Nociones de Cálculo Diferencial

Notas de clase

Oscar Fernando Soto Ágreda
Segundo Javier Caicedo Zambrano

Editorial
Universidad de Nariño

TANTVM POSSVMVS QVANTVM SCIMVS

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

Editorial
Universidad de Nariño

Nociones de Cálculo Diferencial

Notas de clase

Nociones de Cálculo Diferencial

Notas de clase

Oscar Fernando Soto Ágreda

Segundo Javier Caicedo Zambrano

Editorial
Universidad de Nariño

Soto Ágreda, Oscar Fernando
Nociones de cálculo diferencial : notas de clase / Oscar Fernando Soto Ágreda, Segundo Javier Caicedo Zambrano. -- 1ª. ed. -- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2023
129 p. : il., tablas

Incluye bibliografía p. 116 y datos de los autores p. 117
ISBN: 978-628-7509-78-8

1. Cálculo 2. Funciones 3. Derivadas (matemáticas) 4. Funciones trigonométricas 5. Cálculo--Problemas, ejercicios, etc. 6. Funciones exponenciales 7. Funciones trigonométricas 8. Funciones algebraicas 9. Geometría analítica I. Caicedo Zambrano, Segundo Javier

515.33 S718 – SCDD-Ed. 22

Sección de Biblioteca
"Alberto Quijano Guerrero"

Nociones de Cálculo Diferencial. Notas de clase

© Oscar Fernando Soto Ágreda
oscarfdosoto@gmail.com; fsoto@udenar.edu.co
© Segundo Javier Caicedo Zambrano
jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co

© Editorial Universidad de Nariño

ISBN: 978-628-7509-78-8
Primera edición

Corrección de estilo: Germán Chaves Jurado
Diseño y diagramación: Nathaly Johana Rivadeneira

Fecha de Publicación: marzo de 2023
San Juan de Pasto – Nariño – Colombia

Contenido

Introducción

El presente libro Nociones de Cálculo Diferencial: Notas de Clase, trata de manera no formal las temáticas centrales del cálculo diferencial, en tal sentido, está dirigido a cualquier lector con nociones básicas de matemáticas y con deseo de aprender sobre temáticas iniciales del cálculo. Si bien, en el texto no se realiza un tratamiento formal de los soportes teóricos de los conceptos del cálculo, se presenta las definiciones de manera precisa y práctica; de modo que, puede ser consultado por estudiantes de programas que incluyen la matemática como parte de su formación básica o disciplinar; también lo pueden consultar estudiantes de las artes, ciencias sociales y humanas que deseen iniciarse en el estudio del cálculo diferencial. Vale destacar que, la forma cómo se abordan los conceptos, más discursiva que matemática, hace que el libro lo puedan consultar estudiantes y profesores de diversas áreas.

El texto contiene cuatro capítulos, distribuidos de la siguiente manera. El Capítulo 1: Funciones Numéricas, realiza un repaso de las funciones numéricas; incluye el análisis de dominio y recorrido, los conceptos de función constante, inversa, identidad; además, contiene una revisión de las funciones numéricas más usuales: polinómica, exponencial, logarítmica, exponencial y trigonométricas directas e inversas. El Capítulo 2: Elementos de Geometría Analítica, estudia las temáticas de punto, recta, circunferencia, parábola, elipse, hipérbola; además, contiene una introducción al estudio de las coordenadas polares y la conversión con el sistema de Coordenadas Cartesianas. El Capítulo 3: Límites y Continuidad, aborda las temáticas de límites, continuidad de funciones, límites infinitos y en el infinito, infinitésimos y asíntotas de una curva; temas que son fundamentales para el estudio del cuarto capítulo. Finalmente, el Capítulo 4: Derivadas, introduce el estudio de recta tangente a una curva y la derivación de funciones: suma, producto, cociente, exponencial, logarítmica, seno, coseno, derivación de las otras funciones trigonométricas, derivación implícita, derivación de una función potencial, derivación paramétrica, derivada de la inversa de una función, aproximaciones de los valores de una función, cálculo de raíces aproximadas de una función, aplicaciones de la derivada para el cálculo de la razón de cambio de una variable, determinación de la recta tangente a una cura, determinación de máximos y mínimos de una función y cálculo de límites indeterminados.

Para efectos de producción de la obra, los coautores realizaron sus aportes individuales por capítulos, así: los capítulos 2 y 4, son de autoría del profesor Oscar Fernando Soto Ágreda; los capítulos 1 y 3 del profesor Segundo Javier Caicedo Zambrano.

Finalmente, vale indicar que, la mayoría de los ejercicios propuestos en cada capítulo, fueron extraídos de los libros Fundamentos de Matemáticas Generales (Caicedo & Portilla, 2021) y del libro Lecciones de Cálculo Diferencial (Escobar et. al. 2021), de los cuales, al menos uno de los autores del presente libro es coautor de cada uno de aquellos.

Los autores

Universidad de Nariño

Abril de 2022

Capítulo 1:
Funciones numéricas

CAPÍTULO 1.

Funciones Numéricas

Autor: Segundo Javier Caicedo Zambrano[1]

1.1 DEFINICIÓN DE FUNCIÓN

Sea f una *relación* de A hacia B, que simbólicamente se expresa así: $f: A \longrightarrow B$.

f es una función si y solo si:

A cada elemento de $a \in A$ le hace corresponder ***un único*** elemento $b \in B$.

En símbolos, se expresa de la siguiente manera:

Una relación $f: A \longrightarrow B$ es $f$unción $\Leftrightarrow \forall a \in A \, \exists! \; b \in B$ tales que $f(a) = b$.

Los elementos de A se denominan preimágenes y los elementos B, que estén relacionados con elementos de A, se los llama *imágenes*.

El conjunto A es el Dominio (conjunto de partida, primer conjunto) y el conjunto B (conjunto de llegada o segundo conjunto) es el *Codominio* de la función f. El conjunto de todas las imágenes se denomina *Rango* de f.

El *dominio* de una función f se denota por D_f, el *Recorrido* o *Rango* por R_f y el Codominio por C_f.

Ejemplo:

Sean los conjuntos: $A = \{1,2,4\}$ y $B = \{a, b\ c\}$. Se define $f: A \longrightarrow B$ de la siguiente manera:

$f(1) = b\ ; f(2) = a\ ; f(4) = b$.

Con estas condiciones se tiene que:

$C_f = \{a, b, c\};\ R_f = \{a, b\}$.

Dado que $R_f \neq C_f$, entonces la función f no es *sobreyectiva*, pero se puede transformar en *sobreyectiva* al redefinirla de la siguiente manera:

$f: A \longrightarrow B'$, tales que: $f(1) = b\ ; f(2) = a\ ; f(4) = b$; donde $B' = \{a, b\}$.

Con estas condiciones: $C_f = \{a, b\};\ R_f = \{a, b\}$, con lo cual, f se convierte en una *Función Sobreyectiva*. Observe que, $c \in B$ y $c \notin B'$; además, note que la regla que define la función f no cambia.

[1] Profesor Adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño.

1.2 CLASES DE FUNCIONES

1.2.1 Función inyectiva, sobreyectiva y biyectiva

Sea $f: A \longrightarrow B$ una función.

f es *Sobreyectiva* si el rango de f es B; es decir, cuando todos los elementos de B son imágenes.

f es *Inyectiva* cuando cada imagen tiene una sola preimagen.

f es *Biyectiva*, cuando es Inyectiva y Sobreyectiva a la vez.

Una relación f de A hacia B no es función cuando hay al menos un elemento de A al cual no le corresponde un elemento de B, es decir, no tiene imagen, o cuando haya al menos un elemento de A el cual tiene dos o más imágenes.

Si f es función de A hacia B, se dice que f es función *definida* de A hacia B.

Si $A = B$, entonces, se afirma que f es función *definida* sobre A. $(f: A \longrightarrow B)$.

Una función f se puede definir de la siguiente manera:

$$f(x) = y.$$

La variable x representa los elementos del dominio A; la variable y representa los elementos del rango de la función, el cual está contenido en B.

Ejemplos:

1) Sea $f(x) = x^2$, en este caso $y = x^2$.

   Cuando no se indique el conjunto A ni el conjunto B, se asume que A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$.

2) Sea f definida sobre el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, es decir: $\boldsymbol{f}: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, así:

   $y = f(n) = 2n + 4$; esto es, $n \mapsto 2n + 4$.

   Se observa que, para cada número natural n, $2n$ es número natural y es único; de modo que $2n + 4$ también es número natural; además, es único para cada n; por lo cual, f es una función.

   Nótese que, $f(1) = 6; f(2) = 8; f(3) = 10; f(4) = 12; f(5) = 14;\ \cdots$

   El rango de f es $R_f = \{6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 2\,0, 22, 24, 26, 30, \dots\} \subset \mathbb{N}$.

3) Sea $g(x) = \frac{7}{x}$.

   Cuando no se indica el conjunto sobre el cual se define la función, se asume que es el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$; en consecuencia, g no es función porque 0 no tiene imagen en el conjunto de los números reales, es decir, no existe $g(0)$.

   Sin embargo, si se define g como se indica en seguida, sí es función:

$g: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $g(x) = \dfrac{7}{x}$.

4) $h(x) = \frac{12}{x-3}$ no es función porque $h(3)$ no existe en $\mathbb{R}$; no obstante, la siguiente relación h sí es función:

$h: \mathbb{R} - \{3\} \to \mathbb{R}$ *tales que* $h(x) = \dfrac{12}{x - 3}$.

5) Sea $f(x) = \sqrt{x+6}$.

En este caso, f no es función dado que, para $x < -6$ se tiene que $\sqrt{x+6}$ no es número real, es un número imaginario; por lo tanto, estos valores de x, no tienen imagen real.

Al redefinir la relación f, como sigue, sí es función:

$f: [-6, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(x) = \sqrt{x+6}$.

1.2.2 Función constante

Una función $f: A \longrightarrow B$ es constante si,

$f(x) = k$, $\forall x \in A$; $k \in B$, k constante.

Ejemplos:

Para todo real x, las siguientes funciones son constantes:

$$f(x) = 5;\ g(x) = -\pi;\ h(x) = \frac{1}{7};\ r(x) = -9\sqrt{2}.$$

1.2.3 Función inversa

Sea $f: A \longrightarrow B$ tal que $y = f(x)$ una función biyectiva, entonces, la función $f^{-1}: B \longrightarrow A$, tal que, $f^{-1}(y) = x$, es biyectiva.

La función f^{-1} se denomina *Función Inversa* de f.

Observe que:

$$f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \forall y \in B;\ f^{-1}\left(f(x)\right) = x, \forall\, x \in A.$$

En general, si $A = B$, entonces,

$$\forall x \in A: f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x.$$

Ejemplo:

Sea $y = f(x) = 3x + 7$, para todo real x, entonces f es función biyectiva en $\mathbb{R}$.

En efecto, despejando x se tiene, $x = \dfrac{y-7}{3}$.

En este caso, $x = f^{-1}(y) = \dfrac{y-7}{3}$.

Se observa que, $f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \forall\, y \in \mathbb{R};\ f^{-1}\left(f(x)\right) = x\,, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

En efecto, $f(1) = 3(1) + 7 = 10;\ \ y\ \ f^{-1}(10) = \dfrac{10-7}{3} = 1$.

Entonces, $f\left(f^{-1}(10)\right) = f(1) = 10\ \ y\ \ f^{-1}\left(f(1)\right) = f^{-1}(10) = 1$.

En general, se cumple la siguiente relación:

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right) = x.$$

1.2.4 Función identidad

Si f está definida sobre un conjunto A tal que, $\forall x \in A$: $f(x) = x$, entonces, f se denomina *Función Identidad.*

1.3 FUNCIONES REALES DE UNA VARIABLE

1.3.1 Dominio y recorrido de una función real

Si $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = y$, donde $A \subset \mathbb{R}$, es una función, entonces, f se denomina *Función Real* de una variable.

Como caso particular, si $A = \mathbb{R}$, f queda definida sobre $\mathbb{R}$.

Cuando se afirma que f es función real y que $f(x) = y$, entonces, se asume que f está definida como sigue: $f\colon A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \ni y = f(x)$.

En este caso, obviamente no se analiza si f es función, pues, en la afirmación lo dice; no obstante, es conveniente y necesario, obtener el conjunto A; es decir, se debe determinar el *dominio* de definición de la función, el cual corresponde al máximo subconjunto de $\mathbb{R}$ en el cual esté definida la función f.

Ejemplos:

Determinar el domino de las siguientes funciones reales:

1) $f(x) = \frac{20}{x}$.

   Como el único valor real que no puede tomar x, es cero, entonces: $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$.

2) $g(x) = \frac{80}{x-6}$.

   Se debe cumplir que $x - 6 \neq 0$; entonces, $x \neq 6$; luego, $D_g = \mathbb{R} - \{6\}$.

3) $h(x) = \sqrt{x+9}$.

Se debe cumplir que $x + 9 \geq 0$; entonces, $x \geq -9$, es decir, $x \in [-9, +\infty)$.

$D_h = [-9, +\infty)$.

4) $r(x) = \sqrt{2x+9}$.

Se debe cumplir que: $2x + 9 \geq 0$.

$$2x + 9 \geq 0 \longrightarrow 2x \geq -9 \Longrightarrow x \geq -\frac{9}{2} \Longrightarrow x \in \left[-\frac{9}{2}, +\infty\right).$$

Por tanto, $D_r = \left[-\frac{9}{2}, +\infty\right)$.

5) $t(x) = \sqrt{x^2 - 16}$.

Se debe cumplir que: $x^2 - 16 \geq 0$; entonces:

$x^2 - 16 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \geq 16 \Longrightarrow \sqrt{x^2} \geq \sqrt{16} \Longrightarrow |x| \geq 4 \Longrightarrow x \leq -4 \text{ o } 4 \leq x$

$x \in (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

$D_t = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$.

6) $r(x) = \sqrt{25 - x^2}$.

Se debe cumplir que, $25 - x^2 \geq 0$; entonces,

$25 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow 25 \geq x^2 \Longrightarrow \sqrt{25} \geq \sqrt{x^2} \Longrightarrow 5 \geq |x| \ o \ |x| \leq 5 \Longrightarrow -5 \leq x \leq 5$

$D_r = [-5, 5]$

7) $u(x) = \sqrt{x^2 + 5}$.

Para todo número real x, $x^2 \geq 0 \ y \ x^2 + 5 > 0$, por lo cual $\sqrt{x^2+5} \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, $D_u = \mathbb{R}$.

8) $w(x) = \frac{10}{x^2+4} = y$.

Para todo número real x, $x^2 \geq 0 \ y \ x^2 + 7 \geq 7$, entonces, $D_w = \mathbb{R}$.

9) $z(x) = \frac{\sqrt{144 - x^2}}{x^2 - 16}$.

Se debe cumplir que, $144 - x^2 \geq 0 \ y \ x^2 - 16 \neq 0$.

Por una parte,

$144 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow 144 \geq x^2 \Longrightarrow \sqrt{144} \geq \sqrt{x^2} \Longrightarrow 12 \geq |x| \ o \ |x| \leq 12 \Longrightarrow -12 \leq x \leq 12$.

Por otra parte,

$x^2 - 16 \neq 0 \Longrightarrow x \neq 4$.

Por lo tanto, se debe cumplir que,

$-12 \leq x \leq 12 \ y \ x \neq 4 \Longrightarrow x \in [-12, 12] - \{-4, 4\}$.

$D_z = [-\ 12, 12] - \{-4, 4\}$.

En muchos casos, es conveniente obtener el rango de una función real f definida mediante la expresión $f(x) = y$, y en la medida de lo posible, expresar x en términos de y.

Ejemplos:

Determinar el rango de las funciones que se indican a continuación:

1) $f(x) = \frac{3}{x}$.

Solución:

$$y = \frac{3}{x} \implies 3 = xy \implies x = \frac{3}{y}.$$

Para que exista el real x se requiere que $y \neq 0$; entonces: $R_f = \mathbb{R}^*$.

De modo que la función,

$f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* \ni f(x) = \dfrac{3}{x}$ es biyectiva y su inversa es la función $f^{-1}(x) = \dfrac{3}{x}$.

Nótese que, $f\left(f^{-1}(x)\right) = f^{-1}\left(f(x)\right)$.

En efecto, $f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\dfrac{3}{x}\right) = \dfrac{3}{\frac{3}{x}} = x$; $f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(\dfrac{3}{x}\right) = \dfrac{3}{\frac{3}{x}} = x$.

2) $f(x) = \frac{12}{x-4}$.

Solución:

$$y = \frac{12}{x-4} \implies 12 = (x-4)y \implies 12 = xy - 4y \implies 12 + 4y = xy \implies x = \frac{12+4y}{y}$$

Observe que x es número real si $y \neq 0$, por lo tanto, $R_f = \mathbb{R}^*$.

De modo que, la función:

$f: \mathbb{R} - \{4\} \longrightarrow \mathbb{R}^* \ni f(x) = \dfrac{12}{x-4}$ es biyectiva.

Su función inversa es:

$f^{-1}: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} - \{4\} \ni f^{-1}(x) = \dfrac{12+4x}{x}$ la cual es biyectiva.

Por lo tanto, se cumple que,

$\forall\, x \in \mathbb{R}^* : f\left(f^{-1}(x)\right) = x$; $\forall\, x \in (\mathbb{R} - \{4\}): f^{-1}\left(f(x)\right) = x$.

1.3.2 Función polinómica

Una función polinómica f de grado n, se define así:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n; a_n \neq 0.$$

Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales; x es una variable real.

El dominio de cualquier función polinómica es $\mathbb{R}$.

El codominio de una función polinómica es $\mathbb{R}$, pero se puede restringir hasta obtener que el rango de la función sea el conjunto de llegada; para lo cual, se elimina los elementos del codominio que no sean imágenes. La expresión algebraica de la función no cambia, tampoco su gráfica, pero se tiene la posibilidad de disponer de una función biyectiva.

Ejemplo:

Sea la función:

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que $f(x) = x^2 + 1$.

Dado que, $x^2 + 1 \geq 1$ para todo número real, entonces, $R_F = [1, +\infty)$.

Se puede observar, que la función $f(x)$ *no es sobrectiva*; pero la función F, definida enseguida, es sobreyectiva, es decir, $C_F = R_F = [1, +\infty)$:

$f: \mathbb{R} \to [1, +\infty)$ tales que $f(x) = x^2 + 1$.

1.3.2.1 Función lineal

$f(x) = mx + n$, donde $m \neq 0$, es una función polinómica de grado uno, denominada *Función Lineal.*

La gráfica de una función lineal $f(x) = mx + n$, es una línea recta no paralela al eje coordenado y; m es la pendiente, que corresponde a la tangente del ángulo positivo medido desde el eje x hasta la recta.

Si $A(a, b)$ y $B(c, d)$ son puntos diferentes de una recta, entonces, la ecuación dos-puntos de dicha recta es:

$$\frac{y - b}{d - b} = \frac{x - a}{c - a}.$$

Por su parte, la ecuación pendiente – corte de dicha recta es,

$$y - b = \frac{(d - b)}{c - a}(x - a) = m(x - a);\ \text{donde}, m = \frac{d - b}{c - a} = \frac{b - d}{a - c}\ ;\ a \neq c.$$

Por lo tanto, la pendiente de una recta es el cociente entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas de dos puntos diferentes de la recta.

Ejemplo:

Sean los siguientes puntos con coordenadas cartesianas:

$A(3, 4), B(5, 8), C(-3, 7), D(5, 4)$.

La ecuación *pendiente-corte* de la recta que pasa por los puntos A y B es la siguiente:

$$y - 4 = \frac{(8 - 4)}{5 - 3}(x - 3) = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 6 + 4 \Rightarrow y = 2x - 2.$$

La ecuación *pendiente-corte* de la recta que pasa por los puntos C y D es la siguiente:

$$y - 7 = \frac{(7 - 4)}{(-3-5)}\left(x - (-3)\right) = \frac{3}{-8}(x + 3) \Rightarrow y = \frac{-3}{8}x + \frac{-9}{8} + 7 \Rightarrow y = \frac{-3}{8}x + \frac{47}{8}.$$

1.3.2.2 Función cuadrática

$f(x) = ax^2 + bx + c$ es una función polinómica de grado dos; se denomina *Función Cuadrática*; se requiere que $a \neq 0$.

La gráfica de una función cuadrática se denomina *parábola* y se extiende desde su vértice hacia arriba, cuando $a > 0$ o hacia abajo cuando $a < 0$.

El vértice de una parábola es un punto dado por las siguientes coordenadas:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \quad c - \frac{b^2}{4a}\right).$$

Cuando $a > 0$, el rango de la función es el siguiente:

$$R_f = \left[c - \frac{b^2}{4a}, +\infty\right).$$

Cuando $a < 0$, el rango correspondiente es:

$$R_f = \left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\right].$$

Ejemplo:

$f(x) = x^2 - 4x - 12.$

En este caso, $a = 1, b = -4, c = -12.$

$$\frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(1)} = \frac{4}{2} = 2.$$

$$c - \frac{b^2}{4a} = -12 - \frac{(-4)^2}{4(1)} = -12 - \frac{16}{4} = -12 - 4 = -16.$$

En resumen, se tienen los siguientes datos:

Vértice de la parábola: $V\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) = V(2, -16).$

Rango de la función: $R_F = \left(c - \frac{b^2}{4a}, +\infty\right) = [-16, +\infty).$

Por otra parte, $x^2 - 4x - 12 = y \Rightarrow y = (x + 2)(x - 6).$

Luego, $x = -2 \Longrightarrow y = 0; x = 6 \Longrightarrow y = 0$; se obtiene $y = 0$. En este caso, la parábola corta al eje X en los puntos $x = -2$ y $x = 6$; por lo tanto, la parábola intercepta al eje x en los puntos de coordenadas $(-2, 0)$ y $(6, 0)$.

1.3.3 Función exponencial

Para un número real positivo $a, a \neq 1$, la función $E(x) = a^x$, es una función real; la función E se denomina *Función Exponencial.*

Para $a > 0$, si $x \to +\infty$, entonces, $a^x \to +\infty$; si $x \to -\infty$, entonces, $a^x \to 0$, $a^x \neq 0$.

Para $0 < a < 1$, si $x \to +\infty$, entonces, $a^x \to 0$ y si $x \to -\infty$, entonces, $a^x \to +\infty$.

Para $x = 0$, $y = a^0 = 1$.

La gráfica de la función exponencial E intercepta al eje y en el punto de coordenadas $(0, 1)$ (ver Figura 1).

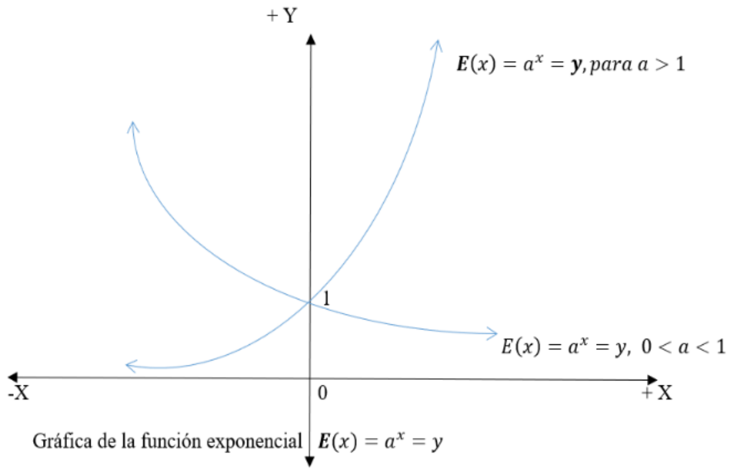


Figura 1. Representación gráfica de la función exponencial

Dado que, para todo número real x, $a^x > 0$, entonces, el dominio de E es $\mathbb{R}$ y el rango de E es $\mathbb{R}^+$.

Según esto, la función E es Inyectiva pero no sobreyectiva.

Restringiendo el codominio $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$, la función E es sobreyectiva y, en consecuencia, es biyectiva. Por lo tanto, la siguiente función exponencial es biyectiva:

$E: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $E(x) = a^x$.

1.3.4 Función logaritmo

La siguiente expresión se lee: logaritmo de P en base a es igual a n:

$Log_a(P) = n.$

Donde a es la base y P es el número al cual se calcula el logaritmo. En esta expresión son conocidos los valores de a y P, y se determina el valor de n.

Por definición, se cumple la siguiente relación:

$$Log_a(P) = n \iff a^n = P.$$

Por lo tanto,

$$a^x = y, \text{si y solo sí}, Log_a(y) = x.$$

Sean las siguientes funciones:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \ni f(x) = a^x; g: \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \ni g(x) = Log_a(x).$$

En este caso, las funciones f y g son mutuamente inversas, es decir,

$$\forall x \in \mathbb{R}^+: f\big(g(x)\big) = x; \ y \ \forall x \in \mathbb{R}: g\big(f(x)\big) = x.$$

La función f se denomina Función Exponencial de base $a, a > 0, a \neq 1$, y la función g se denomina *Función Logaritmo* de base a. Por lo tanto, las funciones exponencial y logaritmo de base a son mutuamente inversas.

Cuando la base del logaritmo es $a = 10$, el logaritmo se denomina *decimal,* y en la escritura se omite la base, así:

$$log_{10}(x) = log(x).$$

Cuando la base del logaritmo es el número irracional $e \approx 2.7182818210$, el logaritmo se denomina *natural* y se escribe así:

$$log_e(x) = ln(x).$$

Dado que el dominio de la función logaritmo es $\mathbb{R}^+$, NO existe el logaritmo de cero ni de números reales negativos.

Para que un número real a pueda ser base de un logaritmo, se requiere que, $a > 0 \ \ y \ a \neq 1$.

Ejemplos:

$$log_2(8) = 3 \ \text{ porque } \ 2^3 = 8.$$

$$log_3(81) = 4 \ \text{ porque } \ 3^4 = 81.$$

$$log(100) = 2 \ \text{ porque } \ 10^2 = 100.$$

1.3.4.1 Propiedades de los logaritmos

Se presentan a continuación las propiedades más usuales de los logaritmos:

1) $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$.
2) $log_a\left(\frac{x}{y}\right) = log_a(x) - log_a(y)$.
3) $log_a(x^n) = n\ log_a(x)$.
4) $log_a\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} log_a(x)$.
5) $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$.
6) $log_a(a) = 1$.

7) $log_a(a^n) = n.$
8) $log_a(1) = 0.$
9) $Si\ a^x = p$ entonces $x = \frac{ln(p)}{ln(a)}.$
10) $log_a(x) = log_a(y)$, si y solo sí, $x = y$.

Ejemplos:

Calcular los siguientes logaritmos:

1) $log_2(8^{10}) = 10 \times log_2(2^3) = 10 \times 3 \times log_2(2) = 10 \times 3 \times 1 = 30.$
2) $log_5(\sqrt[3]{25}) = \frac{1}{3} \times log_5(25) = \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{3}.$
3) $log_2(30) = \frac{ln(30)}{ln(2)} = \frac{3{,}401197382\cdots}{0{,}69314718} = 4{,}906990596\cdots.$
4) $log_9(81) = log_9(9^2) = 2 \times log_9(9) = 2 \times 1 = 2.$
5) $log_3(80) = \frac{ln(80)}{ln(3)} = 3{,}988692535.$
6) $log(10^2) = 2 \times log(10) = 2 \times 1 = 2.$
7) $log_2(2^{10}) = 10 \times log_2(2) = 10 \times 1 = 10.$
8) $ln(e) = log_e(e) = 1.$
9) $log(10) = log_{10}(10) = 1.$
10) $log(1) = 0$ puesto que $log(1) = log_{10}(1) = 0$ (observe que $10^0 = 1$).
11) $ln(1) = 0$ puesto que $ln(1) = log_e(1) = 0$ (observe que $e^0 = 1$).

1.3.4.2 Ecuación exponencial

La expresión $a^x = b$ es una *ecuación exponencial*, donde $a > 0,\ a \neq 1,\ b \in \mathbb{R}^+$.

La expresión $log_a(x) = b$ es una *ecuación logarítmica*; $a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0\ ;\ b \in \mathbb{R}$.

Ejemplos:

Resolver las siguientes ecuaciones:

1) $5^x = 625 \implies \mathrm{x} = log_5(625) = \dfrac{ln(625)}{ln(5)} = 4.$

2) $2^x = 1.024 \implies \mathrm{x} = log_2(1.024) = \dfrac{ln(1.024)}{ln(2)} = 10.$

3) $2^x = 1.020 \implies \mathrm{x} = log_2(1.020) = \dfrac{ln(1.020)}{ln(2)} = 9{,}994\cdots.$

4) $2^x = 1.050 \implies \mathrm{x} = log_2(1.050) = \dfrac{ln(1.050)}{ln(2)} = 10{,}036\cdots.$

1.3.5 Funciones trigonométricas

1.3.5.1 Dominio y recorrido

En la Tabla *1* se presentan los dominios de definición más usuales y los correspondientes recorridos de las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. En este caso, la variable x puede tomar valores reales que corresponden a medidas de ángulos en *radianes.*

Tabla 1. Dominios más usuales de las funciones trigonométricas

Función	**Notación**	**Dominio**	**Recorrido**
Seno	sen	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
Coseno	cos	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$
Tangente	tan	$\{x \in \mathbb{R}/Cos(x) \neq 0\}$	$\mathbb{R}$
Cotangente	ctan	$\{x \in \mathbb{R}/Sen(x) \neq 0\}$	$\mathbb{R}$
Secante	sec	$\{x \in \mathbb{R}/Cos(x) \neq 0\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
Cosecante	csec	$\{x \in \mathbb{R}/Sen(x) \neq 0\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Si bien, el dominio de las funciones *Seno y Coseno* es $\mathbb{R}$, generalmente se toman los intervalos $[0, 2\pi]$ *o* $[-\pi, \pi]$; no obstante, cuando interesa trabajar con sus funciones inversas, es usual considerar los dominios de biyección que se resumen en la Tabla 2:

Tabla 2. Dominios de biyección más usuales de las funciones trigonométricas

Función	**Notación**	**Dominio de biyección**	**Recorrido**
Seno	sen	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$
Coseno	cos	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$
Tangente	tan	$(0, \pi)$	$\mathbb{R}$
Cotangente	ctan	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$
Secante	sec	$[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$
Cosecante	csec	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

1.3.5.2 Identidades trigonométricas

$\forall x \in \mathbb{R}$: $sen^2(x) + cos^2(x) = 1.$

Esta igualdad se cumple para todo número real x, por lo cual, se denomina *Identidad* y constituye la *Identidad Fundamental* de las funciones trigonométricas.

Las siguientes identidades se derivan de la fundamental.

Dividiendo, por $Cos^2(x) \neq 0$, se obtiene,

$$sec^2(x) = 1 + tan^2(x).$$

Dividiendo, por $Sen^2(x) \neq 0$, se obtiene,

$$csec^2(x) = 1 + ctan^2(x).$$

Otras identidades importantes, son:

$$cos(x \pm y) = cos(x)cos(y) \mp sen(x)sen(y).$$

$$sen(x \pm y) = sen(x)cos(y) \pm cos(x)sen(y).$$

Con estas igualdades, se obtiene las siguientes identidades:

$$sen(2x) = 2sen(x)cos(x).$$

$$cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x).$$

$$tan(x + y) = \frac{tan(x) + \tan(y)}{1 - tan(x)\tan(y)}.$$

$$tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1 - tan^2(x)}.$$

$$sen\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}.$$

$$cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}.$$

Observe que, $(sen(x))^2 = sen(x) \times sen(x) = sen^2(x)$.

En algunos textos, en lugar de escribir $sen\,(x)$ escriben $sen\,x$; por lo cual, en lugar de $sen^2(x)$ suelen escribir $sen^2 x$.

La

Tabla 3 contiene las imágenes de valores reales típicos para las funciones Seno y Coseno.

Tabla 3. Imágenes de Seno y Coseno para valores reales más usuales

$sen(0) = 0$	$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$	$sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$sen\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$cos(0) = 1$	$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$	$cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

$sen\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$	$sen\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$sen\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$	$sen(\pi)=0$	$sen(2\pi)=0$
$cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$	$cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$cos(\pi)=-1$	$cos(2\pi)=1$

1.3.6 Funciones trigonométricas inversas

Recordemos que si f es una función biyectiva de A hacia B, tal que $f(x)=y$, entonces, se cumple que, $f^{-1}(y)=x$.

En virtud de lo indicado,

$$\forall x\in D_f=A: f^{-1}\big(f(x)\big)=x\ ;\ \forall y\in D_{f^{-1}}=B: f\big(f^{-1}(y)\big)=y.$$

Para las funciones trigonométricas se debe considerar como conjunto de partida un intervalo conveniente y como codominio el rango correspondiente de la función; de este modo, las funciones quedan biyectivas.

En la Tabla 4 se presenta los dominios de biyección más usuales para cada una de las funciones trigonométricas y sus inversas.

Tabla 4. Dominios de biyección de las funciones trigonométricas y sus inversas

Función directa	**Dominio y rango**	**Función inversa**	**Dominio y recorrido**
$sen(x)=y$	$D_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ $R_f=[-1,1]$	$sen^{-1}(y)=arc\ sen(y)=x$	$D_f=[-1,1]$ $R_f=[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$
$cos(x)=y$	$D_f=[0,\pi]$ $R_f=[-1,1]$	$cos^{-1}(y)=arc\ cos(y)=x$	$D_f=[-1,1]$ $R_f=[0,\pi]$
$tan(x)=y$	$D_f=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ $R_f=(-\infty,+\infty)$	$tan^{-1}(y)=arc\ tan(y)=x$	$D_f=(-\infty,+\infty)$ $R_f=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
$ctan(x)=y$	$D_f=(0,\pi)$ $R_f=(-\infty,+\infty)$	$ctan^{-1}(y)=arc\ ctan(y)=x$	$D_f=(-\infty,+\infty)$ $R_f=(0,\pi)$

$sec(x) = y$	$D_f = (0,\pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ $R_f = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$	$sec^{-1}(y) = arc\ sec(y) = x$	$D_f = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ $R_f = (0,\pi) - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$csec(x) = y$	$D_f = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ $R_f = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$	$csec^{-1}(y) = arc\ csec(y) = x$	$D_f = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$ $R_f = \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$

Recordemos que, si f es biyectiva, entonces, $f(x) = y \Leftrightarrow\ f^{-1}(y) = x$.

Ejemplos:

$$sen(0) = 0\ \Longrightarrow sen^{-1}(0) = arc\ sen(0) = 0.$$

$$sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1\ \Longrightarrow sen^{-1}(1) = arc\ sen(1) = \frac{\pi}{2}.$$

$$sen\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}\ \Longrightarrow sen^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = arc\ sen\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$sen\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}\ \Longrightarrow sen^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = arc\ sen\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}.$$

$$cos(0) = 1\ \Longrightarrow sen^{-1}(1) = arc\ sen(1) = 0.$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\ \Longrightarrow cos^{-1}(0) = arc\ sen(0) = \frac{\pi}{2}.$$

$$cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \Longrightarrow cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = arc\ sen\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

$$tan(0) = 0\ \Longrightarrow tan^{-1}(0) = arc\ tan(0) = 0.$$

$$tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1\ \Longrightarrow tan^{-1}(1) = arc\ tan(1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1\ \Longrightarrow tan^{-1}(-1) = arc\ tan(-1) = -\frac{\pi}{4}.$$

$$tan(1{,}57) \cong 1.255{,}76\ \Longrightarrow tan^{-1}(1.255{,}76) = arc\ tan(1.255{,}76) \cong 1{,}57.$$

$$tan(-1{,}57) \cong -1.255{,}76\ \Longrightarrow tan^{-1}(-1.255{,}76) = arc\ tan(-1.255{,}76) \cong -1{,}57.$$

Por error, se puede considerar que, $sen^{-1}(y) = \frac{1}{sen(y)}$; por lo cual, se recomienda utilizar $arcs\ en(y)$ en lugar de $sen^{-1}(y)$; la misma sugerencia aplica para las demás funciones trigonométricas.

Ejemplos:

Utilizando los dominios dados en la tabla anterior, determinar los valores de α en las siguientes expresiones:

$a)$ $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \alpha = arc\ sen\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$

$b)$ $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow \alpha = arc\ cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6}.$

$c)$ $\tan(\alpha) = 1 \Longrightarrow \alpha = arc\ tan(1) = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}.$

$d)$ $\tan(\alpha) = -1 \Longrightarrow \alpha = arc\ tan(-1) = -\frac{\pi}{4} \Longrightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4}.$

$e)$ $\sec(\alpha) = 3 \Longrightarrow \alpha = arc\ sec(3) \cong 70{,}5288 \Longrightarrow \alpha \approx 70{,}5288.$

1.4 EJERCICIOS

1) Determinar el dominio y el rango de las siguientes funciones reales; excepto para las funciones α, β, γ y ∂, para las cuales solo debe calcular el dominio.

Funciones	Respuestas	Funciones	Respuestas
$F(x) = \frac{8}{x + 9}$	$D_F = \mathbb{R} - \{-9\}$ $R_F = \mathbb{R} - \{0\}$	$G(x) = \frac{-10}{x - 9}$	$D_G = \mathbb{R} - \{9\}$ $R_G = \mathbb{R} - \{0\}$
$H(x) = \frac{x}{3x + 15}$	$D_H = \mathbb{R} - \{-5\}$ $R_H = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{3}\right\}$	$\alpha(x) = \frac{x + 4}{x^2 - 9}$	$D_\alpha = \mathbb{R} - \{-3, 3\}$
$\beta(x) = \frac{x + 7}{x^2 + 10}$	$D_\beta = \mathbb{R}$	$\gamma(x) = \frac{x + 7}{x^2 - 10}$	$D_\gamma = \mathbb{R} - \{-\sqrt{10}, \sqrt{10}\}$
$F(u) = \sqrt{u + 12}$	$D_F = [-12, +\infty)$ $R_F = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$G(u) = \sqrt{u - 10}$	$D_G = [10, +\infty)$ $R_F = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$H(u) = \sqrt{3u + 15}$	$D_H = [-5, +\infty)$ $R_H = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$T(u) = \sqrt{7u - 3}$	$D_T = \left[\frac{3}{7}, +\infty\right)$ $R_T = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

$\beta(u) = \sqrt{u^2 - 16}$	$D_\beta = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty)$ $R_\beta = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$S(u) = \sqrt{u^2 + 20}$	$D_S = \mathbb{R}$ $R_S = [\sqrt{20}, +\infty)$
$\partial(v) = \dfrac{\sqrt{v^2 - 16}}{v + 5}$	$D_\partial = (-\infty, -4] \cup [4, +\infty) - \{-5\}$	$F(t) = t^2 - t - 30$	$D_F = \mathbb{R}$ $R_F = \left[-\dfrac{121}{4}, +\infty\right)$
$G(t) = 8t^2 + 10t + 5$	$D_F = \mathbb{R}$ $R_F = \left[\dfrac{15}{8}, +\infty\right)$	$W(t) = 3t^3 + 10t$	$D_W = \mathbb{R}$ $R_W = \mathbb{R}$

Capítulo 2:

Elementos de geometría analítica

CAPÍTULO 2.
Elementos de Geometría Analítica

Autor: Oscar Fernando Soto Ágreda[2]

2.1 INTRODUCCIÓN

Resolver un problema en el modelo de la *Geometría Analítica*, implica ejecutar tres pasos:

i. Trasladar el problema al álgebra con una interpretación conveniente de la solución esperada en el sistema coordenado que supone el problema resuelto.
ii. Resolver la situación algebraica vinculada con el problema del paso i) en el que se puede recurrir a las relaciones conocidas del modelo sintético.
iii. Verificar que la solución encontrada resuelve el problema.

Para complementar la información que contiene este capítulo, se recomienda remitirse al libro *Lecciones de Cálculo Diferencial*, del cual somos coautores los autores del presente libro (Escobar et al., 2021).

2.2. EL PUNTO

2.2.1 Noción de punto

Según los *Elementos de Euclides*, punto es lo que no tiene partes; se puede concebir un punto como la huella que deja en un papel un lápiz muy afilado.

En este libro, se concibe que un punto $P(a, b)$ en el plano cartesiano corresponde a la intersección de las rectas: $x = a$, $y = b$, que son paralelas a los ejes coordenados (ver Figura 2).

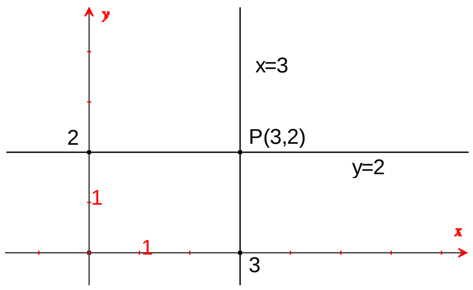


Figura 2. Trazado de un punto

[2] Profesor Adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño.

2.2.1 Distancia entre dos puntos

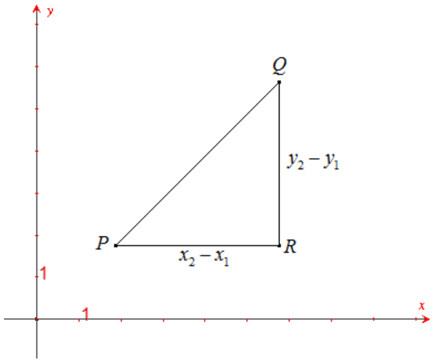


Figura 3. Distancia entre dos puntos

Con los $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se obtiene la coordenada de $R(x_2, y_1)$ (ver Figura 3).

Al aplicar el Teorema de Pitágoras, se obtiene la siguiente relación:

$$d^2(P,Q) = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Por lo tanto, la fórmula de la distancia entre los puntos P y Q, es:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplos:

1) Calcular la distancia entre $P(-3,5)$ y $Q(4,2)$.

Solución:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{\left(4 - (-3)\right)^2 + (2-5)^2 = \sqrt{49+9}} = \sqrt{58}.$$

2) Calcular la distancia entre $P(-3,5)$ y $Q(3,-3)$.

Solución

$$d(P,Q) = \sqrt{36+64} = 10.$$

2.2.2 División de un segmento en una razón k

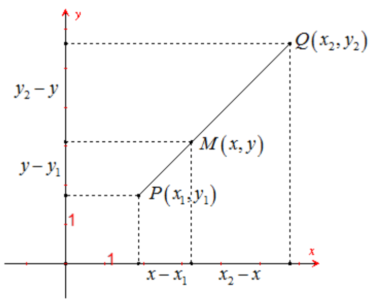


Figura 4. División de un segmento en partes proporcionales

El Teorema de Tales establece que, los segmentos determinados por una secante a un conjunto de paralelas son proporcionales (ver Figura 4).

Según el Teorema de Tales, se tiene que,

$$\frac{MP}{MQ} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = k.$$

De aquí, se obtienen las siguientes expresiones:

$$x = \frac{x_1 + kx_2}{1 + k};\ y = \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}.$$

Para el caso $k = 1$ se obtiene el punto medio del segmento PQ.

Ejemplo:

Determinar las coordenadas del punto M que divide el segmento PQ en la razón $k = 2$, donde $P(3,7)$ y $Q(-5,9)$.

Solución:

Se determina las coordenadas del punto $M(x, y)$, para $k = 2$:

$$M(x, y) = M\left(\frac{x_1 + kx_2}{1 + k}, \frac{y_1 + ky_2}{1 + k}\right) = M\left(\frac{3 + 2(-5)}{1 + 2}, \frac{7 + 2(9)}{1 + 2}\right) = M\left(\frac{-7}{3}, \frac{25}{3}\right).$$

$$M(x, y) = M\left(-\frac{7}{3}, \frac{25}{3}\right).$$

2.2.3 Pendiente determinada por dos puntos

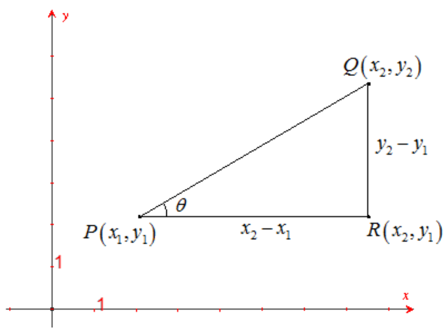


Figura 5. Pendiente de un segmento

Todo segmento en el plano $\mathbb{R}^2$ tiene una inclinación con respecto al lado positivo del eje x (ver Figura 5).

Dados los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ se construye un triángulo rectángulo con el tercer vértice $R(x_2, y_1)$; θ es el ángulo de inclinación del segmento PQ respecto del sentido positivo del eje x, y constituye la Pendiente de dicho segmento, $m = Tan(\theta)$; entonces,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Un conjunto de n puntos, tales que dos a dos tengan igual pendiente, se llaman colineales y se ubican en la misma recta.

Por ejemplo $P(2,7)$, $Q(-1,1)$ y $R(3,9)$ son colineales, pues dos a dos tienen como pendiente $m = 2$. En efecto, la pendiente m_1 del segmento PQ y la pendiente m_2 del segmento QR, son:

$$m_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 7}{-1 - 2} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

$$m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 1}{3 - (-1)} = \frac{8}{4} = 2.$$

Se observa que los segmentos PQ y QR tienen la misma pendiente, por lo cual, son paralelos.

2.2.4 Segmentos paralelos

Sean m_1 y m_2 las pendientes de dos segmentos PQ y QR, respectivamente.

El segmento PQ es paralelo a QR si y solo sí: $m_1 = m_2$.

El segmento PQ es perpendicular a QR si y solo sí: $m_1 \times m_2 = -1$.

2.3. LA RECTA

Una línea recta es el conjunto de puntos tales que, la pendiente calculada entre dos puntos cualesquiera de ella, es constante. También se puede decir que, es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de otros dos puntos fijos.

Sean los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ (ver Figura 6); la pendiente del segmento PQ es,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si $M(x, y)$ es cualquier punto del segmento PQ, entonces, la pendiente del segmento PM queda determinada por:

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}.$$

Dado que los puntos $P(x_1, y_1)$, $M(x, y)$ y $Q(x_2, y_2)$ son colineales, entonces,

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

De aquí se obtiene la siguiente expresión algebraica:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1).$$

Por tanto, la ecuación de la recta que contiene los puntos P y Q, es:

$$y = m(x - x_1) + y_1, \text{donde } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

En términos generales, se puede escribir así:

$y = mx + b.$

Esta ecuación de la recta se denomina ecuación *Pendiente-corte o Pendiente-intercepto*, por cuanto, se dispone de la pendiente de la recta y del punto $B(0, b)$ que corresponde a la intersección de la recta con el eje y (ver Figura 6).

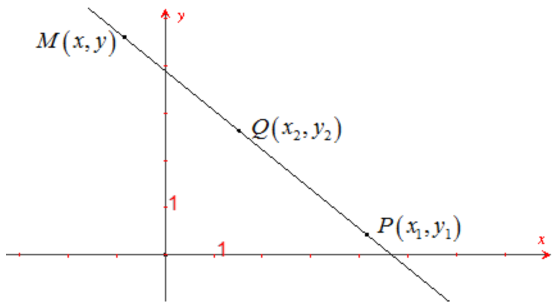


Figura 6. Ecuación Pendiente intercepto de una recta

La ecuación de la recta determinada por dos puntos deja entrever que es suficiente tener un punto y la pendiente.

Considerando la segunda definición, es decir, como el lugar de los puntos que equidistan de otros dos, se tiene de inmediato el punto medio entre $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ como elemento del lugar geométrico (ver Figura 7).

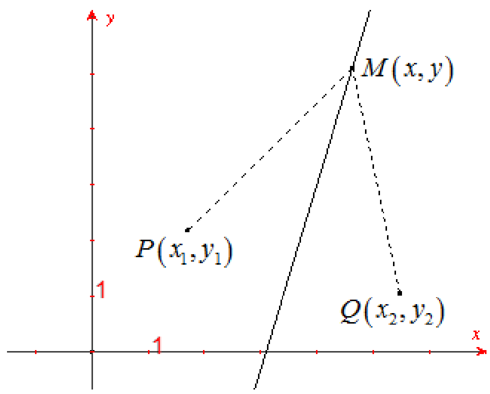


Figura 7. Ecuación dos puntos de una recta

Con base en la definición, se tiene la siguiente expresión:

$$\sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2}.$$

De aquí se obtiene: $2x(x_2 - x_1) + 2y(y_2 - y_1) + x_1^2 + y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0.$

De donde, $y = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}x + \frac{1}{y_2 - y_1}({x_2}^2 + {y_2}^2 - {x_1}^2 - {y_1}^2)$.

Entonces,

$$y = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}x + b \quad (1)$$

Donde,

$$b = \frac{{x_2}^2 + {y_2}^2 - {x_1}^2 - {y_1}^2}{y_2 - y_1}.$$

La ecuación (1) representa la recta que divide al segmento PQ por el *punto medio* y es perpendicular a este; dicha recta se denomina *Mediatriz* del segmento PQ.

Por su parte, como se indicó antes, la ecuación de la recta que contiene los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ es:

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) \quad (2)$$

De modo que las rectas que representan las ecuaciones (1) y (2), son perpendiculares.

En efecto, $m_1 = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}$; $m_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$; por tanto, $m_1 \times m_2 = -1$.

Ejemplo:

Sean los puntos $P(2{,}2)$ y $Q(6{,}4)$; determinar la recta que divide por el *punto medio* al segmento PQ y es perpendicular a este, y la recta que contiene los puntos P y Q.

Solución:

a) Recta perpendicular a PQ.

$$y = -\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}x + \frac{1}{y_2 - y_1}({x_2}^2 + {y_2}^2 - {x_1}^2 - {y_1}^2).$$

$$y = -\frac{6-2}{4-2}x + \frac{(6^2 + 4^2 - 2^2 - 2^2)}{4-2} \Rightarrow y = -2x + 2.$$

Entonces, la recta que divide por el punto medio al segmento PQ y es perpendicular a este, es:

$y = -2x + 2.$

b) Recta que contiene los puntos P y Q.

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1).$$

$$y - 2 = \left(\frac{4-2}{6-2}\right)(x - 2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 2) + 2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Por lo tanto, la recta que contiene los puntos P y Q tiene la siguiente ecuación lineal:

$$y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Observe que la Pendiente de la recta que determina la ecuación del literal a) es $m_1 = -2$, y la que corresponde al literal b) es $m_2 = \frac{1}{2}$; por lo tanto, $m_1 \times m_2 = (-2) \times \frac{1}{2} = -1$, lo cual confirma que, efectivamente, las dos rectas son perpendiculares.

2.3.1. Definición

Toda recta $y = k$ es paralela al eje x; en particular, la recta $y = 0$ representa al eje de las abscisas que, en general se denomina eje x. A su vez, toda recta $x = k$ es paralela al eje de las ordenadas; en particular, $x = 0$ representa al eje y.

Al estudiar la recta como un lugar geométrico definido por dos puntos, se llegó a la ecuación
$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$ que se puede escribir como la solución del siguiente determinante:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En general, la ecuación $Ax + By + C = 0$ se denomina *Ecuación General* de la recta, que se puede llevar a la forma que se indica en seguida, denominada *Ecuación Simétrica* de la recta:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Esta ecuación determina los puntos de intersección de la recta con los ejes coordenados, a saber: $A(a, 0)$ y $B(0, b)$.

Ejemplo:

La ecuación $2x + 3y - 12 = 0$, tiene la siguiente expresión simétrica:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1.$$

La misma ecuación se puede transformar en la expresión $y = -\frac{2}{3}x + 4$, que corresponde a la ecuación pendiente-intercepto.

2.3.2 Ecuación normal de la recta

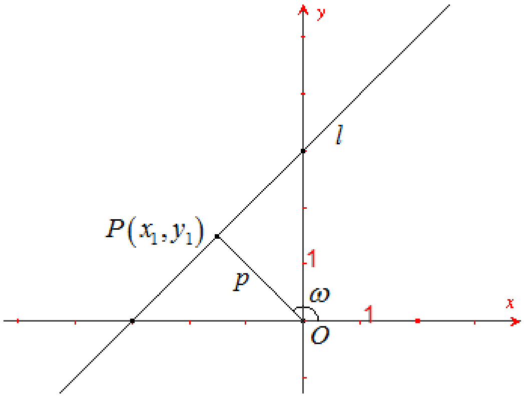


Figura 8. Ecuación de la normal a una recta

La Ecuación Normal de la Recta (ver Figura 8), también llamada de *Hesse*, es:

$$xCos\omega + ySen\omega - p = 0.$$

Donde, p es el valor positivo de la distancia del origen a la recta y ω es el ángulo medido desde la parte positiva del eje x al segmento p, perpendicular a la recta desde el origen.

De la ecuación general $Ax + By + C = 0$, al dividir por $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$ se obtiene:

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$$

Es suficiente hacer $Cos\omega = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, sen\ w = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$ para obtener la *Ecuación Normal de la Recta.*

Vale anotar que, la escogencia del signo de los radicales depende de la posición de la recta.

Ejemplo:

Determinar la ecuación normal a la recta $3x - 4y + 7 = 0 \quad (1)$

Solución:

$$\pm\sqrt{A^2 + B^2} = \pm\sqrt{3^2 + 4^2} = \pm\sqrt{25} = \pm 5.$$

Se toma el signo negativo (-5) porque la recta tiene pendiente positiva, pues los coeficientes A y B tienen signos contrarios en la ecuación general, por lo cual, la normal tiene pendiente negativa.

Al dividir la ecuación (1) por -5, se obtiene: $Cos\omega = -\frac{3}{5}$, $Sen\omega = \frac{4}{5}$ y $p = \frac{7}{5}$.

De modo que, la ecuación normal de la recta de la forma $xCos\omega + ySen\omega - p = 0$, es:

$$x\left(-\frac{3}{5}\right) + y\left(\frac{4}{5}\right) - \frac{7}{5} = 0.$$

2.3.3. Distancia de un punto a una recta

Dados el punto $P(x_1, y_1)$ y la recta $Ax + By + C = 0$, entonces, la distancia del punto a la recta está determinada por la expresión:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Ejemplo:

Determinar la distancia de $P(3, -5)$ a la recta $3x + 5y - 10 = 0$.

Solución:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|9 - 25 - 10|}{\sqrt{34}} = \frac{13\sqrt{34}}{17} \text{ unidades.}$$

2.3.4. Ángulo entre dos rectas

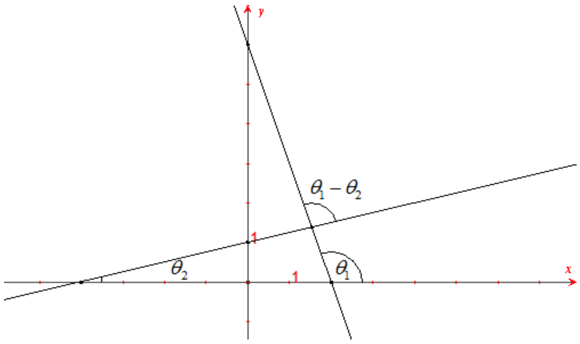


Figura 9. Ángulo entre dos rectas

A partir de la identidad trigonométrica:

$$tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{tan(\theta_1) - tan(\theta_2)}{1 + tan(\theta_1)tan(\theta_2)},$$

se obtiene que el ángulo θ formado por dos rectas (ver Figura 9) está determinado por la expresión,

$$tan(\theta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

De aquí se obtiene que,

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right).$$

Ejemplo:

Determinar el ángulo formado por las rectas $y = -3x + 2,\ y = \frac{1}{2}x - 5$.

Solución:

$$m_1 = -3;\ m_2 = \frac{1}{2}.$$

$$\theta = arc\ tan\left(\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right) = arc\ tan\left(\frac{-3 - \frac{1}{2}}{1 + (-3)\left(\frac{1}{2}\right)}\right) = arc\ tan(7).$$

Por lo tanto, $\theta \approx 81^0 51''$.

Conviene recordar que si $m_1 \times m_2 = -1$; es decir, si $1 + m_1 m_2 = 0$, las rectas son perpendiculares, que equivale a decir que, $\theta = \frac{\pi}{2}$. Por lo tanto, en este caso las rectas no son perpendiculares.

2.3.5. Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente (ver Figura 10).

Sean dos rectas, dadas en su forma general:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \text{ y } A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Si tienen la misma pendiente, entones, $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

Si, además se cumple que, $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, entonces, las dos rectas coinciden.

En cambio, si ocurre que, $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, las dos rectas son diferentes y coinciden en un punto.

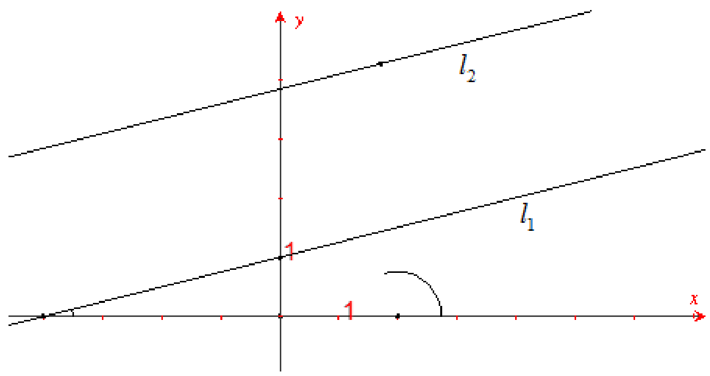


Figura 10. Posiciones relativas de la recta-el paralelismo

Determinar el punto de corte entre dos rectas no paralelas implica resolver el sistema de ecuaciones lineales $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$, $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Por ejemplo, el punto $P(2,3)$ es el punto de concurrencia de las rectas $4x - y - 7 = 0$, $3x + 2y - 1 = 0$.

Existen infinitas rectas paralelas a otra y desde el contexto algebraico, deben tener la misma pendiente; todo ese conjunto de rectas, constituyen una familia que conforman la familia de rectas paralelas. Asimismo, infinitas rectas que atraviesan un mismo punto, forman la familia de las rectas por un punto; si $P(x_1, y_1)$ es el punto, la familia se describe con la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Por ejemplo, las rectas $y = kx$ para todos los innumerables k reales, constituyen la familia de rectas por el origen; por su parte, la familia de rectas paralelas a la bisectriz del primer y tercer cuadrante, se representa con la ecuación $y = x + k,$ donde k es cualquier número real.

Ejemplos:

1) Determinar la ecuación de la recta que pasa por $P(2,2)$ y la suma de las coordenadas al origen es 9 (ver Figura 11).

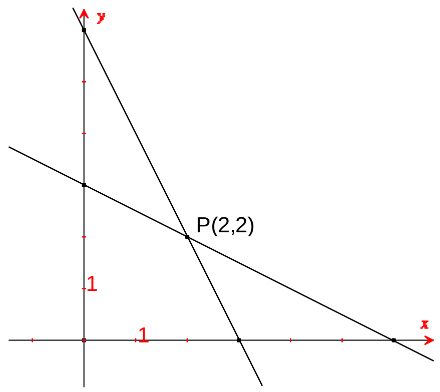


Figura 11. Aplicación de la Ecuación Simétrica de la Recta

Solución:

Al pensar que la ecuación es $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, la información del problema asegura que $\frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1$, ya que el punto P satisface su ecuación, y además, $a + b = 9$. Al remplazar $b = 9 - a$ en la primera ecuación, las dos ecuaciones configuran un sistema no lineal que deviene en la ecuación $a^2 - 9a + 18 = 0$.

Observe que, cuando $a = 3, b = 6$; y si $a = 6, b = 3$. Esto indica que las rectas $y = -2x + 6$; $y = -\frac{1}{2}x + 3$ corresponden a la solución del problema.

2) Determinar el lugar geométrico que describe un punto $M(x, y)$ tal que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a los puntos $A(-2,3)$ y $B(5,-1)$ es 4.

Solución:

El problema plantea la ecuación $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 - (x - 5)^2 - (y + 1)^2 = 4$, que se simplifica en la ecuación de la recta $14x - 8y - 17 = 0$.

3) Un punto fijo $P(a, b)$ biseca al segmento de recta determinado por las intersecciones de esta con los ejes coordenados. Determinar la ecuación de la recta (ver Figura 12).

Solución:

El Teorema de Tales asegura que los segmentos determinados por una secante a un conjunto de paralelas son proporcionales; este hecho determina que sean semejantes los triángulos BOA, $BP''P$ y $PP'A$; y dado que, AB mide el doble del lado correspondiente de los triángulos pequeños, de inmediato se tiene que $\alpha = 2a$ y $\beta = 2b$, con lo cual, la ecuación de la recta es:

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1.$$

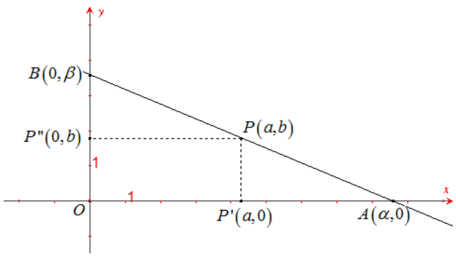


Figura 12. Aplicación del teorema de Tales

2.4 LA CIRCUNFERENCIA

2.4.1 Definición

Una circunferencia es el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve de manera tal que, su distancia a un punto fijo del plano es siempre la misma. El punto fijo es el centro de la circunferencia.

De la definición se obtiene la ecuación $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, donde el punto $C(a,b)$ es el centro de la curva, y $r > 0$ es el radio de la circunferencia. Así pues, una circunferencia queda determinada por su *centro* y su *radio*.

Ejemplo:

Determinar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P(-3,0)$, $Q(6,1)$ y $R(2,5)$.

Solución:

La Figura 13 corresponde a la circunferencia que pasa por los tres puntos indicados P, Q y R

Teniendo en cuenta que, el circuncírculo o excírculo, es la circunferencia que pasa por los tres vértices de un triángulo y que su centro es el punto donde concurren sus mediatrices, se tiene que, la ecuación correspondiente es:

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{41}{2}.$$

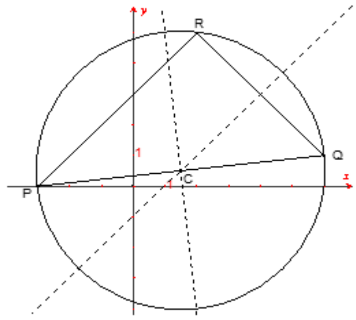


Figura 13. Circunferencia conocidos tres puntos. Fuente: elaboración propia

2.4.2 Problemas relacionados con la circunferencia

1) Todo triángulo inscrito a una semicircunferencia es rectángulo (ver Figura 14).

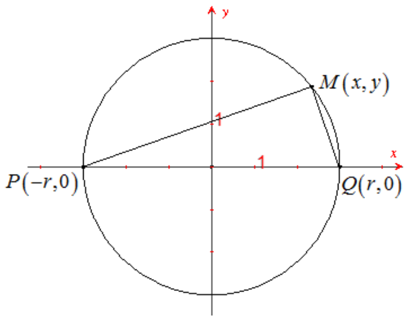


Figura 14. Triángulo inscrito en una circunferencia

Solución:

Si se toma la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ y un punto cualquiera $M(x, y)$ de la misma, el problema no pierde generalidad.

Las pendientes de los segmentos PM y QM son:

$m_1 = \dfrac{y}{x+r}$ y $m_2 = \dfrac{y}{x-r}$; y su producto es: $m_1 m_2 = \dfrac{y^2}{x^2 - r^2} = -1$.

Esto indica que los segmentos PM y QM son perpendiculares en el punto M; por lo cual, el triángulo PMQ es rectángulo.

2) Determinar el lugar geométrico de los puntos cuya suma de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos es constante.

Solución:

Al tomar como puntos fijos $O(0,0)$ y $A(2a, 0)$ y la suma constante r, la condición del problema produce la ecuación $x^2 + y^2 + (x - 2a)^2 + y^2 = r$, que corresponde a la circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = r - 2a^2$ siempre que $r \geq 2a^2$ (ver Figura 15).

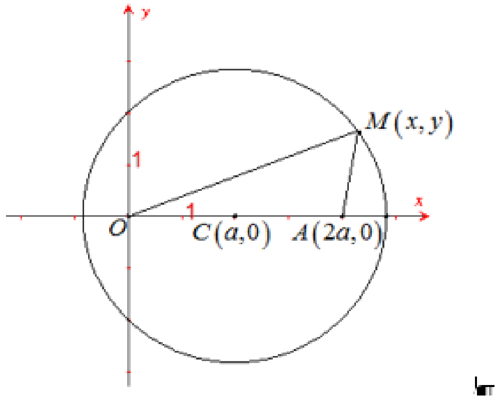


Figura 15. Lugar geométrico cuya suma de cuadrados de distancias a dos puntos fijos es constante.

2.4.3 Tangente en un punto de la circunferencia

En cualquier curva, dado un punto T de la misma, la recta perpendicular a la tangente en ese punto se llama Recta Normal. En una circunferencia, por ejemplo, la recta radial coincide con la normal a la tangente. En particular, la tangente a la circunferencia y la recta radial son perpendiculares, y por ello, es suficiente utilizar la ecuación $y = m_2(x - x_1) + y_1$, con $T(x_1, y_1)$ y m_1 la pendiente de la recta radial tal que $m_{1\times}m_2 = -1$.

Por ejemplo, en la circunferencia $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 10$ se escoge el punto $T(-3{,}4)$, la pendiente del segmento radial es $m_1 = -3$ y con ello se encuentra que la recta tangente que se busca tiene por ecuación $x - 3y + 15 = 0$ (ver Figura 16).

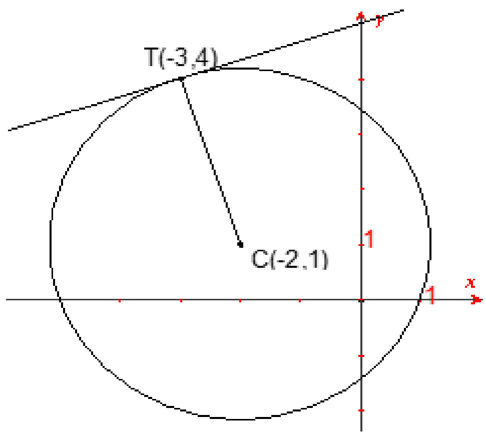


Figura 16. Tangente en un punto de la circunferencia

2.4.4 Ecuación de la tangente a la circunferencia desde un punto exterior

Para la circunferencia $(x-5)^2 + (y-2)^2 = 5$, se ha tomado el punto $P(-1{,}3)$, exterior a ella; determinar las rectas tangentes a la misma.

Estas rectas se toman de la forma $y = mx + b$ y deben satisfacer las ecuaciones de las rectas y de la circunferencia; por ello, $b = m + 3$; por lo tanto, las rectas son $y = m(x+1) + 3$.

En el punto de tangencia, la distancia del centro de la circunferencia a la recta es $\sqrt{5}$; por lo tanto, la ecuación correspondiente es: $31m^2 + 12m - 4 = 0$ (ver Figura 17).

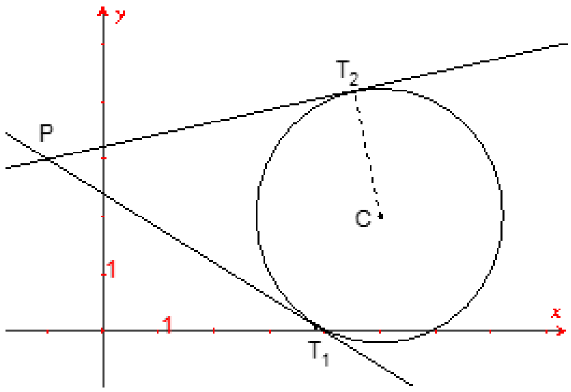


Figura 17. Tangente a una circunferencia desde un puto exterior

Las soluciones de la ecuación, son: $m_1 = -\frac{6+4\sqrt{10}}{31}, m_2 = \frac{4\sqrt{10}-6}{31}$ y las rectas tangentes tienen las siguientes ecuaciones:

$$y = -\frac{6 + 4\sqrt{10}}{31}x + \frac{87 - 4\sqrt{10}}{31}; y = \frac{4\sqrt{10} - 6}{31}x + \frac{4\sqrt{10} + 87}{31}.$$

2.5 LA PARÁBOLA

2.5.1 Definición

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano tal que, su distancia a una recta llamada *directriz*, siempre es igual a su distancia respecto de un punto fijo llamado *foco*. El punto medio entre la directriz y el foco se llama vértice de la parábola, y es un punto de la parábola (ver Figura 18).

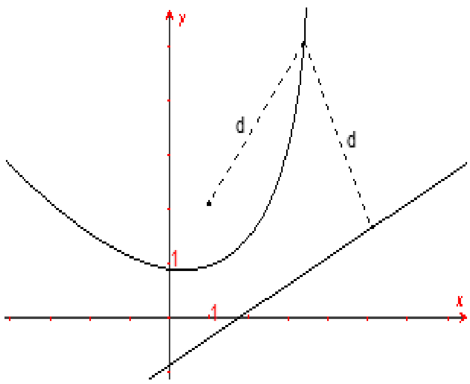


Figura 18. Parábola con identificación de puntos especiales

Si la directriz es paralela al eje y, suponga que $x = -p$, el foco es $F(p, 0)$; entonces, el requisito de distancia establecido determina la ecuación: $y^2 = 4px$.

Si la *directriz* es paralela al eje x, suponga que $y = -p$, el foco es $F(0, p)$; entonces se llega a la ecuación: $x^2 = 4py$.

La paralela a la directriz por el vértice, se denomina eje de la parábola.

Las siguientes ecuaciones representan la misma parábola, la cual está desplazada al punto $V(a, b)$ (ver Figura 19).

$$(x-a)^2 = 4p(y-b);\ (y-b)^2 = 4p(x-a).$$

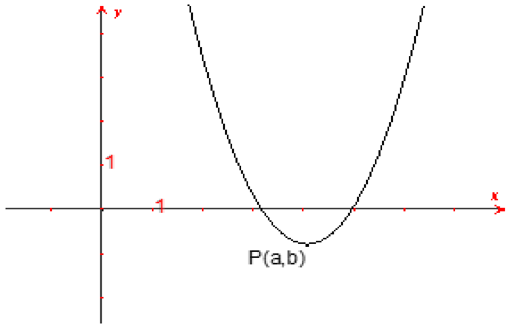


Figura 19. Parábola con desplazamiento

Los elementos esenciales de la parábola $(x-a)^2 = 4p(y-b)$, son los siguientes:

- Ecuación del eje: $x = a$.
- Vértice: $V(a, b)$.
- Lado recto, definido como el segmento paralelo a la directriz, cuyo punto medio es el foco y con extremos en la parábola: mide $4p$.
- Foco: $F(a, b+p)$.
- Ecuación de la directriz: $y = b - p$.
- Ecuación de la tangente en V: $y = b$.

De forma análoga, se consiguen los elementos de una parábola con directriz paralela al eje de las ordenadas.

Ejemplo:

Determinar los elementos descritos anteriormente de la parábola $x^2 = 8y + 2x - 33$.

Solución:

La forma canónica de la parábola $x^2 = 8y + 2x - 33$, es $(x-1)^2 = 4 \times 2(y-4)$.

De aquí se tiene lo siguiente: vértice: $V(1,4)$; foco: $F(1,6)$; lado recto: mide 8 unidades; directriz: $y = 2$; tangente en el vértice: y=4.

2.5.2 Problemas relacionados con parábolas

1) Sean la parábola $x^2 = 4py$; P un punto cualquiera, cuyas coordenadas son $P(x_1, y_1)$. Entonces, la ecuación de la recta tangente a dicha parábola en el punto dado, está dada por:

$y = \frac{x_1}{p}(x - x_1) + y_1.$

Ejemplo:

La tangente en $P(-1{,}1)$ de la parábola $y = x^2$ es $y = -2x - 1$.

2) Tangente a una parábola desde un punto exterior a ella.

Ejemplo:

Desde el punto $P(3, -3)$, trazar las dos tangentes a la parábola (ver Figura 20):

$x^2 - 8x - 4y + 28 = 0 \quad (1).$

Solución:

La Familia de rectas que pasa por P corresponden a la ecuación:

$y = m(x - 3) - 3 \quad (2)$

Reemplazando (2) en (1) se obtiene la ecuación:

$x^2 - 8x - 4(m(x - 3) - 3) + 28 = 0$

Al resolver para x esta ecuación, se encuentra el discriminante $m^2 + m - 6$, el cual, para que haya tangente, debe ser cero; es decir:

$m^2 + m - 6 = 0 \quad (3).$

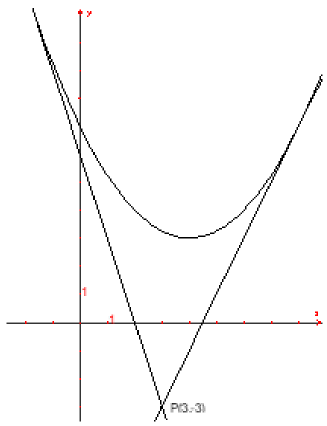


Figura 20. Tangentes a la parábola

Al resolver la ecuación (3), se obtiene:

$m_1 = 2 \;\; y \;\; m_2 = -3.$

Por tanto, las rectan tangentes a la parábola son:

$y = 2x - 9; \;\; y = -3x + 6.$

2.6 LA ELIPSE

2.6.1 Definición

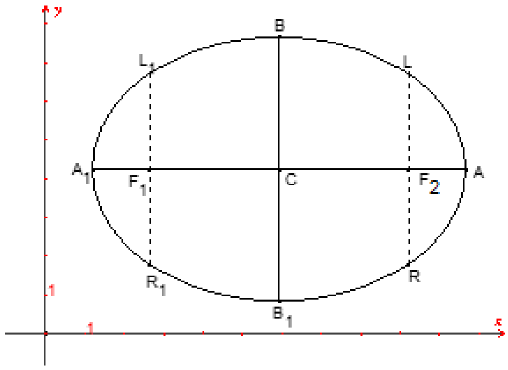


Figura 21. Elipse con eje mayor paralelo al eje de abscisas

La Elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de manera tal que, la suma de sus distancias a dos puntos fijos llamados Focos del mismo plano, es constante. Esta constante siempre es mayor que la distancia entre los Focos (ver Figura 21).

Para el caso en que $a > b$ y el eje mayor sea paralelo al eje de las abscisas, la definición de la curva permite llegar a la *Ecuación Canónica* de la elipse:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1.$$

De aquí se obtienen los siguientes elementos:

- Semieje mayor: $a = CA$.
- Semieje menor: $b = CB$.
- Semi eje focal: $c = CF$.
- Ecuación del eje focal: $y = \beta$.
- Ecuación de eje menor: $x = \alpha$.
- Centro de la elipse: $C(\alpha, \beta)$.
- Excentricidad de la curva: $e = \frac{c}{a} < 1$.
- Relación pitagórica: $a^2 = b^2 + c^2$.
- Focos de la elipse: $F_1(\alpha - c, \beta)$ y $F_2(\alpha + c, \beta)$.
- Lado recto: es cualquiera de los segmentos LR o L_1R_1 y su valor es, $\frac{2b^2}{a}$.

De forma análoga se encuentran los elementos de una elipse cuando el eje mayor es paralelo al eje de las ordenadas.

Ejemplo:

Determinar algunos elementos de la siguiente elipse:

$$9x^2 + 25y^2 - 36x + 150y + 36 = 0.$$

Solución:

La *Ecuación Canónica* correspondiente es:

$$\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y+3)^2}{3^2}=1.$$

- Eje focal: $y=-3$.
- Eje menor: $x=2$.
- Centro: $C(2,-3)$.
- Excentricidad es $e=\frac{4}{5}$.
- Focos: $F_1(6,-3)$; $F_2(-2,-3)$.

2.6.2 Algunos problemas relacionados con elipses

1) *Tangente a la elipse por un punto $T(x_1,y_1)$ de la elipse.*

   Sea la elipse de ecuación canónica:

   $$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1.$$

   La tangente en $T(x_1,y_1)$ se determina con la fórmula:

   $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{-b^2(x_1-\alpha)}{a^2(y_1-\beta)}.$$

   Si la ecuación de la elipse se presenta en la forma general:

   $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

   entonces, la ecuación de la tangente en el punto $T(x_1,y_1)$ está dada por:

   $$\frac{y-y_1}{x-x_1}=-\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}.$$

2) *Tangente a la elipse por un punto P exterior a ella*

   Ejemplo:

   Desde el punto $P(9,-4)$, determinar las tangentes a la elipse:

   $$2x^2+3y^2=30 \quad (1)$$

   Solución:

   De forma similar a la parábola, la familia de rectas que pasa por P tiene la siguiente ecuación:

   $$y=mx-9m-4 \quad (2)$$

   Reemplazando (2) en (1), se obtiene la siguiente ecuación:

   $$2x^2+3(mx-9m-4)^2=30 \quad (3)$$

Al desarrollar el binomio de la ecuación (3), simplificar términos semejantes y resolver para x la expresión resultante, se encuentra el discriminante:

$$11m^2 + 12m + 1 = 0 \quad (4)$$

Las raíces de la ecuación (4), son:

$$m_1 = -\frac{1}{11};\ m_2 = -1.$$

Por tanto, las rectas tangentes pedidas, son las siguientes:

$$y = -\frac{1}{11}x - \frac{35}{11};\ y = -x + 5.$$

2.7. LA HIPÉRBOLA

2.7.1 Definición

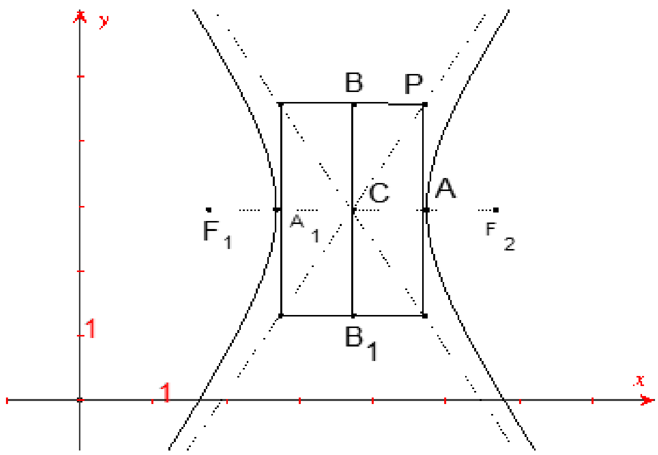


Figura 22. Hipérbola con eje real paralelo al eje de las abscisas

La hipérbola es el lugar geométrico descrito por un punto que se mueve en el plano de tal manera que, la diferencia entre las distancias a dos puntos fijos llamados focos, del mismo plano, es constante. Esta constante, siempre es positiva y menor que la distancia entre los focos (ver Figura 22).

Si los focos de la hipérbola se ubican en una recta paralela al eje x, se llega a la ecuación canónica:

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1.$$

De aquí se obtienen los siguientes elementos:

- Semieje real: $a = CA$.
- Semieje imaginario: $b = CB$.
- Semidistancia focal: $c = CP$.

- Los valores a, b y c satisfacen la relación pitagórica: $c^2 = a^2 + b^2$.
- Ecuación del eje focal o eje real: $y = \beta$.
- Ecuación del eje conjugado o eje imaginario: $x = \alpha$.
- Centro de la hipérbola: $C(\alpha, \beta)$.
- Excentricidad es $e = \frac{c}{a} > 1$.
- Focos: $F_1(\alpha - c, \beta)$ y $F_2(\alpha + c, \beta)$.
- Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$.
- Asíntotas de la ecuación:

$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = \pm\frac{b}{a}.$$

El producto de las distancias de cualquier punto de la Hipérbola a las asíntotas es constante.

De forma similar se determinan los elementos de una Hipérbola cuyo eje real sea paralelo al eje de las ordenadas.

Ejemplo:

Determinan los elementos esenciales de la siguiente hipérbola: $9x^2 - 4y^2 + 18x + 16y - 43 = 0$.

Solución:

La ecuación canónica correspondiente es:

$$\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1.$$

- Eje real: $y = 2$.
- Eje conjugado o imaginario: $x = -1$.
- Centro de la hipérbola: $C(-1,2)$.
- semieje real: es $a = 2$.
- Semieje imaginario $b = 3$.
- Valor de c: $c = \sqrt{13}$.
- Excentricidad de la curva: $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$.
- Focos: $F_1\left(-1 - \frac{\sqrt{13}}{2}, 2\right)$; $F_2\left(-1 + \frac{\sqrt{13}}{2}, 2\right)$.
- Lado recto: mide 9 unidades.
- Rectas asíntotas:

$$\frac{y-2}{x+1} = \pm\frac{3}{2}.$$

2.7.2. Problemas relacionados con hipérbolas

1) Tangente a una hipérbola por un punto $T(x_1, y_1)$ de ella.

Sea la hipérbola: $\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1.$

En el punto $T(x_1,y_1)$ la recta tangente a la anterior hipérbola, corresponde a la ecuación:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{a^2(x_1-\alpha)}{b^2(y_1-\beta)}.$$

Sea la hipérbola: $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0.$

En el punto $T(x_1,y_1)$ la recta tangente a la anterior hipérbola corresponde a la ecuación:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{2Ax_1+By_1+D}{Bx_1+2Cy_1+E}.$$

2) *Tangente a una hipérbola por un punto $P(x_1,y_1)$ fuera de ella.*

Ejemplo:

Determinar la ecuación de las tangentes a la siguiente hipérbola, desde el $P(6,5)$:

$3x^2-4y^2-12=0 \quad (1)$

Solución:

La ecuación de la familia de rectas que pasa por el punto dado es:

$y=m(x-6)+5 \quad (2)$

Reemplazando la ecuación (2) en (1), se obtiene la ecuación (3):

$3x^2-4(m(x-6)+5)^2-12=0 \quad (3)$

Al resolver para x la ecuación (3) se obtiene el discriminante: $8m^2-15m+7$.

Las raíces de la ecuación $8m^2-15m+7=0$, son: $m_1=\frac{7}{8}$; $m_2=1$.

Por lo tanto, las ecuaciones de las rectas tangentes pedidas, son:

$$y=\frac{7}{8}x-\frac{1}{4}; \quad y=x-1.$$

2.8. COORDENADAS POLARES

2.8.1 Definición

El Sistema de coordenadas polares permite determinar un punto de manera no biunívoca, pero efectiva, que suele simplificar la ecuación de una curva expresada en coordenadas rectangulares, también denominadas Cartesianas. Por ejemplo, la ecuación de la circunferencia $x^2+y^2=25$, en coordenadas polares se transforma en la expresión $r=5$.

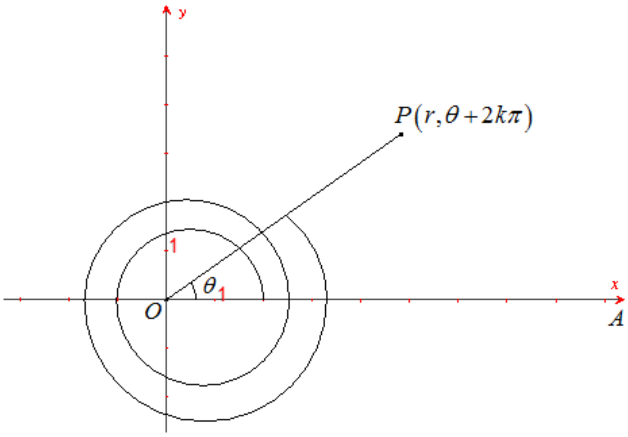


Figura 23. Coordenadas Polares

El sistema consta de un punto O, denominado *Polo* y una recta por tal punto, llamada *Eje Polar*. Las cantidades r que señala la distancia de un punto P al polo, y θ que es la amplitud del ángulo medido en radianes, formada por el eje polar y el segmento OP, constituyen las coordenadas de P en el sistema polar y se escribe $P(r,\theta)$; r se denomina Radio Vector y θ es el ángulo polar, ángulo vectorial o argumento principal de P (ver Figura 23).

El par (r,θ) está unívocamente relacionado con un punto del plano; por lo tanto, determina un único punto. Los puntos simétricos del par (r,θ), respecto del eje polar, del eje $\theta=\frac{\pi}{2}$ y del polo, se ubican en correspondencia con las fórmulas de reducción trigonométricas (ver Figura 24).

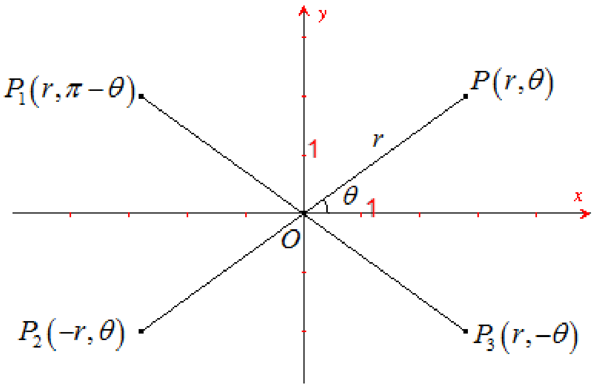


Figura 24. Coordenadas Polares y Puntos Simétricos

2.8.2. Conversión entre coordenadas polares y rectangulares

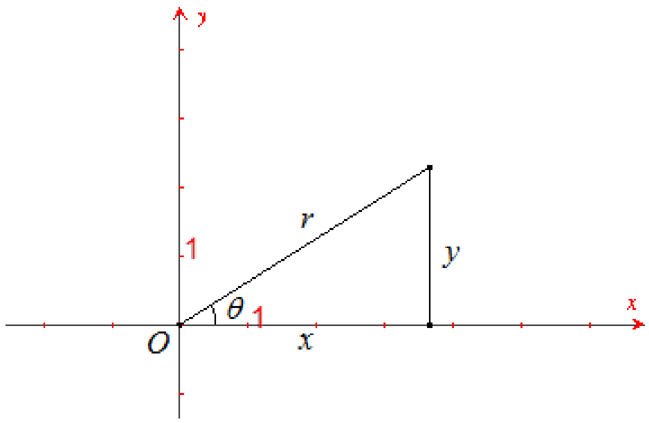


Figura 25. Relación entre coordenadas cartesianas y polares

Si el polo y el origen de coordenadas cartesianas coinciden, si el eje polar se confunde con el eje de las abscisas, y si el eje de las ordenadas se homologa con la recta $\theta = \frac{\pi}{2}$,entonces, entre la forma de representación cartesiana del punto $P(x, y)$ y su correspondiente en el sistema polar $P(r, \theta)$, por la vía de la trigonometría del triángulo, se establece el siguiente sistema de conversión de coordenadas (ver Figura 25):

$$x = rCos(\theta)\ ;\ y = rSen(\theta);\ r = \sqrt{x^2 + y^2}\ ;\ \theta = Arc\tan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Este modelo de conversión permite describir una curva en el otro sistema; de hecho, las dos curvas son iguales.

Ejemplo:

1) La curva $x^2 + y^2 - 2y = 0$ se transforma en $r^2 - 2rSen(\theta) = 0$; que se puede escribir así: $r = 2Sen(\theta)$. Las dos ecuaciones describen la misma circunferencia.

2) Determinar la ecuación cartesiana correspondiente a la ecuación polar $r = \frac{4}{1 - Cos(\theta)}$.

   Solución:

   $$r = \frac{4}{1 - Cos(\theta)} \Longrightarrow r - rCos(\theta) = 4.$$

   De donde se obtiene la expresión:

   $$\sqrt{x^2 + y^2} - x = 4 \Longrightarrow y^2 - 8x - 16 = 0.$$

   Por lo tanto, la ecuación cartesiana pedida, es la parábola: $y^2 - 8x - 16 = 0$.

3) Determinar las coordenadas cartesianas correspondientes al punto de coordenada polares $P\left(4, \frac{2\pi}{3}\right)$.

Solución:

$$r = 4\,; \quad \theta = \frac{2\pi}{3}.$$

$$x = rcos(\theta) = 4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) = -2;\ y = rsen(\theta) = 4\,\text{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\sqrt{3}.$$

Por lo tanto, el punto P en coordenadas cartesianas corresponde a $P\left(-2{,}2\sqrt{3}\right)$.

4) Determinar las coordenadas polares del punto de coordenadas cartesianas $P(3{,}4)$.

Solución:

$$x = 3\,; y = 4;\ x = rcos(\theta); y = rsen(\theta);\ r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right).$$

Por lo tanto, el punto P tiene las siguientes en coordenadas polares: $P\left(5, \arctan\left(\frac{4}{3}\right)\right)$.

2.8.3 Trazado de curvas en el sistema polar

Las curvas en *coordenadas polares* se describen mediante ecuaciones de la forma $r = f(\theta)$. De forma similar a lo que ocurre con las funciones en coordenadas cartesianas, también denominadas curvas rectangulares, para el trazo de curvas en coordenadas polares se requiere la ubicación de algunos puntos, entre los que se pueden contar los siguientes: $f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right), f\left(\frac{2\pi}{3}\right), f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$. Además, se debe tener en cuenta que, si su valor resulta negativo, el punto determinado es simétrico respecto del polo.

Debido a que el *Sistema Polar* es útil para describir curvas cerradas y acotadas, se debe examinar la simetría de la curva desde la ecuación que la define, con el fin identificar si se altera o no, en relación los casos que ocurren desde las fórmulas de reducción trigonométrica:

1) La curva es simétrica respecto del eje polar si la ecuación $r = f(\theta)$ no tiene cambio al remplazar el par (r, θ) por $(r, -\theta)$ o por $(-r, \pi - \theta)$.

2) La curva es simétrica respecto del eje $\theta = \frac{\pi}{2}$ si la ecuación $r = f(\theta)$ no presenta cambio al remplazar el par (r,θ) por $(r,\pi-\theta)$ o por $(-r,-\theta)$.
3) La curva es simétrica respecto del polo si la ecuación $r = f(\theta)$ no presenta cambio al remplazar el par (r,θ) por $(r,-\theta)$ o por $(-r,\pi-\theta)$.
4) La curva es simétrica respecto del eje polar si la ecuación $r = f(\theta)$ no presenta cambio al remplazar el par (r,θ) por $(r,\pi+\theta)$ o por $(-r,\theta)$.
5) Para trazar de forma adecuada la curva en coordenadas polares, se sugiere analizar los valores r, pues si solo toma valores finitos se trata de una curva cerrada y en caso contrario, la curva es abierta.

Ejemplo:

Trazar la curva $r = 4\big(1 - Sen(2\theta)\big)$.

Solución:

Dado que $-1 \leq Sen(2\theta) \leq 1$, se observa que el intervalo de variación de r es $[0,8]$; en consecuencia, se trata de una curva cerrada y acotada (ver Figura 26).

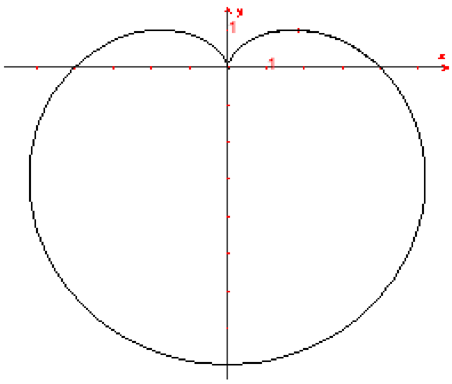


Figura 26. Representación de la Cardiode

Algunos puntos de la curva son:

$P_1(4,0)$, $P_2\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$, $P_3\left(4-2\sqrt{3},\frac{\pi}{6}\right)$, $P_4\left(4-2\sqrt{3},\frac{\pi}{3}\right)$, $P_5\left(8,\frac{3\pi}{4}\right)$.

Nótese que la ecuación no cambia al reemplazar (r,θ) por $(r,\pi-\theta)$;lo cual significa que la curva es simétrica respecto del eje $\theta = \frac{\pi}{2}$, que equivale al eje y en coordenadas rectangulares. No obstante, cualquier otro cambio del par (r,θ) modifica la ecuación. El resultado corresponde a la curva descrita en la Figura 26.

EJERCICIOS CAPÍTULO 2.

2.1 ELEMENTOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

1) Identificar la cónica correspondiente y trazar la gráfica con todo detalle:

$a)\ y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$ $\qquad$ $b)\ x^2 - 4x - 2y + 10 = 0$

$c)\ 11y^2 - 98y - 108x + 539 = 0$ $\qquad$ $d)\ x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$

$e)\ 7x^2 + 7y^2 - 34x + 48y + 103 = 0$ $\qquad$ $f)\ 36x^2 + 11y^2 - 144x - 44y - 208 = 0$

$g)\ x^2 + 5y^2 - 2x + 20y + 16 = 0$ $\qquad$ $h)\ 4x^2 - y^2 - 4x + 3y - 26 = 0$

$i)\ x^2 - 2y^2 + x + 8y - 8 = 0$

2) Para cada caso que sigue, trazar las gráficas con sus puntos de intersección:

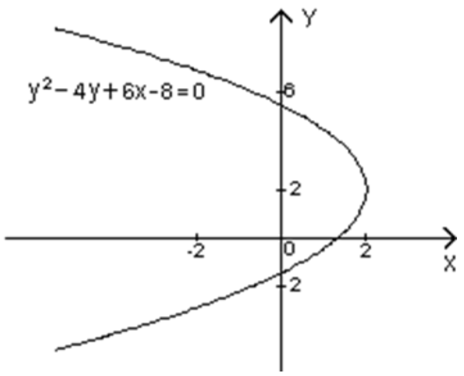
$a)\ \begin{cases} y^2 = x + 1 \\ y = x - 1 \end{cases}$ $\qquad$ $b)\ \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$ $\qquad$ $c)\ \begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$

$d)\ \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ x - y^2 = 0 \end{cases}$ $\qquad$ $e)\ \begin{cases} y^2 - 2y - 4x - 3 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases}$

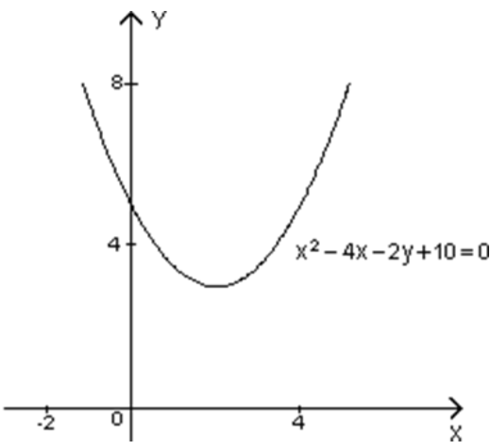
Respuestas

1)

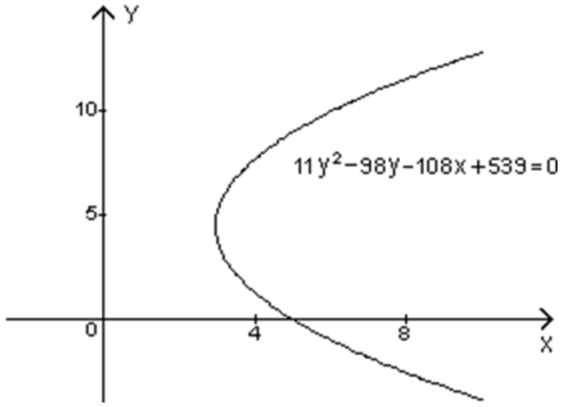
a)



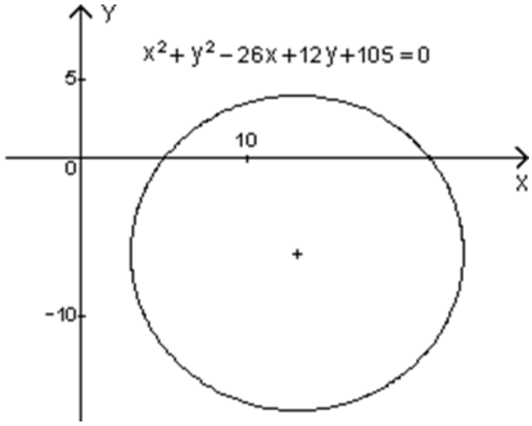
b)



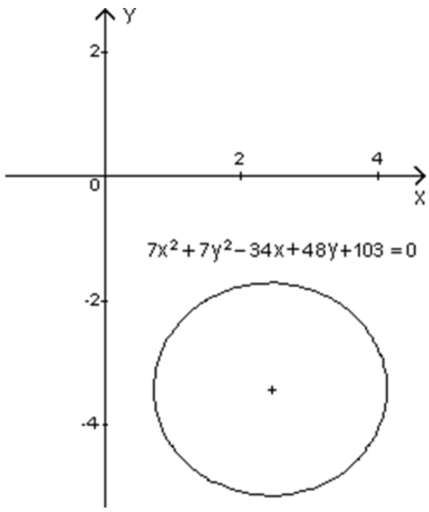
c)


Y
10
5
0
4
8
X
11y²−98y−108x+539=0

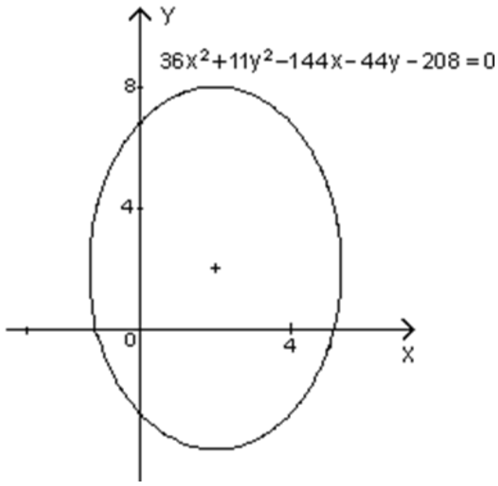
d)


Y
x²+y²−26x+12y+105=0
5
10
0
X
-10

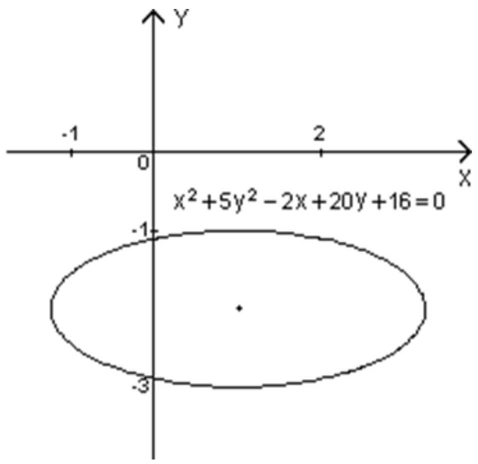
e)


Y
2
2
4
0
X
7x²+7y²−34x+48y+103=0
-2
-4

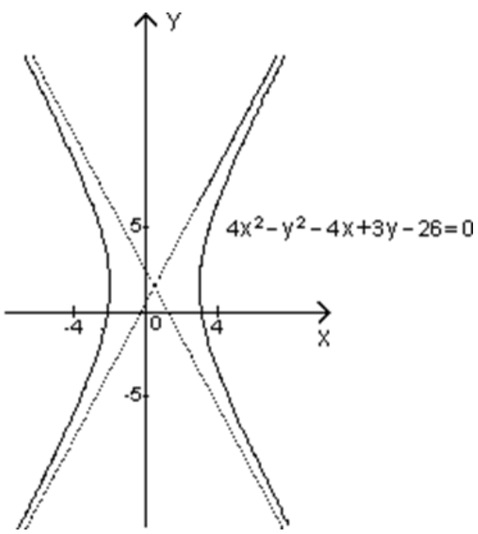
f)


Y
36x²+11y²−144x−44y−208=0
8
4
0
4
X

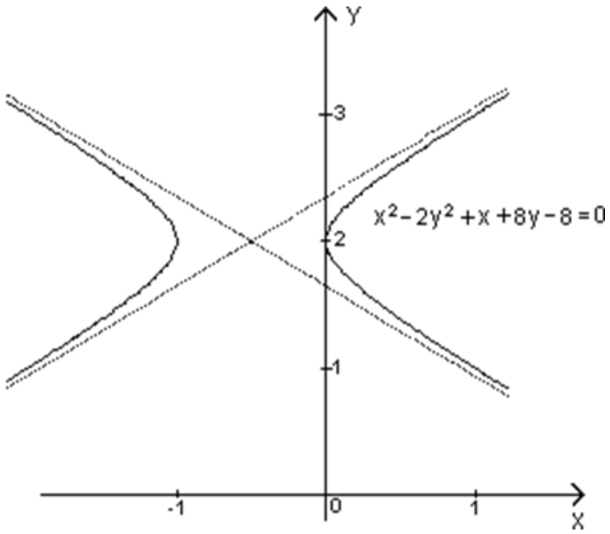
g)


Y
-1
2
0
X
x²+5y²−2x+20y+16=0
-1
-3

h)

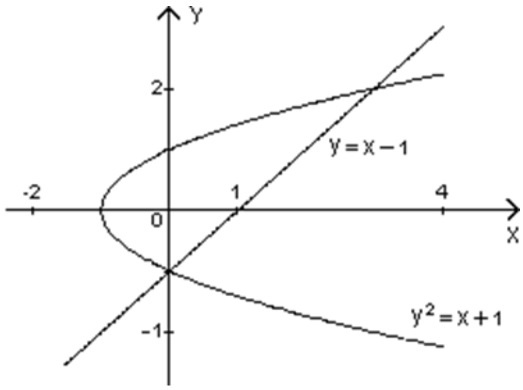

Y
5
4x²−y²−4x+3y−26=0
-4
0
4
X
-5

i)

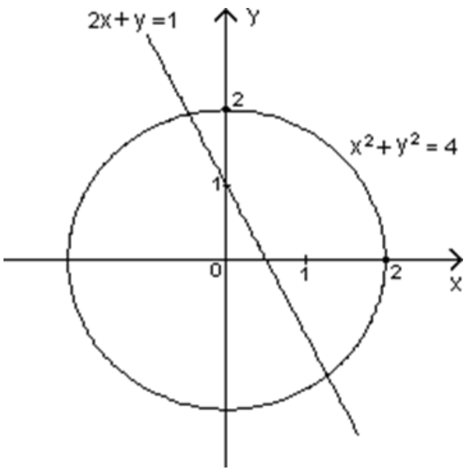


2)

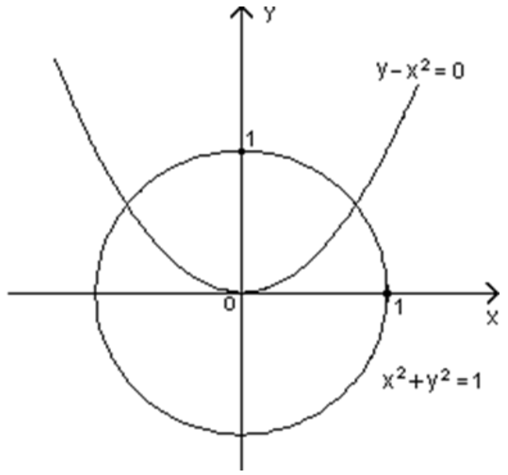
a)



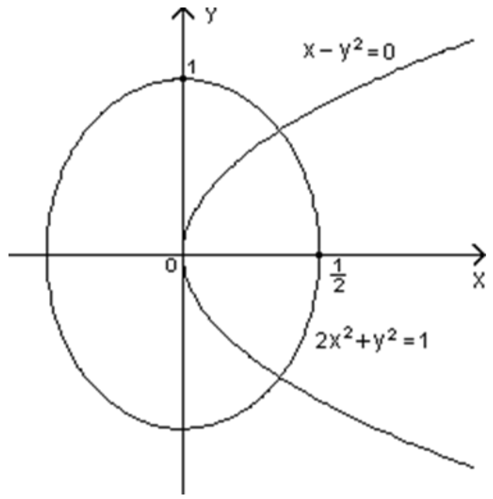
b)



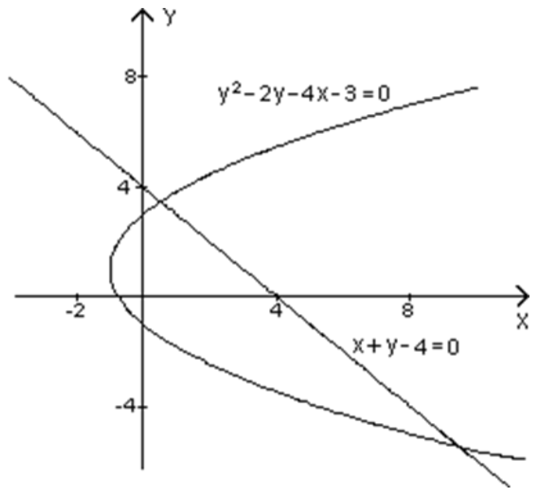
c)


y
y − x² = 0
1
0
1
x
x²+y² = 1

d)


y
x − y² = 0
1
0
1/2
x
2x²+y² = 1

e)


y
8
y²− 2y−4x− 3 = 0
4
-2
4
8
x
x+y- 4 = 0
-4

2.2. COORDENADAS POLARES

1) Determinar las coordenadas rectangulares para los puntos (r,θ) y realizar la gráfica:

   $a)\ A\left(4,\frac{\pi}{3}\right)\ ; b)\ B\left(2,\frac{7\pi}{4}\right)\ ; c)\ C\left(-2,\frac{\pi}{2}\right)$.

2) Determinar las coordenadas polares, con $r>0,\ \ 0\le\theta<2\pi$ para cada uno de los puntos definidos en coordenadas cartesianas:

   $a)\ A\left(-\sqrt{3},2\right)\ ; b)\ B(-4,-4)\ ; c)\ C\left(2,-2\sqrt{3}\right)$.

3) Establecer las ecuaciones rectangulares para las siguientes ecuaciones dadas en coordenadas polares:

   $a)\ r^2=4\cos(2\theta)\ ; b)\ r=\dfrac{1}{2+3\cos\ \theta}\ ;\ c)\ r=a\cos\theta+bsen\ \theta$.

4) Establecer las ecuaciones en coordenadas polares de las siguientes ecuaciones cartesianas: $x^2+y^2=4x\ ;\ y^2-4x=0\ ;\ x=2$.
5) Trazar las gráficas de las siguientes funciones definidas en coordenadas polares:

   $a)\ r+1=sen\ \theta;\ \ b)\ r=4\cos(3\theta)\ \ ; c)\ \ r=1+2\cos\ \theta$.

Respuestas

1) a) $(x,y)=\left(2{,}2\sqrt{3}\right)\ ;\ \ b)\ \ (x,y)=\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)\ ; c)\ \ (x,y)=(0,-2)$

2) a) $(r,\theta)=\left(\sqrt{7},arctg\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\right)\ ;\ \ b)\ (r,\theta)=\left(4\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)\ \ c;\ \ (r,\theta)=(4,\frac{5\pi}{3})$

3) a) $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$

   b) $4x^2-5y^2+6y-1=0$

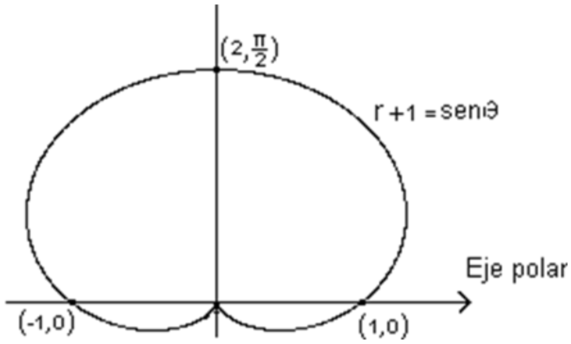
   c) $x^2+y^2=ax+by$

4) a) $r=4\cos\theta$

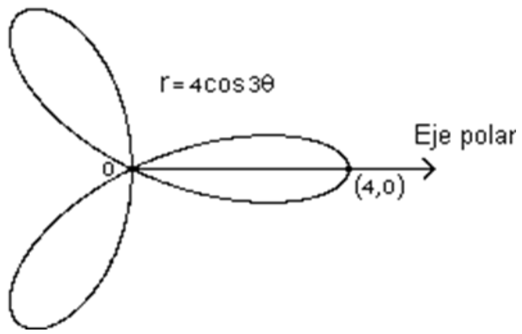
   b) $r=4\ ctg\ \theta\csc\theta$

   c) $r=2\sec\theta$

5) a)



b)



Capítulo 3:
Límites y continuidad

CAPÍTULO 3.

Límites y Continuidad

Autor: Segundo Javier Caicedo Zambrano[3]

3.1 LÍMITES

Al examinar lo que tienen en común las funciones:

$$y = 2x^2 - x + 3;\ y = \frac{sen(4x-4)}{x-1};\ y = 4\,cos(x-1);$$

y la infinidad de funciones $y = m + (4-m)x^n$ con n y m números enteros, se observa pronto que, el número 4 es el valor al que se acercan los valores de y cuando x se acerca a 1.

Llamando $y = f(x)$ a cualquiera de estas funciones, tal situación se escribe como: $\underset{x \to 1}{Lim}\, f(x) = 4$.

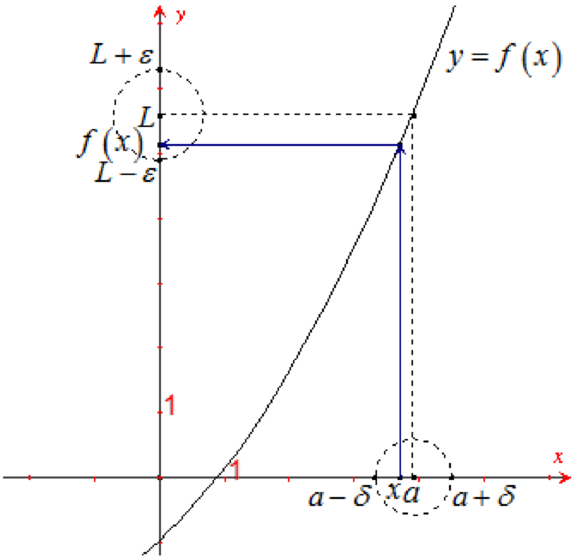


Figura 27. Representación del concepto de Límite

En general, se dice que $\underset{x \to a}{Lim}\, f(x) = L$, si para cualquier vecindad o intervalo de centro en L y radio ε, por pequeño que sea sobre el eje y, es posible encontrar una vecindad o intervalo de centro en a y de Radio $\delta_{(\varepsilon)}$ en el eje x, de tal modo que, todos los valores x de esta última vecindad, tienen sus imágenes dentro de la vecindad centrada en L y de radio ε (ver Figura 27). El valor positivo $\delta_{(\varepsilon)}$ tiene una dependencia funcional con ε.

---

[3] Profesor Adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño.

3.1.1 Definición

En términos técnicos, la situación anterior se puede resumir como sigue:

$\underset{x \to a}{Lim} f(x) = L$ si y solo si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_{(\varepsilon)} > 0$, tal que, si $|x - a| < \delta_{(\varepsilon)}$ se cumple que $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Ejemplo:

1) Probar que $\underset{x \to 2}{Lim}(3x - 1) = 5$.

   Solución:

   Se debe verificar el cumplimiento de la anterior definición.

   La relación $|f(x) - L| < \varepsilon \Longrightarrow |(3x - 1) - 5| < \varepsilon \Longrightarrow |3x - 1 - 5| < \varepsilon$

   De aquí se obtiene que, en el dominio de la función se cumple:$|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$.

   En este caso, $\delta_{(\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{3}$, lo cual significa que, siempre que se cumpla $|x - 2| < \frac{\varepsilon}{3}$,se tiene que $|3x - 1 - 5| < \varepsilon$.

   En consecuencia, se cumple que, $\underset{x \to 2}{Lim}\,(3x - 1) = 5$.

2) Verificar que $\underset{x \to 3}{Lim} x^2 = 9$.

   Solución:

   Corresponde examinar las condiciones en que se satisface la desigualdad $|x^2 - 9| < \varepsilon$, para los valores x del *dominio* de la función en una vecindad de 3.

   La desigualdad $|x^2 - 9| < \varepsilon$, se puede escribir como sigue: $|x + 3||x - 3| < \varepsilon$.

   Los valores ε y $\delta_{(\varepsilon)}$ son Infinitésimos; es decir, son valores cercanos a cero; y por ello, son menores que 1. Esto garantiza que para la vecindad de 3, la distancia hasta -3 es menor que 8. Es decir, si $|x - 3| < 1$, se garantiza que $|x + 3| < 8$; de lo cual, se tiene que, $8|x - 3| < |x + 3||x - 3| < \varepsilon$.

   En consecuencia,

   si $|x - 3| < \frac{\varepsilon}{8}$, queda garantizado que $|x^2 - 9| < \varepsilon$; por lo cual, $\underset{x \to 3}{Lim} x^2 = 9$.

3.1.2 Límites laterales

En el eje de las abscisas aparecen dos formas de acercarse a un punto a, por derecha o valores mayores, y por izquierda o valores menores. Sin embargo, puede ocurrir lo que se representa en Figura 28; esto es, que el acercamiento sobre el eje y de los valores funcionales se haga a dos puntos diferentes.

Esto se escribe así:

$$\underset{x\to a^-}{Lim}\ f(x) = L_1 \ \ y \ \ \underset{x\to a^+}{Lim}\ f(x) = L_2$$

Para el caso en que $L_1 = L_2$ se dice que el límite existe y se escribe así:

$$\underset{x\to a}{Lim}\ f(x) = L \text{ donde } L = L_1 = L_2$$

Si $L_1 \neq L_2$ el Límite no existe (ver Figura 28).

Estos Límites tomados a derecha o izquierda se llaman *Límites Laterales* de la función.

En consecuencia, el límite de una función existe en a, si existen y son iguales los límites laterales en a.

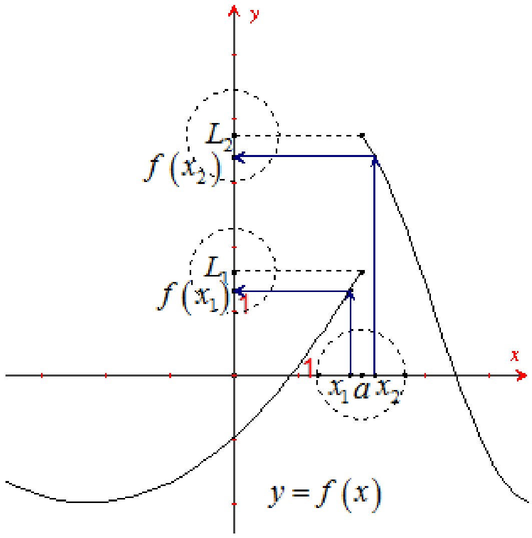


Figura 28. Representación de la inexistencia de Límite

3.1.3 Álgebra de límites

Varios de los conceptos del cálculo satisfacen propiedades lineales que se consideran en el siguiente resumen:

1) Sea f una función constante, es decir, $y = f(x) = c$; entonces, el límite en cualquier punto del dominio es la misma constante; esto es: $\underset{x\to a}{Lim}\ (c) = c$.

   Ejemplo:

   $\underset{x\to 100}{Lim}\ (-8) = -8.$

2) El límite del producto entre una constante y una función, es el producto de la constante por el límite de la función: $\underset{x\to a}{Lim}\ \big(cf(x)\big) = c\underset{x\to a}{Lim} f(x)$.

   Ejemplo:

$\underset{x \to 2}{Lim}(3x^2) = 3\underset{x \to 2}{Lim}(x^2) = 3 \times 4 = 12$, siendo que, $\underset{x \to 2}{Lim} x^2 = 4$.

En general, para calcular el límite de una función en un punto donde esté definida, se reemplaza la variable por el valor en el que se desea determinar el comportamiento de las imágenes de la función. En este caso, se desea calcular el comportamiento de la función $f(x) = 3x^2$, cuando la variable x se acerca al valor 2. Si la función no está definida en un punto donde no está definida, es necesario recurrir a operaciones algebraicas para transformar la función en una equivalente o se debe recurrir a algún tipo de acotación.

3) El Límite de una suma de funciones es la suma de los límites:

$\underset{x \to a}{Lim} f_1(x) = L_1 \ y \ \underset{x \to a}{Lim} f_2(x) = L_2$ entonces $\underset{x \to a}{Lim}[f_1(x) + f_2(x)] = L_1 + L_2$.

Ejemplo:

Sabiendo que:

$$\underset{x \to 0}{Lim}(x^3 + 2x + 3) = 3, \underset{x \to 0}{Lim} \frac{sen(x)}{x} = 1,$$

se tiene que:

$$\underset{x \to 0}{Lim}\left(x^3 + 2x + 3 + \frac{sen(x)}{x}\right) = 3 + 1 = 4.$$

4) El Límite del producto de dos funciones es el producto de sus límites:

$\underset{x \to a}{Lim}[f_1(x) f_2(x)] = L_1 L_2$ siempre que $\underset{x \to a}{Lim} f_1(x) = L_1 \ y \ \underset{x \to a}{Lim} f_2(x) = L_2$.

Ejemplo:

$$\underset{x \to 2}{Lim} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \underset{x \to 2}{Lim} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)} = \underset{x \to 2}{Lim} \frac{(x-2)}{(x-2)} \times \underset{x \to 2}{Lim} \frac{(x-1)}{(x-3)} =$$

$$\underset{x \to 2}{Lim} \frac{(x-1)}{(x-3)} = -1.$$

5) El Límite del cociente de dos funciones, es el cociente de los límites:

$\underset{x \to a}{Lim}\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right] = \frac{L_1}{L_2}$ siempre que $\underset{x \to a}{Lim} f_1(x) = L_1 \ y \ \underset{x \to a}{Lim} f_2(x) = L_2, L_2 \neq 0$.

Ejemplo:

$$\underset{x \to 1}{Lim} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{\underset{x \to 1}{Lim}(x^2 - 3x + 2)}{\underset{x \to 1}{Lim}(x^2 - 5x + 6)} = \frac{0}{2} = 0.$$

6) El límite de la potencia entera de una función, es la potencia de su límite:

$$\underset{x\to a}{Lim}\,[f(x)]^n = \left[\underset{x\to a}{Lim}\,f(x)\right]^n.$$

Ejemplo:

$$\underset{x\to 2}{Lim}\,[3x-1]^3 = \left[\underset{x\to 2}{Lim}(3x-1)\right]^3 = 125.$$

En variados casos, la propiedad se puede extender a exponentes racionales.

3.2 CONTINUIDAD DE FUNCIONES

3.2.1 Definición

La continuidad es un concepto cuya percepción exige la inexistencia de saltos y rupturas en la curva que representa a la función. La continuidad de una función en un punto exige la existencia de la imagen en ese punto y también la existencia del límite.

Cuando se cumplen dichas condiciones, se escribe:

$$\underset{x\to a}{Lim}\,f(x) = f(a).$$

Esto significa que f está definida en a, que existe $\underset{x\to a}{Lim}\,f(x)$ y que el límite en a es $f(a)$.

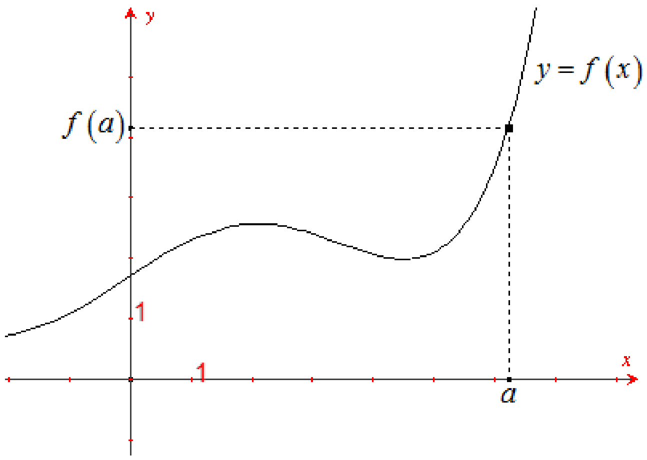


Figura 29. Representación de una función continua

La Figura 29, contiene la representación gráfica de una función continua en el punto $x = a$. De hecho, una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[x_0, x_1]$ si es continua en todos y cada uno de los puntos del intervalo.

Todas las funciones algebraicas son continuas en su dominio de definición, salvo aquellas que, siendo cocientes, presentan ceros en el denominador. En los puntos en los que el denominador se anula, suele aparecer una discontinuidad (denominada esencial) que en algunos casos es salvable (ver. Figura 30).

En correspondencia con lo anterior, las funciones polinómicas, entre las que se cuentan las Lineales y Cuadráticas, son continuas en todo su dominio de definición; en consecuencia:

1) $\underset{x \to a}{Lim}\,(mx + b) = ma + b;\ \forall\, m, a\ \in \mathbb{R}$.

2) $\underset{x \to a}{Lim}\,(Ax^2 + Bx + C) = Aa^2 + Ba + C;\ \forall\, A, B, C\ \in \mathbb{R}$.

3) $\underset{x \to a}{Lim}\,\dfrac{p(x)}{q(x)} = \dfrac{p(a)}{q(a)}$ si $q(a) \neq 0$.

Si $p(x)\ y\ q(x)$ no tienen factores comunes y $q(a) = 0$, entonces, la función $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ tiene una discontinuidad esencial (insalvable) en el punto $x = a$ (Ver Figura 30).

Ejemplos:

1) $\underset{x \to 1}{Lim}(\,x^3 - x - 1) = -1$.

2) $\underset{x \to -1}{Lim}\,\dfrac{x^3 - x - 1}{x^2 + 2} = -\dfrac{1}{3}$.

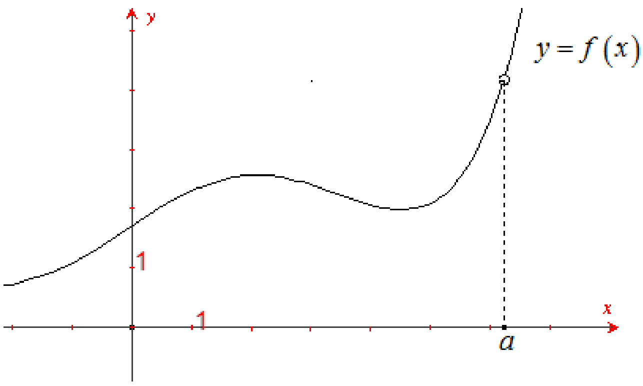


Figura 30. Inexistencia de la imagen, continuidad salvable

3.2.2 Límite especial

Un ejemplo interesante de una función racional, es el caso de $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$, para la cual la función f no está definida en $x = 0$; sin embargo,

$$\underset{x \to 0}{Lim}\,\frac{sen(x)}{x} = 1.$$

Para verificar que $\underset{x \to 0}{Lim}\,\frac{sen(x)}{x} = 1$, es suficiente observar que, como lo muestra Figura 31, se cumple que, $sen(x) \leq x \leq tan(x)$.

De esta relación, se deduce que,

$$\frac{cos(x)}{sen(x)} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{sen(x)}. \quad (1)$$

Multiplicando los tres términos de la expresión (1) por $sen(x) > 0$, se obtiene la siguiente expresión:

$$cos(x) \leq \frac{sen(x)}{x} x \leq 1 \quad (2).$$

Multiplicando los tres términos de la expresión (1) por $sen(x) < 0$, se obtiene la siguiente expresión:

$$1 \leq \frac{sen(x)}{x} x \leq cos(x) \quad (3).$$

De las expresiones (2) y (3), se observa que, dado que las funciones $y = cos(x)$, y $y = 1$ encierran a $y = \frac{sen(x)}{x}$; y además,

$$\lim_{x \to 0} cos(x) = 1 \;\; y \;\; \lim_{x \to 0} 1 = 1, \text{ se sigue que,}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1.$$

La función $f(x) = \frac{sen(x)}{x}$ no está definida para $x = 0$; sin embargo, dado que existe el límite en $x = 0$, entonces, se puede salvar la Discontinuidad al definir la función f de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

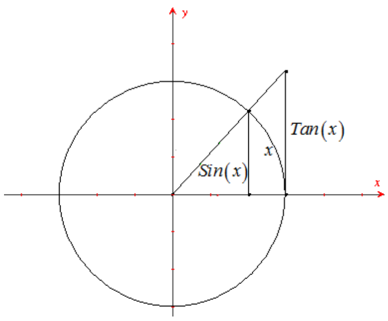
En este caso, se cumple que:

1) Existe $f(0)$.

2) $f(0) = 1$.

3) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1 = f(0)$.

En consecuencia, f es continua en $x = 0$ (ver Figura 31).



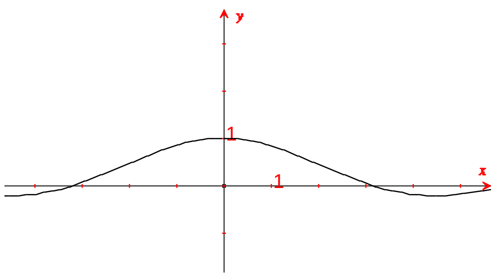


Figura 31. Un límite especial

El significado aritmético de $\underset{x\to 0}{Lim}\frac{sen(x)}{x}=1$ es importante puesto que, indica que para valores cercanos a cero, el numerador y el denominador son casi iguales.

Esto es, en una vecindad de 0 los valores $sen(x)$ y x deben confundirse en uno solo y en efecto pueden suplantarse; por ello se tiene posibilidad, sin confundirse, que por ejemplo $sen(0.000018)=0.000018$ o $sen(-0.0000025)=-0.0000025$, con lo cual, el cociente $\frac{sen(x)}{x}$ tiende a uno, es decir, es casi 1.

La indeterminación de la función $y=\frac{sen(x)}{x}$ ocurre tan solo en $x=0$, en cualquier otro punto, por muy cercando que sea a 0, la curva presenta continuidad y por ello se puede escribir que,

$$\underset{x\to 2}{Lim}\frac{sen(x)}{x}=\frac{Sen(2)}{2}\text{; en general, }\underset{x\to\alpha}{Lim}\frac{sen(x)}{x}=\frac{sen(\alpha)}{\alpha}\text{ siempre que }\alpha\neq 0.$$

3.2.3 Discontinuidad insalvable

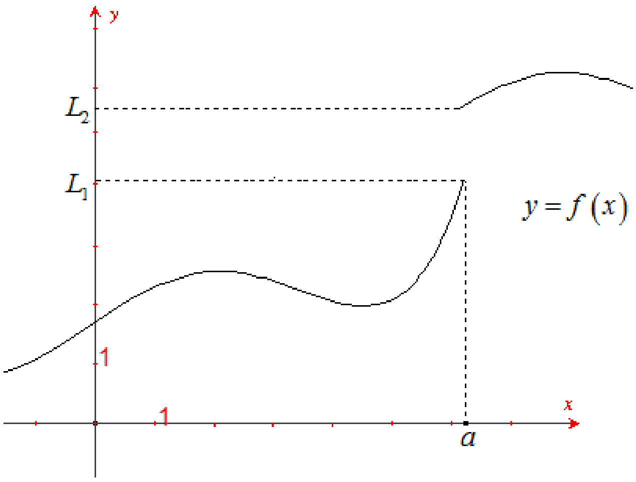


Figura 32. Representación de Inexistencia de límite

Si $\underset{x\to a^-}{Lim} f(x)=L_1$ y $\underset{x\to a^+}{Lim} f(x)=L_2$, con $L_1\neq L_2$, la función presenta un salto en $x=a$, por lo cual, la discontinuidad se torna insalvable (ver Figura 32). Tal es el caso de las funciones definidas por cocientes, en las cuales, el denominador se hace cero para determinados valores de la variable.

Por ejemplo, $y=\frac{sen(x)}{x-1}$, en cercanías de 1, se presenta la siguiente situación:

$$\underset{x\to 1^-}{Lim}\frac{sen(x)}{x-1}=-\infty\ \ y\ \ \underset{x\to 1^+}{Lim}\frac{sen(x)}{x-1}=\infty.$$

En este caso, la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la curva (ver Figura 32).

3.3 LÍMITES INFINITOS Y LÍMITES EN EL INFINITO

3.3.1 Límites Infinitos

Se dice que $\underset{x \to a}{Lim} f(x) = \infty$ si siempre que, $|x - a| < \delta$ para δ excesivamente pequeño, se encuentra que $|f(x)| > M$, para cualquier $M > 0$, por grande que sea. El valor δ depende funcionalmente de M (ver Figura 33).

Se debe recordar que $|f(x)| > M$, si y solo sí, $f(x) > M \; o \; f(x) < -M$.

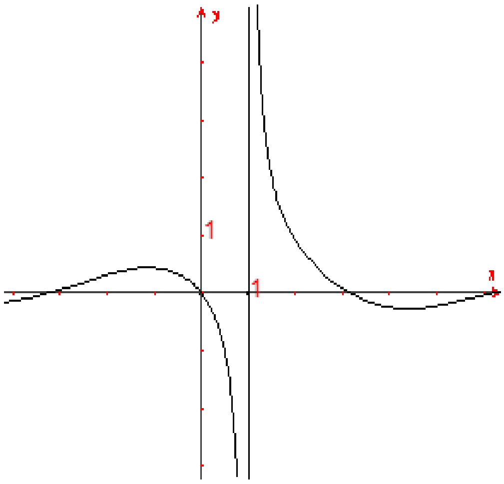


Figura 33. Representación de un límite infinito

Ejemplos:

1) $\underset{x \to 5}{Lim} \dfrac{x^2 + 3x - 1}{x - 5} = \infty.$

Observe que cuando x ce acerca a 5, por la derecha o por la izquierda, el numerador se acerca a un valor distinto de cero y el denominador se acerca a cero por valores positivos o negativos, por lo tanto, el cociente, en términos de valor absoluto, se puede hacer tan grande como se quiera.

Entonces,

$$\underset{x \to 5^+}{Lim} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 5} = +\infty, \; \underset{x \to 5^-}{Lim} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 5} = -\infty, \text{por lo cual,} \; \underset{x \to 5}{Lim} \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 5} = \infty.$$

2) $\underset{x \to -5}{Lim} \dfrac{e^x}{x + 5} = \infty.$

Se observa que, $\underset{x \to -5^+}{Lim} \dfrac{e^x}{x+5} = -\infty$, $\underset{x \to -5^-}{Lim} \dfrac{e^x}{x+5} = +\infty$, entonces, $\underset{x \to -5}{Lim} \dfrac{e^x}{x+5} = \infty$.

3) $\underset{x \to -5}{Lim} \dfrac{2+e^x}{sen(x+5)} = \infty$.

Se observa que,

$\underset{x \to -5^+}{Lim} \dfrac{2+e^x}{sen(x+5)} = +\infty$, $\underset{x \to -5^-}{Lim} \dfrac{2+e^x}{sen(x+5)} = -\infty$, entonces, $\underset{x \to -5}{Lim} \dfrac{2+e^x}{sen(x+5)} = \infty$.

3.3.2 Límites en el infinito

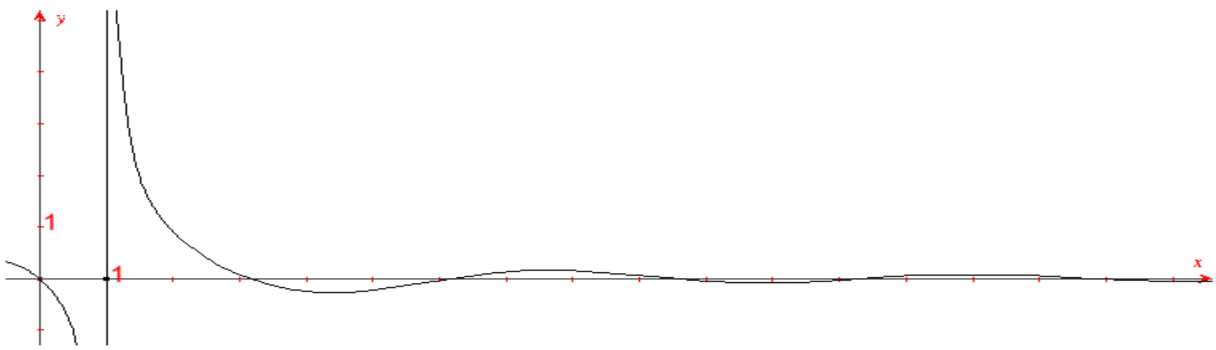


Figura 34. Representación de un límite en el infinito

La definición original del límite se cambia de forma sutil para indicar que la variable independiente se aleja del origen de coordenadas cada vez más, pero que las imágenes se acercan a un valor determinado (ver Figura 34).

Con esto se escribe que, $\underset{x \to \infty}{Lim} f(x) = L$

para indicar que, para todo $\varepsilon > 0$, por pequeño que se escoja, existe un real $N_{(\varepsilon)} > 0$, de modo que $|f(x) - L| < \varepsilon$, siempre que $|x| > N_{(\varepsilon)}$.

Ejemplo:

$\underset{x \to \infty}{Lim} \dfrac{sen(x)}{x} = 0.$

Observe que, si se desea tener $\left|\frac{sen(x)}{x}\right| < 0.001$, sabiendo que $\forall x \in \mathbb{R}$, se cumple que $|Sen(x)| \leq 1$, se tiene $\frac{|sen(x)|}{1000} \leq \frac{1}{1000}$.

En consecuencia, es suficiente tomar $|x| > 1000$ para obtener que $\left|\frac{sen(x)}{x}\right| < 0.001$.

Esto evidencia que, $\underset{x\to\infty}{Lim}\frac{sen(x)}{x} = 0$.

3.3.3 Límites en el infinito de funciones racionales

Respecto de los límites en el infinito se tiene como regla esencial la referida a una función racional.

Sean los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, definidos como sigue:

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0;\ a_n \neq 0.$$

$$q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0;\ b_n \neq 0.$$

Entonces:

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_n} & \text{si } n = m \\ \infty & \text{si } n > m \end{cases}$$

Ejemplos:

1) $\underset{x\to\infty}{Lim}\dfrac{x}{x^2+1} = 0.$

2) $\underset{x\to\infty}{Lim}\dfrac{3x^4 - 2x^2 + x - 100}{2x^4 - 1} = \dfrac{3}{2}.$

3) $\underset{x\to\infty}{Lim}\dfrac{2x^5 - 2x^3 + x - 10}{2x^3 + x - 1} = \infty.$

3.4 INFINITÉSIMOS

3.4.1 Definición

Toda función $y = \alpha(x)$ para la cual $\underset{x\to a}{Lim}\,\alpha(x) = 0$, se llama Infinitésimo en a.

Las expresiones que siguen, son *infinitésimos* en $x = a$:

$$sen(x-a)\ ;\ x^2 - a^2\ ;\ e^{x-a} - 1;\ ln\ (1 + x - a)$$

Reconocer un infinitésimo en una expresión, facilita el cálculo de límites, en el sentido que, si una función $f(x)$ se puede expresar como el producto de un infinitésimo y otro factor acotado, entonces, $f(x)$ es también un infinitésimo.

Ejemplo:

- Sea f, la función, $f(x) = (x-2)\ sen(x^2 - 3x + 1)$.

La función f es el producto del infinitésimo $(x-2)$ en 2, y de la función acotada $|Sen(x^2-3x+1)|<1$.

Por lo tanto, $\underset{x\to 2}{Lim}\,[(x-2)\,sen(x^2-3x+1)]=0$.

- Sea f la función,

$$f(x)=\frac{x^3-5x^2+7x-2}{x^2+1}.$$

Dado que:

$$f(x)=\frac{x^3-5x^2+7x-2}{x^2+1}=(x-2)\,\frac{x^2-3x+1}{x^2+1},$$

es claro que $(x-2)$ es un infinitésimo en 2, y que en una vecindad de 2 se tiene que,

$$\left|\frac{x^2-3x+1}{x^2+1}\right|<\frac{1}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\underset{x\to 2}{Lim}\,\frac{x^3-5x^2+7x-2}{x^2+1}=0$$

3.4.2 Funciones equivalentes en la vecindad de un punto y principio de sustitución

Al comparar dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ mediante su razón, se puede encontrar que:

$$\underset{x\to a}{Lim}\,\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

En este caso, se dice que las dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ son equivalentes y pueden sustituirse una por otra en el caso de aparecer como factores en cualquier expresión.

En una vecindad de a,.la función $f(x)$ puede ser equivalente a $g(x)$, y por lo tanto, se puede reemplazar la una por la otra en esa vecindad.

Si dos funciones f y g son equivalentes, se escribe, $f(x)\sim g(x)$.

Sin duda, la equivalencia de funciones facilita el cálculo de límites.

Ejemplo:

Se sabe que, $\underset{x\to 0}{Lim}\,\frac{sen(x)}{x}=1$.

Esto significa que, $sen(x)\sim x$ en una vecindad de $x=0$.

Teniendo en cuenta que, $sen(x-a)\sim(x-a)$ en una vecindad de a, se deduce que,

$$\underset{x\to a}{Lim}\,\frac{sen(x-a)}{x-a}=1.$$

En general, si $\alpha(x)$ es un infinitésimo en una vecindad de $x=a$, se cumple lo siguiente:

$sen(\alpha(x)) \sim \alpha(x)$ en la vecindad de $x = a$.

Por lo tanto, $\underset{x \to a}{Lim} \frac{sen(\alpha(x))}{\alpha(x)} = 1$.

Ejemplo:

1) Calcular el siguiente límite:

$$\underset{x \to a}{Lim} \frac{sen(x^2 - a^2)}{x^2 - a^2} = 1$$

Solución:

Se sabe que, $\underset{x \to a}{Lim} \left(sen(x^2 - a^2)\right) = 0 \; y \; \underset{x \to a}{Lim}(x^2 - a^2) = 0$.

Por lo cual, en la vecindad de x=a, se cumple que, $sen(x^2 - a^2) \sim (x^2 - a^2)$.

En consecuencia, $\underset{x \to a}{Lim} \frac{sen(x^2-a^2)}{x^2-a^2} = 1$.

2) Calcular:

$$\underset{x \to 1}{Lim} \frac{sen(5x - 5)}{x^2 - 1}.$$

Solución:

Alrededor de $x = 1$, se cumple que: $sen(5x - 5) \sim (5x - 5)$, por lo tanto, en una vecindad de $x = 1$, se puede reemplazar la función $sen(5x - 5)$ por la función $5x - 5$; en consecuencia,

$$\underset{x \to 1}{Lim} \frac{sen(5x - 5)}{x^2 - 1} = \underset{x \to 1}{Lim} \frac{(5x - 5)}{x^2 - 1} = \underset{x \to 1}{Lim} \frac{5(x - 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \underset{x \to 1}{Lim} \frac{5}{(x + 1)} = \frac{5}{2}.$$

3) Calcular:

$$\underset{x \to 0}{Lim} \frac{sen(5x)}{sen(3x)}.$$

Solución:

Alrededor de $x = 0$ se cumple que $sen(nx) \sim nx$, entonces,

$$\underset{x \to 0}{Lim} \frac{sen(5x)}{sen(3x)} = \underset{x \to 0}{Lim} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

De forma general se cumple que,

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(mx)}{sen(nx)}=\lim_{x\to 0}\frac{mx}{nx}=\frac{m}{n}.$$

3.4.3 Equivalencia de infinitésimos

Se recomienda tener presente la siguiente lista básica de infinitésimos equivalentes en la vecindad de $x=a$, donde $\alpha(x)$ es un infinitésimo:

1) $sen\big(\alpha(x)\big)\sim\alpha(x)$.

2) $1-cos\big(\alpha(x)\big)\sim\frac{[\alpha(x)]^2}{2}$.

3) $tan\big(\alpha(x)\big)\sim\alpha(x)$.

4) $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$.

5) $ln\big(1+\alpha(x)\big)\sim\alpha(x)$.

Ejemplo:

Calcular,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(2x)}{ln[(x+1)^2]sen(3x)}.$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(2x)}{ln(x+1)^2sen(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(2x)}{2\,ln(1+x)sen(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(2x)^2}{2}}{2x(3x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{4x^2}{4x(3x)}=\frac{1}{3}.$$

3.5 LÍMITE DE FUNCIONES COMPUESTAS

La composición de funciones continuas mantiene la continuidad en el dominio común de las funciones; esta característica facilita el cálculo de límites.

Las funciones logarítmicas, exponenciales, hiperbólicas, potenciales, trigonométricas, son continuas, salvo en aquellos puntos en que su Discontinuidad es insalvable; lo mismo ocurre con las funciones $tan(x)$, $cotan(x)$, $sec(x)$ y $csc(x)$, que son funciones fundamentales en la trigonometría. Aprovechando la continuidad de la función compuesta, para el cálculo de límites se pueden intercambiar los símbolos Lim y el símbolo fundamental de la función.

Ejemplo:

1) $\underset{x\to 2}{Lim}\left(ln(x^2+x+3)\right)=ln\left(\underset{x\to 2}{Lim}(x^2+x+3)\right)=ln(9).$

2) $\underset{x\to 1}{Lim}\sqrt{\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}}=\sqrt{\underset{x\to 1}{Lim}\dfrac{x^2+3x+1}{x+1}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}.$

3) $\underset{x\to 2}{Lim}\,2^{\frac{3x-2}{x-1}}=2^{\underset{x\to 2}{Lim}\frac{3x-2}{x-1}}=2^4=16.$

4) $\underset{x\to -1}{Lim}\,sen\left(\dfrac{x^3-x-3}{x-2}\right)=sen\left(\underset{x\to -1}{Lim}\dfrac{x^3-x-3}{x-2}\right)=sen(1).$

5) $\underset{x\to -1}{Lim}\,sen^2\left(\dfrac{x^3-x-3}{x-2}\right)=sen^2\left(\underset{x\to -1}{Lim}\dfrac{x^3-x-3}{x-2}\right)=sen^2(1).$

6) $\underset{x\to 3}{Lim}\left|\dfrac{sen(x+2)}{x^2-1}\right|=\left|\underset{x\to 3}{Lim}\dfrac{sen(x+2)}{x^2-1}\right|=\left|\dfrac{sen(5)}{8}\right|=\dfrac{|sen(5)|}{8}.$

7) $\underset{x\to 2}{Lim}\left(\left(\dfrac{5x-1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right)=\left(\underset{x\to 2}{Lim}\dfrac{5x-1}{x+1}\right)^{\underset{x\to 2}{Lim}\frac{x+1}{2}}=3^{\frac{3}{2}}=\sqrt{27}.$

3.6 LÍMITES QUE DEPENDEN DEL NÚMERO *e*

Los límites obedecen a formas en la arquitectura de las expresiones.

Un límite como el que sigue, se dice que tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ dado que, de forma independiente, el numerador y el denominador tienden a cero cuando x tiende a 0:

$$\underset{x\to 0}{Lim}\frac{sen(x)}{3x}.$$

En cambio, el límite que sigue, se dice que tiene la $\frac{\infty}{\infty}$ dado que, de forma independiente, el numerador y el denominador tienden a ∞ cuando x tiende a ∞:

$$\underset{x\to \infty}{Lim}\frac{x^2-3x+1}{2x^2-5}.$$

El límite que sigue tiene la forma 0^{∞}, dado que, de forma independiente: $\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{x^2-3x+1}{2x^3-5}\right)=0$; $\underset{x\to\infty}{Lim}(x+1)=\infty$:

$$\underset{x\to \infty}{Lim}\left(\frac{x^2-3x+1}{2x^3-5}\right)^{x+1}.$$

En el mismo sentido de lo indicado, el límite que aparece a continuación, tiene la forma 1^{∞}:

$$\underset{x\to\infty}{Lim}\left(\frac{x^2-3x+1}{x^2-5}\right)^{x+1}$$

En general, los límites de la forma1^{∞} dependen de e.

Es conocido que, si $n \in \mathbb{N}$, entonces,

$$\underset{n\to\infty}{Lim}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e.$$

Ahora bien,

$$\underset{x\to a}{Lim}\ \alpha(x)=0 \Longrightarrow \underset{x\to a}{Lim}\frac{1}{\alpha(x)}=\pm\infty\ \ y\ \ \underset{n\to\infty}{Lim}\frac{1}{n}=0.$$

Entonces, en general, se cumple lo siguiente:

$$\underset{x\to a}{Lim}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e\ \text{ y }\ \underset{x\to a}{Lim}\left(1-\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e^{-1}.$$

Ejemplos:

Calcular el siguiente límite:

$$\underset{x\to 2}{Lim}\,(x-1)^{\frac{1}{x-2}}.$$

Solución:

Dado que, $\underset{x\to 2}{Lim}\,(x-1)=1$ y $\underset{x\to 2}{Lim}\left(\frac{1}{x-2}\right)=\infty.$

Entonces,

$$\underset{x\to 2}{Lim}\,(x-1)^{\frac{1}{x-2}}=\underset{x\to 2}{Lim}\left(1+(x-2)\right)^{\frac{1}{x-2}}=e.$$

El cálculo de los límites de la forma 1^{∞} que dependen de e, requieren de la técnica algebraica de arreglar el *"uno"*, base de la potencia y adecuar el exponente.

Para lo primero, se necesita la ejecución de una división o una readecuación de la base; para lo segundo, se requiere multiplicar por un 1 *"útil"* o reescribir el exponente para que en ningún caso se perturbe la expresión.

Ejemplo:

Calcular los siguientes límites:

1) $\underset{x\to 3}{Lim}\,(x-2)^{\frac{2}{x-3}}.$

   Solución:

Observe que,

$$(x-2)^{\frac{2}{x-3}} = \left[\left(1+(x-3)\right)^{\frac{1}{x-3}}\right]^2 \;;\; \underset{x\longrightarrow 3}{Lim}\left(1+(x-3)\right)^{\frac{1}{x-3}} = e.$$

Por lo tanto,

$$\underset{x\longrightarrow 3}{Lim}\,(x-2)^{\frac{2}{x-3}} = \underset{x\longrightarrow 3}{Lim}\left((x-2)^{\frac{1}{x-3}}\right)^2 = e^2.$$

2) $$\underset{x\longrightarrow\infty}{Lim}\left(\frac{2x^2-x+3}{2x^2+1}\right)^{x+2}.$$

Solución:

Dado que:

$$\frac{2x^2-x+3}{2x^2+1} = 1-\frac{x-2}{2x^2+1}$$

Por la definición del Número de Euler, se tiene que,

$$e = \underset{x\longrightarrow\infty}{Lim}\left(1-\frac{x-2}{2x^2+1}\right)^{-\frac{2x^2+1}{x-2}}.$$

Por otra parte,

$$x+2 = \left(-\frac{2x^2+1}{x-2}\right)\left(-\frac{(x+2)(x-2)}{2x^2+1}\right).$$

Combinando todo lo anterior con la continuidad de las funciones compuestas, se obtiene:

$$\underset{x\longrightarrow\infty}{Lim}\left(\frac{2x^2-x+3}{2x^2+1}\right)^{x+2} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{e}}{e}.$$

3.7 ASÍNTOTAS

Asíntota es toda recta que en el infinito se acerca cada vez más una a curva. Una curva puede tener Asíntotas horizontales, verticales u oblicuas.

Para determinar (si existen) asíntotas de función $f(x)$, se considera lo siguiente:

- $y = c$ es *asíntota horizontal* si $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = c$.
- Para hallar una asíntota vertical, se consideran los valores de x para los cuales $f(x)$ no está definida.

  Si $f(x)$ no está definida en $x = a$ entonces $x = a$ es asíntota vertical.

- Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional, en la cual, el grado de $p(x)$ es mayor en una unidad que el grado de $q(x)$, entonces al dividir $p(x)$ entre $q(x)$ se obtiene:

  $f(x) = mx + b + r(x)$ donde $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$.

  De esta manera $y = mx + b$ es asíntota oblicua.

  En general $y = mx + b$ es asíntota oblicua, si:

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m \ \ y \ \ \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = b.$$

En el libro Lecciones de Cálculo Diferencial (Escobar et al., 2021), en las secciones 1.4, 1.6, 1.7 y 5.4, se encuentran variedad de ejemplos donde se estudia la existencia de asíntotas, y en caso afirmativo, se procede a su determinación.

Ejemplo:

Analizar las asíntotas de la siguiente función:

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 1}{x + 3}.$$

Solución:

Se observa que,

$$\underset{x\to\infty}{Lim} \frac{2x^2 - x + 1}{x + 3} = \infty.$$

Este hecho asegura la inexistencia de asíntotas paralelas al eje de las abscisas.

Dado que $x = -3$ es una raíz del denominador, entonces la recta $x = -3$ es una Asíntota Vertical.

Dado que,

$\underset{x\to\infty}{Lim} \frac{f(x)}{x} = 2$ y $\underset{x\to\infty}{Lim}[f(x) - 2x] = -7$, entonces, la recta $y = 2x - 7$ es una *asíntota oblicua* de la curva que la representa (ver Figura 35).

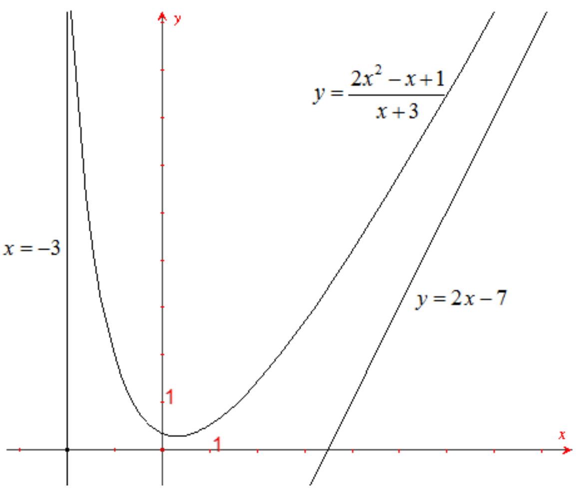


Figura 35. Asíntota de una función

EJERCICIOS CAPÍTULO 3.

3.1 LÍMITES DE FUNCIONES

1. Verificar que los siguientes límites son correctos en correspondencia con la definición del concepto de límite:

1) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)=1$ 2) $\lim\limits_{x\to 1}(4x-5)=-1$ 3) $\lim\limits_{x\to 1}4x=4$

4) $\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$ 5) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)=5$ 6) $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+1)=5$

2. Sabiendo que:

$\lim\limits_{x\to 2}(4x-5)=3$, $\lim\limits_{x\to 2}x^2=4$ y $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3)=1$, calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3}{5}; R/\dfrac{1}{5}$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4x-8); R/4$ 3) $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4x-17); R/-5$

4) $\lim\limits_{x\to 2}(5x^2); R/20$ 5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x-5}{x^2}; R/\dfrac{3}{4}$ 6) $\lim\limits_{x\to 2}[(4x-5)(x^2-3)]; R/1$

3.2 CONTINUIDAD DE FUNCIONES

1. Calcular los límites de las funciones que siguen, comprobando inicialmente su continuidad:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)$ 2) $\lim\limits_{x\to -20}(3x-5)$ 3) $\lim\limits_{x\to -4}(3x^2-5)$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}(6x^2)$

5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-x-1}{x^2+2}$ 6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-x-1}{x^3+2}$ 7) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-50}{3}$

2. Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{x^2+1}}{x^3-8}; R/+\infty$ 2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3+e^{x^2+1}}{x^2-5x+6}; R/+\infty$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3}{x^2-5x+6}; R/+\infty$ 4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3}{(x-4)^2}; R/+\infty$

5) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{3x-5}{(x+4)^2}; R-\infty$

6) $\lim\limits_{x\to -4} \dfrac{cos(3x-5)}{(x+4)^2}; R/-\infty$

7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{sen(2x^5-2x^3+x)}{x^3-1}; R/+\infty$

3. Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+1}{(x+4)^2}$

2) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3-x+1}{x^2(x+4)^2}$

3) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3-x+1}{x^2(2x+4)}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^3-x+10}{x^2(2x^3+4)}$

5) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{(3x^3-x+10)^2}{x^3(2x^3+4)}$

6) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^4-x-1}{3x^4+10x-100}$

7) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^2-x-1}{2x^4+7x-100}$.

3.3 INFINITÉSIMOS

1. Calcular los límites que siguen, argumentando que la función correspondiente es el producto de un infinitésimo por una expresión acotada:

1) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x^2-1)\,cos(2x)}{x^2+1}$

2) $\lim\limits_{x\to -1} [(x+1)\,cos(2x^2-x+6)]$

3) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3-2x^2-8x+21}{5x^2+3x-7}$

4) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x^3-2x^2-8x+21}{5x^3+3x-7}$

2. Aplicando el principio de sustitución, calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{sen(x-2)}{x^2-4}; R/\ \dfrac{1}{4}$

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{sen(x^2-4)}{x^2-4}; R/\ 1$

3) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{1-cos(x^2-4)}{x^4-16}; R/0$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tan(5x)}{tan(7x)}; R/\ \dfrac{5}{7}$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{sen^2(x)}{3\big(1-cos(x)\big)};\ R/\dfrac{2}{3}$

6) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(x^3+1)}{sen(3x^3)}; R/\frac{1}{3}$

3.4 LÍMITE DE FUNCIONES COMPUESTAS

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x \to 2} \left(\cos\left(\frac{x^2+1}{x+3} \right) \right)$; $R/\cos(1)$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \left(\ln\left(\frac{3x^2+1}{x+3} \right) \right)$; $R/0$

3) $\lim\limits_{x \to 3} \left| \frac{3x^2-2x+1}{x+2} \right|$; $R/\ \frac{22}{5}$

4) $\lim\limits_{x \to 0} \left(sen\left(\left| \frac{3x^2-2x+1}{x+2} \right| \right) \right)$; $R/sen(\frac{1}{2})$

5) $\lim\limits_{x \to 4} 3^{2x-1}$; $R/3^7$

6) $\lim\limits_{x \to \pi} [3x + \cos(2x)]$; $R/3\pi + 1$

3.5 LÍMITES QUE DEPENDEN DEL NÚMERO e

Calcular los siguientes límites:

1) $\lim\limits_{x \to 3} (x-2)^{\frac{4}{x^2-9}}$; $R/\sqrt[3]{e^2}$

2) $\lim\limits_{x \to 4} (2x-7)^{\frac{2x^2+1}{x-4}}$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-2}{x+2} \right)^{2x}$; $R/e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

4) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{3x+5}{3x-8} \right)^{2x-3}$

5) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{\frac{x+1}{x-2}}$; $R/e^0 = 1$

6) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x^2+x+5}{x^2-8} \right)^{\frac{3x^2-1}{2x}}$

3.6 ASÍNTOTAS

Estudiar la existencia de asíntotas y bosquejar la gráfica de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^3 - 6x^2$

2) $y = \frac{1-x^2}{x+3}$

3) $f(x) = \frac{6x}{(x+1)^2}$

4) $f(x) = \frac{6x}{(x+1)^2}$

5) $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{2-x}$

6) $y = \frac{2x^2-x+1}{x-2}$

Respuestas

1) $f(x) = x^3 - 6x^2$ (ver Figura 36).

- Intersecciones con los ejes: $si\ x = 0;\ \ f(x) = 0 \Longrightarrow (0,0)$ pertenece a la curva.

$f(x) = 0 \Longrightarrow x^3 - 6x^2 = 0 \Longrightarrow x^2(x-6) = 0 \Longrightarrow x = 0 \;\; y \;\; x = 6.$

Por lo tanto, (6,0) pertenece a la curva.

- Dominio de definición: por tratarse de una función polinómica, el dominio de la función son los números reales.
- Asíntotas: no tiene asíntotas verticales ni horizontales, por tratarse de una función polinómica.

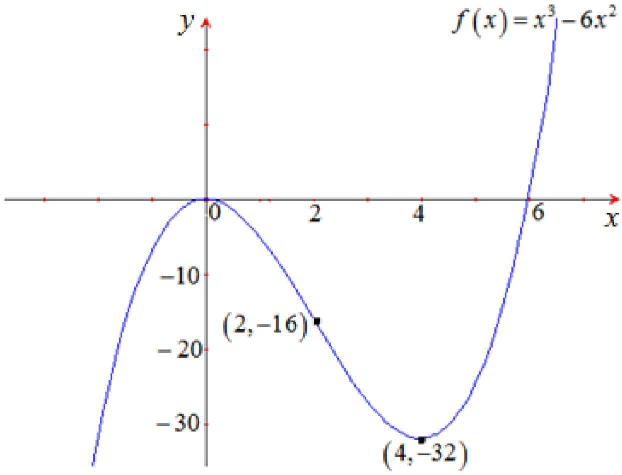


Figura 36. Representación gráfica $f(x) = x^3 - 6x^2$

3) $f(x) = \dfrac{6x}{(x+1)^2}$.

- Intersecciones con los ejes:

  Si $x = 0$, entonces, $f(x) = y = 0 \Longrightarrow (0,0)$ punto de intersección con los ejes.

  Si $x = 0$, entonces, $f(x) = y = 0$; por lo tanto, el punto (0,0) es el punto de intersección con los ejes.

- Dominio: está constituido por los reales a excepción de $x = -1$.
- Asíntotas: $x = -1$ es asíntota vertical. No tiene asíntotas oblicuas. $y = 0$ (eje x) es asíntota horizontal en las cercanías de $-\infty$ y $+\infty$ (ver Figura 37).

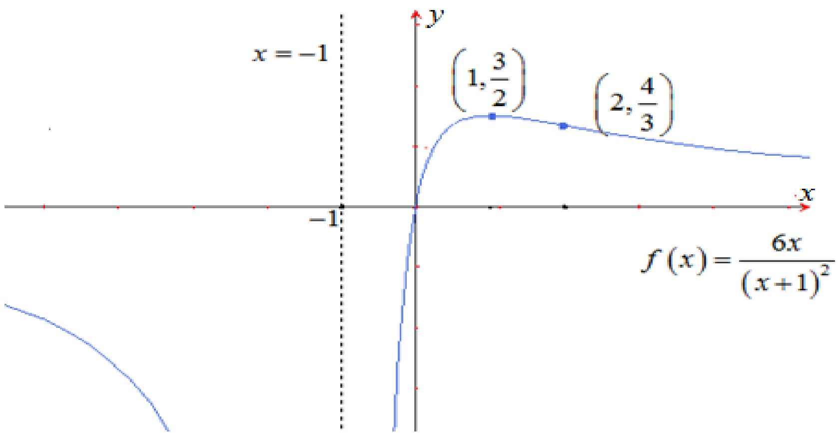


Figura 37. Representación gráfica $f(x) = \frac{6x}{(x+1)^2}$

5) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{2 - x}$.

- Intersección con los ejes:

  Si $x = 0$, entonces, $f(x) = y - 1$; por tanto, el punto $(0,1)$ es intercepto con el eje y.

- Dominio: $\mathbb{R} - \{2\}$.
- Asíntotas:

  Verticales $x = 2$.

  Oblicuas: $y = mx + b$

  $$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(2 - x)} = -1.$$

  $$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \to \infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 2}{2 - x} + x\right] = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{2}{2 - x}\right) = 0.$$

  Por lo tanto, la asíntota oblicua es: $y = x$. (ver Figura 41)

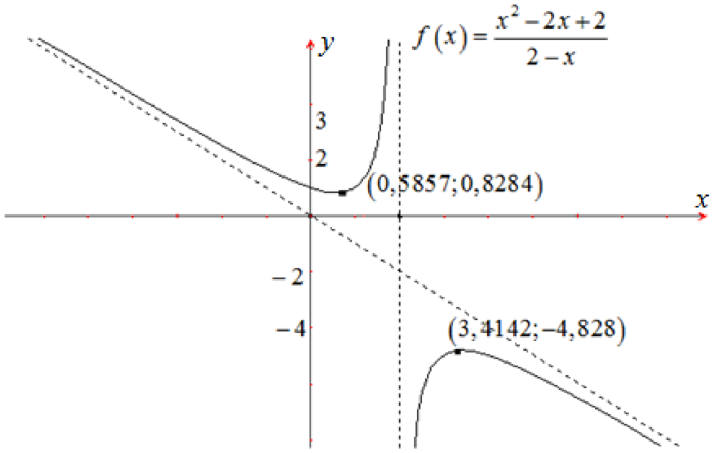


Figura 38. Representación gráfica $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2 - x}$

Capítulo 4:
Derivadas de funciones

CAPÍTULO 4.
Derivadas de Funciones

Autor: Oscar Fernando Soto Ágreda[4]

Gottfried Leibniz e Isaac Newton desarrollaron por aparte el concepto de derivada de una función; el primero, lo hizo al resolver el problema geométrico del cálculo de la *recta tangente* a una curva en un punto; y el segundo, lo hizo al resolver un problema inmerso en el mundo de la física, al encontrar la velocidad instantánea de un cuerpo que se mueve a velocidad variada.

4.1 DETERMINACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA CURVA

Sea $y = f(x)$ una función continua (ver Figura 39); para calcular la ecuación de la recta tangente en un punto arbitrario $P(x, y)$ de la curva, se construye el triángulo rectángulo PP_2P_1 de catetos h y $f(x+h) - f(x)$ sobre el que se cumple la siguiente relación:

$$Tan(\theta) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Se busca que la recta PP_1 secante a la curva, se convierta en tangente; hecho que se logra con la proximidad de P_1 hacia P, para lo cual, se requiere aproximar h a cero.

Con base en lo descrito en el párrafo anterior, se sigue que la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P está dada por la siguiente expresión:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Este límite se conoce como la derivada de $f(x)$ y se denota por $f'(x) = \frac{dy}{dx} = D_x^y$.

Vale anotar que x actúa como constante en el límite, mientras que la cantidad variable es h.

Leibniz tuvo la ocurrencia de denotar dicho límite de la siguiente manera:

$$f' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Para lo cual realizó los siguientes cambios:

$$h = \Delta x\ ;\ f(x+h) = f + \Delta f\ ;\ f(x) = f;\ f(x+h) - f(x) = \Delta f.$$

[4] Profesor Adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño.

Con esta notación, las reglas de derivación se encuentran, como se verá delante, de manera simple; en las que, se puede asegurar, por continuidad de f, que:

$\underset{\Delta x \to 0}{Lim}\, \Delta f = 0$. (ver Figura 42)

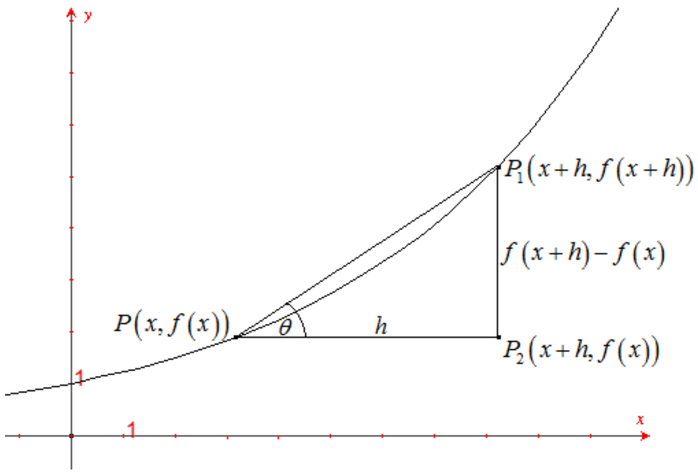


Figura 39. Representación geométrica de la derivada de una función

Ejemplo:

1) Calcular la derivada de $f(x) = x^2$.

Solución:

$$f'(x) = \underset{h \to 0}{Lim} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

$$f'(x) = \underset{h \to 0}{Lim} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \underset{h \to 0}{Lim} \frac{((x+h)+x)((x+h)-x)}{h}.$$

$$= \underset{h \to 0}{Lim} \frac{(2x+h)h}{h} = \underset{h \to 0}{Lim}\, (2x+h) = 2x.$$

2) Determinar la recta tangente a la curva $f(x) = x^2$, en el punto $P(3,9)$.

Solución:

Sabemos que $f'(x) = (x^2)' = 2x$.

Para determinar la recta tangente en el punto $P(3,9)$, se tiene que, la pendiente corresponde a evaluar $f'(x)$ en $x = 3$; es decir, $m = f'(3) = 2(3) = 6$.

Entonces, la ecuación de la recta tangente pedida es la siguiente: $y = 6(x-3) + 9$.

3) Calcular la derivada de $f(x) = x$.

Solución:

$$f'(x) = \underset{h \to 0}{Lim} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \underset{h \to 0}{Lim} \frac{h}{h} = 1.$$

4) Calcular la derivada de $f(x) = c$; c constante.

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

Esto significa que la tangente a la curva $f(x) = c$, coincide con ella en cualquier punto.

4.2 REGLAS DE DERIVACIÓN

4.2.1 Derivada de una suma

De la notación de Leibniz se sigue que,

$$(f+g)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[(f+\Delta f) + (g+\Delta g)] - (f+g)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f + \Delta g}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f' + g'.$$

Por lo tanto,

$$(f+g)' = f' + g'.$$

Con la regla $(f+g)' = f' + g'$ se está en condiciones de derivar infinitas funciones de la forma $f(x) = x^2 + c$ que corresponden a parábolas desplazadas por el eje y, cuya derivada es:

$$(x^2 + c)' = (x^2)' + (c)' = 2x.$$

De este modo, $(x^2 - 78)' = 2x$.

4.2.2 Derivada de un producto

De la notación de Leibniz, obtiene que,

$$(f\times g)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{[(f+\Delta f)\times(g+\Delta g)] - (f\times g)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f\Delta g + g\Delta f + \Delta f\times\Delta g}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \left(f\frac{\Delta f}{\Delta x} + g\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f\times\Delta g}{\Delta x} \right) = f\times g' + g\times f'.$$

Esto por cuanto, dada la continuidad de las funciones, se cumple que,

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0 \;\; y \;\; \lim_{\Delta x\to 0} \Delta g = 0.$$

De modo que,

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Para el caso de tres funciones f, g y h, se cumple lo siguiente:

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'.$$

Para el caso de la derivada de una constante por una función, se tiene que,

$$(cf)' = c'f + cf' = 0 + cf' = cf'.$$

Ejemplos:

1) $(-5x^2)' = (-5)(x^2)' = (-5)(2x) = -10x.$
2) $(x^3)' = (xx^2)' = (x)'(x^2) + x(x^2)' = x^2 + 2x^2 = 3x^2.$
3) $(x^n)' = nx^{n-1}.$
4) $(3x^5 - 4x^3 + 2x - 67)' = 15x^4 - 12x^2 + 2.$

4.2.3 Derivada de un cociente

De la notación Leibniz, se tiene lo siguiente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \underset{\Delta x \longrightarrow 0}{Lim} \frac{\frac{f + \Delta f}{g + \Delta g} - \frac{f}{g}}{\Delta x} = \underset{\Delta x \longrightarrow 0}{Lim} \frac{\frac{g\Delta f - f\Delta g}{g(g + \Delta g)}}{\Delta x} = \underset{\Delta x \longrightarrow 0}{Lim} \frac{g\frac{\Delta f}{\Delta x} - f\frac{\Delta g}{\Delta x}}{g(g + \Delta g)} = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Entonces la regla para la derivación es como sigue,

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}.$$

Esta regla posibilita extender la derivada a los casos de exponentes negativos; así,

$$(x^{-n})' = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = \frac{(1)'x^n - 1(x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

De modo que,

$$(x^{-n})' = -nx^{-n-1}.$$

Ejemplo:

$$(x^{-6})' = -6x^{-6-1} = -6x^{-7}.$$

Las funciones trascendentes, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas e hiperbólicas, satisfacen el carácter continuo para la existencia de sus derivadas, y en cercanía de algunos valores obedecen a razones o relaciones de equivalencia que se pueden aprovechar en el cálculo de límites especiales.

4.2.4 Derivada de la función exponencial

Se mencionó que si $\alpha(x)$ es un infinitésimo en *una vecindad* de a, entonces, $e^{\alpha(x)}-1$ y $\alpha(x)$ son equivalentes en esa vecindad. Esto tiene un significado aritmético importante ya que, $e^x-1 \sim x$ en una vecindad de $x=0$, lo cual permite escribir, por ejemplo, que,

$$e^{0.003}-1=0.003 \Longrightarrow e^{0.003}=1.003.$$

$$e^{-0.003}-1=-0{,}003 \Longrightarrow e^{-0.003}= \ 0.997.$$

Se recuerda que el sentido de equivalencia, aquí se aplica como sigue:

$$\underset{h\to 0}{Lim}\ \frac{(e^h-1)}{h}=1;\text{ o también, }\underset{\Delta x\to 0}{Lim}\ \frac{(e^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=1.$$

En términos generales, se sabe que, si $y=f(x)$, entonces,

$$f'(x)=\underset{h\to 0}{Lim}\ \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Para el caso de $f(x)=e^x$, se tiene lo siguiente,

$$f'(x)=(e^x)'=\underset{h\to 0}{Lim}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\underset{h\to 0}{Lim}\frac{e^xe^h-e^x}{h}=\underset{h\to 0}{Lim}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\underset{h\to 0}{Lim}\frac{(e^h-1)}{h}=e^x.$$

De modo que, *si* $f(x)=e^x$, entonces $f'(x)=e^x$.

Esta función exponencial es la única que se auto contiene como derivada.

Ejemplos:

Determinar las derivadas de las siguientes funciones:

1) $f(x)=3x-2e^x+5.$

   Solución:

   $f'(x)=(3x-2e^x+5)'=3-2e^x.$

2) $f(x)=2+3xe^x.$

   Solución:

   $f'(x)=(2+3xe^x)'=2'+(3xe^x)'=3(x+1)e^x.$

3) $f(x)=\dfrac{2+3e^x}{x}.$

   Solución:

$$f'(x)=\left(\frac{2+3e^x}{x}\right)'=\frac{(2+3e^x)'x-(2+3e^x)x'}{x^2}=\frac{3(x-1)e^x-2}{x^2}.$$

4.2.5 Derivada de la función logaritmo

Es necesario aprovechar la regla de equivalencia: $ln\big(1+\alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$ cuando $\alpha(x)$ es un infinitésimo en la vecindad de un punto a.

Ejemplo:

$$ln(1.003) = ln(1+0{,}003) = 0.003.$$

$$ln(0.997) = ln(1-0{,}003) = -0.003.$$

La equivalencia indica que,

$$\underset{h\to 0}{Lim}\,\frac{ln(1+h)}{h} = \underset{h\to 0}{Lim}\,\frac{h}{h} = 1;\ \text{también que,} \underset{h\to 0}{Lim}\,\frac{ln(1+2h)}{h} = \underset{h\to 0}{Lim}\,\frac{2h}{h} = 2.$$

En general, se cumple que,

$$\underset{h\to 0}{Lim}\,\frac{ln(1+xh)}{h} = x.$$

Con lo indicado se tiene que, si $f(x) = ln(x)$, entonces,

$$f'(x) = \big(ln(x)\big)' = \underset{h\to 0}{Lim}\,\frac{ln(x+h)-ln(x)}{h} = \underset{h\to 0}{Lim}\,\frac{ln\left(\frac{x+h}{x}\right)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lim}\,\frac{ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{h} = \underset{h\to 0}{Lim}\,\frac{\frac{h}{x}}{h} = \frac{1}{x}.$$

En consecuencia,

$$\big(Ln(x)\big)' = \frac{1}{x}.$$

Ejemplos:

Determinar las derivadas de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x^2 + x - ln(x)$.

2) $f(x) = xln(x)$.

3) $f(x) = \dfrac{ln(x)}{x}$.

Solución:

1) $f'(x) = \big(x^2 + x - ln(x)\big)' = 2x + 1 - \dfrac{1}{x}$.

2) $f'(x) = \big(x\,ln(x)\big)' = 1 + ln(x)$.

3) $f'(x) = \left(\dfrac{ln(x)}{x}\right)' = \dfrac{1-ln(x)}{x^2}$.

4.2.6 Derivada de la función seno

El límite fundamental $\underset{h\to 0}{Lim}\frac{sen(h)}{h}=1$, significa que en las vecindades de cero, se cumple que: $sen(h)\sim h$.

Por ejemplo:

$$sen(0.003)=0.003\ , sen(-0.003)=-0.003$$

En este punto, es necesario recordar algunas identidades trigonométricas, como las siguientes:

$$sen(a+b)=sen(a)\,cos(b)+sen(b)\,cos(a).$$

$$sen(a-b)=sen(a)\,cos(b)-sen(b)\,cos(a).$$

Con estas dos identidades se llega a las siguientes *Fórmulas de Prostaféresis:*

$$sen(x+h)-sen(x)=2\,sen\left(\frac{h}{2}\right)cos\left(x+\frac{h}{2}\right).$$

En efecto, sea $f(x)=sen(x)$, entonces,

$$f'(x)=\big(sen(x)\big)'=\underset{h\to 0}{Lim}\frac{sen(x+h)-sen(x)}{h}$$

$$=\underset{h\to 0}{Lim}\frac{2\,sen\left(\frac{h}{2}\right)cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\underset{h\to 0}{Lim}\,cos\left(x+\frac{h}{2}\right)=cos(x).$$

Por lo tanto, $\big(sen(x)\big)'=cos(x)$.

Ejemplos:

Calcular las derivadas de las siguientes funciones:

1) $f(x)=sen^2(x)$.
2) $f(x)=3-2x^2+5\,sen(x)$.
3) $f(x)=\frac{sen(x)}{x}$.

Solución:

1) $f'(x)=\big(sen^2(x)\big)'=\big(sen(x)\times sen(x)\big)'=\big(sen(x)\big)'sen(x)+sen(x)\big(sen(x)\big)'$

$$=cos(x)sen(x)+sen(x)\cos(x)=2\,sen(x)\,cos(x)=sen(2x).$$

2) $f'(x)=\big(3-2x^2+5\,sen(x)\big)'=-4x+5\,cos(x)$.
3) $f'(x)=\left(\frac{sen(x)}{x}\right)'=\frac{x\,cos(x)-sen(x)}{x^2}$.

4.2.7 Derivada de la función coseno

De las siguientes identidades trigonométricas,

$$cos(a+b) = cos(a)\,cos(b) - sen(a)\,sen(b)$$

$$cos(a-b) = cos(a)\,cos(b) + sen(a)\,sen(b)$$

Se obtiene la relación de Prostaféresis que sigue:

$$cos(x+h) - cos(x) = -2\,sen\left(x+\frac{h}{2}\right)sen\left(\frac{h}{2}\right).$$

En efecto, sea $f(x) = cos(x)$, entonces,

$$f'(x) = \big(cos(x)\big)' = \underset{h\to 0}{Lim}\,\frac{cos(x+h) - cos(x)}{h}$$

$$= \underset{h\to 0}{Lim} - \frac{2\,sen\left(\frac{h}{2}\right)sen\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h} = -\underset{h\to 0}{Lim}\left(sen\left(x+\frac{h}{2}\right)\right) = -sen(x).$$

Por lo tanto, $\big(cos(x)\big)' = -sen(x)$.

Ejemplos:

Determinar las derivadas de las siguientes funciones:

1) $f(x) = x + cos(x)$.
2) $f(x) = x\,cos(x)$.
3) $f(x) = \dfrac{cos(x)}{x}$.

Solución:

1) $f'(x) = \big(x + cos(x)\big)' = 1 - sen(x)$.
2) $f'(x) = \big(x\,cos(x)\big)' = cos(x) - x\,sen(x)$.
3) $f'(x) = \left(\dfrac{cos(x)}{x}\right)' = -\dfrac{cos(x) + x\,sen(x)}{x^2}$.

4.2.8 Derivada de las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante

Con las derivadas de $y = sen(x)$, $y = cos(x)$ se obtienen las derivadas de las demás funciones trigonométricas, las cuales se definen como la razón de ellas, así:

$$\big(tan(x)\big)' = sec^2(x).$$

$$\big(cot(x)\big)' = -csc^2(x).$$

$$\left(sec(x)\right)' = sec(x)\, tan(x).$$

$$\left(csc(x)\right)' = -csc(x)\, cot(x).$$

4.2.9 Regla de la cadena

En el trabajo académico y científico es poco probable que aparezca una función expresada en su forma canónica simple; por ejemplo, $y = sen(x)$ o $y = e^x$; por el contrario, aparecen como una composición de ellas, tales como, $y = e^{2x-1}$ o $y = Sen(\pi x^2 + 1)$, denominadas funciones compuestas.

El trabajo matemático obliga recurrir a la sustitución de variables, con lo cual, el proceso de derivación se torna simple y comprensible.

La función $y = sen(\pi x^2 + 1)$ sugiere el cambio de variable $u = \pi x^2 + 1$, donde la variable u tiene una dependencia cuadrática con la variable x. La función queda transformada en $y = sen(u)$ donde $u = \pi x^2 + 1$.

Ahora bien, de la notación de Leibniz se tiene que,

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

Este valor se puede reescribir, multiplicando por un "uno útil", así:

$$y' = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{du}{du}.$$

Aplicando la conmutatividad de la multiplicación, se obtiene que:

$$y' = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

Significa que la derivada de y respecto de x se consigue como el producto de la derivada de y respecto de u por la derivada de u respecto de x.

Por tanto,

$$si\ y = f(u)\ \ y\ \ u = g(x), \text{entonces } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}.$$

Ejemplos:

Determinar las derivadas respecto de x de las siguientes funciones:

1) $y = sen(\pi x^2 + 1)$.
2) $y = sen\left(e^{x^2+2}\right)$.

Solución:

1) $y = sen(\pi x^2 + 1)$.

Sea $u = \pi x^2 + 1$, entonces $y = sen(u)$.

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = cos(u)(2\pi x).$

Reemplazando u, se tiene la derivada pedida:

$y' = 2\pi x \, cos(\pi x^2 + 1).$

2) $y = sen\left(e^{x^2+2}\right).$

Sea $u = e^t$; $t = x^2 + 2$; entonces,

$y = sen(u), u = e^t;\ t = x^2 + 2$

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = cos(u)e^t(2x).$

Reemplazando las variables u y t, se obtiene la respuesta pedida:

$y' = \frac{dy}{dx} = cos(e^t)e^t(2x) = cos\left(e^{x^2+1}\right)e^{x^2+1}(2x).$

$y' = 2xe^{x^2+2}\, cos\left(e^{x^2+2}\right).$

4.2.10 Derivada de la función potencial de base variable

Una aplicación de la *regla de la cadena*, es el cálculo de la derivada *n-ésima* de cualquier función derivable.

Sea la siguiente función derivable:

$y = [f(x)]^n$, donde $f(x)$ es derivable.

Sea $u = f(x)$, entonces $y = u^n$.

Entonces,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = nu^{n-1}\big(f'(x)\big) = nf^{n-1}(x)f'(x) = n\big(f(x)\big)^{n-1}f'(x).$$

Por lo tanto,

$$y' = ([f(x)]^n)' = n\big(f(x)\big)^{n-1}f'(x).$$

Ejemplo:

1) $[sen^n(x)]' = n\, sen^{n-1}(x)\, cos(x).$
2) $[cos^n(x)]' = -n\, cos^{n-1}(x)\, sen(x).$
3) $[e^{nx}]' = ne^{nx}.$
4) $[ln^n(x)]' = \frac{n}{x}\, ln^{n-1}(x).$

5) $[tan^n(x)]' = n\, tan^{n-1}(x)\, sec^2(x)$.

6) $[(x^2+1)^n]' = 2nx\,(x^2+1)^{n-1}$.

4.3 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Las funciones tienen variadas formas de escribirse, las más comunes son la explícita, la implícita y la paramétrica.

Una función está escrita de forma *explícita* cuando se denota por $y = f(x)$, por ejemplo, en la expresión $y = 2x^2 + sen^3(x)$; en cambio, la forma *implícita* obedece a la expresión general $F(x,y) = 0$, tal como en el caso de la circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ o en el de la hipérbola $xy - 1 = 0$. Por su parte, la forma *paramétrica* asegura que la abscisa y la ordenada de una curva se describen como funciones de un valor, denominado parámetro; por ejemplo, $x = \phi(t)$; $y = \vartheta(t)$ con $t \in [a,b]$. Por ejemplo, la circunferencia $x^2 + y^2 - 1 = 0$ se puede describir paramétricamente, como sigue: $x = cos(2t)$, $y = sen(2t)$ donde $t \in [0,\pi]$.

La transformación de una función de una forma de expresión a otra, no es simple, tal como ocurre con la curva $x + sen(xy) = e^x + 1$.

La derivación de una función implícita utiliza de la *regla de la cadena*, con el sobreentendido de que y es una función explícita de x.

Ejemplos:

En las siguientes expresiones, supongamos que y depende x, es decir, $y = y(x)$.

1) Determinar la derivada de y respecto de x:

   $x + sen(xy) = e^x + 1.$

   Solución:

   $\big(x + sen(xy)\big)' = (e^x + 1)' \Longrightarrow 1 + (y + xy')\,cos(xy) = e^x.$

   Despejando y', se obtiene la derivada pedida:

   $$y' = \frac{e^x - 1 - y\,cos(xy)}{x\,cos(xy)}$$

2) Determinar la derivada de la ecuación que representa a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

   Solución:

   $$(x^2 + y^2)' = (1)' \Longrightarrow 2x + 2yy' = 0 \Longrightarrow y' = -\frac{x}{y}.$$

3) Determinar la derivada de la siguiente expresión, donde se asume que $y = y(x)$:

$x^2 - y\,sen(xy) = 1.$

Solución:

$\left(x^2 - y\,sen(xy)\right)' = (1)';$

$2x - y\,sen(xy)(y + xy') + y'\,sen(xy) = 0;$

$$y' = \frac{y^2\,sen(xy) - 2x}{(1 - xy)\,sen(xy)}.$$

4) Aplicando derivación Implícita determinar y' de la expresión $y = x^{\frac{m}{n}}$.

Solución:

$y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \Rightarrow y^n = x^m.$

Derivando implícitamente la última expresión, se obtiene:

$y^n = x^m \Rightarrow (y^n)' = (x^m)' \Rightarrow ny^{n-1}y' = mx^{m-1}.$

De aquí se obtiene,

$$y' = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{n-1}} = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}.$$

Por lo tanto, $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)' = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}.$

Como caso particular, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}.$

Evaluando en $x = 4$, se obtiene:

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}\bigg|_{x=4} = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4}}{4} = \frac{1}{4}.$$

4.4 DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIAL DE BASE CONSTANTE

Sea la función potencial, $y = a^x$.

Aplicando logaritmo natural a los dos términos, se obtiene:

$$ln(y) = ln(a^x) \Rightarrow ln(y) = x\,ln(a) \Rightarrow (ln(y))' = \left(x\,ln(a)\right)' \Rightarrow \frac{y'}{y} = ln(a)$$

Entonces, $y' = y\,ln(a) \Rightarrow y' = a^x\,ln(a).$

En conclusión, $(a^x)' = a^x\,ln(a).$

Ejemplo:

Determinar y' para las siguientes funciones:

1) $y = 10^x$.
2) Determinar y' de la función: $y = x^x$.

Solución:

1) $(10^x)' = 10^x\, ln(10)$.

2) $y = x^x \Longrightarrow\ ln(y) = ln(x^x) \Longrightarrow ln(y) = x\, ln(x) \Longrightarrow \dfrac{y'}{y} = 1 + ln(x) \Longrightarrow y' = y\big(1 + ln(x)\big)$

$$\Longrightarrow y' = y\big(1 + ln(x)\big) \Longrightarrow y' = x^x\big(1 + ln(x)\big).$$

Por lo tanto, $(x^x)' = x^x\big(1 + ln(x)\big)$.

4.5 DERIVACIÓN PARAMÉTRICA

Cuando una función (curva) está expresada en forma paramétrica, de la forma $x = \phi(t), y = \vartheta(t)$ con $t \in [a, b]$, al aplicar la notación de Leibniz y bajo el entendido de que, en un intervalo adecuado, la variable y se puede expresar en términos de x. se observa que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\vartheta'(t)}{\phi'(t)}.$$

Ejemplos:

Determinar y' con base en las ecuaciones paramétricas siguientes:

1) Ecuaciones de una circunferencia: $x = Cos(2t), y = Sen(2t), t \in [0, \pi]$.
2) Ecuación de una elipse: $x = aCos(t), y = bSen(t), t \in [0,2\pi]$.
3) Ecuaciones de una parábola $x = t - 1, y = t^2 + 2, t \in (-\infty, \infty)$.

Solución:

1) $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{2\,cos(2t)}{-2\,sen(2t)} = -\dfrac{cos(2t)}{sen(2t)} = -\dfrac{x}{y}.$

2) $y' = \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{b\,cos(t)}{a\,sen(t)} = -\dfrac{ab^2\,cos(t)}{a^2b\,sen(t)} = -\dfrac{b^2x}{a^2y}.$

3) $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2t}{1} = 2t = 2(t-1) + 2 = 2x + 2.$

4.6 DERIVADA DE LA FUNCIÓN INVERSA

La ventaja de aplicar la inversa de una función, es restablecer la *Función Idéntica*, lo cual, en el álgebra de funciones, esto significa que:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = I(x), \text{donde } I(x) = x, \text{para todo } x \text{ del dominio.}$$

Esta situación favorece el cálculo de la derivada de la inversa de una función, que también es derivable; para lo cual, se debe aplicar la derivación implícita.

Sea $y = f^{-1}(x)$, la inversa de una función derivable f.

Aplicando f a los dos términos de la expresión $y = f^{-1}(x)$, se obtiene lo siguiente:

$$f(y) = f\left(f^{-1}(x)\right) = x.$$

Por tanto, $si\ y = f^{-1}(x), \text{entonces } f(y) = x.$

Al derivar implícitamente la expresión $f(y) = x$, se obtiene:

$$f'(y)y' = 1 \Longrightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)}$$

Por lo tanto, $si\ y = f^{-1}(x), \text{entonces,}$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(f^{-1}(x))}{dx} = \frac{1}{f'(y)}.$$

Observe que la derivada de la función inversa se expresa en términos de la derivada de la función directa; más concretamente,

$$si\ y = f^{-1}(x), \text{entonces } y' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(x)}\bigg|_{x=y}.$$

En este punto, en la medida de las posibilidades, se dedican todos los esfuerzos por las vías del álgebra y de las identidades, con el fin de expresar en términos de la variable x la expresión $f'(y)$.

Esto indica que, para obtener la derivada de la inversa de una función, no se requiere disponer de la función inversa.

Ejemplo:

1) Derivar la inversa de la función $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 5$.

   Solución:

   Del procedimiento anterior, se tiene que:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(x)|_{x=y}} = \frac{1}{\frac{2}{3}\Big|_{x=y}} = \frac{3}{2}.$$

   Entonces, la derivada de la función dada es $y' = \frac{3}{2}$.

Observe que se ha obtenido la derivada de la inversa de la función $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 5$, sin disponer de la función inversa de dicha función.

De hecho, la inversa de la función lineal $y = \frac{2}{3}x + 5$, es, $y = \frac{3x-15}{2}$.

Al derivar respecto a x esta función, se llega a la misma función derivada obtenida anteriormente:

$$y' = \left(\frac{3x-15}{2}\right)' = \frac{3}{2}.$$

2) Verificar que la derivada de la inversa de toda función lineal $y = mx + b$, es $y' = \frac{1}{m}$.

Solución:

$$y' = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(x)}\bigg|_{x=y} = \frac{1}{m}\bigg|_{x=y} = \frac{1}{m}.$$

3) Sea $y = arc\,tan(x)$, determinar y'.

Solución:

Se aplica la *función tangente* a los dos términos, y se obtiene:

$$tan(y) = tan\big(arc\,tan(x)\big) \Rightarrow tan(y) = x.$$

Derivando de forma implícita la expresión: $Tan(y) = x$, se tiene la siguiente igualdad:

$$sec^2(y)y' = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{sec^2(y)}.$$

De las identidades trigonométricas, se sabe que: $sec^2(y) = 1 + tan^2(y)$; entonces, dado que $tan(y) = x$, se cumple que: $sec^2(y) = 1 + tan^2(y) = 1 + x^2$; por lo tanto,

$$y' = \frac{1}{Sec^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

De modo que, se ha encontrado la fórmula:

$$[arc\,tan(x)]' = \frac{dy}{dx} = \frac{d(arc\,tan(x))}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Con esto, se tiene la potestad de escribir:

$$[arc\,tan(x^n)]' = \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}, \text{ o también, } [arc\,tan(e^{nx})]' = \frac{ne^{nx}}{1+e^{2nx}}.$$

4) Determinar la derivada de $y = arc\,sen(x)$.

Solución:

Se aplica la función *seno* y se obtiene $sen(y) = x$.

Se deriva implícitamente esta expresión:

$$\frac{d(sen(y))}{dx}=\frac{d(x)}{dx}\Longrightarrow cos(y)y'=1\Longrightarrow y'=\frac{d\big(arc\ sen(x)\big)}{dx}=\frac{1}{cos(y)}.$$

Ahora bien, se sabe que, $cos(y)=\pm\sqrt{1-sen^2(y)}$.

Observe que $y=arc\ sen(x)$, entonces $Sen(y)=x$, por lo cual, $cos(y)=\pm\sqrt{1-x^2}$.

Por lo tanto,

$$[arc\ sen(x)]'=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

Por ejemplo:

$$[arc\ sen(x^n)]'=\frac{nx^{n-1}}{\pm\sqrt{1-x^{2n}}}.$$

5) Determinar la derivada de $y=arc\ cos(x)$.

Solución:

Por analogía con los ejemplos anteriores, se encuentra que:

$$[arc\ cos(x)]'=\frac{1}{\pm\sqrt{1-x^2}}.$$

Por el mismo camino, se determinan las siguientes relaciones:

$$[arc\ cot(x)]'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

$$[arc\ cot(x^n)]'=-\frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}.$$

4.7 APROXIMACIÓN DE FUNCIONES

4.7.1 Imágenes aproximadas de una función derivable

Con base en la siguiente definición de derivada,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x).$$

se asevera que en un entorno de 0 de radio $|h|$ son próximos los siguientes valores:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h};\ f'(x).$$

De allí se deduce que también son próximos los siguientes valores:

$$f(x+h);\ f(x)+hf'(x).$$

Es decir, para valores de h cercanos a cero, se cumple que:

$$f(x+h) \approx f(x) + hf'(x).$$

Esta última expresión se convierte en una excelente fórmula para la aproximación de funciones.

Ejemplos:

1) Sea $y = \sqrt{x}$

   Se sabe que, $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x}}{x}$.

   Además, para valores de h cercanos a cero, es válida la siguiente relación,

   $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$.

   En particular, para $x = 4$, se tiene lo siguiente aproximación:

   $f(4+h) \approx f(4) + hf'(4) \Longrightarrow \sqrt{4+h} \approx 2 + \dfrac{h}{4}$.

   De aquí se desprende que:

   $\sqrt{4.00016} = \sqrt{4 + 0{,}00016} \approx 2 + \dfrac{0{,}00016}{4} = 2.00004.$

   $\sqrt{4.00004} \approx 2.00001.$

   $\sqrt{3.99994} = \sqrt{4 - 0.00006} \approx 2 - \dfrac{0{,}00006}{4} = 2 - 0.000015 = 1999985.$

   $\sqrt{9+h} \approx 3 + \dfrac{h}{6}$.

   En general, se cumple que, $\sqrt{n^2+h} \approx n + \frac{h}{2n}$; válido $\forall \in \mathbb{N}$.

2) Sea $f(x) = x^2$.

   De la relación, $f(x+h) \approx f(x) + hf'(x)$, se obtiene $(x+h)^2 \approx x^2 + 2xh$.

   Haciendo $x = n$, se obtiene, $(n+h)^2 \approx n^2 + 2nh$.

   De aquí se tiene los siguientes casos particulares:

   $(1.0002)^2 \approx 1.0004; n = 1\ ;\ h = 0.0002.$

   $(2.0002)^2 \approx 4.0008; n = 2; h = 0.0002.$

4.7.2 Raíces aproximadas de una función derivable

El *Método de Newton Raphson* es iterativo, de alta eficiencia, el cual aplica el concepto de derivada para determinar los ceros o raíces aproximadas de una función real.

Joseph Raphson (1648-1715), matemático inglés, fundamentado en las ideas de Newton, desarrolló esta forma que, parte de la suposición que r es la raíz a la que se encontrará un valor aproximado de una función $f(x)$, por lo cual, $f(r) = 0$; y se toma x_0 próximo a r para calcular la recta tangente a la curva en el punto $P_0(x_0, f(x_0))$, que es la siguiente: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Esta recta determina al punto x_1 próximo a r, como intersección con el eje de las abscisas; dicho punto $x_1$satisface la siguiente ecuación:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Esta expresión es la fórmula iterativa buscada, pues con la tangente por el punto $P_1(x_1, f(x_1))$ se determina un nuevo punto, más cercano a la raíz de la función, digamos x_2, tales que:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Siguiendo el modo iterativo, en general, cualquier otro valor próximo a la raíz r, se expresa como sigue:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Con este procedimiento, la aproximación a la raíz r se puede hacer tan fina como se quiera (ver Figura 40).

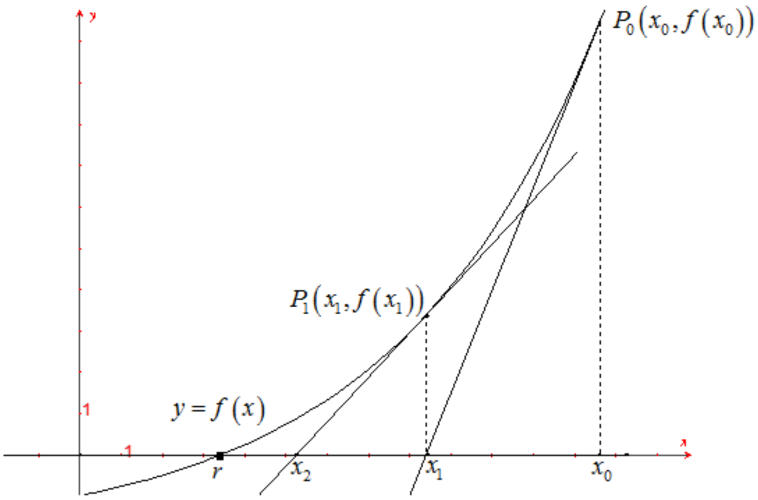


Figura 40. Raíces aproximadas por Método de Newton- Raphson

Ejemplo:

1) Determinar, de forma aproximada, la raíz de la función $f(x) = 3x^3 + x - 2$, en el intervalo $[0,1]$.

   Solución:

   Al aplicar el método iterativo de Newton-Raphson, tomando como punto inicial de aproximación el valor $x_0 = 1$, se obtiene la siguiente sucesión de raíces aproximadas:

$x_0 = 1$; $x_1 = 0.8$; $x_2 = 0.7502958579$; $x_3 = 0.7474244750$; $x_4 = 0.7474152504$;

$x_5 = 0.7474152503$.

Si se toma como valor inicial a $x_0 = 0$, se encuentra la siguiente secuencia:

$x_0 = 0$; $x_1 = 2$; $x_2 = 1.351351351$; $x_3 = 0.9639394306$; $x_4 = 0.7876043726$;

$x_5 = 0.7491248754$; $x_6 = 0.7474185047$; $x_7 = 0.7474152504$; $x_8 = 0.7474152503$.

El método pone en evidencia la concordancia de la aproximación por cualquiera de los dos valores iniciales que son los extremos del intervalo donde se busca la raíz r. De hecho, uno u otro se acerca más rápido a la raíz, dependiendo de cuál está más cerca de ella desde el comienzo de la iteración.

2) La siguiente función posee seis raíces, determinar de forma aproximada la que se encuentra en el intervalo [3,4]:

$$y = f(x) = \frac{x^2}{10} - xSen(x) - 3.$$

Solución:

Partiendo de $x_0 = 2$, el Método de Newton Raphson produce la siguiente sucesión de valores que se pueden considerar raíces aproximadas:

$x_0 = 2$; $x_1 = 3.735918607$; $x_2 = 3.625153228$; $x_3 = 3.625236822$; $x_4 = 3.625236822$.

Se observa que la aproximación se ha estacionado alrededor del valor 3.625236822, la cual se puede considerar que es la raíz r que se busca.

Partiendo de $x_0 = 4$, se obtiene la siguiente sucesión:

$x_0 = 4$; $x_1 = 3.609910590$; $x_2 = 3.625245689$; $x_3 = 3.625236822$; $x_4 = 3.625236822$.

Tal como en el caso anterior, los cambios de los valores son mínimos, por lo cual, se puede considerar que la raíz aproximada que se busca es $r = 3.625236822$.

En efecto:

$$f(3.625236822) = \frac{(3.625236822)^2}{10} - (3.625236822)Sen(3.625236822) - 3 \approx 0$$

4.7.2.1 Ejercicios:

Utilizando el Método de Newton-Raphson, determinar al menos una raíz de las siguientes funciones:

1) $y = x^2 - x\,sen(x) - 2$ 2) $y = \frac{x^2}{8} - x\,sen(x) - 3$ 3) $y = 3x^3 - 4x + 2$

4) $y = x^3 - 2x + 2$ 4) $y = \dfrac{x^3 - 2x + 2}{x + 1}$ 5) $y = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2}{x + 1}$

4.8 APLICACIONES DE LA DERIVADA

4.8.1 Razón de cambio

El concepto de *razón de cambio*, también conocida como rata de cambio o tasa de cambio, se refiere, a la medida en la cual una determinada variable se modifica con relación a otra.

Si $y = f(x)$ es una función de x, la razón de cambio de y por unidad de cambio de x en x_1, es precisamente $f'(x_1)$, si esta existe.

En la expresión $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, el numerador $f(x+h) - f(x)$ muestra la variación que tiene $y = f(x)$, en un incremento h respecto a x; tal diferencia señala cuánto varió $f(x)$. Por su parte la expresión completa $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, mide el cambio promedio de $f(x)$ en e intervalo $(x, x+h)$.

Haciendo $h \longrightarrow 0$ se encuentra la razón de cambio puntual.

Así, pues, la razón de cambio medio puntual, se determina por la siguiente expresión:

$$\underset{h \longrightarrow 0}{Lim} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$$

Esto significa que, la razón de cambio instantáneo de la función $y = f(x)$ es su derivada $f'(x)$.

Ejemplo:

1) El área de un círculo se mide con $f(r) = \pi r^2$; en consecuencia, la razón de *cambio medio puntual*, es $f'(r) = 2\pi r$.

   Esto significa que, si el radio r cambia de forma porcentual en un 0.1%, el área del círculo se incrementa o decrementa, en forma aproximada, en un 0.628%.

2) Sea $f(x) = x^3$; entonces, la razón de cambio instantánea de esta función en $x = 4$ se calcula como $(x^3)'|_{x=4} = 3x^2|_{x=4} = 3(4^2) = 48$.

   En la sección 5.2 del libro de texto *Lecciones de Cálculo Diferencial* (Escobar et al., 2021), se dispone de más ejemplos relacionados con el tema.

4.8.2 Tangente a una curva en un punto

Se mencionó que, Gottfried Leibniz se encontró con el concepto de derivada de una función continua, al resolver el problema del cálculo de la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en un punto $P(x_0, y_0)$ de la misma (ver Figura 41).

La ecuación de la recta tangente es:

$y - y_0 = m(x - x_0)$; donde $m = f'(x_0) = f'(x)|_{x=x_0}$.

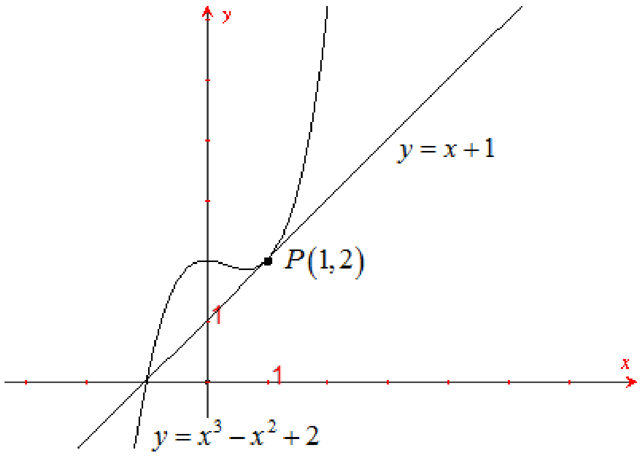


Figura 41. Recta Tangente a una curva en un punto dado

Ejemplos:

1) Determinar la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - x^2 + 2$ en el punto $P(1,2)$.

   Solución:

   $f'(x) = (x^3 - x^2 + 2)' = 3x^2 - 2x$.

   $m = f'(1) = 3(1^2) - 2(1) = 1$.

   Reemplazamos las coordenadas del punto $P(1,2)$ y el valor de $m = 1$, en la siguiente ecuación:

   $y - y_0 = m(x - x_0)$, se obtiene: $y - 2 = (1)(x - 1) \Longrightarrow y = x + 1$.

   En resumen, la ecuación de la recta tangente pedida es: $y = x + 1$.

2) Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia dada en el punto indicado P(5,2): $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 10$.

   Solución:

   Se deriva implícitamente la ecuación de la circunferencia dada, así:

   $((x - 2)^2 + (y - 3)^2)' = (10)' \Longrightarrow 2(x - 2) + 2(y - 3)y' = 0$.

   De aquí, en definitiva, se obtiene la derivada: $y' = \dfrac{2 - x}{y - 3} \Longrightarrow m = y'|_{P(5,2)} = m = 3$.

   Reemplazamos las coordenadas del punto y el valor de la pendiente en la expresión de la recta tangente, con lo cual se obtiene la ecuación de la recta pedida (ver Figura 42):

   $y - y_0 = m(x - x_0) \Longrightarrow y = 3x - 13$.

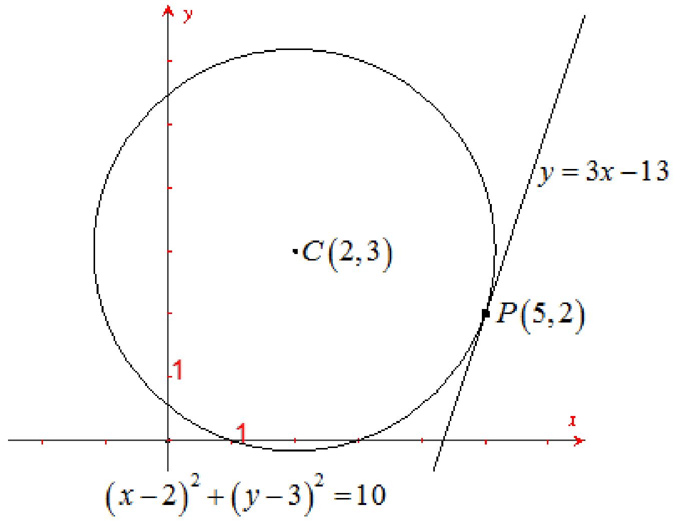


Figura 42. Tangente a una circunferencia en un punto dado

3) Calcular la recta tangente en $P(1{,}1)$ que se corresponde con el valor de $t = 0$ para la siguiente función, dada en coordenadas paramétricas:

$x = 2t + 1\,;\ y = (t+2)^2 - 3\,;\ t \in (-\infty, \infty)$.

Solución:

En este caso se encuentra que,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(t+2)}{2}.$$

La pendiente de la recta para $t = 0$ es,

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{2(t+2)}{2}\bigg|_{t=0} = \frac{2(0+2)}{2} = 2.$$

Las coordenadas del punto de tangencia, para $t = 0$, son las siguientes:

$x_0 = (2t+1)|_{t=0} = 2(0) + 1 = 1.$

$y_0 = ((t+2)^2 - 3)|_{\,t=0} = (0+2)^2 - 3 = 1.$

Reemplazamos los valores de las coordenadas del punto $P(x_0, y_0) = P(1{,}3)$ y el valor de $m = 2$, en la ecuación de la recta tangente, se obtiene:

$y - y_0 = m(x - x_0) \Longrightarrow y - 1 = 2(x-1) \Longrightarrow y = 2x - 1$

En consecuencia, la ecuación de la recta tangente pedida es: $y = 2x - 1$ (ver Figura 43).

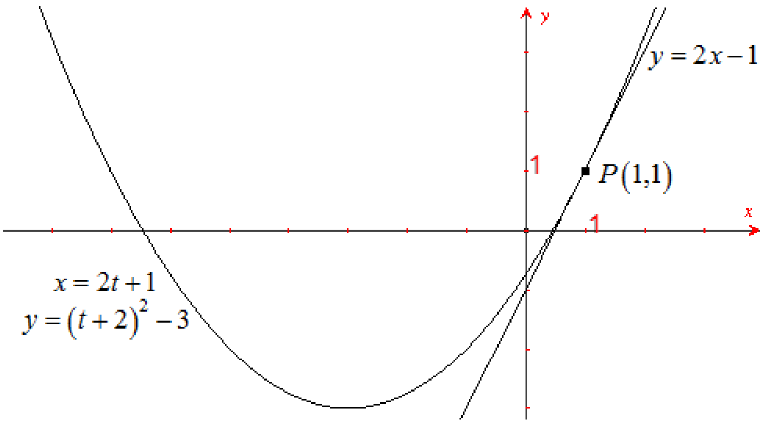


Figura 43. Tangente a una Parábola en Coordenadas Paramétricas

4.8.3 Extremos relativos de una función

La combinación de los conceptos de que una recta en el plano se describe con la ecuación $y = mx + b$, de que si $m = 0$ la recta es paralela al eje de las abscisas, y de que si la recta es tangente a la curva $y = f(x)$ en un determinado punto $P(x, y)$ de ella, el valor de la pendiente se calcula por $m = f'(x)$, determinan el procedimiento para encontrar los Puntos Extremos (máximos y mínimos) de una función en un intervalo, puesto que, en aquellos puntos $f'(x) = 0$.

Para determinar los valores extremos de una función $y = f(x)$, se deben encontrar los valores para los cuales $f'(x) = 0$, raíces que determinan las abscisas de los puntos extremos; estos valores se remplazan en la ecuación de la función $y = f(x)$, con lo cual se obtienen sus respectivas ordenadas.

Para la resolución que involucra la obtención de máximos y mínimos, se recomienda seguir, en estricto orden, los siguientes pasos:

1) Formular la función que se desea optimizar (obtener máximo o mínimo), la cual se debe expresar en términos de una sola variable $y = f(x)$.
2) Calcular la primera derivada de la función $f'(x)$.
3) Igualar a cero la primera derivada y resolver la ecuación resultante para obtener puntos críticos: $f'(x) = 0$; x^*: puntos críticos.
4) Calcular la segunda derivada de la función $f''(x)$.
5) Sustituir los puntos críticos en la segunda derivada y decidir el tipo de punto crítico:

   $f''(x^*) < 0$ entonces x^* define un máximo.

   $f''(x^*) > 0$ *entonces* x^* define un mínimo.

En cualquiera de los casos, $f(x^*)$ es óptima.

Ejemplos:

1) Determinar los puntos extremos relativos de la función: $f(x) = 3x^3 - 5x^2 - 16x + 12$.

Solución:

Los puntos extremos relativos, si es que existen, se obtienen de la ecuación:

$f'(x) = 0 \Longrightarrow f'(x) = 9x^2 - 10x - 16 = 0.$

De aquí se obtiene que, los *puntos críticos* son:

$x_1 = 2\ ;\ x_2 = -\dfrac{8}{9}.$

Por lo tanto, los *puntos extremos relativos* correspondientes son (ver Figura 44):

$\big(2, f(2)\big) = (2, -16) = P_1(2, -16).$

$$\left(-\frac{8}{9}, f\left(-\frac{8}{9}\right)\right) = \left(-\frac{8}{9}, \frac{4900}{243}\right) = P_2\left(-\frac{8}{9}, \frac{4900}{243}\right).$$

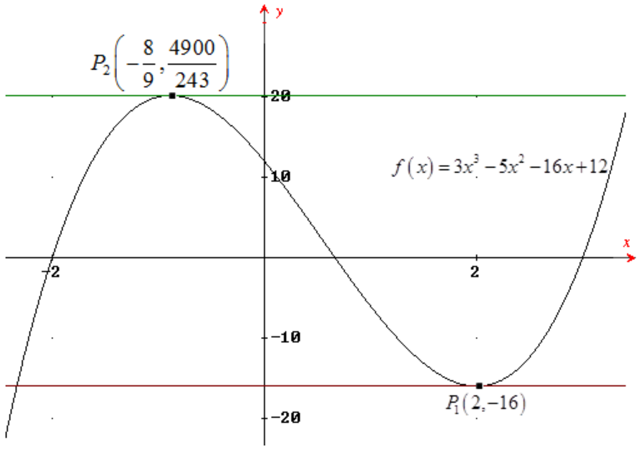


Figura 44. Puntos extremos relativos de una función

2) Determinar el punto extremo relativo de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Solución:

La abscisa del punto extremo se encuentra en $y' = f'(x) = 0$, esto es:

$f'(x) = 2ax + b = 0 \Longrightarrow x = -\dfrac{b}{2a}.$

El punto extremo relativo respectivo tiene las siguientes coordenadas:

$$\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

En este caso, el extremo relativo corresponde al vértice de la parábola, así:

$$V\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$$

Al lector que esté interesado en el desarrollo de más ejemplos sobre el tema, se recomienda remitirse al texto *Lecciones de Cálculo Diferencial* (Escobar et al., 2021), del cual son coautores los autores del presente libro.

4.8.4 La Regla de L'Hopital

La Regla de L'Hopital, que debería llamarse Regla de Bernoulli, en atención a su creador, el matemático suizo Jhon Bernoulli y del que el famoso marqués francés L'Hopital fue su divulgador, permite calcular, por vía de la derivada, cualquier límite de las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, convirtiendo las expresiones indeterminadas en funciones continuas.

Por extensión y por la vía del álgebra y de los logaritmos, las indeterminaciones $0 \cdot \infty$, ∞^0, 0^∞ o $\infty - \infty$ e incluso 1^∞, se pueden transformar en expresiones de las formas $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Así pues, sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ diferenciables, $g(x) \neq 0$ en una vecindad de a, tales que,

$$\left(\underset{x\to a}{Lim} f(x) = 0 \;\; y \;\; \underset{x\to a}{Lim}\, g(x) = 0\right) \;\; o \;\; \left(\underset{x\to a}{Lim} f(x) = \infty \;\; y \;\; \underset{x\to a}{Lim}\, g(x) = \infty\right).$$

Entonces, la Regla de L'Hopital, establece que:

$$\underset{x\to a}{Lim}\, \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to a}{Lim}\, \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La regla también tiene validez para el caso en que $x \longrightarrow \infty$; es decir,

$$\underset{x\to \infty}{Lim}\, \frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to \infty}{Lim}\, \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

En ocasiones es factible recurrir a la combinación de estrategias, tales como el principio de sustitución o la misma Regla de L'Hopital, tal como se indica más adelante.

Ejemplos:

1) Calcular: $\underset{x\to 0}{Lim}\frac{sen(x)}{x} = 1.$

Solución:

Dado que $\underset{x\to 0}{Lim}\,\left(sen(x)\right) = 0 \;\; y \;\; \underset{x\to 0}{Lim}\,(x) = 0$, entonces el límite es de la forma $\frac{0}{0}$.

Entonces, al aplicar la regla de L'Hopital, se obtiene lo siguiente:

$$\underset{x\to 0}{Lim}\, \frac{sen(x)}{x} = \underset{x\to 0}{Lim}\, \frac{\left(sen(x)\right)'}{x'} = \underset{x\to 0}{Lim}\, \frac{sos(x)}{1} = \underset{x\to 0}{Lim}\,(cos(x)) = 1.$$

2) Calcular el siguiente límite:

$$\underset{x\to 1}{Lim}\, \frac{ln(x^3)}{x-1}$$

Solución:

Este límite es de la forma $\frac{0}{0}$; entonces, según la Regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 1}\frac{ln(x^3)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(ln(x^3))'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{(3\,ln(x))'}{(x-1)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3(\frac{1}{x})}{1}=\lim_{x\to 1}(3x)=3.$$

Entonces, $\lim_{x\to 1}\frac{ln(x^3)}{x-1}=3.$

Observe que, en general, se cumple la siguiente regla:

$$\lim_{x\to 1}\frac{Ln(x^n)}{x-1}=n.$$

3) Calcular el siguiente límite de la forma $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+7x-3}{5x^3+2x^2+7x-1}.$$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-2x^2+7x-3}{5x^3+2x^2+7x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{9x^2-6x+7}{15x^2+4x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{18x-6}{30x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{18}{30}=\frac{3}{5}.$$

4) Calcular el siguiente límite de la forma $\frac{0}{0}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\,tan(x)-3x}{5x^3}.$$

Solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\,tan(x)-3x}{5x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3\,sec^2(x)-3}{15x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6\,sec^2(x)\,tan(x)-0}{30x}=\frac{1}{5}.$$

Observe que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tan(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen(x)}{cos(x)}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos(x)}=(1)\times(1)=1.$$

$$\lim_{x\to 0}sec^2(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{cCos^2(x)}\right)=1.$$

5) Calcular el siguiente límite de la forma 1^∞:

$$\lim_{x\to 0}\big(1+sen(3x)\big)^{cot(x)}.$$

Solución:

Se realiza la siguiente sustitución de variable:

$$y=\big(1+sen(3x)\big)^{cot(x)}.$$

Aplicando logaritmo natural a los dos términos, se obtiene:

$$ln(y) = ln\left(\left(1 + sen(3x)\right)^{cot(x)}\right) \Longrightarrow ln(y) = cot(x)\, ln\big(1 + sen(3x)\big).$$

Entonces:

$$ln(y) = \frac{ln(1 + sen(3x))}{tan(x)}.$$

En esta expresión se calcula el límite cuando $x \longrightarrow 0$, así:

$$\underset{x \longrightarrow 0}{Lim}\left(ln(y)\right) = \underset{x \longrightarrow 0}{Lim} \frac{ln\big(1 + sen(3x)\big)}{tan(x)} = \underset{x \longrightarrow 0}{Lim} \frac{\frac{3\,cos(3x)}{1 + sen(3x)}}{sec^2(x)} = 3.$$

Por lo cual:

$$\underset{x \longrightarrow 0}{Lim}\big(ln(y)\big) = 3.$$

Dado que, en virtud de la continuidad, el límite y el logaritmo son intercambiables, se obtiene lo siguiente:

$$\underset{x \longrightarrow 0}{Lim}\left(ln(y)\right) = 3 \Longrightarrow e^{ln\left(\underset{x \longrightarrow 0}{Lim}(y)\right)} = e^3 \Longrightarrow y = e^3.$$

En definitiva, se tiene el límite pedido:

$$\underset{x \longrightarrow 0}{Lim}\left[\left(1 + sen(3x)\right)^{cot(x)}\right] = e^3.$$

En general, corresponde a los límites de la forma e, si se cumple que,

$$\underset{x \longrightarrow 0}{Lim}\left(\alpha(x)\right) = 0 \;\; y \;\; \underset{x \longrightarrow 0}{Lim}\left(\beta(x)\right) = \infty, \text{entonces}, \underset{x \longrightarrow 0}{Lim}\left(\left(1 + \alpha(x)\right)^{\beta(x)}\right).$$

Por ejemplo,

$$\underset{x \longrightarrow 0}{Lim}\big(1 + sen(nx)\big)^{cot(x)} = e^n.$$

6) Calcular el siguiente límite de la forma $\frac{0}{0}$:

$$\underset{x \longrightarrow 1}{Lim} \frac{1 - x^2}{sen(\pi x)}.$$

Solución:

$$\underset{x \longrightarrow 1}{Lim} \frac{1 - x^2}{sen(\pi x)} = \underset{x \longrightarrow 1}{Lim} \frac{-2x}{\pi\, cos(\pi x)} = \frac{-2}{\pi(-1)} = \frac{2}{\pi}$$

7) Calcular el siguiente límite de la forma $\infty - \infty$:

$$\underset{x \longrightarrow \frac{\pi}{2}}{Lim}\big(sec(x) - tan(x)\big).$$

Solución:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(sec(x) - tan(x) \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 - sen(x)}{cos(x)} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-cos(x)}{-sen(x)} = 0.$$

EJERCICIOS CAPÍTULO 4.

Aplicar las reglas de derivación, para determinar la derivada de las funciones que siguen:

4.1 FUNCIONES ALGEBRAICAS

1) $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4$

2) $y = at^m + bt^{m+n}$

3) $y = \frac{a + bx}{c + dx}$

4) $y = \frac{\pi}{x} + ln2$

5) $y = \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}$

6) $y = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

7) $y = \frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{x}$

8) $y = x^2 \sqrt[3]{x^2}$

9) $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}$

10) $y = (2x^2 - 3x)^2 (x^3 - 2x)$

Respuestas:

1) $-\frac{1}{3} + 2x - 2x^3$

2) $amt^{m-1} + b(m+n)t^{m+n-1}$

3) $\frac{bc - ad}{(c + dx)^2}$

4) $-\frac{\pi}{x^2}$

5) $\frac{1}{\sqrt{z}\left(-1 + \sqrt{z}\right)^2}$

6) $\frac{6ax^5}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

7) $-\frac{2}{(2x - 1)^2} + \frac{1}{x^2}$

8) $\frac{8}{3} x \sqrt[3]{x^2}$

9) $-\frac{2}{3}\left[\frac{a\sqrt[3]{x^2} - 2b}{x^2 \sqrt[3]{x}}\right]$

10) $28x^6 - 72x^5 + 5x^4 + 96x^3 - 52x^2$

4.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS Y TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

1) $f(x) = 5\cos(2x) + 3sen(3x)$

2) $f(x) = x\ arcsen\ x$

3) $f(x) = \dfrac{sen\ x + \cos x}{sen\ x - \cos x}$

4) $f(x) = 2t\ sen\ t - (t^2 - 1)\cos t$

5) $f(x) = ctgx \csc x - 3sen\ x$

6) $f(x) = 2tg\ x - 3ctg\ x$

7) $f(x) = arctg\ x + arctg\dfrac{1}{x}$

Respuestas

1) $-10\ sen(2x) + 9\cos(3x)$

2) $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} + arcsen\ x$

3) $\dfrac{2}{2sen\ x\cos x - 1}$

4) $sent + t^2 sen\ t$

5) $z\ arctg\ z$

6) $ctg\ x - xcsc^2x$

7) $-ctg^2x \csc \quad x - csc^3x - 3\cos x$

8) $2sec^2x + 3csc^2x$

9) 0

4.3 FUNCIONES EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

1) $y = x^7e^x$

2) $y = (x-1)e^x$

3) $y = \dfrac{e^x}{x^2}$

4) $y = \dfrac{x^2}{\ln x}$

5) $y = e^x\cos x$

6) $y = x^3lnx - \dfrac{1}{3}\ln(2x-1)$

7) $y = (x^2 - x - 1)e^x\cos x$

8) $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

Respuestas

1) $(x^7 + 7x^6)e^x$

2) xe^x

3) $\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}\right)e^x$

4) $-\dfrac{x}{ln^2x} + \dfrac{2x}{lnx}$

5) $-(senx + cosx)e^x$

6) $x + 2xlnx - \dfrac{2}{3(2x-1)}$

7) $[(2x-1)cosx+(x^2-x-1)cosx-(x^2-x-1)senx]e^x$

8) $\frac{1}{x^2}(1-lnx)$

4.4 FUNCIONES COMPUESTAS

1) $y=\left(\frac{ax+b}{c}\right)^3$

2) $y=(2a+3bx)^2$

3) $y=\frac{3}{56(2x-1)^7}-\frac{1}{26(2x-1)^7}-\frac{1}{40(2x-1)^5}$

4) $y=\sqrt{1-x^2}$

5) $y=(3-2sen(2x)^5$

6) $y=\frac{1}{arctg\sqrt{x}}$

7) $y=\sqrt{ctg\,x}-\sqrt{sen(2x)}$

8) $y=\sqrt{xe^x+1}$

9) $y=\ln(e^x+5sen\,x-4arcsen(2x))$

10) $y=\sqrt{arctg\frac{1}{x}}$

11) $y=\sqrt{arctg(\ln x)}$

12) $y=cos^2xe^{2x}+sec^2x$

13) $y=\sqrt{1+\sqrt{\ln x+1}}$

Respuestas

1) $\frac{3a}{c^3}(ax+b)^2$

2) $6b(2a+2bx)$

3) $\frac{-3}{4(2x-1)^8}+\frac{1}{2(2x-1)^7}+\frac{1}{4(2x-1)^6}$

4) $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

5) $20cos2x(3-2sen2x)^4$

6) $\frac{-1}{9\sqrt{x}(1+x)\left[arctg\sqrt{x}\right]^2}$

7) $\frac{-ctgxcscx}{2\sqrt{ctgx}}-\frac{cos2x}{\sqrt{sen2x}}$

8) $\frac{(x+1)e^x}{2\sqrt{xe^x+1}}$

9) $\frac{e^x+5cosx-8\sqrt{(1-4x^2)^{-1}}}{e^x+5senx-4arcsen(2x)}$

10) $\frac{-1}{2(x^2+1)\sqrt{arctg\left(\frac{1}{x}\right)}}$

11) $\dfrac{1}{x(1+ln^2x)\sqrt{arctg(lnx)}}$

12) $[2cosxsenx+2cos^2x]e^{2x}+2sec^2xtgx$

13) $\dfrac{1}{4x\sqrt{1+\sqrt{lnx+1}}}$

4.5 DERIVACIÓN LOGARÍTMICA

1) $y=\sqrt[3]{x^2}\left(\dfrac{1-x}{1+x^2}\right)sen^3xcos^2x$

2) $y=[sen(2x)]^{x^2+1}$

3) $y=x^x$

4) $y=x^{\sqrt{x}}$

5) $y=x^{x^2}$

6) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}\sqrt{(x+1)^5}}$

7) $y=x^{sen2x}$

8) $y=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

9) $y=\sqrt[x]{x}$

Respuestas:

1) $y\left(\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{2x}{1+x^2}+3ctgx-2tgx\right)$

2) $\left[2xln\big(sen2(x)\big)+\dfrac{2(x^2+1)cos2x}{sen(2x)}\right]y$

3) $y(1+lnx)$

4) $y\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x}+\dfrac{lnx}{2\sqrt{x}}\right)$

5) $y(x+2xlnx)$

6) $y\left[\dfrac{1}{2(x-1)}-\dfrac{1}{3(x+1)}-\dfrac{5}{2(x+1)}\right]$

7) $y\left[\dfrac{sen2x}{x}+2cos2xlnx\right]$

8) $y'=y\left[\dfrac{x^2+x+1}{x(x+1)}\right]$

9) $y\left[\dfrac{1-lnx}{x^2}\right]$

4.6 DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Determinar $\frac{dy}{dx}$ de las siguientes funciones implícitas:

1) $arctg(x+y) = x + y$

2) $lnx + e^{-\frac{y}{x}} = 1$

3) $x^y = y^x$

4) $\sqrt{x^3+y^3} = xy$

5) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

6) $y^2 = \dfrac{x+y}{x-y}$

7) $tg(xy) = x^2 + y^2$

8) $\cosh x + \cosh y = sen(x+y)$

9) $e^{sen\,x} + e^{sen\,y} = \cos y$

Respuestas:

1) -1

2) $\dfrac{x+ye^{-\frac{y}{x}}}{xe^{-\frac{y}{x}}}$

3) $-\dfrac{y(-x^y y + y^x xlny)}{x(-x^y ylnx + xy^x)}$

4) $\dfrac{3x^2 - 2y\sqrt{x^3+y^3}}{-3y^2 + 2x\sqrt{x^3+y^3}}$

5) $-\sqrt{\dfrac{y}{x}}$

6) $\dfrac{-y}{x^2y - 2xy^2 - x + y^3}$

7) $\dfrac{-y - ytg^2(xy) + 2x}{x + xtg^2(xy) - 2y}$

8) $\dfrac{\cos(x+y) - senhx}{senhy - \cos(x+y)}$

9) $-\dfrac{e^{senx}cosx}{e^{seny}cosy + seny}$

4,7 FUNCIONES DIVERSAS

1) $y = sen^3(5x)cos^2\left(\dfrac{x}{3}\right)$

2) $y = -\dfrac{11}{2(x-2)^2} - \dfrac{4}{x-2}$

3) $y = \dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}$

4))$y = \dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$

5) $y = \dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^2} - \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$

6) $y = \sqrt[4]{\dfrac{1+x}{1-x}}$

7) $y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$

8) $y = \frac{1}{3}tg^3x + tgx - x$

9) $y = \sqrt{\alpha sen^2x + \beta cos^2x}$

10) $y = arcsen\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)$

11) $y = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$

12) $y = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 arcsen\left(\frac{x}{a}\right)$

13) $y = \ln(arcsen\, x)$

14) $y = arctg\left(\frac{xsen\,\alpha}{1-xcos\,\alpha}\right)$

15) $y = e^{sen2x+\sqrt{x}}$

16) $y = (2ma^{mx}+b)^p$

17) $y = \frac{(\alpha sen(\beta x) - \beta\cos(\beta x)\, e^{\alpha x})}{\alpha^2+\beta}$

18) $y = x^n a^{-x^2}$

19) $y = \sqrt{cosx}a^{\sqrt{\cos x}}$

20) $y = \ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$

21) $y = \frac{1}{ln^2x} + arctg(\ln x)$

22) $y = ln\frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$

23) $y = \frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}-x}$

24) $y = \frac{1}{2}ln\left(tg\frac{x}{2}\right)$

25) $y = 3^{\frac{sen(ax)}{\cos(bx)}} + \frac{1}{3}\frac{sen^3(ax)}{cos^3(bx)}$

26) $y = \ln(arcsen\, x) + \frac{1}{2}ln^2x + arcsen(\ln x)$

27) $y = ln\frac{1+\sqrt{sen\,x}}{1-\sqrt{sen\,x}}$

28) $y = 2arctg\sqrt{sen\,x}$

29) $y = e^{\alpha x}\cosh x + \sqrt{tgh^3x}$

Respuestas:

1) $15sen^2(5x)cos^2\frac{x}{3}\cos(5x) - \frac{2}{3}sen^3(5x)cos\frac{x}{3}sen\frac{x}{3}$

2) $\frac{11}{(x-2)^3} + \frac{4}{(x-2)^4}$

3) $\frac{x^7}{(1-x^2)^4} + \frac{x^9}{(1-x^2)^5}$

4) $\frac{x^2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}$

5) $\dfrac{-3}{20\sqrt[3]{1+x^3}}$

6) $\dfrac{1}{2\sqrt[4]{(1+x)^3(1-x)^5}}$

7) $\dfrac{(x+b)(x+c)+(x+a)(x+c)+(x+a)(x+b)}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$

8) $(tg^2x-1)sec^2x-1$

9) $\dfrac{(\alpha-\beta)sen\,xcos\,x}{\sqrt{\alpha sen^2x+\beta cos^2x}}$

10) $\dfrac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$

11) $\dfrac{-\sqrt{1-x^2}+xarcos\,x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$

12) $2\sqrt{a^2-x^2}$

13) $\dfrac{1}{arcsenx\sqrt{1-x^2}}$

14) $\dfrac{sen\,\alpha}{1-2xcos\,\alpha+x^2cos^2\alpha+x^2sen^2\alpha}$

15) $\left(\cos x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)e^{senx+\sqrt{x}}$

16) $2m^2a^{mx}p(2ma^{mx}+b)^{p-1}lna$

17) $e^{ax}sen(\beta x)$

18) $x^{n-1}a^{-x^2}(n-2x^2lna)$

19) $-\dfrac{1}{2}ytg\,x\left(1+\sqrt{cosx}\ln a\right)$

20) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

21) $\dfrac{-2}{xln^3x}+\dfrac{1}{x(1+ln^2x)}$

22) $\frac{5}{x-2}-\frac{3}{x+1}$

23) $\frac{2(x+\sqrt{x^2+a^2}}{(x-\sqrt{x^2+a^2})\sqrt{x^2+a^2}}$

24) $\frac{xcos^2(lnx-ln2)+2senx}{xsenxcos^2(lnx-ln2)}$

25) $\left(3^{\frac{sen(ax)}{\cos(bx)}}ln3+\frac{sen^2ax}{cos^2bx}\right)\frac{acosaxcos(bx)+bsen(ax)sen(bx)}{cos^2bx}$

26) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2arcsen\,x}}+\frac{lnx}{x}+\frac{1}{x\sqrt{1-ln^2x}}$

27) $\frac{\cos x}{(sen\,x-1)\sqrt{sen\,x}}$

28) $\frac{\cos x}{(senx+1)\sqrt{sen\,x}}v$

29) $e^{ax}(\operatorname{acosh}x+senh\,x)+\frac{3}{2}(1-tgh^2x)\sqrt{tgh\,x}$

4.8 APLICACIONES DE LA DERIVADA

1) Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y de la normal a las curvas dadas, en los puntos indicados; además, trazar las gráficas respectivas.

a) $x^2-y^2=7;\ \ (4-3)-$

b) $x=4y^2;\ \ \left(1,\frac{1}{2}\right).$

c) $4x^2-8x-2y=5;\ \ \left(2,\frac{5}{2}\right).$

d) $4x^2+y^2+6y+5=0;\ \ (1,-3).$

e) $y=e^{-x};\ \ (0,1).$

f) $y=senx;\ \ \left(\frac{\pi}{4};\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

g) $y=\frac{4x+3}{3x-2};\ \ \left(0,-\frac{3}{2}\right).$

Respuestas:

a) $4x+3y-7=0;\ \ 3x-4y-24=0$

b) $2x-8y+7=0;\ \ 4x+y-3=0$

c) $8x + 2y - 21 = 0$; $x - 4y + 8 = 0$

d) $= x = 1$; $y = -3$

e) $x + y - 1 = 0$; $x - y + 1 = 0$

f) $4\sqrt{2} - 8y + 4\sqrt{2} - \pi\sqrt{2} = 0$; $4x + 2\sqrt{2}y - 2 - \pi = 0$

g) $17x + 4y + 6 = 0$; $8x - 34y - 21 = 0$

2) Determinar los puntos de la curva $y = x^5 - 20x^2$ donde la tangente es horizontal.

Respuestas

$(0,0)$; $(2,-48)$

3) Hallar los ángulos que forman las curvas dadas en los puntos de intersección

a) $y = x^2$; $x = \frac{1}{2}(y^2 - 3y)$

b) $y^2 - x - 1$; $x^2 + y^2 = 13$

c) $x = \frac{2}{y}$; $x = log_2 y$

Respuestas

a) $54^0 9'$; $33^0 41'$
b) $70^0 20'$
c) $62^0 22'$

4) De un recipiente de $3m$ de radio y 10 de profundidad sale agua a una tasa de 4 m^3/min.

a) Calcular la variación que experimenta la altura de la superficie y el radio cuando la profundidad del agua es $6m$.
b) Calcular la variación que experimenta el área de la superficie libre y el perímetro de la superficie libre, cuando la profundidad es de $6m$.

Respuestas

a) $0{,}393\,\frac{m}{min}$; $-0{,}1179\ m/min$
b) $-1{,}33\ m^2/min$; $-0{,}74\ m/min$

5) Considerar un tetraedro regular, con arista $10cm$. Si las aristas aumentan de longitud a razón de $0{,}1\ cm/min$. Calcular con qué velocidad aumenta el volumen y el área total.

Respuesta

$4{,}535\,\frac{cm^3}{min}$; $3{,}4641\ cm^2/min$

6) De un depósito de forma de prisma recto, cuya sección es un triángulo equilátero con lado $1m$ y altura $10m$, sale agua a velocidad de $800\ cm^3/min$; calcular:
   a) Velocidad de diminución del nivel del agua.
   b) Tiempo después del cual, el depósito está vacío.

   Respuesta

   a) $-0{,}18\,\frac{cm}{min}$
   b) $0{,}2\ h\ 30'\,aprox$

7) Una caja abierta de base cuadrado, debe tener un volumen de $6400\ pg^3$. Si el costo del material de la base es de \$75 por pg^2 y el costado \$25 por pg^2. Determinar las dimensiones de la caja, de manera que el costo de los materiales de fabricación de la misma, sea mínimo.

   Respuesta

   20,20 y 16 pg

8) Determinar las dimensiones del cilindro recto de área lateral máxima, que se puede inscribir en una esfera de 8 cm de radio.

   Respuesta:

   $h = 8\sqrt{2}\ cm\ ;\ r = 4\sqrt{2}\ cm$

9) Determinar la ecuación de la recta, que al pasar por el punto $P(3,4)$ determina con los ejes coordenados, un triángulo de área mínima en el primer cuadrante.

   Respuesta:

   $4x + 3y - 24 = 0$

10) Calcular los valores aproximados de las siguientes expresiones:

   a) $\sqrt[3]{8{,}02}$

   b) $sen 42^{\circ}$

   c) $(8{,}9)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{(8{,}9)^{\frac{1}{2}}} + 5$

   Respuesta:

   a) 2,001666667
   b) 0,6700927
   c) 31,2

4.8.3 La regla de L'Hopital:

Calcular los límites siguientes aplicando los métodos elementales posibles; luego, comparar los resultados aplicando la Regla de L'Hopital:

1) $\underset{x\to 3}{Lim}\,\frac{x-3}{9-x^2}; R/-\frac{1}{3}/$

2) $\underset{x\to 1}{Lim}\,\frac{x^n-1}{x^m-1}; R/\frac{n}{m}$

3) $\underset{x\to a}{Lim}\,\frac{x^n-a^n}{x^m-a^m}; R/\frac{n}{m}$

4) $\underset{x\to 0}{Lim}\,\frac{e^{2x}-1}{sen(3x)}; R/\frac{2}{3}$

7) $\underset{x\to 0}{Lim}\,\frac{1-cos(x)}{x^2+sen(x)}; R/0$

8) $\underset{x\to 0}{Lim}\,\frac{1-cos(x)}{2x^2}; R/\frac{1}{2}$

BIBLIOGRAFÍA

Ayres, F. (1974). Cálculo Diferencial e Integral. México: McGraw-Hill.

Caicedo, S.J. & Portilla, H. J. & (2020). Fundamentos de Matemáticas. Colombia, San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño.

Casablanca, M. (1995). Problemas Resueltos de Cálculo Diferencial. Bogotá: Tercer Mundo Editores.

Escobar, H. A, Caicedo, S. J. & Soto, O. F. (2022). Lecciones de Cálculo Diferencial. Colombia: Editorial Universidad de Nariño.

Farrand, S. & Poxon, N. (1988). Cálculo. Bogotá: Hardcourt Brace Jovanovich.

Fleming, W. & Varberg, D. (2003). Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica. México: Prentice - Hall.

Frank, A. (1980). Fundamentos de Matemáticas Superiores. México: McGraw-Hill.

Leithold, L. (1995). El Cálculo con Geometría Analítica. Madrid: Harper.

Penny, E. C. (1993). Cálculo con Geometría Analítica. México: Prentice-Hall.

Pinzón, Á. (1973). Cálculo Diferencial. Madrid: Harper

Piskunov, N. (1979). Cálculo diferencial e integral. Tomo I. Moscú: Mir.

Portilla, H. J. & Caicedo, S.J. (2019). Introducción a los Fundamentos de Matemáticas Generales. Colombia, San Juan de Pasto: Editorial Universidad de Nariño.

Purcell, E. & Varberg, D. (1992). Cálculo con geometría Analítica. México: Prentice-Hall.

Thomas, G. (1968). Cálculo Infinitesimal y Geometría Analítica. Madrid: Aguilar.

Zill, D. & Dewar, J. (2001). Álgebra Trigonometría. México: Mc-Graw-Hill.

ACERCA DE LOS AUTORES

Oscar Fernando Soto-Agreda.

Docente adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Magister en Modelos de Enseñanza Problémica. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Profesor Tiemplo Completo Universidad de Nariño.

Correo electrónico: oscarfdosoto@gmail.com; fsoto@udenar.edu.co.

Segundo Javier Caicedo-Zambrano.

Docente adscrito al Departamento de Matemáticas y Estadística, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Nariño. Doctor en Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima. Licenciado en Matemáticas y Física, Universidad de Nariño. Ingeniero de Sistemas, Universidad Antonio Nariño. Especialista en Computación para la Docencia, Universidad Mariana. Especialista en Multimedia Educativa, Universidad Antonio Nariño. Magister en Software Libre, Universidad Autónoma de Bucaramanga. Asesor de Desarrollo Académico, Universidad de Nariño. Profesor Tiempo Completo Universidad de Nariño.

Correo electrónico: jacaza1@gmail.com; jacaza1@udenar.edu.co.

Fecha de publicación: marzo de 2023

San Juan de Pasto – Nariño - Colombia

El presente libro "Nociones de Cálculo Diferencial: Notas de Clase" trata de manera no formal las temáticas centrales del Cálculo Diferencial, en tal sentido, está dirigido a cualquier lector con nociones básicas de matemáticas y con deseo de aprender sobre temáticas iniciales del cálculo. Si bien, en el texto no se realiza un tratamiento formal de los soportes teóricos de los conceptos del cálculo, se presenta las definiciones de manera precisa y práctica; de modo que, puede ser consultado por estudiantes de programas que incluyen la matemática como parte de su formación básica o disciplinar; también lo pueden consultar estudiantes de las artes, ciencias sociales y humanas que deseen iniciarse en el estudio del cálculo diferencial. Vale destacar que, la forma cómo se abordan los conceptos, más discursiva que matemática, hace que el libro lo puedan consultar estudiantes y profesores de diversas áreas.

El texto contiene cuatro capítulos, distribuidos de la siguiente manera. El Capítulo 1: Funciones Numéricas, realiza un repaso de las funciones numéricas; incluye el análisis de Dominio y Recorrido, los conceptos de función constante, inversa, identidad; además, contiene una revisión de las funciones numéricas más usuales: polinómica, exponencial, logarítmica, exponencial y trigonométricas directas e inversas. El Capítulo 2: Elementos de Geometría Analítica, estudia las temáticas de punto, recta, Circunferencia, Parábola, Elipse, Hipérbola; además, contiene una introducción al estudio de las coordenadas polares y la conversión con el sistema de Coordenadas Cartesianas. El Capítulo 3: Límites y Continuidad, aborda las temáticas de Límites, Continuidad de funciones, Límites infinitos y en el infinito, Infinitésimos y asíntotas de una curva, temas fundamentales para el estudio del cuarto capítulo. Finalmente, el Capítulo 4: Derivadas, introduce el estudio de recta Tangente a una curva y la derivación de funciones: suma, producto, cociente, exponencial, logarítmica, Seno, Coseno, derivación de las otras Funciones Trigonométricas, derivación implícita, derivación de una función potencial, derivación paramétrica, Derivada de la inversa de una función, aproximaciones de los valores de una función, cálculo de raíces aproximadas de una función, aplicaciones de la Derivada para el cálculo de la razón de cambio de una variable, determinación de la recta Tangente a una cura, determinación de máximos y mínimos de una función y cálculo de Límites indeterminados.

9 781234 567897

Universidad de Nariño
FUNDADA EN 1904

Universidad de Nariño
ACREDITADA DE ALTA CALIDAD
RESOLUCIÓN MEN 10567 - MAYO 23 DE 2017

Editorial
Universidad de Nariño