalente al Hamiltoniano primario dado en (4.30), de manera que, la dinámica de cualquier variable del espacio de fase vendrá determinada por:

$$\begin{aligned} \dot{F}(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{F(\boldsymbol{x},t), H_{p(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx \left\{F(\boldsymbol{x},t), H_{c(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} + \int d^2y \left\{F(\boldsymbol{x},t), \lambda^1_b(\boldsymbol{y},t)\Gamma^1_b(\boldsymbol{y},t) + \Gamma^1_b(\boldsymbol{y},t)\lambda^2_b(\boldsymbol{y},t)\right\} \end{aligned} \tag{4.50}$$

De acuerdo a la expresión (4.50), se tiene que la evolución temporal del campo ψ_b es dada por la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \partial_0\psi_b(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), H_{c(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} + \int d^2y \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), \pi_c(\boldsymbol{y},t)\lambda^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx \int d^2y \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), \pi_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda^1_c(\boldsymbol{y},t) \\ &\approx -\lambda^1_b(\boldsymbol{x},t). \end{aligned} \tag{4.51}$$

donde se ha empleado (4.21), (4.22) y los PB fundamentales. Cabe anotar, que se ha considerando tambíen que el PB presente en la integral previa es de la forma $\{F_1, F_2F_3\}$ tal que,

F_i con $i = 1,2,3$ son variables fermiónicas.

De igual modo, la evolución temporal del campo $\overline{\psi}_b$ vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
\partial_0 \overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), H_{c(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} + \int d^2y \left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), \lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\overline{\pi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx -\int d^2y \lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), \overline{\pi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx \lambda_b^2(\boldsymbol{x},t). \qquad (4.52)
\end{aligned}$$

Por otra parte, la evolución temporal del momento canónico π_b se determina como se muestra a continuación:

$$\partial_0 \pi_b(\boldsymbol{x},t) \approx \left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), H_{c(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} + \frac{i}{2}\gamma^0_{cd}\int d^2y \left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}, \qquad (4.53)$$

donde se ha empleado (4.21), (4.22) y los PB fundamentales. A partir del Hamiltoniano canónico (4.28) se ecuentra que:

$$\begin{aligned}
\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), H_{c(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} &= i\gamma^j_{cd}\int d^2y \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\partial^y_j\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} - \\
&\quad m\int d^2y \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&= i\partial^x_j \overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^j_{cb} + m\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t). \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

Igualmente es evidente que:

$$\begin{aligned}
\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx -\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx \lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\delta_{bd}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

Sustituyendo (4.54) y (4.55) en (4.53) se obtiene que la evolución temporal de π_b es dada por:

$$\partial_0 \pi_b(\boldsymbol{x},t) \approx i\partial^x_j \overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^j_{cb} + m\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t) + \frac{i}{2}\lambda_c^2(\boldsymbol{x},t)\gamma^0_{cb}. \qquad (4.56)$$

Similarmente, de (4.50) se verifica que la dinámica de $\overline{\pi}_b$ en el espacio de fase completo se calcula de la siguiente forma:

$$\partial_0 \overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t) \approx \left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t), H_{c(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} + \frac{i}{2}\gamma^0_{dc}\int d^2y \left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t), \overline{\psi}_d(\boldsymbol{y},t)\lambda_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\}, \qquad (4.57)$$

donde se ha empleado (4.21), (4.22) y los PB fundamentales. A partir del Hamiltoniano canónico (4.28) es posible detemrinar:

$$\begin{aligned}\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t), H_{c(D)}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &= -i\gamma^j_{cd}\int d^2y\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t), \overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\partial^y_j\psi_d\left(\boldsymbol{y},t\right)+\\ &\quad m\int d^2y\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\psi_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\\ &= i\gamma^j_{bd}\partial^x_j\psi_d(\boldsymbol{x},t)-m\psi_b(\boldsymbol{x},t)\end{aligned} \tag{4.58}$$

Igualmente es evidente que:

$$\begin{aligned}\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_d\left(\boldsymbol{y},t\right)\lambda^1_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_d\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\lambda^1_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\\ &\approx -\lambda^1_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\delta_{bd}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).\end{aligned} \tag{4.59}$$

Sustituyendo (4.54) y (4.55) en (4.53) se obtiene que la evolución temporal de π_b es dada por:

$$\partial_0\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t)\approx i\gamma^j_{bd}\partial^x_j\psi_d(\boldsymbol{x},t)-m\psi_b(\boldsymbol{x},t)-\frac{i}{2}\gamma^0_{bc}\lambda^1_c(\boldsymbol{x},t). \tag{4.60}$$

De las ecuaciones (4.51), (4.52), (4.56) y (4.60) se concluye que la evolución temporal de los campos $\left[\psi_b,\overline{\psi}_b,\pi_b,\overline{\pi}_b\right]$ en teoría de campo fermiónico libre en $(2+1)$ dimensiones, calculada a partir de la ecuación de Hamilton (4.50), viene determinada por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c}\partial_0\psi_b(\boldsymbol{x},t)\approx-\lambda^1_b(\boldsymbol{x},t)\\ \partial_0\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\approx\lambda^2_b(\boldsymbol{x},t)\\ \partial_0\pi_b(\boldsymbol{x},t)\approx i\partial^x_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^j_{cb}+m\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)+\frac{i}{2}\lambda^2_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^0_{cb}\\ \partial_0\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t)\approx i\gamma^j_{bd}\partial^x_j\psi_d(\boldsymbol{x},t)-m\psi_b(\boldsymbol{x},t)-\frac{i}{2}\gamma^0_{dc}\lambda^1_c(\boldsymbol{x},t)\end{array}\right.$$

Obsérvese que debido a la presencia de multplicadores de Lagrange, las ecuaciones previas se expresan en términos de igualdades debiles. Ahora, se procederá a escribir las ecuaciones de Hamilton previas de forma compacta. Reemplazando (4.51) en (4.60) se deduce que:

$$\partial_0\overline{\pi}_b\approx i\gamma^j_{bd}\partial_j\psi_d-m\psi_b+\frac{i}{2}\gamma^0_{dc}\partial_0\psi_c, \tag{4.61}$$

pero de (4.20) se sabe que:

$$\partial_0\overline{\pi}_b=-\frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\partial_0\psi_d, \tag{4.62}$$

igualando (4.61) y (4.62) se encuentra:

$$i\gamma^{j}_{bd}\partial_j\psi_d - m\psi_b + i\gamma^{0}_{dc}\partial_0\psi_c \approx 0,$$

que puede reordenarse de la siguiente manera:

$$\left(i\gamma^{\alpha}\partial_\alpha - m\right)\psi \approx 0. \tag{4.63}$$

Expresión que es debilmente equivalente a la ecuación de Dirac (4.1). Análogamente, si se sustituye (4.52) en (4.56) se obtiene que la evolución temporal del momento canónico π_b es ahora, dada por:

$$\partial_0\pi_b \approx i\partial_j\overline{\psi}_c\gamma^{j}_{cb} + m\overline{\psi}_b + \frac{i}{2}\partial_0\overline{\psi}_c\gamma^{0}_{cb}. \tag{4.64}$$

No obstante, de la definición de momento canónico (4.19) es posible calcular la siguiente derivada temporal:

$$\partial_0\pi_b = -\frac{i}{2}\partial_0\overline{\psi}_c\gamma^{0}_{cb}. \tag{4.65}$$

Igualando (4.64) y (4.65) se llega al siguiente resultado:

$$i\partial_j\overline{\psi}_c\gamma^{j}_{cb} + m\overline{\psi}_b + i\partial_0\overline{\psi}_c\gamma^{0}_{cb} \approx 0,$$

o bien, de manera compacta:

$$\overline{\psi}\left(i\gamma^{\alpha}\overleftarrow{\partial}_\alpha + m\right) \approx 0. \tag{4.66}$$

Esta expresión equivale debilmente a la ecuación de Dirac adjunta (4.3)

4.2.4. Tratamiento de vínculos de segunda clase

El espacio de fase de la teoría esta definido por un total de ocho campos fermiónicos: $\left[\psi_b, \overline{\psi}_b, \pi_b, \overline{\pi}_b\right]$ con $b = 1,2$, no obstante, se cuenta con un conjunto de cuatro vínculos de segunda clase dados por Γ^{i}_{b} con $i = 1,2$. Tales vínculos indican la existencia de apenas cuatro grados de libertad, sin embargo, la elección de los mismos es completamente arbitraria. Con el propósito de aislar los grados de libertad del sistema, se define un nuevo espacio de fase, conocido como espacio de fase reducido, que estará constituido por los campos indendientes $\left[\psi_b, \overline{\psi}_b\right]$.

Por otro lado, se ha establecido que los vínculos presentes en la teoría de campo fermiónico en $(2+1)$ dimensiones se anulan debilmente, sin embargo, esto no implica que el PB entre algún vínculo con una variable dinámica del espacio de fase, sea tambíen debilmente nulo. Esta situación permite inferir que los PB calculados mediante la definición (4.31) no son consistentes con los vínculos del sistema, de modo que, resulta indispensable construir PB entre los grados de libertad, que si lo sean. Estos nuevos PB se denominan paréntesis de Dirac a tiempos iguales (PD). El PD entre dos variables dinámicas del espacio de fase reducido, $A(\boldsymbol{x},t) \equiv A\left[\psi_b, \overline{\psi}_b\right]$ y $B(\boldsymbol{x},t) \equiv B\left[\psi_b, \overline{\psi}_b\right]$, se define por:

$$\begin{aligned}\left\{A(\boldsymbol{x},t), B(\boldsymbol{y},t)\right\}_D \quad \equiv \quad & \left\{A(\boldsymbol{x},t), B(\boldsymbol{y},t)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{A(\boldsymbol{x},t), \Gamma_b^i(\boldsymbol{u},t)\right\}\left[C_{bc}^{ij}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right]^{-1}\right. \\ & \left.\left\{\Gamma_c^j(\boldsymbol{v},t), B(\boldsymbol{y},t)\right\}\right], \end{aligned} \tag{4.67}$$

con $a,b,i,j = 1,2$ y donde $\left[C_{bc}^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]^{-1}$ es la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase $C_{bc}^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, cuyas componentes matriciales se definen del siguiente modo:

$$C_{bc}^{ij}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \left\{\Gamma_b^i(\boldsymbol{x},t), \Gamma_c^j(\boldsymbol{y},t)\right\}, \tag{4.68}$$

Empleando los siguientes PB (deducidos en el **Apéndice M**):

$$\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t), \Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\} \quad \approx \quad -i\gamma_{cb}^0 \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{4.69}$$

$$\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t), \Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\} \quad \approx \quad -i\gamma_{bc}^0 \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{4.70}$$

$$\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t), \Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\} \quad \approx \quad 0, \tag{4.71}$$

$$\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t), \Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\} \quad \approx \quad 0, \tag{4.72}$$

se encuentra que la forma matricial de (4.68) es:

$$C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -i \begin{pmatrix} 0 & \left(\gamma^0\right)^T \\ \gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{4.73}$$

La inversa de (4.73) presenta la siguiente forma matricial (véase **Apéndice N**):

$$C^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = i \begin{pmatrix} 0 & \gamma^0 \\ \left(\gamma^0\right)^T & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{4.74}$$

Cabe anotar, que la relación previa se determinó de acuerdo a la siguiente condición:

$$\int d^2 z C_{lr}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\, C^{-1}_{rm}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = \delta_{lm}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{4.75}$$

Por otra parte, es importante destacar que bajo la definición (4.67), los PD calculados entre los vínculos del sistema y una variable dinámica arbitraria del espacio de fase son idénticamente nulos. Por consiguiente, se establece que los vínculos fermiónicos Γ^i_b son ahora fuertemente iguales a cero, es decir:

$$\pi_b + \frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^0_{cb} = 0, \tag{4.76}$$

$$\overline{\pi}_b + \frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\psi_d = 0. \tag{4.77}$$

A continuación se determinarán los PD entre los grados de libertad del sistema. Inicialmente, de la definición (4.67) se determina que:

$$\begin{aligned}\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\} - \int d^3u\, d^3v \left[\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\Gamma^i_a(\boldsymbol{u},t)\right\}\left[C^{ij}_{ad}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right]^{-1}\right.\\ &\quad \left.\left\{\Gamma^j_d(\boldsymbol{v},t),\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\right].\end{aligned} \tag{4.78}$$

Del siguiente resultado, deducido en el **Apéndice M**:

$$\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\Gamma^i_a(\boldsymbol{u},t)\right\} \approx \begin{cases} -\delta_{ba}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \text{ si } i=1 \\ 0 \text{ de otro modo,}\end{cases} \tag{4.79}$$

es posible observar que el segundo sumando del PD (4.78), arrojaría un valor no nulo siempre que $i, j = 1$. Sin embargo, de (4.74) se comprueba que para estos valores la componente matricial $\left[C^{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\right]^{-1}$ es nula. Empleando este razonamiento y los PB fundamentales se concluye que:

$$\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\}_D = 0. \tag{4.80}$$

Análogamente mediante la definición (4.67) se calculará el PD que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\} - \int d^3u\, d^3v \left[\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\Gamma^i_a(\boldsymbol{u},t)\right\}\left[C^{ij}_{ad}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right]^{-1}\right.\\ &\quad \left.\left\{\Gamma^j_d(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\right].\end{aligned} \tag{4.81}$$

A partir de (4.79) y del resultado que prosigue (encontrado en el **Apéndice M**):

$$\left\{\Gamma^{j}_{d}(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_{c}(\boldsymbol{y},t)\right\}\approx\begin{cases}-\delta_{dc}\delta^{2}(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y})\ \text{si}\quad j=2\\ 0\ \text{de otro modo,}\end{cases}\tag{4.82}$$

se encuentra que la integral presente en el segundo sumando de (4.81) arrojará valores distintos de cero siempre que $i=1$ y $j=2$, luego (4.81) se reduce a:

$$\begin{aligned}\{\psi_{b}(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_{c}(\boldsymbol{y},t)\}_{D} &= \{\psi_{b}(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_{c}(\boldsymbol{y},t)\}-\int d^{3}ud^{3}v\,[\{\psi_{b}(\boldsymbol{x},t),\Gamma^{1}_{a}(\boldsymbol{u},t)\}\\ &\quad [C^{12}_{ad}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})]^{-1}\{\Gamma^{2}_{d}(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_{c}(\boldsymbol{y},t)\}]\\ &= -[C^{12}_{bc}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^{-1}\\ &= -i\gamma^{0}_{bc}\delta^{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\end{aligned}\tag{4.83}$$

donde se ha usado (4.74) y los PB fundalmentales. Finalmente, resta determinar el siguiente PD:

$$\begin{aligned}\{\overline{\psi}_{b}(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_{c}(\boldsymbol{y},t)\}_{D} &= \{\overline{\psi}_{b}(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_{c}(\boldsymbol{y},t)\}-\int d^{3}ud^{3}v\left[\left\{\overline{\psi}_{b}(\boldsymbol{x},t),\Gamma^{i}_{a}(\boldsymbol{u},t)\right\}\left[C^{ij}_{ad}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right]^{-1}\right.\\ &\quad\left.\left\{\Gamma^{j}_{d}(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_{c}(\boldsymbol{y},t)\right\}\right].\end{aligned}\tag{4.84}$$

Nótese, que mediante el siguiente PB (deducido en el **Apéndice M**):

$$\left\{\overline{\psi}_{b}(\boldsymbol{x},t),\Gamma^{i}_{a}(\boldsymbol{u},t)\right\}\approx\begin{cases}-\delta_{ab}\delta^{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})\ \text{si}\ i=2\\ 0\ \text{de otro modo}\end{cases}\tag{4.85}$$

se esperaría que la integral presente en el segundo sumando de (4.84) sea diferente de cero para los valores particulares $i,j=2$. No obstante, de (4.74) se puede verificar que para estos valores la componente matricial $[C^{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})]^{-1}$ es nula. De este modo, se determina que:

$$\{\overline{\psi}_{b}(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_{c}(\boldsymbol{y},t)\}_{D}=0.\tag{4.86}$$

Se concluye entonces, que el conjunto completo de PD para la teoría de campo fermiónico en $(2+1)$ dimensiones es dado por:

$$\begin{gathered}\{\psi_{b}(\boldsymbol{x},t),\psi_{c}(\boldsymbol{y},t)\}_{D}=0\\ \{\overline{\psi}_{b}(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_{c}(\boldsymbol{y},t)\}_{D}=0\\ \{\psi_{b}(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_{c}(\boldsymbol{y},t)\}_{D}=-i\gamma^{0}_{bc}\delta^{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\end{gathered}$$

Es importante resaltar que los PD definidos por (4.67) satisfacen las mismas propiedades que los PB [8].

4.2.5. Ecuaciones de Hamilton

La evolución temporal de una variable dinámica del espacio de fase reducido $F(\boldsymbol{x},t) \equiv F\left[\psi_b,\overline{\psi}_b\right]$, se determina de manera única mediante la siguiente relación:

$$\dot{F}(\boldsymbol{x},t) = \left\{F(\boldsymbol{x},t), H_D\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D, \tag{4.87}$$

donde H_D denota el Hamiltoniano de campo fermiónico definido por:

$$H_D = \int d^2x \left[-i\overline{\psi}_b\gamma^j_{bc}\partial_j\psi_c + m\overline{\psi}_b\psi_b\right]. \tag{4.88}$$

Cabe anotar, que este Hamiltoniano es equivalente al Hamiltoniano canónico (4.28), puesto que, se ha establecido que los campos ψ_b y $\overline{\psi}_b$ son los grados de libertad del sistema. De acuerdo a la ecuación de Hamilton (4.87), se encuentra que la evolución temporal del campo ψ_b es dada por:

$$\begin{aligned}
\partial_0\psi_b(\boldsymbol{x},t) &= \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), H_D\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D \\
&= \int d^2y\left[-i\gamma^j_{cd}\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D\partial^y_j\psi_d\left(\boldsymbol{y},t\right) + m\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c\right\}_D\psi_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right] \\
&= -\gamma^0_{bc}\gamma^j_{cd}\partial^x_j\psi_d(\boldsymbol{x},t) - im\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{x},t).
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Nótese que (4.89) puede escribirse del modo que prosigue:

$$i\partial_0\psi + i\gamma^0\gamma^j\partial_j\psi - m\gamma^0\psi = 0, \tag{4.90}$$

multiplicando por γ^0 por la izquierda y teniendo en cuenta que, $\left(\gamma^0\right)^2 = \mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ denota la matriz identidad 2×2, se obtiene:

$$\begin{aligned}
i\gamma^0\partial_0\psi + i\gamma^j\partial_j\psi - m\psi &= 0 \\
i\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi - m\psi &= 0,
\end{aligned} \tag{4.91}$$

que puede escribirse de forma compacta así:

$$\left(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m\right)\psi = 0. \tag{4.92}$$

Relación que es equivalente a la ecuación de Dirac (4.1). De manera análoga, la evolución temporal del campo $\overline{\psi}_b$ viene dada por la siguiente relación:

$$\begin{aligned}
\partial_0 \overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t) &= \left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), H_D\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D \\
&= \int d^2y \left[i\gamma^j_{cd}\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\partial^y_j\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t),\psi_d\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D - m\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D\right] \\
&= -\partial^x_j\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\gamma^j_{cd}\gamma^0_{db} + im\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\gamma^0_{cb}, \qquad (4.93)
\end{aligned}$$

donde se ha considerado que:

$$\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D = -i\gamma^0_{cb}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \qquad (4.94)$$

La relación (4.93) puede reescribirse como se muestra a continuación:

$$i\partial_0\overline{\psi} + i\partial_j\overline{\psi}\gamma^j\gamma^0 + m\overline{\psi}\gamma^0 = 0, \qquad (4.95)$$

multiplicando por γ^0 por la derecha y considerando que, $\left(\gamma^0\right)^2 = \mathbf{1}$, se deduce:

$$\begin{aligned}
i\partial_0\overline{\psi}\gamma^0 + i\partial_j\overline{\psi}\gamma^j\gamma^0 + m\overline{\psi} &= 0 \\
i\partial_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha + m\overline{\psi} &= 0, \qquad (4.96)
\end{aligned}$$

o bien:

$$\overline{\psi}\left(i\gamma^\alpha\overleftarrow{\partial}_\alpha + m\right) = 0. \qquad (4.97)$$

Expresión que es equivalente a la ecuación de Dirac adjunta (4.3).

Capítulo 5

Teoría de MCS en Interacción con Campo Fermiónico

En teoría de campos, el proceso de interacción entre campos es descrito por una densidad Lagrangiana construida como la adición de las densidades Lagrangianas de los campos libres ($\mathscr{L}_{libre}$) y una densidad Lagrangiana de interacción ($\mathscr{L}_{int}$) [8, 11] :

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}_{libre} + \mathscr{L}_{int}. \tag{5.1}$$

El término de interacción no es completamente arbitrario, puesto que depende tanto de las restricciones impuestas por las simetrías internas y del espacio tiempo, como de las restricciones asociadas a la presencia de vínculos en las teorías libres [8].

La electrodinámica cuántica, QED, describe el fenómeno de interacción entre electrones, positrones y fotones [8, 10]. Considerando que en este tipo de modelos en $(2+1)$ dimensiones existe la posibilidad de incluir el término de C-S, la adición de este a la QED, permite construir una nueva teoría gauge, conocida como electrodinámica cuántica con el término de Chern-Simons, QED_{2+1}, que describirá la interacción entre fermiones cargados con fotones masivos en el plano [5, 9, 10].

La densidad Lagrangiana de esta teoría es definida por:

$$\mathscr{L}_{QED} \equiv \mathscr{L}_{MCS} + \mathscr{L}_{D} + \mathscr{L}_{int}, \tag{5.2}$$

donde $\mathscr{L}_{MCS}$ es la densidad Lagrangianas de MCS dada por (3.1), mientras que $\mathscr{L}_{D}$ es la densidad Lagrangiana del campo de Dirac definida como [11] :

$$\mathscr{L}_{D} = \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi - \left(\partial_{\alpha}\overline{\psi}\right)\gamma^{\alpha}\psi\right] - m\overline{\psi}\psi. \tag{5.3}$$

Esta densidad Lagrangiana describe campos fermiónicos $\left(\psi,\overline{\psi}\right)$ de masa m y carga e. Por otro lado, el término de interacción entre los campos bosónicos y fermiónicos, presenta la siguiente estructura:

$$\mathscr{L}_{int} = eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha\psi. \tag{5.4}$$

Es relevante destacar que en el plano, el campo fundamental de Dirac ψ y su respectivo adjunto $\overline{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, son descritos por espinores de dos componentes [10]. Estos campos se caracterizan por ser campos de Grassmann, es decir, que sus respectivas componentes ψ_a y $\overline{\psi}_b$ con $a, b = 1, 2$, satisfacen relaciones de anticonmutación entre sí [8, 16]. No obstante, el campo bosónico A_α satisface un álgebra conmutativa. Por consiguiente, la densidad Lagrangiana de QED_{2+1}, se construye en un espacio definido tanto por campos bosónicos como por campos fermiónicos.

Por esta razón, para el análisis clásico de esta teoría, los campos $\left(\psi,\overline{\psi}\right)$ serán representados por variables de Grassmann de número de paridad $n_\psi = 1$, mientras que el campo bosónico A_α será considerado como un elemento del álgebra de Grassman con número de paridad par, esto es, $n_A = 0$ [16].

5.1. Invariancia gauge local

Con el objetivo de estudiar la invariancia gauge local de la teoría de QED_{2+1}, se tendrá en cuenta nuevamente que el potencial fundamental A_α transforma de acuerdo a la siguiente regla:

$$A_\alpha \longrightarrow A_\alpha + \frac{1}{e}\partial_\alpha\Lambda,$$

mientras que los campos Grassmaniannos ψ y $\overline{\psi}$ transforman como se muestra a continuación [5, 11]:

$$\psi \longrightarrow \exp\left(-i\Lambda\right)\psi, \tag{5.5}$$

$$\overline{\psi} \longrightarrow \overline{\psi}\exp\left(i\Lambda\right), \tag{5.6}$$

donde $\Lambda = \Lambda(x)$ es una función arbitraria del espacio-tiempo.

Bajo este conjunto de transformaciones la densidad Lagrangiana (5.2) se escribirá del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}'_{QED} &= \mathscr{L}'_{MCS} + \mathscr{L}'_D + \mathscr{L}'_{int} \\ &= \mathscr{L}_{MCS} + \mathscr{L}'_D + \mathscr{L}'_{int}, \end{aligned} \tag{5.7}$$

en la que se tenido en cuenta que la densidad Lagrangiana de MCS es invariante bajo transformaciones gauge locales, resultado que se mostró anteriormente. Por otra parte, de acuerdo a la transformaciones (5.5) y (5.6), la densidad Lagrangiana de Dirac se convierte en:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}'_D &= \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}'\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi' - \left(\partial_\alpha\overline{\psi}'\right)\gamma^\alpha\psi'\right] - m\overline{\psi}'\psi' \\ &= \frac{i}{2}\overline{\psi}\exp(i\Lambda)\gamma^\alpha\exp(-i\Lambda)\partial_\alpha\psi - \frac{1}{2}\overline{\psi}\exp(i\Lambda)\left(\gamma^\alpha\partial_\alpha\Lambda\right)\exp(-i\Lambda)\psi \\ &\quad -\frac{i}{2}\left(\partial_\alpha\overline{\psi}\right)\exp(i\Lambda)\gamma^\alpha\exp(-i\Lambda)\psi - \frac{1}{2}\overline{\psi}\exp(i\Lambda)\left(\gamma^\alpha\partial_\alpha\Lambda\right)\exp(-i\Lambda)\psi \\ &\quad - m\overline{\psi}\exp(i\Lambda)\exp(-i\Lambda)\psi \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{i}{2}\left[\overline{\psi}'\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi' - \left(\partial_\alpha\overline{\psi}'\right)\gamma^\alpha\psi'\right] - m\overline{\psi}'\psi' - \overline{\psi}\left(\gamma^\alpha\partial_\alpha\Lambda\right)\psi \\ &= \mathscr{L}_D - \overline{\psi}\left(\gamma^\alpha\partial_\alpha\Lambda\right)\psi. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Donde se ha introducido la densidad Lagrangiana simetrizada de Dirac (5.3). De la misma manera, bajo las trasnformaciones de los campos A_α, ψ y $\overline{\psi}$ citadas previamente, la Lagrangiana de interacción (5.4) tomará la forma que prosigue:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}'_{int} &= eA'_\alpha\overline{\psi}'\gamma^\alpha\psi' \\ &= e\left(A_\alpha + \frac{1}{e}\partial_\alpha\Lambda\right)\overline{\psi}\exp(i\Lambda)\gamma^\alpha\exp(-i\Lambda)\psi \\ &= eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha\psi + \overline{\psi}\left(\gamma^\alpha\partial_\alpha\Lambda\right)\psi \\ &= \mathscr{L}_{int} + \overline{\psi}\left(\gamma^\alpha\partial_\alpha\Lambda\right)\psi. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Sustituyendo (5.9) y (5.10) en (5.7), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}'_{QED} &= \mathscr{L}_{MCS} + \mathscr{L}_D + \mathscr{L}_{int} + \overline{\psi}\left(\gamma^\alpha \partial_\alpha \Lambda\right)\psi - \overline{\psi}\left(\gamma^\alpha \partial_\alpha \Lambda\right)\psi \\ &= \mathscr{L}_{QED}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Expresión de la que evidentemente se concluye que la densidad Lagrangiana asociada a la teoría de QED_{2+1} es invariante bajo transformaciones gauge locales.

5.2. Formalismo Lagrangiano

La densidad Lagrangiana asociada a la teoría de QED_{2+1} está construida en un superespacio real [?] definido por los campos $\left[A_\alpha, \psi, \overline{\psi}\right]$. El estudio clásico de la teoría en el formalismo Lagrangiano exige la deducción de las ecuaciones de campo asociadas a las variables que definen el espacio de configuración. Dichas relaciones pueden encontrarse a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para A_α, ψ_b y $\overline{\psi}_b$ [8], que en virtud al principio de Hamilton y a las condiciones de frontera de los campos [11, 13], son dadas por:

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial A_\beta} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)} \right) = 0, \tag{5.12}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial \psi_b} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial\left(\partial_\alpha \psi_b\right)} \right) = 0, \tag{5.13}$$

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial \overline{\psi}_b} - \partial_\alpha \left(\frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial\left(\partial_\alpha \overline{\psi}_b\right)} \right) = 0. \tag{5.14}$$

Expresiones en las que las derivadas con respecto a variables fermiónicas serán consideradas de ahora en adelante como derivadas izquierdas [16]. Con el fin de deducir las ecuaciones de campo, será necesario poner antes de manifiesto los indices matriciales en la densidad Lagrangiana (5.2), del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{QED} &= -\frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} + \frac{k}{4\pi} \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \left(\partial_\alpha A_\beta\right) A_\gamma + \frac{i}{2} \left[\overline{\psi}_b \gamma^\alpha_{bc} \partial_\alpha \psi_c - \left(\partial_\alpha \overline{\psi}_b\right) \gamma^\alpha_{bc} \psi_c\right] \\ &\quad - m \overline{\psi}_b \psi_b + e A_\alpha \overline{\psi}_b \gamma^\alpha_{bc} \psi_c, \end{aligned} \tag{5.15}$$

con $b, c = 1, 2$.

En primera instancia, según (5.2) es posible escribir la ecuación de Euler-Lagrange (5.12) de la forma que prosigue:

$$\frac{\partial}{\partial A_\beta}\left(\mathscr{L}_{MCS}+\mathscr{L}_D+\mathscr{L}_{int}\right)-\partial_\alpha\left[\frac{\partial}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}\left(\mathscr{L}_{MCS}+\mathscr{L}_D+\mathscr{L}_{int}\right)\right]=0. \tag{5.16}$$

A partir de la relación (5.3) se deduce que:

$$\frac{\partial\mathscr{L}_D}{\partial A_\beta}=\frac{\partial\mathscr{L}_D}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}=0. \tag{5.17}$$

Similarmente de la Lagrangiana de interacción (5.4), se puede calcular la siguiente derivada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}_{int}}{\partial A_\beta} &= \frac{\partial}{\partial A_\beta}\left(eA_\mu\overline{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}\psi_c\right)\\ &= e\frac{\partial A_\mu}{\partial A_\beta}\overline{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}\psi_c\\ &= e\delta^\beta_\mu\overline{\psi}_b\gamma^\mu_{bc}\psi_c\\ &= e\overline{\psi}_b\gamma^\beta_{bc}\psi_c,\end{aligned} \tag{5.18}$$

al igual que el siguiente término:

$$\frac{\partial\mathscr{L}_{int}}{\partial\left(\partial_\alpha A_\beta\right)}=0. \tag{5.19}$$

Sustituyendo los resultados deducidos previamente en (3.4), (3.7) (véase formalismo Lagrangiano de la teoría de MCS) y las ecuaciones (5.17) a (5.19), en la ecuación de Euler-Lagrange (5.16), se comprueba que la ecuación de campo asociada al potencial fundamental A_α está dada por:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}+\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}F_{\alpha\gamma}+e\overline{\psi}_b\gamma^\beta_{bc}\psi_c=0. \tag{5.20}$$

Definiendo la corriente fermiónica como:

$$J^\beta\equiv-e\overline{\psi}_b\gamma^\beta_{bc}\psi_c, \tag{5.21}$$

se encuentra que la ecuación covariante de campo para A_α es:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta}+\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}F_{\alpha\gamma}=J^\beta. \tag{5.22}$$

De la misma manera, se procederá a obtener las ecuaciones de campo asociadas a ψ y $\overline{\psi}$. Para tal fin, se determinará a partir de (5.13) la siguiente derivada izquierda:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial \psi_b} &= \frac{\partial}{\partial \psi_b}\left[-\frac{i}{2}\left(\partial_\alpha \overline{\psi}_c\right)\gamma^\alpha_{cd}\psi_d - m\overline{\psi}_c\psi_c + eA_\alpha\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cd}\psi_d\right] \\
&= \frac{i}{2}\frac{\partial \psi_d}{\partial \psi_b}\partial_\alpha\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cd} + m\frac{\partial \psi_c}{\partial \psi_b}\overline{\psi}_c - eA_\alpha\frac{\partial \psi_d}{\partial \psi_b}\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cd} \\
&= \frac{i}{2}\delta_{bd}\partial_\alpha\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cd} + m\delta_{cb}\overline{\psi}_c - eA_\alpha\delta_{db}\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cd} \\
&= \frac{i}{2}\partial_\alpha\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cb} + m\overline{\psi}_b - eA_\alpha\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cb}.
\end{aligned} \tag{5.23}
$$

Análogamente, es posible solucionar:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial\left(\partial_\alpha \psi_b\right)} &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\alpha \psi_b\right)}\left[\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^\mu_{cd}\partial_\mu\psi_d\right] \\
&= -\frac{i}{2}\frac{\partial\left(\partial_\mu\psi_d\right)}{\partial\left(\partial_\alpha\psi_b\right)}\overline{\psi}_c\gamma^\mu_{cd} \\
&= -\frac{i}{2}\delta^\alpha_\mu\delta_{bd}\overline{\psi}_c\gamma^\mu_{cd} \\
&= -\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cb}.
\end{aligned} \tag{5.24}
$$

Cabe anotar, que para la obtención de las dos expresiones anteriores se ha considerado que los campos Grassmannianos anticonmutan entre sí. Sustituyendo ahora los resultados derivados en (5.23) y (5.24) en la ecuación de Euler-Lagrange (5.13), se deduce que la ecuación de campo asociada a $\overline{\psi}_b$ es:

$$
i\partial_\alpha\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cb} + m\overline{\psi}_b = eA_\alpha\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cb} \quad \text{o} \quad \left(i\gamma^\alpha\overleftarrow{\partial}_\alpha + m\right)\overline{\psi} = eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha \tag{5.25}
$$

Similarmente, mediante (5.15) se caculará la derivada izquierda que se muestra a continuación:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial \overline{\psi}_b} &= \frac{\partial}{\partial \overline{\psi}_b}\left[\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cd}\partial_\alpha\psi_d - m\overline{\psi}_c\psi_c + eA_\alpha\overline{\psi}_c\gamma^\alpha_{cd}\psi_d\right] \\
&= \frac{i}{2}\frac{\partial \overline{\psi}_c}{\partial \overline{\psi}_b}\gamma^\alpha_{cd}\partial_\alpha\psi_d - m\frac{\partial \overline{\psi}_c}{\partial \overline{\psi}_b}\psi_c + eA_\alpha\frac{\partial \overline{\psi}_c}{\partial \overline{\psi}_b}\gamma^\alpha_{cd}\psi_d \\
&= \frac{i}{2}\delta_{bc}\gamma^\alpha_{cd}\partial_\alpha\psi_d - m\delta_{bc}\psi_c + eA_\alpha\delta_{bc}\gamma^\alpha_{cd}\psi_d \\
&= \frac{i}{2}\gamma^\alpha_{bd}\partial_\alpha\psi_d - m\psi_b + eA_\alpha\gamma^\alpha_{bd}\psi_d.
\end{aligned} \tag{5.26}
$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial\left(\partial_\alpha \overline{\psi}_b\right)} &= \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\alpha \overline{\psi}_b\right)}\left[-\frac{i}{2}\left(\partial_\mu \overline{\psi}_c\right)\gamma^\mu_{cd}\psi_d\right] \\ &= -\frac{i}{2}\frac{\partial\left(\partial_\mu \overline{\psi}_c\right)}{\partial\left(\partial_\alpha \overline{\psi}_b\right)}\gamma^\mu_{cd}\psi_d \\ &= -\frac{i}{2}\delta^\alpha_\mu \delta_{bc}\gamma^\mu_{cd}\psi_d \\ &= -\frac{i}{2}\gamma^\alpha_{bd}\psi_d. \end{aligned} \tag{5.27}$$

Reemplazando (5.26) y (5.27) en la ecuación de Euler-Lagrange (5.14), se ecuentra que la ecuación de campo asoaciada a ψ_b viene dada por:

$$i\gamma^\alpha_{bd}\partial_\alpha\psi_d - m\psi_b = -eA_\alpha\gamma^\alpha_{bd}\psi_d. \quad \text{o} \quad \left(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m\right)\psi = -eA_\alpha\gamma^\alpha\psi. \tag{5.28}$$

Es posible condensar las ecuaciones de campo de la QED_{2+1} del modo que prosigue:

$$\begin{cases} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}F_{\alpha\gamma} = J^\beta \\ i\gamma^\alpha\partial_\alpha\psi - m\psi = -eA_\alpha\gamma^\alpha\psi \\ i\partial_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha + m\overline{\psi} = eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha \end{cases}$$

Observese que en el limite de la constante de acomplamiento $e \to 0$, se verifica que:

$$\begin{cases} \partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}F_{\alpha\gamma} = 0 \\ \left(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m\right)\psi = 0 \\ \left(i\gamma^\alpha\overleftarrow{\partial}_\alpha + m\right)\overline{\psi} = 0 \end{cases}$$

Luego, en este limite las ecuaciones de campo de la teoría se reducen a las ecuaciónes de campo de MCS y de Dirac libres [8, 11].

5.3. Formalismo Hamiltoniano

La formulación de Hamilton de la mecánica clásica busca estudiar la teoría en un espacio definido no solo por los campos A_α, ψ y $\overline{\psi}$, si no tambíen de los momentos canónicos conjugados a dichos campos, este espacio se denomina como superespacio de fase [16].

Es importante tener en cuenta que este espacio estará constituido tanto de variables bosónicas, que conmutan entre sí, como de variables fermiónicas, que anticonmutan [16].

Se define entonces, los momentos canónicos asociados al potencial fundamental A_α y a los campos fermiónicos ψ_b y $\overline{\psi}_b$ con $b = 1, 2$, respectivamente como [11, 12]:

$$\pi^\beta \equiv \pi^\beta(\boldsymbol{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial\left(\partial_0 A_\beta\right)} = F^{\beta 0} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0\beta\gamma}A_\gamma, \tag{5.29}$$

$$\pi_b \equiv \pi_b(\boldsymbol{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial\left(\partial_0 \psi_b\right)} = -\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^0_{cb}, \tag{5.30}$$

$$\overline{\pi}_b \equiv \overline{\pi}_b(\boldsymbol{x}, t) \equiv \frac{\partial \mathscr{L}_{QED}}{\partial\left(\partial_0 \overline{\psi}_b\right)} = -\frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\psi_d. \tag{5.31}$$

Cabe anotar, que para obtener (5.29) se empleo el resultado encontrado en (3.7), mientras que para la deducción de los momentos canónicos asociados a los campos fermiónicos, se hizo uso de las derivadas izquierdas introducidas anteriormente en las ecuaciones (5.24) y (5.27).

Nótese que para el valor particular $\beta = 0$, la componente temporal del campo π^β será:

$$\begin{aligned}\pi^0 &= F^{00} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{00\gamma}A_\gamma \\ &= 0.\end{aligned} \tag{5.32}$$

De forma análoga, para $\beta = i$ se verifica que:

$$\pi_i = \partial_i A_0 - \partial_0 A_i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j, \tag{5.33}$$

donde se ha empleado la definición del tensor de campo electromagnético (1.2). En adición a estas relaciones, se puede apreciar que el campo eléctrico para la teoría en cuestión presenta la siguiente estructura:

$$E_i = \pi_i + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j. \tag{5.34}$$

Tras analizar las ecuaciones (5.32) y (5.33), es posible notar que apenas la componente espacial del campo π^{β} presenta derivadas temporales del potencial A_{α}. Por consiguiente, se concluye que la relación (5.32), concerniente a la componente temporal del campo π^{β}, se asocia con un vínculo primario [6, 7, 8] que se denotará como sigue:

$$\pi_0 \approx 0. \tag{5.35}$$

Este vínculo surge del momento canónico asociado a una variable bosónica, por ende se dice que se trata de un elemento par del álgebra de Grassman [16].

Por otra parte, las relaciones (5.30) y (5.31) no presentan derivadas temporales de los campos fundamentales de Dirac, por tal razón, estás expresiones son tambíen vínculos primarios [6, 7, 8] que se definirán como se muestra a continuación:

$$\Gamma_b^1 = \Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t) \equiv \pi_b + \frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^0_{cb} \approx 0, \tag{5.36}$$

$$\Gamma_b^2 = \Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t) \equiv \overline{\pi}_b + \frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\psi_d \approx 0. \tag{5.37}$$

Como consecuencia de la definición de los momentos canónicos conjugados a los campos fundamentales de Dirac, los vínculos Γ_b^i con $i = 1,2$, son vínculos fermiónicos, es decir, que pertenecen al álgebra de Grassmann y se caracterizan por ser variables de paridad impar. Mediante las expresiones (5.35), (5.36) y (5.37) se puede concluir que hasta el momento la teoría esta comprendida por un total de cinco vínculos.

El espacio de fase de la QED_{2+1} es definido por los campos $\left[A_{\alpha},\psi_b,\overline{\psi}_b,\pi^{\alpha},\pi_b,\overline{\pi}_b\right]$. La dinámica de cualquier variable que se constituye en este espacio se determina en virtud a la densidad Hamiltoniana canónica del sistema, que de acuerdo a una transformación de Legendre [12] , se define por:

$$\mathscr{H}_{c(QED)} \equiv \partial_0 A_{\beta}\pi^{\beta} + \left(\partial_0\psi_b\right)\pi_b + \left(\partial_0\overline{\psi}_b\right)\overline{\pi}_b - \mathscr{L}_{QED}. \tag{5.38}$$

Resulta importante resaltar que la forma de la densidad Hamiltoniana (5.38) dependerá del tipo de derivada que se utilice [8], en este caso, dada la presencia de campos fermiónicos se han considerado derivadas izquierdas. Reemplazando en (5.38) la densidad Lagrangiana (5.15) y los momentos canónicos π_b y $\overline{\pi}_b$, dados respectivamente en (5.30) y (5.31), se obtiene que:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{c(QED)} &= \partial_0 A_\beta \pi^\beta + \frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} - \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_\alpha A_\beta\right)A_\gamma - \frac{i}{2}\left(\partial_0\psi_b\right)\overline{\psi}_c\gamma^0_{cb} - \frac{i}{2}\left(\partial_0\overline{\psi}_b\right)\gamma^0_{bd}\psi_d \\ &\quad - \frac{i}{2}\overline{\psi}_b\gamma^\alpha_{bc}\partial_\alpha\psi_c + \frac{i}{2}\left(\partial_\alpha\overline{\psi}_b\right)\gamma^\alpha_{bc}\psi_c + m\overline{\psi}_b\psi_b - eA_\alpha\overline{\psi}_b\gamma^\alpha_{bc}\psi_c. \qquad (5.39)\end{aligned}$$

Que en virtud a la densidad Hamiltoniana canónica de MCS (observar ecuación (3.35)), se puede simplificar como sigue:

$$\mathscr{H}_{c(QED)} = \mathscr{H}_{c(MCS)} - \frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^j\partial_j\psi + \frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}\right)\gamma^j\psi + m\overline{\psi}\psi - eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha\psi, \qquad (5.40)$$

con $j = 1,2$. Cabe anotar, que en el cálculo previo se ha expandido el índice α teniendo en cuenta que: $\alpha = 0,1,2$. Reemplazando (3.39) en (5.40) se encuentra que la densidad Hamiltoniana canónica es:

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{c(QED)} &\approx \frac{1}{2}\left[\pi_i + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\right]^2 - \pi_i\partial_i A_0 - \frac{k}{4\pi}A_0\varepsilon_{ij}\partial_i A_j \\ &\quad - \frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^j\partial_j\psi + \frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}\right)\gamma^j\psi + m\overline{\psi}\psi - eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha\psi. \qquad (5.41)\end{aligned}$$

En base a este resultado se construirá el Hamiltoniano canónico del sistema, del siguiente modo:

$$\begin{aligned}H_{c(QED)} &\equiv \int d^3x\mathscr{H}_{c(QED)} \\ &\approx \int d^3x\mathscr{H}_{c(MCS)} + \int d^3x\left[-\frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^j\partial_j\psi + \frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}\right)\gamma^j\psi + m\overline{\psi}\psi - eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha\psi\right] \\ &\approx H_{c(MCS)} + \int d^3x\left[-\frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^j\partial_j\psi + \frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}\right)\gamma^j\psi + m\overline{\psi}\psi - eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha\psi\right]. \qquad (5.42)\end{aligned}$$

Según el Hamiltoniano canónico de MCS dado en (3.41), es posible escribir la cantidad previa como sigue:

$$\begin{aligned}H_{c(QED)} &\approx \int d^2x\left\{\frac{1}{2}\left[\pi_i + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\right]^2 + A_0\left[\partial_i\pi_i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\right]\right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2}\overline{\psi}\gamma^j\partial_j\psi + \frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}\right)\gamma^j\psi + m\overline{\psi}\psi - eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha\psi\right\}, \qquad (5.43)\end{aligned}$$

que escrito en componentes matriciales será:

$$\begin{aligned} H_{c(QED)} \approx & \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}\left[\pi_i + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\right]^2 + A_0\left[\partial_i\pi_i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\right] \right. \\ & \left. -\frac{i}{2}\overline{\psi}_b\gamma^j_{bc}\partial_j\psi_c + \frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}_b\right)\gamma^j_{bc}\psi_c + m\overline{\psi}_b\psi_b - eA_\alpha\overline{\psi}_b\gamma^\alpha_{bc}\psi_c \right\}. \end{aligned} \tag{5.44}$$

De acuerdo al método de Dirac, es posible añadir al Hamiltoniano canónico cualquier combinación lineal de los vínculos primarios del sistema [6, 7, 8]. Por tal motivo, si se agrega una combinación lineal de los vínculos primarios π_0, Γ^1_b y Γ^2_b, se encuentra que el Hamiltoniano primario de la QED_{2+1} es:

$$H_{p(QED)} \equiv H_{c(QED)} + \int d^2x \left[\lambda_0\pi_0 + \Gamma^1_b\lambda^1_b + \lambda^2_b\Gamma^2_b\right]. \tag{5.45}$$

Expresión en el que los términos $\lambda_0 = \lambda_0(\boldsymbol{x}, t)$, $\lambda^i_b = \lambda^i_b(\boldsymbol{x}, t)$ con $i = 1, 2$, son funciones arbitrarias del espacio-tiempo conocidas como multiplicadores de Lagrange. A fin de asegurar que el Hamiltoniano primario sea una cantidad física de paridad par, se considerará que λ_0 es una variable bosónica (paridad par), mientras que los multiplicadores de Lagrange λ^i_b son variables fermiónicas de paridad impar.

El espacio de fase está conformado por las variables canónicas $\left[A_\alpha, \psi_b, \overline{\psi}_b, \pi^a, \pi_b, \overline{\pi}_b\right]$ y una variable dinámica será definida en este. Los PP calculados en el superespacio de fase son conocidos como paréntesis de Berezin o paréntesis de Bose-Fermi (PB) [8, 16] y serán definidos dependiendo de la paridad de las variables dinámicas. Para el caso en que $B(\boldsymbol{x}, t) \equiv B\left(A_\alpha, \psi_b, \overline{\psi}_b, \pi^a, \pi_b, \overline{\pi}_b\right)$ denote una variable dinámica bosónica del superespacio de fase y $F(\boldsymbol{x}, t) \equiv F\left(A_\alpha, \psi_b, \overline{\psi}_b, \pi^a, \pi_b, \overline{\pi}_b\right)$ una variable dinámica fermiónica del mismo espacio, los PB en tiempos iguales entre ellas se definirán como sigue [8]:

1. PB entre dos variables bosónicas $B_1(\boldsymbol{x}, t)$ y $B_2(\boldsymbol{x}, t)$:

$$\begin{aligned}\left\{B_1(\boldsymbol{x},t),B_2(\boldsymbol{y},t)\right\} \equiv & \int d^2z\frac{\delta B_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta\psi_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta B_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi_b(\boldsymbol{z},t)}-\int d^2z\frac{\delta B_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta\psi_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta B_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi_b(\boldsymbol{z},t)}+\\ & \int d^2z\frac{\delta B_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\psi}_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta B_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\pi}_b(\boldsymbol{z},t)}-\int d^2z\frac{\delta B_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\psi}_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta B_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\pi}_b(\boldsymbol{z},t)}+\\ & \int d^2z\frac{\delta B_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta A_\alpha(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta B_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi^\alpha(\boldsymbol{z},t)}-\int d^2z\frac{\delta B_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta A_\alpha(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta B_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi^\alpha(\boldsymbol{z},t)},\end{aligned} \tag{5.46}$$

2. PB entre una variable fermiónica $F(\boldsymbol{x},t)$ y una bosónica $B(\boldsymbol{x},t)$:

$$\begin{aligned}\left\{F(\boldsymbol{x},t),B(\boldsymbol{y},t)\right\} \equiv & -\int d^2z\frac{\delta F(\boldsymbol{x},t)}{\delta\psi_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta B(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi_b(\boldsymbol{z},t)}-\int d^2z\frac{\delta B(\boldsymbol{x},t)}{\delta\psi_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta F(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi_b(\boldsymbol{z},t)}\\ & -\int d^2z\frac{\delta F(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\psi}_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta B(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\pi}_b(\boldsymbol{z},t)}-\int d^2z\frac{\delta B(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\psi}_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta F(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\pi}_b(\boldsymbol{z},t)}\\ & +\int d^2z\frac{\delta F(\boldsymbol{x},t)}{\delta A_\alpha(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta B(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi^\alpha(\boldsymbol{z},t)}-\int d^2z\frac{\delta B(\boldsymbol{x},t)}{\delta A_\alpha(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta F(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi^\alpha(\boldsymbol{z},t)},\end{aligned} \tag{5.47}$$

3. PB entre dos variables fermiónicas $F_1(\boldsymbol{x},t)$ y $F_2(\boldsymbol{x},t)$:

$$\begin{aligned}\left\{F_1(\boldsymbol{x},t),F_2(\boldsymbol{y},t)\right\} \equiv & -\int d^2z\frac{\delta F_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta\psi_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta F_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi_b(\boldsymbol{z},t)}-\int d^2z\frac{\delta F_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta\psi_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta F_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi_b(\boldsymbol{z},t)}\\ & -\int d^2z\frac{\delta F_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\psi}_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta F_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\pi}_b(\boldsymbol{z},t)}-\int d^2z\frac{\delta F_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\psi}_b(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta F_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta\overline{\pi}_b(\boldsymbol{z},t)}\\ & +\int d^2z\frac{\delta F_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta A_\alpha(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta F_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi^\alpha(\boldsymbol{z},t)}-\int d^2z\frac{\delta F_2(\boldsymbol{x},t)}{\delta A_\alpha(\boldsymbol{z},t)}\frac{\delta F_1(\boldsymbol{x},t)}{\delta\pi^\alpha(\boldsymbol{z},t)}.\end{aligned} \tag{5.48}$$

En virtud a la definición (5.46), se puede verificar que el único PB no nulo entre las variables bosónicas del superespacio de fase $[A_\alpha,\pi^\alpha]$ es:

$$\left\{A_\alpha(\boldsymbol{x},t),\pi_\beta(\boldsymbol{y},t)\right\}=\eta_{\alpha\beta}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{5.49}$$

que es justamente el PP deducido en (2.38) durante el estudio de las teorías de C-S pura y MCS. Por consiguiente, se comprueba que los PB fundamentales entre las variables bosónicas del superespacio de fase se reducen a los PP fundamentales calculados en las teorías previas. Por otro lado, a partir de las definiciones (5.47) y (5.48), se deduce que los PB no nulos entre los campos fermiónicos del superespacio de fase $\left[\psi_b, \overline{\psi}_b, \pi_b, \overline{\pi}_b\right]$ serán:

$$\left\{\psi_b\left(\boldsymbol{x},t\right), \pi_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} = -\delta_{bc}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right), \tag{5.50}$$

$$\left\{\overline{\psi}_b\left(\boldsymbol{x},t\right), \overline{\pi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} = -\delta_{bc}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right), \tag{5.51}$$

que son equivalentes a los PB (4.32) y (4.33) deducidos en el estudio de la teoría de campo fermiónico en $(2+1)$ dimensiones. Cabe anotar, que cualquier PB fundamental calculado entre los campos bosónicos $\left[A_\alpha, \pi^\alpha\right]$ y los campos fermiónicos $\left[\psi_b, \overline{\psi}_b, \pi_b, \overline{\pi}_b\right]$ es igual a cero.

5.3.1. Análisis de consistencia de vínculos

El análisis canónico de la teoría será consistente siempre que los vínculos encontrados en ella se conserven durante la evolución dinámica del sistema [6, 7, 8]. Por consiguiente, se debe garantizar que los vínculos primarios π_0 y Γ^i_b satisfagan un requerimiento de consistencia, esto es que su PB con el Hamiltoniano primario se anule debilmente [8]. El análisis de consistencia sobre el vínculo primario π_0 vendrá dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{\pi}_0 &= \left\{\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right), H_{p(QED)}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \\
&= \left\{\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right), H_{c(QED)}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} + \int d^2y \left\{\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right), \lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right) + \right. \\
&\quad \left. \Gamma^1_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\lambda^1_b\left(\boldsymbol{y},t\right) + \lambda^2_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\Gamma^2_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \\
&\approx 0.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Para solucionar la expresión previa se hará uso del siguiente resultado (deducido en el **Apéndice M**):

$$\left\{\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right), H_{c(QED)}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx -\partial^x_i \pi_i\left(\boldsymbol{x},t\right) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial^x_i A_j\left(\boldsymbol{x},t\right) + e\overline{\psi}_b\left(\boldsymbol{x},t\right)\gamma^0_{bc}\psi_c\left(\boldsymbol{x},t\right). \tag{5.53}$$

De la misma manera, será necesario tener en cuenta el siguiente PB:

$$\left\{\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right), \lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0. \tag{5.54}$$

Además, mediante los vínculos dados por (5.36), (5.37) y los PB fundamentales se encuentra:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\Gamma_b^1(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\pi_b(\boldsymbol{y},t)+\frac{i}{2}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\gamma_{cb}^0\right\}\\ &\approx 0,\end{aligned} \tag{5.55}$$

$$\begin{aligned}\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\Gamma_b^2(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\overline{\pi}_b(\boldsymbol{y},t)+\frac{i}{2}\gamma_{bd}^0\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned} \tag{5.56}$$

De las ecuaciones (5.55), (5.56) y las propiedades de los PB (véase **Apéndice L**), se deducen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\Gamma_b^1(\boldsymbol{y},t)\lambda_b^1(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\Gamma_b^1(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda_b^1(\boldsymbol{y},t)+\Gamma_b^1(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\lambda_b^1(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx 0,\end{aligned} \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned}\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\lambda_b^2\Gamma_b^2(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t),\lambda_b^2(\boldsymbol{y},t)\right\}\Gamma_b^2(\boldsymbol{y},t)+\lambda_b^2(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t)\Gamma_b^2(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned} \tag{5.58}$$

Reemplazando (5.53), (5.54), (5.57) y (5.58) en (5.52), se verifica que el requerimiento de consistencia del vínculo primario π_0 arrojá como resultado:

$$\dot{\pi}_0(\boldsymbol{x},t)\approx-\partial_i^x\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t)+e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\gamma_{bc}^0\psi_c(\boldsymbol{x},t)\approx 0. \tag{5.59}$$

Nótese que esta expresión no presenta derivadas temporales de las variables del superespacio de fase en su estructura, a causa de esto se dice que el análisis de consistencia del vínculo bosónico π_0 da origen a un nuevo vínculo secundario, que denotará del siguiente modo:

$$\Sigma=\Sigma(\boldsymbol{x},t)\equiv\partial_i^x\pi_i(\boldsymbol{x},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t)-e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\gamma_{bc}^0\psi_c(\boldsymbol{x},t)\approx 0. \tag{5.60}$$

Este vínculo tiene número de paridad $n_\Sigma=0$, pues el término $e\overline{\psi}_b\gamma_{bc}^0\psi_c$ es de paridad par. La expresión (5.60) puede reescribirse de la forma que se muestra a continuación:

$$\Sigma=G(\boldsymbol{x},t)-e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\gamma_{bc}^0\psi_c(\boldsymbol{x},t)\approx 0, \tag{5.61}$$

donde se ha denotado:

$$G = \partial_i \pi_i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j,$$

que es el vínculo asociado a la ley de Gauss para la teoría de MCS (observar ecuación (3.47)).

Debido a que la teoria cuenta ahora con un vínculo adicional, es necesario analizar el requermiento de consistencia sobre el, con el objetivo de asegurar que se conserve durante la evolución dinámica del sistema y de comprobar si surgirán o no nuevos vínculos. Luego, se procederá a resolver:

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma} &= \left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), H_{p(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&= \left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} + \int d^2y \left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), \lambda_0(\boldsymbol{y},t)\pi_0(\boldsymbol{y},t) + \right. \\
&\quad \left. \Gamma_b^1(\boldsymbol{y},t)\lambda_b^1(\boldsymbol{y},t) + \lambda_b^2(\boldsymbol{y},t)\Gamma_b^2(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx 0.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Para el análisis de consistencia del vínculo Σ se tendrá en cuenta los resultados mostrados a continuación (véase **Apéndice M**):

$$\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx -e\partial_j^x\left[\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\gamma_{ad}^j\psi_d(\boldsymbol{x},t)\right], \tag{5.63}$$

$$\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), \Gamma_b^1(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx e\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\gamma_{ab}^0\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{5.64}$$

$$\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), \Gamma_b^2(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx -e\gamma_{bc}^0\psi_c(\boldsymbol{x},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{5.65}$$

A partir de (5.64), (5.65) y las propiedades de los PB (observar **Apéndice L**), se deducen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned}
\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), \Gamma_b^1(\boldsymbol{y},t)\lambda_b^1(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), \Gamma_b^1(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda_b^1(\boldsymbol{y},t) + \\
&\quad \Gamma_b^1(\boldsymbol{y},t)\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), \lambda_b^1(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx \left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), \Gamma_b^1(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda_b^1(\boldsymbol{y},t) \\
&\approx e\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\gamma_{ab}^0(\boldsymbol{x},t)\lambda_b^1(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{5.66}$$

$$\begin{aligned}
\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t),\lambda_b^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\Gamma_b^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t),\lambda_b^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\Gamma_b^2\left(\boldsymbol{y},t\right)+ \\
&\quad \lambda_b^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t),\Gamma_b^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \\
&\approx \lambda_b^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t),\Gamma_b^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \\
&\approx -e\lambda_b^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\gamma_{bc}^0\psi_c(\boldsymbol{x},t)\,\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).
\end{aligned} \tag{5.67}$$

Cabe anotar, que para la deducción de los resultados previos, se tuvo en cuenta que los PB a resolver son de la forma $\{B,F_1F_2\}$, donde B es una variable bosónica y F_i con $i=1,2$, son dos variables fermiónicas. De forma similar, en virtud a los PB fundamentales es posible determinar

$$\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}=\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t),\lambda_0\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx 0. \tag{5.68}$$

Sustituyendo los PB deducidos en (5.63), (5.66), (5.67) y (5.68) en la ecuación (5.62), se obtiene que la condición de consistencia sobre el vínculo secundario Σ es:

$$\begin{aligned}
\dot{\Sigma} &= -e\partial_j^x\left[\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\gamma_{ad}^j\psi_d(\boldsymbol{x},t)\right]+e\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\gamma_{ab}^0(\boldsymbol{x},t)\lambda_b^1(\boldsymbol{x},t)-e\lambda_b^2(\boldsymbol{x},t)\gamma_{bc}^0\psi_c(\boldsymbol{x},t) \\
&= e\left[\overline{\psi}\gamma^0\lambda^1-\lambda^2\gamma^0\psi-\partial_j\left(\overline{\psi}\gamma^j\psi\right)\right]\approx 0.
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Esta ecuación permite fijar condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange λ^1 y λ^2. Por consiguiente, se concluye que como consecuencia del análisis de consistencia de Σ no surgirán nuevos vínculos.

Hasta este punto se han logrado estudiar la consistencia sobre los vónculos bosónicos π_0 y Σ. Es ahora de interés garantizar que los vínculos fermiónicos Γ_b^i se conserven durante la evolución dinámica del sistema. En primer lugar, la condición de consistencia sobre el vínculo fermiónico Γ_b^1 indicá que se debe satisfacer:

$$\begin{aligned}
\dot{\Gamma}_b^1(\boldsymbol{x},t) &= \left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),H_{p(QED)}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \\
&= \left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),H_{c(QED)}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}+\int d^2y\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\lambda_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)+\right. \\
&\quad \left.\Gamma_c^1\left(\boldsymbol{y},t\right)\lambda_c^1\left(\boldsymbol{y},t\right)+\lambda_c^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\Gamma_c^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \\
&\approx 0.
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Con el propósito de solucionar completamente el requerimiento de consistencia citado previamente, se emplearán los siguientes resultados (calculados en el **Apéndice M**):

$$\begin{aligned}\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx i\partial_j^x\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma_{cb}^j+m\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)-eA_\alpha(\boldsymbol{x},t)\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma_{cb}^\alpha, &(5.71)\\ \left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx 0, &(5.72)\\ \left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx -i\gamma_{cb}^0\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). &(5.73)\end{aligned}$$

Mediante las fórmulas (5.72), (5.73) y las propiedades de los PB (observar **Apéndice L**), se derivan los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\lambda_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda_c^1(\boldsymbol{y},t)-\Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\lambda_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx \left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda_c^1(\boldsymbol{y},t)\\ &\approx 0, &(5.74)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\}\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)-\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx -\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx i\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\gamma_{cb}^0\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). &(5.75)\end{aligned}$$

Resulta relevante indicar que los PB inmediatamente anteriores son de la forma $\{F_1,F_2F_3\}$, donde F_i con $i=1,2,3$, son tres variables fermiónicas. Análogamente, en virtud a los PB fundamentales es evidente que:

$$\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\pi_0(\boldsymbol{y},t)\right\}=\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\lambda_0\pi_0(\boldsymbol{y},t)\right\}\approx 0. \tag{5.76}$$

Reemplazando (5.71), (5.74), (5.75) y (5.76) en (5.70), se observa que:

$$\dot{\Gamma}_b^1=i\partial_j^x\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma_{cb}^j+m\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)-eA_\alpha(\boldsymbol{x},t)\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma_{cb}^\alpha+i\lambda_c^2(\boldsymbol{x},t)\gamma_{cb}^0\approx 0. \tag{5.77}$$

El requerimiento de consistencia del vínculo fermiónico Γ_b^1 ha dado como resultado una expresión que permitirá fijar condiciones sobre el multiplicador de Lagrange λ_b^2. Por tal motivo, se puede inferir que no surgirán más vínculos asociados a Γ^1_b.

Para culminar el análisis de consistencia de los vínculos de la teoría de QED_{2+1}, resta asegurar que el vínculo Γ^2_b se conserve durante la evolución dinámica del sistema, matemáticamente, se debe cumplir la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \dot{\Gamma}^2{}_b &= \left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t), H_{p(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &= \left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t), H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} + \int d^2y \left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t), \lambda_0(\boldsymbol{y},t)\pi_0(\boldsymbol{y},t) + \right. \\ &\quad \left. \Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\lambda^1_c(\boldsymbol{y},t) + \lambda^2_c(\boldsymbol{y},t)\Gamma^2_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx 0. \end{aligned} \tag{5.78}$$

Para resolver la expresión preliminar serán necesarios los siguientes PB (calculados en el **Apéndice M**):

$$\begin{aligned} \left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t), H_{p(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx i\gamma^j_{bd}\partial^y_j\psi_d(\boldsymbol{y},t) - m\psi_b(\boldsymbol{y},t) + \\ &\quad eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{bd}\psi_d(\boldsymbol{y},t), \end{aligned} \tag{5.79}$$

$$\left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx -i\gamma^0_{bc}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{5.80}$$

$$\left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma^2_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx 0. \tag{5.81}$$

Empleando las relaciones (5.80), (5.81) y las propiedades de los PB (véase **Apéndice L**), se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\lambda^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t)\Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda^1_c(\boldsymbol{y},t) - \\ &\quad \Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t), \lambda^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx \left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t)\Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\lambda^1_c(\boldsymbol{y},t) \\ &\approx -i\gamma^0_{bc}\lambda^1_c(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \end{aligned} \tag{5.82}$$

$$
\begin{aligned}
\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\}\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t) - \\
&\quad \lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx -\lambda_c^2(\boldsymbol{y},t)\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx 0.
\end{aligned} \tag{5.83}
$$

Cabe anotar, que los PB inmediatamente anteriores son de la forma $\{F_1, F_2F_3\}$, donde F_i con $i = 1,2,3$, son tres variables fermiónicas. Igualmente, en virtud a los PB fundamentales es evidente que:

$$
\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\pi_0(\boldsymbol{y},t)\right\} = \left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\lambda_0\pi_0(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx 0. \tag{5.84}
$$

Al sustituir (5.79), (5.82), (5.83) y (5.84) en (5.78), se llega a:

$$
\dot{\Gamma}_b^2 = i\gamma_{bd}^j\partial_j^x\psi_d(\boldsymbol{x},t) - m\psi_b(\boldsymbol{x},t) + eA_\alpha(\boldsymbol{x},t)\gamma_{bd}^\alpha\psi_d(\boldsymbol{x},t) - i\gamma_{bc}^0\lambda_c^1(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{5.85}
$$

El requerimiento de consistencia del vínculo fermiónico Γ_b^2 da como resultado una expresión que permitirá fijar condiciones sobre el multiplicador de Lagrange λ_b^1. Luego, se puede establecer que no surgirán nuevos vínculos. Hasta ahora, se puede establecer que el conjunto de vínculos para la teoría de QED_{2+1} está conformado por:

$$
\begin{cases}
\pi_0(\boldsymbol{x},t) \approx 0 \\
\Sigma(\boldsymbol{x},t) = \partial_i^x\pi_i(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t) - e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\gamma_{bc}^0\psi_c(\boldsymbol{x},t) \approx 0 \\
\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t) = \pi_b + \frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^0 \approx 0 \\
\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t) = \overline{\pi}_b + \frac{i}{2}\gamma_{bd}^0\psi_d \approx 0
\end{cases}
$$

5.3.2. Clasificación de vínculos de primera y segunda clase

De acuerdo a los planteamientos del método de Dirac, se debe clasificar el conjunto de vínculos de la teoría en análisis, en vínculos de primera o segunda clase. Para tal fin se debe tener en cuenta, que un vínculo será de primera clase si su PB con todos los vínculos del sistema y con sigo mismo se anulan debilmente, de no cumplirse esta condición, se concluye que el vínculo es de segunda clase [6, 7, 8].

A partir de las ecuaciones (5.68), (5.76), (5.84) y los PB fundamentales, se puede verificar que todos los PB calculados entre π_0 y el conjunto de vínculos de la teoría son debilmente nulos, razón por la cual se establece que el vínculo π_0 es de primera clase.

Por otro lado, se puede observar que los PB desarrollados previamente en las relaciones (5.64) y (5.65) no se anulan debilmente, luego, se podrá afirmar que el vínculo bosónico Σ es de segunda clase. Similarmente, en virtud a las ecuaciones (5.73) y (5.80) es posible comprobar que no todos los PB entre Γ_b^i con $i = 1,2$, y el conjunto total de vínculos del sistema son debilmente iguales a cero. Por consiguiente, se determina que los vínculos fermiónicos Γ_b^i son tambíen de segunda clase.

Se sabe que, la QED_{2+1} surge del acoplamiento entre la teoría de MCS y la teoría de campo fermiónico en $(2+1)$ dimensiones, por tal motivo, se esperaría que en el análisis clásico de esta, se obtenga el mismo número y el mismo tipo de vínculos presentes en las teorías libres, aún cuando estos no posean necesariamente la misma forma [8]. Así pues, la teoría que describe la interacción será consistente, siempre que al considerar el limite en el que la constante de acoplamiento e tiende a cero, se obtenga la estructura canónica de cada una de las teorías libres que la definen, es decir, que para una constante de acople cero, los vínculos de la QED_{2+1} deberán reducirse a los vínculos de la teoría de MCS y de Dirac libres. Sin embargo, aunque en dicho limite el vínculo de segunda clase Σ presenta la estructura del vínculo de primera clase (3.47) en teoría de MCS, este deberá ser de primera clase tanto en la interacción como en la transición a la teoría libre. Por consiguiente, se concluye que Σ y Γ_b^i no constituyen un número mínimo de vínculos de segunda clase [8]. Esta afirmación también puede ser comprobada formalmente si se analiza, bajo el método de Dirac, los cinco vínculos de segunda clase $\left(\Sigma, \Gamma_b^i\right)$. Para observarlo, se denotarán dichos vínculos como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\Omega_1(\boldsymbol{x},t) &\equiv \Sigma(\boldsymbol{x},t)\,,\\
\Omega_2(\boldsymbol{x},t) &\equiv \Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t)\,,\\
\Omega_3(\boldsymbol{x},t) &\equiv \Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t)\,.
\end{aligned}$$

Con el objetivo de tratar estos vínculos de acuerdo a los planteamientos del método de Dirac, se procederá a construir la matriz de vínculos de segunda clase como sigue:

$$V_{lm}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \equiv \left\{\Omega_l\left(\boldsymbol{x},t\right),\Omega_m\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}, \tag{5.86}$$

con $l,m = 1,2,3$. Cuya forma matricial, calculada en base a los PB deducidos en el **Apéndice M**, es dada por:

$$V\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \begin{pmatrix} 0 & e\overline{\psi}_a\left(\boldsymbol{x},t\right)\gamma^0_{ab} & -e\gamma^0_{bc}\psi_c\left(\boldsymbol{x},t\right) \\ -e\overline{\psi}_a\left(\boldsymbol{y},t\right)\gamma^0_{ab} & 0 & -i\gamma^0_{cb} \\ e\gamma^0_{bc}\psi_c\left(\boldsymbol{y},t\right) & i\gamma^0_{bc} & 0 \end{pmatrix}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{5.87}$$

Nótese que al considerar el limite cuando $e \to 0$, la matriz en cuestión se reduce a:

$$V\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\gamma^0_{cb} \\ 0 & i\gamma^0_{bc} & 0 \end{pmatrix}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{5.88}$$

De esta expresión es evidente que:

$$\det\left[V\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right] = 0,$$

y por tanto $V\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ será una matriz singular y no invertible. En virtud a este razonamiento, se puede inferir que los PD no estarán bien definidos en el limite en el que la constante de acople tiende a cero y por ende $\left(\Sigma,\Gamma^i_b\right)$ no constituyen un conjunto mínimo de vínculos de segunda clase. Este resultado indica que debe existir un vínculo de primera clase en el sector bosónico, tal que cuando $e \to 0$, se reduzca al vínculo de primera clase asociado a la ley de Gauss en teoría de MCS, este nuevo vínculo será constuido como una combinación lineal de los vínculos de segunda clase del sistema [8].

5.3.3. Construcción de un vínculo de primera clase

De la expresión (5.60) se verifica que en el límite en que la constante de acomplamiento e tiende a cero, esto es $e \to 0$, el vínculo Σ se reduce a la ecuación (3.47), correspondiente al vínculo de primera clase G, asociado a la teoría de MCS libre. Este resultado implica que la transición desde la teoría de interacción hasta la teoría libre será consistente, siempre que se modifique el vínculo bosónico de segunda clase Σ, de modo tal, que se identifique como un vínculo bosónico de primera clase antes y despues de considerar el limite $e \to 0$ [8]. Para tal fin, se propone que el vínculo de primera clase a determinar, es dado por la siguiente combinación lineal [5]:

$$\phi_2 = \phi_2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \equiv \int d^2y\left[C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right) + \Gamma_b^1\left(\boldsymbol{y},t\right)C_b^1\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) + C_b^2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\Gamma_b^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right]. \tag{5.89}$$

Expresión en la que los coeficientes $C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right), C_b^1\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ y $C_b^2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ con $b = 1,2$, son arbitrarios. Tales coeficientes serán determinados teniendo en cuenta que si ϕ_2 es un vínculo de primera clase, entonces debe satisfacer:

$$\left\{\phi_2\left(\boldsymbol{x},t\right),\Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0, \tag{5.90}$$

$$\left\{\phi_2\left(\boldsymbol{x},t\right),\Gamma_b^1\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0, \tag{5.91}$$

$$\left\{\phi_2\left(\boldsymbol{x},t\right),\Gamma_b^2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0. \tag{5.92}$$

Cabe anotar, que con el fin de garantizar que ϕ_2 sea una variable bosónica, se considerará que el coeficiente $C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ posee un número de paridad $n_{C_1} = 0$, mientras que las funciones $C_b^1\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ y $C_b^2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ serán variables fermiónicas con números de paridad $n_{C_b^1} = n_{C_b^2} = 1$, respectivamente.

En primera instancia, a partir de la relación (5.89) y las propiedades de los PB (observar **Apéndice L**), puede escribirse (5.90) como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_2\left(\boldsymbol{x},t\right),\Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx& \int d^2zC\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\right)\left\{\Sigma\left(\boldsymbol{z},t\right),\Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} + \int d^2z\left\{\Gamma_b^1\left(\boldsymbol{z},t\right),\Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}C_b^1\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\right)\\ &+\int d^2zC_b^2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\right)\left\{\Gamma_b^2\left(\boldsymbol{z},t\right),\Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0.\end{aligned} \tag{5.93}$$

Para resolver la relación preliminar se emplearán los siguientes resultados, deducidos en el **Apéndice M**:

$$\begin{aligned}
\left\{\Sigma(\boldsymbol{z},t),\Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx 0, && (5.94)\\
\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{z},t),\Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx -e\overline{\psi}_a\left(\boldsymbol{y},t\right)\gamma_{ab}^0\delta^2\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right), && (5.95)\\
\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{z},t),\Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx e\gamma_{bc}^0\psi_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\delta^2\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right). && (5.96)
\end{aligned}$$

Reemplazando (5.94) a (5.96) en (5.93), se obtiene:

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{x},t),\Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx -e\overline{\psi}_a\left(\boldsymbol{y},t\right)\gamma_{ab}^0C_b^1\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)+eC_b^2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\gamma_{bc}^0\psi_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\approx 0, \quad (5.97)$$

esta relación puede reescribirse del siguiente modo:

$$-\overline{\psi}\left(\boldsymbol{y},t\right)\gamma^0C^1\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)+C^2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\gamma^0\psi\left(\boldsymbol{y},t\right)\approx 0. \quad (5.98)$$

De manera similar, en virtud a (5.89) y las propiedades de los PB entre bosones y fermiones, se verifica que (5.91) se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\left\{\phi_2(\boldsymbol{x},t),\Gamma_b^1\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx{}& \int d^2zC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\left\{\Sigma(\boldsymbol{z},t),\Gamma_b^1\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}+\int d^2z\left\{\Gamma_d^1(\boldsymbol{z},t),\Gamma_b^1\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}C_d^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\\
&+\int d^2zC_d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\left\{\Gamma_d^2(\boldsymbol{z},t),\Gamma_b^1\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx 0. \qquad (5.99)
\end{aligned}$$

Reemplazando en (5.99), los siguientes PB (véase **Apéndice M**):

$$\begin{aligned}
\left\{\Sigma(\boldsymbol{z},t),\Gamma_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx e\overline{\psi}_a(\boldsymbol{z},t)\gamma_{ab}^0\delta^2\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right), && (5.100)\\
\left\{\Gamma_d^1(\boldsymbol{z},t),\Gamma_b^1\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx 0, && (5.101)\\
\left\{\Gamma_d^2(\boldsymbol{z},t),\Gamma_b^1\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx -i\gamma_{db}^0\delta^2\left(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\right), && (5.102)
\end{aligned}$$

se obtiene el siguiente resultado:

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{x},t),\Gamma_b^1\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx eC\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\overline{\psi}_a\left(\boldsymbol{y},t\right)\gamma_{ab}^0-iC_d^2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\gamma_{db}^0\approx 0, \quad (5.103)$$

o bien:

$$eC\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\overline{\psi}\left(\boldsymbol{y},t\right)\gamma^0-iC^2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\gamma^0\approx 0. \quad (5.104)$$

Finalmente, el PB (5.92) puede ser resuelto a partir de la ecuación (5.89) y las propiedades de los PB entre bosones y fermiones, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_2(\boldsymbol{x},t),\Gamma^2_b(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \int d^2z C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\left\{\Sigma(\boldsymbol{z},t),\Gamma^2_b(\boldsymbol{y},t)\right\}+\int d^2z\left\{\Gamma^1_d(\boldsymbol{z},t),\Gamma^2_b(\boldsymbol{y},t)\right\}C^1_d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\\ &+\int d^2z C^2_d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\left\{\Gamma^2_d(\boldsymbol{z},t),\Gamma^2_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\approx 0. \end{aligned}\tag{5.105}$$

Sustituyendo en (5.105) los PB mostrados a continuación (observar **Apéndice M**):

$$\left\{\Sigma(\boldsymbol{z},t),\Gamma^2_b(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx -e\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{z},t)\delta^2(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}),\tag{5.106}$$

$$\left\{\Gamma^1_d(\boldsymbol{z},t),\Gamma^2_b(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx i\gamma^0_{bd}\delta^2(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}),\tag{5.107}$$

$$\left\{\Gamma^2_d(\boldsymbol{z},t),\Gamma^2_b(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx 0,\tag{5.108}$$

Se llega a la siguiente expresión:

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{x},t),\Gamma^2_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\approx -eC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{y},t)+i\gamma^0_{bd}C^1_d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\approx 0,\tag{5.109}$$

que puede escribirse del siguiente modo:

$$-eC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\gamma^0\psi(\boldsymbol{y},t)+i\gamma^0C^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\approx 0.\tag{5.110}$$

Bajo los resultados encontrados en (5.98), (5.104) y (5.110), se ha logrado obtener el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{c} -\overline{\psi}(\boldsymbol{y},t)\gamma^0C^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+C^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\gamma^0\psi(\boldsymbol{y},t)\approx 0\\ eC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\overline{\psi}(\boldsymbol{y},t)\gamma^0-iC^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\gamma^0\approx 0\\ -eC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\gamma^0\psi(\boldsymbol{y},t)+i\gamma^0C^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\approx 0\end{array}\right.$$

Con el objetivo de resolver este sistema de ecuaciones, se procederá inicialmente a multiplicar a la derecha de la relación (5.104) por la matriz γ^0. Dado que $\left(\gamma^0\right)^2=\mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ denota la matriz identidad 2×2, se obtiene el siguiente resultado:

$$eC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\overline{\psi}(\boldsymbol{y},t)-iC^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\approx 0,$$

de esta relación se puede despejar:

$$C^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\approx -ieC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\overline{\psi}(\boldsymbol{y},t).\tag{5.111}$$

Similarmente, si se multplica a la izquierda de la expresión (5.110) por la matriz γ^0, se llega a:

$$-eC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y},t)+iC^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\approx 0,$$

de donde se puede determinar que:

$$C^1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\approx -ieC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y},t). \tag{5.112}$$

Reemplazando ahora, las ecuaciones (5.111) y (5.112) en (5.98), se obtiene la siguiente expresión:

$$ieC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\overline{\psi}(\boldsymbol{y},t)\gamma^0\psi(\boldsymbol{y},t)-ieC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\overline{\psi}(\boldsymbol{y},t)\gamma^0\psi(\boldsymbol{y},t)\approx 0. \tag{5.113}$$

De este resultado puede observarse que el coeficiente $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ queda completamente indeterminado. Por consiguiente, de acuerdo a (5.111) y (5.112), ϕ_2 se expresa como:

$$\phi_2=\int d^2y\left[C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Sigma(\boldsymbol{y},t)-ie\Gamma^1(\boldsymbol{y},t)C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y},t)-ieC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\overline{\psi}(\boldsymbol{y},t)\Gamma^2(\boldsymbol{y},t)\right]. \tag{5.114}$$

Con el fin de simplificar la estructura de ϕ_2 y considerando que $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ es arbitrario, se propone que:

$$C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\equiv\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{5.115}$$

Reemplazando (5.115) en (5.114), se verifica que:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \int d^2y\left[C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\Sigma(\boldsymbol{y},t)-ie\Gamma^1(\boldsymbol{y},t)C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\psi(\boldsymbol{y},t)-ieC(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\overline{\psi}(\boldsymbol{y},t)\Gamma^2(\boldsymbol{y},t)\right]\\ &= \int d^2y\,\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\left\{\Sigma(\boldsymbol{y},t)-ie\left[\Gamma^1(\boldsymbol{y},t)\psi(\boldsymbol{y},t)+\overline{\psi}(\boldsymbol{y},t)\Gamma^2(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}\\ &= \Sigma-ie\left(\Gamma^1_b\psi_b+\overline{\psi}_b\Gamma^2_b\right).\end{aligned} \tag{5.116}$$

Con el propósito de escribir el vínculo ϕ_2 de forma compacta, se procederá a reemplazar en la ecuación inmediatamente anterior, las estructuras de los vínculos Γ^1_b,Γ^2_b y Σ presentes en las fórmulas (5.36), (5.37) y (5.60) respectivamente, así:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \partial_i\pi_i-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_iA_j-e\overline{\psi}_b\gamma^0_{bc}\psi_c-ie\left[\left(\pi_b+\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^0_{cb}\right)\psi_b+\overline{\psi}_b\left(\overline{\pi}_b+\frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\psi_d\right)\right]\\ &= \partial_i\pi_i-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_iA_j-e\overline{\psi}_b\gamma^0_{bc}\psi_c+\frac{1}{2}e\overline{\psi}_c\gamma^0_{cb}\psi_b+\frac{1}{2}e\overline{\psi}_b\gamma^0_{bd}\psi_d-ie\left[\pi_b\psi_b+\overline{\psi}_b\overline{\pi}_b\right]\\ &= \partial_i\pi_i-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_iA_j-ie\left[\pi_b\psi_b+\overline{\psi}_b\overline{\pi}_b\right].\end{aligned} \tag{5.117}$$

Que es un vínculo de paridad par. Nótese que en el limite en que $e \to 0$, (5.117) se reduce a:

$$\phi_2 = G = \partial_i \pi_i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j,$$

que es justamente el vínculo de primera clase asociado a la ley de Gauss en la teoría de MCS (véase ecuación (3.47)). Así pues, se concluye que la teoría de QED_{2+1} está conformada por el conjunto de vínculos que prosigue:

$$\begin{cases} \phi_1 \equiv \pi_0 \approx 0 \\ \phi_2 = \partial_i \pi_i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j - ie\left[\pi_b \psi_b + \overline{\psi}_b \overline{\pi}_b\right] \approx 0 \\ \Gamma^1_b = \pi_b + \frac{i}{2}\overline{\psi}_c \gamma^0_{cb} \approx 0 \\ \Gamma^2_b = \overline{\pi}_b + \frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\psi_d \approx 0 \end{cases}$$

Conjunto en el que los vínculos bosónicos ϕ_1 y ϕ_2 son de primera clase, mientras que Γ^1_b y Γ^2_b son vínculos fermiónicos de segunda clase.

5.3.4. Hamiltoniano extendido y dinámica en el espacio de fase completo

Los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de segunda clase se fijan de manera única bajo la definición de PD. Sin embargo, debido a que los vínculos de primera clase son generadores de tranformaciones gauge locales, existe arbitrariedad a la hora de fijar los multiplicadores de Lagrange asociados a estos, esta situación, implica que tal arbitriedad se vea reflejada en la dinámica del sistema y por consiguiente, la evolución temporal del mismo en el espacio de fase completo no podrá ser determinada unívocamente. Dirac etableció que la dinámica de cualquier variable del espacio fase completo vendrá determinada por su PB con el Hamiltoniano extendido, cantidad física que se construye como una combinación lineal del Hamiltoniano primario y los vínculos de primera clase del sistema [6, 7, 8]. En base a lo anterior, el Hamiltoniano extendido de la QED_{2+1} es dado por:

$$
\begin{aligned}
H_{E(QED)} &\equiv H_{p(QED)} + \int d^2x \lambda_2 \phi_2 \\
&= H_{c(MCS)} + \int d^2x \left[-\frac{i}{2} \overline{\psi}_b \gamma^j_{bc} \partial_j \psi_c + \frac{i}{2} \left(\partial_j \overline{\psi}_b \right) \gamma^j_{bc} \psi_c + m \overline{\psi}_b \psi_b \right] + \\
&\int d^2x \left[\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \Gamma^1_b \lambda^1_b + \lambda^2_b \Gamma^2_b \right] - \int d^2x e A_\alpha \overline{\psi}_b \gamma^\alpha_{bc} \psi_c, \qquad (5.118)
\end{aligned}
$$

donde los multiplicadores de Lagrange λ_i y λ^i_b con $i = 1,2$ son funciones arbitrarias del espacio-tiempo. Tras reemplazar en (5.118) la siguiente identidad:

$$
\left(\partial_j \overline{\psi}_b \right) \gamma^j_{bc} \psi_c = \partial_j \left[\overline{\psi}_b \gamma^j_{bc} \psi_c \right] - \overline{\psi}_b \gamma^j_{bc} \partial_j \psi_c, \qquad (5.119)
$$

se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
H_{E(QED)} &= H_{c(MCS)} + \int d^2x \left[-i \overline{\psi}_b \gamma^j_{bc} \partial_j \psi_c + m \overline{\psi}_b \psi_b \right] + \int d^2x \left[\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \Gamma^1_b \lambda^1_b + \lambda^2_b \Gamma^2_b \right] \\
&- \int d^2x e A_\alpha \overline{\psi}_b \gamma^\alpha_{bc} \psi_c + \frac{i}{2} \int d^2x \left(\partial_j \overline{\psi}_b \right) \gamma^j_{bc} \psi_c. \\
&= H_{c(MCS)} + H_{c(D)} - \int d^2x e A_\alpha \overline{\psi}_b \gamma^\alpha_{bc} \psi_c + \int d^2x \left[\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 + \Gamma^1_b \lambda^1_b + \lambda^2_b \Gamma^2_b \right] + \\
&\frac{i}{2} \int d^2x \left(\partial_j \overline{\psi}_b \right) \gamma^j_{bc} \psi_c, \qquad (5.120)
\end{aligned}
$$

donde se ha empleado la relación (4.28) referente al Hamiltoniano canónico de la teoría de campo fermiónico. Sin embargo, de las condiciones de frontera de los campos es posible determinar que:

$$
\int d^2x \left(\partial_j \overline{\psi}_b \right) \gamma^j_{bc} \psi_c = \oint dr_j \left[\overline{\psi}_b \gamma^j_{bc} \psi_c \right] = 0, \qquad (5.121)
$$

reemplazando este resultado en (5.120) se obtiene que:

$$
\begin{aligned}
H_{E(QED)} &= H_{c(MCS)} + \int d^2x \left[\lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \right] + H_{c(D)} + \int d^2x \left[\Gamma^1_b \lambda^1_b + \lambda^2_b \Gamma^2_b \right] \\
&- \int d^2x e A_\alpha \overline{\psi}_b \gamma^\alpha_{bc} \psi_c. \qquad (5.122)
\end{aligned}
$$

Obsérvese de la relación (5.117) que el vinculo ϕ_2 es equivalente a:

$$
\phi_2 = \phi'_2 - ie \left[\pi_b \psi_b + \overline{\psi}_b \overline{\pi}_b \right], \qquad (5.123)
$$

donde ϕ_2' es el vínculo primario asociado a la Ley de Gauss en teoría de MCS (véase ecuación (3.47)). De este modo se encuentra que:

$$\begin{aligned} H_{E(QED)} &= H_{c(MCS)} + \int d^2x \left[\lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2'\right] + H_{c(D)} + \int d^2x \left[\Gamma_b^1\lambda_b^1 + \lambda_b^2\Gamma_b^2\right] \\ &\quad - \int d^2x e A_\alpha \overline{\psi}_b \gamma_{bc}^\alpha \psi_c - ie \int d^2x \lambda_2 \left[\pi_b\psi_b + \overline{\psi}_b\overline{\pi}_b\right] \end{aligned} \tag{5.124}$$

que a partir de las ecuaciones (3.42) y (4.30) se reduce a:

$$H_{E(QED)} = H_{E(MCS)} + H_{E(D)} - e\int d^2x A_\alpha \overline{\psi}_b \gamma_{bc}^\alpha \psi_c - ie\int d^2x \lambda_2 \left[\pi_b\psi_b + \overline{\psi}_b\overline{\pi}_b\right] \tag{5.125}$$

De este modo, se tiene la evolución temporal de una variable dinámica del espacio de fase $F(\boldsymbol{x}, t) \equiv F\left[A_\alpha, \psi_b, \overline{\psi}_b, \pi^a, \pi_b, \overline{\pi}_b\right]$ es determinada por:

$$\dot{F}(\boldsymbol{x}, t) \approx \left\{F(\boldsymbol{x}, t), H_{E(QED)}(\boldsymbol{y}, t)\right\}. \tag{5.126}$$

A continuación, se procederá a calcular la evolución temporal de cada uno de los campos canónicos que definen el superespacio de fase. Así pues, empleando la ecuación de Hamilton (5.126), el Hamiltoniano extendido (5.125) y los PB fundamentales, se tiene que la evolución temporal del campo fermiónico ψ_b será:

$$\begin{aligned} \partial_0\psi_b(\boldsymbol{x}, t) &\approx \left\{\psi_b(\boldsymbol{x}, t), H_{E(D)}(\boldsymbol{y}, t)\right\} - ie\int d^2y \lambda_2(\boldsymbol{y}, t)\left\{\psi_b(\boldsymbol{x}, t), \pi_c(\boldsymbol{y}, t)\right\}\psi_c(\boldsymbol{y}, t) \\ &\approx -\lambda_b^1(\boldsymbol{x}, t) + ie\lambda_2(\boldsymbol{x}, t)\psi_b(\boldsymbol{x}, t), \end{aligned} \tag{5.127}$$

donde se ha usado el resultado obtenido previamente en (4.51) durante el estudio de la teoría de campo fermiónico. Similarmente, de la ecuación de Hamilton (5.126) y los PB fundamentales es facíl comprobar que la dinámica asociada al campo $\overline{\psi}_b$ es dada por:

$$\begin{aligned} \partial_0\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x}, t) &\approx \left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x}, t), H_{E(D)}(\boldsymbol{y}, t)\right\} + ie\int d^2y \lambda_2(\boldsymbol{y}, t)\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y}, t)\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x}, t), \overline{\pi}_c(\boldsymbol{y}, t)\right\} \\ &\approx \lambda_b^2(\boldsymbol{x}, t) - ie\lambda_2(\boldsymbol{x}, t)\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x}, t), \end{aligned} \tag{5.128}$$

donde se ha empleado la ecuación (4.52). Por otro lado, la evolución temporal del momento canónico π_b vendrá dada por la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\partial_0\pi_b(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), H_{E(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} + e\int d^2y A_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\quad + ie\int d^2y\lambda_2(\boldsymbol{y},t)\pi_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx i\partial^x_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^j_{cb} + m\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t) + \frac{i}{2}\lambda^2_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^0_{cb}\\ &\quad - eA_\alpha(\boldsymbol{x},t)\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^\alpha_{cb} - ie\lambda_2(\boldsymbol{x},t)\pi_b(\boldsymbol{x},t).\end{aligned} \tag{5.129}$$

Cabe anotar, que en el calculo preliminar se emplearon las relaciones (4.56), (5.125) y los PB fundamentales. De manera análoga, es posible deteminar la evolución temporal del campo fermiónico $\overline{\pi}_b$ a partir de la ecuación de Hamilton (5.125), así:

$$\begin{aligned}\partial_0\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t), H_{E(D)}(\boldsymbol{y},t)\right\} - e\int d^2y A_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\\ &\quad - ie\int d^2y\lambda_2(\boldsymbol{y},t)\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\overline{\pi}_c(\boldsymbol{y},t)\\ &\approx i\gamma^j_{bd}\partial^x_j\psi_d(\boldsymbol{x},t) - m\psi_b(\boldsymbol{x},t) - \frac{i}{2}\gamma^0_{dc}\lambda^1_c(\boldsymbol{x},t)\\ &\quad + eA_\alpha(\boldsymbol{x},t)\gamma^\alpha_{bd}\overline{\psi}_d(\boldsymbol{x},t) + ie\lambda_2(\boldsymbol{x},t)\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\end{aligned} \tag{5.130}$$

donde se ha usado la expresión (5.127) enontrada durante el estudio de la teoría de campo fermiónico libre. Resta determinar la evolución temporal de los campos canónicos de tipo bosónico. Inicialmente, a partir de la ecuación de Hamilton (5.126) y los PB fundamentales, se tiene que la dinámica en el espacio de fase completo del campo A_0 es dada por:

$$\begin{aligned}\dot{A}_0(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{A_0(\boldsymbol{x},t), H_{E(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx \lambda_1(\boldsymbol{x},t),\end{aligned} \tag{5.131}$$

donde se ha usado la expresión (3.58), encontrada en el estudio de la teoría de MCS. Similarmente, la evolución temporal de la componente espacial del potencial fundamental A_i, se determina como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{A}_i(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), H_{E(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx -\pi_i(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t) + \partial^x_i A_0(\boldsymbol{x},t) + \partial^x_i\lambda_2(\boldsymbol{x},t),\end{aligned} \tag{5.132}$$

donse se han usado los PB fundamentales y la relación (3.61). Por otra parte, mediante el Hamiltoniano extendido (5.125) y la ecuación de Hamilton (5.126) se encuentra que la dinámica en el espacio de fase completo de la componente temporal del momento canónico π_0 es dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_0(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), H_{E(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\} - e\int d^2y\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), A_0(\boldsymbol{y},t)\right\}\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{y},t)\\ &\approx -\partial^x_i\pi_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial^x_i A_j(\boldsymbol{x},t) + e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{x},t)\,. \qquad (5.133)\end{aligned}$$

Es importante resaltar, que en el calculo preliminar se empleo la relación (3.62) y los PB fundamentales. Finalmente, la dinámica del campo π_i en el espacio de fase completo es dada por la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\dot{\pi}_i(\boldsymbol{x},t) &\approx \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), H_{E(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\} - e\int d^2y\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\gamma^j_{bc}\psi_c(\boldsymbol{y},t)\\ &\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\pi_j(\boldsymbol{x},t) + 2\left(\frac{k}{4\pi}\right)^2 A_i(\boldsymbol{x},t) + \partial^x_j F_{ij}(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial^x_j A_0(\boldsymbol{x},t) -\\ &\quad\ \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial^x_j\lambda_2(\boldsymbol{x},t) - e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\gamma^i_{bc}\psi_c(\boldsymbol{x},t)\,. \qquad (5.134)\end{aligned}$$

Es relevante mencionar que en el anterior cálculo se usó el resultado obtenido en , durante el estudio de la dinámica de los campos canónicos de la teoría de MCS. De las expresiones (5.127) a (5.134) se tiene que la dinámica del sistema en el espacio de fase completo es dada por el siguiente conjunto de ecuaciones:

Ecuaciones de Hamilton asociadas a campos fermiónicos:

$$\begin{aligned}\partial_0\psi_b(\boldsymbol{x},t) &\approx -\lambda^1_b(\boldsymbol{x},t) + ie\lambda_2(\boldsymbol{x},t)\psi_b(\boldsymbol{x},t)\,,\\ \partial_0\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t) &\approx \lambda^2_b(\boldsymbol{x},t) - ie\lambda_2(\boldsymbol{x},t)\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\,,\\ \partial_0\pi_b(\boldsymbol{x},t) &\approx i\partial^x_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^j_{cb} + m\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t) + \frac{i}{2}\lambda^2_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^0_{cb} -\\ &\quad\ eA_\alpha(\boldsymbol{x},t)\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^\alpha_{cb} - ie\lambda_2(\boldsymbol{x},t)\pi_b(\boldsymbol{x},t)\,,\\ \partial_0\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t) &\approx i\gamma^j_{bd}\partial^x_j\psi_d(\boldsymbol{x},t) - m\psi_b(\boldsymbol{x},t) - \frac{i}{2}\gamma^0_{dc}\lambda^1_c(\boldsymbol{x},t) +\\ &\quad\ eA_\alpha(\boldsymbol{x},t)\gamma^\alpha_{bd}\overline{\psi}_d(\boldsymbol{x},t) + ie\lambda_2(\boldsymbol{x},t)\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t)\,.\end{aligned}$$

Ecuaciones de Hamilton asociadas a campos bosónicos:

$$
\begin{aligned}
\dot{A}_0(\boldsymbol{x},t) &\approx \lambda_1(\boldsymbol{x},t)\,,\\
\dot{A}_i(\boldsymbol{x},t) &\approx -\pi_i(\boldsymbol{x},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)+\partial_i^x A_0(\boldsymbol{x},t)+\partial_i^x\lambda_2(\boldsymbol{x},t)\,,\\
\dot{\pi}_0(\boldsymbol{x},t) &\approx -\partial_i^x\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x A_j(\boldsymbol{x},t)+e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{x},t)\,,\\
\dot{\pi}_i(\boldsymbol{x},t) &\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\pi_j(\boldsymbol{x},t)+2\left(\frac{k}{4\pi}\right)^2A_i(\boldsymbol{x},t)+\partial_j^xF_{ij}(\boldsymbol{x},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^xA_0(\boldsymbol{x},t)-\\
&\quad \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\lambda_2(\boldsymbol{x},t)-e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\gamma^i_{bc}\psi_c(\boldsymbol{x},t)\,.
\end{aligned}
$$

Nótese que la arbitrariedad en la dinámica de los campos se ve reflejada en la presencia de multplicadores de Lagrange en las ecuaciones previas, razón por la cual, estas se escriben como igualdades debiles.

Es posible escribir las ecuaciones de Hamilton de forma compacta. Inicialmente, se procederá a estudiar las ecuaciones asociadas a los campos canónicos de tipo bosónico. Teniendo en cuenta que el campo π_0 constituye un vínculo primario que se anula debilmente, la relación (5.133) se reescribirá como sigue:

$$
-\partial_i\pi_i+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_iA_j+e\overline{\psi}_b\gamma^0_{bc}\psi_c\approx 0, \tag{5.135}
$$

si se sustituye la definición de momento canónico (5.33) en (5.135) se llega al siguiente resultado:

$$
-\partial_iF_{i0}+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_iF_{ij}+e\overline{\psi}_b\gamma^0_{bc}\psi_c\approx 0. \tag{5.136}
$$

Esta expresión es debilmente equivalente a la ecuación de campo (5.20) para el valor particular $\beta=0$. Por otro lado, al sustitiur la definición de momento canónico (5.33) en la ecuación de Hamilton (5.132) se obtiene:

$$
\partial_i\lambda_2\approx 0. \tag{5.137}
$$

Sustituyendo (5.33) y (5.137) en (5.134) se llega a la siguiente expresión:

$$
\dot{\pi}_i\approx-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}F_{j0}+\partial_jF_{ij}-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_jA_0-e\overline{\psi}_b\gamma^i_{bc}\psi_c \tag{5.138}
$$

Sin embargo, a partir de la definición (5.33) se determina que:

$$\dot{\pi}_i = \partial_0 F_{i0} - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_0 A_j, \tag{5.139}$$

tras igualar (5.138) y (5.139) se obtiene el resultado que se muestra a continuación:

$$\partial_0 F_{i0} + \partial_i F_{ij} + \frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}F_{j0} + e\overline{\psi}_b\gamma^i_{bc}\psi_c \approx 0. \tag{5.140}$$

Relación que equivale debilmente a la ecuación de campo (5.20) para el valor $\beta = i$. En base los resultados deducidos en (5.136) y (5.140) se concluye que las ecuaciones de Hamilton de los campos bosónicos equivalen debilmente a la ecuación de campo (5.20) obtenida en el formalismo Lagrangiano, es decir:

$$\partial_\alpha F^{\alpha\beta} + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\beta\alpha\gamma}F_{\alpha\gamma} \approx J^\beta, \tag{5.141}$$

donde se ha denotado:

$$J^\beta \equiv -e\overline{\psi}_b\gamma^\beta_{bc}\psi_c. \tag{5.142}$$

Para escribir de forma compacta las ecuaciones de Hamilton asociadas a los campos fermiónicos del espacio de fase, nótese en princcipio, que de la relación (5.127) es posible encontrar:

$$\lambda^1_b \approx -\partial_0\psi_b + ie\lambda_2\psi_b. \tag{5.143}$$

Introduciendo (5.31) y (5.143) en (5.130) se llega a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\partial_0\overline{\pi}_b &\approx i\gamma^j_{bd}\partial_j\psi_d - m\psi_b + \frac{i}{2}\gamma^0_{dc}\partial_0\psi_c + eA_\alpha\gamma^\alpha_{bd}\psi_d - e\lambda_2\gamma^0_{dc}\psi_c \\ &\approx i\gamma^j_{bd}\partial_j\psi_d - m\psi_b + \frac{i}{2}\gamma^0_{dc}\partial_0\psi_c + eA_\alpha\gamma^\alpha_{bd}\psi_d,\end{aligned} \tag{5.144}$$

donde se ha considerado que $\lambda_2 \approx 0$, pues es una función arbitraria. Sin embargo, de la definición (5.31) se encuentra que:

$$\partial_0\overline{\pi}_b = -\frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\partial_0\psi_d. \tag{5.145}$$

Igualando (5.144) y (5.145) se llega a la siguiente expresión:

$$i\gamma^j_{bd}\partial_j\psi_d - m\psi_b + i\gamma^0_{dc}\partial_0\psi_c + eA_\alpha\gamma^\alpha_{bd}\psi_d \approx 0,$$

que puede reescribirse como se mustra a continuación:

$$\left(i\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}-m\right)\psi\approx -eA_{\alpha}\gamma^{\alpha}\psi. \tag{5.146}$$

Obsérvese que esta ecuación es debilmente equivalente a la ecuación de campo (5.28). De igual modo, de la ecuación (5.128) se deduce que:

$$\lambda_b^2(\boldsymbol{x},t)\approx\partial_0\overline{\psi}_b+ie\lambda_2\overline{\psi}_b. \tag{5.147}$$

Reemplazando (5.30) y (5.147) en (5.129) se obtiene la relación que prosigue:

$$\begin{aligned}\partial_0\pi_b &\approx i\partial_j^x\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^j+m\overline{\psi}_b+\frac{i}{2}\partial_0\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^0-eA_{\alpha}\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^{\alpha}-e\lambda_2\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^0\\ &\approx i\partial_j^x\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^j+m\overline{\psi}_b+\frac{i}{2}\partial_0\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^0-eA_{\alpha}\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^{\alpha},\end{aligned} \tag{5.148}$$

donde se ha considerado que $\lambda_2\approx 0$, pues es una función arbitraria. No obstante, de la definición (5.30) se calcula el siguiente resultado:

$$\partial_0\pi_b=-\frac{i}{2}\partial_0\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^0. \tag{5.149}$$

Al igualar (5.148) y (5.149) se deduce que:

$$i\partial_j^x\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^j+m\overline{\psi}_b+i\partial_0\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^0-eA_{\alpha}\overline{\psi}_c\gamma_{cb}^{\alpha}\approx 0,$$

que puede reordenarse como sigue:

$$\overline{\psi}\left(i\gamma^{\alpha}\overleftarrow{\partial}_{\alpha}+m\right)\approx eA_{\alpha}\overline{\psi}\gamma^{\alpha}. \tag{5.150}$$

Esta relación equivale debilmente a la ecuación de campo (5.25). De las expresiones (5.146) y (5.150) se concluye que las ecuaciones de Hamilton asociadas a los campos canónicos de tipo fermiónico son debilmente equivalentes a las ecuaciones de campo deducidas a nivel Lagrangiano.

5.3.5. Tratamiento de vínculos de segunda clase

Los PB definidos hasta este punto no son consistentes con la teoría, pues si bien, los vínculos del sistema se anulan debilmente, esto no implica que sus PB con alguna variable arbitraria del espacio de fase sean identicamente iguales a cero [8]. Con el fin de garantizar la consistencia de la teoría a nivel clásico, se deben construir unos nuevos PB entre los grados de libertad, conocidos como paréntesis de Dirac (PD).

A través del método de Dirac se procederá a tratar en primera instancia los vínculos de segunda clase Γ_b^i con $i = 1,2$. Resulta de gran importancia tener en cuenta que el subespacio de fase comprendido por $[\psi_b, \overline{\psi}_b, \pi_b, \overline{\pi}_b]$ se constituye de un total de ocho campos fermiónicos. Sin embargo, debido a que se cuenta con un total de cuatro vínculos fermiónicos de segunda clase dados por Γ_b^i, se puede inferir que en este subespacio existen apenas cuatro grados de libertad. Estos campos independientes pueden ser elegidos de forma arbitraria, puesto que los vínculos restringen la dinámica del sistema y aunque indican la presencia de un determinado número de grados de libertad, no especifican que variables canónicas serán independientes. Por consiguiente, para el análisis que prosigue se escogerán como independientes los campos fundamentales de Dirac $\left(\psi_b, \overline{\psi}_b\right)$. Es importante mencionar, que bajo esta elección, el espacio de fase de la QED_{2+1} estará definido hasta ahora por los campos $\left[A_\alpha, \pi_\alpha, \psi_b, \overline{\psi}_b\right]$ y será denotado como Δ_1. Por lo tanto, si se considerá que $A(\boldsymbol{x}, t) \equiv A\left[A_\alpha, \pi_\alpha, \psi_b, \overline{\psi}_b\right]$ y $B(\boldsymbol{x}, t) \equiv B\left[A_\alpha, \pi_\alpha, \psi_b, \overline{\psi}_b\right]$ son dos variables dinámicas de este espacio, se define un primer PD entre ellas como:

$$
\begin{aligned}
\left\{A(\boldsymbol{x}, t), B(\boldsymbol{y}, t)\right\}_{D_1} \equiv\ & \left\{A(\boldsymbol{x}, t), B(\boldsymbol{y}, t)\right\} - \int d^2u\, d^2v \left[\left\{A(\boldsymbol{x}, t), \Gamma_b^i(\boldsymbol{u}, t)\right\}\left[C_{bc}^{ij}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})\right]^{-1}\right. \\
& \left.\left\{\Gamma_c^j(\boldsymbol{v}, t), B(\boldsymbol{y}, t)\right\}\right]. \qquad (5.151)
\end{aligned}
$$

En esta definición la matriz $\left[C_{bc}^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\right]^{-1}$ es la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase $C_{bc}^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, la cual es definida por los siguientes elementos de matriz:

$$
C_{bc}^{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \equiv \left\{\Gamma_b^i(\boldsymbol{x}, t), \Gamma_c^j(\boldsymbol{y}, t)\right\}, \qquad (5.152)
$$

con $a, b, i, j = 1,2$.. Empleando los siguientes PB (deducidos en el **Apéndice M**):

$$
\begin{aligned}
\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x}, t), \Gamma_c^2(\boldsymbol{y}, t)\right\} &\approx -i\gamma_{cb}^0 \delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), && (5.153) \\
\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x}, t), \Gamma_c^1(\boldsymbol{y}, t)\right\} &\approx -i\gamma_{bc}^0 \delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}), && (5.154) \\
\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x}, t), \Gamma_c^1(\boldsymbol{y}, t)\right\} &\approx 0, && (5.155) \\
\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x}, t), \Gamma_c^2(\boldsymbol{y}, t)\right\} &\approx 0, && (5.156)
\end{aligned}
$$

se encuentra que la forma matricial de (5.152) es:

$$C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=-i\begin{pmatrix}0 & \left(\gamma^{0}\right)^{T}\\ \gamma^{0} & 0\end{pmatrix}\delta^{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{5.157}$$

No obstante, la definición de PD (5.151) está escrita en términos de la inversa de la matriz de vínculos. Para determinar la estructura de esta matriz se hará uso de la siguiente condición [8]:

$$\int d^{2}zC_{lr}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\right)C_{rm}^{-1}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right)=\delta_{lm}\delta^{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{5.158}$$

Tras efectuar los cálculos pertinentes (observar **Apéndice N**), se verifica que $C^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ presenta la siguiente forma:

$$C^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=i\begin{pmatrix}0 & \gamma^{0}\\ \left(\gamma^{0}\right)^{T} & 0\end{pmatrix}\delta^{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{5.159}$$

Cabe anotar, que bajo la definición de PD (5.151) los vínculos fermiónicos de segunda clase Γ_{b}^{i}, serán ahora fuertemente iguales a cero, es decir:

$$\pi_{b}+\frac{i}{2}\overline{\psi}_{c}\gamma_{cb}^{0} = 0, \tag{5.160}$$

$$\overline{\pi}_{b}+\frac{i}{2}\gamma_{bd}^{0}\psi_{d} = 0. \tag{5.161}$$

A continuación se procederá a determinar los PD entre lo campos $\left[A_{\alpha},\pi_{\alpha},\psi_{b},\overline{\psi}_{b}\right]$. En primera instancia se calcularán los PD entre los campos fermiónicos $\left[\psi_{b},\overline{\psi}_{b}\right]$, de la definición (5.151) se resolverá:

$$\begin{aligned}\left\{\psi_{b}\left(\boldsymbol{x},t\right),\psi_{c}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_{1}} = & \left\{\psi_{b}\left(\boldsymbol{x},t\right),\psi_{c}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}-\int d^{3}ud^{3}v\left[\left\{\psi_{b}\left(\boldsymbol{x},t\right),\Gamma_{a}^{i}\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}\left[C_{ad}^{ij}\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\right]^{-1}\right.\\ & \left.\left\{\Gamma_{d}^{j}\left(\boldsymbol{v},t\right),\psi_{c}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\right].\end{aligned} \tag{5.162}$$

Para solucionar la anterior expresión se emplearán el siguiente resultado, deducido en el **Apéndice M**:

$$\left\{\psi_{b}\left(\boldsymbol{x},t\right),\Gamma_{a}^{i}\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}\approx\begin{cases}-\delta_{ba}\delta^{2}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\right)\text{ si } i=1\\ 0\text{ de otro modo}\end{cases} \tag{5.163}$$

De aquí, es posible observar que el segundo sumando del PD (5.162), arrojaría un valor no nulo siempre que $i, j = 1$. Sin embargo, de (5.159) se comprueba que para estos valores la componente matricial $\left[C^{11}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right)\right]^{-1}$ es nula. Empleando este resultado y los PB fundamentales se concluye que:

$$\left\{\psi_b\left(\boldsymbol{x}, t\right), \psi_c\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\}_{D_1} = 0. \tag{5.164}$$

Análogamente mediante la definición (5.151) se calculará el PD mostrado a continuación:

$$\begin{aligned}\left\{\psi_b\left(\boldsymbol{x}, t\right), \overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\}_{D_1} &= \left\{\psi_b\left(\boldsymbol{x}, t\right), \overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} - \int d^3u d^3v \left[\left\{\psi_b\left(\boldsymbol{x}, t\right), \Gamma^i_a\left(\boldsymbol{u}, t\right)\right\}\left[C^{ij}_{ad}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)\right]^{-1}\right.\\ &\quad \left.\left\{\Gamma^j_d\left(\boldsymbol{v}, t\right), \overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\}\right].\end{aligned} \tag{5.165}$$

Es importante tener en cuenta que en la expresión previa se hará uso del siguiente resultado (encontrado en el **Apéndice M**):

$$\left\{\Gamma^j_d\left(\boldsymbol{v}, t\right), \overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} \approx \begin{cases} -\delta_{dc}\delta^2\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}\right) \text{ si } j = 2 \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases} \tag{5.166}$$

A partir de (5.163) y (5.166), se encuentra que la integral presente en el segundo sumando de (5.165) arrojará valores distintos de cero siempre que $i = 1$ y $j = 2$. Por lo tanto, bajo esta consideración el PD dado por (5.165) se reduce a:

$$\begin{aligned}\left\{\psi_b\left(\boldsymbol{x}, t\right), \overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\}_{D_1} &= \left\{\psi_b\left(\boldsymbol{x}, t\right), \overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} - \int d^3u d^3v \left[\left\{\psi_b\left(\boldsymbol{x}, t\right), \Gamma^1_a\left(\boldsymbol{u}, t\right)\right\}\right.\\ &\quad \left.\left[C^{12}_{ad}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)\right]^{-1}\left\{\Gamma^2_d\left(\boldsymbol{v}, t\right), \overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\}\right]\\ &= -\left[C^{12}_{bc}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}\right)\right]^{-1}\\ &= -i\gamma^0_{bc}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).\end{aligned} \tag{5.167}$$

Cabe anotar, que para el resultado previo se hizo uso de las relaciones (5.163), (5.165) y los PB fundamentales. Finalmente, resta determinar el PD que prosigue:

$$\begin{aligned}\left\{\overline{\psi}_b\left(\boldsymbol{x}, t\right), \overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\}_{D_1} &= \left\{\overline{\psi}_b\left(\boldsymbol{x}, t\right), \overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} - \int d^3u d^3v \left[\left\{\overline{\psi}_b\left(\boldsymbol{x}, t\right), \Gamma^i_a\left(\boldsymbol{u}, t\right)\right\}\left[C^{ij}_{ad}\left(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\right)\right]^{-1}\right.\\ &\quad \left.\left\{\Gamma^j_d\left(\boldsymbol{v}, t\right), \overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\}\right].\end{aligned} \tag{5.168}$$

Con el propósito de resolver la relación preliminar, se empleará el siguientes PB (deducido en el **Apéndice M**):

$$\left\{\overline{\psi}_b\left(\boldsymbol{x},t\right),\Gamma^i_a\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}\approx\begin{cases}-\delta_{ab}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\right)\ \text{si}\ i=2\\ \quad 0\ \text{de otro modo}\end{cases}\tag{5.169}$$

De acuerdo a la anterior estructura se esperaría que la integral presente en el segundo sumando de (5.168) sea diferente de cero para los valores particulares $i,j=2$. No obstante, se puede verificar de (5.159) que para estos valores, la componente matricial $\left[C^{11}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right]^{-1}$ es igual a cero. De acuerdo a esta deducción y a los PB fundamentales se encuentra que:

$$\left\{\overline{\psi}_b\left(\boldsymbol{x},t\right),\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}=0.\tag{5.170}$$

Analogamente, bajo la definición (5.151), se procederá a determinar los PD entre los campos bosónicos $[A_\alpha,\pi_\alpha]$. Para tal fin, se considerará que si $B_1\left(\boldsymbol{x},t\right)\equiv B_1\left[A_\alpha,\pi_\alpha,\psi_b,\overline{\psi}_b\right]$ y $B_2\left(\boldsymbol{x},t\right)\equiv B_2\left[A_\alpha,\pi_\alpha,\psi_b,\overline{\psi}_b\right]$ son dos variables dinámicas bosónicas del superespacio de fase Δ_1, un primer PD entre ellas vendrá dado por:

$$\begin{aligned}\left\{B_1\left(\boldsymbol{x},t\right),B_2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} &= \left\{B_1\left(\boldsymbol{x},t\right),B_2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}-\int d^3u d^3v\left[\left\{B_1\left(\boldsymbol{x},t\right),\Gamma^i_a\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}\left[C^{ij}_{ad}\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\right]^{-1}\right.\\ &\quad\left.\left\{\Gamma^j_d\left(\boldsymbol{v},t\right),B_2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\right].\end{aligned}\tag{5.171}$$

Sin embargo, es conocido que el PB entre una variable bosónica y una fermiónica es nulo [8]. Por lo tanto, es evidente que:

$$\left\{B_1\left(\boldsymbol{x},t\right),\Gamma^i_a\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}=\left\{\Gamma^j_d\left(\boldsymbol{v},t\right),B_2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}=0,\tag{5.172}$$

reemplazando (5.182) en (5.181) se obtiene:

$$\left\{B_1\left(\boldsymbol{x},t\right),B_2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}=\left\{B_1\left(\boldsymbol{x},t\right),B_2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\},\tag{5.173}$$

esta relación indica que el PD entre dos variables bosónicas, calculado a partir de la definición (5.151), se reduce al PB entre ellas. De este modo, se verifica que:

$$\left\{A_\alpha\left(\boldsymbol{x},t\right),A_\beta\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = \left\{A_\alpha\left(\boldsymbol{x},t\right),A_\beta\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}=0,\tag{5.174}$$

$$\left\{\pi_\alpha\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_\beta\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = \left\{\pi_\alpha\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_\beta\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}=0,\tag{5.175}$$

$$\left\{A_\alpha\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_\beta\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = \left\{A_\alpha\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_\beta\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}=\eta_{\alpha\beta}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right),\tag{5.176}$$

donde se han empleado los PB fundamentales.

Finalmente, si $B(\boldsymbol{x},t) \equiv B\left[A_\alpha,\pi_\alpha,\psi_b,\overline{\psi}_b\right]$ es una variable dinámica bosónica del superespacio de fase Δ_1 y $F(\boldsymbol{x},t) \equiv F\left[A_\alpha,\pi_\alpha,\psi_b,\overline{\psi}_b\right]$ es una variable dinámica fermiónica del mismo espacio, el PD entre ellas de acuerdo a la definición (5.151) es dado por:

$$\begin{aligned}\left\{B(\boldsymbol{x},t),F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} &= \left\{B(\boldsymbol{x},t),F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} - \int d^3u d^3v \left[\left\{B(\boldsymbol{x},t),\Gamma^i_a(\boldsymbol{u},t)\right\}\left[C^{ij}_{ad}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right]^{-1}\right. \\ &\left.\left\{\Gamma^j_d(\boldsymbol{v},t),F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{5.177}$$

Nótese que debido a que el PB entre una variable bosónica y una fermiónica es nulo, la ecuación previa se reduce a:

$$\left\{B(\boldsymbol{x},t),F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = 0. \tag{5.178}$$

Por consiguiente, de (5.178) se verifica que:

$$\left\{A_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = \left\{A_\alpha(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = 0, \tag{5.179}$$

$$\left\{\pi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = \left\{\pi_\alpha(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = 0. \tag{5.180}$$

De este modo, se concluye que a partir de la definición (5.151), los PD no nulos entre los campos canónicos del superespacio de fase Δ_1 son:

$$\begin{cases}\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = -i\gamma^0_{bc}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right) \\ \left\{A_\alpha(\boldsymbol{x},t),\pi_\beta\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = \eta_{\alpha\beta}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\end{cases}$$

Hasta este punto se han eliminado satisfactoriamente los vínculos fermiónicos de segunda clase Γ^i_b. Para culminar en su totalidad el análisis canónico de la QED_{2+1} es de interés ahora, analizar los vínculos de primera clase ϕ_i con $i = 1,2$.

Por otra parte, de las expresiones (5.160) y (5.161) es posible despejar respectivamente:

$$\pi_b = -\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^0_{cb}, \tag{5.181}$$

$$\overline{\pi}_b = -\frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\psi_d. \tag{5.182}$$

Reemplazando las dos ecuaciones preliminares en la estructura del vínculo de primera clase ϕ_2 presente en la relación (5.117), se encuentra que:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= \partial_i \pi_i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j - ie\left[\left(-\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^0_{cb}\right)\psi_b + \overline{\psi}_b\left(-\frac{i}{2}\gamma^0_{bd}\psi_d\right)\right] \approx 0 \\ &= \partial_i \pi_i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j - e\overline{\psi}_b\gamma^0_{bd}\psi_d \approx 0.\end{aligned} \tag{5.183}$$

5.3.6. Tratamiento de vínculos de primera clase y condiciones gauge

Se estudiarán ahora, los vínculos de primera clase remanentes ϕ_i con $i = 1,2$. Para tal fin, el método de Dirac establece que estas estructuras deben ser transformadas en vínculos de segunda clase, bajo la inclusión de dos vínculos adicionales, conocidos como condiciones gauge [6, 7, 8]. Teniendo en cuenta que la elección de las condiciones gauge es completamente arbitraria, los PD y la dinámica del sistema terminarán dependiendo de la condición gauge utilizada [6, 7, 8]. En este caso se utilizará la condición del gauge de Coulomb, la cual es definida por la siguiente relación [5]:

$$\phi_4(\boldsymbol{x},t) \equiv \partial_i A_i(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{5.184}$$

La segunda condición gauge se deduce del PB entre el vinculo ϕ_4 y el Hamiltoniano canónico de la QED_{2+1} (véase **Apéndice M**):

$$\phi_3(\boldsymbol{x},t) = \nabla^2 A_0(\boldsymbol{x},t) - \partial^x_i\left[\pi_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right] \approx 0. \tag{5.185}$$

De este modo, se verifica que el conjunto de vínculos del sistema vendrá definido ahora por:

$$\begin{aligned}\phi_1(\boldsymbol{x},t) &= \pi_0(\boldsymbol{x},t) \approx 0, \\ \phi_2(\boldsymbol{x},t) &= \partial^x_i\pi_i(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial^x_i A_j(\boldsymbol{x},t) - e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\gamma^0_{bd}\psi_d(\boldsymbol{x},t) \approx 0, \\ \phi_3(\boldsymbol{x},t) &= \nabla^2 A_0(\boldsymbol{x},t) - \partial^x_i\left[\pi_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right] \approx 0, \\ \phi_4(\boldsymbol{x},t) &= \partial^x_i A_i(\boldsymbol{x},t) \approx 0.\end{aligned}$$

A partir de los PB fundamentales, se encuentran los siguientes resultados :

$$\left\{\phi_1(\boldsymbol{x},t),\phi_3\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx -\nabla_x^2\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right), \tag{5.186}$$

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{x},t),\phi_4\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx -\nabla_x^2\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right), \tag{5.187}$$

donde ∇_x^2 es el operador Laplaciano en dos dimensiones. Cabe anotar que los PB previos son equivalentes a los PP deducidos en el **Apéndice I**. Debido a que (5.186) y (5.187) no se anulan debilmente, se puede concluir que los vínculos de la teoría ϕ_l con $l=1,...,4$, son de segunda clase. Estos vínculos, indican que existe un determinado número de grados de libertad en el sistema, más no proporcionan una manera directa de determinar explícitamente las variables canónicas que serán independientes y que definirán el superespacio de fase reducido [8]. Con el objetivo de construir PB fundamentales que sean consistentes con los vínculos del sistema, se recurrirá a la definición de PD, bajo la consideración de que el superespacio de fase está definido por los campos $\left[A_\alpha,\pi^\alpha,\psi_b,\overline{\psi}_b\right]$.

Sean $M[\boldsymbol{x},t]\equiv M\left(A_\alpha,\pi^\alpha,\psi_b,\overline{\psi}_b\right)$ y $N(\boldsymbol{x},t)\equiv N\left[A_\alpha,\pi^\alpha,\psi_b,\overline{\psi}_b\right]$, dos variables dinámicas del superespacio de fase, se define un segundo PD entre ellas por:

$$\begin{aligned}\left\{M(\boldsymbol{x},t),K\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D \equiv{}& \left\{M(\boldsymbol{x},t),N\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}-\int d^2u\,d^2v\left[\left\{M(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1}\right.\\ & \left. C_{lm}^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),N(\boldsymbol{x},t)\right\}_{D_1}\right].\end{aligned} \tag{5.188}$$

Donde $C_{lm}^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ es la inversa de la matriz de vínculos $C_{lm}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ definida por los siguientes elementos de matriz:

$$C_{lm}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\equiv\left\{\phi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_m\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}. \tag{5.189}$$

Con $l,m=1,...,4$. Cabe anotar que los PD $\left\{M(\boldsymbol{x},t),N\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}$, serán calculados según la definición (5.151).

Obsérvese que con el propósito de simplificar los calculos concernientes al estudio de los vínculos de segunda clase de la teoría, se procedió a resolver inicialmente, bajo la definición de PD (5.151), los vínculos fermiónicos de segunda clase Γ_b^i con $i=1,2$. Mientras que en esta subseccción, a partir de la definición de PD dada por (5.188), se tratarán los vínculos remanentes ϕ_l con $l = 1,...,4$. Es relevante resaltar que los resultados derivados de este método iterativo, serían exactamente los mismos a los obtenidos si se tratase el total de ocho vínculos de segunda clase de la teoría $\left(\Gamma^i_b, \phi_l\right)$, en un solo paso o si se invirtiera el procedimiento [8].

Con el propósito de determinar la forma matricial de (5.189), es necesario fijar los PB entre los vínculos de segunda clase ϕ_l. De acuerdo a los PB fundamentales de la teoría, es evidente que el único PB no nulo entre el vínculo ϕ_1 y el conjuto de vínculos del sistema es dado por la ecuación (5.186).

Por otro lado, teniendo en cuenta que los PB calculados entre variables bosónicas y variables fermiónicas es nulo, los PB entre el vínculo ϕ_2 y el conjunto de vínculos de segunda clase del sistema, se reducirán a los PP determinados en el **Apéndice I**. De allí que, el único PB no nulo será (5.187).

De manerá análoga, se puede observar que los PB no nulos determinados entre los vínculos ϕ_3, ϕ_4 y el conjunto de vínculos del sistema, se reducen a los PP calculados en el **Apéndice I**:

$$\left\{\phi_3\left(\boldsymbol{x},t\right),\phi_4\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx \nabla^2_x \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{5.190}$$

Por lo tanto, mediante las expresiones (5.186), (5.187) y (5.190) se obtiene que la matriz de vínculos de segunda clase $C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ presenta la siguiente forma:

$$C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \nabla^2_x \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{5.191}$$

Para determinar su matriz inversa $C^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$, se tendrá en cuenta que se debe satisfacer la siguiente propiedad:

$$\int d^2z C_{lr}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\, C^{-1}_{rm}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = \delta_{lm}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{5.192}$$

Su matriz inversa será exactamente la misma a la determinada en (3.87) cuando se estudio la teoría de MCS:

$$C^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\nabla^2_x}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{5.193}$$

Donde la expresión:

$$F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\nabla^2_x}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

es la función de Green del operador Laplaciano en dos dimensiones. Bajo la definición de PD (5.188), los vínculos de segunda clase ϕ_l de la teoría se convierten en identidades fuertes, es decir:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= 0, & (5.194)\\ \partial_i\pi_i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j - e\overline{\psi}\gamma^0\psi &= 0, & (5.195)\\ \nabla^2 A_0 - \partial_i\left[\pi_i + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j\right] &= 0, & (5.196)\\ \partial_i A_i &= 0. & (5.197) \end{aligned}$$

Obsérvese que de (5.196) se determina que:

$$A_0(x) = \frac{1}{\nabla^2_x}\left[\partial^x_i\pi_i(x) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial^x_i A_j(x)\right]. \tag{5.198}$$

El superespacio de fase de la teoría está definido por los campos $[A_\alpha, \pi^\alpha, \psi_b, \overline{\psi}_b]$ con $\alpha = 0,1,2$ y $b = 1,2$. Sin embargo, debido a la presencia de los cuatro vínculos de segunda clase ϕ_l con $l = 1,...,4$, la QED_{2+1} estará descrita por apenas seis campos canónicos independientes. Si se tiene en cuenta ahora, que en las ecuaciones (5.181), (5.182), (5.194) y (5.198) se han logrado fijar los campos $\pi_b, \overline{\pi}_b, \pi_0$ y A_0 respectivamente, solamente será necesario calcular a partir de la definición (5.188), los PD fundamentales entre los campos

$\left[A_i, \pi^i, \psi_b, \overline{\psi}_b\right]$ con $i = 1, 2$ y que definen el superespacio de fase reducido [8].

Inicialmente, a partir de la definición (5.188), se procederá a calcular el siguiente PD:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} - \int d^2u d^2v \left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1}\right.\\ &\left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), A_j(\boldsymbol{x},t)\right\}_{D_1}\right]. \end{aligned} \tag{5.199}$$

Dado que el PB entre una variable bosónica y una fermiónica es nulo, se obtiene que:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\},\\ \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{y},t)\right\},\\ \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), A_j(\boldsymbol{x},t)\right\}_{D_1} &= \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), A_j(\boldsymbol{x},t)\right\}.\end{aligned}$$

de acuerdo a los resultados preliminares, (5.199) se simplifica como sigue:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}\right.\\ &\left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), A_j(\boldsymbol{x},t)\right\}\right]. \end{aligned} \tag{5.200}$$

Como los PB entre los campos bosónicos de la teoría en cuestión se reducen a los PP entre los campos de la teoría de MCS, se comprueba que este PD es exactamente el mismo al encontrado previamente en (3.94):

$$\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D = 0. \tag{5.201}$$

Similarmente, según la definición (5.188), el PD entre los campos bosónicos A_i y π_i es dado por:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} - \int d^2u d^2v \left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1}\right.\\ &\left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), \pi_j(\boldsymbol{x},t)\right\}_{D_1}\right]. \end{aligned} \tag{5.202}$$

Sin embargo, considerando que los PB entre variables bosónicas y fermiónicas es nulo, se verifica que:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\},\\ \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{y},t)\right\},\\ \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), \pi_j(\boldsymbol{x},t)\right\}_{D_1} &= \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), \pi_j(\boldsymbol{x},t)\right\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto, bajo estos resultados (5.203) se reduce a:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}\right.\\ &\left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{x},t)\right\}\right].\end{aligned} \tag{5.203}$$

Teniendo en cuenta que los PB entre los campos bosónicos de la teoría en cuestión se reducen a los PP entre los campos de la teoría de MCS, se comprueba que este PD es exactamente el mismo al deducido anteriormente en (3.97), es decir:

$$\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D = -\left(\delta_{ij}-\partial_i^x\partial_j^x\frac{1}{\nabla_x^2}\right)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{5.204}$$

En lo que concierne a los PD entre los campos bosónicos de la teoría, resta resolver:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} - \int d^2u d^2v \left[\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1}\right.\\ &\left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{x},t)\right\}_{D_1}\right].\end{aligned} \tag{5.205}$$

Se sabe que el PB determinado entre una variable bosónica y una fermiónica es cero, de allí que:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} &= \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\},\\ \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} &= \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\},\\ \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{x},t)\right\}_{D_1} &= \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{x},t)\right\}.\end{aligned}$$

En virtud a las tres relaciones previas, (5.205) se escribirá como sigue:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} - \int d^2u d^2v \left[\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}\right.\\ &\left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{x},t)\right\}\right].\end{aligned} \tag{5.206}$$

Considerando que los PB entre los campos bosónicos de la QED_{2+1} son equivalentes a los PP determinados en teoría de MCS, se concluye que el PD (5.206) es igual al determinado anteriormente en la relación (3.100):

$$\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D = \frac{k}{4\pi}\left(\varepsilon_{mi}\partial_m^x\partial_j^x-\varepsilon_{mj}\partial_m^x\partial_i^x\right)\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{5.207}$$

Ahora, se determinarán los PD entre los campos fermiónicos del espacio de fase reducido. A partir de la definición (5.188) se tiene que:

$$\begin{aligned}\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D &= \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}-\int d^2ud^2v\left[\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1}\right.\\ &\left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\psi_c(\boldsymbol{x},t)\right\}_{D_1}\right].\end{aligned} \tag{5.208}$$

Dado que el único vínculo que posee variables de tipo fermiónico en su estructura es ϕ_2, podría esperarse que la integral presente en el segundo sumando de (5.208) será diferente de cero para el valor particular $l=2$. No obstante, la componente matricial $C^{-1}_{22}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ es nula, bajo este razonamiento y el resultado encontrado en (5.164), se concluye que:

$$\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D=0. \tag{5.209}$$

Igualmente, mediante (5.188) se encuentra que el PD entre los campos ψ_b y $\overline{\psi}_b$ es dado por:

$$\begin{aligned}\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D &= \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}-\int d^2ud^2v\left[\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1}\right.\\ &\left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\right\}_{D_1}\right].\end{aligned} \tag{5.210}$$

Teniendo en cuenta que los PD calculados entre campos de tipo fermiónico con campos de tipo bosónico son nulos, se esperaría que los PD presentes en la integral del segundo sumando de la expresión previa arrojen un valor distinto de cero siempre que $l=2$, esto debido a que el vínculo ϕ_2 es el único que presenta variables fermiónicas en su estructura. Sin embargo, puede verificarse de (5.193), que la componente matricial $C^{-1}_{22}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ es cero. Por consiguiente, el PD (5.211) se simplifica a:

$$\begin{aligned}\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D &= \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}\\ &= -i\gamma^0_{bc}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).\end{aligned} \tag{5.211}$$

En cuanto a los PD entre los campos fermiónicos del superespacio de fase reducido, resta calcular:

$$\begin{aligned}\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D &= \left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}-\int d^2ud^2v\left[\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1}\right.\\ &\left. C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\right\}_{D_1}\right].\end{aligned} \tag{5.212}$$

Obsérvese, que aparentemente la integral presente en (5.212) será no nula siempre que $l = 2$. Sin embargo, se sabe que $C_{22}^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ es cero. Así pues, se obtiene que:

$$\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x}, t), \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y}, t)\right\}_D = 0, \tag{5.213}$$

donde se ha empleado tambíen la ecuación (5.170).

Finalmente, los PD entre los campos bosónicos y fermiónicos del espacio de fase reducido han sido determinados en el **Apéndice O** y están dados por:

$$\begin{aligned}
\left\{A_i(\boldsymbol{x}, t), \psi_b(\boldsymbol{y}, t)\right\}_D &= 0, && (5.214)\\
\left\{A_i(\boldsymbol{x}, t), \overline{\psi}_b(\boldsymbol{y}, t)\right\}_D &= 0, && (5.215)\\
\left\{\pi_i(\boldsymbol{x}, t), \psi_b(\boldsymbol{y}, t)\right\}_D &= -ie\psi_b(\boldsymbol{y}, t)\,\partial_i^x \frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), && (5.216)\\
\left\{\pi_i(\boldsymbol{x}, t), \overline{\psi}_b(\boldsymbol{y}, t)\right\}_D &= ie\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y}, t)\,\partial_i^x \frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). && (5.217)
\end{aligned}$$

De este modo, se concluye que los PD no nulos en teoría de QED_{2+1} son:

$$\begin{aligned}
\left\{A_i(\boldsymbol{x}, t), \pi_j(\boldsymbol{y}, t)\right\}_D &= -\left(\delta_{ij} - \partial_i^x\partial_j^x \frac{1}{\nabla_x^2}\right)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
\left\{\pi_i(\boldsymbol{x}, t), \pi_j(\boldsymbol{y}, t)\right\}_D &= \frac{k}{4\pi}\left(\varepsilon_{mi}\partial_m^x\partial_j^x - \varepsilon_{mj}\partial_m^x\partial_i^x\right)\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
\left\{\psi_b(\boldsymbol{x}, t), \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y}, t)\right\}_D &= -i\gamma_{bc}^0\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
\left\{\pi_i(\boldsymbol{x}, t), \psi_b(\boldsymbol{y}, t)\right\}_D &= -ie\psi_b(\boldsymbol{y}, t)\,\partial_i^x \frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
\left\{\pi_i(\boldsymbol{x}, t), \overline{\psi}_b(\boldsymbol{y}, t)\right\}_D &= ie\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y}, t)\,\partial_i^x \frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})
\end{aligned}$$

Cabe anotar, que los PD definidos por (5.188) satisfacen las mismas propiedades que los PB [8].

5.3.7. Ecuaciones de Hamilton

Nótese que de la identidad (5.195) se deduce que:

$$\partial_i\pi_i - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j = e\overline{\psi}\gamma^0\psi. \tag{5.218}$$

Reemplazando (5.218) en (5.44) se deduce que el Hamiltoniano de la teoría de QED_{2+1} presenta la siguiente estructura:

$$H_{QED} = H_1 + H_D - e\int d^2y A_\alpha \overline{\psi}\gamma^\alpha\psi, \tag{5.219}$$

donde H_D es el Hamiltoniano de campo fermiónico dado por las expresión (4.88) y donde se ha denotado:

$$H_1 \equiv \int d^2x \left\{ \frac{1}{2}\left[\pi_i + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\right]^2 + A_0 e\overline{\psi}\gamma^0\psi \right\}. \tag{5.220}$$

Por otro lado, el PD entre una variable dinámica arbitraria del espacio de fase reducido con un vínculo determinado del sistema será fuertemente igual a cero, resultado que permite inferir que los PD son consistentes con los vínculos de la teoría [8]. Por lo tanto, la dinámica de una variable dinámica del espacio de fase reducido $F(\boldsymbol{x},t) \equiv F\left[A_i, \pi_i, \psi_b, \overline{\psi}_b\right]$ es dada por:

$$\dot{F}(\boldsymbol{x},t) \equiv \left\{F(\boldsymbol{x},t), H_{QED}(\boldsymbol{y},t)\right\}_D. \tag{5.221}$$

Teniendo en cuenta que la teoría posee cuatro vínculos bosónicos, existirán a penas dos grados de libertad de tipo bosónico, así pues usando la ecuacion de Hamilton (5.221), se deduce que la dinámica del campo A_i con $i = 1,2$ es dada por:

$$\begin{aligned} \dot{A}_i(\boldsymbol{x},t) &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), H_1(\boldsymbol{y},t)\right\}_D \\ &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), H_{MCS}(\boldsymbol{y},t)\right\}_D \\ &= -\pi_i(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t) + \partial_i^x A_0(\boldsymbol{x},t). \end{aligned} \tag{5.222}$$

Resultado en el cual se hizo uso de las fórmulas (3.101) y (3.106) obtenidas en el estudio de la teoría de MCS. De forma similar, a partir de (5.219), (5.221) y los PD fundamentales se determina que la ecuación de Hamilton asociada al campo fermiónico ψ_b es:

$$\begin{aligned} \partial_0\psi_b &= \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), H_1(\boldsymbol{y},t)\right\}_D + \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), H_D(\boldsymbol{y},t)\right\}_D - \\ &\quad e\int d^2y A_\alpha \gamma^\alpha_{cd}\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}_D \psi_d(\boldsymbol{y},t) \\ &= -\gamma^0_{bc}\gamma^j_{cd}\partial^x_j\psi_d(\boldsymbol{x},t) - im\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{x},t) + ieA_\alpha\gamma^0_{bc}\gamma^\alpha_{cd}\psi_d(\boldsymbol{x},t) \end{aligned} \tag{5.223}$$

donde se ha empleado la relación (4.89), el PD (5.211) y el siguiente resultado deducido en el **Apéndice O**:

$$\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), H_1(\boldsymbol{y},t)\right\}_D = 0. \tag{5.224}$$

Es posible escribir la ecuación (5.223) del siguiente modo:

$$i\gamma^0\partial_0\psi + i\gamma^j\partial_j\psi - m\psi = -eA_\alpha\gamma^\alpha\psi, \tag{5.225}$$

donde se multiplicó por γ^0 por la izquierda de (5.223), teniendo en cuenta que $\left(\gamma^0\right)^2 = \mathbf{1}$, siendo $\mathbf{1}$ la matriz identidad 2×2. La ecuación (5.211) puede escribirse de forma compacta como sigue:

$$\left(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m\right)\psi = -eA_\alpha\gamma^\alpha\psi. \tag{5.226}$$

Finalmente, la dinámica asociada al campo fermiónico $\overline{\psi}_b$ vendrá determinada por:

$$\begin{aligned}
\partial_0\overline{\psi}_b &= \left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), H_1(\boldsymbol{y},t)\right\}_D + \left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), H_D(\boldsymbol{y},t)\right\}_D + \\
&\quad e\int d^2y A_\alpha\gamma^\alpha_{cd}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), \psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}_D \\
&= -\partial^x_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^j_{cd}\gamma^0_{db} + im\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^0_{cb} - ieA_\alpha\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^\alpha_{cd}\gamma^0_{cb}\delta^2.
\end{aligned} \tag{5.227}$$

Cabe anotar, que en el cálculo preliminar se usarón los resultados deducidos en (4.93) y (4.94) deducidas durante el estudio de la teoría de campo fermiónico, además del siguiente resultado encontrado en el **Apéndice O**:

$$\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), H_1(\boldsymbol{y},t)\right\}_D = 0. \tag{5.228}$$

La relación (5.227) puede ser reescrita del modo que prosigue:

$$i\partial_0\overline{\psi}\gamma^0 + i\partial_j\overline{\psi}\gamma^j + m\overline{\psi} = eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha,$$

donde se ha mutiplicado por γ^0 a la derecha de (5.227). Tras reordenar términos se obtiene que la ecuación de Hamilton para el campo fermiónico $\overline{\psi}$ es:

$$\overline{\psi}\left(i\gamma^\alpha\overleftarrow{\partial}_\alpha + m\right) = eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha. \tag{5.229}$$

De las relaciones (5.222), (5.226) y (5.229) se concluye que la dinámica del sistema es determinada por el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} \dot{A}_i(\boldsymbol{x},t) = -\pi_i(\boldsymbol{x},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t) + \partial_i^x A_0(\boldsymbol{x},t) \\ \left(i\gamma^\alpha\partial_\alpha - m\right)\psi = -eA_\alpha\gamma^\alpha\psi \\ \overline{\psi}\left(i\gamma^\alpha\overleftarrow{\partial}_\alpha + m\right) = eA_\alpha\overline{\psi}\gamma^\alpha \end{cases}$$

Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

Se estudío la teoría de Chern-Simons pura (C-S), que es una teoría en $(2+1)$ dimensiones y cuya densidad Lagrangiana se caracteriza por ser cuadrática en el potencial fundamental A_α e invariante bajo transformaciones gauge locales. En el análisis de la teoría a nivel Lagrangiano se dedujeron las ecuaciones de Euler-Lagrange, a partir de las cuales se determinó la ecuación de campo (2.25) caracterizada por ser invariante bajo transformaciones de la forma (1.4).

En el análisis canónico de la teoría bajo el método de Dirac, se definió el momento canónico conjugado al campo fundamental A_α, definición de la cual surgen los vínculos primarios π_0 y χ_i con $i=1,2$ dados por (2.29) y (2.30) respectivamente. De igual manera, se construyó el Hamiltoniano canónico de C-S (2.35) y se calcularon los PP fundamentales. La dinámica en el espacio de fase completo es definida por el Hamiltoniano primario, cantidad que se construyó como una combinación lineal del Hamiltoniano canónico y los vínculos primarios. Para garantizar que el vínculo π_0 se conserve durante la evolución dinámica del sistema, se determinó su requerimiento de consistencia, del cual surgió el vínculo secundario ξ dado por la ecuación (2.48) y cuya consitencia, al igual que la de χ_i, no dió origen a nuevos vínculos.

A partir de los PP entre el conjunto de vínculos del sistema se determinó que π_0 es de primera clase, mientras que los vínculos ξ y χ_i son de segunda clase. Con el fin de estudiar los vínculos de segunda clase, se construyó la matriz de vínculos (2.69), cuyo determinante permitió establecer que se trata de una matriz singular, resultado del que se pudo inferir que los vínculos ξ y χ_i no pueden ser tratados bajo la definición de PD puesto que no constituyen un conjunto mínimo de vínculos de segunda clase. A causa de esto, se cons-

truyó el vínculo de primera clase $\overline{\xi}$ presente en (2.80), como una combinación lineal de los vínculos de segunda clase, de este modo, se pudo establecer que π_0, χ_i y $\overline{\xi}$ definen el conjunto completo de vínculos para la teoría de C-S.
La dinámica en el espacio de fase completo para la teoría de C-S pura, está determinada por el Hamiltoniano extendido, que se construyó como una combinación lineal del Hamiltoniano primario de C-S y el vínculo de primera clase $\overline{\xi}$. A partir de este Hamiltoniano se calcularon las ecuaciones de Hamilton (2.85), (2.90), (2.91) y (2.96) que definen la evolución temporal de los campos canónicos $[A_\alpha, \pi^\alpha]$. Estas ecuaciones se expresan en términos de igualdades debiles y no determinan una evolución temporal de manera única debido a la arbitrariedad impuesta por los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase. Por otro lado, se pudo demostrar que las ecuaciones de Hamilton son debilmente equivalentes a la ecuaciones de campo (2.25) encontradas durante el estudio de la teoría en el formalismo Lagrangiano.

Los vínculos en teoría de C-S pura se eliminaron mediante un método iterativo consistente en tratar inicialmente los vínculos de segunda clase χ_i de acuerdo a una primera definición de PD dada por (2.103) y posteriormente eliminar los vínculos remanentes de primera clase π_0, $\overline{\xi}$ y las dos condiciones del gauge de radiación bajo la definición de PD (2.123). A partir de la primera definición de PD (2.103) se calcularon los PD fundamentales (2.111) y (2.113) que permitieron construir un nuevo espacio de fase definido por los campos $[A_\alpha, \pi_0]$. Análogamente, de la definición de PD (2.123) se obtuvo el conjunto completo de PD fundamentales.

La teoría de C-S pura es descrita en principio por seis campos canónicos, no obstante, el análisis canónico de la misma en el gauge de radiación permite fijar un total de seis vínculos, situación que implica que la teoría no posee grados de libertad. Este resultado se ve reflejado especialmente en que el tratamiento de la teoría en el gauge de radiación anula el Hamiltoniano y por ende no existe dinámica para los campos que se emplean en su descripción.

Se estudio la teoría de Maxwell-Chern-Simons libre (MCS) en los formalismos Lagrangiano y Hamiltoniano. En la formulación Lagrangiana se dedujeron las ecuaciones de campo (3.8), a partir de las cuales se determinaron las ecuaciones de MCS (3.10), (3.14) y (3.16) asociadas a leyes de Gauss, Faraday y Amper respectivamente. Se demostró que la ecuación de campo (3.8) expresada en términos del vector dual $\widetilde{F}_{\mu}$, es equivalente a la ecuación de Klein-Gordon para un campo vectorial de masa μ, resultado que implica que las componentes del vector $\widetilde{F}_{\mu}$ (al igual que el campo A_{α}) se propagan como campos libres de masa μ, de este modo, se comprobó que la adición del término de C-S a la teoría electromagnética de Maxwell da origen a un término topológico de masa asociado a los fotones descritos por el campo fundamental A_{α}.

El análisis de la teoría de MCS en el formalismo Hamiltoniano se llevó a cabo a través del método de Dirac, procedimiento en el que se dedujo el vínculo primario π_0 dado por (3.30). Se construyó el Hamiltoniano canónico de MCS (3.41), definido en el espacio de fase reducido y se calcularon los PP fundamentales. Para determinar la dinámica del sistema en el espacio de fase completo, se construyó el Hamiltoniano primario de MCS (3.42), definido como la combinación lineal del Hamiltoniano canónico y el vínculo primario π_0. Se estudío la consistencia del vínculo π_0, la cual dió origen al vínculo secundario G asociado a la ley de Gauss y cuyo análisis de consistencia no dio origen a nuevos vínculos. Estos resultados permitieron establecer que el conjunto completo de vínculos para la teoría de MCS es definido por (3.39) y (3.47).

Teniendo en cuenta que todos los PP entre los vínculos del sistema se anulan debilmente, se clasificó a π_0 y G como de primera clase. Los vínculos de primera clase son generadores de transformaciones gauge locales, pues conectan los estados finales equivalentes correspondientes a la elección arbitraria de los multiplicadores de Lagrange asociados a tales vínculos. Por consiguiente, la dinámica de la teoría de MCS en el espacio de fase completo estará determinada por el Hamiltoniano extendido (3.54), a partir del cual se cacularon las ecuaciones de Hamilton (3.58), (3.61), (3.62) y (3.66) que definen la evolución temporal de los campos canónicos $[A_\alpha, \pi^\alpha]$. No obstante, debido a la arbitrariedad impuesta por los multiplicadores de Lagrange, las ecuaciones de Hamilton no definen la dinámica unívocamente y se expresan como igualdades debiles. Por otro lado, se demostró que las ecuaciones de Hamilton equivalen debilmente a las ecuaciones de campo (3.8) deducidas durante el estudio de la teoría a nivel Lagrangiano.

El tratamiendo de los dos vínculos de primera clase de la teoría de MCS requirió la inclusión de dos vínculos adicionales conocidos como condiciones gauge, que fueron considerados a ser: el gauge de Coulomb y su respectivo PP con el Hamiltoniano canónico de MCS. La adición de estas condiciones gauge permitió definir un conjunto de cuatro vínculos de segunda clase, que se eliminaron bajo la definición de PD (3.83), a partir de la cual se determinaron los PD entre los campos $[A_i, \pi_i]$. Considerando que de acuerdo a la definición (3.83), el PD entre un vínculo y una variable arbitraria del espacio de fase es nulo [8], fue posible escribir los vínculos π_0 y G como ecuaciones fuertemente iguales a cero, a partir de las cuales se construyó el Hamiltoniano de MCS (3.101) que permitió deducir la euación de Hamilton (3.106).

Se analizó la estructura clásica del campo fermiónico libre en $(2+1)$ dimensiones empleando el método de Dirac para sistemas singulares, mediante el cual se definieron los vínculos primarios Γ_b^i con $b, i = 1,2$ dados por (4.21) y (4.22), se construyó el Hamiltoniano canónico (4.28) y se determinaron los PB entre los campos que definen el espacio de fase: $\left[\psi_b, \overline{\psi}_b, \pi_b, \overline{\pi}_b\right]$. A partir de una combinación lineal entre el Hamiltoniano canónico y los vínculos primarios del sistema se calculó el Hamiltoniano primario (4.30), el cual define la dinámica de los campos en el espacio de fase completo. Se demostró que el análisis de consistencia de los vínculos primarios no da origen a nuevos vínculos. Se comprobó que no todos los PB entre el conjunto de vínculos de la teoría se anulan debilmente, estableciendo de este modo, que los cuatro vínculos fermiónicos Γ_b^i son de segunda clase.

Dado que la teoría de campo fermiónico no posee vínculos de primera clase, se concluye que el Hamiltoniano extendido es equivalente al Hamiltoniano primario, a partir del cual se calcularon las ecuaciones de Hamilton (4.51), (4.52), (4.57) y (4.60) que definen la evolución temporal de los campos canónicos en el espacio de fase completo. Se demostró que estas ecuaciones de Hamilton equivalen debilmente a las ecuaciones de Dirac asociadas a los campos fundamentales ψ_b y $\overline{\psi}_b$. Los vínculos Γ_b^i indican la existencia de cuatro grados de libertad, sin embargo, la elección de los mismos es completamente arbitraria, por esta razón se escogió como campos independientes a ψ_b y $\overline{\psi}_b$ que definen el espacio de fase reducido. Los vínculos de segunda clase fueron eliminados bajo la definición de PD (4.67), a partir de la cual se determinaron los PD entre los grados de libertad y se calcularon las ecuaciones de Hamilton (4.92) y (4.97) que son equivalentes a las ecuaciones de Dirac (4.1) y (4.3) respectivamente.

Finalmente, se estudió la estructura canónica de la electrodinámica cuántica bidimensional con el término de Chern-Simons QED_{2+1}, vía método de Dirac, análisis en el que se obtuvo el vínculo primario bosónico π_0 y los vínculos primarios fermiónicos Γ_b^i con $b, i = 1, 2$. Dado que la dinámica del superespacio de fase completo es determinada por el Hamiltoniano primario (5.45), se procedió a construirlo como combinación lineal del Hamiltoniano canónico (5.44) y los vínculos primarios del sistema, de este modo, se encontró que la consistencia del vínculo π_0 da origen al vínculo bosónico secundario Σ, cuya consistencia, al igual que la de Γ_b^i no origina más vínculos.

Los PB entre el conjunto de vínculos del sistema, permitió clasificar a π_0 como de primera clase y a Σ, Γ_b^i como de segunda clase. Se verificó que Σ y Γ_b^i no constituyen un conjunto mínimo de vínculos de segunda clase, puesto que en el limite en el que la constante de acoplamiento e tiende a cero, no se logra obtener el mismo número y la misma clase de vínculos presentes en las teorías de MCS y de campo fermiónico libres. Por consiguiente, mediante una combinación lineal de los vínculos de segunda clase, se construyó el vínculo bosónico de primera clase ϕ_2, tal que cuando $e \to 0$, este se reduce al vínculo asociado a la ley de Gauss en teoría de MCS (3.47). A partir de estos resultados se obtuvo que el conjunto completo de vínculos de la QED_{2+1} es definido por cuatro vínculos fermiónicos de segunda clase: Γ_b^i y dos vínculos bosónicos de primera clase: π_0 y ϕ_2.

La evolución temporal de los campos canónicos $\left[A_\alpha, \pi^\alpha, \psi_b, \overline{\psi}_b, \pi_b, \overline{\pi}_b\right]$ en el espacio de fase completo es determinada por el Hamiltoniano extendido (5.125), que fue construido como combinación lineal del Hamiltoniano primario y todos los vínculos de primera clase de la teoría. Con el Hamiltoniano extendido se dedujeron las ecuaciones de Hamilton (5.127) a (5.134), expresadas como igualdades debiles debido a la presencia de los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos de primera clase, la arbitrariedad de los multiplicadores de Lagrange implica que estas ecuaciones no fijen la dinámica de los campos de manéra única. Se comprobó que las ecuaciones de Hamilton son debilmente equivalentes a las ecuaciones de campo (5.22), (5.25) y (5.28), deducidas en el estudio de la teoría en el formalismo Lagrangiano.

El conjunto de vínculos de la QED_{2+1} se estudió empleando el siguiente método iterativo: Inicialmente, se procedió a eliminar los vínculos de segunda clase Γ_b^i empleando la definición de PD (5.151), a través de la cual se determinaron unos primeros PD entre ψ_b y $\overline{\psi}_b$, campos que fueron escogidos como los primeros grados de libertad. De acuerdo a la definición (5.151) se determinó un nuevo superspacio de fase definido por los campos $\left[A_\alpha, \pi^\alpha, \psi_b, \overline{\psi}_b\right]$. Posteriormente, se estudiaron los vínculos de primera clase π_0 y ϕ_2, los cuales fueron transformados en vínculos de segunda clase al introducir los vínculos adicionales (5.184) y (5.185) concernientes al gauge de Coulomb y su PB con el Hamiltoniano canónico, respectivamente. Este nuevo conjunto de vínculos segunda clase se trató bajo la definición de PD (5.188), a partir de la cual se determinaron los PD entre los campos $\left[A_i, \pi_i, \psi_b, \overline{\psi}_b\right]$ que definen el espacio de fase reducido. Por último, se dedujeron las ecuaciones de Hamilton para los grados de libertad.

Capítulo 7

Apéndices

7.1. Apéndice A. Notación relativista en (2+1) dimensiones

Se usarán índices griegos para denotar tri-vectores en el espacio tiempo en $(2+1)$ dimensiones, e índices latinos para las componentes espaciales.

1. Tri-vector contravariante:

$$x^{\alpha} = \left(x^0, x^1, x^2\right) \equiv (t, \boldsymbol{x}), \text{ con } \alpha = 0, 1, 2. \tag{7.1}$$

2. La métrica de Minkowski en $(2+1)$ dimensiones viene dada por:

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ con } \alpha, \beta = 0, 1, 2. \tag{7.2}$$

3. Mediante la métrica de Minkowki, un tri-vector covariante será escrito como:

$$x_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} x^{\beta} = (x_0, -x_1, -x_2) = (t, -\boldsymbol{x}). \tag{7.3}$$

4. El producto escalar de dos tri-vectores a y b es:

$$ab \equiv a^{\alpha} b_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta} a^{\alpha} b^{\beta} = a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 = a^0 b^0 - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}. \tag{7.4}$$

5. Generalización del gradiente en $(2+1)\,d$:

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \quad , \quad \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right). \tag{7.5}$$

6. Generalización del operador D$'$Alembertiano en $(2+1)$ dimensiones:

$$\Box = \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \tag{7.6}$$

7. El tensor completamente antisimétrico, $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$, conocido como tensor de Levi-Civita, será igual a $+1$ o -1, según se tenga una permutación par o impar de los índices $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2$. Este tensor se emplea bajo las siguientes convenciones:

$$\varepsilon^{012} = 1, \tag{7.7}$$

$$\varepsilon^{0ij} \equiv \varepsilon^{ij}. \tag{7.8}$$

El tensor de Levi-Civita en $(2+1)$ dimensiones, verifica las siguientes identidades de contracción:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\lambda} = 2\delta^\gamma_\lambda, \tag{7.9}$$

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\varepsilon_{\alpha\mu\nu} = \delta^\beta_\mu \delta^\gamma_\nu - \delta^\beta_\nu \delta^\gamma_\mu. \tag{7.10}$$

7.2. Apéndice B. Identidades (2.5) y (2.31)

1. A partir de la estructura del tensor de campo electromagnético dada en (1.2), se procederá a solucionar el siguiente producto tensorial:

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} &= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\left(\partial_\beta A_\gamma - \partial_\gamma A_\beta\right) \\
&= \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\partial_\beta A_\gamma - \varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\partial_\gamma A_\beta \\
&= 2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\partial_\beta A_\gamma. \qquad (7.11)
\end{aligned}$$

Donde para los dos cálculos previos se ha aprovechado la propiedad de antisimetría del tensor de Levi-Civita. Tras expandir índices, el lado derecho de la expresión (7.11) se convierte en:

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\partial_\beta A_\gamma &= \varepsilon_{ij}\partial_0\partial_i A_j - \varepsilon_{ij}\partial_i\partial_0 A_j + \varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j A_0 + \varepsilon^{ijm}\partial_i\partial_j A_m \\ &= \varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j A_0 + \varepsilon^{ijm}\partial_i\partial_j A_m.\end{aligned}$$

Sin embargo, dado que el tensor ε_{ij} es antisimétrico en los indices i, j, mientras que el tensor $\partial_i\partial_j$ es simétrico en los mismos indices, es conocido que el prodcuto tensorial $\varepsilon_{ij}\partial_i\partial_j = 0$, razón por la cual se deduce que:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha\partial_\beta A_\gamma = 0. \tag{7.12}$$

Sustituyendo este resultado en (7.11) se encuentra que:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\alpha F_{\beta\gamma} = 0. \tag{7.13}$$

2. Se tiene la densidad Hamiltoniana canónica:

$$\mathscr{H}_c = \frac{k}{4\pi}\left[\varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_0\right)A_j - \varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_j\right)A_0 - \varepsilon^{ijm}\left(\partial_i A_j\right)A_m\right]. \tag{7.14}$$

Se estudiará el último sumando de la anterior relación teniendo en cuenta que $i, j, m = 1, 2$, es decir :

$$\begin{aligned}\varepsilon^{ijm}\left(\partial_i A_j\right)A_m &= \varepsilon^{1jm}\left(\partial_1 A_j\right)A_m + \varepsilon^{2jm}\left(\partial_2 A_j\right)A_m \\ &= \varepsilon^{12m}\left(\partial_1 A_2\right)A_m + \varepsilon^{21m}\left(\partial_2 A_1\right)A_m.\end{aligned}$$

Notese que debido a que la teoría de C-S se restringe a $(2+1)$ dimensiones, para cualquier valor de $m = 1, 2$ se cumple que:

$$\varepsilon^{ijm}\left(\partial_i A_j\right)A_m = 0. \tag{7.15}$$

Por ende (7.14) se simplifica como sigue:

$$\mathscr{H}_c = \frac{k}{4\pi}\left[\varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_0\right)A_j - \varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_j\right)A_0\right]. \tag{7.16}$$

7.3. Apéndice C. PP en Teoría de C-S

En este apéndice se determinarán algunos PP necesarios para el análisis canónico de la teoría de C-S.

7.3.1. PP entre los vínculos del sistema

A partir de la ecuación (2.48) y los PP fundamentales, se puede deducir que:

$$\begin{aligned}\left\{\xi\left(\boldsymbol{x},t\right),\xi\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \left\{\varepsilon_{im}\partial_i^x A_m\left(\boldsymbol{x},t\right),\varepsilon_{jn}\partial_j^y A_n\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx \varepsilon_{im}\varepsilon_{jn}\partial_i^x\partial_j^y\left\{A_m\left(\boldsymbol{x},t\right),A_n\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx 0. \end{aligned}\tag{7.17}$$

De forma análoga, usando las expresiónes (2.30), (2.48) y los PP fundamentales, se encuentra que el PP entre los vínculos ξ y χ_j, se calcula como sigue:

$$\begin{aligned}\left\{\xi\left(\boldsymbol{x},t\right),\chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \left\{\varepsilon_{im}\partial_i A_m\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_j\left(\boldsymbol{x},t\right)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jn}A_n\left(\boldsymbol{x},t\right)\right\}\\ &\approx \varepsilon_{im}\partial_i^x\left\{A_m\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_j\left(\boldsymbol{x},t\right)\right\}\\ &\approx \eta_{mj}\varepsilon_{im}\partial_i^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\ &\approx \varepsilon_{ji}\partial_i^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \end{aligned}\tag{7.18}$$

Resultado en el que se ha empleado la antisimetría del tensor de Levi-Civita. De esta relación y las propiedades de los PP, se comprueba que:

$$\begin{aligned}\left\{\chi_i\left(\boldsymbol{z},t\right),\xi\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx -\left\{\xi\left(\boldsymbol{y},t\right),\chi_i\left(\boldsymbol{z},t\right)\right\}\\ &\approx -\varepsilon_{ij}\partial_j^y\delta^2\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}\right). \end{aligned}\tag{7.19}$$

Por otro lado mediante la ecuación (2.30), se resolverá el siguiente PP:

$$\begin{aligned}
\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t),\chi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{im}A_m(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jn}A_n(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jn}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),A_n(\boldsymbol{y},t)\right\}+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{im}\left\{A_m(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx -\frac{k}{4\pi}\eta_{in}\varepsilon_{jn}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\frac{k}{4\pi}\eta_{jm}\varepsilon_{im}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&\approx -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \qquad (7.20)
\end{aligned}$$

Cabe anotar que para el desarrollo matemático previo se han empleado los PP fundamentales.

Teniendo en cuenta ahora, que el vínculo $\overline{\xi}$ dado por (2.82), es de primera clase, es evidente que:

$$\begin{aligned}
\left\{\overline{\xi}(\boldsymbol{x},t),\overline{\xi}(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\xi(\boldsymbol{x},t)-\frac{2\pi}{k}\partial_i\chi_i(\boldsymbol{x},t),\xi(\boldsymbol{y},t)-\frac{2\pi}{k}\partial_j\chi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx -\frac{2\pi}{k}\partial_j^y\left\{\xi(\boldsymbol{x},t),\chi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}-\frac{2\pi}{k}\partial_i^x\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t),\xi(\boldsymbol{y},t)\right\}+\\
&\quad \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2\partial_i^x\partial_j^y\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t),\chi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx -\frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ji}\partial_i^x\partial_j^y\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})+\frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\partial_i^x\partial_j^y\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\\
&\quad \frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\partial_i^x\partial_j^y\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&\approx -\frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\partial_i^x\partial_j^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&\approx 0 \qquad (7.21)
\end{aligned}$$

Resultado para el cual se han empleado los PP deducidos previamente en (7.18) y (7.19).

7.3.2. PP entre los campos canónicos y los vínculos del sistema

De la ecuación (2.30) y los PP fundamentales, se verifica que el PP calculado entre el campo A_i y el vínculo χ_m, es dado por:

$$\begin{aligned} \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\chi_m(\boldsymbol{u},t)\right\} &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\pi_m(\boldsymbol{u},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{mj}A_j(\boldsymbol{u},t)\right\} \\ &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\pi_m(\boldsymbol{u},t)\right\} \\ &= \eta_{im}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}). \end{aligned} \tag{7.22}$$

Haciendo uso de las propiedades de los PP, se deduce que:

$$\begin{aligned} \left\{\chi_n(\boldsymbol{v},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &= -\left\{A_j(\boldsymbol{y},t),\chi_n(\boldsymbol{v},t)\right\} \\ &= -\eta_{jn}\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.23}$$

Finalmente, el PP entre el vínculo de primera clase $\overline{\xi}$ y el campo gauge A_j, se soluciona de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \left\{\overline{\xi}(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\xi(\boldsymbol{x},t)-\frac{2\pi}{k}\partial_i\chi_i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx -\frac{2\pi}{k}\partial_i^x\partial_j^y\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx \frac{2\pi}{k}\eta_{ji}\partial_i^x\partial_j^y\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &\approx \frac{2\pi}{k}\nabla_x^2\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.24}$$

Donde ∇_x^2 es el operador Laplaciano en dos dimensiones. A partir de la expresión preliminar y las propiedades de los PP, se puede encontrar:

$$\begin{aligned} \left\{A_j(\boldsymbol{x},t),\overline{\xi}(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx -\left\{\overline{\xi}(\boldsymbol{y},t),A_j(\boldsymbol{x},t)\right\} \\ &\approx -\frac{2\pi}{k}\nabla_x^2\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.25}$$

Por otro lado, de la ecuación (2.30) y los PP fundamentales, se verifica que el PP calculado entre el campo π_i y el vínculo χ_i, es dado por:

$$\begin{aligned}
\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\chi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),A_m(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}\eta_{im}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{7.26}$$

Similarmente de (2.48) es posible determinar:

$$\begin{aligned}
\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\xi(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \varepsilon_{jm}\partial_j^y\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),A_m(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx -\eta_{im}\varepsilon_{jm}\partial_j^y\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&\approx \varepsilon_{ij}\partial_j^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{7.27}$$

Finalmente, a partir de la relación (2.80) y los resultados deducidos en (7.26) y (7.27) se encuentra que:

$$\begin{aligned}
\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\overline{\xi}(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\xi(\boldsymbol{y},t)\right\}-\frac{2\pi}{k}\partial_j^y\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\chi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx \varepsilon_{ij}\partial_j^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&\approx \frac{1}{2}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{7.28}$$

7.3.3. PP entre los campos canónicos y el Hamiltoniano canónico de C-S

A partir de la expresión (2.35) y los PP fundamentales se deduce que:

$$\begin{aligned}
\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),H_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &= -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{jm}\int d^2x\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\left[\partial_j^yA_m(\boldsymbol{y},t)\right]A_0(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{7.29}$$

Análogamente, de acuerdo a la relación (2.35) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), H_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &= -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{jm}\int d^2x\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), \left[\partial_j^y A_m(\boldsymbol{y},t)\right] A_0(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&= \frac{k}{2\pi}\varepsilon_{jm}\partial_j^x\int d^2x\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), A_m(\boldsymbol{y},t)\right\} A_0(\boldsymbol{y},t) \\
&= -\frac{k}{2\pi}\eta_{im}\varepsilon_{jm}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{y},t) \\
&= -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t), \qquad (7.30)
\end{aligned}$$

donde se han empleado los PP fundamentales.

7.4. Apéndice D. Trasnformada de Fourier de la matriz de vínculos en Teoría de C-S

Se tiene un total de tres vínculos de segunda clase denotados como:

$$\theta_1(\boldsymbol{x},t) \equiv \chi_1(\boldsymbol{x},t), \qquad (7.31)$$

$$\theta_2(\boldsymbol{x},t) \equiv \chi_2(\boldsymbol{x},t), \qquad (7.32)$$

$$\theta_3(\boldsymbol{x},t) \equiv \xi(\boldsymbol{x},t). \qquad (7.33)$$

La matriz de vínculos de segunda clase es definida por:

$$V(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \left\{\theta_l(\boldsymbol{x},t), \theta_m(\boldsymbol{y},t)\right\}. \qquad (7.34)$$

Con $l, m = 1,2,3$.

En virtud al PP estudiado previamente en la relación (7.20) (véase **Apéndice C**) y de acuerdo al carácter antisimétrico del tensor de Levi-Civita, se derivan los siguientes PP:

$$\begin{aligned}
\left\{\theta_1(\boldsymbol{x},t),\theta_1\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx 0, && (7.35)\\
\left\{\theta_1(\boldsymbol{x},t),\theta_2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx -\frac{k}{2\pi}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right), && (7.36)\\
\left\{\theta_2(\boldsymbol{x},t),\theta_1\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \frac{k}{2\pi}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right), && (7.37)\\
\left\{\theta_2(\boldsymbol{x},t),\theta_2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx 0. && (7.38)
\end{aligned}$$

De la misma manera, a partir del PP (7.19) (véase **Apendice C**), se comprueba que:

$$\begin{aligned}
\left\{\theta_1(\boldsymbol{x},t),\theta_3\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \partial_2^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right), && (7.39)\\
\left\{\theta_2\left(\boldsymbol{y},t\right),\theta_3\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx -\partial_1^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). && (7.40)
\end{aligned}$$

Mientras que de la ecuación (7.18) del **Apendice C**, se puede deducir que:

$$\begin{aligned}
\left\{\theta_3(\boldsymbol{x},t),\theta_1\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \partial_2^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right), && (7.41)\\
\left\{\theta_3(\boldsymbol{x},t),\theta_2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx -\partial_1^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). && (7.42)
\end{aligned}$$

Por último, observese que del PP (7.17), se encuentra que:

$$\left\{\theta_3(\boldsymbol{x},t),\theta_3\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0. \tag{7.43}$$

Efectuados estos cálculos, se obtiene que la matriz de vínculos de segunda clase de la teoría de C-S, presenta la forma mostrada a continuación:

$$V\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{2\pi} & \partial_2^x \\ \frac{k}{2\pi} & 0 & -\partial_1^x \\ \partial_2^x & -\partial_1^x & 0 \end{pmatrix}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.44}$$

Como se puede observar, esta es una matriz funcional, pues en sus componentes se localiza la función delta de Dirac y sus derivadas. A continuación se procederá a realizar la transformada de Fourier de cada una de sus componentes.

La transformada de Fourier de la función delta de Dirac en dos dimensiones [13] viene dada por:

$$\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2p \exp\left[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right]. \tag{7.45}$$

De tal modo que:

$$\begin{aligned}\partial_k^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2p\partial_k^x \exp\left[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2}\int d^2p\left\{ip_k \exp\left[i\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right]\right\}.\end{aligned} \tag{7.46}$$

Con $k = 1,2$.

Por ende, la transformada de Fourier de la matriz de vínculos de segunda clase es:

$$\widetilde{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{k}{2\pi} & ip_2 \\ \frac{k}{2\pi} & 0 & -ip_1 \\ ip_2 & -ip_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.47}$$

7.5. Apéndice E. PP entre vínculos de primera clase y condiciones gauge en Teoría de C-S

La inclusión de los vínculos asociados al gauge de radiación permite fijar el siguiente conjunto de vínculos para la teoría de C-S:

$$\phi_1(\boldsymbol{x},t) = \pi_0(\boldsymbol{x},t) \approx 0, \tag{7.48}$$

$$\phi_2(\boldsymbol{x},t) = \overline{\xi}(x) = \xi(\boldsymbol{x},t) - \frac{2\pi}{k}\partial_i\chi_i(\boldsymbol{x},t) \approx 0, \tag{7.49}$$

$$\phi_3(\boldsymbol{x},t) = A_0(\boldsymbol{x},t) \approx 0, \tag{7.50}$$

$$\phi_4(\boldsymbol{x},t) = \partial_i A_i(\boldsymbol{x},t) \approx 0. \tag{7.51}$$

Con el objetivo de verificar si el análisis de la teoría en el gauge de radiación ha sido útil para transformar los vínculos de primera clase π_0 y $\overline{\xi}$ en vínculos de segunda clase, en este apéndice se determinan los PP entre los vínculos del conjunto de citado previamente.

El único PP no nulo, calculado entre el vínculo ϕ_1 y el conjunto de vínculos en análisis es dado por:

$$\left\{\phi_1(\boldsymbol{x},t),\phi_3(\boldsymbol{x},t)\right\} \approx -\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.52}$$

Por otro lado, partir de la ecuación (7.49 y los PP determinados en el **Apéndice C**, se comprueba que:

$$\begin{aligned}
\left\{\phi_2(\boldsymbol{x},t),\phi_2\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \left\{\xi(\boldsymbol{x},t)-\frac{2\pi}{k}\partial_i\chi_i(\boldsymbol{x},t),\xi\left(\boldsymbol{y},t\right)-\frac{2\pi}{k}\partial_j\chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\
&\approx -\frac{2\pi}{k}\partial_j^y\left\{\xi(\boldsymbol{x},t),\chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}-\frac{2\pi}{k}\partial_i^x\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t),\xi\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}+\\
&\quad\left(\frac{2\pi}{k}\right)^2\partial_i^x\partial_j^y\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t),\chi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\
&\approx -\frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ji}\partial_i^x\partial_j^y\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)+\frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\partial_i^x\partial_j^y\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)-\\
&\quad\frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\partial_i^x\partial_j^y\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\
&\approx -\frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\partial_i^x\partial_j^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\
&\approx 0.
\end{aligned} \tag{7.53}$$

Cabe anotar que para la obtención del resultado preliminar se emplearón las propiedades del tensor de Levi-Civita y se tuvo en cuenta además, que el producto tensorial $\varepsilon_{ij}\partial_i^x\partial_j^x$ es nulo.

Similarmente, de acuerdo al PP (7.23) , calculado en el **Apéndice C**, se puede verificar:

$$\begin{aligned}
\left\{\phi_2(\boldsymbol{x},t),\phi_4\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \left\{\xi(\boldsymbol{x},t)-\frac{2\pi}{k}\partial_i\chi_i(\boldsymbol{x},t),\partial_jA_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\
&\approx -\frac{2\pi}{k}\partial_i^x\partial_j^y\left\{\chi_i(\boldsymbol{x},t),A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\
&\approx \frac{2\pi}{k}\eta_{ij}\partial_i^x\partial_j^y\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\
&\approx \frac{2\pi}{k}\nabla_x^2\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).
\end{aligned} \tag{7.54}$$

Expresión en la que $\bigtriangledown_x^2$ es el operador Laplaciano en dos dimensiones.

En virtud a los PP fundamentales para la teoría de C-S se comprueba que los siguientes PP se anulan debilmente:

$$\{\phi_1(\boldsymbol{x},t),\phi_i(\boldsymbol{x},t)\} \approx 0, \text{ con } i=1,2,4, \tag{7.55}$$

$$\{\phi_3(\boldsymbol{x},t),\phi_j(\boldsymbol{y},t)\} \approx 0, \text{ con } j=3,4, \tag{7.56}$$

$$\{\phi_2(\boldsymbol{x},t),\phi_3(\boldsymbol{y},t)\} \approx \{\phi_4(\boldsymbol{x},t),\phi_4(\boldsymbol{y},t)\}\approx 0. \tag{7.57}$$

De los dos PP obtenidos en las estructuras (7.52) y (7.54), es posible observar que tras incluir el gauge de radiación al análisis canónico de la teoría de C-S, los vínculos ϕ_1 y ϕ_2, en principio de primera clase, se han convertido en vínculos de segunda clase, tal y como se esperaba.

7.6. Apéndice F. Matriz de vínculos en Teoría de C-S

Bajo la definición de PD (2.123), la matriz de vínculos de segunda clase de la teoría de C-S en el gauge de radiación, es definida por:

$$S_{lm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \{\phi_l(\boldsymbol{x},t),\phi_m(\boldsymbol{y},t)\}. \tag{7.58}$$

Usando los PP entre los vínculos ϕ_l del sistema, calculados en el **Apéndice E**, se determina que la forma matricial de (7.58) es:

$$S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{k}\bigtriangledown_x^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\pi}{k}\bigtriangledown_x^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{7.59}$$

Como se puede observar, en algunas componentes de esta matriz está presente el operador Laplaciano en dos dimensiones actuando sobre la función delta de Dirac en dos dimensiones. Por consiguiente, se puede inferir que esta matriz es una matriz funcional.

Para el cálculo de los PD entre las variables del espacio de fase reducido de la teoría de C-S, se hace necesario determinar la inversa de la matriz (7.59) . Para tal fin, se tendrá en cuenta que se si $S^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ es la inversa de $S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, esta deberá cumplir la siguiente propiedad:

$$\int d^2 z S_{lr}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\, S^{-1}_{rm}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) = \delta_{lm}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{7.60}$$

Se propone ahora que la matriz $S^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, presenta la estructura mostrada a continuación:

$$S^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \begin{pmatrix} a_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ a_5(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_6(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_7(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_8(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ a_9(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{12}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ a_{13}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{14}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{15}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{16}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}, \tag{7.61}$$

donde a_i son funiones desconocidas a ser calculadas. Reemplazando (7.59) y (7.61) en (7.60), se verifica que para determinar la inversa de la matriz de vínculos de segunda clase $S(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, será necesario resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\int d^2 z \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{k}\nabla^2_x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\pi}{k}\nabla^2_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_2(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_3(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_4(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) \\ a_5(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_6(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_7(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_8(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) \\ a_9(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_{10}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_{11}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_{12}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) \\ a_{13}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_{14}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_{15}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) & a_{16}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$

Relación que, de acuerdo a (7.59) y a la función delta de Dirac, se simplifica a la siguiente operación matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2\pi}{k}\nabla^2_x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\pi}{k}\nabla^2_x & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ a_5(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_6(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_7(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_8(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ a_9(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{12}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ a_{13}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{14}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{15}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{16}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$

Resolviendo el producto matricial presente en el lado izquierdo de la relación previa, se obtiene la siguiente igualdad entre matrices:

$$\begin{pmatrix} -a_9(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -a_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -a_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -a_{12}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \frac{2\pi}{k}\nabla_x^2 a_{13}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \frac{2\pi}{k}\nabla_x^2 a_{14}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \frac{2\pi}{k}\nabla_x^2 a_{15}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & \frac{2\pi}{k}\nabla_x^2 a_{16}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ a_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ -\frac{2\pi}{k}\nabla_x^2 a_5(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -\frac{2\pi}{k}\nabla_x^2 a_6(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -\frac{2\pi}{k}\nabla_x^2 a_7(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -\frac{2\pi}{k}\nabla_x^2 a_8(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{7.62}$$

La igualdad entre matrices establece que una matriz $A \equiv (a_{ij})_{m\times n}$ de elementos matriciales a_{ij} y dimensión $m \times n$, será igual a una matriz $B \equiv (b_{ij})_{p\times q}$ de elementos matriciales b_{ij} y dimensión $p \times q$, si y solo si se cumple que $m = p, n = q$ y $a_{ij} = b_{ij}$, es decir, que serán iguales, siempre que las matrices tengan la misma dimensión y los elementos que están en la misma posición en ambas matrices, sean iguales. Por consiguiente, con la finalidad de determinar los elementos matriciales desconocidos de la ecuación (7.62) , se procederá a igualar las componentes correspondientes de cada una de las filas de las matrices presentes en dicha relación.

Inicialmente, al igualar las componentes posicionadas en la primera fila de cada matriz en (7.62), se obtiene:

$$a_9(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{7.63}$$

En cuanto al resto de componentes observamos que se cumple que:

$$-a_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -a_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -a_{12}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0.$$

Relaciones de las que puede concluir:

$$a_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = a_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = a_{12}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0. \tag{7.64}$$

Si ahora, se igualan las componentes de las tercera fila de cada matriz de la relación matricial (7.62), se observa:

$$a_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{7.65}$$

Similarmente, se obtendrá que las siguientes componentes son nulas.

$$a_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = a_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = a_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0. \tag{7.66}$$

Ahora, en base a la propiedad de igualdad entre matrices, se igualarán las componentes correspondientes a la segunda fila de cada matriz en (7.62), así:

$$\frac{2\pi}{k}\,\nabla_x^2\,a_{14}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).$$

Imponiendo que las condiciones de frontera que establecen que los campos se anulan en el infinito, se determina que la componente $a_{14}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ no es más que la función de Green asociada al operador diferencial local ∇_x^2, que se denotará como:

$$F\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)=\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)=\frac{1}{4\pi}\ln\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)^2. \tag{7.67}$$

Por consiguiente, la componente en cuestión vendrá dada por:

$$a_{14}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\frac{k}{2\pi}\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.68}$$

En cuanto a las componentes restantes de la segunda fila se deduce que:

$$\nabla_x^2 a_{13}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\nabla_x^2 a_{15}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\nabla_x^2 a_{16}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=0.$$

De acuerdo al concepto de función de Green del operador Laplaciano introducido previamente, se concluye que las componentes $a_{13}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right), a_{15}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ y $a_{16}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ son nulas, esto es:

$$a_{13}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=a_{15}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=a_{16}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=0. \tag{7.69}$$

Finalmente, resta estudiar las componentes de la fila número cuatro de (7.62), por lo tanto, en virtud a la igualdad entre matrices se obtiene que:

$$\frac{2\pi}{k}\,\nabla_x^2\,a_8\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=-\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).$$

De donde se puede deducir que:

$$a_8\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=-\frac{k}{2\pi}\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.70}$$

El resto de componentes satisfacen las siguientes igualdades:

$$\nabla_x^2 a_5\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\nabla_x^2 a_6\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\nabla_x^2 a_7\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=0,$$

de las que puede deducir:

$$a_5\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=a_6\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=a_7\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=0. \tag{7.71}$$

Incluyendo todos los resultados obtenidos en los calculos desde (7.63) a (7.71) en la forma propuesta para $S^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ (relación (7.61)), se establece que la estructura de la matriz inversa de $S\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$, es dada por:

$$S^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{k}{2\pi}\frac{1}{\nabla_x^2} \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k}{2\pi}\frac{1}{\nabla_x^2} & 0 & 0 \end{pmatrix}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.72}$$

7.7. Apéndice G. PD fundamentales de la Teoría de C-S

1. El PD entre los campos canónicos A_0 y π_0 se determina a partir de la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D &= \left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}- \\ &\int d^2u d^2v\left[\left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1}S^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right. \\ &\left.\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\pi_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}\right].\end{aligned} \tag{7.73}$$

   En este apéndice se analizarán los resultados que arrojará la integral situada en el segundo sumando de la expresión inmediatamente anterior, teniendo en cuenta para ello los valores posibles que pueden tomar los índices l y m (recordar que $l,m=1,...,4$).

   De acuerdo a la definición de PD (2.103), se puede escribir:

$$\begin{aligned}\left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} &= \left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}-\int d^2v dw\left[\left\{A_0(\boldsymbol{x},t),\chi_m(\boldsymbol{v},t)\right\}\right. \\ &\left. C^{-1}_{mn}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\left\{\chi_n(\boldsymbol{w},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}\right].\end{aligned} \tag{7.74}$$

Expresión en la que la matriz $C_{ij}^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ se determinó en la ecuación (2.108). Usando los PP desarrollados en el **Apéndice C**, se verifica que:

$$\left\{A_0\left(\boldsymbol{x},t\right),\chi_m\left(\boldsymbol{v},t\right)\right\}\approx 0.$$

Razón por la cual la relación (7.74) se simplifica como sigue:

$$\left\{A_0\left(\boldsymbol{x},t\right),\phi_l\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}_{D_1} = \left\{A_0\left(\boldsymbol{x},t\right),\phi_l\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}.$$

Teniendo en cuenta que el PD de la relación previa será diferente de cero solamente cuando $l=1$, se concluye que:

$$\begin{aligned}\left\{A_0\left(\boldsymbol{x},t\right),\phi_l\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}_{D_1} &= \left\{A_0\left(\boldsymbol{x},t\right),\phi_1\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}\\ &= \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\right).\end{aligned} \tag{7.75}$$

Análogamente, de acuerdo a la definición (2.103), se procederá a calcular el siguiente PD:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_m\left(\boldsymbol{v},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right)\right\}_{D_1} &= \left\{\phi_m\left(\boldsymbol{v},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right)\right\}-\\ &\int d^2u d^2w\left[\left\{\phi_m\left(\boldsymbol{v},t\right),\chi_n\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}C_{nl}^{-1}\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\right.\\ &\left.\left\{\chi_l\left(\boldsymbol{w},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right)\right\}\right].\end{aligned} \tag{7.76}$$

Debido a que el siguiente PB se anula debilmente:

$$\left\{\chi_l\left(\boldsymbol{w},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right)\right\}\approx 0,$$

la relación (7.76) se reduce a:

$$\left\{\phi_m\left(\boldsymbol{v},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right)\right\}_{D_1} = \left\{\phi_m\left(\boldsymbol{v},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right)\right\}.$$

Que en virtud a los PP fundamentales, será distinta de cero solamente cuando $m=3$. Por tal motivo se deduce:

$$\left\{\phi_m\left(\boldsymbol{v},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right)\right\}_{D_1} = \left\{\phi_m\left(\boldsymbol{v},t\right),\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right)\right\} = \delta^2\left(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}\right). \tag{7.77}$$

En base a los resultados obtenidos en (7.75) y en (7.77), se puede inferir que la integral presente en el segundo sumando de (2.103), será distinta para los valores $l=1$ y $m=3$.

2. Ahora se estudiará el siguiente PD:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} - \\ &\int d^2u d^2v\left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} S^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\right. \\ &\left.\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1}\right]. \end{aligned} \tag{7.78}$$

Con el propósito de simplificar las operaciones pertinentes para la solución de (7.78), resultará conveniente analizar los posibles valores que tomará la integral presente en su segundo sumando:

$$\int d^2u d^2v\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} S^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1}. \tag{7.79}$$

El estudio de este término se basará en las componentes no nulas de la matriz $S^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$. De la ecuación (2.127) es facil observar que de la matriz en cuestión, apenas las componentes $S^{-1}_{13}, S^{-1}_{24}, S^{-1}_{31}$ y S^{-1}_{42} son diferentes de cero. Por consiguiente, en principio se esperaría que solo para dichas componentes la integral (7.79) no sea nula.

Considerando entonces los valores particulares $l=1, m=3$ en (7.79), será necesario resolver:

$$I_{13} \equiv \int d^2u d^2v\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_1(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} S^{-1}_{13}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_3(\boldsymbol{v},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1}. \tag{7.80}$$

Sin embargo, de la definición de PD (2.103), el primer factor del integrando de la ecuación anterior toma la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_1(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_1(\boldsymbol{y},t)\right\} - \int d^2u d^2v\left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\chi_j(\boldsymbol{u},t)\right\}\right. \\ &\left. C^{-1}_{jm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\chi_m(\boldsymbol{v},t),\phi_1(\boldsymbol{x},t)\right\}\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

Donde se han tenido en cuenta los PP fundamentales de la teoría. Bajo este resultado, se concluye que la integral dada por (7.80) es cero, es decir:

$$I_{13} = 0. \tag{7.81}$$

Si ahora se estudia (7.79) cuando $l = 3, m = 1$, se llega a:

$$I_{31} \equiv \int d^2ud^2v \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_3(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} S^{-1}_{31}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_1(\boldsymbol{v},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} \tag{7.82}$$

De la definición (2.103) y los PP fundamentales se comprueba que:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_3(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_3(\boldsymbol{y},t)\right\} - \int d^2ud^2v \left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \chi_j(\boldsymbol{u},t)\right\}\right.\\ &\quad \left. C^{-1}_{jm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\chi_m(\boldsymbol{v},t), \phi_3(\boldsymbol{x},t)\right\}\right]\\ &= 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto se establece que:

$$I_{31} = 0. \tag{7.83}$$

De forma análoga, se procederá a analizar (7.79) para los valores $l = 2, m = 4$, esto es:

$$I_{24} \equiv \int d^2ud^2v \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_2(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} S^{-1}_{24}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_4(\boldsymbol{v},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1}. \tag{7.84}$$

A partir de la definición de PD (2.103) y los PP entre los vínculos del sistema deducidos en el **Apéndice C**, se puede verificar que:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_2(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_2(\boldsymbol{u},t)\right\} - \\ &\quad \int d^2vd^2w \left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \chi_m(\boldsymbol{v},t)\right\} C^{-1}_{mn}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w})\right.\\ &\quad \left.\left\{\chi_n(\boldsymbol{w},t), \phi_2(\boldsymbol{u},t)\right\}\right]\\ &= \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_2(\boldsymbol{u},t)\right\}\\ &= -\frac{2\pi}{k}\partial^x_i \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}).\end{aligned} \tag{7.85}$$

Similarmente, empleando el PD deducido en (2.113), se encuentra:

$$\left\{\phi_4(\boldsymbol{v},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} = -\frac{2\pi}{k}\varepsilon_{ij}\partial^y_i \delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}). \tag{7.86}$$

Reemplazando (7.85) y (7.86) en (7.84) se obtiene:

$$\begin{aligned} I_{24} &= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \varepsilon_{mj}\partial_i^x\partial_m^y \int d^2u d^2v S_{24}^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})\,\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}) \\ &= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \varepsilon_{mj}\partial_i^x\partial_m^y S_{24}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= \frac{2\pi}{k}\varepsilon_{mj}\frac{\partial_m^x\partial_i^x}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.87}$$

Finalmente, resta deducir la integral (7.79) para $l=4, m=2$, es decir:

$$I_{42} \equiv \int d^2u d^2v \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_4(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} S_{42}^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1}. \tag{7.88}$$

Relación que se convierte en:

$$\begin{aligned} I_{42} &= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \varepsilon_{mi}\partial_m^x\partial_j^y \int d^2u d^2v S_{42}^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\,\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})\,\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}) \\ &= \left(\frac{2\pi}{k}\right)^2 \varepsilon_{mi}\partial_m^x\partial_j^y S_{42}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ &= -\frac{2\pi}{k}\varepsilon_{mi}\frac{\partial_m^x\partial_j^x}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.89}$$

De los análisis llevados a cabo en las ecuaciones (7.81), (7.83), (7.87) y (7.89), se comprueba que la integral (7.79) se reduce a:

$$\int d^2u d^2v \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} S_{lm}^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} = I_{24}+I_{42}. \tag{7.90}$$

Por ende, el PD (7.78) se convierirá en:

$$\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_D = \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} - I_{24} - I_{42}. \tag{7.91}$$

7.8. Apéndice H. Densidad Hamiltoniana canónica de MCS

En este apéndice se procederá a deducir las relaciones (3.36), (3.37) y (3.38), necesarias para la construcción de la densidad Hamiltoniana canónica en la teoría de MCS.

1. Ecuación (3.36):

   Inicialmente, se estudiará el primer sumando de la ecuación (3.35), así:

$$\begin{aligned}\partial_0 A_\beta \pi^\beta &= \partial_0 A_0 \pi_0 + \partial_0 A_i \pi^i \\ &\approx -\partial_0 A_i \pi_i,\end{aligned}$$

   aquí se ha expandido el índice β, considerando que $\beta = 0, 1, 2$. A su vez, se ha tenido en cuenta que el vínculo primario π_0 se anula debilmente. A partir de la fórmula (3.31), es posible reescribir la ecuación previa del siguiente modo:

$$\begin{aligned}\partial_0 A_\beta \pi^\beta &\approx -\left(\partial_i A_0 - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij} A_j - \pi_i\right)\pi_i \\ &\approx -\pi_i \partial_i A_0 + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\pi_i A_j + \pi_i \pi_i.\end{aligned} \tag{7.92}$$

2. Ecuación (3.37):

   En segundo lugar, de la relación (3.35), se analizará el término mostrado a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} F_{a\beta} F^{\alpha\beta} &= \frac{1}{4}\left(F_{0\beta} F^{0\beta} + F_{i\beta} F^{i\beta}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(-2F_{i0} F_{i0} + 2F_{12} F_{12}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(-E_i^2 + B^2\right).\end{aligned} \tag{7.93}$$

Donde $E_i^2 = E_i E_i$ (no $E_i E^i$). Cabe anotar que para la consecución del resultado inmediatamente anterior se hizo uso tanto de la definición de campo magnético como la del campo eléctrico en $(2+1)$ dimensiones (Observar ecuaciónes (1.6) y (1.7)).

Sustituyendo las expresiones (1.6) y (3.32) en (7.93), se verifica que:

$$\frac{1}{4}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\left[\pi_i + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\partial_i A_j\right]^2. \tag{7.94}$$

3. Ecuación (3.38):

Como último paso para determinar completamente la densidad Hamiltoniana canónica de la teoría de MCS, en los calculos que prosiguen, se estudiará el tercer sumando de la ecuación (3.35), esto es:

$$\begin{aligned}\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_\alpha A_\beta\right)A_\gamma &= \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{0\beta\gamma}\left(\partial_0 A_\beta\right)A_\gamma + \frac{k}{4\pi}\varepsilon^{i\beta\gamma}\left(\partial_i A_\beta\right)A_\gamma \\ &= \frac{k}{4\pi}\Big[\varepsilon^{0ij}\left(\partial_0 A_i\right)A_j + \varepsilon^{i0j}\left(\partial_i A_0\right)A_j + \varepsilon^{ij0}\left(\partial_i A_j\right)A_0 + \\ &\quad \varepsilon^{ijm}\left(\partial_i A_j\right)A_m\Big].\end{aligned} \tag{7.95}$$

Sin embargo, se sabe que (véase **Apéndice B**):

$$\varepsilon^{ijm}\left(\partial_i A_j\right)A_m = 0.$$

Por ende, (7.95) se reduce a:

$$\begin{aligned}\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_\alpha A_\beta\right)A_\gamma &= \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\left[\left(\partial_0 A_i\right)A_j - \left(\partial_i A_0\right)A_j + \left(\partial_i A_j\right)A_0\right] \\ &= -\frac{k}{4\pi}\left[\varepsilon_{ij}F_{i0}A_j - \varepsilon_{ij}\left(\partial_i A_j\right)A_0\right] \\ &= -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}E_i A_j + \frac{k}{4\pi}A_0\varepsilon_{ij}\partial_i A_j.\end{aligned} \tag{7.96}$$

Donde se ha empleado la definición del tensor de campo electromagnético y la forma del campo eléctrico en $(2+1)$ dimensiones dada por (1.7). Reemplazando en

(7.96) la estructura del campo eléctrico en términos de las variables del espacio de fase dada por (3.32), se deduce que:

$$\frac{k}{4\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\left(\partial_{\alpha}A_{\beta}\right)A_{\gamma}=-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\pi_{i}A_{j}-\left(\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_{j}\right)^{2}+\frac{k}{4\pi}A_{0}\varepsilon_{ij}\partial_{i}A_{j}. \tag{7.97}$$

7.9. Apéndice I. PP en teoría de MCS

En este apéndice se resolverán los PP necesarios para el análisis canónico de la teoría de MCS.

7.9.1. PP asociados al vínculo (3.47)

1. PP entre el vínculo G dado por (3.47) y el Hamiltoniano canónico de la teoría de MCS:

$$\begin{aligned}\left\{G\left(\boldsymbol{x},t\right),H_{c(MCS)}\right\} \;\approx\; & \int d^{2}y\left\{G\left(\boldsymbol{x},t\right),\frac{1}{2}\left[\pi_{i}(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_{j}(\boldsymbol{y},t)\right]^{2}\right\}+\\ & \int d^{2}y\left\{G\left(\boldsymbol{x},t\right),\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\partial_{i}^{y}A_{j}(\boldsymbol{y},t)\right]^{2}\right\}+\\ & \int d^{2}y\left\{G\left(\boldsymbol{x},t\right),A_{0}\left(\boldsymbol{y},t\right)\left[\partial_{i}^{y}\pi_{i}\left(\boldsymbol{y},t\right)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_{j}(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{7.98}$$

Por simplicidad se solucionará cada uno de los PP presentes en la relación anterior.

a) A partir de la expresión (3.47), se resolverá en primera instancia el siguiente

PP:

$$
\begin{aligned}
\left\{G(\boldsymbol{x},t),\pi_i(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{im}\partial_j^x\left\{\pi_j(\boldsymbol{x},t),A_m(\boldsymbol{y},t)\right\}- \\
&\quad \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jn}\partial_j^x\left\{A_n(\boldsymbol{x},t),\pi_i(\boldsymbol{y},t)\right\}. \\
&\approx \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})- \\
&\quad \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&\approx 0. \qquad (7.99)
\end{aligned}
$$

Cabe anotar que en el desarrollo matemático previo se utilizó $\varepsilon_{ij}=-\varepsilon_{ji}$, consecuencia del carácter antisimétrico del tensor Levi-Civita. Por consiguiente, es notable que lo obtenido en (7.99) implica necesariamente que:

$$
\left\{G(\boldsymbol{x},t),\frac{1}{2}\left[\pi_i(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right\}\approx 0. \qquad (7.100)
$$

b) De acuerdo con el vínculo (3.47) y el tensor de campo electromagnético (1.2), se calculará el PP que prosigue:

$$
\begin{aligned}
\left\{G(\boldsymbol{x},t),\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\partial_m\pi_m(\boldsymbol{x},t),\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx -\eta_{mj}\varepsilon_{ij}\partial_m^x\partial_i^y\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&\approx \varepsilon_{mi}\partial_m^x\partial_i^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \\
&\approx 0. \qquad (7.101)
\end{aligned}
$$

Para la consecución del resultado preliminar se emplearon las propiedades de la métrica de Minkowski en $(2+1)$ dimensiones y que el producto tensorial $\varepsilon_{mi}\partial_m^x\partial_i^x$ es nulo . Esta deducción implica necesariamente que:

$$
\left\{G(\boldsymbol{x},t),\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right\}\approx 0. \qquad (7.102)
$$

c) Resta determinar ahora, el último PP de la relación (7.98). Por conveniencia se denotará tal termino como sigue:

$$
P\equiv\left\{G(\boldsymbol{x},t),A_0(\boldsymbol{y},t)\left[\partial_i^y\pi_i(\boldsymbol{y},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}. \qquad (7.103)
$$

Usando las propiedades de los PP fundamentales, la anterior expresión se reduce a solucionar:

$$\begin{aligned} P &\approx A_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\left\{G\left(\boldsymbol{x},t\right),\partial_i^y\pi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}+ \\ & \left\{G\left(\boldsymbol{x},t\right),A_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\left[\partial_i^y\pi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right]. \end{aligned} \tag{7.104}$$

A continuación, se resolverá por separado cada PP presente en la ecuación preliminar. Se procederá a tratar inicialemente el factor presente en el primer sumando de (7.104):

$$\begin{aligned} \left\{G\left(\boldsymbol{x},t\right),\partial_i^y\pi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}\partial_j^x\partial_i^y\left\{A_m,\pi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \\ &\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ji}\partial_j^x\partial_i^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right) \\ &\approx 0. \end{aligned} \tag{7.105}$$

Donde se ha empleado la relación (3.47), los PP fundamentales de la teoría, las propiedades de la métrica de Minkowski en $(2+1)$ dimensiones y que el producto tensorial $\varepsilon_{ji}\partial_j^x\partial_i^x$ es nulo.

Similarmente, en virtud al vínculo (3.47) y los PP fundamentales, se puede apreciar que el factor presente en el segundo sumando de la expresión (7.104), se reduce a:

$$\left\{G\left(\boldsymbol{x},t\right),A_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx 0. \tag{7.106}$$

Por ende, bajo los análisis llevados a cabo en (7.105) y (7.106), se concluye que (7.104) se anula debilmente:

$$\left\{G\left(\boldsymbol{x},t\right),A_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\left(\partial_i^y\pi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right)\right\}\approx 0. \tag{7.107}$$

Tras reemplazar (7.100), (7.102) y (7.107) en (7.98), se obtiene que el PP calculado entre la ley de Gauss y el Hamiltoniano canónico de la teoría de MCS es simplemente:

$$\left\{G\left(\boldsymbol{x},t\right),H_{c(MCS)}\right\}\approx 0. \tag{7.108}$$

2. Obsérvese que a partir de la relación (7.105) y la estructura de la ley de Gauss para la teoría de MCS es evidente que:

$$\left\{G\left(\boldsymbol{x},t\right),G\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx 0. \tag{7.109}$$

7.9.2. Requerimiento de consistencia de la condición gauge (3.74)

A continuación se determinará el PP entre el vínculo ϕ_4 dado por (3.74) y el Hamiltoniano canónico de la teoría de MCS dado por (3.41):

$$\begin{aligned}\left\{\phi_4\left(x\right),H_{c(MCS)}\right\} \approx & \int d^2x\left\{\phi_4\left(\boldsymbol{x},t\right),\frac{1}{2}\left[\pi_i(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right.\\ & +\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right]^2+\\ & \left. A_0(\boldsymbol{y},t)\left[\partial_i^y\pi_i(y,t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{7.110}$$

Los calculos que se muestran en los razonamientos que prosiguen serán relevantes para la resolución del anterior PP:

a) Mediante a estructura del gauge de Coulomb (3.74), los PP fundamentales y las propiedades de la métrica de Minkowski en $(2+1)$ dimensiones, es posible deducir:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_4\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_i(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \partial_j^x\left\{A_j\left(\boldsymbol{x},t\right),\pi_i\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx \eta_{ij}\partial_j^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\ &\approx -\partial_i^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).\end{aligned} \tag{7.111}$$

Es claro entonces que de este resultado se deriva lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_4\left(\boldsymbol{x},t\right),\frac{1}{2}\left[\pi_i(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right\} \approx & -\left[\pi_i(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{y},t)\right]\\ & \partial_i^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).\end{aligned} \tag{7.112}$$

b) Será tambíen de gran importancia mencionar que a partir de los PP fundamentales, es posible deducir:

$$\begin{aligned} \left\{\phi_4(\boldsymbol{x},t), \varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\partial_m^x A_m(\boldsymbol{x},t), \varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx 0, \end{aligned} \tag{7.113}$$

con lo cual se determina:

$$\left\{\phi_4(\boldsymbol{x},t), \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right\} \approx 0. \tag{7.114}$$

c) Por último, resta resolver el siguiente PP:

$$P \equiv \left\{\phi_4(\boldsymbol{x},t), A_0(\boldsymbol{y},t)\left[\partial_i^y \pi_i(\boldsymbol{y},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}, \tag{7.115}$$

que debido a las propiedades de los PP se convierte en:

$$\begin{aligned} P &\approx A_0(\boldsymbol{y},t)\left\{\phi_4(\boldsymbol{x},t), \partial_i^y \pi_i(\boldsymbol{y},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} + \\ &\quad \left\{\phi_4(\boldsymbol{x},t), A_0(\boldsymbol{y},t)\right\}\left[\partial_i^y \pi_i(\boldsymbol{y},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right]. \end{aligned} \tag{7.116}$$

Por simplicidad, se resolverá separadamente cada uno de los PP presentes en la relación previa. Del primer sumando de (7.116), se verifica que:

$$\begin{aligned} \left\{\phi_4(\boldsymbol{x},t), \partial_i^y \pi_i(\boldsymbol{y},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \partial_j^x \partial_i^y \left\{A_j(\boldsymbol{x},t), \pi_i(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx g_{ji}\partial_j^x \partial_i^y \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &\approx \partial_i^x \partial_i^x \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \end{aligned} \tag{7.117}$$

donde se han empleado los PP fundamentales y el gauge de Coulomb. De manera similar, es inmediato que:

$$\left\{\phi_4(\boldsymbol{x},t), A_0(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx \left\{\partial_i^x A_i(\boldsymbol{x},t), A_0(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx 0. \tag{7.118}$$

Sustituyendo los resultados deducidos en (7.117) y (7.118) en (7.116), se comrprueba que:

$$\left\{\phi_4(\boldsymbol{x},t), A_0(\boldsymbol{y},t)\left[\partial_i^y \pi_i(\boldsymbol{y},t) - \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y A_j(\boldsymbol{y},t)\right]\right\} \approx A_0(\boldsymbol{y},t)\partial_i^x \partial_i^x \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \tag{7.119}$$

Finalmente, tras reemplazar (7.112), (7.114) y (7.119) en (7.110), se obtiene que el PP entre el gauge de Coulomb y el Hamiltoniano canónico de MCS, da como resultado:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_4\left(\boldsymbol{x},t\right),H_{c(MCS)}\right\} &\approx \partial_i^x\partial_i^x A_0\left(\boldsymbol{x},t\right)- \\ &\quad \partial_i^x\left[\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right]. \end{aligned} \tag{7.120}$$

7.9.3. PP entre vínculos de primera clase y condiciones gauge

El estudio de la teoría de MCS en el gauge de Coulomb, permite fijar el siguiente conjunto de vínculos:

$$\phi_1\left(\boldsymbol{x},t\right) = \pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right)\approx 0, \tag{7.121}$$

$$\phi_2\left(\boldsymbol{x},t\right) = \partial_i^x\pi_i\left(\boldsymbol{x},t\right)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\approx 0, \tag{7.122}$$

$$\phi_3\left(\boldsymbol{x},t\right) = \partial_i^x\partial_i^x A_0\left(\boldsymbol{x},t\right)-\partial_i^x\left[\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right]\approx 0, \tag{7.123}$$

$$\phi_4\left(\boldsymbol{x},t\right) = \partial_i^x A_i\left(\boldsymbol{x},t\right)\approx 0. \tag{7.124}$$

Con el objetivo de verificar si la adición de los vínculos ϕ_3 y ϕ_4 al sistema, ha permitido fijar un conjunto constituido por vínculos de segunda clase, se calcularán los PP entre los vínculos mostrados en las relaciones previas.

En primer instancia, en virtud a los PP fundamentales se comprueba que el único PP distinto de cero entre ϕ_1 y el conjunto de vínculos del sistema es:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_1\left(\boldsymbol{x},t\right),\phi_3\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \partial_i^y\partial_i^y\left\{\pi_0\left(\boldsymbol{x},t\right),A_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \\ &\approx -\partial_i^y\partial_i^y\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right) \\ &\approx -\nabla_x^2\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \end{aligned} \tag{7.125}$$

Donde ∇_x^2 es el operador Laplaciano en dos dimensiones.

Por otra parte, de los PP calculados previamente en (3.50) y (3.53), se verifica que el único PP no nulo entre el vínculo ϕ_2 y el conjunto de vínculos del sistema es:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_2(\boldsymbol{x},t),\phi_4\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \partial_i^x\partial_j^y\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx -\partial_i^x\partial_i^y\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\ &\approx -\nabla_x^2\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).\end{aligned} \tag{7.126}$$

Es importante tener en cuenta que en base a los calculo realizados en (7.105) y (7.106), el siguiente PP se anula debilmente:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_2(\boldsymbol{x},t),\phi_3\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \left\{G(\boldsymbol{x},t),\partial_i^y\partial_i^y A_0\left(\boldsymbol{y},t\right)-\left[\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right]\right\}\\ &\approx \partial_i^y\partial_i^y\left\{G(\boldsymbol{x},t),A_0\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}-\\ &\quad\ \partial_i^y\left\{G(\boldsymbol{x},t),\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned} \tag{7.127}$$

Análogamente, de la forma del vínculo ϕ_3 presente en (3.79), se calculará:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_3(\boldsymbol{x},t),\phi_3\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \partial_i^x\partial_j^y\frac{k}{4\pi}\left[\varepsilon_{jn}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),A_n(\boldsymbol{y},t)\right\}+\right.\\ &\quad\ \left.\varepsilon_{im}\left\{A_m(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\right]\\ &\approx \frac{k}{4\pi}\partial_i^x\partial_j^y-\eta_{in}\varepsilon_{jn}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)+\\ &\quad\ \eta_{mj}\varepsilon_{im}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\ &\approx -\frac{k}{2\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^x\partial_j^y\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\ &\approx 0.\end{aligned} \tag{7.128}$$

Donde se ha usado la antisimetría del tensor de Levi-Civita y las propiedades de la métrica de Minkowski en $(2+1)$ dimensiones.

Resta solamente cálcular el siguiente PP:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_3(\boldsymbol{x},t),\phi_4\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx -\partial_i^x\partial_j^y\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{im}A_m(\boldsymbol{x},t),A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx -\partial_i^x\partial_j^y\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),A_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx \partial_i^x\partial_j^y g_{ij}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\ &\approx \nabla_x^2\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).\end{aligned}\tag{7.129}$$

7.9.4. PP entre los campos canónicos y los vínculos del sistema

Se procederá a determinar inicialmente los PP entre los campos canónicos y los vínculos del sistema

a) Primeramente, se determinará el siguiente PP:

$$\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}.\tag{7.130}$$

Para tal fin, se procederá a analizar dicha expresión para cada valor posible del índice l, recordando que $l=1,...,4$. Del vínculo ϕ_1 denotado en (3.77) y los PP fundamentales, es evidente que:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_1(\boldsymbol{u},t)\right\} &\approx \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\pi_0(\boldsymbol{u},t)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned}\tag{7.131}$$

Del mismo modo, empleando la ecuación (3.78) se comprueba que:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_2(\boldsymbol{u},t)\right\} &\approx \approx\partial_j^u\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{u},t)\right\}\\ &\approx \eta_{ij}\partial_j^u\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})\\ &\approx \partial_i^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}).\end{aligned}\tag{7.132}$$

Si ahora, se considera el valor $l = 3$ en (7.130), de la estructura del vínculo ϕ_3 dada por (3.79) es posible determinar:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_3(\boldsymbol{u},t)\right\} &\approx -\partial_j^u\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{u},t)\right\}\\ &\approx -\eta_{ij}\partial_j^u\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})\\ &\approx -\partial_i^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}).\end{aligned}\tag{7.133}$$

Análogamente, para $l = 4$ en la relación (7.130), se encuentra:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_4(\boldsymbol{u},t)\right\} &\approx \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\partial_j A_j(\boldsymbol{u},t)\right\}\\ &\approx 0,\end{aligned}\tag{7.134}$$

donde se ha introducido la forma explícita del gauge de Coulomb (3.74) y empleado los PP fundamentales. En base a los cálculos previos, se puede concluir que el PP (7.130) toma los valores mostrados a continuación:

$$\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\} \approx \begin{cases}\partial_i^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) & \text{si } l=2\\ -\partial_i^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) & \text{si } l=3\\ 0 \text{ de otro modo}\end{cases}\tag{7.135}$$

b) Se procederá a resolver el siguiente PP:

$$\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\tag{7.136}$$

Si se considera en esta expresión el valor particular $m = 1$, entonces de los PP fundamentales se verifica el siguiente resultado:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_1(\boldsymbol{v},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx \left\{\pi_0(\boldsymbol{v},t),\pi_j\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned}\tag{7.137}$$

Si ahora, se hace $m = 2$ en (7.136), entonces de la estructura de la ley de Gauss dada por (3.78), habrá que resolver:

$$\begin{aligned}
\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\partial_i\pi_i(\boldsymbol{v},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{im}\partial_i A_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{im}\partial_i^v\left\{A_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx -\frac{k}{4\pi}\eta_{mj}\varepsilon_{im}\partial_i^v\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v})\\
&\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}). \qquad (7.138)
\end{aligned}$$

De manera similar para $m=3$, se debe solucionar:

$$\begin{aligned}
\left\{\phi_3(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx -\partial_i^v\left\{\pi_i(\boldsymbol{v},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{im}A_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{im}\partial_i^v\left\{A_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx -\frac{k}{4\pi}\eta_{mj}\varepsilon_{im}\partial_i^v\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v})\\
&\approx -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}), \qquad (7.139)
\end{aligned}$$

donde se ha empleado la forma del vínculo ϕ_3 dada por (3.79) y los PP fundamentales.

Finalmente, resta determinar el PP (7.136) cuando $m=4$, luego, de la ecuación (3.80), se tiene:

$$\begin{aligned}
\left\{\phi_4(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \partial_i^v\left\{A_i(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx \eta_{ij}\partial_i^v\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v})\\
&\approx \partial_j^y\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}). \qquad (7.140)
\end{aligned}$$

Es posible sintetizar los resultados previos como sigue:

$$\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\approx\begin{cases}-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i^y\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}) & \text{si } m=2,3\\ \partial_j^y\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}) & \text{si } m=4\\ 0 \text{ de otro modo}\end{cases} \qquad (7.141)$$

De este resultado y las propiedades de los PP, se encuentra la siguiente expresión:

$$\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\} \approx \begin{cases} -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \text{ si } m=2,3 \\ -\partial_i^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \quad \text{ si } m=4 \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases} \tag{7.142}$$

7.9.5. PP entre los campos canónicos y el Hamiltoniano canónico de MCS

1. A partir del Hamiltoniano canónico de MCS dado por (3.41) se resolverá:

$$\begin{aligned} \{A_i(\boldsymbol{x},t),H_{c(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\} \approx & \int d^2y\left[\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\frac{1}{2}\left[\pi_j(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right\}+\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{jm}\partial_j^y A_m(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right\}\right. \\ & \left.+A_0(\boldsymbol{y},t)\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\left[\partial_j^y\pi_j(\boldsymbol{y},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}\partial_j^y A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}\right]. \end{aligned} \tag{7.143}$$

Por simplicidad se resolverá cada PP presente en la integral preliminar. De los PP fundamentales es posible determinar que:

$$\begin{aligned} \left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\frac{1}{2}\left[\pi_j(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right\} &= \left[\pi_j(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &= \eta_{ij}\left[\pi_j(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &= \left[-\pi_i(\boldsymbol{y},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.144}$$

Similarmente se puede deducir que:

$$\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{jm}\partial_j^y A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}=0. \tag{7.145}$$

Finalmente, resta determinar el PP que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\left[\partial_j^y\pi_j(\boldsymbol{y},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}\partial_j^y A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\right\} &= \partial_j^y\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),\pi_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &= \eta_{ij}\partial_j^y\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\\ &= \partial_i^x\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).\end{aligned} \tag{7.146}$$

Reemplazando (7.144) a (7.146) en (7.143) se concluye que:

$$\left\{A_i(\boldsymbol{x},t),H_{c(MCS)}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx-\pi_i(\boldsymbol{x},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)+\partial_i^x A_0(\boldsymbol{x},t). \tag{7.147}$$

2. Usando el Hamiltoniano canónico de MCS dado por (3.41) se solucionará el siguiente PP:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),H_{c(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx& \int d^2y\left[\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\frac{1}{2}\left[\pi_j(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right\}+\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{jm}\partial_j^y A_m(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right\}\right.\\ &\left.+A_0(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\left[\partial_j^y\pi_j(\boldsymbol{y},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}\partial_j^y A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}\right].\end{aligned} \tag{7.148}$$

Con el propósito de simplificar cálculos se resolverá separadamente cada PP presente en la relación anterior. Inicialmente a partir de los PP fundamentales, es posible determinar:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\frac{1}{2}\left[\pi_j(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right\} &= \left[\pi_j(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jn}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),A_n(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &= -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jn}\eta_{in}\left[\pi_j(\boldsymbol{y},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ &= \left[-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\pi_j(\boldsymbol{y},t)+2\left(\frac{k}{4\pi}\right)^2 A_i(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),\end{aligned} \tag{7.149}$$

donde se han empleado las reglas de contracción del tensor de Levi-Civita (véase

Apéndice A). Similarmente, a partir de los PP fundamentales se deduce que:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{jm}\partial_j^y A_m(\boldsymbol{y},t)\right]^2\right\} &= \varepsilon_{jm}\partial_j^y A_m(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\varepsilon_{jn}\partial_j^y A_n(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{jm}\varepsilon_{jn}F_{jm}(\boldsymbol{y},t)\,\partial_j^y\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),A_n(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &= -\frac{1}{2}\eta_{in}\varepsilon_{jm}\varepsilon_{jn}F_{jm}(\boldsymbol{y},t)\,\partial_j^y\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ &= -\partial_j^x F_{ji}(\boldsymbol{y},t)\,\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\end{aligned} \tag{7.150}$$

Por último resta solucionar el siguiente PP:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\left[\partial_j^y\pi_j(\boldsymbol{y},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}\partial_j^y A_m(\boldsymbol{y},t)\right]\right\} &= -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{jm}\partial_j^y\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),A_m(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &= \frac{k}{4\pi}\eta_{im}\varepsilon_{jm}\partial_j^y\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ &= -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\end{aligned} \tag{7.151}$$

Reemplazando (7.149) a (7.151) en (7.148) se obtiene que:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),H_{c(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx\; & -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\pi_j(\boldsymbol{x},t)+2\left(\frac{k}{4\pi}\right)^2 A_i(\boldsymbol{x},t)-\partial_j^x F_{ji}(\boldsymbol{x},t)\\ & -\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_j^x A_0(\boldsymbol{x},t).\end{aligned} \tag{7.152}$$

7.10. Apéndice J. Matriz de vínculos en teoría de MCS

Bajo la definición de PD (3.83), la matriz de vínculos de segunda clase de la teoría de MCS en el gauge de radiación, es definida por:

$$C_{lm}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \equiv \left\{\phi_l(\boldsymbol{x},t),\phi_m(\boldsymbol{y},t)\right\},\ \text{con } l,m=1,\ldots,4. \tag{7.153}$$

Usando las propiedades de los PP y los PP entre los vínculos del sistema, determinados previamente en el **Apéndice I**, se encuentra que la forma matricial de (3.83) es:

$$C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\nabla_x^2\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.154}$$

En las componentes de esta matriz esta presente el operador Laplaciano en dos dimensiones aplicado sobre la funcíon delta de Dirac. Por ende, se trata de una matriz funcional. Para determinar los PD entre las variables del espacio de fase, es necesario calcular la inversa de (7.154). Para tal fin se tendrá en cuenta que si $C^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ es la inversa de $C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$, se debe cumplir la siguiente propiedad:

$$\int d^2zC_{lr}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}\right)C_{rm}^{-1}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right)=\delta_{lm}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.155}$$

Se propone ahora, que la matriz $C^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ presenta la estructura mostrada a continuación:

$$C^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\equiv\begin{pmatrix} a_1\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_3\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_4\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \\ a_5\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_6\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_7\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_8\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \\ a_9\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_{10}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_{11}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_{12}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \\ a_{13}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_{14}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_{15}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_{16}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \end{pmatrix}, \tag{7.156}$$

donde las cantidades $a_i\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ con $i=1,...,16$ son desconocidas y deberán ser determinadas. Reemplazando (7.154) y (7.156) en (7.155), se llega a la siguiente operación:

$$\int d^2z\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nabla_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2 \\ \nabla_x^2 & 0 & 0 & \nabla_x^2 \\ 0 & \nabla_x^2 & -\nabla_x^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_2\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_3\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_4\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) \\ a_5\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_6\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_7\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_8\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) \\ a_9\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_{10}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_{11}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_{12}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) \\ a_{13}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_{14}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_{15}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_{16}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) \end{pmatrix}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\right)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).$$

Expresión que de acuerdo con (7.154) y la función delta de Dirac en dos dimensiones, se reduce a la operación entre matrices que prosigue:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\nabla_x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\nabla_x^2 \\ \nabla_x^2 & 0 & 0 & \nabla_x^2 \\ 0 & \nabla_x^2 & -\nabla_x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ a_5(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_6(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_7(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_8(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ a_9(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{12}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ a_{13}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{14}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{15}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{16}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{7.157}$$

Resolviendo el producto matricial presente en el lado izquierdo de la relación preliminar, se obtiene la siguiente igualdad entre matrices:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} -\nabla_x^2 a_9(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -\nabla_x^2 a_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -\nabla_x^2 a_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -\nabla_x^2 a_{12}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ -\nabla_x^2 a_{13}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -\nabla_x^2 a_{14}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -\nabla_x^2 a_{15}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & -\nabla_x^2 a_{16}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \nabla_x^2[a_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+a_{13}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] & \nabla_x^2[a_2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+a_{14}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] & \nabla_x^2[a_3(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+a_{15}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] & \nabla_x^2[a_4(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+a_{16}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] \\ \nabla_x^2[a_5(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-a_9(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] & \nabla_x^2[a_6(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-a_{10}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] & \nabla_x^2[a_7(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-a_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] & \nabla_x^2[a_8(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-a_{12}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.158}$$

Con la finalidad de determinar los elementos matriciales desconocidos de la ecuación (7.158), se procederá a igualar las componentes correspondientes de cada una de las filas de las matrices presentes en dicha relación. Al igualar la primera componente de la primera fila de cada matriz, se obtiene que:

$$\nabla_x^2 a_9(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).$$

Si se aprecia detenidamente la ecuación anterior, se observa que la componente $a_9(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ no es más que la función de Green asociada al operador diferencial local ∇_x^2, que se denotará como sigue:

$$F(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = \frac{1}{4\pi}\ln(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2.$$

Por lo tanto, la componente matricial en cuestión es:

$$a_9(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{7.159}$$

Al igualar las componentes restantes de la primera fila de cada matriz en (7.158),arroja como resultado:

$$-\nabla_x^2 a_{10}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = -\nabla_x^2 a_{11}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = -\nabla_x^2 a_{12}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = 0.$$

Relación de la que se deduce bajo el concepto de función de Green que:

$$a_{10}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = a_{11}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = a_{12}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = 0. \tag{7.160}$$

A continuación, en base a la igualdad entre matrices, se procederá a igualar las componentes de la segunda fila en la expresión (7.158):

$$-\nabla_x^2 a_{14}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right),$$

que bajo el concepto de función de Green, se reescribé como:

$$a_{14}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = -\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.161}$$

Al igualar el resto de componentes de la primera fila en (7.158), se llega a la siguiente relación:

$$-\nabla_x^2 a_{13}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = -\nabla_x^2 a_{15}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = -\nabla_x^2 a_{16}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = 0,$$

de la cual es evidente que:

$$a_{13}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = a_{15}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = a_{16}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = 0. \tag{7.162}$$

Análogamente a los procedimientos previos, se comrpueba que tras igualar las componentes de la tercera fila en la expresión (7.158), se obtiene como primer resultado:

$$\nabla_x^2\left[a_1\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) + a_{13}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right] = \nabla_x^2\left[a_4\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) + a_{16}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right] = 0, \tag{7.163}$$

pero de (7.162), se sabe que tanto la componente $a_{13}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ como la componente $a_{16}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ son nulas, por lo tanto de (7.158) se obtiene:

$$\nabla_x^2 a_1\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \nabla_x^2 a_4\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = 0,$$

De donde se verifica que:

$$a_1\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=a_4\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=0. \tag{7.164}$$

Del mismo modo, la igualación de la segunda componente de la tercera fila en (7.158), resulta:

$$\nabla_x^2\left[a_2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)+a_{14}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right]=\nabla_x^2 a_2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)-\nabla_x^2\left(\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\right)=0,$$

donde se ha introducido lo obtenido previamente en (7.161). Sin embargo, dado que $\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)$ es la función de Green asociada al operador Laplaciano en dos dimensiones, de la definición de función de Green se debe satisface que:

$$\nabla_x^2 a_2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right),$$

relación que implica:

$$a_2\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.165}$$

Ahora, es de interés estudiar las componentes restantes de la tercera fila en (7.158):

$$\nabla_x^2\left[a_3\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)+a_{15}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right]=\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)$$

Pese a que $a_{15}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$ es igual a cero, (observar ecuación (7.162)), se obtiene:

$$\nabla_x^2 a_3\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right),$$

que bajo el concepto de función de Green del operador Laplaciano en dos dimensiones, permite obtener:

$$a_3\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)=\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.166}$$

Resta ahora, igualar las componentes de la cuarta fila en la relación matricial (7.158). Obsérvese inicialmente que:

$$\nabla_x^2\left[a_5\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)-a_9\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right]=\nabla_x^2 a_5\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)+\nabla_x^2\left(\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)\right)=0,$$

donde hemos empleado (7.159). Dado que $\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right)$ es la función de Green asociada al operador Laplaciano en dos dimensiones, se comprueba que:

$$\nabla_x^2 a_5\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = -\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.167}$$

De la misma manera, el procedimiento de igualación permite obtener también:

$$\nabla_x^2\left[a_6\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) - a_{10}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right] = \nabla_x^2\left[a_7\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) - a_{11}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right] = 0.$$

Sin embargo, de (7.160) se sabe que $a_{10}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = a_{11}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = 0$, por tal motivo la anterior expresión se reducirá a:

$$\nabla_x^2 a_6\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \nabla_x^2 a_7\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = 0,$$

de donde se puede concluir:

$$a_6\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = a_7\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = 0. \tag{7.168}$$

Finalmente, resta estudiar:

$$\nabla_x^2\left[a_8\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) - a_{12}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\right] = \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).$$

A partir de la expresión (7.160) se puede apreciar que $a_{12}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = 0$. Bajo el concepto de función de Green del operador Laplaciano en dos dimensiones se comprueba que:

$$a_8\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.169}$$

Incluyendo los resultados obtenidos desde (7.161) a (7.169) en (7.61), se establece que la estructura de la matriz inversa de $C\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)$, es dada por:

$$C^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.170}$$

7.11. Apéndice K. Fermiones en $(2+1)$ dimensiones

Los campos fermiónicos poseen también algunas características interesantes cuando se restrigen al plano. La diferencia más obvia es que el conjunto de matrices gamma de Dirac consiste de matrices 2×2, en lugar de 4×4. Correspondientemente, los campos fundamentales de Dirac son descritos por espinores de dos componentes [2]. De este modo, se tiene que la ecuación de Dirac es dada por:

$$\left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}-e\gamma^{\mu}A_{\mu}-m\right)\psi=0,\ \text{ o }\ i\frac{\partial}{\partial t}\psi=\left(-i\overrightarrow{\alpha}\cdot\overrightarrow{\nabla}+m\beta\right)\psi, \tag{7.171}$$

donde $\overrightarrow{\alpha}\equiv\gamma^{0}\overrightarrow{\gamma}$ y $\beta\equiv\gamma^{0}$. Las matrices gamma satisfacen las siguiente relaciones de anticonmutación:

$$\left\{\gamma^{\mu},\gamma^{\nu}\right\}=2\eta^{\mu\nu}, \tag{7.172}$$

donde se ha usado la métrica de Minkowski en $(2+1)$ dimensiones $\eta^{\mu\nu}=diag\,(1,-1,-1)$. La representación de Dirac de las matrices gamma es:

$$\gamma^{0}=\sigma^{3}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}, \tag{7.173}$$

$$\gamma^{1}=i\sigma^{1}=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}, \tag{7.174}$$

$$\gamma^{2}=i\sigma^{2}=\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}. \tag{7.175}$$

Estas matrices satisfacen las siguientes identidades [2, 10]:

$$\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}=\eta^{\mu\nu}\mathbf{1}-i\varepsilon^{\mu\nu\rho}\gamma_{\rho}, \tag{7.176}$$

$$tr\left(\gamma^{\mu}\gamma^{\nu}\gamma^{\rho}\right)=-2i\varepsilon^{\mu\nu\rho}. \tag{7.177}$$

Nótese que en teorías en $(3+1)$ dimensiones, la traza de un número impar de matrices gamma es nulo. En $(2+1)$ dimensiones, la traza de tres matrices gamma produce un tensor de Levi-Civita totalmente antisimétrico. Otro aspecto relevante es que en $(2+1)$ dimensiones, no existe una matriz γ^5 que anticonmute con todas las matrices gamma de Dirac, obsérvese que $i\gamma^0\gamma^1\gamma^2 = \mathbf{1}$. Así que, no hay noción de quiralidad en el sentido usual [2].

7.12. Apéndice L. Álgebra de Grassmann

El límite clásico ($\hbar \to 0$) de la teoría cuántica para fermiones y bosones, se denomina mecánica pseudo-clásica [8], estos sistemas físicos se describen por medio de variables reales o complejas (q_i), que se utilizan para describir bosones y variables de Grassmann ψ_α, que se emplean para describir fermiones.

La dinámica de un sistema físico es descrita por medio de funciones que son soluciones de ecuaciones diferenciales, la característica de estas funciones es que conmutan entre si, esto es:

$$f * g = g * f. \tag{7.178}$$

La relación anterior define lo que se denomina como un álgebra conmutativa. Sin embargo existen otras álgebras, en particular el álgebra de Grassman, en la cual sus elementos no cumplen la relación (7.178).

Un álgebra de Grassmann G_N, finita de dimensión N, es aquella constituida por N elementos ψ_α con $\alpha = 1, ..., N$, denominados generadores, los cuales satisfacen la siguiente relación [8]:

$$\psi_\alpha\psi_\beta + \psi_\beta\psi_\alpha = 0. \tag{7.179}$$

La relación (7.179) indica que el orden en que aparecen las variables de Grassmann en un producto es muy importante, ya que hay un cambio de signo cuando una variable es conmutada. Si $\alpha = \beta$ en (7.179) se tiene:

$$\psi_\alpha^2 = 0. \tag{7.180}$$

Por lo tanto las variables de Grassmann son nilpotentes, es decir que la potencia de cualquier variable igual o mayor a dos, son idénticamente nulas [16] . Si Ω pertenece a G_N, Ω se puede expandir en términos de los generadores de la siguente manera [17]:

$$\Omega = \omega_0 + \omega_\alpha \psi_\alpha + \omega_{\alpha\beta}\psi_\alpha\psi_\beta + \omega_{\alpha\beta\sigma}\psi_\alpha\psi_\beta\psi_\sigma + \omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}\psi_{\alpha_1}\ldots\psi_{\alpha_N}, \tag{7.181}$$

donde $\omega_0, \omega_\alpha, \ldots, \omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_N}$ son números reales o complejos. Se llamará a $\Omega \in G_N$ par (impar) si la expansión (7.181) contiene coeficientes $\omega_{\alpha_1,\ldots,\alpha_k}$ con k par (impar) diferente de cero. Entonces se define sobre elementos y funciones del álgebra de Grassmann el grado o paridad, asignando el valor cero para elementos pares, y el número 1 a elementos impares, el grado de Ω será denotado por n_Ω. Para elementos $\Omega, \Phi \in G_N$ las siguientes propiedades son validas :

$$n_{\Omega\Phi} = n_\Omega + n_\Phi \quad , \quad \Omega\Phi = (-1)^{n_\Omega n_\Phi}\Phi\Omega, \tag{7.182}$$

la suma es definida en módulo dos. Para el caso particular que se tenga tres generadores ψ_1, ψ_2, ψ_3 que pertenecen a G_3, se obtendran los siguientes elementos de la base: $I, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_1\psi_2, \psi_1\psi_3, \psi_2\psi_3, \psi_1\psi_2\psi_3$; la dimensión de la base es: $d = 2^N$ [8], en el caso $N = 3$, $d = 2^3 = 8$. Si Ω pertenece a G_3 su expansión en términos de los elementos de la base es:

$$\Omega = \omega_0 I + \omega_1\psi_1 + \omega_2\psi_2 + \omega_3\psi_3 + \omega_{12}\psi_1\psi_2 + \omega_{13}\psi_1\psi_3 + \omega_{23}\psi_2\psi_3 + \omega_{123}\psi_1\psi_2\psi_3. \tag{7.183}$$

Se puede obsevar para este caso particular que G_3 se puede dividir en 2 sub-conjuntos: $G_3 = G_3^{(0)} \oplus G_3^{(1)}$ Donde:

- $G_3^{(0)}$: Contiene todos los elementos pares en los generadores, estos elementos son: $I; \psi_1\psi_2; \psi_1\psi_3; \psi_2\psi_3$.

- $G_3^{(1)}$: Contiene todos los elementos impares en los generadores: $\psi_1; \psi_2; \psi_3; \psi_1\psi_2\psi_3$

.

7.12.1. Derivadas de los elementos del álgebra de Grassmann

En álgebra conmutativa las operaciones de derivación e integración son definidas por medio de límites y poseen una interpretación geométrica, mientras que en un álgebra de Grassmann estas operaciones no son definidas con límites ni tienen una interpretación geométrica, son definidas como operaciones de identidad [17]. Las reglas para calcular la derivada de un generador del álgebra respecto a otro generador estan definidas por:

$$\frac{\partial \psi_\beta}{\partial \psi_\alpha} = \delta_{\beta\alpha}, \tag{7.184}$$

$$\frac{\partial (1)}{\partial \psi_\alpha} = 0. \tag{7.185}$$

Aunque estas reglas son semejantes a las del álgebra usual, se debe tener en cuenta que la variable a ser derivada debe estar al lado del operador diferencial ya sea por la derecha o por la izquierda, esto permite definir dos tipos de derivadas por la izquierda (L) y por la derecha (R). Entonces si $\Omega(\psi)$ pertenece a G_N se tiene:

$$\delta\Omega(\psi) = \delta\psi_\alpha \frac{\partial \Omega}{\partial \psi_\alpha}|_R = \frac{\partial \Omega}{\partial \psi_\alpha}|_L \delta\psi_\alpha. \tag{7.186}$$

Considerando el caso en que $\Omega = \psi_1\psi_2\psi_3$ con paridad $n_\Omega = 1$. La derivada de Ω respecto a ψ_1 por la derecha es:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_1}|_R = \psi_1\psi_2\psi_3 \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi_1} = -\psi_2 \underbrace{\psi_1\psi_3}_{-\psi_3\psi_1} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi_1} = \psi_2\psi_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial \psi_1}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_1}|_R = \psi_2\psi_3. \tag{7.187}$$

Para llevar a la variable que se va a derivar al lado del operador derivada es necesario realizar permutaciones utilizando la relación de anticonmutación (7.179) como se muestra en la derivada anterior. También se puede calcular la derivada de Ω respecto ψ_1 por la izquierda de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_1}|_L = \frac{\partial}{\partial \psi_1}\left(\psi_1\psi_2\psi_3\right) = \frac{\partial \psi_1}{\partial \psi_1}\psi_2\psi_3 \tag{7.188}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_1}|_L = \psi_2\psi_3. \tag{7.189}$$

Se tienen lo siguiente: si $n_\Omega = 1$ la derivada por la derecha es igual a la derivada por la izquierda.

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_i}|_R = \frac{\partial \Omega}{\partial \psi_i}|_L. \tag{7.190}$$

Examinando el caso en que Ω es de paridad par ($n_\Omega = 0$), por ejemplo $\Omega = \psi_1\psi_2\psi_3\psi_4$, la derivada de Ω respecto a ψ_3 por la derecha y por la izquierda es respectivamente:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_3}|_R = \psi_1\psi_2\psi_3\psi_4 \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \psi_3} = -\psi_1\psi_2\psi_4 \frac{\partial \psi_3}{\partial \psi_3}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_3}|_R = -\psi_1\psi_2\psi_4. \tag{7.191}$$

Ahora, se calculará la derivada por la izquierda:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_3}|_L = \frac{\partial}{\partial \psi_3}\left(\psi_1\psi_2\psi_3\psi_4\right) = -\frac{\partial}{\partial \psi_3}\left(\psi_1\psi_3\psi_2\psi_4\right) = \frac{\partial \psi_3}{\partial \psi_3}\psi_1\psi_2\psi_4 = \psi_1\psi_2\psi_4$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_3}|_L = \psi_1\psi_2\psi_4. \tag{7.192}$$

Por lo tanto si Ω tiene paridad par se obtiene:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_i}|_R = -\frac{\partial \Omega}{\partial \psi_i}|_L. \tag{7.193}$$

De manera general se determina que si Ω_1 y Ω_2 pertenecen a G_N entonces la derivada izquierda, del producto de estas funciones respecto al generador ψ_α esta dada por:

$$\frac{\partial}{\partial \psi_\alpha}(\Omega_1\Omega_2) = \frac{\partial \Omega_1}{\partial \psi_\alpha}\Omega_2 + (-1)^{n_{\Omega_1} n_{\Omega_2}}\Omega_1 \frac{\partial \Omega_2}{\partial \psi_\alpha}. \tag{7.194}$$

7.12.2. Formalismo Lagrangiano

El espacio de configuración de un sistema gobernado por un Lagrangiano de la forma:

$$L = L(q, \dot{q}, \psi, \dot{\psi}, t).$$

donde q,$\dot{q}$ son variables bosonicas y ψ,$\dot{\psi}$ variables fermionicas, se conoce como un superespacio real. Se puede asociar a este Lagrangiano una integral de acción:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \psi_\alpha(t), \dot{q}_i(t), \dot{\psi}_\alpha(t)) = A[q_i, \psi_\alpha]. \tag{7.195}$$

Se sabe que la trayectoria que seguirá el sistema es la que torne un extremo la acción (7.195), esto se conoce como el principio de Hamilton [8], entonces la primera variación de la acción considerando variaciones independientes de las variables bosonicas q_i y de las variables fermionicas ψ_α, es:

$$\delta A[q, \psi] = 0. \tag{7.196}$$

Con las condiciones de frontera $\delta q_i|_{t_1}^{t_2} = 0$ y $\delta \psi_i|_{t_1}^{t_2} = 0$, y considerando derivadas izquierdas respecto a las variables fermionicas, se determina:

$$\begin{aligned}
\delta A[q,\psi] &= \delta \left[\int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i(t), \psi_\alpha(t), \dot{q}_i(t), \dot{\psi}_\alpha(t)) \right] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \delta L(q_i(t), \psi_\alpha(t), \dot{q}_i(t), \dot{\psi}_\alpha(t)) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt [\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \underbrace{\delta \dot{q}_i}_{\frac{d}{dt}(\delta q_i)} + \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha}\delta\psi_\alpha + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\delta \underbrace{\dot{\psi}_\alpha}_{\frac{d}{dt}(\delta\psi_\alpha)}] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt [\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha}\delta\psi_\alpha + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\delta\psi_\alpha\right) \\
&- \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\right)\delta\psi_\alpha] \\
&= \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right]\delta q_i + \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\right)\right]\delta\psi_\alpha \\
&+ \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i|_{t_1}^{t_2} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\delta\psi_\alpha|_{t_1}^{t_2}.
\end{aligned} \tag{7.197}$$

Además recordando que δq_i y $\delta\psi_\alpha$ son variaciones arbitrarias e independientes se debe cumplir por separado, debido al lema fundamental del cálculo de variaciones [**?**], que:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \tag{7.198}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha}\right) = 0. \tag{7.199}$$

Las expresiones (7.198) y (7.199) corresponden a las ecuaciones de Euler-Lagrange que describen la dinámica de las variables bosonicas y fermionicas. La ecuación de movimiento (7.199) se calcula utilizando derivadas izquierdas.

7.12.3. Formalismo Hamiltoniano

Los momentos canónicos asociados a q_i y ψ_α se definen respectivamente de la siguiente manera:

$$p^i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \tag{7.200}$$

$$\pi^\alpha \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}_\alpha}. \tag{7.201}$$

Donde cabe resaltar que el momento asociado a ψ_α es definido con derivadas izquierdas y al igual que ψ_α; π^α tambien es una variable de Grassmann. Una vez definidos los momentos canónicos, el Hamiltoniano canónico, bajo la definición de derivada izquierda, es definido por:

$$H_C \equiv \dot{q}_i p^i + \dot{\psi}_\alpha \pi^\alpha - L. \tag{7.202}$$

Utilizando el principio de Hamilton modificado [8], se puede calcular las ecuaciones de movimiento de Hamilton a partir de la condición:

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \delta \left[\dot{q}_i p^i + \dot{\psi}_\alpha \pi^\alpha - H_C \right] = 0. \tag{7.203}$$

La transformación de Legendre (7.202) define el espacio de fase de variables independientes $(q_i, p^i, \psi_\alpha, \pi^\alpha)$, considerando variaciones en estas cantidades se obtiene que:

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} [\delta \dot{q}_i p^i + \dot{q}_i \delta p^i + \delta \dot{\psi}_\alpha \pi^\alpha + \dot{\psi}_\alpha \delta \pi^\alpha - \frac{\partial H_C}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H_C}{\partial p^i} \delta p^i - \frac{\partial H_C}{\partial \psi_\alpha} \delta \psi_\alpha$$

$$- \frac{\partial H_C}{\partial \pi^\alpha} \delta \pi^\alpha] = 0$$

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} [\frac{d}{dt}(\delta q_i) p^i + \dot{q}_i \delta p^i + \frac{d}{dt}(\delta \psi_\alpha) \pi^\alpha + \dot{\psi}_\alpha \delta \pi^\alpha - \frac{\partial H_C}{\partial q_i} \delta q_i - \frac{\partial H_C}{\partial p^i} \delta p^i \tag{7.204}$$

$$-\frac{\partial H_C}{\partial \psi_\alpha}\delta\psi_\alpha - \frac{\partial H_C}{\partial \pi^\alpha}\delta\pi^\alpha] = 0$$

. Utilizando las siguientes expresiones:

$$\frac{d}{dt}(\delta q_i)p^i = \frac{d}{dt}\left(\delta q_i p^i\right) - \delta q_i \dot{p}^i, \tag{7.205}$$

$$\frac{d}{dt}(\delta\psi_\alpha)\pi^\alpha = \frac{d}{dt}\left(\delta\psi_\alpha \pi^\alpha\right) - \delta\psi_\alpha \dot{\pi}^\alpha, \tag{7.206}$$

en la variación de la acción, resulta:

$$\begin{aligned}\delta A = \int_{t_1}^{t_2} [-\delta q_i \dot{p}^i + \dot{q}_i \delta p^i - \delta\psi_\alpha \dot{\pi}^\alpha + \dot{\psi}_\alpha \delta\pi^\alpha - \frac{\partial H_C}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H_C}{\partial p^i}\delta p^i \\ -\frac{\partial H_C}{\partial \psi_\alpha}\delta\psi_\alpha - \frac{\partial H_C}{\partial \pi^\alpha}\delta\pi^\alpha] + \delta q_i p^i|_{t_1}^{t_2} + \delta\psi_\alpha \pi^\alpha|_{t_1}^{t_2} = 0.\end{aligned} \tag{7.207}$$

Además, utilizando la condición de extremos fijos $\delta q|_{t_1}^{t_2} = 0$, $\delta\psi|_{t_1}^{t_2} = 0$ y que las variaciones de q, p, ψ, π son arbitrarias e independientes, se determina:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_C}{\partial p^i}, \tag{7.208}$$

$$\dot{p}^i = -\frac{\partial H_C}{\partial q_i}, \tag{7.209}$$

$$\dot{\psi}_\alpha = -\frac{\partial H_C}{\partial \pi^\alpha}, \tag{7.210}$$

$$\dot{\pi}^\alpha = -\frac{\partial H_C}{\partial \psi_\alpha}. \tag{7.211}$$

Las relaciones (7.208) a (7.211) son conocidas como ecuaciones de Hamilton y describen la dinámica de un sistema de partículas determinado por variables bosonicas y fermionicas.

7.12.4. Paréntesis de Berezín

Sea $F(q,\psi,p,\pi,t)$ una variable dinámica, donde q,ψ,p,π definen una trayectoria en el espacio de fase satisfaciendo las ecuaciones de Hamilton, entonces, la evolución temporal de F es determinada por:

$$\frac{dF(q,\psi,p,\pi,t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha}\frac{d\psi_\alpha}{dt} + \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{dp^i}{dt} + \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\frac{d\pi_\alpha}{dt} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{7.212}$$

Utilizando las ecuaciones de Hamilton (7.208) a (7.211) en la expresión anterior:

$$\frac{dF(q,\psi,p,\pi,t)}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H_C}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial H_C}{\partial q_i} - \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \psi_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{7.213}$$

Agrupando de la siguiente manera se determina que:

$$\frac{dF(q,\psi,p,\pi,t)}{dt} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H_C}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial H_C}{\partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \psi_\alpha}\right) + \frac{\partial F}{\partial t} \tag{7.214}$$

$$\frac{dF(q,\psi,p,\pi,t)}{dt} = \{F, H_C\} + \frac{\partial F}{\partial t}. \tag{7.215}$$

Donde $\{F, H_C\}$ define el paréntesis de Poisson de la función $F(q,\psi,p,\pi,t)$ con el Hamiltoniano canónico.

$$\{F, H_C\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H_C}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial H_C}{\partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\frac{\partial H_C}{\partial \psi_\alpha}\right). \tag{7.216}$$

Los paréntesis de Poisson para una teoría que describe bosones y fermiones se conocen como paréntesis de Bose-Fermi [8], o paréntesis de Berezin [18]. Con ayuda de estos paréntesis se puede escribir las ecuaciones de Hamilton en la forma particular:

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H_C\}, \tag{7.217}$$

$$\frac{dp^i}{dt} = \{p_i, H_C\}, \tag{7.218}$$

$$\frac{d\psi_\alpha}{dt} = \{\psi_\alpha, H_C\}, \tag{7.219}$$

$$\frac{d\pi_\alpha}{dt} = \{\pi_\alpha, H_C\}. \tag{7.220}$$

Si B representa alguna variable bosónica y F una variable fermiónica, entonces podemos definir los siguientes tres paréntesis de Bose-Fermi entre ellas:

$$\{B_1, B_2\} = \left(\frac{\partial B_1}{\partial q_i}\frac{\partial B_2}{\partial p^i} - \frac{\partial B_1}{\partial p^i}\frac{\partial B_2}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial B_1}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial B_2}{\partial \pi^\alpha} - \frac{\partial B_1}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial B_2}{\partial \psi_\alpha}\right), \tag{7.221a}$$

$$\{F_1, F_2\} = \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}\frac{\partial F_2}{\partial p^i} + \frac{\partial F_1}{\partial p^i}\frac{\partial F_2}{\partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F_1}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial F_2}{\partial \psi_\alpha}\right), \tag{7.221b}$$

$$\{F, B\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i}\frac{\partial B}{\partial q_i}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial B}{\partial \pi^\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \pi^\alpha}\frac{\partial B}{\partial \psi_\alpha}\right). \tag{7.221c}$$

Los paréntesis de Bose-Fermi cumplen las siguientes propiedades [8]:

$$\{A, B\} = -(-1)^{n_A n_B}\{B, A\}, \tag{7.222}$$

$$\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\}, \tag{7.223}$$

$$\{A, BC\} = (-1)^{n_A n_B} B\{A, C\} + \{A, B\}C, \tag{7.224}$$

$$\{AB, C\} = (-1)^{n_B n_C}\{A, C\}B + A\{B, C\}, \tag{7.225}$$

$$0 = (-1)^{n_A n_C}\{A, \{B, C\}\} + (-1)^{n_A n_B}\{B, \{C, A\}\} + (-1)^{n_C n_B}\{C, \{A, B\}\}. \tag{7.226}$$

Esta útima expresión se conoce como identidad de Jacobi. Por otro lado, n_A, n_B, n_C representan la paridad de A, B, C respectivamente.

7.13. Apéndice M. PB en QED_{2+1}

En este apéndice se solucionan algunos de los PB necesarios para el análisis canónico de la teoría de campo fermiónico libre en $(2+1)$ dimensiones y QED_{2+1}

7.13.1. PB asociados al vínculo bosónico π_0

En esta subsección se resolverá el PB entre el vínculo primario π_0 y el Hamiltoniano canónico de la teoría:

A partir de la relación (3.47), (5.44) y los PB, habrá que resolver la expresión que prosigue:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx & \int d^2y\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), A_0(\boldsymbol{y},t)\left[\partial_i\pi_i(\boldsymbol{y},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}- \\ & \int d^2y\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), eA_0(\boldsymbol{y},t)\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\}.\end{aligned} \tag{7.227}$$

El PB presente en el primer sumando de la integral previa se calcula entre variables bosónicas, luego, se reduce al PP determinado en la expresión (3.44) cuando se trato la teoría de MCS:

$$\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), A_0(\boldsymbol{y},t)\left[\partial_i\pi_i(\boldsymbol{y},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial_i A_j(\boldsymbol{y},t)\right]\right\}\approx-\left[\partial^x_i\pi_i(\boldsymbol{x},t)-\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial^x_i A_j(\boldsymbol{x},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{7.228}$$

Por tal razón, resta solucionar el siguiente PB:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), eA_0(\boldsymbol{y},t)\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx e\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), A_0(\boldsymbol{y},t)\right\}\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{y},t) \\ &\approx -e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\end{aligned} \tag{7.229}$$

Al reemplazar (7.228) y (7.229) en (7.227) se obtiene que el PB entre π_0 y el Hamiltoniano canónico de la teoría es:

$$\left\{\pi_0(\boldsymbol{x},t), H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\}\approx-\partial^x_i\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}\partial^x_i A_j(\boldsymbol{x},t)+e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{y},t). \tag{7.230}$$

7.13.2. PB asociados al vínculo bosónico Σ

1. PB entre el vínculo Σ y el Hamiltoniano canónico de la teoría:

   Nótese en principio que mediante la fórmula (7.229), correspondiente al vínculo G de la teoría de MCS, es posible escribir (7.229), de la siguiente manera:

$$\Sigma = G(\boldsymbol{x},t)-e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{x},t)\approx 0. \tag{7.231}$$

Si se tiene en cuenta el resultado previo y la forma del Hamiltoniano canónico presente en (5.44), se verifica que:

$$\begin{aligned}\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\} &\approx \{G(\boldsymbol{x},t), H_{c(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\} - e\int d^3y \left\{G(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\overline{\psi}_a(\boldsymbol{y},t)\gamma^j_{ad}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx -e\int d^3y \left\{G(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\overline{\psi}_a(\boldsymbol{y},t)\gamma^j_{ad}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} \end{aligned} \tag{7.232}$$

Es importante mencionar que para obtener el resultado preliminar se ha considerado que el PB:

$$\left\{G(\boldsymbol{x},t), H_{c(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx 0. \tag{7.233}$$

se reduce al PP determinado anteriormente en (7.108). De la misma manera, se ha tenido en cuenta que los PB calculados entre variables bosónicas y fermiónicas son nulos. A continuación se resolverá entonces, el siguiente PB entre tres variables bosónicas (en este caso el término $\overline{\psi}_a\gamma^j_{ad}\psi_d$ es par) :

$$\begin{aligned}\left\{G(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\overline{\psi}_a(\boldsymbol{y},t)\gamma^j_{ad}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{G(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\overline{\psi}_a(\boldsymbol{y},t)\gamma^j_{ad}\psi_d(\boldsymbol{y},t) \\ &\approx \partial^x_i\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), A_j(\boldsymbol{y},t)\right\}\overline{\psi}_a(\boldsymbol{y},t)\gamma^j_{ad}\psi_d(\boldsymbol{y},t) \\ &\approx -\eta_{ij}\partial^x_i\overline{\psi}_a(\boldsymbol{y},t)\gamma^j_{ad}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &\approx \partial^x_j\overline{\psi}_a(\boldsymbol{y},t)\gamma^j_{ad}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.234}$$

Cabe anotar, que para obtener esta relación tambíen se tuvo en cuenta los PB fundamentales y sus respectivas propiedades. Sustituyendo (7.234) en (7.232) se obtiene que el PB calculado entre el vínculo de segunda clase Σ y el Hamiltoniano canónico de la teoría, es dado por:

$$\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx -e\left[\partial^x_j\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\gamma^j_{ad}\psi_d(\boldsymbol{x},t)\right]. \tag{7.235}$$

2. En virtud a la relación (5.60), se solucionará el PB que prosigue:

$$\begin{aligned}\{\Sigma(\boldsymbol{x},t), \Sigma(\boldsymbol{y},t)\} &\approx \left\{G(\boldsymbol{x},t) - e\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\gamma^0_{ba}\psi_a(\boldsymbol{x},t), G(\boldsymbol{y},t) - e\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{cd}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx 0, \end{aligned} \tag{7.236}$$

donde se ha tenido en cuenta la relacíon (7.231) y los PB fundamentales.

3. PB entre el vínculo bosónico Σ y el vínculo fermiónico Γ_b^1 :

   De las fórmulas (5.36), (5.60) y los PB fundamentales se calculará:

$$\begin{aligned}
\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t),\Gamma_b^1(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx -e\gamma_{ac}^0\left\{\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\psi_c(\boldsymbol{x},t),\pi_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx -e\gamma_{ac}^0\left[\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\left\{\psi_c(\boldsymbol{x},t),\pi_b(\boldsymbol{y},t)\right\}-\left\{\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t),\pi_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\psi_c(\boldsymbol{x},t)\right]\\
&\approx -e\gamma_{ac}^0\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\left\{\psi_c(\boldsymbol{x},t),\pi_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx e\delta_{cb}\gamma_{ac}^0\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&\approx e\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\gamma_{ab}^0\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{7.237}$$

   Es de gran importancia mencionar que en el desarrollo matemático previo, el término $\left\{\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\psi_c(\boldsymbol{x},t),\pi_b(\boldsymbol{y},t)\right\}$ es un PB calculado entre tres variables fermiónicas.

4. PB entre el vínculo bosónico Σ y el vínculo fermiónico Γ_b^2 :

   A partir de las fórmulas (5.37), (5.60) y los PB fundamentales se procederá a resolver:

$$\begin{aligned}
\left\{\Sigma(\boldsymbol{x},t),\Gamma_b^2(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx -e\gamma_{ac}^0\left\{\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\psi_c(\boldsymbol{x},t),\overline{\pi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&\approx -e\gamma_{ac}^0\left[\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\left\{\psi_c(\boldsymbol{x},t),\overline{\pi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}-\left\{\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t),\overline{\pi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\psi_c(\boldsymbol{x},t)\right]\\
&\approx e\gamma_{ac}^0\left\{\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t),\overline{\pi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\psi_c(\boldsymbol{x},t)\\
&\approx -e\delta_{ab}\gamma_{ac}^0\psi_c(\boldsymbol{x},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&\approx -e\gamma_{bc}^0\psi_c(\boldsymbol{x},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{7.238}$$

Nuevamente es importante recordar que el PB $\left\{\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\psi_c(\boldsymbol{x},t),\overline{\pi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}$, se calcula entre tres campos fermiónicos.

7.13.3. PB asociados al vínculo fermiónico Γ_b^1

1. PB entre el vínculo de segunda clase Γ_b^1 y el Hamiltoniano canónico de la teoría:

   Según las ecuaciones (5.36), (5.44) y los PB fundamentales, se deducirá el siguiente PB:

$$\begin{aligned}\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t), H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx & \int d^2y \Big\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), -\frac{i}{2}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\gamma^j_{cd}\partial_j\psi_d(\boldsymbol{y},t) + \\ & \frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right)\gamma^j_{cd}\psi_d(\boldsymbol{y},t) + m\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\psi_c(\boldsymbol{y},t) \\ & -eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\Big\}. \end{aligned} \tag{7.239}$$

   Por simplicidad, se resoverá separadamente cada uno de los PB presentes en la anterior expresión. Se encontrará primeramente la siguiente relación:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), -\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^j_{cd}\partial_j\psi_d\right\} &= -\frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\partial^y_j\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &= -\frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\left[\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\partial^y_j\psi_d(\boldsymbol{y},t) - \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \partial^y_j\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}\right] \\ &= \frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\partial^y_j\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &= -\frac{i}{2}\delta_{bd}\gamma^j_{cd}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\partial^y_j\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &= \frac{i}{2}\partial^x_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\gamma^j_{cb}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.240}$$

   Donde además de tener en cuenta los PB fundamentales de la teoría, se consideró que se está desarrollando un PB entre tres variables fermiónicas. Similarmente, es posible resolver:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right)\gamma^j_{cd}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} &= \frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \left(\partial^y_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right)\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &= \frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\left[\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \partial^y_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\psi_d(\boldsymbol{y},t) - \partial^y_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}\right] \\ &= -\frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\partial^y_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), \psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &= \frac{i}{2}\delta_{bd}\gamma^j_{cd}\left[\partial^y_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &= \frac{i}{2}\partial^y_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\gamma^j_{cb}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.241}$$

Continuando, a partir de las propiedades de los PB fundamentales, se calculará el siguiente PB entre fermiones:

$$\begin{aligned} \{\pi_b(\boldsymbol{x},t), m\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\psi_c(\boldsymbol{y},t)\} &= m[\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\}\psi_c(\boldsymbol{y},t)-\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c(\boldsymbol{y},t)\}] \\ &= -m\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c(\boldsymbol{y},t)\} \\ &= m\delta_{bc}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &= m\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.242}$$

Análogamente se comprueba que:

$$\begin{aligned} \left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t), -eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} &= -eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\psi_d(\boldsymbol{y},t)\} \\ &= -eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}[\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\}\psi_d(\boldsymbol{y},t) \\ &\quad -\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_d(\boldsymbol{y},t)\}] \\ &= eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_d(\boldsymbol{y},t)\} \\ &= -e\delta_{bd}A_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\ &= -eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cb}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \end{aligned} \tag{7.243}$$

donde se ha resuelto un PB entre tres variables fermiónicas en virtud a las propiedades de los PB fundamentales. Sustituyendo las deducciónes efectuadas desde (7.240) hasta (7.243) en la expresión (7.239), se obtiene que el PB entre el vínculo fermiónico Γ^1_b y el Hamiltoniano canónico de la teoría se reduce a:

$$\left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), H_{c(QED)}\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx i\partial^x_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^j_{cb} + m\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t) - eA_\alpha(\boldsymbol{x},t)\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)\gamma^\alpha_{cb}. \tag{7.244}$$

2. PB entre el vínculo fermiónico Γ^1_b y el vínculo bosónico Σ :

Se tiene un PB entre una variabale fermiónica y una variable bosónica. Por lo tanto, según las propiedades de los PB, es posible escribir:

$$\begin{aligned} \left\{\Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t), \Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} &\approx -\left\{\Sigma\left(\boldsymbol{y},t\right), \Gamma^1_b(\boldsymbol{x},t)\right\} \\ &\approx -e\overline{\psi}_a\left(\boldsymbol{y},t\right)\gamma^0_{ab}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \end{aligned} \tag{7.245}$$

Donde se ha usado el resultado encontrado en (7.237).

3. A partir de la relación (5.36) y los PB fundamentales es evidente que:

$$\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^1(\boldsymbol{y},t)\right\}\approx 0. \tag{7.246}$$

4. PB entre los vínculos Γ_b^1 y Γ_b^2:

   Se desea determinar un PB entre dos variables de paridad impar. Mediante las fórmulas (5.36) y (5.37), se resolverá:

$$\begin{aligned}\left\{\Gamma_b^1(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\frac{i}{2}\gamma_{cd}^0\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}+\left\{\frac{i}{2}\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t)\gamma_{ab}^0,\overline{\pi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx \frac{i}{2}\gamma_{cd}^0\left\{\pi_b(\boldsymbol{x},t),\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}+\frac{i}{2}\gamma_{ab}^0\left\{\overline{\psi}_a(\boldsymbol{x},t),\overline{\pi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx -\frac{i}{2}\delta_{bd}\gamma_{cd}^0\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})-\frac{i}{2}\delta_{ac}\gamma_{ab}^0\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\ &\approx -i\gamma_{cb}^0\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).\end{aligned} \tag{7.247}$$

   Aquí se han tenido en cuenta nuevamente los PB fundamentales.

7.13.4. PB asociados al vínculo fermiónico Γ_b^2

1. PB entre el vínculo Γ_b^2 y el Hamiltoniano canónico de la teoría:

   Según las ecuaciones (5.37), (5.44) y los PB fundamentales, se deducirá el siguiente PB:

$$\begin{aligned}\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx& \int d^2y\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),-\frac{i}{2}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\gamma_{cd}^j\partial_j\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right.\\ &+\frac{i}{2}\left(\partial_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right)\gamma_{cd}^j\psi_d(\boldsymbol{y},t)+m\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\psi_c(\boldsymbol{y},t)\\ &\left.-eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\gamma_{cd}^\alpha\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}.\end{aligned} \tag{7.248}$$

Por conveniencia, se resoverá separadamente cada uno de los PB presentes en relación previa. Se encontrará inicialmente, el siguiente PB entre variables fermióncas:

$$\begin{aligned}
\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),-\frac{i}{2}\overline{\psi}_c\gamma^j_{cd}\partial_j\psi_d\right\} &= -\frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\partial^y_j\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&= -\frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\left[\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\partial^y_j\psi_d(\boldsymbol{y},t)-\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\partial^y_j\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}\right]\\
&= -\frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\partial^y_j\psi_d(\boldsymbol{y},t)\\
&= \frac{i}{2}\delta_{bc}\gamma^j_{cd}\left[\partial^y_j\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&= \frac{i}{2}\gamma^j_{bd}\left[\partial^y_j\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{7.249}$$

De forma similar, a partir de los PB fundamentales se deduce que:

$$\begin{aligned}
\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\frac{i}{2}\left(\partial^y_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right)\gamma^j_{cd}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} &= \frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\left(\partial^y_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right)\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}\\
&= \frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\left[\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\partial^y_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\psi_d(\boldsymbol{y},t)-\partial^y_j\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}\right]\\
&= \frac{i}{2}\gamma^j_{cd}\partial^y_j\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\\
&= -\frac{i}{2}\delta_{bc}\gamma^j_{cd}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\partial^y_j\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&= \frac{i}{2}\gamma^j_{bd}\partial^x_j\psi_d(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})
\end{aligned} \tag{7.250}$$

De acuerdo a los PB fundamentales y sus propiedades, es posible determinar el PB entre variables fermiónicas que se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),m\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &= m\left[\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\psi_c(\boldsymbol{y},t)-\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\right]\\
&= m\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\psi_c(\boldsymbol{y},t)\\
&= -m\delta_{bc}\psi_c(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\\
&= -m\psi_b(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{7.251}$$

De la misma manera, se comprueba que:

$$
\begin{aligned}
\left\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t)\,,-eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\} &= -eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t)\,,\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\psi_d(\boldsymbol{y},t)\} \\
&= -eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\left[\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t)\,,\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\right. \\
&\quad \left.-\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t)\,,\psi_d(\boldsymbol{y},t)\}\right] \\
&= -eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\{\overline{\pi}_b(\boldsymbol{x},t)\,,\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\}\psi_d(\boldsymbol{y},t) \\
&= e\delta_{bc}A_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{cd}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&= eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{bd}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,. \qquad (7.252)
\end{aligned}
$$

Reemplazando (7.238) hasta (7.238) en (7.238) se concluye que el PB entre el vínculo fermiónico Γ^2_b y el Hamiltoniano canónico de la teoría, da como resultado:

$$
\left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t)\,,H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx i\gamma^j_{bd}\partial_j\psi_d(\boldsymbol{y},t) - m\psi_b(\boldsymbol{y},t) + eA_\alpha(\boldsymbol{y},t)\gamma^\alpha_{bd}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\,. \qquad (7.253)
$$

2. PB entre el vínculo fermiónico Γ^2_b y el vínculo bosónico Σ :

   Se desea resolver el PB entre una variabale fermiónica y una variable bosónica. Por lo tanto, según las propiedades de los PB, es posible escribir:

$$
\begin{aligned}
\left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t)\,,\Sigma(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx -\left\{\Sigma(\boldsymbol{y},t)\,,\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t)\right\} \\
&\approx e\gamma^0_{bc}\psi_c(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,. \qquad (7.254)
\end{aligned}
$$

   Donde se ha usado la deducción realizada en (7.238).

3. PB entre los vínculos Γ^2_b y Γ^1_b :

   Mediante las propiedades de los PB entre fermiones, se puede reescribir la relación (7.247), del modo que prosigue:

$$
\begin{aligned}
\left\{\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t)\,,\Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\Gamma^1_c(\boldsymbol{y},t)\,,\Gamma^2_b(\boldsymbol{x},t)\right\} \\
&\approx -i\gamma^0_{bc}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\,. \qquad (7.255)
\end{aligned}
$$

4. Según la relación (5.37) y los PB fundamentales, se puede solucionar:

$$\left\{\Gamma_b^2(\boldsymbol{x},t),\Gamma_c^2(\boldsymbol{y},t)\right\}\approx 0. \tag{7.256}$$

7.13.5. Requerimiento de consistencia de la condición gauge (5.184)

La condición de consistencia de la condición gauge ϕ_4 se deduce del PB entre el vinculo ϕ_4 y el Hamiltoniano canónico (5.42), es decir

$$\left\{\phi_4(\boldsymbol{x},t),H_{c(QED)}(\boldsymbol{y},t)\right\}\approx\left\{\phi_4(\boldsymbol{x},t),H_{c(MCS)}(\boldsymbol{y},t)\right\}, \tag{7.257}$$

donde se ha tenido en cuenta que el PB entre una variable de tipo bosónico con una de tipo fermiónico es nulo. Cabe anotar, que se ha empleado el Hamiltoniano canónico de la QED_{2+1} con el fin de evitar la aparición de multiplicadores de Lagrange. Por otro lado, dado que los PB entre variables bosónicas se reducen a los PP determinados en teoría de MCS, a partir del resultado obtenido en (7.120) (véase **Apéndice I**), se encuentra que la segunda condición gauge es dada por:

$$\phi_3(\boldsymbol{x},t)=\nabla^2A_0(\boldsymbol{x},t)-\partial_i^x\left[\pi_i(\boldsymbol{x},t)+\frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right]\approx 0. \tag{7.258}$$

7.13.6. PB entre los campos de Dirac y los vínculos fermíonicos Γ_b^i

1. Se procederá a calcular inicialmente el PB que se muestra a continuación:

$$\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\Gamma_a^i(\boldsymbol{u},t)\right\}. \tag{7.259}$$

   Para ello se analizará la expresión preliminar para cada valor posible del índice i, recordando que $i=1,2$. En virtud a los PB fundamentales y a la estructura del vínculo

Γ_b^1 presente en (5.36) se tiene que para $i=1$, es necesario calcular:

$$\begin{aligned}\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\Gamma_a^1(\boldsymbol{u},t)\right\} &\approx \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\pi_a(\boldsymbol{u},t)+\frac{i}{2}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{u},t)\gamma_{ca}^0\right\}\\ &\approx \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\pi_a(\boldsymbol{u},t)\right\}\\ &\approx -\delta_{ba}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}).\end{aligned} \tag{7.260}$$

Si se considera ahora en (7.259) el valor particular $i=2$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\Gamma_a^2(\boldsymbol{u},t)\right\} &\approx \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\overline{\pi}_b(\boldsymbol{u},t)+\frac{i}{2}\gamma_{bd}^0\psi_d(\boldsymbol{u},t)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned} \tag{7.261}$$

Cabe anotar que en el desarrollo matemático previo se ha empleado tanto la relación (5.37) como los PB fundamentales. Bajo los resultados obtenidos en las fórmulas (7.260) y (7.261), es posible inferir que:

$$\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t),\Gamma_a^i(\boldsymbol{u},t)\right\} \approx \begin{cases} -\delta_{ba}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \text{ si } i=1\\ 0 \text{ de otro modo}\end{cases} \tag{7.262}$$

Usando la relación previa y las propiedades de los PB entre fermiones, es posible deducir la siguiente expresión:

$$\left\{\Gamma_d^j(\boldsymbol{v},t),\psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx \begin{cases} -\delta_{dc}\delta^2(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{v}) \text{ si } j=1\\ 0 \text{ de otro modo}\end{cases} \tag{7.263}$$

2. De forma similar, se solucionará el siguiente PB:

$$\left\{\Gamma_d^j(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}, \tag{7.264}$$

teniendo en cuenta para ello cada valor posible del índice j. Cuando $j=1$, se verifica que:

$$\begin{aligned}\left\{\Gamma_d^1(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\pi_d(\boldsymbol{v},t)+\frac{i}{2}\overline{\psi}_a(\boldsymbol{v},t)\gamma_{ad}^0,\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}\\ &\approx 0.\end{aligned} \tag{7.265}$$

Para obtener este resultado se ha empleado la relación (5.36) y las propiedades de los PB. Si ahora se considera que $j = 2$, entonces (7.264) se convierte en:

$$\begin{aligned} \left\{\Gamma_d^2(\boldsymbol{v},t), \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx \left\{\overline{\pi}_d(\boldsymbol{v},t) + \frac{i}{2}\gamma_{da}^0\psi_a(\boldsymbol{v},t), \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx \left\{\overline{\pi}_d(\boldsymbol{v},t), \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx -\delta_{dc}\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}). \end{aligned} \tag{7.266}$$

Donde se ha hecho uso de la ecuación (5.36) y las propiedades de los PB. Es posible condensar los razonamientos efectuados en (7.265) y (7.266) de la siguiente manera:

$$\left\{\Gamma_d^j(\boldsymbol{v},t), \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx \begin{cases} -\delta_{dc}\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}) \text{ si } j=2 \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases} \tag{7.267}$$

De acuerdo a las propiedades de los PB entre fermiones y la relación (7.267), se encuentra que:

$$\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), \Gamma_a^i(\boldsymbol{u},t)\right\} \approx \begin{cases} -\delta_{ab}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) \text{ si } i=2 \\ 0 \text{ de otro modo} \end{cases} \tag{7.268}$$

7.13.7. PB entre el vínculo ϕ_2 y los vínculos fermiónicos Γ_b^i

A continuación se resolverá el siguiente PB:

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t), \Gamma_a^i(\boldsymbol{y},t)\right\}, \tag{7.269}$$

para cada valor posible que pueda tomar el índice i (recordar que $i = 1,2$). Considerando inicialmente que $i = 1$ y empleando las ecuaciones (5.36) y (5.183) se tiene que:

$$\begin{aligned} \left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t), \Gamma_a^1(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx e\gamma_{dc}^0\left\{\overline{\psi}_d(\boldsymbol{v},t)\psi_c(\boldsymbol{v},t), \pi_b(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx e\gamma_{dc}^0\overline{\psi}_d(\boldsymbol{v},t)\left\{\psi_c(\boldsymbol{v},t), \pi_b(\boldsymbol{y},t)\right\} \\ &\approx -e\gamma_{db}^0\overline{\psi}_d(\boldsymbol{v},t)\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}), \end{aligned} \tag{7.270}$$

donde en el lado derecho se ha resuelto un PB de la forma $\{F_1F_2, F_3\}$ tal que, F_i con $i = 1,2,3$ son variables fermiónicas. De forma similar, considerando $i = 2$ en la expresión (7.269) y empleando las relaciones (5.37) y (5.183) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t), \Gamma_a^2(\boldsymbol{y},t)\right\} &\approx e\gamma^0_{cd}\left\{\overline{\psi}_c(\boldsymbol{v},t)\psi_d(\boldsymbol{v},t), \overline{\pi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\} \\
&\approx -e\gamma^0_{cd}\left\{\overline{\psi}_c(\boldsymbol{v},t), \overline{\pi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\psi_d(\boldsymbol{v},t) \\
&\approx e\gamma^0_{bd}\psi_d(\boldsymbol{v},t)\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}).
\end{aligned} \tag{7.271}$$

Es posible compactar los resultados obtenidos en (7.270) y (7.271) de la forma que se muestra a continuación:

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t), \Gamma_a^i(\boldsymbol{y},t)\right\} \approx \begin{cases} -e\gamma^0_{db}\overline{\psi}_d(\boldsymbol{v},t)\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}) & \text{si} \quad i=1 \\ e\gamma^0_{bd}\psi_d(\boldsymbol{v},t)\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}) & \text{si} \quad i=2 \end{cases} \tag{7.272}$$

7.14. Apéndice N. Inversa de matriz de vínculos fermiónicos de segunda clase

Se tiene que la matriz de vínculos de segunda clase, construida a partir de los PB de los vínculos fermiónicos Γ_b^i con $i = 1,2$, es dada por:

$$C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -i\begin{pmatrix} 0 & \left(\gamma^0\right)^T \\ \gamma^0 & 0 \end{pmatrix}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{7.273}$$

Sin embargo, la definición de PD presente en (5.151) está escrita en términos de la matriz inversa de (7.273). Para determinar dicha matriz, se tendrá en cuenta que si $C^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ es la inversa de $C(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, entonces se debe satisfacer la propiedad que prosigue:

$$\int d^3z C^{im}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\left[C^{mj}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y})\right]^{-1} = \delta_{ij}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{7.274}$$

Se propone ahora que $C^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ presenta la siguiente forma matricial:

$$C^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{12}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ a_{21}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & a_{22}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}, \tag{7.275}$$

donde las componentes matriciales a_{ij} con $i, j = 1,2$, deben ser determinadas. Si ahora, se sustituye (7.273) y (7.275) en (7.274), se encuentra que:

$$-i\int d^3z \begin{pmatrix} 0 & \left(\gamma^0\right)^T \\ \gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_{12}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) \\ a_{21}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) & a_{22}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{y}\right) \end{pmatrix} \delta^3\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).$$

Obsérvese que de las propiedades de la función delta de Dirac, la relación anterior se reduce a la siguiente ecuación matricial:

$$-i \begin{pmatrix} 0 & \left(\gamma^0\right)^T \\ \gamma^0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_{12}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \\ a_{21}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & a_{22}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).$$

Resolviendo el producto de las matrices en bloque en el lado izquierdo de la expresión inmediatamente anterior, se obtiene la igualdad entre matrices que se muestra a continuación:

$$-i \begin{pmatrix} \left(\gamma^0\right)^T a_{21}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & \left(\gamma^0\right)^T a_{22}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \\ \gamma^0 a_{11}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) & \gamma^0 a_{12}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.276}$$

La igualdad entre matrices establece que una matriz $A \equiv \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ de elementos matriciales a_{ij} y dimensión $m \times n$, será igual a una matriz $B \equiv \left(b_{ij}\right)_{p\times q}$ de elementos matriciales b_{ij} y dimensión $p \times q$, si y solo si, se cumple que $m = p, n = q$ y $a_{ij} = b_{ij}$, es decir que serán iguales, siempre que las matrices tengan la misma dimensión y los elementos que están en la misma posición en ambas matrices, sean iguales. Al igualar entonces, cada componente en (7.276), se obtiene:

$$\begin{aligned} -i\left(\gamma^0\right)^T a_{21}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) &= \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right), & (7.277)\\ -i\left(\gamma^0\right)^T a_{22}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) &= 0, & (7.278)\\ -i\gamma^0 a_{11}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) &= 0, & (7.279)\\ -i\gamma^0 a_{12}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) &= \delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). & (7.280) \end{aligned}$$

Multiplicando por γ^0 a la izquierda de la ecuación (7.279) y consideando que $\left(\gamma^0\right)^2 = 1$, se llega a:

$$a_{11}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = 0. \tag{7.281}$$

De forma similar, si se mutiplica a la izquierda de (7.280) por γ^0, bajo la consideración de que $\left(\gamma^0\right)^2 = 1$, se deduce que:

$$a_{12}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = i\gamma^0\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.282}$$

A continuación se procederá a multiplicar por $\left(\gamma^0\right)^T$ a la izquierda de la fórmula (7.277):

$$-i\left[\left(\gamma^0\right)^2\right]^T a_{21}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = \left(\gamma^0\right)^T\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).$$

considerando que $\left(\gamma^0\right)^2 = 1$, encuentra que:

$$a_{21}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = i\left(\gamma^0\right)^T\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.283}$$

Por último, si se multiplica a la izquierda de (7.278) por $\left(\gamma^0\right)^T$:

$$\begin{aligned} -i\left[\left(\gamma^0\right)^2\right]^T a_{22}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) &= 0 \\ a_{22}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{7.284}$$

Cabe anotar que para el resultado previo se ha tenido en cuenta que $\left(\gamma^0\right)^2 = 1$. De las relaciones (7.281), (7.282), (7.283) y (7.284), se verifica que la la matriz (7.275) presenta la siguiente estructura:

$$C^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) = i\begin{pmatrix} 0 & \gamma^0 \\ \left(\gamma^0\right)^T & 0 \end{pmatrix}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right). \tag{7.285}$$

7.15. Apéndice O. PD en teoría de QED_{2+1}

En este apéndice se deduce una relación para determinar el PD entre un campo bosónico y uno fermiónico, a partir de la cual se determinan los PD entre los campos canónicos del espacio de fase reducido.

7.15.1. PD entre una variable bosónica y una fermiónica

En esta subsección se encontrará la relación necesaria para determinar el PD entre una variable de tipo bosónico con una de tipo fermiónico. Sea $B(\boldsymbol{x},t) \equiv B\left[A_\alpha,\pi^\alpha,\psi_b,\overline{\psi}_b\right]$ una variable dinámica bosónica del espacio de fase reducido y $F(\boldsymbol{x},t) \equiv F\left[A_\alpha,\pi^\alpha,\psi_b,\overline{\psi}_b\right]$ una variable dinámica fermiónica del mismo espacio, el PD entre ellas de acuerdo a la definición (5.188), vendrá dado por:

$$\left\{B(\boldsymbol{x},t),F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D = -\int d^2u d^2v \left\{B(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} C^{-1}_{lm}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}, \tag{7.286}$$

donde se ha considerado el resultado encontrado en (5.178). A continuación, se analizará cada PD presente en la integral preliminar, a partir de la definición (5.151). Inicialmente obsérvse que:

$$\begin{aligned}\left\{B(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} \;=\;& \left\{B(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\} - \int d^2z d^2w \left[\left\{B(\boldsymbol{x},t),\Gamma^i_b(\boldsymbol{z},t)\right\}\left[C^{ij}_{bc}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\right]^{-1}\right.\\ & \left.\left\{\Gamma^j_c(\boldsymbol{w},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}\right].\end{aligned} \tag{7.287}$$

No obstante, el PB entre una variable bosónica y una fermiónica es nulo, luego se satisface que:

$$\left\{B(\boldsymbol{x},t),\Gamma^i_b(\boldsymbol{z},t)\right\} = 0, \tag{7.288}$$

sustituyendo este resultado en (7.287) se obtiene:

$$\left\{B(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}_{D_1} = \left\{B(\boldsymbol{x},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}, \tag{7.289}$$

relación, que de acuerdo a (5.151), indica que el primer PD entre una variable bosónica y los vínculos ϕ_l, se reduce al PB entre ellos. De la misma manera, a partir de (5.151) se obtiene:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} \;=\;& \left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t),F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} - \int d^2z d^2w \left[\left\{B(\boldsymbol{x},t),\Gamma^i_b(\boldsymbol{z},t)\right\}\left[C^{ij}_{bc}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\right]^{-1}\right.\\ & \left.\left\{\Gamma^j_c(\boldsymbol{w},t),\phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}\right].\end{aligned} \tag{7.290}$$

Dado que el PB entre una variable de tipo bosónico con una de tipo fermiónico es cero, la expresión previa arrojará valores no nulos siempre que $m = 2$, puesto que el vínculo ϕ_2 es el único que posee campos fermiónicos en su estructura. Por consiguiente, se concluye que:

$$\left\{\phi_m(\boldsymbol{v},t), F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} = \left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t), F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}. \tag{7.291}$$

Reemplazando (7.289) y (7.291) en (7.286) se obtiene que el segundo PD entre una variable bosónica y una fermiónica es dado por:

$$\left\{B(\boldsymbol{x},t), F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D = -\int d^2u d^2v \left\{B(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\} C_{l2}^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t), F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}, \tag{7.292}$$

donde la expresión $\left\{B(\boldsymbol{x},t), \phi_l(\boldsymbol{u},t)\right\}$ es un PB. Sin embargo, de la matriz (7.286) se esperaría que (7.292) arroje valores no nulos para los valores particulares $l = 1,4$. No obstamte, teniendo en cuenta que $\phi_1 = \pi_0$ y que los campos bosónicos del espacio de fase reducido son A_i y π_i con $i = 1,2$, resulta evidente que:

$$\left\{B(\boldsymbol{x},t), \phi_1(\boldsymbol{u},t)\right\} \approx 0, \tag{7.293}$$

bajo este resultado, se concluye que (7.292) será distinta de cero, solamente cuando $l = 4$, es decir:

$$\left\{B(\boldsymbol{x},t), F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D = -\int d^2u d^2v \left\{B(\boldsymbol{x},t), \phi_4(\boldsymbol{u},t)\right\} C_{42}^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t), F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}. \tag{7.294}$$

7.15.2. PD entre el campo bosónico A_i y los campos fundamentales de Dirac

A partir del resultado obtenido en (7.292) se procederá a determinar el siguiente PD:

$$\left\{A_i(\boldsymbol{x},t), F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D = -\int d^2u d^2v \left\{A_i(\boldsymbol{x},t), \phi_4(\boldsymbol{u},t)\right\} C_{42}^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t), F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}. \tag{7.295}$$

De la estructura del vínculo ϕ_4 dada por (5.184) y los PB fundamentales se determina que:

$$\left\{A_i\left(\boldsymbol{x},t\right),\phi_4\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}\approx 0, \tag{7.296}$$

reemplazando este resultado en (7.295) se obtiene:

$$\left\{A_i\left(\boldsymbol{x},t\right),F\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D=0, \tag{7.297}$$

del resultado anterior se derivan los siguientes PD:

$$\begin{aligned}\left\{A_i\left(\boldsymbol{x},t\right),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D &= 0, &(7.298)\\ \left\{A_i\left(\boldsymbol{x},t\right),\overline{\psi}_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D &= 0. &(7.299)\end{aligned}$$

7.15.3. PD entre el campo bosónico π_i y los campos fundamentales de Dirac

1. A partir de (7.295) se resolverá el PD entre el campo bosónico π_i y el campo fermiónico ψ_b:

$$\left\{\pi_i\left(\boldsymbol{x},t\right),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D=-\int d^2u d^2v\left\{\pi_i\left(\boldsymbol{x},t\right),\phi_4\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}C^{-1}_{42}\left(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\right)\left\{\phi_2\left(\boldsymbol{v},t\right),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}. \tag{7.300}$$

Por simplicidad se solucionará separadamente cada factor presente en la integral de la relación previa. De la estructura del vínculo ϕ_4 dada en (5.184) y los PB fundamentales se encuentra que:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i\left(\boldsymbol{x},t\right),\phi_4\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\} &\approx \partial^u_j\left\{\pi_i\left(\boldsymbol{x},t\right),A_j\left(\boldsymbol{u},t\right)\right\}\\ &\approx -\partial^x_i\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}\right). &(7.301)\end{aligned}$$

Ahora, de acuerdo a la definición de un primer PD (5.188) se procederá a calcular la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_2\left(\boldsymbol{v},t\right),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} &= \left\{\phi_2\left(\boldsymbol{v},t\right),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}-\int d^2zd^2w\left[\left\{\phi_2\left(\boldsymbol{v},t\right),\Gamma^i_a\left(\boldsymbol{z},t\right)\right\}\left[C^{ij}_{ac}\left(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w}\right)\right]^{-1}\right.\\ &\quad\left.\left\{\Gamma^j_c\left(\boldsymbol{w},t\right),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\right]. &(7.302)\end{aligned}$$

Mediante los PB fundamentes es posible determinar que:

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx 0. \tag{7.303}$$

Reemplazando la relación previa en (7.302) se obtiene:

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1}=-\int d^2zd^2w\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\Gamma_a^i(\boldsymbol{z},t)\right\}\left[C_{ac}^{ij}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\right]^{-1}\left\{\Gamma_c^j(\boldsymbol{w},t),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}. \tag{7.304}$$

De los siguientes resultados (deducidos en el **Apéndice M**):

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\Gamma_a^i(\boldsymbol{z},t)\right\}\approx\begin{cases}-e\overline{\psi}_d(\boldsymbol{v},t)\gamma_{da}^0\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{z}) & \text{si}\quad i=1\\ e\gamma_{ad}^0\psi_d(\boldsymbol{v},t)\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{z}) & \text{si}\quad i=2\end{cases} \tag{7.305}$$

y

$$\left\{\Gamma_c^j(\boldsymbol{w},t),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\approx\begin{cases}-\delta_{cb}\delta^2\left(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}\right) & \text{si}\quad j=1\\ 0 \quad \text{de otro modo}\end{cases}, \tag{7.306}$$

se puede verificar que (7.304) arrojará valores distintos de cero cuando $j=1$. Por otra parte, de la matriz (5.159) se comprueba que para evitar valores nulos en (7.304) se debe considerar el valor particular $i=2$. Por consiguiente el PD dado por (7.304) se reescribirá como sigue:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_{D_1} &= e\gamma_{ad}^0\psi_d(\boldsymbol{v},t)\int d^2zd^2w\left[C_{ac}^{21}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\right]^{-1}\delta_{cb}\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{z})\delta^2\left(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}\right)\\ &= e\gamma_{ad}^0\psi_d(\boldsymbol{v},t)\left[C_{ab}^{21}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})\right]^{-1}\\ &= ie\gamma_{ba}^0\gamma_{ad}^0\psi_d(\boldsymbol{v},t)\delta^2\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}\right)\\ &= ie\psi_b(\boldsymbol{v},t)\delta^2\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}\right),\end{aligned} \tag{7.307}$$

donde se ha usado la expresión matricial (5.159) y que $\gamma_{ba}^0\gamma_{ad}^0=\delta_{bd}$. Reemplazando (7.301) y (7.307) en (7.300) se obtiene el PD entre π_i y ψ_b presenta la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D &= ie\partial_i^x\int d^2ud^2vC_{42}^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\psi_b(\boldsymbol{v},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})\delta^2\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}\right)\\ &= ie\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\partial_i^xC_{42}^{-1}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\\ &= -ie\psi_b\left(\boldsymbol{y},t\right)\partial_i^x\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\right).\end{aligned} \tag{7.308}$$

2. Similarmente, mediante la definición (5.188) se determinará el PD entre los campos π_i y $\overline{\psi}_b$:

$$\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}_D=-\int d^2ud^2v\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t),\phi_4(\boldsymbol{u},t)\right\}C_{42}^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1}. \tag{7.309}$$

A partir de la definición de un primer PD (5.188) se calculará por separado la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} &= \left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}-\int d^2zd^2w\left[\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\Gamma_a^i(\boldsymbol{z},t)\right\}\left[C_{ac}^{ij}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\right]^{-1}\right.\\ &\left.\left\{\Gamma_c^j(\boldsymbol{w},t),\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\right].\end{aligned} \tag{7.310}$$

Mediante los PB fundamentes es posible determinar que:

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\approx 0. \tag{7.311}$$

Reemplazando la relación previa en (7.310) se obtiene:

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1}=-\int d^2zd^2w\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\Gamma_a^i(\boldsymbol{z},t)\right\}\left[C_{ac}^{ij}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\right]^{-1}\left\{\Gamma_c^j(\boldsymbol{w},t),\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}. \tag{7.312}$$

De los siguientes resultados (deducidos en el **Apéndice M**):

$$\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\Gamma_a^i(\boldsymbol{z},t)\right\}\approx\begin{cases}-e\overline{\psi}_d(\boldsymbol{v},t)\gamma_{da}^0\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{z}) & \text{si}\quad i=1\\ e\gamma_{ad}^0\psi_d(\boldsymbol{v},t)\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{z}) & \text{si}\quad i=2\end{cases} \tag{7.313}$$

y

$$\left\{\Gamma_c^j(\boldsymbol{w},t),\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}\approx\begin{cases}-\delta_{cb}\delta^2(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y}) & \text{si}\quad j=2\\ 0\quad \text{de otro modo}\end{cases}, \tag{7.314}$$

es posible comprobar que (7.312) arrojará valores distintos de cero cuando $j=2$. Por otro lado, de la matriz (5.159) se comprueba que para evitar valores nulos en (7.312) se debe considerar el valor particular $i=1$. Por consiguiente el PD dado por (7.312) se reescribirá como sigue:

$$\begin{aligned}\left\{\phi_2(\boldsymbol{v},t),\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}_{D_1} &= -e\overline{\psi}_d(\boldsymbol{v},t)\gamma_{da}^0\int d^2zd^2w\left[C_{ac}^{12}(\boldsymbol{z},\boldsymbol{w})\right]^{-1}\delta_{cb}\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{z})\delta^2(\boldsymbol{w}-\boldsymbol{y})\\ &= -e\overline{\psi}_d(\boldsymbol{v},t)\gamma_{da}^0\left[C_{ab}^{12}(\boldsymbol{v},\boldsymbol{y})\right]^{-1}\\ &= -ie\gamma_{da}^0\gamma_{ab}^0\overline{\psi}_d(\boldsymbol{v},t)\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y})\\ &= -ie\overline{\psi}_b(\boldsymbol{v},t)\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y})\end{aligned} \tag{7.315}$$

donde se ha usado la expresión matricial (5.159) y que $\gamma^0_{da}\gamma^0_{ab} = \delta_{bd}$. Reemplazando (7.301) y (7.315) en (7.309) se obtiene el PD entre π_i y $\overline{\psi}_b$ presenta la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\left\{\pi_i(\boldsymbol{x},t), \overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= -ie\partial_i^x \int d^2u d^2v C_{42}^{-1}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\overline{\psi}_b(\boldsymbol{v},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u})\delta^2(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{y}) \\
&= -ie\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\partial_i^x C_{42}^{-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\
&= ie\overline{\psi}_b(\boldsymbol{y},t)\partial_i^x \frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \qquad (7.316)
\end{aligned}$$

7.15.4. PD entre los campos de Dirac y el Hamiltoniano H_1

1. A partir de (5.220) y (5.221) se procederá a resolver el siguiente PD:

$$\begin{aligned}
\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), H_1(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \int d^2y \left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), \pi_i(\boldsymbol{y},t)\right\}_D \left[\pi_i(\boldsymbol{y},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{y},t)\right] + \\
&\quad e\int d^2y A_0(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{cd}\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), \overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\right\}_D \psi_d(\boldsymbol{y},t) \\
&= ie\int d^2y \psi_b(\boldsymbol{x},t)\frac{1}{\nabla_x^2}\partial_i^y\left[\pi_i(\boldsymbol{y},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
&\quad -ie\int d^2y A_0(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{bc}\gamma^0_{cd}\psi_d(\boldsymbol{y},t)\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \qquad (7.317)
\end{aligned}$$

donde se ha usado el siguiente PD fundamental:

$$\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), \pi_i(\boldsymbol{y},t)\right\}_D = ie\psi_b(\boldsymbol{x},t)\partial_i^y\frac{1}{\nabla_x^2}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \qquad (7.318)$$

Sin embargo, de la identidad (5.196) se verifica que:

$$A_0(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\nabla_x^2}\partial_i^x\left[\pi_i(\boldsymbol{x},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{x},t)\right]. \qquad (7.319)$$

Reemplazando este resultado en (7.317) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\left\{\psi_b(\boldsymbol{x},t), H_1(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= ieA_0(\boldsymbol{x},t)\psi_b(\boldsymbol{x},t) - ieA_0(\boldsymbol{x},t)\psi_b(\boldsymbol{x},t) \\
&= 0. \qquad (7.320)
\end{aligned}$$

2. Análogamente, de (5.220) y (5.221) se determinará el siguiente PD

$$\begin{aligned}
\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), H_1(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= \int d^2y \left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), \pi_i(\boldsymbol{y},t)\right\}_D \left[\pi_i(\boldsymbol{y},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{y},t)\right] - \\
& e\int d^2y A_0(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{cd}\overline{\psi}_c(\boldsymbol{y},t)\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), \psi_d(\boldsymbol{y},t)\right\}_D \\
&= -ie\int d^2y\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\frac{1}{\nabla^2_x}\partial^y_i\left[\pi_i(\boldsymbol{y},t) + \frac{k}{4\pi}\varepsilon_{ij}A_j(\boldsymbol{y},t)\right]\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \\
& +ie\int d^2y\overline{\psi}_c(\boldsymbol{x},t)A_0(\boldsymbol{y},t)\gamma^0_{cd}\gamma^0_{db}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),
\end{aligned} \tag{7.321}$$

donde se han usado los siguientes PD fundamentales:

$$\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), \pi_i(\boldsymbol{y},t)\right\}_D = -ie\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)\partial^y_i\frac{1}{\nabla^2_x}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{7.322}$$

$$\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), \psi_c(\boldsymbol{y},t)\right\}_D = -i\gamma^0_{cb}\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}). \tag{7.323}$$

Teniendo en cuenta la identidad (7.319) se verifica que (7.321) se reduce a:

$$\begin{aligned}
\left\{\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t), H_1(\boldsymbol{y},t)\right\}_D &= -ie\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)A_0(\boldsymbol{x},t) + ie\overline{\psi}_b(\boldsymbol{x},t)A_0(\boldsymbol{x},t) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{7.324}$$

7.16. Apéndice P. Método de Dirac para sistemas singulares

Clásicamente un sistema físico puede analizarse a partir del formalismo Lagrangiano y el formalismo Hamiltoniano. Dichas formulaciones tratan la mecánica desde puntos de vista alternativos que se caracterizan por la relativa facilidad con la que muchos problemas se pueden desarrollar. Es de vital importancia mencionar que una de las mayores atribuciones de estos formalismos, particularmente del Hamiltoniano, es que a partir de ellos se puede construir una versión cuántica de la teoría que se analice [12].

En algunas situaciones simples, es posible pasar directamente de una formulación Lagrangiana a una teoría cuántica. Sin embargo, existen algunas restricciones sobre la estructura del Lagrangiano que describe la teoría [6]. Por tal motivo, antes de llevar a cabo cualquier procedimiento de cuantización, es necesario pasar antes desde el formalismo Lagrangiano al Hamiltoniano, pues se trata de un formalismo general que puede aplicarse en cualquier caso.

El procedimiento de construcción de la versión cuántica de una teoría determinada puede llevarse a cabo directamente, siempre que esta no posea vínculos, es decir estructuras que relacionen las variables que la describan en un determiando espacio y que en consecuencia restrinjan el movimiento del sistema. Sin embargo, el estudio en el formalismo Hamiltoniano de teorías con vínculos requiere un tratamiento especial. Por tal razón, se presenta a continuación un método desarrollado por Dirac destinado al análisis canónico de sistemas dinámicos con vínculos, conocido como método de Dirac [6, 7, 8].

Con el propósito de estudiar adecuadamente el método de Dirac, se considerará en principio una teoría dinámica descrita por un número finito de grados de libertad. Posteriormente se extenderá dicho estudio la teoría clásica de campos, donde los sistemas son descritos por infinitos grados de libertad [19].

7.16.1. Formalismo Lagrangiano

Se condiserará un sistema físico descrito por n variables dinámicas $q_i = q_i(t)$ con $i = 1, 2, ..., n$. A nivel Lagrangiano el estudio del sistema se realiza en un espacio definido por las coordenadas q_i y las velocidades $\dot{q}_i = \frac{\partial q_i}{\partial t}$, conocido como espacio de configuración.

La evolución dinámica del sistema se obtiene al considerar la funcional de acción:

$$S[q_i] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(q_i, \dot{q}_i). \tag{7.325}$$

Donde:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i),$$

es el Lagrangiano del sistema, caracterizado por ser una función de las coordenadas y las velocidades. Dado que se considerarán sistemas cerrados, el Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo. El principio de Hamilton establece que la trayectoria que seguirá el sistema será aquella que extremice a la integral de acción [12]. Luego, si se consideran variaciones arbitrarias e independientes en las variables del espacio de configuración , se deduce que las condiciones para que la acción sea un extremo son las ecuaciones de Euler-Lagrange dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0. \tag{7.326}$$

Expresión que puede reescribirse como:

$$\ddot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \dot{q}_j \frac{\partial^2 L}{\partial q_j \dot{q}_i}. \tag{7.327}$$

De esta ecuación, se observa que las aceleraciones $\ddot{q}_j = \frac{\partial^2 q_j}{\partial t^2}$, están unívocamente determinadas por las coordenadas y las velocidades siempre que la matriz:

$$W_{ji} \equiv \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}, \tag{7.328}$$

conocida como matriz Hessiana, sea invertible. Esto es, solo si la matriz Hessiana tiene determinante distinto de cero.

En caso de cumplirse este requisito, el sistema se denomina regular, si por el contrario, el determinante de la matriz Hessiana es nulo se dice que el sistema es singular. Si el sistema es singular, las aceleraciones no puedrán ser expresadas en términos de las coordenadas y las velocidades y por lo tanto las soluciones de las ecuaciones de movimiento pueden contener funciones arbitrarias del tiempo. Cabe anotar que las densidades Lagrangianas que se estudian en este trabajo de grado son singulares, razón por la cual será necesario analizarlas mediante el método de Dirac.

7.16.2. Formalismo Hamiltoniano

La formulación de Hamilton busca describir el sistema mediante ecuaciones de movimiento de primer orden en las derivadas [12]. Para tal fin, el sistema se analiza en un nuevo espacio, conocido como espacio de fase, definido las coordenadas q_i y unas nuevas cantidades conocidas como momentos canónicos conjugados, que son definidos por:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \tag{7.329}$$

Las cantidades (q_i, p_i) se denominan variables canónicas. Matemáticamente la transición de la formulación de Lagrange a la de Hamilton correspone a una transformación del espacio de configuración al espacio de fase, $(q_i, \dot{q}_i) \to (q_i, p_i)$. El método para realizar este procedimiento lo proporciona una transformación de Legendre [12].

De acuerdo a la definición (7.329), los siguientes casos deben ser considerados [19]:

1. Si la matriz Hessiana (7.328) no es singular, esto es:

   $$\left|W_{ji}\right| = \left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\right| \neq 0.$$

   Entonces es posible expresar los momentos canónicos en términos de las variables del espacio de configuración $(q_i, \dot{q}_i)$. Luego, es posible pasar directamente del formalismo Lagrangiano al formalismo Hamiltoniano.

2. Si la matriz Hessiana es singular, es decir:

   $$\left|W_{ji}\right| = \left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_i}\right| = 0.$$

   En este caso no es posible expresar todos los momentos canónicos en términos de las coordenadas y las velocidades. Por lo tanto, no es posible realizar trivialmente la transición entre los dos formalismos.

En el caso de sistemas singulares, no todos los momentos canónicos son independientes, lo cual implica la existencia de ciertas relaciones entre las variables del espacio de fase. Se denotarán estos vínculos del siguiente modo:

$$\phi_m = \phi_m \left(q_i, p_i\right) = 0,\ m = 1, 2, ..., m. \tag{7.330}$$

Estos vínculos son consecuencia de la definición de los momentos canónicos del sistema. Luego, se conocen como vínculos primarios [6, 7, 8]. Aún cuando no todos los momentos son independientes, es posible construir, bajo la transformación de Legendre, el Hamiltoniano canónico, así:

$$H_c = H_c \left(q_i, p_i\right) \equiv \dot{q}_i p_i - L. \tag{7.331}$$

Sin embargo, el Hamiltoniano canónico no está unívocamente determinado, pues es posible añadir cualquier combinación lineal de los vínculos primarios. Este Hamiltoniano se denomina Hamiltoniano primario y está dado por:

$$H_p = H_p \left(q_i, p_i\right) \equiv H_c + \lambda_m \phi_m, \tag{7.332}$$

donde λ_m son funciones arbitrarias conocidas como multiplicadores de Lagrange. Las ecuaciones de movimiento pueden deducirse de la siguiente integral de acción:

$$S' \left[q_i, p_i\right] \equiv \int_{t_1}^{t_2} dt \left(\dot{q}_i p_i - H_c - \lambda_m \phi_m\right). \tag{7.333}$$

Considerando variaciones arbitrarias e independientes de las variables del espacio de fase, se obtiene que las ecuaciones de Hamilton del sistema son:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_c}{\partial p_i} + \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i}, \tag{7.334}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H_c}{\partial q_i} - \lambda_m \frac{\partial \phi_m}{\partial q_i}, \tag{7.335}$$

$$\phi_m = 0. \tag{7.336}$$

Por lo tanto, la evolución dinámia para cualquier variable dinámica del espacio de fase $g \equiv g\left(q_i, p_i\right)$, vendrá dada por:

$$\dot{g} = \left\{g, H_p\right\} = \left\{g, H_c\right\} + \lambda_m \left\{g, \phi_m\right\}. \tag{7.337}$$

Relación en la que:

$$\left\{g, H_p\right\} \equiv \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H_p}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H_p}{\partial q_i}, \tag{7.338}$$

son los paréntesis de Poisson (PP).

Hasta este punto el sistema esta constituido por un total de m vínculos primarios dados por (7.330). Sin embargo, Dirac establece como regla que todos los PP deben ser calculados antes de hacer uso de los vínculos ϕ_m. Esto con el fin de evitar resultados incosistentes. Una prueba de la validez de esta regla radica en que pese a que (7.330) indicá que los vínculos son nulos, los PP calculados entre ellos y alguna variable dinámica no siempre son cero. Debido a la inclusión de esta regla los vínculos se identificarán de la siguiente manera:

$$\phi_m \approx 0. \tag{7.339}$$

Donde el signo ($\approx$) se conoce como igualdad debil. Bajo esta nueva notación la ecuación de movimiento (7.337) se reescribirá como sigue:

$$\dot{g} \approx \left\{g, H_p\right\}. \tag{7.340}$$

7.16.3. Análisis de consistencia de vínculos

Por consistencia, se debe garantizar que los vínculos se conserven durante la evolución dinámica del sistema. Matématicamente, esta condición indica que la evolución temporal de los vínculos debe anularse debilmente [6, 7, 8]

$$\dot{\phi}_m = \left\{\phi_m, H_c\right\} + \lambda_n \left\{\phi_m, \phi_n\right\} \approx 0. \tag{7.341}$$

Esta relación se conoce como condición de consistencia de vínculos y puede clasificarse en tres clases, de acuerdo a los posibles resultados que se obtengan de ella:

1. Un primer tipo de ecuación se reduce a:

$$0 \approx 0.$$

Se dice que es identicamente satisfecha, con la ayuda de los vínculos primarios.

2. Otra clase de ecuación se reduce a una ecuación inpendiente de los multiplicadores de Lagrange, es decir que relaciona solamente a las variables del espacio de fase. Estas ecuaciones se denominan como vínculos secundarios y presentarán la siguiente forma:
$$\chi_n\left(q_i, p_i\right) \approx 0.$$
3. Un último tipo de ecuación impone condiciones sobre los multiplicadores de Lagrange λ_m, este tipo de estructuras no constituyen nuevos vínculos.

En caso de obtener vínculos secundarios deberá estudiarse el requerimiento de consistencia sobre ellos. Este procedimiento debe llevarse a cabo hasta el punto en que no surjan nuevos vínculos en la teoría.

7.16.4. Clasificación de vínculos de primera y segunda clase

La distinción entre vínculos primarios y secundarios no es relevante, todos ellos son vistos como elementos de un mismo conjuto. Con el objetivo de analizar ordenadamente los sistemas físicos y realizar un estudio completo de los vínculos presentes en ellos, será necesario introducir una nueva terminología que permita una clasificación alternativa de los vínculos de acuerdo a las propiedades relacionadas con los mismos. Por tal motivo, los vínculos se clasificarán bajo las definiciones de función de primera y de segunda clase.

Se dice que una variable dinámica del espacio de fase $F \equiv F\left(q_i, p_i\right)$ es de primera clase si su PP consigo misma, con cada vínculo de la teoría y con el Hamiltoniano, se anula debilmente:
$$\left\{F, \phi_j\right\} \approx 0; \quad j = 1, 2, \ldots J. \tag{7.342}$$
Cualquier función de las variables canónicas que no sea de primera clase se denomina de segunda clase. De tal forma que si una cantidad es de segunda clase, entonces existe

almenos un vínculo con la cual su PP no es debilmente nulo.

Es facil ver que el Hamiltoniano primario es una cantidad de primera clase, puesto que cada una de sus componentes lo son. Por otro lado, el PP entre dos vínculos de primera clase es tambíen un vínculo de primera clase [19].

7.16.5. Transformaciones gauge

Con el objetivo de analizar la relevancia de los vínculos primarios de primera clase ϕ_j, se procederá a estudiar la evolución dinámica de una variable del espacio de fase $g \equiv g\left(q_i, p_i\right)$. El estado inicial de g, denotado por $g(t_0) = g_0$, quedará determinado por las condiciones iniciales asignadas a las variables q_i y p_i. Sin embargo, el estado físico de la variable dinámica g en un tiempo posterior a t_0,vendrá dado por:

$$\dot{g} = \left\{g, H_c\right\} + \lambda_j \left\{g, \phi_j\right\}, \tag{7.343}$$

la arbitrariedad en la elección de la función λ_j hace que la evolución temporal de la variable dinámica g no quede totalmente determinada para una misma condición inicial g_0. Así pues, en un instante t posterior a t_0, la variable g puede tomar diversos valores de acuerdo a la elección que se haga de los coeficientes λ_j.

El valor de la variable g en un tiempo posterior δt, de acuerdo a una expansión en series de Taylor puede ser escrito como:

$$\begin{aligned} g(\delta t) &= g_0 + \dot{g}\delta t \\ &= g_0 + \delta t \left[\left\{g, H_c\right\} + \lambda_j \left\{g, \phi_j\right\}\right]. \end{aligned} \tag{7.344}$$

Teniendo en cuenta que los coeficientes λ_j son completamente arbitrarios, para valores diferentes de los mismos se obtendrán valores distintos de $g(\delta t)$. Suponiendo que para estos coeficientes se toman los valores λ'_j, se obtendrá:

$$g'(\delta t) = g_0 + \delta t \left[\left\{g, H_c\right\} + \lambda'_j \left\{g, \phi_j\right\}\right]. \tag{7.345}$$

Restando (7.344) y (7.345), se llega a:

$$\begin{aligned}\Delta g\,(\delta t) &= g - g' = \delta t \left(\lambda_j - \lambda'_j\right)\{g, \phi_j\} \\ &= \varepsilon_j \{g, \phi_j\}\,,\end{aligned} \tag{7.346}$$

donde:

$$\varepsilon_j \equiv \delta t \left(\lambda_j - \lambda'_j\right), \tag{7.347}$$

es un número arbitrario infinitesimal. Ambos valores de la variable g deben corresponder al mismo estado físico, pues este no puede depender de la elección de los coeficientes λ_j. Debido a que la transformación generada por $\varepsilon_j \phi_j$ relaciona descripciones equivalentes de un mismo estado físico, se llega a la conclusión de que los vínculos primarios de primera clase generan transformaciones de las variables dinámicas, las cuales se conocen como transformaciones gauge. Cabe anotar que los vínculos secundarios de primera clase tambíen pueden generar este tipo de transformaciones. Por tal motivo, Dirac conjeturó que todos los vínculos secundarios de primera clase deben ser considerados como generadores de transformaciones gauge y por ende deben ser incluidos en el Hamitloniano extendido, definido por:

$$H_E = H_p + \gamma_n \phi_n. \tag{7.348}$$

Donde γ_n son los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos secundarios de primera clase ϕ_n.

7.16.6. Paréntesis de Dirac

De acuerdo al método de Dirac, el tratamiento de vínculos de segunda clase se lleva a cabo bajo la redefinición de los PP, en lo que se conoce como paréntesis de Dirac (PD). Sin embargo, el estudio de los vínculos de primera clase en una teoría determinada, requiere de la inclusión de vínculos adicionales conocidos como condiciones gauge.

Las condiciones gauge son vínculos introducidos de forma arbitraria, cuyo objetivo es transformar los vínculos de primera clase en vínculos de segunda clase y de esta manera determinar los multiplicadores de Lagrange asociados a ellos. Es importante tener en cuenta que el número de condiciones gauge introducidas debe ser igual al número de vínculos de primera clase que posee el sistema. Así pues, las condiciones gauge y los vínculos de primera clase deberán constituir un conjunto de vínculos de segunda clase, que serán resueltos en virtud a la definición de parétensis de Dirac.

Los vínculos de segunda clase establecen relaciones entre las variables del espacio de fase. Luego, dichos vínculos surgen cuando la matriz:

$$\Delta_{ss'} \equiv \left\{\phi_s, \phi_{s'}\right\}, \tag{7.349}$$

no se anula debilmente sobre la superficie de vínculos.

Se define la inversa de $\Delta_{ss'}$ como sigue:

$$C^{ss'} \equiv \left(\Delta^{-1}\right)^{ss'}. \tag{7.350}$$

El paréntesis de Dirac para dos funciones arbitrarias del espacio de fase $F \equiv F\left(q_i, p_i\right)$ y $G \equiv G\left(q_i, p_i\right)$, se define como:

$$\{F, G\}_D \equiv \{F, G\} - \left\{F, \chi_s\right\} C^{ss'} \left\{\chi_{s'}, G\right\}. \tag{7.351}$$

Donde χ_s son los vínculos de segunda clase de la teoría.

Puede mostrarse que estos paréntesis tienen las mismas propiedades que los PP [8], excepto que los paréntesis canónicos de las variables pueden verse modificados debido a la forma de los vínculos. En términos de estos nuevos paréntesis, las ecuaciones de movimiento se calculan de acuerdo a la siguiente regla:

$$\{F, H\}_D = \{F, H\} - \left\{F, \chi_s\right\} C^{ss'} \left\{\chi_{s'}, H\right\} \approx \dot{F}. \tag{7.352}$$

Donde se ha usado el hecho de que H es de primera clase. La característica mas importante de los PD es que el paréntesis de una variable arbitraria con los vínculos de segunda clase es identicamente nulo [19], esto es:

$$\{F,\chi_{s''}\}_D = \{F,\chi_{s''}\} - \{F,\chi_s\}\, C^{ss'} \{\chi_{s'},\chi_{s''}\} = 0. \tag{7.353}$$

Esta propiedad muestra que los PD son efectivamente una relación de los PP de tal forma que los grados de libertad redundantes son excluidos de la dinámica del sistema. Se puede afirmar pues, que los vínculos de segunda clase pueden imponerse como igualdades fuertes, siempre que se trabaje con los PD [6, 7, 8].

7.16.7. Teoría de campos con vínculos

A diferencia de sistemas con un número finito de grados de libertad en los que la dinámica es descrita por funciones del tiempo $q_i(t)$ donde el indice i es discreto, en las teorías con un número infinito de grados de libertad la dinámica es descrita por una función del espacio-tiempo $\varphi(\boldsymbol{x},t)$, denominada campo [19]. Luego, para teoría de campos debe sustituirse el índice discreto i por un índice continuo $\boldsymbol{x}$, es decir:

$$q_i(t) = q(i,t) \rightarrow q(\boldsymbol{x},t),$$

donde:

$$(\boldsymbol{x},t) = \left(\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2,...\boldsymbol{x}^n,x^0\right) = x^\mu,\ \mu = 0,1,2,...,n.$$

En teoría de campos es necesario considerar la existencia de cantidades equivalentes al caso discreto, tales como densidades Lagrangianas y Hamiltonianas. Por otra parte, los vínculos dejan de ser funciones del espacio de fase y serán ahora funcionales que pueden depender tambien de las derivadas espaciales de los campos canónicos $\phi_m = \phi_m\left(q,\pi,\partial_i q,\partial_i \pi\right)$. Por lo tanto, en general, los vínculos ya no son relaciones algebraicas sino ecuaciones diferenciales. Aunque los vínculos se escriben con un indice discreto m, debe tenerse en mente que ahora son infinitos, es decir, existe uno para cada r y cada punto del espacio. Por tanto, la suma que aparece en sistemas con un número finito de grados de libertad debe reemplazarse por una integral.

Así pues, la densidad Lagrangiana de una teoría con infinitos grados de libertad será una funcional de los campos y sus derivadas espacio-temporales, esto es:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\left[\varphi, \partial_\mu \varphi\right].$$

De la misma manera, la integral de acción asociada a una densidad Lagrangiana se escribirá como sigue:

$$S\left[\varphi\right] = \int d^n x \mathscr{L}\left[\varphi, \partial_\mu \varphi\right].$$

Bajo el principio de Hamilton, en teoría de campos las ecuaciones de Euler-Lagrange son:

$$\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \varphi^a\left(\boldsymbol{x}, t\right)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_\mu \varphi^a\left(\boldsymbol{x}, t\right)\right)}. \tag{7.354}$$

Dentro del formalismo Hamiltoniano, los momentos canónicos conjugados a los campos φ, son definidos por:

$$\pi_a\left(\boldsymbol{x}, t\right) \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\partial_0 \varphi^a\left(\boldsymbol{x}, t\right)\right)}, \tag{7.355}$$

de forma que la densidad Hamiltoniana canónica es dada por:

$$\mathscr{H}_c = \pi_a \varphi^a - \mathscr{L}, \tag{7.356}$$

siendo el Hamiltoniano canónico:

$$H_c = \int d\boldsymbol{x} \mathscr{H}_c. \tag{7.357}$$

Por lo tanto, el Hamiltoniano primario quedará determinado por:

$$H_p = H_c + \int d\boldsymbol{x} \boldsymbol{\lambda}_m\left(\boldsymbol{x}, t\right) \phi_m\left(\boldsymbol{x}, t\right) = \int d\boldsymbol{x} \mathscr{H}_p. \tag{7.358}$$

donde $\phi_m\left(\boldsymbol{x}, t\right)$ con $m = 1, \ldots, M$ denotan los vínculos primarios del sistema y $\boldsymbol{\lambda}_m\left(\boldsymbol{x}, t\right)$ son funciones arbitrarias del espacio y del tiempo conocidas como multiplicadores de Lagrange. Por otra parte, el paréntesis de Poisson en tiempos iguales entre dos variables dinámicas del espacio de fase $A\left(\boldsymbol{x}, t\right)$ y $B\left(\boldsymbol{x}, t\right)$, es dado por:

$$\left\{A\left(\boldsymbol{x}, t\right), B\left(\boldsymbol{y}, t\right)\right\} \equiv \int d\boldsymbol{z}\left[\frac{\delta A\left(\boldsymbol{x}, t\right)}{\delta \varphi^a\left(\boldsymbol{z}, t\right)} \frac{\delta B\left(\boldsymbol{y}, t\right)}{\delta \pi_a\left(\boldsymbol{z}, t\right)} - \frac{\delta A\left(\boldsymbol{x}, t\right)}{\delta \pi_a\left(\boldsymbol{z}, t\right)} \frac{\delta B\left(\boldsymbol{y}, t\right)}{\delta \varphi^a\left(\boldsymbol{z}, t\right)}\right]. \tag{7.359}$$

Debe garantizarse que los vínculos $\phi_m(\boldsymbol{x},t)$ se conserven durante toda la evolución dinámica del sistema, es decir, que deben satisfacer la siguiente condición de consistencia:

$$\left\{\phi_m(\boldsymbol{x},t), H_p\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\} \approx 0. \tag{7.360}$$

Si como consecuencia del requerimiento de consistencia de un vínculo primario determinado surge uno nuevo, se denominará vínculo secundario. De igual manera, si todos los PP entre un vínculo y el conjunto de vínculos del sistema se anulan debilmente, este será clasificado como de primera clase, de otro modo se denomina de segunda clase. La dinámica en el espacio de fase completo es definida por el Hamiltoniano extendido, construido como combinación lineal del Hamiltoniano primario y los vínculos secundarios de primera clase, es decir:

$$H_E = H_p + \int d\boldsymbol{x}\boldsymbol{\lambda}_j(\boldsymbol{x},t)\phi_j(\boldsymbol{x},t), \tag{7.361}$$

donde $\phi_j(\boldsymbol{x},t)$ con $j=1,...,J$ denota los vínculos de primera clase y $\boldsymbol{\lambda}_j(\boldsymbol{x},t)$ son multiplicadores de Lagrange. El tratamiento de vínculos de primera clase requiere la adición de vínculos arbitrarios conocidos como condiciones gauge, de manera que sea posible definir un conjunto conformado únicamente por vínculos de segunda clase. Los vínculos de segunda clase serán eliminados bajo la definición de Paréntesis de Dirac (PD):

$$\left\{A(\boldsymbol{x},t), B\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D \equiv \int d^2u d^2v \left\{A(\boldsymbol{x},t), \phi_r\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}\Delta^{-1}_{rs}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\left\{\phi_s(\boldsymbol{x},t), B\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}, \tag{7.362}$$

donde $A(\boldsymbol{x},t)$ y $B(\boldsymbol{x},t)$ son dos variables dinámicas arbitrarias del espacio de fase, ϕ_r con $r=1,...,R$ denotan los vínculos de segunda clase y la matriz de vínculos de segunda clase Δ_{rs} para una teoría con infinitos grados de libertad se define del siguiente modo:

$$\Delta_{rs}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right) \equiv \left\{\phi_r(\boldsymbol{x},t), \phi_s\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}, \tag{7.363}$$

siendo discreta en r y s y continua en $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$. Si esta matriz no es singular, entonces tiene una matriz inversa Δ^{-1}, que se determiná bajo la siguiente propiedad:

$$\int d\boldsymbol{y}\Delta_{rs}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\Delta^{-1}_{st}\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\right) = \int d\boldsymbol{y}\Delta^{-1}_{rs}\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\right)\Delta_{st}\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\right) = \delta_{rt}\delta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z}). \tag{7.364}$$

Bajo la definición (7.362) los vínculos de segunda clase del sistema serán fuertemente nulas, es decir:

$$\phi_r\left(\boldsymbol{x},t\right)=0. \tag{7.365}$$

Esto se debe a que el PD entre una variable arbitraria del espacio de fase y un vínculo determinado es fuertemente igual a cero. Una vez eliminados los vínculos del sistema, la evolución temporal de una variable dinámica $F\left(\boldsymbol{x},t\right)$ del espacio de fase reducido (espacio definido por los grados de libertad) será determinada por la siguiente ecuación de Hamilton:

$$\dot{F}\left(\boldsymbol{x},t\right)\equiv\left\{F\left(\boldsymbol{x},t\right),H\left(\boldsymbol{y},t\right)\right\}_D, \tag{7.366}$$

donde H denota el Hamiltoniano de la teoría, construido al reemplazar las identidades (7.365) en el Hamiltoniano canónico.

Bibliografía

[1] Maria de la Torre Mayado. *Electrodinámica Cuántica Bidimensional, Sobre la Teoría del Efecto Hall Cuántico*. PhD thesis, Universidad de Salamanca, 1996.

[2] G. Dunne. Aspects of Chern-Simons Theory. *Les Houches Lectures*, 1998.

[3] Qiong gui Lin and Guang-jiong. Dirac Quantization of Chern-Simons Theories in (2+1) Dimensions. *IOPscience, 10.1088/0264*, 1990.

[4] J.M.Martinez-Fernandez and C. Wotzasek. Constrained quantization of a topologically massive gauge theory in $(2+1)$-dimensions. *Z. Phys. C 43 305*, 1989.

[5] Marcelo Carvalho. Quantizacao de Dirac da QED(2+1)d com o Termo de Chern-Simons. Master's thesis, Centro Brasileiro de Pesquisas Fisicas, Rio de Janeiro, Julho, 1992.

[6] P.A.M. Dirac. *Lectures on Quantum Mechanics*. Yeshiva University, New York, 1964.

[7] T. Regge A. Hanson and C. Teitelboim. *Constrained Hamiltonian Systems*. Acc. Naz. dei Lincei, Roma, 1976.

[8] K Sundermeyer. *Constrained Dynamics*, pages 9,38,79,123. Lectures Notes in Physics, Vol. 169, Springer, New York, 1982.

[9] M. Fleck F.P. Devecchi and H.O. Girotti. Coulomb Gauge Quantization of the Maxwell-Chern-Simons Theory. *Ann Phys. 242.275-291*, 1995.

[10] Elena Oliva Lopez. *Electrodinámica Cuántica Bidimensional, Rernormalización*. PhD thesis, Universidad de Salamanca, 2001.

[11] W Greiner and J Reinhardt. *Field Quantization*, page 31. Springer, New York, 1996.

[12] Herbert Goldstein. *Classical Mechanics*, pages 34, 334. Addison-Wesley, New York, NY, USA, 3th edition, 1990.

[13] Sadri Hassani. *Mathematical Methods For Students of Physics and Related Fields*, pages 705,727. Springer, second edition, 2009.

[14] Landau and Lifshitz. *Statistical Physics*, page 176. Reverte, U.R.S.S, 5th edition, 1988.

[15] Ashok Das. *Lectures of Quantum Field Theory*, page 285. World Scientific, University of Rochester, USA, 2008.

[16] Carneiro C. and Thomaz M. The Algebra of fermions. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 22:474–479, Dezembro 2000.

[17] Pimentel B, Teixeira R, and Tomazelli J.L. Hamilton-Jacobi Aproach to Berezinian Singular Systems. *Annals of Physics*, 267:75–96, January 1998.

[18] L Landau and E. Lifshitz. *Teoría Cuántica Relativista*, volume 4, chapter II,III. Reverté, Barcelona, 2th edition, 1975.

[19] Ricardo Magana. *Análisis hamiltoniano del termino agregado por Holst a la lagrangiana de Palatini*. Maestro en ciencias en especialidad de Física, Instituto politecnico nacional, Mexico, 2007.