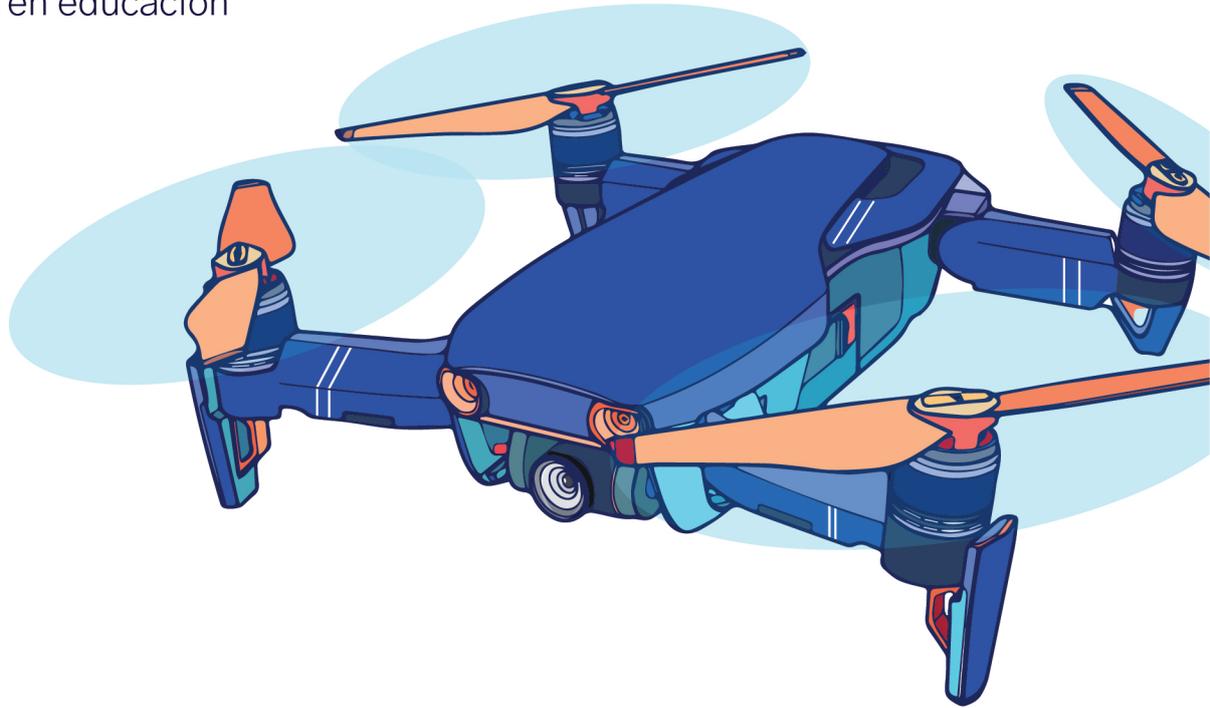


# CURSO DE FÍSICA II

Notas de clase

Para estudiantes de ciencias, ingeniería y licenciaturas en educación



Luis Aphanio Portilla Salazar



**Editorial**  
Universidad de Nariño



# Editorial

Universidad de **Nariño**

# **CURSO DE FÍSICA II**

Para estudiantes de ciencias, ingeniería  
y licenciaturas en educación

Notas de clase

# CURSO DE FÍSICA II

Para estudiantes de ciencias, ingeniería  
y licenciaturas en educación

Notas de clase

Luis Aphanio Portilla Salazar



**Editorial**  
Universidad de Nariño

Portilla Salazar, Luis Aphranio

Curso de física II : para estudiantes de ciencias, ingeniería y licenciaturas en educación, notas de clase / Luis Aphranio Portilla Salazar. -- San Juan de Pasto : Editorial Universidad de Nariño, 2023  
206 p. : il. byn., col., tablas, fot.

Incluye bibliografía p. 199-203 y bibliografía del autor p. 204

ISBN: 978-628-7509-85-6 Digital

1. Física 2. Física--Problemas, ejercicios, etc. 3. Física--Enseñanza

530 P852 – SCDD-Ed. 22



Sección de Biblioteca  
"Alberto Quijano Guerrero"

Curso de física II para estudiantes de ciencias, ingeniería y licenciaturas en educación

Notas de clase

© Editorial Universidad de Nariño

© Luis Aphranio Portilla Salazar

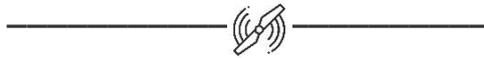
ISBN:978-628-7509-85-6

Fecha de publicación:

Diagramación y Diseño: Mateo Felipe Delgado Guerrero

Prohibida la reproducción total o parcial, por cualquier medio o con cualquier propósito sin la autorización de su Autor o de la Editorial Universidad de Nariño.

Este trabajo es el resultado de la experiencia de años dedicados a la educación universitaria, fundamentalmente en la *Universidad de Nariño*, como profesor de Física en los diferentes programas en que el Departamento de Física presta sus servicios



## Agradecimientos

Mis agradecimientos, sin duda, van a mi familia, por la comprensión y por facilitarme el tiempo que les correspondía para la elaboración de este libro.

Mis agradecimientos, también, a la Universidad de Nariño, que me ha permitido crecer como estudiante y profesor y, ahora poder publicar este trabajo, resultado de varios años de dedicación.

Luis A. Portilla S.

<b>Prólogo</b>	<b>11</b>
<hr/>	
<b>Capítulo 1</b>	<b>12</b>
<b>Preliminares</b>	<b>13</b>
Densidad	13
Densidad relativa	13
Concepto de presión	15
<b>HIDROSTÁTICA</b>	<b>17</b>
<hr/>	
1.1 Principio de Pascal	17
1.2 Prensa hidráulica	18
1.3 Presión hidrostática	23
1.4 Presión atmosférica	28
1.5 Principio de Arquímedes	32
Peso aparente	33
1.6 Aplicaciones.	35
Vasos comunicantes	35
Bombas de impulsión continuas	37
Centro de Flotabilidad.	38
Efectos fisiológicos debido a la variación de grandes alturas y profundidades.	40
<b>Capítulo 2</b>	<b>44</b>
<b>HIDRODINÁMICA</b>	<b>45</b>
<hr/>	
2.1 Ecuación de continuidad	45
2.2 Teorema de Bernoulli	46
2.3 Vuelo de planeo (vuelo de aviones y algunas aves grandes)	48
Atomizador de barbería	49
2.4 Tubo de Venturi	50
2.5 Tubo de Pitot.	52
2.6 Teorema de Torricelli.	53
Salida del agua por un orificio en la base de un tanque	53
2.7 Efecto Magnus	55
2.8 Caudal con viscosidad. Ley de Poiseuille	56
2.9 Aplicaciones. Caída de gotas de agua.	59
<b>Capítulo 3</b>	<b>63</b>
<hr/>	
3.1 Elasticidad	64
Sólidos	64
3.2 Ley de Hooke para un sólido	64
3.3 Deformación lineal	65
Energía en la deformación lineal	68
3.4 Deformación volumétrica	69
3.5 Deformación por cizallamiento o corte	72
3.6 Deformación por torsión	75

3.7 Sólidos no cristalinos	78
3.8 Sólidos extraordinarios	79
<b>Capítulo 4</b>	<b>81</b>
<b>MOVIMIENTO OSCILATORIO</b>	<b>81</b>
4.1 Movimiento Armónico Simple (MAS)	82
Periodo del MAS	87
Energía del MAS	87
Vectores rotantes del MAS	89
4.2 Péndulo simple	91
Periodo en el movimiento pendular	92
Periodo generalizado del movimiento pendular	93
4.3 Péndulo de torsión	98
4.4 Péndulo físico	100
Barra oscilante	101
4.5 Superposición de MAS en una misma dirección e igual frecuencia	101
Interferencia constructiva.	102
Interferencia destructiva.	103
Segundo método para analizar la superposición de MAS, con la misma dirección, igual frecuencia y amplitud	104
4.6 Superposición de MAS con igual dirección, desfase y frecuencias diferentes	108
4.7 Superposición de movimientos armónicos de forma ortogonal	110
4.8 Resortes en serie	116
4.9 Resortes en paralelo	116
4.10 Movimiento oscilatorio amortiguado	117
Movimiento oscilatorio subamortiguado	119
Decaimiento logarítmico	120
Energía de disipación	122
Movimiento amortiguado sobre-amortiguado	123
Movimiento amortiguado crítico	124
4.11 Movimiento Oscilatorio Forzado	125
Energía disipada en el movimiento forzado	131
Ancho de banda	134
<b>Capítulo 5</b>	<b>137</b>
<b>MOVIMIENTO ONDULATORIO</b>	<b>137</b>
5.1 Clasificación de ondas	139
5.2 Clasificación de las ondas mecánicas	140
Ondas longitudinales.	140
Ondas transversales.	141
5.3 Elementos y características de las ondas	141
Frente de onda	141
Principio de Huygens	142

Propiedades de las ondas	143
Reflexión de ondas.	143
Refracción de ondas.	143
Difracción de ondas	144
Interferencia de ondas	144
Polarización de ondas	145
Espectro electromagnético	146
5.4 Ecuación de onda	148
5.5 Frente de onda esférico	151
5.6 Energía de la onda	153
5.7 Onda transversal en una cuerda	153
5.8 Ondas longitudinales en una barra	155
5.9 Onda transversales en una barra	157
5.10 Ondas de torsión	160
5.11 Ondas en la superficie del agua	161
5.12 Ondas de presión en un gas	163
5.13 Energía en la onda de presión en una columna de gas	166
5.14 Ondas sonoras	167
Características del sonido	167
Umbrales de audición	169
Eco localización	176
5.15 Superposición de ondas	178
Interferencia constructiva en las ondas	179
Interferencia destructiva en las ondas	179
Velocidad de grupo	181
Funciones de Fourier	184
5.16 Instrumentos musicales	185
Cuerdas vibrantes	186
Tubos sonoros abiertos	187
Tubos sonoros cerrados	187
5.17 Efecto Doppler	189
Ondas de choque	193
Aplicaciones en medicina	195
<b><u>BIBLIOGRAFÍA</u></b>	<b><u>199</u></b>
<b><u>REFERENCIAS</u></b>	<b><u>201</u></b>
<b><u>Autor</u></b>	<b><u>204</u></b>

# Prólogo

Notas de clase de Física II es el resultado de más de 35 años de experiencia docente a nivel universitario con las asignaturas de: Física I, II, III, Biofísica, Termodinámica, Óptica, mecanismos, Física moderna, Energías alternativas entre otras tanto a estudiantes de la carrera de física como a servicios que lo solicitan.

Así que este libro recoge toda esa experiencia, aún, desde cuando fui estudiante de pregrado y como no recordar a los profesores Bacca, Caicedo y sobre todo al padre Remigio Fiore que si bien no nos cruzamos en el plan de profesor y alumno si me ayudó muchísimo en mis primeros años de trabajo como profesor hora catedra en la Universidad de Nariño con sus apuntes libros y consejos.

La experiencia lograda como docente más la formación académica adquirida durante todos estos años me ha permitido elaborar estas notas de clase siguiendo una línea de construcción del conocimiento, razón por la cual, el libro está conformado por cinco capítulos que son: Hidrostática, Hidrodinámica, Deformación, Movimiento oscilatorio, y Ondas. Los conceptos analizados y demostrados en el primer capítulo son la base para el siguiente y así sucesivamente, esto ayuda al estudiante y en general al lector a tener una lectura fluida, además el lenguaje utilizado es muy sencillo y cotidiano así que no hay palabras ni términos exigentes que en muchas ocasiones entorpecen la comprensión de lo expuesto.

Por otra parte, los procesos de demostraciones y ejercicios matemáticos se han desarrollado casi en su totalidad, entendiendo que nuestros estudiantes y lectores en muchos casos llegan con deficiencia cognitiva en matemáticas.

Respecto al diseño del libro las figuras y esquemas fueron realizadas en AutoCAD. Software de diseño en ingeniería y arquitectura, dado a mi formación también como ingeniero Industrial, me permitió realizar las figuras de acuerdo a la necesidad de la redacción de las notas de clase.

Algunas fotografías fueron tomadas de páginas de internet las mismas que se encuentran referenciadas de igual manera, las tablas de módulos son resúmenes de manuales de empresas manufactureras de los materiales en mención.

Finalmente, las notas de clase fueron escritas en Word y la parte matemática con el editor de ecuaciones 3.0 de Microsoft, para comprobar los resultados se utilizó Math de Cientific Word Place.

La bibliografía para escribir estas notas de clase aparece al final del libro y son libros convencionales que se han utilizado a lo largo de todos estos tiempos.

# Capítulo 1



## Hidrostática

*Dique Escaba. Sobre el río Marapa en el sur de la provincia de Tucumán Argentina construido en 1948.*



# Preliminares

Para iniciar este capítulo, es necesario precisar algunos conceptos de tipo general, como son la densidad y la presión, que permitan entender otros conceptos, que se van a analizar después.

## Densidad

La densidad es una magnitud escalar que relaciona la masa respecto a su volumen y se denota por la letra griega “ $\rho$ ” Así entonces la densidad en términos generales se puede expresar como:

$$\rho = \frac{dm}{dv} \quad (1.1).$$

Cuando la masa y el volumen permanecen constantes como en el caso de un sólido o un líquido, se puede escribir como:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (1.2).$$

En el sistema internacional (SI), las unidades de la densidad pueden expresarse como:  $[\rho] = \frac{[kgm]}{[m^3]}$  (se debe leer: kilogramos masa respecto a metros cúbicos).

En el sistema centesimal, la densidad queda expresada como  $[\rho] = \frac{[Gm]}{[cm^3]}$  (gramos masa respecto a centímetros cúbicos)

Lo anterior muestra claramente como 100gm de madera de balsa ocupan un gran volumen al compararlos con 100gm de hierro, esto indica que el hierro es mucho más denso que la madera, en el caso de comparar metales se puede dar cuenta que todos tiene su propia densidad por ejemplo el mercurio Hg 13.6gm/cm<sup>3</sup> y el oro Au 19.3gm/cm<sup>3</sup>. Cuando se trata de caracterizar cualquier sustancia desconocida, una de las variables a tener en cuenta es precisamente la densidad.

## Densidad relativa

La densidad relativa de una sustancia se expresa como la relación entre su densidad y la densidad de otra sustancia como referencia. Es decir, es una magnitud adimensional (sin unidades):

$$\rho_r = \frac{\rho}{\rho_0} \quad (1.3)$$

donde:

$\rho_r$  densidad relativa.

$\rho$  densidad de la sustancia.

$\rho_0$  densidad de referencia o absoluta.

Para los líquidos y los sólidos, la densidad de referencia es la del agua líquida a la presión de 1 atm y una temperatura de 4 °C. En esas condiciones, la densidad absoluta del agua destilada es de 1000 kg/m<sup>3</sup>; es decir, 1 kg/dm<sup>3</sup>. Para los gases, la densidad de referencia es la del aire a la presión de 1 atm y la temperatura de 0 °C.

Algunas densidades de sustancias conocidas se pueden ver en la Tabla 1.1

Tabla 1. Densidades de algunas sustancias conocidas más usadas.

Sustancia		$10^3 \text{ (Kg/m}^3\text{)}$	Sustancia		$10^3 \text{ (Kg/m}^3\text{)}$
Hielo agua sólida		0,917	Alcohol etílico		0,8
Aluminio	Al	2,7	Benceno	C6H6	0,88
Hierro	Fe	7,8	Agua	H2O	1
Cobre	Cu	8,92	Glicerina	C3H8O3	1,26
Plata	Ag	10,52	Mercurio	Hg	13,6
Plomo	Pb	11,33	Aire		1,29
Oro	Au	19,3	Oxígeno	O	1,43
Platino	Pt	21,4	Helio	He	0,179
			Hidrógeno	H	0,089

Fuente: (Serway y Jewett, 2008, p.391)

## Concepto de presión

Este concepto se define como:

$$P = \frac{dF}{dA} \quad (1.4).$$

Si la fuerza y el área son cantidades constantes, entonces se puede escribir como.

$$P = \frac{F}{A} \quad (1.5).$$

En el sistema internacional, las unidades son: para la fuerza es el Newton y para el área es el metro cuadrado; es decir, Newtons/metro cuadrado en forma simbólica, se escribe:  $[P] = \frac{[N]}{[m^2]}$ . Esta unidad se conoce con el nombre de Pascal (Pa).

En el sistema centesimal, las unidades serían: Dínas/centímetros cuadrados; en forma simbólica, se tiene:  $[P] = \frac{[D]}{[cm^2]}$ ; a esta unidad se le llama baria.

Para encontrar un valor equivalente entre Pascales y barias, se deben tener en cuenta las equivalencias de las unidades primarias, así:

$$1Pa = \frac{N}{m^2} = \frac{kgm\frac{m}{s^2}}{m^2}. \text{ Cada unidad de estas tiene sus propios equivalentes.}$$

$$\frac{10^3 gm\frac{10^2 cm}{s^2}}{(10^2 cm)^2} = \frac{10^5 gm\frac{cm}{s^2}}{10^4 cm^2} = 10 \frac{D}{cm^2} = 10Barias.$$

Así que  $1 Pa = 10$  barias.

Otra unidad muy utilizada es P.S.I libras por pulgadas cuadradas; como es una unidad inglesa, se tiene: Inchs (pulgadas), Pounds (libras) y Scuarch (cuadrada); es decir:

$$PSI = \frac{Lb}{Pg^2}.$$

Como la libra equivale a 0,4536 Kg y una pulgada equivale a 2,54 cm, entonces el valor equivalente en barias será:

$$1PSI = \frac{0,4536kg_f}{(0,0254m)^2} = \frac{0,4536kg_f}{6,45 \times 10^{-4}m^2} = 703,256 \frac{kg_f}{m^2} = 6897,22 \frac{N}{m^2}.$$

Esto es:  $1PSI = 6897,22Pa$ .

Y, en el caso del sistema centesimal, sería:

$$1 \text{ PSI} = 68972,2 \text{ barias.}$$

Hay otras unidades que, a medida que se avance en el curso, se tendrán que explicar.

Ahora bien, el concepto de presión es inversamente proporcional con el área y directamente proporcional con la fuerza, pero es más interesante establecer cómo la presión puede ser mayor o menor dependiendo del área. Numerosos ejemplos ilustran cómo la presión se incrementa con solo disminuir el área, como es el caso de los tacones de las zapatillas de las mujeres: cuanto más pequeña sea el área del tacon, mayor es la presión, tanto que puede dañar pisos de madera.

Otro ejemplo que ilustra este concepto se relaciona con las llantas de los vehículos: en aquellas que se encuentran bien infladas, el área de contacto con el piso es pequeña y, por tanto, son susceptibles de enterrarse en la arena o en el fango; para evitarlo, se puede bajar la presión (desinflar la llanta) para que el área sea mayor y disminuya la presión contra el piso; en el deporte de cross, a los vehículos es pertinente bajarles la presión a las llantas para que se ensanchen y aumenten el área de contacto para evitar que se entierren o derrapen.

Los objetos punzantes, como las agujas, con las que se ponen las inyecciones, tienen puntas muy agudas, lo que permite tener un área muy pequeña de contacto con la piel, de tal manera que una mínima fuerza define una gran presión, capaz de romper la piel y penetrar hasta los tejidos a los que fuera necesario llegar.



Figura 1.1

Cama de clavos; la suma de numerosas puntillas permite sostener al cuerpo del autor del libro sin que le pase nada. La cama de clavos está en el Museo de las Ciencias, en ciudad de México.

La punta de un clavo es lo suficientemente aguda para penetrar cualquier material; sin embargo, cuando se suman varias de estas puntas, pueden soportar un cuerpo recostado sobre ellas, como se puede ver en la fotografía de la Figura No 1.1, donde el autor del libro se encuentra recostado sobre una cama de clavos.

Nota. Es menester aclarar que la presión es un escalar a pesar de que la fuerza es un vector que esta siendo operado con un escalar como es el inverso del área, asunto que puede quedar mucho más claro en el siguiente contenido.

## HIDROSTÁTICA

Corresponde al estudio del agua en estado líquido y en reposo o quietud, como lo que ocurre en el agua que se encuentra en un vaso o en una piscina. Estos principios pueden extenderse hacia otros líquidos, como aceites muy ligeros y demás, respetando las características de cada líquido.

### 1.1 Principio de Pascal



Figura 1.2.  
Blaise Pascal, físico francés del siglo XVII.  
Fuente: El espectador (2021).

El francés Blaise Pascal (1623-1662) Figura 1.2, que, además de físico, fue matemático, filósofo, escritor e inventor de las máquinas de contar que se conocen con el nombre de registradoras mecánicas, descubrió el principio que lleva su nombre y se enuncia de esta forma: “Cualquier variación de presión que se haga en el interior de un líquido incompresible, se transmite en todas las direcciones con igual intensidad”. *(Se dijo que la presión es una magnitud escalar, por tanto, el principio de Pascal no se podría enunciar si la presión fuera un vector, dado a que dos vectores son iguales si y solo si tienen igual magnitud, dirección y sentido, y en este caso, la distribución de la presión es igual en todas las direcciones, la demostración matemática de este asunto no se encuentra en este nivel).*

En el campo de los fluidos de gases y líquidos, los líquidos son altamente incompresibles y, como tale, pueden resistir altas presiones en su interior sin que se modifique el volumen inicial.

Como ya se dijo, la hidrostática se refiere al estudio de las propiedades físicas del agua en reposo, así que el agua es el líquido elegido para este estudio; también se le aproximan bastante bien los aceites y demás líquidos empleados en la industria para transmitir altas presiones sin que se modifique su volumen.

Se entiende que dicha variación de presión se manifiesta en la superficie interna del recipiente.

En la Figura 1.3, se puede ver cómo al aplicar una fuerza en el vástago del émbolo del balón, se transmite hasta la superficie del émbolo y, al fin, se convierte en presión en el interior del líquido para distribuirse de forma equitativa en todas las direcciones hasta expulsar los tapones todos a la vez, si se encuentran con un mismo ajuste

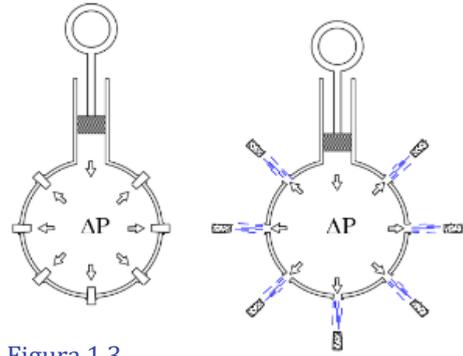


Figura 1.3. Taponan de los orificios que son expulsados a la ves si se encuentran con el mismo ajuste.

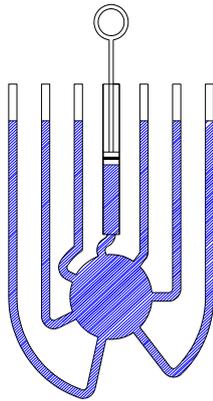


Figura. 1.4 Esquemas de tubos con igual nivel del liquido contenido

La aplicación de este principio se puede ver en la grafica 1.4 en donde el émbolo hace una presion al interior del balón y ésta se distribuye de tal manera que el nivel del líquido en los tubos abiertos es igual, en la tecnica está presente en los frenos hidráulicos de los vehículos y fundamentalmente en la prensa o gatos hidráulicos que se usan para levantar cuerpos muy pesados como vehículos pequeños y grandes.

## 1.2 Prensa hidráulica

Es un artefacto hidromecánico con el que se pueden levantar pesadas cargas usando fuerzas pequeñas; así que se puede decir que es un amplificador de fuerza. Según la Figura 1.5, la prensa hidráulica consta de dos cilindros de diferente diámetro, en los cuales se pueden deslizar émbolos que realizan un cierre perfecto con el cilindro para evitar que se escape el líquido por las paredes; los cilindros están conectados por un ducto que, en muchos casos, lleva un par de válvulas, para impedir el retorno del líquido, una vez el émbolo pequeño hubiera realizado el recorrido; así, entonces, el líquido que ha pasado al émbolo grande no regresa, lo que permite repetir el proceso una y otra vez después de que exista un reservorio del líquido.

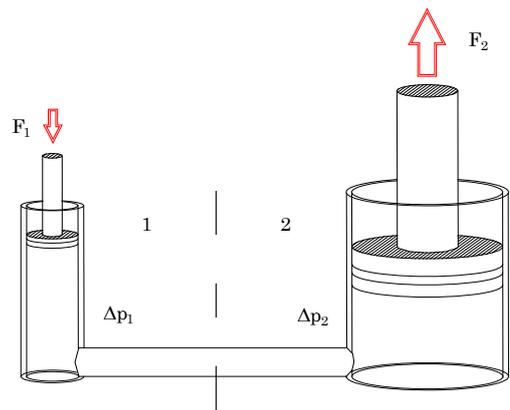


Figura 1.5. Sistema de prensa hidráulica conformada por dos cilindros, un grande y uno pequeño, cada uno con su correspondiente émbolo, comunicados por un ducto.

Ahora bien, cuando el émbolo pequeño genera una variación de presión en el líquido, esta se transmite al interior del cilindro mayor y actúa en las paredes cilíndricas y circulares; como las paredes cilíndricas y circular inferior no ceden, entonces la superficie del émbolo puede moverse y en ella se refleja la presión para convertirse en fuerza que se transmite al vástago en forma de fuerza poderosa.

Así que la variación de presión ( $\Delta P_1$ ) que está en el lado 1, es igual a la variación de presión ( $\Delta P_2$ ) en el lado 2; esto es:

$$\Delta P_1 = \Delta P_2 \quad (1.6).$$

Ahora bien, como:  $\Delta P = \frac{F}{S}$ , donde la fuerza 1 corresponde a la que se aplica en el émbolo 1 y la fuerza 2 es la que resulta en el émbolo 2, además, el área corresponde al área transversal de los émbolos representada por S, así que:

$$\frac{F_1}{S_1} = -\frac{F_2}{S_2} \quad (1.7).$$

Nota. El signo menos se utiliza para definir la dirección de la fuerza resultante en el émbolo 2; por tanto, la fuerza 2 queda:

$$F_2 = -\frac{S_2}{S_1} F_1.$$

La relación de áreas transversales corresponde al factor de amplificación de la máquina hidráulica.

Como el área transversal es:  $S = \pi r^2$ , entonces la fuerza 2 será:

$$F_2 = -\frac{\pi r_2^2}{\pi r_1^2} F_1.$$

Así que, al fin, se tiene:

$$F_2 = -\frac{r_2^2}{r_1^2} F_1 \quad (1.8).$$

La relación  $\frac{r_2^2}{r_1^2}$  es el factor de amplificación ( $\gamma$ ), así que la expresión 1.8 se puede escribir como:

$$F_2 = -\gamma F_1. \quad (1.9).$$

Ejemplo 1:

En un sistema hidráulico se tienen dos émbolos, cuyos diámetros son:  $\phi_1 = 1\text{ cm}$  y  $\phi_2 = 8\text{ cm}$ . Si se aplica una fuerza de 80 N en el émbolo de menor diámetro a) ¿Qué fuerza se tiene en el segundo émbolo? b) ¿Cuál es el recorrido del émbolo 2 cuando el pequeño recorre 5cm?

Solución

a) Al utilizar la ecuación (1.8)  $F_2 = -\frac{r_2^2}{r_1^2} F_1$ , como el diámetro es el doble del radio, entonces,  $F_2 = -\frac{(\frac{\phi_2}{2})^2}{(\frac{\phi_1}{2})^2} F_1$ , por lo que la expresión (1.8) también se puede expresar como:

$$F_2 = -\frac{(\phi_2)^2}{(\phi_1)^2} F_1.$$

Si se remplazan valores, se tiene:

$$F_2 = -\frac{(8\text{ cm})^2}{(1\text{ cm})^2} 80\text{ N}$$

$$F_2 = -(64)(80\text{ N})$$

$$F_2 = -5120\text{ N} *$$

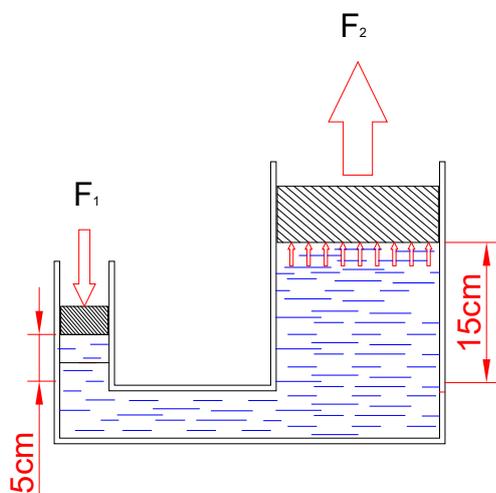


Figura 1.6. Esquema de prensa hidráulica con los recorridos de cada émbolo.

Como se puede ver, la fuerza resultante en el émbolo 2 es mucho mayor que la fuerza aplicada en el émbolo 1 y, además, es de sentido contrario por tanto lleva signo menos.

b) Para calcular el recorrido del émbolo 2, cuando el émbolo 1 haya recorrido 5 cm, como se puede ver en la Figura 1.6. se tiene que la variación del volumen 1 es igual a la variación del volumen 2 esto es:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 \quad (1.10),$$

lo que se puede escribir como:

$$S_1 \Delta h_1 = S_2 \Delta h_2,$$

de donde se puede despejar  $h_2$  (recorrido del émbolo 2):

$$\Delta h_2 = \frac{S_1}{S_2} \Delta h_1$$

$$\Delta h_2 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} \Delta h_1$$

$$\Delta h_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \Delta h_1.$$

Además, como el diámetro es el doble del radio, entonces:

$$\Delta h_2 = \frac{\left(\frac{\phi_1}{2}\right)^2}{\left(\frac{\phi_2}{2}\right)^2} \Delta h_1,$$

o, lo que es lo mismo:

$$\Delta h_2 = \frac{(\phi_1)^2}{(\phi_2)^2} \Delta h_1.$$

Al remplazar valores, se tiene:

$$\Delta h_2 = \frac{(1 \text{ cm})^2}{(8 \text{ cm})^2} 5 \text{ cm}$$

$$\Delta h_2 = 0,078 \text{ cm}.$$

Esto es lo que recorre el émbolo 2, por cada recorrido del émbolo 1; ahora bien, se trata de que el recorrido total del émbolo 2 fuera de 15 cm; entonces, habrá que realizar varios recorridos por parte del émbolo 1, pues de la misma manera como es la amplificación de la fuerza es la disminución del recorrido en el émbolo grande.

Para conocer el número de veces que habría que accionar el émbolo 1, para que el émbolo grande recorra 15 cm., se parte de que el desplazamiento del émbolo grande corresponde a un número determinado de veces del recorrido del émbolo pequeño; esto es:

$$H = nh_2 \quad (1.11).$$

De tal manera que:  $n = \frac{H}{h_2}$ ; por tanto, al reemplazar valores se tiene:

$n = \frac{15 \text{ cm}}{0,078 \text{ cm}} = \mathbf{192 \text{ veces}}$ , en que habría que accionar el émbolo pequeño para que se pudiera cumplir con el recorrido de 15 cm del émbolo grande; se entiende,

entonces, que debe haber un depósito de líquido hidráulico que permite retomar el volumen 192 veces.

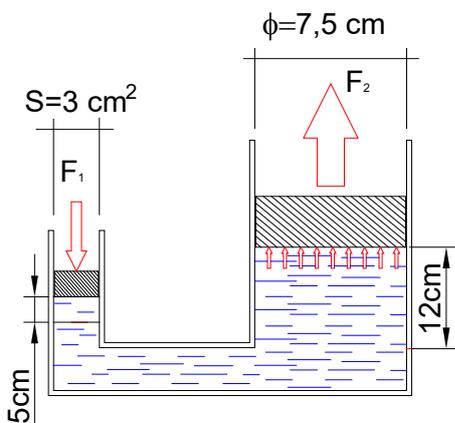


Figura 1.7.  
Se tiene una sección transversal y un diámetro.

### Ejemplo 2.

En la Figura 1.7, un sistema hidráulico, donde el émbolo pequeño tiene una sección transversal de 3 cm<sup>2</sup>; si el émbolo mayor tiene un diámetro de 7,5 cm:

a) ¿Qué fuerza y qué recorrido hace cuando en el émbolo pequeño se aplica una fuerza de 25 N?

b) Si el émbolo pequeño recorre 5 cm. ¿Cuántas veces se lo debe accionar, para que el émbolo mayor realizará un recorrido de 12 cm?

### Solución.

De la ecuación (1.7), se tiene:

$$F_2 = -\frac{S_2}{S_1} F_1.$$

Dado que en el ejemplo se tiene sección transversal S y diámetro  $\Phi$  del émbolo grande, entonces:

$$F_2 = -\frac{\pi \times 3,75^2 \text{ cm}^2}{3 \text{ cm}^2} 25 \text{ N}$$

$$F_2 = -368,155 \text{ N}$$

### Nota.

En adelante se omitirá el signo menos, porque no siempre se tendrá la misma configuración geométrica de la prensa hidráulica; puede ocurrir que el émbolo pequeño esté detrás del grande y accione en la misma dirección que lo hace el grande.

Para calcular el recorrido, como en el caso anterior, se parte de la igualdad de volúmenes:

$$V_1 = V_2$$

$$S_1 h_1 = S_2 h_2$$

$$h_2 = \frac{S_1}{S_2} h_1$$

$$h_2 = \frac{3\text{cm}^2}{44,178\text{cm}^2} 5\text{cm}$$

$$h_2 = 0,3395 \text{ cm}$$

Y, de igual forma, para el cálculo del número de veces que se debería accionar para poder desplazar el émbolo grande 12 cm:  $n = \frac{H}{h_2}$

Al remplazar valores, se tiene:

$$n = \frac{12 \text{ cm}}{0,0,3395\text{m}} = 35,34\text{veces}.$$

En la tecnología moderna, se utilizan bombas continuas; es decir, al tener una prensa hidráulica de tipo industrial, al émbolo pequeño lo remplazan unas pequeñas bombas, llamadas cápsulas de Jade; de esta forma, los sistemas oleo-hidráulicos están presentes en retro-excavadoras, buldóceres, volquetas y demás maquinaria industrial y de construcción.

### 1.3 Presión hidrostática

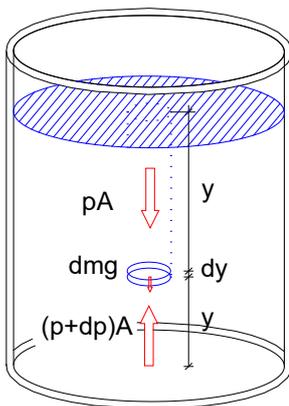


Figura 1.8.  
Sistema de fuerzas que actúan sobre el elemento de volumen.

Cuando se tiene la posibilidad de estar en una piscina, se puede experimentar una sensación bastante interesante, como si se liberara del peso; es decir, se siente más liviano y con deseos de saltar; si no fuera por la resistencia que el agua misma le ofrece. Con un poco de técnica de natación se puede flotar tanto en la superficie como en el interior de la piscina, lo que permite realizar cualquier pirueta histriónica; con técnicas de natación, resulta mucho más fácil y saludable; para los peces, por ser su hábitat por naturaleza, pueden descender y flotar al parecer sin esfuerzo alguno y así ocurre con todos aquellos seres cuyo hábitat es el agua. Cuando hay un cambio brusco de presión ocurren fenómenos como los que se ven en las camarónicas, una vez las

redes han vaciado el contenido en las bandas transportadoras es frecuente observar estrellas de mar y otros seres, que tienen aspecto de “crispeta”, prácticamente estallados debido a que la presión interna del animalito es mayor que la atmosférica;

en las clases de buceo, en especial se enfatiza cuando se va a salir a flote, así que esto delata el efecto que hay en el interior del líquido, debido al peso del agua que se encuentra por encima.

Para verlo, considérese un fluido en equilibrio, en el cual se encuentra un elemento de volumen  $dV$ , de altura  $dy$ , área  $A$  y localizado a una profundidad  $y$ .

Para el análisis, considerérese que el elemento de volumen se encuentra en un sistema inercial de reposo; por tanto,  $\sum_{i=1}^n F_i = 0$ ; de acuerdo a la Figura 1.8, las fuerzas que se pueden ver son: por una parte, el mismo peso del elemento de volumen  $dmg$ , la  $F_1$  debido al peso de la columna de agua por encima del elemento de volumen y la  $F_2$  que está por debajo del elemento de volumen, con dirección positiva, debido al peso del líquido que permite tener en equilibrio al elemento en mención. Según esto, el sistema inercial se puede escribir como:

$$F_2 - dm g - F_1 = 0 \quad (1.12).$$

Como la presión a la profundidad  $y$  es  $P$ , entonces  $F_1 = PA$ , mientras que a la profundidad  $y + dy$  será  $P + dP$ ; así que la  $F_2 = (P + dP)A$  y, al fin, el peso del elemento de volumen es  $dm g = \rho g dV$ ; como se sabe que el elemento de volumen es:  $dV = A dy$ , así que el elemento de volumen tiene un peso de  $dm g = \rho g A dy$ . Al remplazar en 1.12, se tiene:

$$(P + dP)A - \rho g A dy - PA = 0 \quad (1.13).$$

Al desarrollar el paréntesis, se tiene:

$$dP = \rho g dy \quad (1.14).$$

Para tener una solución a la ecuación (1.14), se realiza el proceso de integración, para lo cual se debe tener en cuenta que la profundidad no es muy grande, la densidad del agua permanece constante a pesar de que la presión cambia con la profundidad; en virtud de este hecho, la densidad se debe considerar constante y, por tanto, la profundidad va de 0 hasta  $y$ , donde se tiene la presión ambiente  $P_0$  en la superficie del líquido;

Por tanto:

$$\int_{P_0}^P dP = \rho g \int_0^y dy \quad (1.15)$$

$$P - P_0 = \rho g y \quad (1.16)$$

$$P = P_0 + \rho g y \quad (1.17).$$

En este grupo de ecuaciones, se tiene que, según (1.16),  $P - P_0$  es la presión manométrica y, según la ecuación (1.17), se tiene la presión absoluta.

Ejemplo 1. Encontrar la presión absoluta a 100 m de profundidad, si se considera que la presión atmosférica es:  $P_0 = 1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ .

**Solución.**

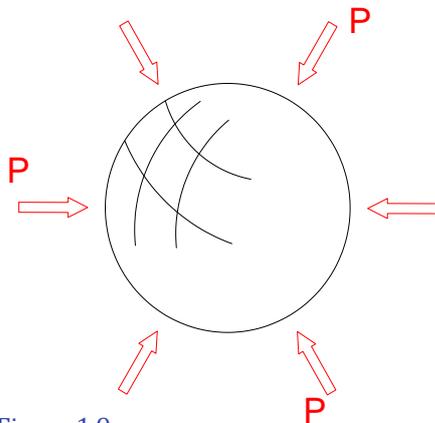
Al utilizar la ecuación (1.17), la presión es:  $P = P_0 + \rho g y$ .

$$P = 1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2 + \left( 10^3 \text{ Kg/m}^3 \times 9,81 \text{ m/s}^2 \times 10^2 \text{ m} \right)$$

$$P = \left( 1,01 \times 10^5 \text{ N/m}^2 \right) + \left( 9,8 \times 10^5 \text{ Kg} \frac{\text{m}}{\text{m}^2 \text{ s}^2} \right)$$

$$P = 10,81 \times 10^5 \text{ N/m}^2$$

**Ejemplo 2**



**Figura 1.9.**  
Esfera sometida a presión en todas las direcciones, cuando se encuentra en la profundidad del océano.

Calcular la fuerza sobre la superficie de una esfera de diámetro 30 cm, debido a la presión hidrostática cuando se encuentra sumergida, a 100 metros de profundidad. (Ver Figura 1.9)

**Solución**

Como:  $P = F/A$ , por tanto  $F = P A$ ; como el área de la esfera es  $A = 4\pi r^2$ , al remplazar valores, se tiene:

$$F = \left( 1,08 \times 10^6 \text{ N/m}^2 \right) (4\pi(0,15\text{m})^2)$$

$$F = 0,3 \times 10^6 \text{ N.}$$

**Ejemplo 3**

Las dimensiones de una piscina son: 12 m de longitud, 6 de ancho y 1,5 m promedio de profundidad: a) calcular la presión manométrica en el fondo de la piscina; b) la fuerza total en el fondo, debido a la cantidad de agua contenida; c) determinar la presión absoluta en el fondo bajo condiciones atmosféricas normales.

### Solución

Para calcular la presión manométrica en el fondo de la piscina, se utiliza la fórmula (1.16), en que, al remplazar los valores se tiene:

$P - P_0 = (1000 \text{ kg/m}^3)(9,81 \text{ m/s}^2)(1,5\text{m})$  lo que es igual:  $14715 \text{ N/m}^2$ ; también, el resultado puede ser en kilogramos fuerza o kilopondios; al dividir entre el valor de la gravedad, se obtiene  $1500 \text{ kgf/m}^2$ , si se quiere por  $\text{cm}^2$ ,  $0,15 \text{ kgf/cm}^2$ .

Para calcular la fuerza total en el fondo de la piscina, se hará mediante el concepto de presión; según la expresión (1.5),  $P = \frac{F}{A}$ , de tal manera que la fuerza es:  $F = PA$ ; al remplazar los valores respectivos, se tiene:  $F = (14715 \text{ N/m}^2)(12\text{m})(6\text{m})$ ; así que esto da:  $F = 1059480\text{N}$ ; si se divide por la gravedad, se tiene en kilogramos fuerza o kilopondios  $F=10800 \text{ Kgf}$  o 108 toneladas de peso.

c) La presión absoluta es la suma de la presión manométrica más la presión atmosférica. Ahora bien, en la realidad, solo se podrá medir la presión barométrica y ¿por qué no la presión absoluta? Porque la presión atmosférica, como se verá luego, actúa en todas las direcciones; por tanto, todo el volumen de la piscina está sometida a la presión atmosférica; por tanto, la presión que se registra en el fondo de la piscina es la barométrica.

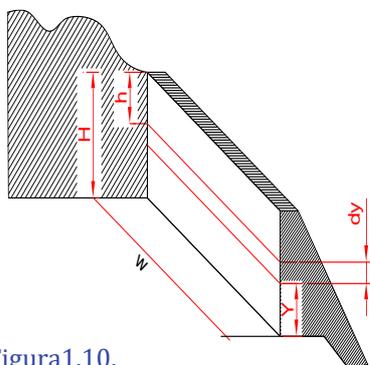


Figura 1.10. Dique o muro de contención de una represa.

se tiene:  $\Delta F = \rho gh \Delta S$  (1.18).

De acuerdo a la Figura 1.10, el elemento de área se puede expresar como:  $\Delta s = w \Delta y$ .

Además, si estos incrementos se los lleva al límite, se pueden escribir así:

$$dF = \rho gh w dy \quad (1.19).$$

Aquí la solución es:

$$\int_0^F dF = \int_0^H \rho gh w dy.$$

### Ejemplo 4

a) Calcular la fuerza que ejerce el agua de una represa sobre el dique o muro de contención.

### Solución.

Recuérdese que la presión hidrostática se puede escribir como:  $P = \rho gh$  donde h es la profundidad. Por otra parte, como:  $P = \frac{\Delta F}{\Delta S}$ , entonces:

$\Delta F = P \Delta S$ , al remplazar en la presión hidrostática,

Como  $h = H - y$ , entonces:

$$F = \rho g w \int_0^H (H - y) \cdot dy$$

$$F = \rho g w H^2 - \frac{1}{2} \rho g w y^2 \Big|_0^H$$

$$F = \frac{1}{2} \rho g w H^2 \quad (1.20).$$

Si a esto se le dan valores, como:  $H = 30$  m y  $W = 100$  m, al remplazarlos, se tiene:

$$F = \frac{1}{2} (1000 \text{ Kg}/\text{m}^3) (9,81 \text{ m}/\text{s}^2) (100\text{m})(30\text{m})^2$$

$$F = 4,41 \times 10^8 \text{ N}.$$

También, se podría preguntar cuál es el momento o torque que el agua produce en el muro.

Por definición de momento de una fuerza o torque, es:  $\tau = R \times F$ ; para el caso, se debe tener en cuenta que la presión del agua genera una fuerza perpendicular al muro a una distancia “y” del piso, por lo que se puede plantear  $d\tau = Fdy$ , donde la fuerza es la que se encontró:

$$d\tau = \frac{1}{2} \rho g w y^2 dy$$

$$\int_0^\tau d\tau = \int_0^H \frac{1}{2} \rho g w y^2 dy$$

$$\tau = \frac{1}{6} \rho g w H^3 \quad (1.21).$$

Por último, falta preguntarse ¿Dónde o a qué altura del muro se concentra la fuerza?

Para que el muro sostenga esa fuerza, debe plantearse un punto de equilibrio; es decir, donde se dé un sistema inercial; esto es:  $\sum \tau = 0$ . Por una parte, los torques que se presentan son el momento de fuerza que genera la presión del agua y, por la otra, está el momento que el muro debe soportar; esto es:

$$\tau_{muro} - \tau_{presion} = 0.$$

Como el torque, debido a la presión, se da en términos de la fuerza y donde se aplica, es la altura del muro justamente la pregunta del literal. Así que:  $Fy = \tau$ , donde la fuerza y el torque ya se han calculado.  $Fy = \tau_{debido a la presión}$

Al remplazar, se tiene:

$$\left(\frac{1}{2}\rho g w H^2\right) y = \frac{1}{6}\rho g w H^3.$$

Al simplificar términos, se obtiene:

$$y = \frac{1}{3}H \quad (1.22).$$

En (1.22), se tiene la altura medida desde el piso hacia arriba, donde el ingeniero debe tener en cuenta que, de acuerdo a los datos del ejemplo, se obtiene:  $y = \frac{30m}{3} = 10m$  del piso.

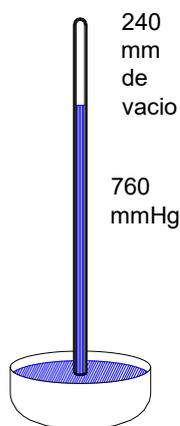
En esta altura, los ingenieros deben poner mucho cuidado para reforzar el dique y tener en cuenta cuando la represa haya llegado al nivel crítico.

## 1.4 Presión atmosférica

La atmósfera, como parte fundamental del planeta, ha existido y evolucionado desde que la tierra también se formó; en la actualidad, lo que se tiene de atmósfera es el resultado de la evolución que ha permitido la vida.

Los componentes del aire son: 78% de nitrógeno, 21% de oxígeno y el 1% restante conformado por: dióxido de carbono, hidrógeno, argón, neón, helio, metano, vapor de agua, humo, polvo entre otros.

El oxígeno, elemento fundamental para la vida y la salud, se concentra más al nivel del mar que a grandes alturas, por lo que es más fácil, para una persona serrana, realizar ejercicios a nivel del mar, que para un costeño correr en la altura de las montañas, si no se tiene un buen entrenamiento.



**Figura 1.11.**  
Barómetro de Torricelli;  
altura de la columna de  
mercurio de 76 cm.

Una pregunta que no podía faltar en los círculos de intelectuales en los siglos XVI y XVII era: ¿El aire tiene peso? Numerosos experimentos se realizaron para contestar el interrogante; se afirmaba que no es posible quitar el aire; más aún, desde el tiempo de los griegos, Aristóteles había acuñado el concepto del éter para cumplir con la necesidad de la existencia de algo, para evitar el vacío, y con esto afirmar que

la naturaleza le tiene terror al vacío. Sin embargo, en 1643, el físico italiano Evangelista Torricelli, ayudante de Galileo, después de numerosos experimentos propuso uno, que permitía medir el peso del aire mediante un aparato novedoso, hoy llamado barómetro de Torricelli. Básicamente, consta de una balanza que permite medir el peso del aire al compararlo con una columna de mercurio, como el representado en la Figura 1.11; El extremo abierto del tubo debe estar sumergido en

el interior de la cubeta, esto se logra una vez se lo haya llenado e invertido, de esta manera se evita que entre aire al interior de este; así que el mercurio dentro del tubo cae por su propio peso y deja un vacío en la parte superior; la columna se detiene cuando haya llegado a una altura de 760 mm; esta columna de mercurio soportaba a la columna de aire de kilómetros de altura, en cuyo extremo superior está el vacío cósmico, como el vacío que hay en la parte superior del tubo. Por tanto, la función del barómetro es comparar los pesos de dos columnas, una de aire y otra de mercurio.

Ahora bien, la atmósfera es una enorme masa gaseosa que envuelve totalmente al planeta, pero si se compara el radio del planeta, de 6731 Km, con el espesor de la atmósfera, 12 Km, resulta muy pequeño: solo el 0,2%; sin embargo, su peso genera una presión que se manifiesta en todo sitio y lugar de la superficie terrestre. Su valor no es constante, ya que varía con la altitud sobre el nivel del mar y otros factores ambientales.

Como punto de referencia, se ha tomado el nivel del mar, a una temperatura de 20 °C, así que, al utilizar la expresión de la presión hidrostática para un fluido  $P = \rho gh$  reemplazar los valores experimentales del barómetro de Torricelli, se tiene:

$$P = (13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3})(9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(0,76\text{m})$$

$$P = 101396,16 \frac{\text{N}}{\text{m}^2},$$

donde  $13600 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  es la densidad del mercurio

Si se lo desea expresar en Kilogramos fuerza o kilopondios, se tiene:

$$P = 10336 \frac{\text{Kgf}}{\text{m}^2}.$$

O expresarlo en Kilogramos fuerza o kilopondios por  $\text{cm}^2$ , esto es:

$$P = 10336 \times 10^{-4} \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2}$$

$$P = 1,0336 \frac{\text{Kgf}}{\text{cm}^2}.$$

Todos estos valores se conocen como valores de la presión atmosférica o simplemente una atmósfera; las unidades pueden cambiar de acuerdo al sistema, tal como se puede ver en la tabla 1.2 donde se encuentran las constantes equivalentes con las que se pueden realizar las diferentes conversiones de unidades.

Tabla 1.2.

Conversiones de unidades con utilización de la constante que aparece en la celda.

Unidades	$\frac{N}{m^2}$	$\frac{D}{cm^2}$	$\frac{lb}{pug^2}$	mmHg	cmH <sub>2</sub> O
$\frac{N}{m^2}$	1	10	$1,45 \times 10^{-4}$	$7,5 \times 10^{-3}$	$1,02 \times 10^{-2}$
$\frac{D}{cm^2}$	$10^{-1}$	1	$1,45 \times 10^{-5}$	$7,5 \times 10^{-5}$	$1,02 \times 10^{-3}$
$\frac{lb}{pug^2}$	$6,89 \times 10^{-3}$	$6,89 \times 10^4$	1	51,7	70,3
mmHg	133	$1,33 \times 10^3$	$1,93 \times 10^{-2}$	1	1,02
cmH <sub>2</sub> O	98,1	981	$1,42 \times 10^{-2}$	0,736	1

Fuente: (Vidal, s.f)

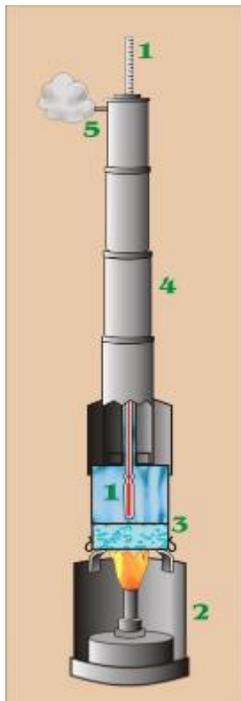


Figura 1.12.  
Hipsómetro de presión  
Fuente: <https://n9.cl/n1hn9>

Se debe precisar que la presión atmosférica varía con la altura sobre el nivel del mar de manera lineal, como se puede observar en:  $P = \rho gh$ ; sin embargo, cuando se trata de alturas mayores diferentes a las del laboratorio, la presión varía de forma exponencial, debido a que la densidad también cambia con la altura de forma exponencial, razón por la cual en las montañas el aire se enrarece, hasta el punto de que se vuelve muy difícil respirar.

Por otra parte, la presión atmosférica también depende de la temperatura, hasta el punto que el aire caliente pesa menos que el aire frío y tiende a elevarse; así mismo, se observa en la práctica que el agua hierve a diferente temperatura al depender de la altura sobre el nivel del mar, lo que significa que la temperatura de ebullición del agua depende de la presión atmosférica, propiedad descubierta por el sabio colombiano payanés Francisco José de Caldas (1768-1816), lo que dio origen al hipsómetro, aparato muy utilizado por los ingenieros de la época para calcular la altura sobre el nivel del mar de cualquier lugar, como el que se puede ver en la Figura 1.12; el aparato consta de una fuente de calor con la que logra hervir el agua contenida en el recipiente que tiene

un termómetro bien calibrado en centésimas de grado; como el efecto termodinámico de hervir el agua depende de la presión y la temperatura, entonces el agua hervirá a diferentes temperaturas al depender de la altura sobre el nivel del mar; este hecho se utilizó para medir la altura del lugar al conocer la temperatura de cambio de fase del agua (de líquido a gaseoso), para lo cual se elaboraron fichas técnicas empíricas, en las que se tenía el valor de la temperatura versus altura, resultado del ensayo y error experimental.

También, se tienen pequeñas variaciones de presión en un mismo lugar de acuerdo con los cambios de temperatura y estado del clima que se presenta a lo largo de un día.

Con demostraciones que están por fuera de este análisis, que requieren de conocimiento de termodinámica, se puede probar que la presión atmosférica varía de forma exponencial con la altura.

$$P = P_0 e^{\frac{-0,0342h}{K}} \quad (1.23).$$

Esta expresión se conoce como ecuación barométrica, muy útil para calcular presión o altura de cualquier lugar, donde  $h$  es la altura, y se expresa en metros;  $K$  es temperatura absoluta (grados Kelvin) y  $P_0$  es la presión a nivel del mar en cualquiera de las formas dadas en la Tabla 1.1.

Después de entender la variación de la presión atmosférica con la altura, se elaboraron aparatos para medir la presión del lugar; así, en 1843, el físico Lucien Vidie inventó el aneroides (Figura 1.13), que consta básicamente de una pequeña caja de metal elástico herméticamente cerrada, por lo que responde a la variación de la presión externa; ese movimiento en las paredes se amplifica mecánicamente y muestra sobre una escala previamente calibrada.



Figura 1.13.

Barómetro aneroides. Mide la presión del aire mediante un espiral tubular, lo que permite que, a mayor o menor presión, el espiral lleva a mover una serie de piñones, al final, ese movimiento amplificado se observa en la escala. Fuente: Levitt (s.f)

De conocer el comportamiento general del aire, es muy importante distinguir las capas de la atmósfera. La primera capa, que va desde la superficie de la tierra hasta una altura de 8000 m, se denomina tropósfera; en realidad, su espesor varía al depender de la latitud; así, por ejemplo, en los polos, la capa tiene un espesor menor que en el ecuador; en esta capa ocurren todos los fenómenos cotidianos, como la lluvia, el viento, las tormentas eléctricas.

Por encima de la tropósfera, está la estratósfera; como algo cotidiano a esta capa, están los vuelos internacionales; los aviones de este tipo generalmente vuelan a 10000 m de altura, con velocidades por encima de los 900 Km/h; se facilita alcanzar esta

velocidad dado a que la densidad del aire a esta altura es bastante baja comparada con la que hay al nivel del mar, lo que lleva a tener menor resistencia del aire a los aviones y, a su vez, necesita mayor velocidad para mantener la sustentación; la temperatura es prácticamente constante, de unos  $60^\circ$  bajo cero; esta capa se calcula en unos 80 Km. Por encima de esta capa se encuentra la ionósfera, que es la causante de reflejar las ondas de radio, lo que permite rebotar las ondas emitidas desde la superficie de la tierra por estaciones de radio y televisión, al comportarse como si fuera un gran espejo; este fenómeno es más notorio en horas de la noche, cuando se pueden sintonizar emisoras que en el día no es posible, como en las horas de la noche no hay luz solar la atmosfera se enfría y por tanto se contrae, esto permite que la ionósfera descienda logrando que se produzca el fenómeno. Además, en esta capa se producen fenómenos como las auroras boreales, el destello de meteoritos conocido como estrellas fugaces; los ingleses fueron los primeros en visitar esta capa en 1944, con un V-2 que alcanzó una altura de 104 Km y, en 1946, los estadounidenses alcanzaron los 177 Km.

Por encima de esta capa se encuentra la exósfera o el espacio interplanetario; en esta zona se encuentra la estación espacial internacional, que gira alrededor de la tierra a una altura promedio de 450 Km.

## 1.5 Principio de Arquímedes

Se denomina principio de Arquímedes debido a su descubridor, el científico griego Arquímedes de Siracusa. Poco se conoce sobre su vida, solo algunos datos. Sin embargo, los investigadores afirman que era natural de **Siracusa** y murió durante la guerra, cuando cayó su ciudad natal; se cree que nació, en el 287 a.C., en el puerto marítimo de Siracusa (**Sicilia, Italia**), colonia del imperio griego. Y murió a la edad de 75 años; es decir, en el 212 a.C. Considerado uno de los sabios más grandes de la antigüedad, descubrió la propiedad más importante en la hidráulica, que lleva su nombre y se enuncia de la siguiente manera: “Cuando un cuerpo impermeable se sumerge en un líquido incompresible desaloja un volumen equivalente al volumen del cuerpo sumergido”.

Por otra parte, como el volumen de líquido desalojado tiene peso, que, si se encuentra en un recipiente indeformable, la única posibilidad es levantar su nivel, por tanto, este volumen de líquido desalojado tiene peso que genera una fuerza que trata de sacar al cuerpo sumergido, es decir es una fuerza de abajo hacia arriba, la cual se denomina Empuje, razón por la cual los cuerpos sumergidos se vuelven más livianos.

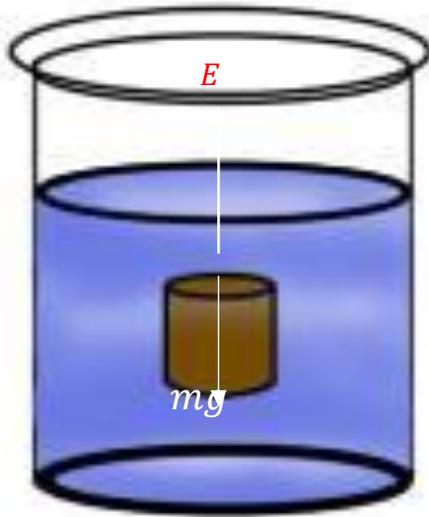


Figura 1.14.  
Cuerpo impermeable sumergido en un líquido incompresible.

De acuerdo a la Figura 1.14, el cuerpo tiene peso, pero el empuje lleva a que el cuerpo quede suspendido; entonces, como en un sistema inercial se tiene:

$$\sum F_i = 0,$$

donde el peso y el empuje son las fuerzas que conforman el sistema inercial, esto es  $E - mg = 0$ . De donde el empuje se lo puede expresar como:

$$E = mg.$$

Como la masa del cuerpo es  $m = \rho V$ , entonces, el empuje se puede escribir así:  $E = \rho g V$ . Ahora bien, como el volumen del cuerpo es igual al volumen del líquido desalojado; entonces, la densidad corresponde al líquido desalojado por lo que el empuje se puede escribir así:

$$E = \rho_l g V \quad (1.24).$$

### Peso aparente

Cuando los cuerpos se encuentran sumergidos en un fluido, están bajo la acción del empuje, es decir, experimentan una fuerza de abajo hacia arriba debido al peso del líquido desalojado, entonces, el cuerpo advierte un peso aparente menor que su peso cuando no está sumergido, por lo cual, el peso aparente será el peso real menos el peso del líquido desalojado o empuje. Esto es:

$$P_{ap} = E - mg \quad (1.25).$$

Como ya se dijo, la masa del cuerpo es  $m = \rho_c V$  y el empuje:  $E = \rho_l g V$ ; al remplazar en (1.25), el peso aparente es:

$$P_{ap} = \rho_l g V - \rho_c g V.$$

Al factorizar gravedad y volumen, se obtiene:

$$P_{ap} = gV(\rho_l - \rho_c).$$

Si se factoriza la densidad del cuerpo, se tiene:

$$P_{ap} = \rho_c g V \left( \frac{\rho_l}{\rho_c} - 1 \right).$$

Lo que antecede al paréntesis no es otra cosa que el peso del cuerpo; por tanto:

$$P_{ap} = P_c \left( \frac{\rho_l}{\rho_c} - 1 \right) \quad (1.26).$$

Para analizar la ecuación (1.26), se pueden establecer estas consideraciones:

Si  $\rho_c = \rho_l$ , entonces  $P_{ap} = P_c(1 - 1)$ ; por tanto,  $P_{ap} = 0$ .

Esto significa que el cuerpo flota en el interior del líquido, como es el caso de las partículas de polvo que flotan en el aire.

Si  $\rho_c < \rho_l$ , entonces  $P_{ap} = P_c \left( \frac{\rho_l}{\rho_c} - 1 \right)$ , donde la relación  $\frac{\rho_l}{\rho_c} > 1$ .

Esto significa que el paréntesis sería positivo; por tanto, el peso aparente también; es decir, el cuerpo flota sobre la superficie; por ejemplo, un cubo de icopor o corcho o algún material cuya densidad sea menor que la del agua; el mismo hielo flota en el agua, porque su densidad es ligeramente menor figura 1.15



Figura 1.15.

Como la densidad del hielo es menor que la del agua de mar, puede flotar y hasta aguantar el peso del oso lo que permite intuir la pregunta: ¿De qué tamaño debe ser el témpano de hielo para poder soportar el peso del animal?

Fuente: Van der Leun (2008).

Si  $\rho_c > \rho_l \Rightarrow P_{ap} = P_c \left( \frac{\rho_l}{\rho_c} - 1 \right)$  donde la relación  $\frac{\rho_l}{\rho_c} < 1$ .

Esto significa que el paréntesis es negativo y por tanto el peso aparente también es negativo, es decir el cuerpo tiene peso aparente, por tanto, el cuerpo se hunde hasta el fondo, como lo que ocurre con una piedra, un cubo de hierro o todo aquello cuya densidad sea mayor que la densidad del agua.

## 1.6 Aplicaciones.

### Vasos comunicantes

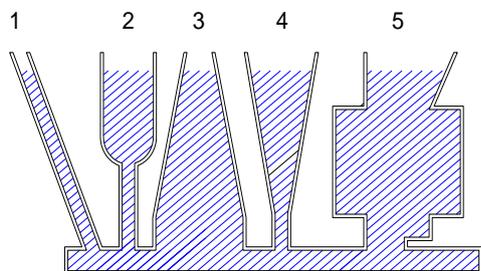


Figura 1.16.

Recipientes de diferente forma y capacidad: 1) inclinado de igual diámetro; 2) forma de copa; 3) forma de embudo invertido; 4) recipiente en forma de embudo; 5) de forma irregular.

Como la presión hidrostática depende únicamente de la profundidad, entonces se presenta la paradoja donde hay recipientes de diferente forma que mantienen igual nivel. En la Figura 1.16 se pueden ver recipientes de diferente volumen; sin embargo, en aquellos tubos cuyo diámetro es del orden de décimas de milímetros no se cumple por acción de la tensión superficial del líquido.

En los equipos de laboratorio, por lo general hay algo en común, que es el diámetro con el que se une al tubo repartidor; esto es con el único fin de medir la presión hidrostática con la misma membrana y poder intercambiar los recipientes.

Como aplicación de esta paradoja se tiene el nivel, utilizado en la construcción por ingenieros y maestros constructores, instrumento de fundamental utilidad (Figura 1.17); una simple manguera transparente de un diámetro aproximado a los  $\frac{3}{8}$  de pulgada y unos 15 metros de longitud es suficiente para poder colocar a justo nivel dos puntos separados por una distancia de 15 metros o llevar el nivel al otro lado de un muro o a dos puntos donde no hubiera visual directa. Hoy en día hay muchos equipos, de diferente tecnología, que permiten colocar niveles en diferentes puntos, líneas de láser, niveles de burbuja etc. El cuerpo humano posee dos niveles, uno en cada aparato vestibular del oído interno, lo que

permite mantenerse en posición vertical por prolongado tiempo (paradas militares).

Una aplicación, y muy práctica, para poder saber el nivel de agua u otro líquido contenido en un tanque que se encuentra por encima del suelo, es mediante una manguera de plástico transparente instalada de forma vertical por fuera del contenedor, así que el nivel que indique la manguera es igual al nivel del líquido en el interior del tanque, ver figura 1.18.



Figura 1.17.

Moderno nivel de construcción, con rayo láser, para llevar el nivel a puntos remotos.

Fuente: <https://n9.cl/wl3hr>

### Ejemplo

Calcular la altura de una población donde la presión atmosférica es de 560 torr y la temperatura promedio de 8 °C.

Solución

$$P_0 = 760 \text{Torr}$$

$$P = 560 \text{Torr}$$

$$^{\circ}t = 8^{\circ}\text{C} \equiv 273,15 + 8 = 281,15^{\circ}\text{K}$$

Al remplazar en la ecuación barométrica se tiene:

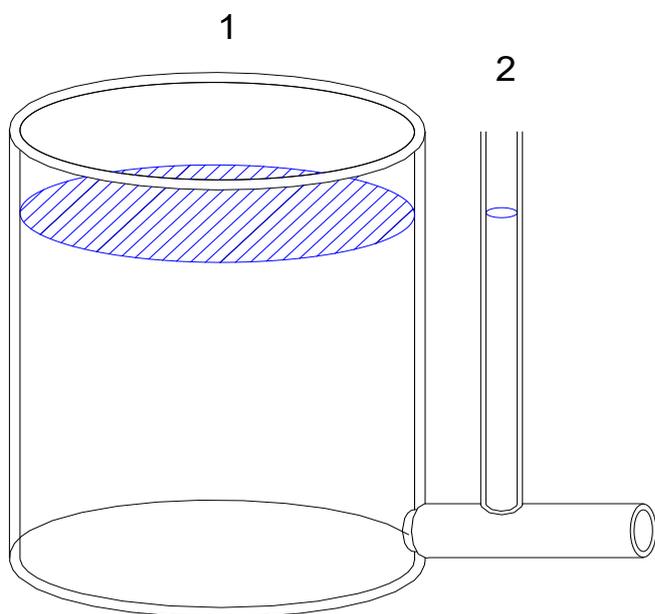


Figura 1.18.

Instalación de un tubo transparente a las paredes externas del contenedor para que se pudiera saber el nivel del líquido dentro del recipiente.

$$P = P_0 e^{\frac{-0,0342 h}{K}}$$

$$\frac{P}{P_0} = e^{\frac{-0,0342 h}{K}}$$

$$\text{Ln}\left(\frac{P}{P_0}\right) = \text{Ln}\left(e^{\frac{-0,0342 h}{K}}\right)$$

$$\text{Ln}\left(\frac{P}{P_0}\right) = \frac{-0,0342 h}{K}$$

$$\frac{\text{Ln}\left(\frac{P}{P_0}\right) K}{-0,0342} = h$$

$$\frac{\text{Ln}\left(\frac{560}{760}\right) 283,15 \text{ K}}{-0,0342} = h$$

$$h = 2658 \text{m}$$

### Ejercicios

Si la altura de una ciudad es 2527 m sobre el nivel del mar, y el barómetro marca 564 torr ¿Qué temperatura promedio tiene?

¿Cuál es la presión atmosférica en un lugar cuya altura sobre el nivel del mar es de 3100 m y una temperatura promedio de 7°C?



Figura 1.19.

Partes de una bomba de dos piñones, cápsula de Gade. Fuente: Aranguren (2018).

## Bombas de impulsión continuas

En la actualidad y cuando se trata de mecanismos que necesitan lubricarse, es necesario tener un flujo de aceite continuo; así que, en la técnica, se tiene este tipo de bombas, de amplia aplicación, pues empieza por que, en todo vehículo impulsado por gasolina o ACPM, sus motores tienen muchos elementos en movimiento que necesitan tener un alto régimen de lubricación; de igual forma, todos los sistemas hidráulicos de maquinarias de bajo, mediano y alto rendimiento.



Figura 1.20.

Esquema de retroexcavadora, en el que se muestran las unidades hidráulicas. (bombas y motores <https://hidraulicamanse.com>)

Las bombas conocidas como cápsulas de Gade son de gran simplicidad, pero de una alta precisión en su construcción; en la Figura 1.19, se puede observar una bomba de piñones simétricos, donde el aceite es arrastrado por los espacios entre dientes por la parte periférica; de esta manera se puede pasar el aceite desde el punto A hasta el punto B, y enviarlo a gran presión por la tubería que acompaña a estos sistemas; más interesante aún resulta que este tipo de bomba puede servir de forma inversa; es decir, si se inyecta lubricante por la

parte B, para obligarlo a salir por la parte A, se convierte en un motor; de esta forma, por ejemplo, se pueden tener estas unidades de diferentes tamaños en cada una de las ruedas de un coche y activarlas desde una bomba central accionada por un motor eléctrico o a gasolina y tener tracción en las cuatro ruedas, con variación de la velocidad angular de forma automática.

En el esquema de una retroexcavadora, se puede apreciar la disposición de las unidades hidráulicas, como motores y la bomba central accionada por el motor Diésel. Figura 1.20 la unidad hidráulica que accionan las orugas y la rotación del cuerpo funcionan como motores; la bomba central también acciona los gatos hidráulicos o actuadores, que accionan la cuchara, brazos y pala. En este tipo de maquinaria quizá se aplica más este tipo de tecnología, asistida, además, con controles electrónicos que las tornan casi automáticas; el operario debe especializarse en saber manejar el software con el que gobierna todo el sistema hidráulico.

### Centro de Flotabilidad.



Figura 1.21. Centro de masa del cuerpo más lastre. Botella con lastre, que se encuentra en equilibrio estable.

Así como ocurre con el equilibrio de sólidos, el centro de masa y el punto de suspensión definen el estado de equilibrio: estable, inestable e indiferente. Los cuerpos que se encuentran sumergidos en el agua también necesitan unas condiciones mínimas para mantener la vertical; el asunto está entre el centro de masa y el punto de flotabilidad, puntos abstractos en donde concurren todas las fuerzas de empuje y peso, así que para que haya

equilibrio se necesita que el centro de masa esté por debajo del centro de flotabilidad; de lo contrario, el navío se voltearía, porque entra en equilibrio inestable. En el caso de una botella medio llena con líquido de la misma naturaleza o cualquier otro lastre que le permita estar semi-sumergida y dejar el lastre en la parte inferior y la cámara de aire en la parte superior, como se puede ver en la Figura 1.21, el volumen del material del cuerpo en el que se incluyen el lastre y la cámara de aire genera un desplazamiento del líquido en el que se encuentra sumergida con lo cual aparece una fuerza de empuje.

El material del cuerpo, del lastre y hasta de la misma cámara de aire tienen masa que, en conjunto, definen un centro de masa que se aloja donde hay mayor densidad, así como el punto de flotabilidad se aloja donde hay menor densidad; por esta razón, el punto de flotabilidad estará por encima del centro de masa. Ahora bien, si el lastre es de carácter sólido o, al menos, que no se separe de la parte inferior del cuerpo y que la cámara se encuentre herméticamente sellada, el equilibrio será estable por siempre. En el caso del equilibrio de un buque, el asunto es mucho más complejo, porque tiene que ver con el equilibrio a lo largo y a lo ancho de este, en el que se define el metacentro, punto que define la estabilidad lateral.

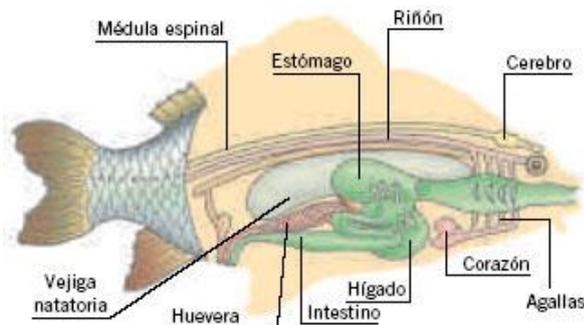


Figura 1.22. De acuerdo a la anatomía del pez, se puede observar que la vejiga natatoria se encuentra por encima de intestinos y estómago, órganos de gran peso. Fuente: <https://n9.cl/tx3dj>

De igual manera ocurre con los seres que habitan en el agua (Figura 1.22); las vejigas natatorias en los peces definen la movilidad vertical: mayor o menor profundidad y, como se puede ver, se encuentra por encima de los demás órganos, como intestinos y estómago que, por lo general, concentran gran parte del peso del animal, sin olvidar que estos animales también poseen aparato vestibular, al igual como en los humanos, lo que les permite mantenerse erguidos.

Al igual como lo que ocurre con el equilibrio de sólidos, en que el centro de masa está por encima del área de sustentación, la proyección del centro de masa define el tipo de equilibrio y, mientras dicha proyección no sale del área de sustentación tolerable, la edificación estará en equilibrio estable; en el caso de embarcaciones, como los catamaranes o naves de doble casco (Figura 1.23), el centro de masa está por encima del punto de flotación, pero debido al área de tolerancia la nave puede estar a flote sin ningún problema y desarrollar velocidades por encima de embarcaciones monocasco y con igual capacidad de carga.

En el caso de los vuelos, por así llamarlos, en globo o aerostato (Figura 1.24), pues el punto de flotabilidad está por encima del centro de masa, lo que lleva, por esta parte, a que el aparato se encuentre en equilibrio estable; similar a lo que ocurre con la boya o botella semi-sumergida, el empuje se logra por el aire caliente en el interior, menos denso que el aire frío del ambiente; esto se consigue al lanzar llamas de gas propano al interior del hemisferio de lona. Los primeros globos, de comienzos del siglo XX, se llenaban con hidrógeno, gas que resultó altamente explosivo y de allí la catástrofe del aerostato Zepelín. En el caso de las sondas espaciales, los globos se llenan con helio u otro gas que fuera más ligero que el aire, al igual que los globitos de goma para niños.



Figura 1.23.

Catamarán **Energy Observer**, el primer navío en dar la vuelta a la tierra sin utilizar ningún tipo de combustible fósil; impulsado por energía solar, eólica e hidrógeno, el viaje inició el 6 de junio del 2017 y regresará al puerto de salida después de 6 años, por tratarse del mayor experimento de este tipo, que se debe mostrar en la mayoría de los puertos.  
Fuente: Jeremy Bidon (s.f.)



Figura 1.24.

El empuje del aire lleva a que los globos puedan elevarse y levantar cargas considerables.  
Fuente: <https://n9.cl/4etnk7>

## Efectos fisiológicos debido a la variación de grandes alturas y profundidades.

Respiración subacuática. En la respiración normal el diafragma se tensiona y se distiende haciendo que el volumen del tórax cambie continuamente, en el caso de la respiración agitada por ejercicio, además del diafragma interactúan los músculos intercostales aquellos que están entre las costillas haciendo que se levanten cuando tiene tono muscular y relajándose para que por peso caiga la caja torácica, bueno esto se realiza sin que la persona se dé cuenta solo respira de acuerdo a la necesidad, durante la inspiración la presión interna desciende unos 3 mm Hg por debajo de la presión atmosférica suficiente para que entre aire hasta los pulmones, para la espiración la presión interna sube también unos 3mm Hg por encima de la presión atmosférica por acción de los músculos encargados de esta actividad vital, presión suficiente para vencer la resistencia de la tubería implicada en esta actividad fisiológica y expulsar los gases residuales al exterior, así que en promedio la presión en el interior de los pulmones se mantiene casi igual a la presión atmosférica de modo que la presión parcial del oxígeno y del nitrógeno en los pulmones es 0,209 y 0,781 atmosferas respectivamente.

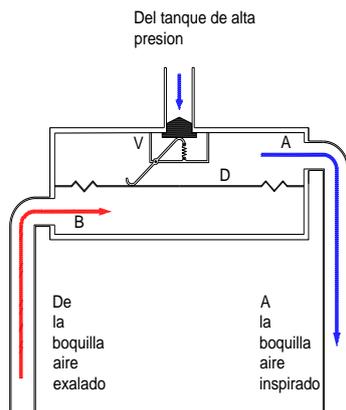


Figura. 1.25  
Regulador para el suministro de aire a los buzos

Una persona que se encuentre sumergida en agua podrá respirar si el aire que se le suministra está a la misma presión ambiente del agua que lo rodea, para suministrar aire en estas condiciones se ha diseñado un sistema autónomo de respiración subacuática “scuba”, (Self Contained Underwater Breathing Apparatus: significa que con este aparato, podemos respirar bajo el agua de manera independiente). El sistema consta de un tanque de aire a alta presión y una válvula reguladora tal como se muestra en la figura 1.25 y 1.26 la entrada de aire a alta presión lo hace por la válvula V, la salida A va hasta la boca del buzo y de esta a la cámara B que se encuentra abierta al ambiente del agua es decir tiene la misma presión hidrostática que impone el agua; si en la cámara A se llena de aire, el diafragma de goma que es un elemento elástico baja y el trinquete aprieta a la válvula impidiendo que pase aire, al exhalar la cámara B incrementa la presión y el diafragma sube, afloja el trinquete, se abre la válvula y entra a la cámara A que de inmediato pasa al buzo a la presión de inspirar y luego exhalar y el ciclo se repite permitiendo que el buzo pueda respirar las veces que sean necesarias, por estar la cámara abierta al ambiente del agua el sistema se auto regula de acuerdo a la presión hidrostática del agua.



Figura. 1.26

Tanque de alta presión y sistema de válvulas. Fuente: <https://n9.cl/29801>

Por otra parte, cada 10m se incrementa 1 atmosfera de tal manera que cuando el buzo está a unas 7 atmosferas la presión parcial del hidrogeno será:  $p_H = 0,781 \times 7atm = 5,5$  lo que resulta una presión muy elevada por lo cual el nitrógeno se disuelve en la sangre y en tejidos provocando una narcosis del nitrógeno o éxtasis de la profundidad colocando en serio riesgo al buzo, para trabajos de este tipo el aire respirado debe ser especial, rico en helio y muy bajo en oxígeno para evitar intoxicaciones.

Ahora, volver a la superficie se convierte en otra dificultad que solo los expertos la pueden sortear con éxito, una despresurización brusca puede ser mucho más peligrosa que la misma inmersión, recordar que el nitrógeno debido a la presión esta disuelto en la sangre la despresurización sería similar a lo que ocurre cuando se destapa una gaseosa que se haya agitado, de allí que el regreso exige un protocolo de riguroso cumplimiento para evitar accidentes irreversibles relacionados con la inmersión<sup>1</sup>.

Soroche o mal de las alturas. Ahora el asunto es al revés de lo que ocurría en la inmersión, cuando se sube una montaña el cuerpo humano se somete a que cada vez que sube la presión atmosférica desciende cuando las variaciones de altura no son muy grandes en el cuerpo se manifiesta con cambios en la audición debido al tímpano que como un diafragma separa la presión ambiente con la presión interna en el oído medio y solo cuando entra aire por las trompa de Eustaquio se logra equilibrar las presión interna con la externa; el individuo vuelve a escuchar de manera normal.

Ahora bien si las alturas son considerables, pues recordar que la densidad del aire disminuye con la altura y por tanto la concentración de oxígeno, para lo cual el organismo se habitúa de tal manera que mecanismos fisicoquímicos se activan y hacen del individuo un habitante seguro como es el caso de la población que se encuentra cercana a los 3000m de altura, la sangre de estos individuos, se encuentra en mayor concentración y con un gran número de glóbulos rojos lo que los hace muy peculiares al tener siempre mejillas rosadas algo muy vistoso en las mujeres de piel blanca.

A medida que se asciende se siente mucho más el cansancio, no por exceso de ejercicio si no por la falta de oxígeno.

---

<sup>1</sup> Cromer. A. Física para las ciencias de la vida. Editorial reverte. Primera edición. Pg. 176

Entre los síntomas más frecuentes son: dolor de cabeza, cansancio excesivo, náuseas, irritabilidad y, en casos más graves, dificultad respiratoria, confusión e incluso desmayos.

Como parte del tratamiento puede ser reposo, descender lo más rápido posible a una zona adecuada, en algunas ocasiones es necesario administrar oxígeno y algunos medicamentos que los debe formular un médico especialista.

Los trastornos mencionados pueden prevenirse si la persona escaladora ha realizado un buen y prolongado entrenamiento.

Es muy importante tener en cuenta que el deporte de escalar montañas exige entrenamiento y guardar medidas y protocolos especiales para este tipo de actividad.

### Ejercicio 1:

Calcular el peso aparente de un pedazo de metal que pesa 10 N, cuando se encuentra sumergido en agua y tiene una densidad de  $\rho_c = 2.7 \times 10^3 \text{ Kg/m}^3$ .

Solución. Al remplazar los valores en (1.26), se tiene:

$$P_{ap} = 10N \left( 1 - \frac{10^3}{2.7 \times 10^3} \right)$$

$$P_{ap} = 10N \left( 1 - \frac{1}{2.7} \right)$$

$$P_{ap} = 10N(0,629)$$

$$P_{ap} = 6,3N.$$

Si el peso aparente de un pedazo de cobre es de: 3N cuando está sumergido en agua, ¿cuál es el peso del pedazo de cobre en el aire, si la densidad del cobre es:  $\rho_c = 7,92 \times 10^3 \text{ Kg/cm}^3$ ?

### Solución.

A partir de la ecuación (1.26),  $P_{ap} = P_c \left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_c} \right)$ , se puede despejar el peso del cuerpo.

$$P_c = \frac{P_{ap}}{\left( 1 - \frac{\rho_f}{\rho_c} \right)}$$

Si se remplazan los valores dados, se tiene:

$$P_c = \frac{3N}{1 - \frac{10^3 \text{ Kg/cm}^3}{7,92 \times 10^3 \text{ Kg/cm}^3}}$$

$$P_c = \frac{3N}{1 - \frac{1}{7,92}}$$

$$P_c = 3,435N$$

### Ejercicios

Se necesita levantar una carga de 1200 N con un globo aerostático, cuya estructura y demás elementos tienen un peso aproximado de 500 N. Si el gas escogido es: a) Hidrógeno y b) Helio. ¿De qué tamaño debe ser el globo? Considérese el globo como una esfera.

Para calcular la densidad de pequeños insectos, los biólogos utilizan cloroformo y benceno. En un experimento determinado, se observó que los insectos flotaban en el interior de la mezcla cuando estaba en esta proporción: 72% de cloroformo y 28% de benceno. ¿Cuál es la densidad promedio del insecto?

# Capítulo 2



## Hidrodinámica

*Fuente del nacimiento de agua en la plaza de España  
Madrid. Diseñada por el arquitecto Manuel Herrero  
Palacios. y elaborada 1969*



*Fuente: Munuera (2014).*

# HIDRODINÁMICA

Hasta ahora se han estudiado los líquidos en reposo o en equilibrio y bajo ciertas condiciones; en adelante se estudiarán los líquidos en movimiento, que admiten que, se les pueda acelerar o variar su velocidad. A este estudio se lo denomina hidrodinámica. Al igual que en la hidrostática, se estudiará bajo ciertas consideraciones para facilitar el cálculo; de lo contrario, el análisis resulta muy complejo, pues se necesitan matemáticas muy avanzadas y conceptos lejos de esta propuesta didáctica. Las consideraciones que se deben tener en cuenta son:

Considerar que el fluido sea incompresible.

El ducto por donde va a viajar el líquido sea indeformable.

Que el líquido no tenga viscosidad.

Que el líquido, al fluir, lo haga de manera laminar; es decir, sin turbulencias; esto es, un fluido irrotacional, donde las líneas de corriente no se cortan.

## 2.1 Ecuación de continuidad

Considérese un ducto de paredes indeformables, con sección transversal 1 diferente a la sección transversal 2 de salida, por el cual va a fluir o correr agua; el ducto no puede tener rotos, así que no puede haber ni afluentes ni sumideros, lo que significa que es un ducto ideal.

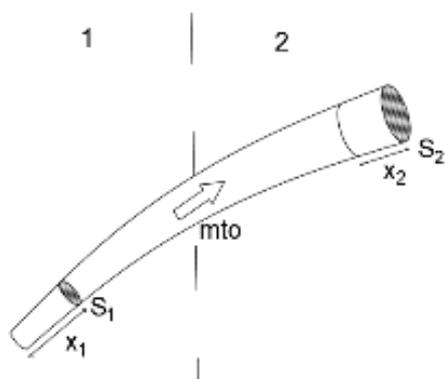


Figura 2.1.  
Ducto indeformable, por donde puede correr un líquido incompresible.

Se define caudal como la cantidad de líquido que pasa a través del área transversal del ducto en la unidad de tiempo; así:  $Q = \frac{V}{t}$ , donde el volumen de líquido puede medirse en litros, en metros cúbicos, etc. Cuando se trata de un río, el caudal permite decir que el río es caudaloso al referirse a la gran cantidad de agua que pasa, como lo que ocurre en el río Magdalena, Cauca, Patía, etc. Y, al contrario, resulta que es un riachuelo o un río modesto.

Ahora bien, si se considera un ducto indeformable, en el que no hay sumideros ni afluentes, además el líquido no tiene viscosidad y es incompresible, entonces la cantidad de líquido que pasa en la unidad de tiempo por la sección transversal 1 debe ser igual a la cantidad de líquido que pasa por la sección transversal 2, como se ve en la Figura 2.1; es decir, el caudal que pasa por la sección transversal 1 es igual al caudal que pasa por la sección transversal 2, esto es:  $Q_1 = Q_2$ ; ahora bien, como el caudal se define como

$Q = \frac{V}{t}$ , y el volumen es  $V = sx$ , entonces:  $\frac{S_1 x_1}{t} = \frac{S_2 x_2}{t}$ ; además, la velocidad se escribe  $v = \frac{x}{t}$ ; por tanto, se tiene:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad (2.2).$$

Esta expresión se conoce con el nombre de ecuación de la continuidad.

Son numerosos los ejemplos que se pueden señalar, desde lo que ocurre en los ríos o cuando se riega el jardín con una manguera; siempre hay la posibilidad de escoger la velocidad del chorro y modificar el área de salida del agua al alterar la forma cilíndrica de la manguera, etc.

## 2.2 Teorema de Bernoulli

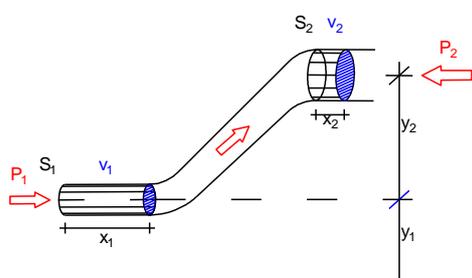


Figura 2.2.  
Ducto con diferentes secciones transversales a diferentes niveles.

En 1738, el físico suizo Daniel Bernoulli (1700- 1782) dedujo una expresión en la que relacionó la presión con la velocidad y la altura, de un fluido circulando por una tubería ideal en la que no haya afluentes, sumidero, ni fuerza de rozamiento; asunto que tiene que ver, con la conservación de la energía aplicada a los fluidos.

Entonces, como se trata de un fluido ideal, se tienen las mismas consideraciones, así que el caudal se va a conservar constante.

Por otra parte, como se ve en la figura 2.2 para que fluyera el líquido, es necesario que haya una presión  $P_1$  capaz de empujar el líquido por el ducto hasta el extremo 2, donde existe una segunda presión  $P_2$ , tal que  $P_1 > P_2$  para que pueda fluir, lo que significa que la presión hace un trabajo para subir el líquido de 1 a 2, así que, como  $w = \Delta Fx$ , a su vez la  $\Delta F = \Delta PS$ , entonces el trabajo queda  $w_p = \Delta PSx$ ; es decir,  $w_p = (P_1 - P_2)Sx$ .

Así que el trabajo que realiza la presión se transforma en energía cinética y energía potencial.

Por definición de trabajo, se tiene:  $w_E = \Delta E_k$ ; es decir:  $w_E = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$ ; respecto a la diferencia de alturas, como el líquido tiene peso, al pasar del nivel 1 al nivel 2 adquiere energía potencial y, por tanto, se realiza un trabajo; esto es:  $w_U = \Delta U_o w_U = -mgy_2 + mgy_1$  o  $w_U = -mg(y_2 - y_1)$ .

De acuerdo al principio de conservación de la energía se tiene:

$$w_p + w_E + w_U = 0 \quad (2.3).$$

Si se reemplaza los valores obtenidos en (2.3), se tiene:

$$(P_1 - P_2)Sx + \frac{1}{2}m(v_1^2 - v_2^2) - mg(y_2 - y_1) = 0.$$

Al organizar términos a lado y lado, se tiene:

$$S_1x_1P_1 + \frac{1}{2}mv_1^2 + mgy_1 = S_2x_2P_2 + \frac{1}{2}mgv_2^2 + mgy_2 \quad (2.4).$$

Como la masa se puede escribir como:  $m = \rho V$ , donde  $\rho$  es la densidad y  $V$  es el volumen, además el volumen se puede escribir como  $V = Sx$ ; entonces:

$$V_1P_1 + \frac{1}{2}\rho V_1v_1^2 + \rho V_1gy_1 = V_2P_2 + \frac{1}{2}\rho V_2v_2^2 + \rho V_2gy_2.$$

Según las condiciones establecidas, si el ducto no tiene afluentes ni sumideros, entonces la cantidad de líquido que pasa por la sección transversal 1 será igual a la cantidad de líquido que pasa por la sección transversal 2; es decir, los volúmenes  $V_1$  y  $V_2$  son iguales; así que se pueden simplificar los volúmenes y la ecuación de Bernoulli queda:

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho gy_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho gy_2 \quad (2.5).$$

Esto significa que, si la expresión comienza con presión, las demás también tienen unidades de presión; entonces, la presión, en todas sus manifestaciones, que se tiene en el lado 1 es igual al lado 2, o lo que es lo mismo decir que la expresión (2.5) es una constante o permanece constante, así que:

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gy = Cte. \quad (2.6).$$

Tanto la ecuación (2.5) como la (2.6) muestran que la presión se mantiene constante y, según la ecuación (2.6), se tiene:

$P$ : presión ambiente

$\frac{1}{2}\rho v^2$ : presión dinámica; es la presión que se siente en un río cuando la corriente trata de llevarse a los nadadores.

$\rho gy$ ; es la presión hidrostática.

Resulta muy importante revisar algunas aplicaciones que se tienen con este resultado.

### 2.3 Vuelo de planeo (vuelo de aviones y algunas aves grandes)

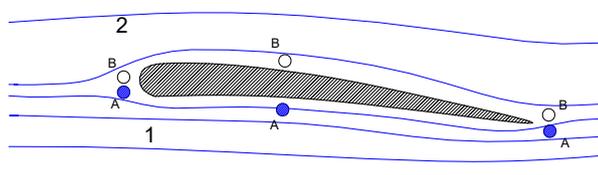


Figura 2.3.

Perfil aerodinámico del ala de un avión en un fluido laminar; es decir, sin turbulencias.

Desde tiempos remotos cuando el hombre se tornó observador de la naturaleza, vio el majestuoso vuelo de las aves, grandes águilas, buitres, y muchas otras especies ya desaparecidas; sin duda, hubo la inquietud de querer volar como esos seres. Entre las leyendas más antiguas sobre el vuelo, se encuentra la de Dédalo e Icaro y otras más referentes a la posibilidad de volar, que muestran siempre la ilusión de desplazarse en el aire.

Al realizar un corte transversal del ala de un ave (muerta), se observa perfectamente la forma aerodinámica que tiene (ver Figura 2.3), así que el perfil aerodinámico es una forma geométrica muy apropiada para que el objeto pueda deslizarse en el agua, en el aire o en cualquier fluido que permita el movimiento.

La naturaleza diseñó esta forma en los peces, en las aves y demás seres que pueden volar o deslizarse en el agua, como las mantarrayas, las tortugas, los pingüinos, que literalmente vuelan, pero en el agua. Así que es la mejor forma que se conoce, donde se tiene el menor gasto de energía por efectos de la presión dinámica; además, la naturaleza diseñó superficies con bajísimo coeficiente de rozamiento, tales como las plumas de las aves y escamas de los peces, entre otros.

De acuerdo a la Figura 2.3, el perfil aerodinámico se desliza en un flujo laminar. Para analizar, supónganse dos partículas que se acercan al borde de ataque y se ven obligadas a separarse; la partícula B lo hace por la parte superior, según la curva del perfil, mientras que la partícula A lo hace por la parte inferior, al seguir casi una línea recta del perfil; al final, las dos partículas se encuentran tras haber abandonado el borde de fuga. Para un flujo laminar en el que no debe haber turbulencias, las dos partículas deben encontrarse en iguales condiciones que cuando se separaron.

Como el camino de B es mayor que el camino de A, debido a la curvatura del perfil, entonces se deduce que si  $d_1$  es mayor que  $d_2$  y las partículas se encuentran al salir del borde de fuga,  $v_2$  es mayor que la  $v_1$ ; es decir:  $v_2 > v_1$ .

Ahora bien, se aplica el teorema de Bernoulli, ecuación (2.5) en la parte inferior 1 y en la parte superior 2, como se ve en la Figura 2.3.

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Como el perfil aerodinámico es delgado comparado con el ancho del ala, entonces  $y_1 \cong y_2$ ; por tanto, la presión hidrostática resulta muy similar tanto en la parte superior como en la inferior (lados 1 y 2); así:

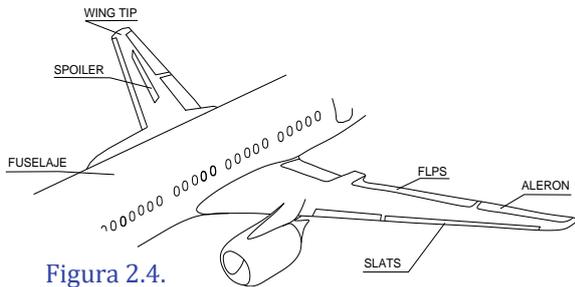
$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Al organizar los términos y tener presente que  $v_2$  es mayor que  $v_1$ , se tiene:

$$\frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = p_1 - p_2 \quad (2.7),$$

donde el segundo término también debe ser positivo; así, la  $p_1$  es mayor que la  $p_2$ ; este resultado es sorprendente, porque explica de forma directa cómo la presión por debajo del ala es mayor que la presión por encima cuando está moviéndose en un flujo laminar, por lo que se tiene un gradiente de presión en sentido ascendente; ahora bien, como  $p = \frac{F}{A}$ , entonces,  $F = pA$ , donde  $A$  es el área del ala; por tanto, la fuerza de sustentación o la fuerza que soporta el peso de la aeronave es:

$$F = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2)A \quad (2.8).$$



**Figura 2.4.** Alas de un avión, en el que se puede ver el área alar por la parte superior con sus partes más importantes.

En la Figura 2.4, se puede ver la parte superior de un ala de avión en la que se puede detallar el borde de ataque y borde de fuga; además, junto al fuselaje, se puede diferenciar el perfil aerodinámico de la estructura del ala. En el borde de ataque se pueden distinguir los slats, sistemas mecánicos que le permiten aumentar el área, lo mismo que en el borde de fuga los flaps y alerones de direccionamiento del vuelo.

### Atomizador de barbería

El atomizador de las barberías y los tocadores de las damas sirve para rociar con finas partículas de líquido el área deseada (cabello, cara, etc.); su funcionamiento se puede apreciar en la Figura 2.5 y, para entender este, se aplica el teorema de Bernoulli, en dos partes: interior del contenedor y salida del líquido o parte externa, así:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

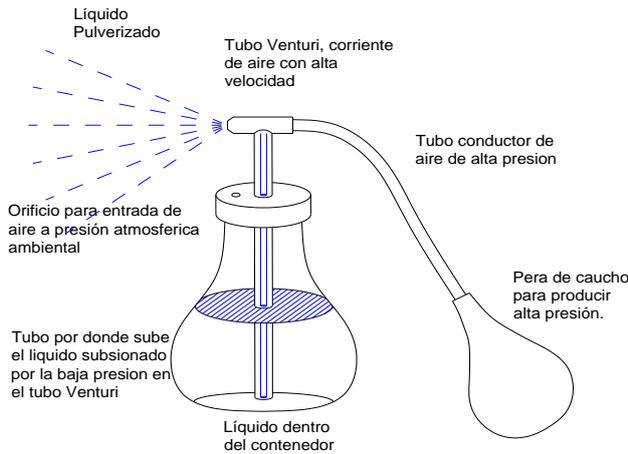


Figura 2.5. Esquema de un atomizador de barbería.

Dado que  $y_1 \cong y_2$ , entonces la presión hidrostática prácticamente se anula; por tanto, el principio de Bernoulli solo se puede escribir así:  $p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$ ; ahora bien, la velocidad por donde salen las partículas es muy grande, comparada con el movimiento descendente del líquido en el interior del contenedor, que prácticamente es cero. Así que, al organizar los términos, se tiene:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad (2.9).$$

De modo que la  $p_1$  es mayor que la  $p_2$  (presión atmosférica), por lo que el líquido se ve obligado a subir por el tubo del contenedor hasta exponerse con el chorro de aire que se encarga de pulverizarlo.

## 2.4 Tubo de Venturi

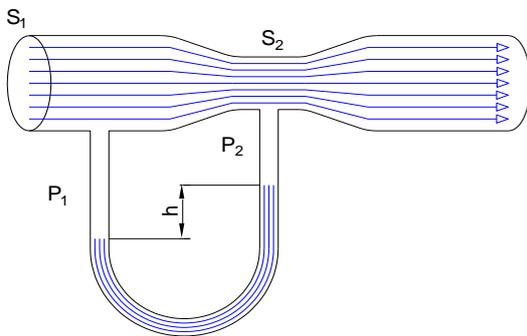


Figura 2.6. Esquema de tubo de Venturi, en el que se ven dos secciones transversales de diferente diámetro.

El tubo de Venturi (ver figura 2.6) es un instrumento que permite medir la velocidad de un fluido, ya sea líquido o gas, como el aire. Entonces, esto permite medir la velocidad de los aviones respecto a la atmósfera y cualquier artefacto que se mueve en el agua o en el aire. Para analizar su funcionamiento, se puede partir del teorema de Bernoulli. Al aplicarlo en las dos secciones transversales, la de mayor y menor área:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2.$$

Debido a que el manómetro se conecta a las dos secciones transversales 1 y 2 y, además, las dos secciones se encuentran al mismo nivel, entonces:  $y_1 \cong y_2$

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2).$$

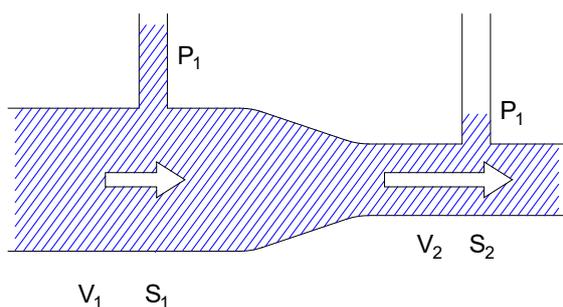


Figura 2.7.

Se puede ver cómo la presión cambia de acuerdo a la sección transversal, así: en la sección transversal 1, la velocidad es  $V_1$ , la presión es  $P_1$ , y en la sección transversal 2, la velocidad es mayor que en la sección transversal 1.

Por otra parte, al aplicar la ecuación de continuidad en las secciones transversales mencionadas (Ver figura 2.7), se obtiene:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Como se quiere calcular la velocidad en la sección transversal 1, entonces se despeja la  $v_2$ ; esto es:  $v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$ , que, al remplazarla en el teorema de Bernoulli, se tiene:

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2} \rho \left[ \left( \frac{S_1}{S_2} v_1 \right)^2 - v_1^2 \right].$$

Ahora bien, al factorizar  $v_1^2$ , queda

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)$$

Y al despejar la velocidad, se obtiene:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\rho \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}}$$

Ahora bien, como  $\Delta p = \rho_l g h$ , que es la presión manométrica, al remplazarla, queda:

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\rho_l g h}{\rho \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right)}} \quad (2.10)$$

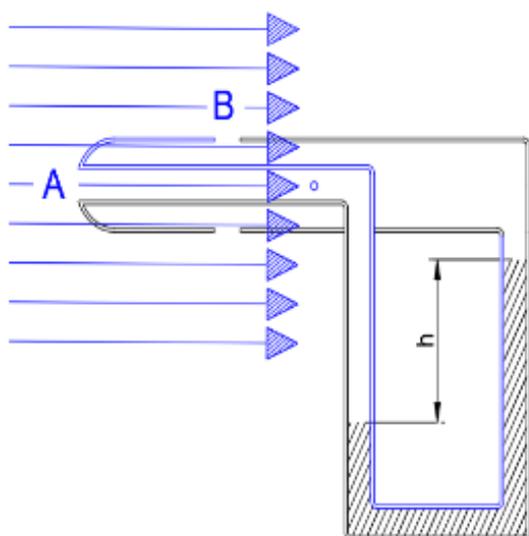
Donde  $\rho_l$  es la densidad del líquido del manómetro y  $\rho$  es la densidad del fluido que pasa por el tubo de Venturi, ya sea aire, agua o cualquier otro medio fluido y  $h$  es la diferencia de altura de las columnas del líquido utilizado en el manómetro.

En el curso de una corriente sobre el lecho de un río hay remansos y corrientías; los remansos son cañones amplios donde el agua parece no correr, mientras que en los sectores angostos el agua enseña la carrera, para cumplirse en todo esto la ecuación de la continuidad; sin embargo, de acuerdo al teorema de Bernoulli, se experimenta que en los remansos la presión del agua sobre los acantilados es mayor que en el cañón estrecho; de igual forma ocurre dentro de una tubería cuando pasa de un diámetro mayor a uno menor, donde la velocidad se va aumentar; por esta

razón la tubería del acueducto de mayor diámetro tiene paredes mucho mayores que la tubería de diámetro menor.

## 2.5 Tubo de Pitot.

Es un dispositivo diseñado para medir la velocidad de flujo; hoy se utiliza mucho en la aeronáutica para medir la velocidad relativa de los aviones respecto al aire, para medir la velocidad de barcos y, en medicina, se utiliza para medir la velocidad de la sangre en las arterias. En lo fundamental, consta de un pequeño tubo (ver figura 2.8), en el cual se coloca otro de menor diámetro en el centro, cuya abertura está justamente en la parte frontal A, continúa en el sentido de la corriente hasta unirse con la rama izquierda de un manómetro cuyo extremo une al tubo pequeño con el tubo grande para unirse con el ambiente a través de las ventanas B abiertas de manera simétrica; de esta forma, el orificio A y las ventanas B quedan unidas por el tubo de menor diámetro; así que el teorema de Bernoulli para las dos orificios es:



$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + \rho g h_A + P_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \rho g h_B + P_B.$$

Ahora bien, como el orificio A y B están en la práctica a la misma altura, por tanto, la presión hidrostática se puede despreciar; la presión dinámica  $\frac{1}{2}\rho v^2$  prácticamente está sobre el orificio A, donde la corriente del flujo actúa perpendicularmente sobre el área del orificio y sobre las ventanas B, pues este tipo de presión no actúa debido a que la normal de la superficie del orificio es colineal con la corriente del flujo; entonces, la expresión de Bernoulli se reduce a:

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B - P_A.$$

Figura 2.8.  
Esquema del interior del tubo de Pitot.

Por otro lado, la diferencia de presión  $\Delta P = P_B - P_A = \rho_l g h$ , donde  $\rho_l$  es la densidad del líquido que forma parte del manómetro, bien sea alcohol, mercurio, entre otros, y h es la diferencia de altura de las ramas del manómetro, así que la expresión se puede escribir como:

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 = \rho_l g h.$$

Esta expresión permite calcular la velocidad del flujo:

$$v = \sqrt{\frac{2\rho_l g h}{\rho}}$$



Figura 2.9.  
Tubos de Pitot instalados en el fuselaje de un avión, que permiten medir la velocidad relativa del avión.  
Fuente: cleynen (2013).

Esta expresión muy sencilla permite calcular la velocidad de flujos de torrentes en diferentes manifestaciones; en el caso de aeronaves, es todo un conjunto de tubos de Pitot colocados en diferentes partes del fuselaje y de las alas, como se puede apreciar en la figura 2.9. El valor que se obtenga de cada uno de estos pequeños tubos de Pitot se procesará para obtener un valor promedio y valores específicos en diferentes partes de la aeronave, como la diferencia de velocidad entre la parte superior e inferior del ala.

## 2.6 Teorema de Torricelli.

### Salida del agua por un orificio en la base de un tanque

Para analizar cómo es la velocidad con que sale el agua por un orificio que se encuentra en la parte inferior de un recipiente o tanque (ver figura 2.10), se procede como en los casos anteriores, con aplicación del teorema de Bernoulli en los dos extremos, orificio y superficie:

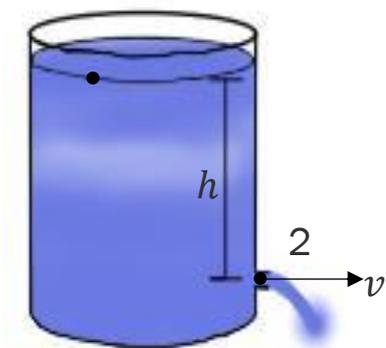


Figura 2.10.  
Salida de agua por un orificio del recipiente.

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Como la velocidad de la superficie del agua es muy pequeña,  $v_1 \rightarrow 0$ , entonces se puede escribir:

$$p_1 + \rho g y_1 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Por otra parte,  $p_1$  y  $p_2$  corresponden a la presión atmosférica y, si el tanque no es demasiado grande, algo como un metro de altura, entonces la presión atmosférica es prácticamente la misma, por lo cual se anulan y la expresión queda:

$$\rho g y_1 = \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Al fin, al cancelar la densidad y factorizar la gravedad, se tiene:

$$g(y_1 - y_2) = \frac{1}{2}v_2^2.$$

Ahora bien, como  $y_1 - y_2 = h$ , entonces, al despejar la velocidad:

$$v_2 = \sqrt{2gh} \quad (2.11).$$

Lo sorprendente de este resultado es que la velocidad es igual a la velocidad de un objeto en caída libre cuando se lo deja caer desde la altura  $h$ , con el resultado final; esto se conoce con el nombre de teorema de Torricelli.

Además de encontrar la velocidad de salida del agua por el orificio del tanque, también se puede encontrar el tiempo que se tarda en evacuar.

Por una parte, ya se conoce la velocidad con que sale el líquido del tanque por el orificio  $v_2 = \sqrt{2gh}$  y la ecuación de la continuidad  $s_1v_1 = s_2v_2$ ; al combinar estas dos ecuaciones, se tiene:

$$s_1v_1 = s_2\sqrt{2gh}.$$

Por definición de velocidad, esto es:  $v = \frac{dh}{dt}$ , lo que, al combinarlo con la expresión anterior, se tiene:

$$s_1 \frac{dh}{dt} = s_2\sqrt{2gh}.$$

Al organizar los términos, se obtiene:

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{s_2}{s_1}\sqrt{2g}dt.$$

Para solucionar esta ecuación, se acude a una integración elemental:

$$\int_0^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{s_2}{s_1}\sqrt{2g} \int_0^t dt.$$

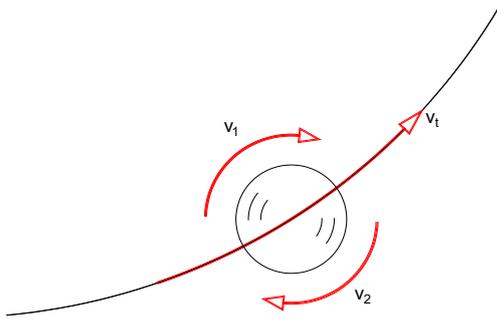
Como solución es:

$$2\sqrt{h} = \frac{s_2}{s_1}\sqrt{2g}t,$$

Finalmente, el tiempo es:

$$t = \frac{s_1}{s_2}\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad (2.12).$$

## 2.7 Efecto Magnus



**Figura 2.11.**  
Un balón rota al mismo tiempo que se traslada por la acción del puntapié de un buen jugador de fútbol.

Resulta sorprendente cómo los grandes futbolistas pueden pegarle a la pelota e imprimir un efecto tal que la pelota realiza dos curvas: la primera parabólica, debido a la acción de la gravedad, pero otra desafía al sentido común, pues las bolas suelen realizar curvas, como si sortearan los obstáculos, a lo que se le llama comba o efecto. Así se han logrado goles de gran espectacularidad. La pregunta es: ¿Cómo se logra esto?

Con un vistazo a la Figura 2.11, se observa que la pelota, cuando se le ha pegado con efecto también rota; por tanto, se presentan dos lados muy claros: el 1, donde se suman las velocidades tanto de traslación como de rotación, y el 2, donde se restan; esto implica que a la pelota se la somete a dos frentes, en los que actúa la ecuación de Bernoulli:

$$p_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Como los dos lados pueden estar al mismo nivel, entonces la ecuación habrá quedado así:

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2.$$

Al organizar términos, se tiene:

$$p_2 - p_1 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2).$$

Y una vez más se está frente a resultados ya conocidos: si la velocidad resultante de la suma vectorial  $v_1$  es mayor que la velocidad resultante de la resta vectorial  $v_2$ , entonces, la  $p_2$  es mayor que la  $p_1$ , lo que lleva a que se generará una nueva trayectoria de “comba o efecto”; como se ve en la Figura 2.11, del lado 2 la presión  $p_2$  es mayor que  $p_1$  y curva a la pelota hacia el lado izquierdo. Este efecto también se utiliza en energía eólica para generar rotación en grandes tambores y transmitirla a dinamos eléctricos y obtener energía eléctrica por acción del viento.

## 2.8 Caudal con viscosidad. Ley de Poiseuille

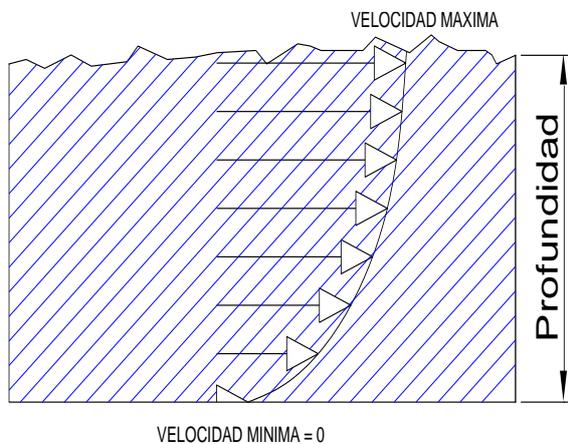


Figura 2.12.  
Perfil de velocidades en una corriente de agua.

Una de las principales diferencias que se presenta entre un fluido en movimiento sin viscosidad y uno con viscosidad radica en que, si el fluido se desliza por una superficie, la parte que está junto a la superficie se adhiere y como tal genera una fuerza paralela a la superficie en sentido opuesto a como se desliza el fluido. A esta fuerza se la denomina fuerza de viscosidad, lo que se puede decir que es análogo a la fuerza de rozamiento; entre más viscoso sea el fluido, la fuerza de rozamiento o viscosidad es mayor; en realidad, todos los líquidos tienen viscosidad, unos más que otros.

Al igual como ocurre en la fuerza de rozamiento, la fuerza de viscosidad siempre se opone al movimiento. Cuando un fluido como el agua corre sobre una canal, se ha demostrado que lo hace como si fueran capas que se deslizan unas sobre otras para generar así un perfil de velocidades, como se puede observar en la Figura 2.12, donde la capa más cercana a la superficie tiene una velocidad prácticamente nula, mientras que las capas más alejadas lo hacen con mayor rapidez. En general, se puede decir que la viscosidad es la fricción interna del fluido, así que puede haber fluidos que fluyen con facilidad, como el agua, la gasolina, el alcohol, etc., y otros que lo hacen con cierta dificultad, como la miel, el aceite para transmisiones, la lava de los volcanes figura 2.13, Etc.



Figura 2.13.  
Flujo de lava como resultado de la erupción del volcán Pitón de la Fournaise, el 10 de febrero del 2020. Fuente: Imaz Press Réunion. (2020).

La viscosidad de todos los fluidos tiene mucho que ver con la temperatura, aumenta para los gases y disminuye para los líquidos; es una tarea difícil para los ingenieros químicos, cuando diseñan aceites lubricantes para los motores de los vehículos, en los que deben garantizar que las propiedades del aceite se deben mantener casi constantes al aumentar la temperatura del motor. Así que debido a la viscosidad las capas de fluido junto a la superficie están prácticamente en reposo; entonces, cabe intuir lo que ocurre en

el interior de un ducto por el cual fluye un líquido como agua, sangre o cualquier otro líquido real.

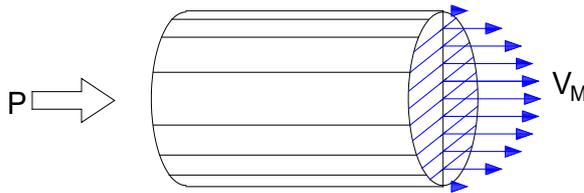
Al remplazar la tubería de acueductos de cierta edad, se puede observar cómo la mugre y otras partículas se encuentran adheridas a la superficie, lo que lleva a que el área transversal de circulación se encuentre disminuida; esto incluye también al aparato circulatorio de arterias y demás: una mala alimentación lleva a que se depositen ciertas grasas en las paredes, con lo cual disminuye el área transversal de circulación, lo que fuerza a la bomba impulsora (corazón) a trabajar más de lo normal.

Con un análisis más cuidadoso, se puede demostrar que la fuerza de viscosidad se puede expresar como:

$$F_v = \frac{\nu A v_M}{d} \quad (2.13),$$

donde  $\nu$  es la viscosidad,  $A$  el área de contacto del líquido,  $v_M$  la velocidad máxima y  $d$  la distancia desde la superficie del fluido a la superficie por donde corre el fluido; es decir, que la fuerza de viscosidad es directamente proporcional al coeficiente de viscosidad, al área de contacto y a la velocidad e inversamente proporcional a la distancia respecto a la superficie por donde corre el fluido.

Con base en esto, se considera el movimiento de un fluido por el interior de un ducto o tubería.



En primer lugar, el fluido que está en contacto con la superficie del ducto tiene velocidad cero, y solo en el centro del ducto se tendría la máxima velocidad, para formar un perfil de velocidades, como se puede ver en la Figura 2.14; así, el área de contacto con el fluido será el área del interior

Figura 2.14.  
Perfil de velocidades dentro de un ducto.

de la tubería, que es igual al perímetro del ducto por la longitud del ducto; es decir:  $A = 2\pi r l$  y, al final, la distancia  $d$  corresponde al radio del ducto; esto es:

$$F_v = \frac{2\pi r l \nu v_M}{r}.$$

En un análisis más atento, se tiene que esta ecuación aún tiene un factor de 2; por tanto, la ecuación más cercana a la realidad es:

$$F_v = 4\pi l \nu v_M \quad (2.14).$$

Por otra parte, como la presión se puede escribir como  $P = \frac{F}{S}$ , luego, al combinar con (2.14) y, además, como el área transversal del ducto por donde circula el fluido es  $S = \pi r^2$ , que es justamente donde se aplica la presión; entonces, la variación de la presión se puede expresar como:

$$\Delta P = \frac{4\pi\upsilon l v_M}{\pi r^2} \quad (2.15).$$

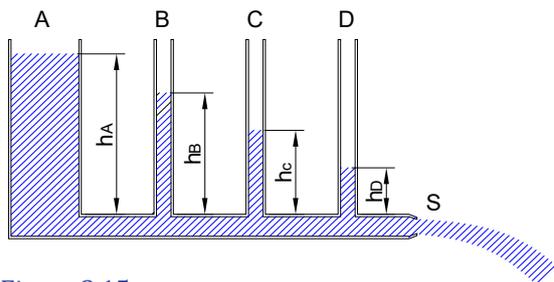


Figura 2.15.

Caída de presión de un líquido real a lo largo de un tubo horizontal debido a la viscosidad.

Como  $\Delta p = p_2 - p_1$  es la diferencia de presión entre la entrada y la salida, requisito para que pueda fluir el líquido por el ducto, así que:

$$(P_2 - P_1) = \frac{4l\upsilon v_M}{r^2}.$$

Por otra parte, como el caudal se puede escribir como  $Q = S\bar{v}$ , donde  $\bar{v}$  es

la velocidad media equivalente a  $\bar{v} = \frac{1}{2}v_M$ , por tanto, la variación de la presión quedará:

$$(P_2 - P_1) = \frac{8\upsilon l \bar{v}}{r^2}.$$

Si se despeja la velocidad, se tiene:  $\bar{v} = \frac{r^2(P_2 - P_1)}{8\upsilon l}$ , pero como el caudal es  $Q = \pi r^2 \bar{v}$ , al remplazar se obtiene:

$$Q = \frac{\pi r^4 (P_2 - P_1)}{8\upsilon l} \quad (2.16).$$

A esta expresión se la conoce con el nombre de Ley de Poiseuille o caudal con líquido viscoso o real.

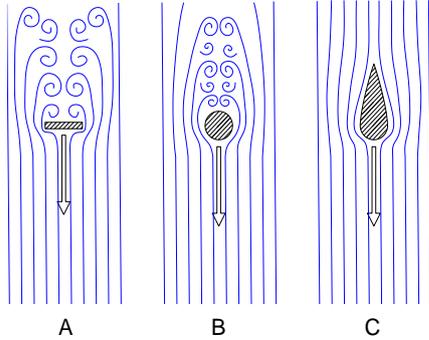
Experimentalmente, se ha encontrado que el flujo de un fluido de densidad  $\rho$  y viscosidad  $\upsilon$  a través de una tubería de radio  $r$  es laminar, mientras el número de Reynolds  $Re = \frac{\bar{v} r \rho}{\upsilon}$  sea menor de 1000. Por encima de este valor, el tratamiento matemático supera el análisis que se ha desarrollado en este libro.

Cuando se trata de líquidos reales, es decir con viscosidad, se presenta una resistencia al paso por la tubería, lo que implica que en un ducto horizontal hay una presión inicial y una presión menor en la salida, aun con disminución del área.

En la Figura 2.15 se puede ver el depósito, que puede ser agua, con una altura mayor que en B, C y D; esto quiere decir que a medida que recorre el tubo la presión va disminuyendo; de la expresión (2.16), se puede ver:

$$P_A - P_B = \frac{8Q\upsilon l}{\pi r^4}.$$

En esta expresión se puede ver que la caída de presión es proporcional con la longitud; es decir, a mayor longitud, mayor diferencia de presión; así que en la práctica es difícil hacer pasar agua por una manguera delgada y larga; esto lo saben los maestros constructores en el momento de llenar la manguera de nivel.



**Figura 2.16.** Turbulencia generada por cuerpos de diferente forma, con movimiento en fluidos con viscosidad: A) turbulencia generada por cuerpo de forma rectangular, B) turbulencia generada por una esfera, C) turbulencia generada por un cuerpo de forma aerodinámica.

## 2.9 Aplicaciones. Caída de gotas de agua.

Cuando se forma una gota de agua en las nubes y empieza a caer, se presenta una situación muy especial, de un cuerpo que se mueve en un medio viscoso (Ver figura 2.16); es decir, al revés de lo que se ha tratado, “no es el medio aire quien se mueve”; en principio, cuando la gota no tiene el suficiente peso, debido a su tamaño reducido, el empuje por el peso del aire desalojado se encarga de mantenerla a la gota de agua suspendida y forma parte de la nube, pero una vez aumenta de tamaño, por motivos que no compete discutir

en este momento, implica también aumento de peso; así que la gotica inicia un movimiento de caída libre, al principio con movimiento acelerado, hasta que, debido a la viscosidad del aire, se produce una fuerza de rozamiento que lleva a que la velocidad se limite, como cualquier otro cuerpo que se mueve a través de un fluido; la fuerza de fricción o rozamiento se puede obtener de forma aproximada, al suponer que es proporcional a la velocidad y al coeficiente de viscosidad y siempre en sentido opuesto, como toda fuerza de rozamiento. Así que

$$F_f = -Kvv,$$

donde K es el coeficiente de fricción y depende de la forma del cuerpo, hecho que desconoció Aristóteles, por lo que se equivocó cuando aseguraba que los cuerpos pesados caen más rápido que los livianos: este coeficiente, para una esfera, es  $K = 6\pi R$ , que se conoce con el nombre de Ley de Stokes; así que la fuerza de fricción es:

$$F_f = -6\pi Rvv.$$

Ahora bien, la gotica de agua, al iniciar su caída libre, al principio adquiere un movimiento uniformemente acelerado, de tal forma que estos primeros instantes se comportaría como un sistema acelerado en medio de la fuerza de rozamiento y el empuje debido al peso del aire desalojado; esto es:

$$mg - Kvv - E = ma.$$

Como  $a = \frac{dv}{dt}$ , además entre el peso de la gota y el empuje del aire se presenta un peso aparente, entonces:  $F_a = mg - E$ . Así que la expresión se puede escribir como:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{m} (F_a - Kvv).$$

Al factorizar  $-Kv$ , se obtiene:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{Kv}{m} \left( v - \frac{F_a}{Kv} \right).$$

Para solucionar esta expresión matemática, se puede integrar así:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{\left( v - \frac{F_a}{Kv} \right)} = -\frac{Kv}{m} \int_0^t dt$$

$$\ln \left( v - \frac{F_a}{Kv} \right) - \ln \left( v_0 - \frac{F_a}{Kv} \right) = -\frac{Kv}{m} t.$$

Al aplicar la función exponencial y organizar los términos, se tiene:

$$v = \frac{F_a}{Kv} + \left( v_0 - \frac{F_a}{Kv} \right) e^{-\frac{Kv}{m} t}.$$

La ecuación resultante se compone de dos términos: el primero es independiente del tiempo, pero el segundo depende exponencialmente del tiempo; esto significa que a medida que pasa el tiempo el factor del paréntesis  $e^{-\frac{Kv}{m} t}$  se empequeñece cada vez más, hasta desaparecer, de tal forma que el segundo término pronto se torna despreciable y solo queda el primero; es decir, tras un corto tiempo, la gota de agua se está moviendo con la velocidad:

$$v = \frac{F_a}{Kv}.$$

Esta expresión muestra la velocidad límite y es constante después de que el segundo término desaparece.

Al recuperar el peso aparente, la velocidad límite se podría escribir como:

$v = \frac{mg-E}{Kv}$ ; ahora bien, como el empuje es:  $E = \rho gV$ , donde  $\rho V = m_f$ , masa del aire desalojado por la masa de la gota de agua; es decir:

$$v = \frac{(m-m_f)g}{Kv},$$

Donde la velocidad constante de la gotica de agua es inversamente proporcional a la viscosidad del aire y a la ley de Stokes, al considerar de forma aproximada a la gota de agua como una esferita, al saber que en el movimiento de caída la gotica adquiere una forma aerodinámica debido al rozamiento con el aire, al igual como se desarrolló la forma aerodinámica de aves e hidrodinámica de peces y demás criaturas que se mueven en el agua. Esta forma la adquieren justamente para que se presente la menor resistencia posible al moverse por esos fluidos.

### Ejemplo

Entre los casos de la vida cotidiana está lo que ocurre en el interior de los acueductos, situación que pasa totalmente desapercibido para el común de los seres humanos, mientras que para un ingeniero hidráulico es algo complicado, tratar este asunto.

En el lenguaje hidráulico, se denomina acometida a la entrada de agua a la casa desde el tubo principal del acueducto a través de un tubo de  $\frac{1}{2}$  pulgada a una presión de 4 atmósferas, la edificación tiene cinco pisos y el agua se la debe subir hasta ese piso, justamente en el baño, ¿Cuál es la velocidad con que el agua sale por el grifo del lavamanos de 1cm de diámetro, si a la entrada lo hace con una velocidad de 1,5 m/s? Calcular también la presión.

### Solución

Para calcular la velocidad con que sale el agua por el grifo del lavamanos, no hay ningún problema; basta con aplicar la ecuación de la continuidad, debido a la bajísima relación de compresibilidad del agua. Así que:

$$v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1.$$

Como el área transversal es  $S = \pi r^2$ , entonces, al remplazar, se obtiene:  $v_2 = \frac{r_1}{r_2} v_1$ . Ahora bien, media pulgada equivale a 1,27 cm de diámetro; por tanto, al remplazar:  $v_2 = \frac{0,64^2}{0,5^2} 1,5 \text{ m/s}$ . Así que se tiene una velocidad de salida de  $2,46 \text{ m/s}$ .

Ahora, para la presión, se tiene la ecuación de Bernoulli:  $\frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 + p_2$ . Como se pregunta sobre la  $p_2$  o de salida, entonces se despeja  $p_2$ , aunque se advierte que la acometida está a nivel y el quinto piso se encuentra a 12,5 m de la acometida; esto es:  $p_2 = p_1 - \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) - \rho g h$ . Al remplazar valores, se obtiene:  $p_2 = 4,0 \times 10^5 - \frac{1}{2}1000 \times (2,46^2 - 1,5^2) - 1000 \times 9,81 \times 12,5$ .

Así que el resultado es:  $p_2 = 375.474,2 \text{ Pa}$ , equivalente a:  $3,75 \times 10^5 \text{ Pa}$ .

Por último, para calcular el caudal que se tiene, es:  $Q = \frac{\pi r^4 (P_2 - P_1)}{8 \nu l}$ , si la viscosidad del agua es aproximadamente de 0,01 poise. entonces:

$$Q = \frac{\pi \times 0.0127^4 \times (4,0 \times 10^5 - 3,75 \times 10^5)}{8 \times 1 \times 10^{-2} \times 12,5} = 2,04 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$$

Turbulencia. Cuando un fluido, que se mueve como un flujo laminar, excede ciertos límites, el flujo se convierte en algo caótico, lleno de irregularidades y de movimientos muy complejos, que cambian continuamente con el tiempo, por lo que se pierde por completo el patrón de estado estable a este flujo, por cuanto se denomina flujo turbulento y desafortunadamente las leyes de Bernoulli no son aplicables; ahora bien, el que un flujo sea laminar o turbulento depende en gran medida de la viscosidad y entre más viscoso fuera el fluido, su comportamiento es más laminar, hasta llegar a una velocidad límite.

Como un dato importante, el flujo de la sangre en la aorta es tipo laminar, pero alteraciones pequeñas en el sistema circulatorio pueden llevar a que el flujo se vuelva turbulento, lo que genera ruidos que pueden ser detectados por el médico especializado, con lo que el diagnóstico puede ser muy útil y mucho más si es a tiempo.

En el vuelo de aves y aviones, el cuerpo en movimiento no puede generar mayores turbulencias; la presencia de este tipo de flujo es de gran preocupación.

# Capítulo 3



## Mecánica de la deformación



### 3.1 Elasticidad

#### Sólidos

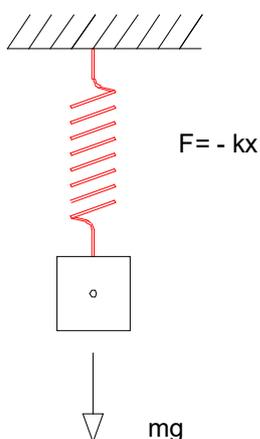


Figura 3.1.  
Sistema masa-resorte.

Un sólido es un objeto rígido que tiende a mantener la forma mientras no hubiera fuerzas que lo deformen; las moléculas de un sólido, están próximas unas de otras ya que se ejercen entre sí fuerzas muy intensas de atracción; sin embargo, las de un líquido pueden moverse de un lugar a otro, mientras que las de los sólidos tienen posiciones fijas bien determinadas y, si se trata de un sólido cristalino, más aún se encuentran formando mallas regulares de manera tridimensional. (Cromer, 1974 Física para las ciencias de la vida y la salud)

A los cuerpos sólidos se los puede deformar cuando se los somete a fuerzas compresoras o expansivas; en estas condiciones, el sólido se comporta como algo elástico; es decir, después de estar deformado el sólido, puede recuperar su forma original.

Para iniciar, considérese la elasticidad de un resorte (ver figura 3.1): cuando se le aplica una fuerza de tracción debido al peso de la masa, el resorte modifica su longitud alargándose, pero, al quitar el peso, el resorte recobra su longitud inicial; en este caso, el resorte cumple con la propiedad para lo que se construyó, “ser elástico”, y responde a la Ley de Hooke:  $F = -kx$ ,

Donde  $k$  es la constante de elasticidad y se presenta en unidades de N/m para el sistema S.I.

### 3.2 Ley de Hooke para un sólido

Considérese un pedazo de metal, o lingote, como se lo llama en las siderúrgicas, al que se le va aplicar una fuerza compresora o expansiva, dado que el sólido es un paralelepípedo tiene áreas bien sea a lo largo o a lo ancho, etc. Como quiera que fuera, siempre que haya una fuerza aplicada sobre un de sus áreas, el sólido estará sometido a una presión que, en adelante, se denominará esfuerzo mecánico,  $\frac{F}{s}$ , cuyas unidades serán iguales a la presión.

Ahora bien, el esfuerzo mecánico es una cantidad proporcional con la deformación relativa o unitaria,  $\lambda = \frac{\Delta L}{L}$ ; es decir, no es lo mismo alargar un milímetro de un alambre de un metro de longitud, que alargar un milímetro del mismo alambre, pero 10 veces mayor; por esta razón se denomina deformación relativa; así que la Ley de Hooke para el sólido se puede expresar de esta forma:

$$p = -Y\lambda \quad (3.1),$$

Donde a la constante de proporcionalidad  $Y$  en adelante se la denominará módulo de Young; la diferencia en que unos materiales son más elásticos que otros se debe precisamente a la diferencia en el módulo de Young.

### 3.3 Deformación lineal

Considérese un alambre largo, cuyo diámetro resulta insignificante respecto a su longitud; por tanto, cuando a este sólido se lo deforma, lo más probable es que lo hiciera únicamente a lo largo del alambre y su diámetro aparentemente permanecería indeformable o, mejor, la deformación es muy, pero muy pequeña, comparada con lo que ocurre en su longitud. Así que, como el esfuerzo es  $p = \frac{F}{S}$  y la deformación relativa o unitaria es  $\lambda = \frac{\Delta l}{l_0}$ , al remplazar en (3.1), se tiene:

$$\frac{F}{S} = -Y \frac{\Delta l}{l_0}.$$

Por tanto, la fuerza se podrá escribir como:

$$F = -YS \frac{\Delta l}{l_0} \quad (3.2).$$

Al despejar el módulo de Young, a partir de la ecuación (3.1), se tiene:

$$Y = -\frac{p}{\lambda} \quad (3.3).$$

En la tabla 3.1 se tienen valores del módulo de Young o de elasticidad de algunos materiales.

Tabla 3.1.

#### Módulo de Young de algunos materiales.

Material	$Y; \times 10^{10} \text{ (N/m}^2\text{)}$
Al	7
Latón	9.1
Cu	11
Acero	20
W	35
Vidrio	7
Cuarzo	5.2

*Fuente: (Serway y Jewett, 2008)*

Por otra parte, cuando un alambre se deforma linealmente, su longitud se incrementa de acuerdo con el esfuerzo aplicado a la sección transversal, para pasar de  $l_0$  a  $l$ ; es decir, se ha incrementado  $\Delta l$ ; así que se puede afirmar que la deformación es:

$$l = l_0 + \Delta l.$$

Como  $\lambda = \frac{\Delta l}{l_0}$ , entonces:  $\Delta l = \lambda l_0$ ; al remplazar, se tiene:

$$l = l_0 + \lambda l_0.$$

Al final, se tiene una relación matemática con la cual se puede calcular la longitud terminal de un alambre tras habersele aplicado una fuerza, de tal forma que, al conocer la deformación relativa y factorizar la longitud inicial, se obtiene:

$$l = l_0(1 + \lambda) \quad (3.4).$$

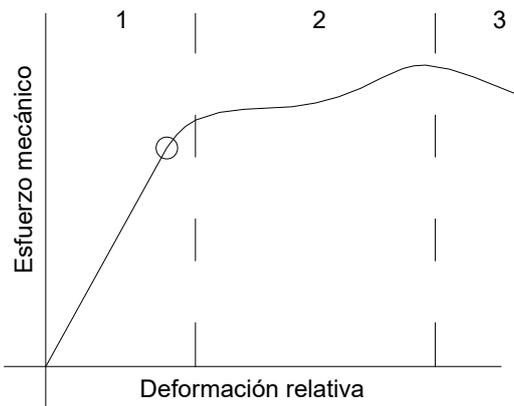


Figura 3.2.

Se pueden observar tres zonas: 1) zona elástica, 2) zona plástica y 3) zona de ruptura. La esfera muestra el punto límite de proporcionalidad.

En la Figura 3.2 se puede observar cómo los materiales tienen tres zonas fundamentales de respuesta a las fuerzas compresoras o extensoras. En primer lugar, los materiales responden de forma elástica (zona 1), lo que corresponde a la Ley de Hooke en materiales elásticos; también, se puede observar un punto marcado con un círculo, que corresponde al punto límite de proporcionalidad. En la zona 2, se observa una parte plana y poco creciente, en la que se puede inferir cómo el material cede a una fuerza no lineal, en principio casi constante; esta zona corresponde a la parte plástica o deformación sin retorno; es decir, el material deformado plásticamente no tiene posibilidad de recobrar su forma original; si a este material se le sigue aumentando la fuerza, termina por romperse; o sea, ha entrado en una zona de ruptura (zona 3). Así que, en los materiales, se pueden observar tres zonas fundamentales: elástica, plástica y de ruptura.

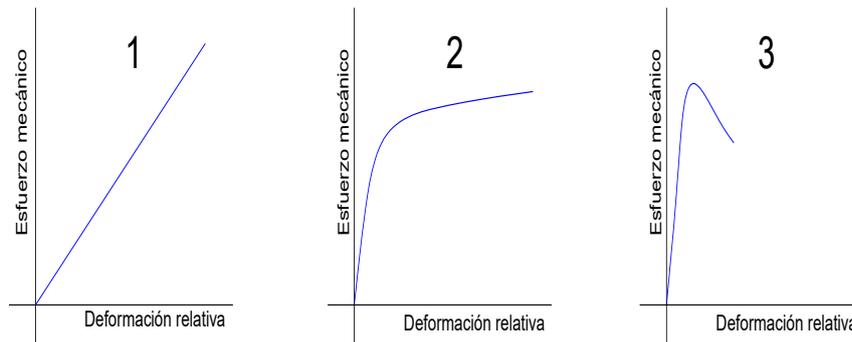


Figura 3.3.  
Deformaciones típicas de materiales elásticos, plásticos y rígido.

Ahora bien, hay materiales altamente elásticos, con zona plástica baja; son los elementos propios para fabricar resortes, como se puede observar en la Figura 3.3 -1.

Otros elementos tienen unas zonas elásticas poco significativas, mientras que sobresale la zona plástica; como se puede ver en la figura 3.3-2 en donde la zona plástica es muy amplia por tanto su comportamiento será de plásticos tal como la plastilina, la cerámica madera de balsa entre otras la palabra plástico proviene del griego «plastikos», que significa que se puede moldear. En la figura 3.3 - 3, se observa la curva de un material en el cual las zonas elásticas y plástica son muy pequeñas y fácilmente entran en la zona de ruptura; a estos materiales se los considera altamente rígidos; en la práctica, son indeformables por lo tanto muy frágiles; dichos materiales son utilizados para fabricar herramientas de corte de metales, tales como brocas, buriles utilizados en máquinas para tallar el acero y demás metales; en general, el material con el que se elaboran elementos de corte deben tener propiedades de alta rigidez; en la industria, el material con el que se fabrican estos elementos por lo general es acero rápido como se lo conoce. HSS (High Speed Steel), existen otros materiales mucho más rígidos como el tungsteno, cuarzo, cierto tipo de cerámicas industriales y el más duro de todos, el diamante.

Por carecer de zona elástica y plástica, fácilmente se rompen cuando las fuerzas han sobrepasado las zonas de tolerancia, momento en el cual, se convierten en materiales frágiles, como es el caso de la porcelana. En la tabla 3.2, se puede ver la clasificación de los materiales según su dureza.

Tabla 3.2.

**Clasificación de materiales de acuerdo a su dureza.**

Dureza	Material	Composición química	Característica
1	Talco	$Mg_3Si_4(OH)_2$	Se deja rayar con la uña
2	Yeso	$CaSO_4 \cdot 2H_2O$	Se deja rayar, pero daña la uña
3	Calcita	$CaCO_3$	Se puede rayar con objetos de cobre
4	Fluorita	$CaF_2$	Se puede rayar con objetos de hierro
5	Apatita	$Ca_5(PO_4)_3(OH-, Cl-, F)$	Se raya con objetos de acero
6	Feldespatos	$KAlSi_3O_8$	Se raya con herramientas de acero rápido (HSS)
7	Cuarzo	$SiO_2$	Lo raya el topacio
8	Topacio	$Al_2SiO_4(OH-, F-)_2$	Lo rayan objetos de corindón y diamante
9	Corindón	$Al_2O_3$	Lo raya el diamante
10	Diamante	$C$	Solo lo rayan otros diamantes

Fuente: <https://n9.cl/5ci0p>

Por otra parte, existen metales que, por su propiedad plástica, pueden ser fácilmente maleables; es decir, con esfuerzos apropiados, se pueden laminar, como es el caso del hierro, cobre, bronce, aluminio, oro, plata, entre otros; de igual forma, con estos materiales también se pueden elaborar ductos o hilos, por lo que son materiales dúctiles, como el oro, la plata, el cobre, el hierro, etc.

**Energía en la deformación lineal**

Cuando a un sólido, como en el caso del alambre, se lo somete a una fuerza tensora, sin duda que se está haciendo un trabajo, el mismo que el alambre realiza para no dejarse deformar por la fuerza. Se puede recordar que la definición de trabajo es  $w = \int F dl$ .

Ahora bien, como  $Y = \frac{F/S}{\Delta l/l_0}$ , se puede despejar la fuerza y escribirla así:  $F = YS \frac{\Delta l}{l_0}$ ; si se la reemplaza en la ecuación del trabajo, se tiene:

$$w = \int YS \frac{\Delta l}{l_0} dl \quad (3.5).$$

Como el módulo de Young, la sección transversal y la longitud inicial son constantes, se puede sacar de la integral, esto es:

$$w = \frac{YS}{l_0} \int \Delta l \, dl.$$

En este caso, la deformación relativa hace de función del diferencial; por tanto, se tiene como resultado:

$$w = \frac{1}{2} \frac{YS}{l_0} \Delta l^2.$$

Dado que  $\Delta l = \lambda l_0$ , se puede escribir como:  $w = \frac{1}{2} \frac{YS}{l_0} \lambda^2 l_0^2$ ; al final, esto es:

$$w = \frac{1}{2} YS l_0 \lambda^2 \quad (3.6).$$

De esta manera, el trabajo que se realiza cuando se haya hecho una deformación lineal depende del módulo de Young, de la longitud del material, de la sección transversal y, en lo fundamental, del cuadrado de la deformación unitaria.

Este trabajo que se ha realizado en la deformación del material se convierte en energía potencial; en el caso de un resorte, cuando está comprimido, tiene energía potencial igual al trabajo que se realizó para deformarlo. Así que la energía almacenada en la deformación lineal es:

$$U = \frac{1}{2} YS l_0 \lambda^2 \quad (3.7).$$

### 3.4 Deformación volumétrica



**Figura 3.4.**  
Lingote de metal con dimensiones:  $l$  (largo),  $w$  (ancho),  $h$  (alto).

A diferencia de un alambre, donde la longitud es mucho más grande que el diámetro, en un objeto con tres dimensiones (ver figura 3.4): largo, ancho y alto, cuando en una de ellas se aplica una fuerza deformante, se afectarán las otras dos; esto es, cualquier fuerza aplicada en una de las dimensiones afectará el volumen total.

Por otra parte, como el cuerpo tiene áreas en lo ancho, alto y largo, las fuerzas deformantes generan esfuerzos mecánicos  $\frac{P}{S}$  que, como ya se dijo, afectan a todo el cuerpo; es decir, todo el volumen.

En consecuencia, cualquier deformación que se tenga en una de las dimensiones repercute en la otras, de esta forma:

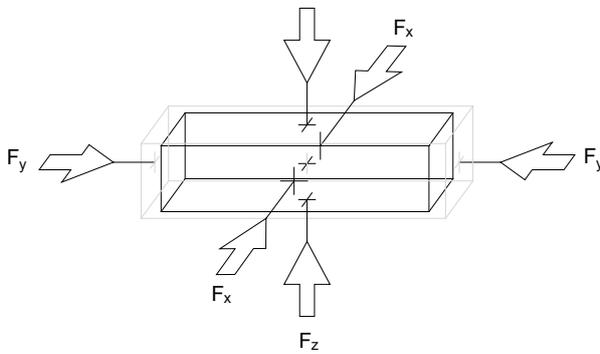
$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta w}{w} = -\sigma \frac{\Delta h}{h} \quad (3.13).$$

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta h}{h} = -\sigma \frac{\Delta l}{l} \quad (3.14).$$

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta l}{l} = -\sigma \frac{\Delta w}{w} \quad (3.15),$$

Donde:

$\sigma$  se conoce con el nombre de módulo de Poisson, y se refiere a la forma como el material se redistribuye cuando se tienen fuerzas deformantes en una de las dimensiones; de este modo, cuando a un lingote se lo somete a esfuerzos compresivos por sus tres dimensiones, el resultado lleva a obtener un cuerpo de menor volumen y de esta manera se está frente a una deformación volumétrica.



Para el análisis, se puede partir de la deformación a lo largo, cuando se lo deforma en esa dimensión (ver figura 3.5); de igual forma, se puede pensar cómo responde a lo largo cuando se lo afecta en la dimensión ancho y alto.

Así que, cuando se aplica fuerza deformante a lo largo, el material responde según la Ley de Hooke; esto es:

Figura 3.5.

El sólido ha disminuido su volumen como consecuencia de las fuerzas compresoras en  $x, y, z$ .

$$\frac{\Delta l_1}{l} = -\frac{p}{Y} \quad (3.16).$$

Ahora bien, en la deformación a lo largo, cuando la fuerza se aplicada en lo ancho, de acuerdo a la Ley de Hooke, se tiene:  $\frac{\Delta w}{w} = -\frac{p}{Y}$ , pero, según la ecuación (3.15)  $\frac{\Delta l_2}{l} = -\sigma \frac{\Delta w}{w}$ ; al combinar con (3.16), se obtiene:

$$\frac{\Delta l_2}{l} = \sigma \frac{p}{Y} \quad (3.17).$$

De igual forma, respecto a cómo responde el material cuando se realiza la fuerza deformante en la dimensión altura, según la Ley de Hooke, se tiene:  $\frac{\Delta h}{h} = -\frac{p}{Y}$ , pero de acuerdo a la ecuación (3.13)  $\frac{\Delta l_3}{l} = -\sigma \frac{\Delta h}{h}$ , en que, al combinarla con (3.16), se tiene:

$$\frac{\Delta l_3}{l} = \sigma \frac{p}{Y} \quad (3.18).$$

Así que la deformación total a lo largo será la suma de las ecuaciones (3.16), (3.17), y (3.18), esto es:  $\frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta l_1}{l} + \frac{\Delta l_2}{l} + \frac{\Delta l_3}{l} = -\frac{p}{Y} + \sigma \frac{p}{Y} + \sigma \frac{p}{Y}$ ; es decir:

$$\frac{\Delta l}{l} = -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma) \quad (3.19).$$

De igual modo, se realiza el análisis para las dimensiones ancho  $w$  y alto  $h$ :

$$\frac{\Delta w}{w} = -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma) \quad (3.20); \quad \frac{\Delta h}{h} = -\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma) \quad (3.21).$$

Así que la deformación volumétrica unitaria será la suma de las deformaciones unitarias de sus correspondientes dimensiones:

$$\lambda_V = \lambda_L + \lambda_W + \lambda_H$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta w}{w} + \frac{\Delta h}{h} \quad (3.21);$$

es decir, será la suma de (3.19), (3.20 y (3.21):

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -\frac{P}{Y}(1 - 2\sigma) - \frac{P}{Y}(1 - 2\sigma) - \frac{P}{Y}(1 - 2\sigma)$$

Al organizar términos, se tiene:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = -3\frac{p}{Y}(1 - 2\sigma) \quad (3.22).$$

En general, el módulo volumétrico se puede expresar como:

$$\beta = -\frac{p}{\Delta V/V} \quad (3.23)$$

$$\beta = -\frac{Y}{3(1-2\sigma)} \quad (3.24)$$

El signo menos se debe tener en cuenta como concepto, pues siempre que hay un esfuerzo deformante, el material se resiste a dicho esfuerzo, pero como valor es una cantidad que caracteriza al material.

### 3.5 Deformación por cizallamiento o corte

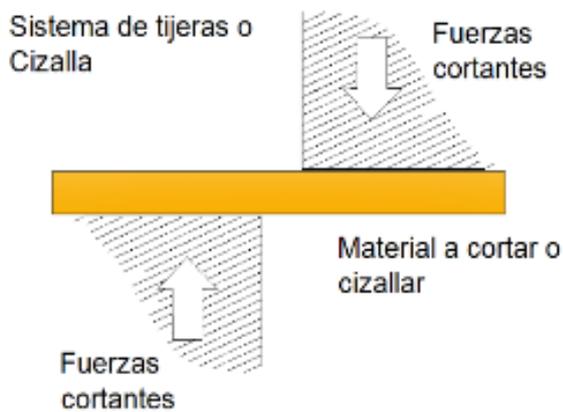


Figura 3.6.  
Material sometido a cizallamiento por parte de las cuchillas con fuerza cortante.

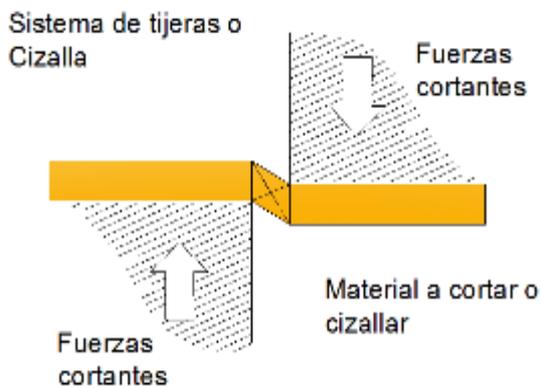


Figura 3.7.  
Las fuerzas cortantes han deformado el material; se observa cómo el material en la zona de deformación se ha estirado según la diagonal mayor y se ha recogido en la diagonal menor.

En la vida cotidiana y casi a diario se realizan deformaciones por corte o cizallamiento cuando se corta papel con tijeras, con bisturí o sencillamente cuando entre los dedos arrancamos papel periódico o algo parecido; en todas estas formas, se realiza deformación por cizallamiento; según la Figura 3.6, se observa que hay una cuchilla en la base y otra que cae; entre las dos forman un conjunto de fuerzas cortantes; el material a cortar está en medio de estas cuchillas; depende ahora de qué tanta fuerza hay y de qué tan duro fuera el material; existen materiales que se dejan cortar fácilmente, pero hay otros que no son tan fáciles y en el momento de cortar se estiran, como es el caso de algunos plásticos.

Ahora bien, considérese un material intermedio, que se resiste al corte, pero al final se logra cizallar; cuando esto ocurre, el material se deforma y entra a una zona plástica sin retorno; allí el material deformado se estira por un lado, mientras que, de forma ortogonal, se recoge por el otro. Tal como se ve en la Figura 3.7, el efecto deformante ha conformado un rombo con dos diagonales mayor y menor: la diagonal mayor representa el lado del material estirado y en la diagonal menor se representa el material recogido; es decir, esta zona del material se ha sometido a dos fuerzas: una de contracción y otra de estiramiento o expansión; como se ve en la Figura 3.8, el rombo  $abcd$ , con diagonales  $D$

(diagonal mayor) y  $d$  (diagonal menor) es como si estuviera inscrito en un rectángulo  $xyzq$ , donde al lado mayor se lo somete a compresión, mientras que al lado menor se lo somete a estiramiento; visto de esta forma, es como si se estuviera frente a una deformación superficial, con dimensiones únicamente de largo y ancho.

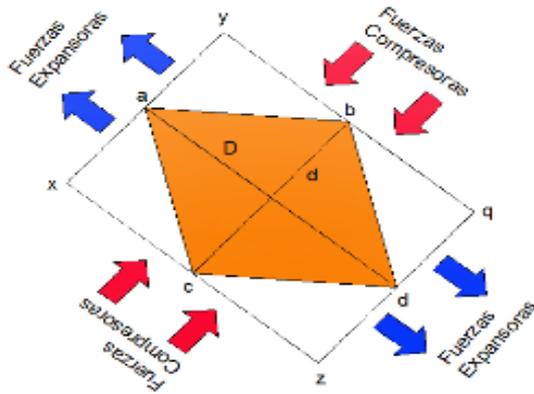


Figura 3.8. El rombo abcd del material es como si estuviera inscrito en un rectángulo xyzq, al que se lo somete a fuerzas compresoras y fuerzas expansivas.

Entonces, cuando se logra una deformación a lo largo por fuerzas de estiramiento, se tiene la Ley de Hooke; es decir:

$\frac{\Delta l_1}{l_0} = -\frac{p}{Y}$  en que, aplicado a la Figura 3.8, la parte larga del rectángulo se representa con D; es decir:  $\frac{\Delta D_1}{D} = -\frac{p}{Y}$ ; por otra parte, la deformación a lo ancho repercute en el largo, tal como se realizó en la deformación volumétrica; o sea:  $\frac{\Delta l_2}{l_0} = \sigma \frac{p}{Y}$ ; al aplicarla a la deformación del rombo, se tiene:  $\frac{\Delta D_2}{D} = \sigma \frac{p}{Y}$ ; al sumar las deformaciones unitarias de las diagonales, se tiene:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\Delta D_1}{D} + \frac{\Delta D_2}{D} = -\frac{p}{Y} + \sigma \frac{p}{Y}$$

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{p}{Y} (1 - \sigma) \quad (3.25).$$

Por otra parte, la deformación unitaria de la diagonal se puede analizar de esta forma.

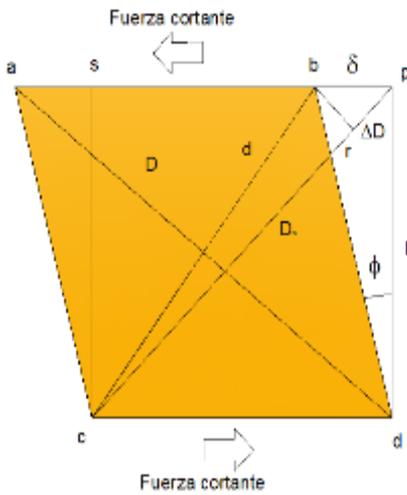


Figura 3.9. El cuadrado spcd, al recibir la fuerza cortante f, se ha deformado en el rombo abcd.

Según la Figura 3.9, se puede observar el elemento geométrico cdps sin deformar y el elemento geométrico deformado corresponde al rombo cdbs debido a las fuerzas cortantes; al darse esta deformación, la esquina del cuadrado p se corrió hasta alcanzar el punto b del rombo, al correr una distancia  $\delta$ , con lo cual se forma el triángulo rectángulo bpr, con ángulo de 90 en r; por tanto, es un triángulo isósceles (dos lados iguales). El lado  $\Delta D$  es opuesto a la hipotenusa  $\delta$ , así que, según el teorema de Pitágoras, se tiene:  $\delta^2 = \Delta D^2 + \Delta D^2$ ; es decir:  $\delta^2 = 2\Delta D^2$ , o, lo que es lo mismo:  $\delta = \Delta D\sqrt{2}$ ; así que:

$$\Delta D = \frac{\delta}{\sqrt{2}} \quad (3.26).$$

De igual forma se puede ver en las diagonales del cuadrado cdps:  $D^2 = l^2 + l^2$ ; es decir que:  $D = l\sqrt{2}$ ; si se remplazan estos resultados en (3.25), se tiene:  $\frac{\Delta D}{D} = \frac{\delta/\sqrt{2}}{l\sqrt{2}}$ , o, lo que es lo mismo:

$$\frac{\Delta D}{D} = \frac{\delta}{2l} \quad (3.27).$$

Según la Figura 3.9:  $Tang\phi = \frac{\delta}{l}$ ; entonces, al remplazar en (3.27), se tiene:  $\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{2} Tang\phi$ . Para ángulos pequeños,  $Tang\phi = \phi$ ; por tanto, la ecuación (3.27) se puede escribir como:  $\frac{\Delta D}{D} = \frac{1}{2} \phi$ . Al combinar con la ecuación (3.25), se tiene:  $\frac{\Delta D}{D} = -\frac{p}{Y}(1 - \sigma) = \frac{1}{2} \phi$ . Así que:

$$\frac{p}{\phi} = -\frac{Y}{2(1-\sigma)} \quad (3.28).$$

De modo que el módulo de cizallamiento, corte o de Coulomb, se define como:

$$\mu = \frac{Y}{2(1-\sigma)} \quad (3.29).$$

De forma experimental, se tiene:

$$\mu = -\frac{p}{\phi} \quad (3.30).$$

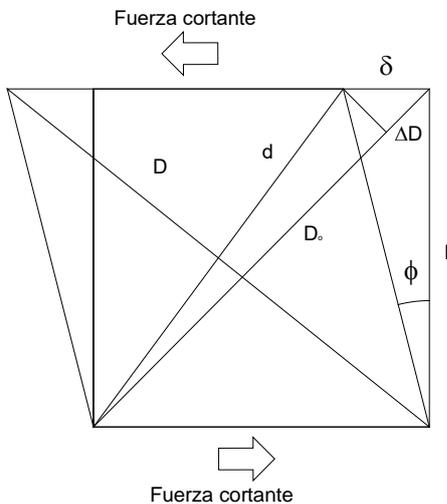


Figura 3.10. Variaciones de las diagonales por efecto de una fuerza cortante

### Ejemplo

Una placa de acero cuadrada (ver figura 3.10), de un metro de lado y un centímetro de espesor, sometida a una fuerza tangencial o de corte, genera una deformación de 0,05 centímetros. Calcular la deformación relativa y ¿qué fuerza actúa tangencialmente?

Datos que da el problema: deformacion  $\delta = 5 \times 10^{-4} m$ ,  $l = 1m$ , espesor de la lámina  $1cm$ .

Solución

$$\tan \phi = \frac{\delta}{l}, \text{ pero } \tan \phi \approx \phi; \text{ entonces: } \phi = \frac{5 \times 10^{-4} m}{1 m} = 5 \times 10^{-4} \text{ rad} .$$

Como:  $\mu = \frac{p}{\phi}$ , entonces:  $F = \mu \phi A$ . El módulo de corte para el acero es:  $\mu = 16 \times 10^{10} \frac{N}{m^2}$

Así que:

$$F = \left( 16 \times 10^{10} \frac{N}{m^2} \right) (5 \times 10^{-4}) (1 m) (0,01 m)$$

$$F = 80 \times 10^{10} \times 10^{-4} \times 10^{-2} m$$

De modo que la fuerza causante de la deformación cortante es:  $F = 8 \times 10^5 N$ .

### 3.6 Deformación por torsión

Esta es otra de las deformaciones cotidianas, donde a diario se está retorciendo alambres, o cosas similares; en la industria, se encuentran resortes helicoidales que, en el fondo, no son más que barras de torsión enrolladas, como es el caso de resortes poderosos de la suspensión de vehículos, máquinas, o los resortes suaves de lapiceros retractiles, entre otros.

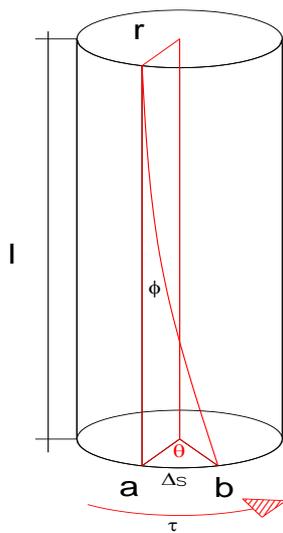
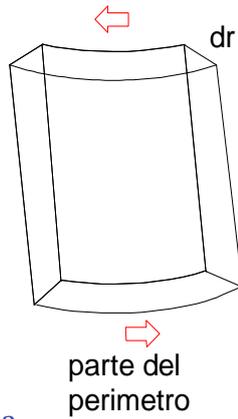


Figura 3.11 Barra cilíndrica sometida a torsión.

En la Figura 3.11, se puede ver una barra sometida a torsión por la acción de un torque  $\tau$ , que produce un desplazamiento en la directriz desde el punto a hasta el punto b, por lo que la directriz a lo largo de la barra desarrolla el ángulo  $\phi$ , mientras que el radio de la barra gira un ángulo  $\theta$ , enmarcado en el arco ab, de tal forma que  $ab = r\theta = l\phi$ , donde  $\phi$  es el ángulo de deformación por corte o cizallamiento. De esto, se puede deducir que:

$$\phi = \frac{r\theta}{l} \quad (3.31).$$

Ahora bien, como el módulo de corte es  $\mu = -\frac{p}{\phi}$ , al combinar estas dos expresiones, se tiene:  $\mu = -\frac{pl}{r\theta}$ ; por tanto, el esfuerzo mecánico se puede expresar como:



**Figura 3.12.**  
El elemento de una capa de la barra circular que se deforma al igual que una deformación por corte.

$$p = \frac{\mu r \theta}{l} \quad (3.32).$$

Por otra parte, como el esfuerzo mecánico también es  $p = \frac{F}{A}$ , al igualar estas dos expresiones, se tiene:  $\frac{F}{A} = -\frac{\mu r \theta}{l}$  de donde  $F = -\frac{\mu r A \theta}{l}$ .

Así, al analizar en el interior de la barra se puede pensar que el material se desliza en finas capas de adentro hacia afuera, por lo que un elemento de estas capas (Figura 3.12), se puede escribir en forma diferencial:

$$dF = -\frac{\mu r \theta dA}{l}.$$

El área corresponde al área de la barra afectada; es decir, por un lado, es la longitud del perímetro por el diferencial del radio, esto es:  $dA = 2\pi r dr$ ; al remplazar, se tiene:

$$dF = -\frac{2\pi r^2 \mu \theta}{l} dr \quad (3.32).$$

Ahora bien, recuérdese que el momento de una fuerza o torque se presenta cuando se trata de hacer girar un objeto; en este caso, lo que se hace girar es un extremo de la barra; esto es:  $d\tau = dFr$ ; al combinar estas dos ecuaciones, se tiene:

$$d\tau = -\frac{2\pi r^3 \mu \theta}{l} dr.$$

La solución se realiza mediante integración:

$$\int_0^\tau d\tau = \int_0^a -\frac{2\pi r^3 \mu \theta}{l} dr.$$

Los valores y variables constantes salen de la integral, por tanto:

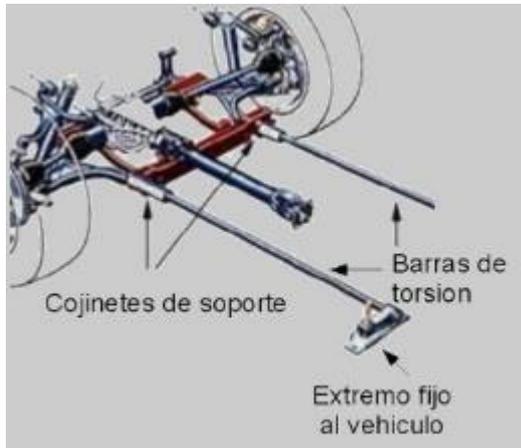
$$\tau = -\frac{2\pi \mu \theta}{l} \int_0^a r^3 dr.$$

Así que, como solución final, se tiene:

$$\tau = -\frac{\pi \mu a^4}{2l} \theta \quad (3.33),$$

donde  $G = \frac{\pi\mu a^4}{2l}$ ; por tanto,  $\tau = -G\theta$ , de donde el módulo de torsión se puede expresar como:

$$G = -\frac{\tau}{\theta} \quad (3.34).$$



**Figura 3.13.**  
Barras de torsión en la suspensión de un vehículo.  
Fuente: (Multiservicio automotriz 3h, 2011)

De esta forma se tiene un nuevo módulo, denominado módulo de rigidez o módulo de torsión y con este módulo se fabrica la mayoría de resortes en los que la barra se tuerce cierto ángulo  $\theta$ , así fuesen helicoidales y de modo directo están las barras de torsión que se encuentran en la suspensión de máquinas y vehículos (Figura 3.13).

En muchos casos, los ingenieros civiles, para dar mayor resistencia a los materiales de construcción, realizan cierta torsión a las varillas de acero que se encuentran en el interior de vigas y columnas, proceso que se conoce como rigidización.

Para resumir lo relativo a los módulos, se tiene las tablas 3.3. y 3.4:

**Tabla 3.3.**  
**Módulos de deformación.**

Módulo	Símbolo	Nombre	Expresión matemática	Equivalencia
Lineal	Y	Young	$Y = -\frac{p}{\Delta l/l_0}$	$Y = -\frac{p}{\Delta l/l_0}$
Volumétrico	$\beta$	Volumétrico	$\beta = -\frac{p}{\Delta V/V_0}$	$\beta = -\frac{Y}{3(1-2\sigma)}$
Corte o cizallamiento	$\mu$	Coulomb	$\mu = -\frac{p}{\varphi}$	$\mu = -\frac{y}{2(1-\sigma)}$
Torsión	G	Rigidez	$G = -\frac{\tau}{\theta}$	$G = -\frac{\pi\mu a^4}{2l}$

Tabla 3.4

**Módulos de elasticidad lineal, volumétrica, corte y torsión.**

Material	Símbolo	Young ( $10^{10}$ N/m <sup>2</sup> )	Volumétrico $\beta$	Corte $\mu$	Torsión G
Aluminio	Al	7	7,5	2,5	
Cobre	Cu	11	14	4,4	
Latón		9,1	6	3,5	
Hierro	Fe	19	16	7,7	
Acero rápido		20	16	7,5	
Wolframio	W	35	20	14	
Oro	Au				
Plata	Ag	7,5			
Plomo	Pb	0,5	4,1	0,6	
Vidrio		7			
Cuarzo		5,2			
Mercurio	Hg		0,21		
Agua	$H_2O$		2,8		

Fuente: (Medina, 2009)

**3.7 Sólidos no cristalinos**

Figura 3.14.  
Ruptura de un hueso por torsión.  
Fuente: (Lobotronix, 2014)

En la naturaleza se encuentran sólidos que no necesariamente son de origen cristalino, tales como el vidrio, el caucho, huesos, entre otros (figura 3.14); las moléculas de estos sólidos no se disponen de forma regular tridimensionalmente; se encuentran al azar unas respecto a otras: por ejemplo:

El vidrio. Es un sólido no cristalino, compuesto por dióxido de silicio, óxido de bario, monóxido sódico y otros; en el lenguaje de los químicos, el vidrio es óxido inorgánico, cuyas moléculas se encuentran dispuestas de forma aleatoria; unos pocos forman sólidos, al enfriarse de manera brusca, como la lava de un volcán (obsidiana).

Una característica física de estos sólidos consiste en que, al romperse, no tienen caminos de ruptura definidos y las trizas se vuelven completamente aleatorias.

**Elastómeros.** Son sustancias similares al caucho, donde sus moléculas les permiten variar de forma hasta más del doble de su longitud inicial; la molécula conforma complejas estructuras que, al estirar, es como si se desenrollaran para permitir la deformación y, al terminar la fuerza, vuelven a recuperar la posición original.

**Mezcla.** Una mezcla consta de partículas sólidas dispersas en un líquido; si las partículas son grandes, se depositarán en corto tiempo abandonando el líquido, tal como lo hace la arena, mientras que las pequeñas lo hacen lentamente y, si las partículas son aún más pequeñas, del orden  $10\mu m$ , se dice que son partículas coloidales, que prácticamente se quedan suspendidas en el líquido; a la mezcla de partículas coloidales con líquido se le llama Sol, como es el caso de los almidones mezclados con agua; en caso de que las partículas fueran superiores al líquido y este conformase gotitas del tamaño de las partículas coloidales, entonces se ha formado un Gel, que puede tener características de sólido por formar las partículas coloidales redes, que conforman estructuras; la gelatina, el asfalto y el cemento (Figura 3.15) son ejemplos de geles. (Cromer, 1974)



**Figura 3.15.**

Concreto utilizado para pavimentar vías, al mezclar grava, arena y agua.

Fuente: Concretos Prefabricar Y Construir (2020).

### 3.8 Sólidos extraordinarios

En la naturaleza existen otros sólidos aún más complejos, como los huesos, que están compuestos por células vivas, vasos sanguíneos y nervios, en medio de un armazón sólido.

En la construcción, se encuentran el cemento y todos los derivados que se pueden elaborar con este elemento; el cemento tiene su propia historia, que se remonta a los tiempos de los griegos y romanos; en la actualidad, se ha generalizado tanto en el campo de la construcción, que casi es imposible pensar en no utilizarlo; respecto a las propiedades, una vez hubiera terminado el fraguado, se convierte en un material rígido que raya con la fragilidad, por lo que se lo utiliza entremezclado con piedra, arena y acero; el resultado de esta combinación ha permitido la construcción de edificaciones, carreteras, puentes, entre otros.

En la metalurgia moderna, se han logrado obtener incontables materiales de propiedades extraordinarias en dureza y elasticidad; un material que llama mucho la atención es el nitinol, una aleación de níquel y titanio, quizá poco conocido en el mundo, pero muy común en algún sector de la salud, como es la ortodoncia; el nitinol es el material por excelencia utilizado para mejorar la geometría de la posición de la dentadura, por ser prácticamente inocuo a la salud y, sobre todo, por tener una

característica fundamental de guardar la memoria con la que se elaboró<sup>2</sup> o, visto de otra forma, de ser un material altamente elástico; así fuera en condiciones de deformaciones forzosas, el material siempre recupera su forma original, razón por la cual también se ha utilizado en misiones espaciales; su fácil empaquetado, para luego desplegarse de acuerdo a su memoria guardada, cuando se lo diseñó en la tierra; este es el caso de las antenas parabólicas de los vehículos espaciales robotizados.

Como el nitinol, también existen plásticos que tienen propiedades similares; en poco tiempo, se tendrán capotas de vehículos fabricadas en este material; así, en deformaciones en la geometría debido a golpes, sería muy fácil recuperar la forma, al poner el material a una determinada temperatura.

Los plásticos o los polímeros con memoria como se les llama: materiales que recuerdan su forma, pertenecen al grupo emergente de los “materiales inteligentes”. Una pieza fabricada con un polímero con memoria (del inglés “shape memory polymers”, SMP) vuelve a su forma original después de haber sido transformada en a diferentes formas. Este proceso dinámico de cambio y recuperación puede suceder un sinnúmero de veces, para llevar a que las piezas fabricadas con SMP fueran ideales para aplicaciones que requieren múltiples niveles de funcionalidad o que se emplean en ambientes aleatorios, entre las que se encuentra el diseño de aeronaves, que pueden cambiar de forma durante el vuelo; otra aplicación es el diseño de piezas de automóviles para enviarse a lugares difíciles, pero, una vez instalada en el lugar por algún mecanismo que active, lo haría recuperando la forma o cualquier cosa que resultara útil para disminuir costos de transporte; el embalaje puede ser lo más pequeño posible, una vez en el sitio solicitado, se activaría el mecanismo de recuperación y el producto recuperaría la forma original. ¡¿Fantástico verdad?!

---

<sup>2</sup> El **nitinol** es una aleación de níquel y titanio, y es el ejemplo más conocido de las llamadas aleaciones con memoria de forma. Aunque los científicos conocían algunas propiedades de este tipo de materiales desde 1932, las primeras aplicaciones prácticas no comenzaron a desarrollarse hasta 30 años más tarde. En los laboratorios de la marina de los EE. UU., William Beuhler descubrió una aleación de níquel (Ni) y titanio (Ti) que presentaba estas propiedades, en un programa de investigación encaminado a la obtención de una aleación con alta resistencia a la corrosión. El equipo de investigadores que lo descubrió bautizó el nuevo material con el nombre de NiTiNOL (acrónimo de Ni-Ti-Naval Ordnance Laboratory). Se trata de una aleación de níquel y titanio en proporciones casi equimolares, que tiene propiedades de memoria de forma espectaculares. La memoria de forma se manifiesta cuando, después de una deformación plástica, el material recupera su forma tras un calentamiento suave. El nombre de este material se ha convertido en sinónimo de este tipo de aleaciones, al igual que el teflón lo es del politetrafluoroetileno. Disponible en: <https://es.wikipedia.org/wiki/Nitinol>

# Capítulo 4



## Movimiento Oscilatorio



Fuente: [https://www.flickr.com/photos/mural\\_virtual/242488824](https://www.flickr.com/photos/mural_virtual/242488824)

En la naturaleza, casi todos los movimientos son de carácter periódico o cíclico; es decir, se repiten de manera regular; ejemplos de este tipo de movimientos se tienen desde el “simple columpio” hasta los complicados ciclos de oscilación de los electrones, moléculas, cristales de sólidos, líquidos y gases, por no mencionar otros estados de la materia.

Igual son los movimientos periódicos de la tierra (traslación, rotación, nutación, precesión y bamboleo), los movimientos sísmicos, la vibración de las máquinas, los latidos del corazón, la renovación celular, etc.

Por esta razón es muy importante el estudio de este movimiento y, en este caso, solo se estudiarán aquellos que permitan desarrollarse por modelos matemáticos acordes al nivel de este curso; es decir, modelos lineales determinísticos.

### 4.1 Movimiento Armónico Simple (MAS)

Para iniciar, considérese una masa que oscila respecto a un punto de equilibrio “0” y, para mejor entendimiento, considérese a la masa como si fuera un punto en el que solo actúa la fuerza elástica del resorte, tal como se ve en la Figura 4.1.

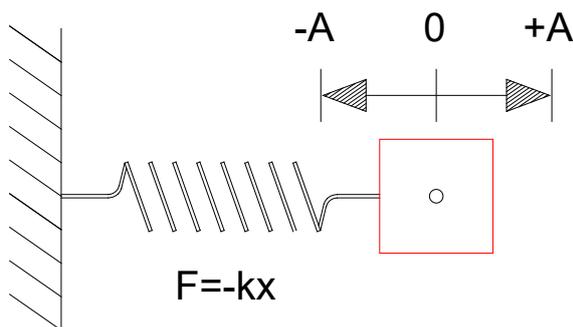


Figura 4.1. Sistema de Masa; el resorte oscila respecto al punto de equilibrio “0”.

Como la masa puede oscilar entre los puntos a y b, donde se detiene para poder empezar el movimiento en sentido contrario, es decir, que en estos puntos la masa tiene velocidad nula, mientras que, al pasar por el punto medio 0, tiene la máxima velocidad y con este mismo criterio se distribuirá la energía cinética y potencial.

El hecho de que en los extremos la masa tuviera velocidad cero y en el medio tuviera velocidad máxima implica que el sistema es acelerado; es decir, parte de velocidad cero hasta adquirir la máxima velocidad en el punto medio; por tanto, corresponde a un sistema acelerado, de tal manera que:

$$\sum F = m_s a \quad (4.1.1).$$

Ahora bien, la única fuerza activa que se tiene es la fuerza elástica del resorte que, en este caso, es la Ley de Hooke:  $F = -KX$

Al considerar que la masa del resorte es insignificante respecto a la masa oscilante, entonces la masa del sistema  $m_s$  será la masa oscilante; por tanto, al combinar estas dos ecuaciones, se tiene:  $ma = -kx$  que, en general, se acostumbra a expresarla como:

$$ma + kx = 0 \quad (4.1.2).$$

Como la aceleración se puede expresar como la segunda derivada,  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , entonces la ecuación 4.1.2 queda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad (4.1.3).$$

Esta expresión matemática es la ecuación que representa al movimiento oscilatorio armónico simple, el más sencillo de todos los movimientos oscilatorios.

La ecuación corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea e incompleta.

Para encontrar la solución se utiliza algún método de las ecuaciones diferenciales; el más aconsejable y fácil de utilizar puede ser el método de la característica, utilizado en cualquier orden, donde se asume que la solución general es:  $x = c_1x_1 + c_2x_2$  (4.1.4), y como solución particular se obtiene:  $x = e^{\lambda t}$  (4.1.5).

Entonces, al utilizar la solución particular y realizar con ella lo que dice la ecuación (4.1.3), se tiene:

$$x = e^{\lambda t}$$

$$\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$$

$$\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Ahora bien, al remplazar estas soluciones en (4.1.3), queda:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m} e^{\lambda t} = 0.$$

Al factorizar:

$$e^{\lambda t} \left( \lambda^2 + \frac{k}{m} \right) = 0.$$

Como el factor  $e^{\lambda t}$  nunca podrá ser cero, entonces le corresponde al paréntesis ser cero:

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0.$$

Por tanto, al despejar  $\lambda^2 = -\frac{k}{m}$ ; esto es:  $\lambda = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}}$ ; como se tiene una raíz negativa, se está en el campo de los números imaginarios, así que:

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} i \quad (4.1.6).$$

De acuerdo a la ecuación (4.1.6), se tendrían dos valores para  $\lambda$ : uno positivo y el otro negativo. Ahora bien, la ecuación (4.1.5) queda,  $x = e^{\pm \lambda it}$ ; entonces, la ecuación (4.1.4) será:

$$x = c_1 e^{\pm \lambda it} + c_2 e^{\pm \lambda it}.$$

Como ya se sabe el valor de  $\lambda$ , entonces se puede escribir así:

$$x = c_1 e^{\pm \sqrt{\frac{k}{m}} it} + c_2 e^{\mp \sqrt{\frac{k}{m}} it} \quad (4.1.7).$$

Como  $\lambda$  es complejo, se lo puede escribir así:  $e^{\pm i\lambda} = \text{Cos}\theta \pm i\text{Sen}\theta$ .

Esto es:  $x_1 = \text{Cos}\lambda t + i\text{Sen}\lambda t$  y  $x_2 = \text{Cos}\lambda t - i\text{Sen}\lambda t$ , al remplazar en 4.1.4 y organizar términos, se obtiene:

$$x = c_1(\text{Cos}\lambda t + i\text{Sen}\lambda t) + c_2(\text{Sen}\lambda t - i\text{Sen}\lambda t) \quad (4.1.8).$$

En la Física determinística y, en concreto, para este caso, no dice nada una solución compleja; por tanto, se toma únicamente la solución real; es decir:

$$x = c_1 \text{Cos}\lambda t + c_2 \text{Sen}\lambda t \quad (4.1.9).$$

Como  $\lambda = \pm \sqrt{\frac{k}{m}}$ , entonces 4.1.9 se escribe:

$$x = C_1 \text{Cos} \sqrt{\frac{k}{m}} t + C_2 \text{Sen} \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (4.1.10).$$

Por otra parte, al analizar la expresión  $\sqrt{\frac{k}{m}}$ , se tiene que como  $k = \frac{F}{x}$  y  $m = \frac{F}{a}$ , entonces, al remplazar en el radical, se tiene  $\sqrt{\frac{F/x}{F/a}}$ ; ahora bien, la aceleración es  $a = \frac{v}{t}$ ; al cancelar y remplazar lo que corresponde a la aceleración, se obtiene:  $\sqrt{\frac{1}{t^2}}$ ; es decir,  $\frac{1}{t}$ , lo que corresponde a unidades de frecuencia; por tanto, se puede decir que  $w = \sqrt{\frac{k}{m}}$  o que  $\frac{k}{m} = w^2$ . Entonces, la ecuación (4.1.10) se puede escribir como:

$$x = c_1 \text{Cos} wt + c_2 \text{Sen} wt \quad (4.1.11).$$

Ahora bien, se puede considerar que  $c_1 = A \text{Cosa}$  y  $c_2 = A \text{Sen}a$ .

Entonces la ecuación (4.2.8) se podría escribir así:

$$x = A \cos \alpha \cos wt + A \sin \alpha \sin wt \quad (4.1.12).$$

Por identidad trigonométrica, se la puede expresar como una expresión trigonométrica de arcos dobles; es decir:

$$x = A \cos(wt + \alpha) \quad (4.1.13).$$

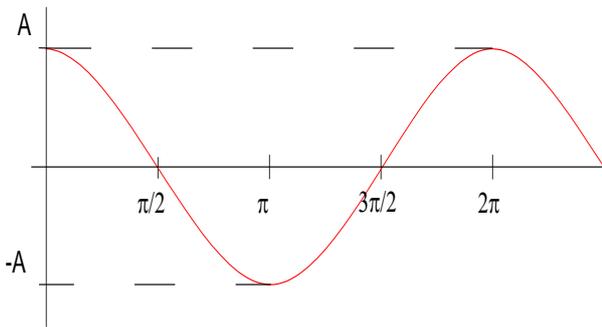


Figura 4.2. Gráfica de la función de elongación o posición de la masa oscilante.

Esta ecuación se conoce como función de desplazamiento; es tal que satisface a la ecuación del movimiento, donde:  $A$  representa la amplitud del movimiento oscilatorio desde el punto de equilibrio “o” a la posición positiva  $A$ , y, a la posición negativa  $-A$ . Tal como se ve en la Figura 4.2.

La función del movimiento o desplazamiento también se denomina elongación o posición de la partícula o masa oscilante, lo que permite conocer de inmediato la velocidad y la aceleración.

### Velocidad

Para deducir la Ecuación de la velocidad se necesita derivar la función de la posición tal como es la definición de la velocidad. Esto es: como  $v = \frac{dx}{dt}$

entonces:

$$v = \frac{d}{dt} A \cos(wt + \alpha);$$

es decir:

$$v = -Aw \sin(wt + \alpha) \quad (4.1.14).$$

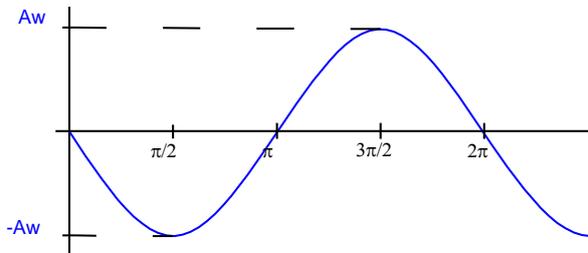


Figura 4.3. Gráfica de la velocidad de la masa que pasa por el punto de equilibrio y alcanza los extremos  $a$  y  $b$ .

Como se ve en la Figura 4.2, y 4.3 cuando la elongación es en función del Coseno, la velocidad es en función del seno negativo, esto es: la masa oscilante una vez haya

partido del punto de equilibrio con sentido negativo llegará hasta el punto más extremo la amplitud  $-A$  en este punto la velocidad se hace cero y empieza el movimiento de retorno con sentido positivo pasando por el punto de equilibrio con la máxima velocidad, así, hasta llegar al punto máximo positivo de la amplitud  $+A$  nuevamente en este punto, la velocidad se hace cero y empieza el movimiento con sentido negativo y así sucesivamente.

Aceleración. Ahora bien; por definición de aceleración, se tiene  $a = \frac{dv}{dt}$ .

$$a = \frac{d}{dt}(-A\omega \sin(\omega t + \alpha)); \text{ entonces:}$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \alpha) \quad (4.1.15).$$

El signo menos se debe a la derivada del coseno. Como la elongación está también en función del coseno, la única diferencia con la ecuación (4.1.13) es la frecuencia al cuadrado; por tanto, se puede escribir así:

$$a = -\omega^2 x \quad (4.1.16).$$

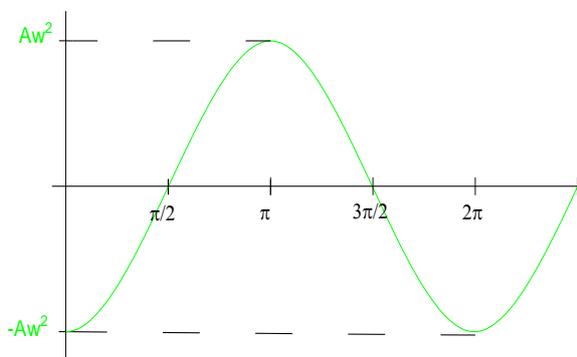


Figura 4.4.  
Gráfica de la aceleración de la masa respecto al punto de equilibrio.

Al comparar esta función de la aceleración con la de la velocidad, se puede notar que mientras se tiene la máxima velocidad, se tiene la mínima aceleración; esto ocurre en el punto de equilibrio y en los extremos donde se tiene la máxima elongación, la velocidad es cero y la aceleración es máxima y siempre en dirección al punto de equilibrio; así que, cuando la masa se encuentra en desequilibrio, es decir en uno de los puntos de máxima elongación, la aceleración es máxima, lo que lleva a que la masa adquiera velocidad hasta alcanzar la máxima al pasar por el punto de equilibrio que, por efectos de inercia, alcanzará el punto extremo opuesto (Figura 4.3).

Respecto a la ecuación (4.1.16), es otra forma de obtener la aceleración a partir de la elongación, una vez se tenga su valor.

Con las tres ecuaciones se puede describir la cinemática del MAS en su totalidad.

### Periodo del MAS

Para deducir el periodo del MAS, se parte de lo que se ha definido como frecuencia angular; esto es:  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Por otra parte, la frecuencia en el movimiento circular se define como  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ; al combinar estas expresiones, se tiene:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad (4.1.17).$$

Por otra parte, la frecuencia natural del sistema se puede expresar como el inverso del periodo; entonces:  $f = \frac{1}{T}$ .

### Energía del MAS

Para analizar la energía del MAS, se deben tener en cuenta las diferentes posiciones que toma la masa, en el caso del punto de equilibrio, y cuando la masa está oscilando, adquiere la máxima velocidad; por lo tanto, en ese punto se tiene la máxima energía cinética; es decir,  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ , pero esta expresión será cero cuando llegue a los extremos A o B, donde la velocidad es nula.

Por otra parte, la máxima elongación se tiene cuando la masa está en los extremos A o B, aquí, en la máxima amplitud se tiene la máxima energía potencial elástica del resorte; esto es:  $U = \frac{1}{2}kx^2$ . Así que, de acuerdo al principio de conservación de la energía, la energía total mecánica es:  $E_T = U + E_K$ , en que, al remplazar las expresiones de energía cinética y potencial, se tiene:

$$E_t = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (4.1.18).$$

Cómo la elongación se puede expresar como:  $x = A\text{Sen}(wt + \alpha)$  y la velocidad es:  $v = w.A\text{Cos}(wt + \alpha)$ , entonces la energía total mecánica quedará:

$$E_t = \frac{1}{2}mA^2w^2\text{Sen}^2(wt + \alpha) + \frac{1}{2}kA^2\text{Cos}^2(wt + \alpha).$$

Como  $k = w^2 m$ , al remplazarla, se tiene:

$$E_t = \frac{1}{2}kA^2\text{Sen}^2(wt + \alpha) + \frac{1}{2}kA^2\text{Cos}^2(wt + \alpha).$$

Al factorizar  $\frac{1}{2}kA^2$ , se tiene:

$$E_t = \frac{1}{2}kA^2[\text{Sen}^2(\omega t + \alpha) + \text{Cos}^2(\omega t + \alpha)].$$

Como la expresión contenida en los corchetes es la suma de los cuadrados de las funciones trigonométricas que corresponden a la unidad, entonces la expresión, en su totalidad, queda reducida a:

$$E_t = \frac{1}{2}kA^2 \quad (4.1.19).$$

Resulta que la energía total mecánica es la máxima energía potencial elástica del resorte, porque está en función de la amplitud como máxima elongación, pero si en la ecuación (4.1.19) se reemplaza por lo que equivale a la constante de proporcionalidad, es decir  $k = m\omega^2$ , habrá quedado:

$$E_t = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2.$$

Y ahora se tiene la energía cinética máxima, debido a que  $v_M = \omega^2 A^2$ ; es decir, cuando la función Seno es igual a la unidad.

Así que se tiene que la energía total mecánica es igual a la energía potencial elástica máxima que está en los extremos o a la energía cinética máxima que se obtiene cuando pasa por el punto de equilibrio; esto es:

$$E_t = E_{kM} \text{ o } E_t = U_M.$$

Esto significa que:  $E_t = E_{kM} = U_M$ .

Si se iguala la energía potencial máxima con la energía cinética general, se tiene:  $\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv_M^2$ , de donde, al despejar la velocidad, se obtiene:

$$v_M^2 = A \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (4.1.20),$$

con lo cual se obtendría la máxima velocidad, pero si se trata de encontrar la velocidad en cualquier punto de la elongación, entonces: se ha dicho que en los extremos la energía total es la misma energía potencial, así que, de acuerdo a (4.1.19), se puede escribir:

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2.$$

De donde se puede despejar la velocidad.

$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2),$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)} \quad (4.1.21).$$

Con esta fórmula se puede calcular la velocidad de la masa oscilante en cualquier punto de la elongación, al conocer la amplitud, la constante y el valor de la masa.

### Ejemplo

En un sistema de MAS, se tiene una masa de 250 g, suspendida de un resorte, cuya constante  $k = 2,5 \text{ N/m}$ . Calcular:  $\omega$ , T y frecuencia natural.

### Solución

Datos que entrega el problema:

$$m = 0,25 \text{ Kg},$$

$$k = 2,5 \text{ N/m}$$

Recuérdese que la frecuencia angular es:  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , con la que se puede calcular la frecuencia; al remplazar valores, se tiene:  $\omega = \sqrt{\frac{2,5\text{N/m}}{0,25\text{kg}}}$ , con lo que se obtiene:

$$\omega = \sqrt{10} \text{ 1/s}^2. \text{ Por tanto, la frecuencia angular es: } \omega = 3,16 \text{ 1rad/s}$$

Como el periodo es:  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3,16} \text{ s} = 1,98\text{s}$  al final, como resultado de la frecuencia natural se tiene:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{1,98} = 0,5\text{Hz}$$

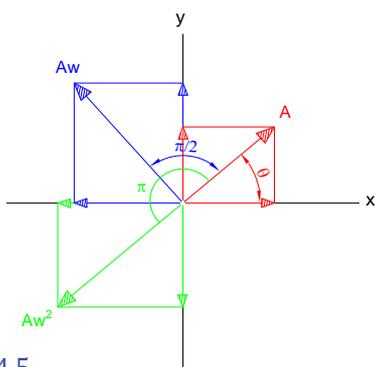


Figura 4.5. Vectores rotantes del desplazamiento o elongación, velocidad y aceleración.

### Vectores rotantes del MAS

Tanto la elongación o posición de la partícula oscilante como velocidad y aceleración son vectores cinemáticos de la masa o partícula oscilante. Ahora bien, como las funciones de posición, velocidad y aceleración se dan en términos de funciones trigonométricas (senos y cosenos), que permiten realizar las proyecciones en los ejes “x” y “y”, como se ve en la Figura 4.5, el vector velocidad está desfasado 90 grados respecto a la posición y aceleración; es decir, respecto al eje x, son:

$$\text{Elongación: } x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\text{Velocidad: } v_x = -A \omega \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\text{Aceleración: } a_x = -A \omega^2 \cos(\omega t + \alpha) \quad (4.1.22)$$

*Y respecto al eje y son:*

$$\text{Elongación en el eje y: } y = A \sin(\omega t + \alpha)$$

$$\text{Velocidad: } v_y = A \omega \cos(\omega t + \alpha)$$

$$\text{Aceleración: } a_y = -A \omega^2 \sin(\omega t + \alpha) \quad (4.1.23).$$

Estas proyecciones se pueden ver en la gráfica, como también el desfase que se presenta entre elongación, velocidad y aceleración; es decir, si la elongación está en función del coseno y la velocidad está en función de seno, aquí ya se presenta un desfase de 90 grados; los vectores rotantes, tal como se ve en la gráfica, se disponen de forma ortogonal; lo mismo ocurre con la aceleración, que se encuentra opuesta a la elongación y ortogonal a la velocidad.

### Ejemplo

Una masa de 0,5 Kg, conectada a un resorte con constante de elasticidad de  $k_e = 20 \text{ N/m}$ , oscila sin rozamiento con una amplitud de 3 cm. Calcular la Energía total, rapidez máxima de la masa y velocidad cuando la amplitud sea de  $\frac{1}{2}A$ , T,  $\omega$ , y f.

### Solución

Como la energía total puede ser igual a la energía potencial máxima justamente donde la energía cinética es nula, entonces:

$$E_T = \frac{1}{2} k x^2.$$

Al remplazar valores, se tiene:  $E_T = \frac{1}{2} (20 \text{ N/m})(0.03 \text{ m})^2$

$$E_T = 9 \times 10^{-3} \text{ julios.}$$

Si se igualan las energías cinéticas:  $\frac{1}{2} m v_M^2 = 9 \times 10^{-3} \text{ julios}$ , de donde se puede despejar la velocidad:

$$v_M = \sqrt{\frac{2(0,009 \text{ J})}{0,5 \text{ Kg}}} = 0,19 \text{ m/s}.$$

Velocidad para la elongación de  $\frac{1}{2}A$ ; al remplazar valores en la ecuación de la velocidad  $v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$ , es:  $v = \sqrt{\frac{(20N/m)}{0,5Kg}(0,03^2 - 0,015^2)}$ .

Por tanto, la velocidad es:  $v = 0,16 \text{ m/s}$ .

Periodo:

$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ ; al remplazar valores, se obtiene:  $T = 6,283 \sqrt{\frac{0,5kg}{20N/m}} = 0,993s$ .

Frecuencia natural  $f = \frac{1}{T}$ ; por tanto,  $f = 1,007 \text{ 1/s}$ .

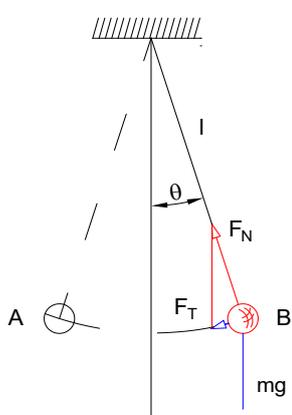


Figura 4.6. Péndulo simple y fuerzas que actúan sobre la masa inercial.

## 4.2 Péndulo simple

Consiste en suspender una masa de una cuerda que, a su vez, se fija a un punto de sujeción que permite que la masa oscile un ángulo  $\theta$  respecto a la vertical entre los extremos a y b y pase por el punto de equilibrio "0", tal como se puede ver en la figura. 4.6

En el péndulo simple, no se tiene en cuenta la masa de la cuerda, por lo que debe ser muy ligera e inextensible, así que el movimiento oscilatorio se logra cuando la masa se saca del punto de equilibrio y se la deja en libertad, bien sea desde el punto a, o el punto b; cuando la masa se libera desde uno de los extremos, parte con velocidad cero y, al llegar al otro extremo, vuelve a tener velocidad nula justamente antes de iniciar el retorno; ahora bien, la masa estará cayendo hasta antes de llegar al punto de equilibrio por lo que, al pasar por este punto, adquiere la máxima velocidad, situación que se repite en cada ciclo que realice la masa; por tanto, el hecho de partir con velocidad cero y adquirir la máxima velocidad lo convierte en un sistema acelerado, al que se lo puede expresar:

$$\sum F = m_s a \quad (4.2.1).$$

Tal como se ve en la gráfica 4.6 el peso de la masa, generar una descomposición ortogonal de vectores normal y tangencial así:

**Fuerza normal:**  $F_N = -mg \cos \theta$  (4.2.2):

**Fuerza tangencial:**  $F_T = -mg \sin \theta$  (4.2.3).

Se puede observar que la fuerza causante del movimiento es  $F_T$ ; por tanto, al remplazar este resultado en la ecuación del sistema acelerado, se tiene:

$$-mg\text{Sen}\theta = m_s a \quad (4.2.4).$$

De acuerdo al sistema acelerado, la masa del sistema corresponde únicamente a la masa suspendida debido a que la masa de la cuerda resulta insignificante frente a la masa suspendida; por tanto, la expresión (4.2.4) se puede escribir como:  $ma + mg\text{Sen}\theta = 0$ . Ahora bien, como se puede observar en esta ecuación, la masa se cancela; además, del concepto de aceleración  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ , la ecuación (4.2.4) queda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + g\text{Sen}\theta = 0 \quad (4.2.5).$$

Ahora bien,  $x$  es una variable de traslación y  $\theta$  una variable de rotación, que forma la cuerda con la vertical al oscilar; por otra parte, la cuerda de donde se suspende la masa es de longitud  $l$  y forma un ángulo  $\theta$  respecto a la vertical; por tanto, se puede decir que  $x = l\theta$ ; además, la longitud es constante y, por tanto, al remplazar y arreglar la expresión (4.2.5), se tiene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\text{Sen}\theta = 0 \quad (4.2.6).$$

Por último, (4.2.6) es la ecuación del movimiento pendular, donde se puede observar que la elongación está en términos del ángulo de oscilación respecto a la vertical; la ecuación diferencial (4.2.6), como se puede observar, corresponde a una ecuación diferencial no homogénea, pero, si se establece la aproximación de Gauss, donde para ángulos pequeños el  $\text{Sen}\theta \cong \theta$ , entonces la expresión (4.2.6) se puede escribir:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \quad (4.2.7).$$

En este caso, la expresión (4.2.7) corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden y homogénea, cuya solución sería similar a la del MAS; se reitera “que únicamente es válido para ángulos pequeños”, así que la expresión (4.2.7) se limita a oscilaciones muy pequeñas, quizá menores de  $5^\circ$  con una longitud de la cuerda al menos de un metro.

### Periodo en el movimiento pendular

Al realizar una analogía con la expresión del periodo del MAS, se tiene la relación  $\frac{g}{l} = w^2$ ; además, como el periodo es  $T = \frac{2\pi}{w}$ , entonces el periodo se puede escribir como:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (4.2.8).$$

En la expresión (4.2.8), se puede observar la independencia de la masa y la proporcionalidad del periodo respecto a la raíz cuadrada de la longitud.

A diferencia del MAS, “sistema masa resorte”, en el péndulo el periodo depende del valor de la masa.

### Ejemplo

Calcular el periodo de un péndulo, cuya longitud de la cuerda es de 1 m.

### Solución

a) La gravedad al nivel del mar es  $g = 9.81 \frac{m}{s^2}$ ; al remplazar los valores en la ecuación del periodo, se tiene:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1m}{9.81 \frac{m}{s^2}}} = 2,01064 \text{ s}$ .

b) Si se considera la gravedad a una altura de  $h = 2500 \text{ msnm}$ ,  $g = 9,78 \frac{m}{s^2}$ .

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{1m}{9,78 \frac{m}{s^2}}} = 2,009 \text{ s}.$$

### Periodo generalizado del movimiento pendular

Ahora, la pregunta que surge es: ¿cómo se debe calcular el periodo para ángulos que no cubre la aproximación de Gauss?

Para determinar el periodo de un péndulo de ángulos grandes, se parte inicialmente del principio de la Ley de la conservación de la masa:  $E_T = E_K + U$ , donde la energía cinética se expresa como:  $E_K = \frac{1}{2}mv^2$ ; por tanto, la energía total mecánica se puede escribir como:

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 + U \quad (4.2.9).$$

Ahora bien, al despejar la velocidad de la ecuación, se tiene:  $v^2 = \frac{2}{m}(E_T - U)$ .

Por tanto,  $v = \sqrt{\frac{2}{m}(E_T - U)}$ ; además, como  $v = \frac{dx}{dt}$ , al remplazarla se obtiene:

$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E_T - U)}$ . como se intenta encontrar el tiempo, se procede a despejar el diferencial del tiempo; es decir:

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_T - U)}} \quad (4.2.10).$$

Para solucionar esta expresión matemática se utiliza la integración, lo que permite encontrar el tiempo y, por ende, calcular el periodo en función de la energía potencial en un semiciclo es decir T/2 así que:

$$\int_0^{\frac{T}{2}} dt = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_T - U)}}$$

$$\frac{T}{2} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_T - U)}}$$

$$T = \int_0^x \frac{2dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E_T - U)}} \quad (4.2.11).$$

Esta ecuación expresa el periodo del movimiento oscilatorio en términos de la energía total y potencial; ahora, se aplicará al movimiento pendular para obtener el periodo generalizado.

Como la energía potencial es:  $U = mgy$ , en donde “y” según la Figura 4.7, es  $y = l - l\cos\theta$  o  $y = l(1 - \cos\theta)$  por tanto la energía potencial se puede escribir como:

$$U = mgl(1 - \cos\theta) \quad (4.2.12).$$

Ahora bien, por identidad trigonométrica:  $(1 - \cos\theta)$  es:

$$2\text{Sen}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Por tanto, la energía potencial se puede escribir así:

$$U = 2mgl\text{Sen}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Esta expresión permite encontrar el valor de la energía potencial en cualquier punto; sin embargo, en los extremos, la energía potencial es máxima y como la energía cinética es nula, entonces la energía potencial máxima es la misma energía total mecánica, que se puede escribir así:

$$E_t = 2mgl\text{Sen}^2 \frac{\theta_0}{2} \quad (4.2.11).$$

Si lo anterior se combina con la ecuación (4.2.13), se tiene:

$$T = \int \frac{2dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(2mgl\text{Sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - 2mgl\text{Sen}^2 \frac{\theta}{2})}} \quad (4.2.14).$$

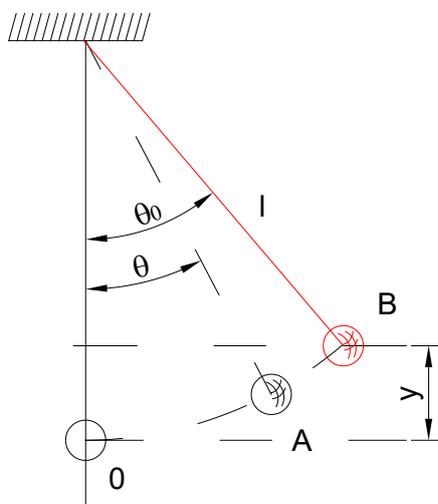


Figura 4.7. Energía potencial del péndulo simple.

Ahora bien, como el arco de circunferencia que traza el péndulo cuando está oscilando se puede escribir como  $dx = l d\theta$ , por tanto, al remplazar en la ecuación (4.2.14) y realizar algunos arreglos algebraicos, se tiene:

$$T = 2 \int \frac{l d\theta}{4gl \sqrt{\text{Sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - \text{Sen}^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Al factorizar los valores constantes, resulta:

$$T = \frac{2l}{2\sqrt{gl}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\text{Sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - \text{Sen}^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Por último:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{Sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - \text{Sen}^2 \frac{\theta}{2}}} \quad (4.2.15).$$

Como resultado de la integral  $\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\text{Sen}^2 \frac{\theta_0}{2} - \text{Sen}^2 \frac{\theta}{2}}}$ , se tiene:

$$2\pi \left( 1 + \frac{1^2}{2^2} \text{Sen}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \text{Sen}^4 \frac{\theta}{2} + \dots + \right) \quad (4.2.16).$$

Esto corresponde a una progresión divergente; ahora bien, si se combina este resultado con la ecuación (4.2.15), se tiene el periodo generalizado del péndulo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \text{Sen}^2 \frac{\theta}{2} + \frac{9}{64} \text{Sen}^4 \frac{\theta}{2} + \dots + \right) \quad (4.2.17).$$

Como se puede ver, la ecuación del periodo generalizado resulta mucho más compleja que la encontrada inicialmente en la ecuación (4.2.14); se puede ver que el paréntesis tiene términos que son factores del periodo original; una primera aproximación se alcanza al multiplicar por el primer factor, lo que da (4.2.8); si el ángulo es un poco más grande, se puede utilizar el segundo factor, y así sucesivamente.

Como es posible darse cuenta, no hay una decisión clara en qué momento toma el primero o segundo o más factores y esto tiene que ver con el ángulo; es decir, ¿desde qué ángulo funciona el primer factor y desde dónde el segundo y los demás? Por tanto, esta expresión matemática no es determinística de manera puntual, por lo cual este fenómeno corresponde a la física no lineal y, por tanto, lo único que se puede decir es

que cuando los ángulos son pequeños (no se sabe qué tan pequeños deben ser), se puede aproximar a la ecuación:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Por otra parte, según las aproximaciones de Gauss para ángulos pequeños, la función trigonométrica Seno es muy aproximada al ángulo cuando se mide en radianes, así que la ecuación 4.2.17 se puede escribir:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{8}\theta^2 + \frac{9}{128}\theta^4 + \dots \right) \quad (4.2.18).$$

Al realizar la primera aproximación o aplicar el primer factor, la ecuación 4.2.18 se puede escribir como:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , que, en este caso, es igual a la 4.2.8, ecuación didáctica del periodo del péndulo.

#### Ejemplo:

Calcular el periodo de un péndulo de 1 m de longitud, cuando oscila  $5^\circ$ ,  $10^\circ$ ,  $15^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $25^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $35^\circ$ ,  $40^\circ$ ,  $45^\circ$  grados de amplitud. (Realizar el cálculo con 4 cifras significativas).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{9,81}} \left( 1 + \frac{1}{4} \text{Sen}^2 \frac{5}{2} + \frac{9}{64} \text{Sen}^4 \frac{5}{2} \right)$$

#### Solución

Al realizar todas las operaciones, se puede obtener los datos de la figura 4.8 y la tabla 4.1:

Se resuelve el primero:

$$T = 2,0061 (1 + 0,0005 + 0,0000)$$

$$T = 2,00071$$

Ítem	Ángulo	Periodo
1	No se tiene en cuenta	2,0061
2	5°	2,0071
3	10°	2,0099
4	15°	2,0147
5	20°	2,0214
6	25°	2,0302
7	30°	2,0409
8	35°	2,0537
9	40°	2,0685
10	45°	2,0856

Tabla 4.1.

Datos del ángulo de oscilación y el periodo de oscilación con utilización de la ecuación 4.2.18.

En la grafica 4.8 se puede ver como el periodo cambia con la amplitud de oscilación del péndulo y la gráfica de  $t$  en función del ángulo resulta no lineal

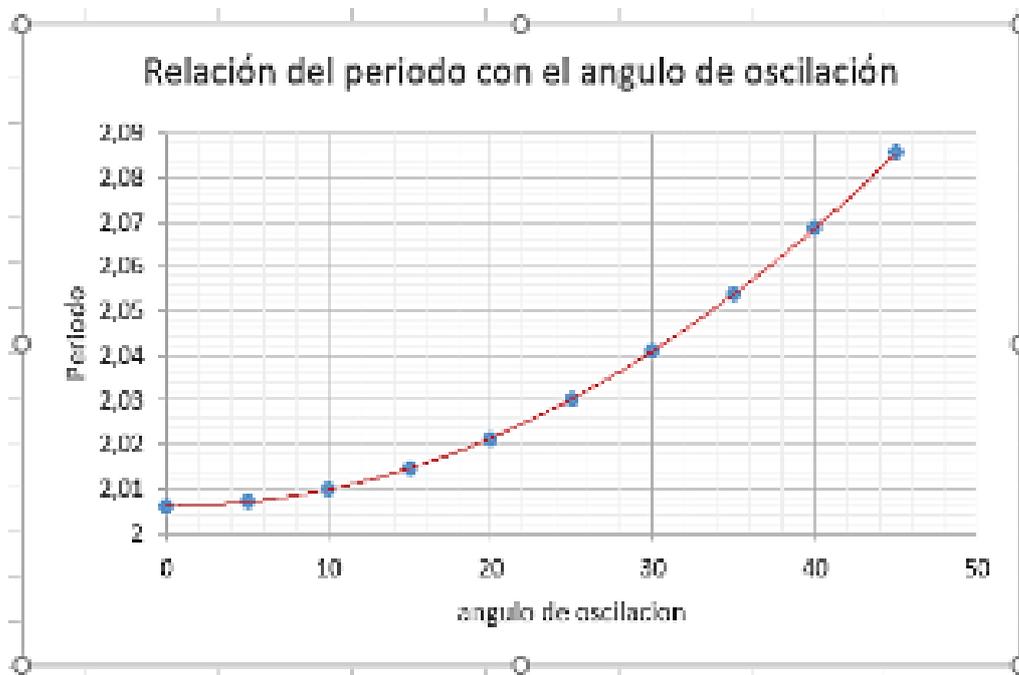


Figura 4.8.

Gráfica de la relación entre el periodo y el ángulo de oscilación de un péndulo simple.

### 4.3 Péndulo de torsión

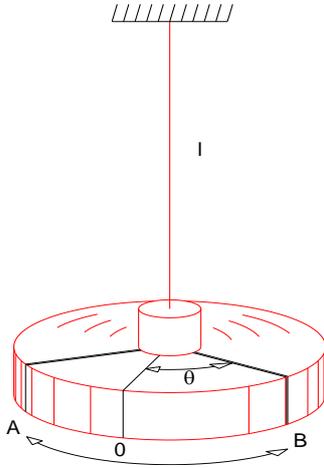


Figura 4.9.  
Péndulo de torsión.  
Disco suspendido de un hilo metálico.

Consiste en un cuerpo de masa  $m$  suspendido de una cuerda de longitud  $l$ , que es la misma vertical del sistema que pasa por el centro de masa del cuerpo. Cuando al cuerpo se lo lleva a rotar sobre su propio eje, con un ángulo  $\theta$  respecto a su posición de equilibrio, la cuerda o alambre se tuerce un ángulo  $\phi$  y ejerce sobre el cuerpo un torque  $\tau$  alrededor de la vertical que se opone a la rotación angular  $\theta$ .

De acuerdo a la Figura 4.9, las marcas  $a$  y  $b$  definen los extremos de oscilación, es decir, corresponde al desplazamiento angular  $\theta$ .

Como en el caso del sistema masa-resorte, en los extremos la velocidad es cero. En este caso, ocurre de igual forma: la velocidad angular en los extremos  $a$  o  $b$  es cero, mientras que al pasar por el punto de origen o equilibrio la velocidad es máxima; este hecho lleva a que el sistema fuera acelerado y responde a la segunda ley de Newton.

$$\sum_{i=1}^n f = m_s a \quad (4.3.1).$$

Como la masa está rotando, la inercia de la masa lleva a que el sistema rote en uno y otro sentido alrededor de la vertical, entonces (4.3.1) se debe colocar en términos del torque o momento de una fuerza, de esta manera el sistema acelerado para la rotación se puede expresar como:

$$\sum_{i=1}^n \tau = I \alpha \quad (4.3.2).$$

Donde  $I$  es el momento de inercia que, en este caso, será únicamente de la masa, debido a que la masa de la cuerda es insignificante y, por tanto, no se tiene en cuenta.

Del Capítulo 3, de Elasticidad, se tiene que el módulo de torsión es  $G = \frac{\tau}{\theta}$ ; por tanto,  $\tau = G\theta$ . Así que, al remplazar en la ecuación (4.3.2), se obtiene:

$$I\alpha + G\theta = 0 \quad (4.3.3).$$

Ahora bien, como la aceleración angular es:  $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , al remplazar se tiene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{G}{I}\theta = 0 \quad (4.3.4).$$

Esta es la ecuación del movimiento oscilatorio de rotación de la masa, que corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden homogénea incompleta; es decir, es similar a la del sistema masa-resorte; por tanto, es un MAS.

Esto tiene una razón: cuando el resorte helicoidal se estira o comprime internamente, el material se somete a una torsión longitudinal; por esto, en las industrias de los resortes se tienen tanto helicoidales como simplemente barras de torsión con menos volumen e igual ángulo de oscilación, utilizados en la suspensión de vehículos.

Al igual que en la ecuación del MAS, la frecuencia angular es  $\omega^2 = \frac{G}{I}$ ; por tanto,  $\omega = \sqrt{\frac{G}{I}}$  y el periodo de oscilación es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{G}} \quad (4.3.5).$$

Ahora bien, como  $G = \frac{\pi\mu a^4}{2L}$  y el momento de inercia de un disco macizo es:  $I = \frac{1}{2}mr^2$ , al remplazar en la ecuación del periodo y realizar las operaciones algebraicas necesarias, se tiene:

$$T = \frac{2\pi}{a^2} \sqrt{\frac{2LI}{\pi\mu}} \quad (4.3.6),$$

donde:

- $a$  = radio de la cuerda o alambre
- $L$  = longitud de cuerda o alambre
- $\mu$  = módulo de corte del material del alambre
- $I$  = momento de inercia de la masa oscilante.

### Ejemplo

Dado un disco de 15 cm de diámetro y una masa de 250 g suspendida de un alambre de cobre de 1 metro de longitud y 2 milímetros de diámetro, si el disco se suspende, como se muestra en la Figura 4.9., calcular el periodo de oscilación rotante, si se considera que el módulo de corte del cobre es  $\mu = 4,2 \times 10^{10}$  N/m.

### Solución

$$\begin{aligned} m &= 0,25 \text{ kg} \\ l &= 1 \text{ m} \\ a &= 1 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \mu &= 4,2 \times 10^{10} \text{ N/m} \\ r &= 0,075 \text{ m} \end{aligned}$$

Al remplazar valores, se tiene:

$$T = \frac{2\pi}{(10^{-3}m)^2} \sqrt{\frac{2(0,25)(0,15)^2}{\pi(4,42 \times 10^{10})}} = 1,25 \text{ s}$$

### 4.4 Péndulo físico

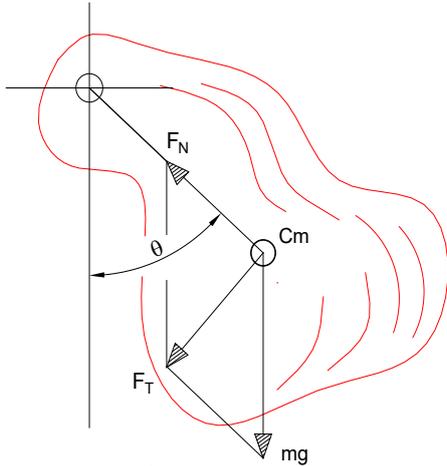


Figura 4.10. Péndulo físico. Cuerpo irregular que oscila sobre un punto cualquiera.

Un péndulo físico es un sólido rígido de cualquier forma, cuyo centro de masa está por debajo del punto de giro y puede oscilar en un plano vertical. Cuando oscila entre los extremos a y b, en los extremos la velocidad es cero y, al pasar por el punto de equilibrio, el centro de masa adquiere la máxima velocidad.

Por esto, se está frente a un sistema acelerado, que se define como:  $F = -ma$  Ahora bien, como se trata de un sólido que rota sobre un eje cuyo centro de masa dista una distancia  $b$  del centro de giro, entonces el sólido, al oscilar, se convierte en un sistema acelerado de rotación, que se puede

expresar como:  $\sum_{i=1}^n \tau = -I\alpha$ , al igual que ocurre en

el péndulo de torsión. Además, el momento de una fuerza o torque se puede expresar como  $\tau = F \times b$ , donde  $F$  es la fuerza tangencial, o sea  $F_T = mg \text{Sen}\theta$ , tal como se puede ver la descomposición vectorial en la Figura 4.10 y, además, como la aceleración angular es:  $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ , al remplazar, se obtiene:

$$mgb \text{Sen}\theta = -I \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (4.4.1).$$

Si se organizan todos los términos, se tiene:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I} \text{Sen}\theta = 0 \quad (4.4.2).$$

La ecuación (4.4.2) corresponde a una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea e incompleta, similar a la del péndulo simple, donde solo para ángulos pequeños se puede escribir como:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I} \theta \quad (4.4.3).$$

Así que, en estas circunstancias de ángulos pequeños, el movimiento oscilatorio se aproxima al MAS.

Barra oscilante

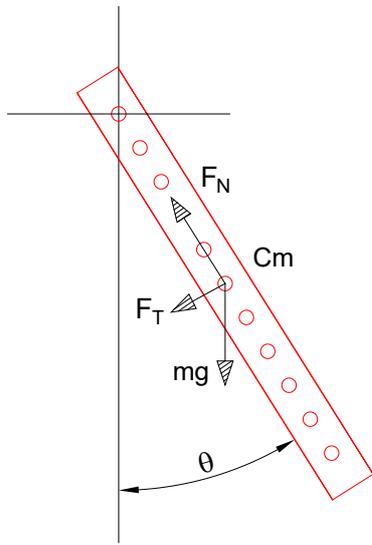


Figura 4.11. Movimiento pendular de una varilla.

De la ecuación (4.4.3) se puede decir que la frecuencia angular es:  $\omega = \sqrt{\frac{mgb}{I}}$ .

Entonces, el periodo será:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}}$ .

En el caso de la barra que oscila en uno de los extremos, define un momento de inercia  $I = \frac{1}{3}mL^2$ , dado que se trata de un elemento homogéneo  $b = \frac{1}{2}L$  entonces el periodo se puede escribir así:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{3mg \frac{L}{2}}}$$

Al organizar las diferentes variables, se tiene:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

4.5 Superposición de MAS en una misma dirección e igual frecuencia

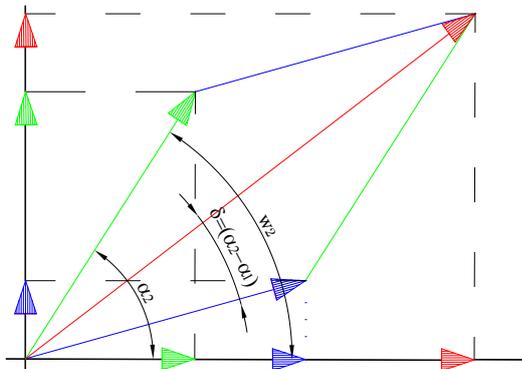


Figura 4.12. Representación de la suma de MAS e igual frecuencia.

La superposición de MAS no es más que la suma de las funciones armónicas que representan a los movimientos; para analizar la suma, se puede utilizar el concepto de vectores rotantes, tal como se puede ver en la Figura 4.12, donde están dos vectores rotantes, que pueden representarse por:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) \\ x_2 &= A_2 \cos(\omega t + \alpha_2) \end{aligned} \quad (4.5.1).$$

Superponer dos o más MAS significa sumar sus funciones de elongación o posición; es decir, que

$$x = x_1 + x_2.$$

Así que, si se rempazan las funciones (4.5.1), se tiene:

$$x = A_1 \cos(\omega t + \alpha_1) + A_2 \cos(\omega t + \alpha_2).$$

Según la Figura 4.12, la amplitud del movimiento resultante se puede calcular utilizando el Teorema del coseno; esto es:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\delta)} \quad (4.5.2),$$

donde  $\delta$  es la diferencia de los desfases; es decir:  $\delta = (\alpha_2 - \alpha_1)$ .

Al analizar la ecuación (4.5.2), se presentan dos casos.

#### Interferencia constructiva.

Se presenta cuando  $\delta = 0$  significa que  $\alpha_1 = \alpha_2$ ; es decir, que los dos sistemas oscilan en fases iguales; ambos pasan por el punto de equilibrio en el mismo instante, con absoluta independencia; por tanto, la ecuación (4.5.2) quedará:  $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(0)}$ ; ahora bien, como el  $\cos(0) = 1$ , entonces se puede escribir como:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} \quad (4.5.3).$$

Esto corresponde a un cuadrado perfecto; por tanto:  $A = \sqrt{(A_1 + A_2)^2}$ . De modo que la amplitud resultante será:

$$A = A_1 + A_2 \quad (4.5.4).$$

Según la Figura 4.13 de vectores rotantes, al ángulo de desfase del vector resultante  $\alpha$  lo da la tangente de sus componentes; es decir:

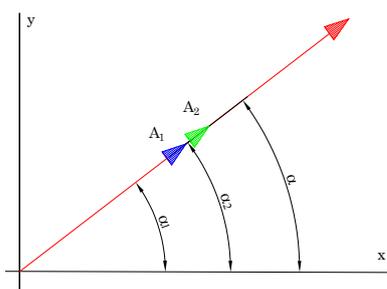


Figura 4.13.  
Representación de los vectores de elongación en fase.

$$\text{Tag}(\alpha) = \frac{A_1\text{Sen}\alpha_1 + A_2\text{Sen}\alpha_2}{A_1\text{Cos}\alpha_1 + A_2\text{Cos}\alpha_2} \quad (4.5.5).$$

Por último, se tiene que:

$$\text{Tag}(\alpha) = \text{Tag}(\alpha_1) = \text{Tag}(\alpha_2).$$

Esto indica cómo los sistemas oscilatorios, al ser independientes, están en fase igual al resultante.

En este caso, se puede decir que la superposición de movimientos oscilatorios en fase, producen una interferencia constructiva (ver figura 4.14); es decir, de los dos movimientos se obtiene un tercer movimiento con amplitud, resultado de la suma de las amplitudes de los movimientos  $x_1$  y  $x_2$ .

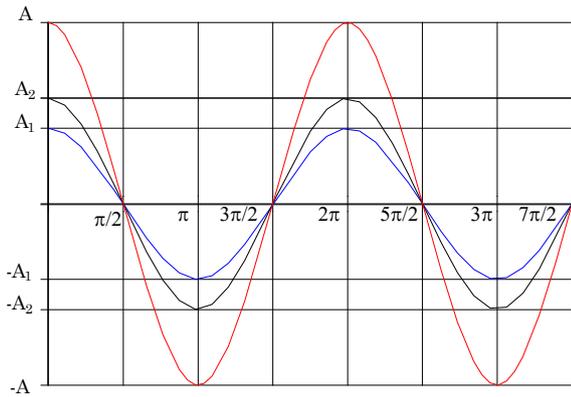


Figura 4.14.  
Superposición de movimientos oscilatorios.  
Interferencia constructiva.

Interferencia destructiva.

Se presenta cuando  $\delta = \pi$ ; esto significa que  $\alpha_2 - \alpha_1 = \pi$ ; es decir, los dos sistemas oscilan de forma opuesta; ambos pasan por el punto de equilibrio a la vez, pero con velocidades de sentido opuesto.

Así que la ecuación (4.5.2) quedará:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\text{Cos}(\pi)}$$

Como  $\text{Cos}(\pi) = -1$ , entonces se tiene:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2},$$

lo que se puede escribir como:

$$A = (A_1 - A_2) \quad (4.5.6).$$

Según la figura 4.15 de vectores rotantes, al ángulo de desfase del vector resultante  $\alpha$  lo da la tangente de sus componentes; como en el caso anterior, se tiene:

$\text{Tag}(\alpha) = \frac{A_1\text{Sen}\alpha_1 + A_2\text{Sen}\alpha_2}{A_1\text{Cos}\alpha_1 + A_2\text{Cos}\alpha_2}$ , pero como  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi$ , entonces, al remplazar, se tiene:

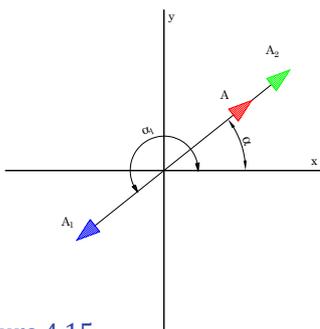


Figura 4.15.  
Representación vectorial de una superposición con desfase  $\pi$ .

$$\text{Tag}(\alpha) = \frac{A_1\text{Sen}\alpha_1 + A_2\text{Sen}(\alpha_1 + \pi)}{A_1\text{Cos}\alpha_1 + \text{Cos}(\alpha_1 + \pi)}. \text{ Además,}$$

$$\text{Sen}(\alpha_1 + \pi) = \text{Sen}\alpha_1\text{Cos}\pi + \text{Cos}\alpha_1\text{Sen}\pi.$$

Y como  $\text{Cos}\pi = -1$  y  $\text{Sen}\pi = 0$ , entonces, queda:

$$\text{Tag}(\alpha) = \left(\frac{A_1 + A_2}{A_1 - A_2}\right) \text{Tag}\alpha_1 \quad (4.5.7).$$

$$\text{Por tanto, } \alpha = \text{Tag}^{-1} \left(\frac{A_1 + A_2}{A_1 - A_2}\right) \text{Tag}\alpha_1.$$

Así que la superposición de movimientos oscilatorios desfasados  $\pi$  radianes produce una interferencia destructiva o negativa (ver figura 4.16); es decir: de los dos movimientos se obtiene un tercer movimiento, con amplitud reducida como resultado de la suma de las amplitudes de los movimientos  $x_1$  y  $x_2$  y, en el caso cuando las amplitudes fueran iguales, el resultado se anula totalmente.

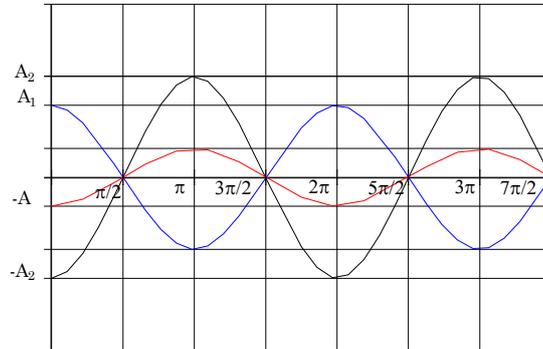


Figura 4.16.  
Superposición de MAS con desfase de  $\pi$ ,  
amplitud diferente.

### Segundo método para analizar la superposición de MAS, con la misma dirección, igual frecuencia y amplitud

Sean las funciones armónicas que representan a los MAS:

$$x_1 = A_1 \text{Sen}(w_1 t + \alpha)$$

$$x_2 = A_2 \text{Sen}(w_2 t + \alpha)$$

Como la superposición de los movimientos armónicos se define como:  $x = x_1 + x_2$ , entonces:

$$x = A_1 \text{Sen}(w_1 t + \alpha_1) + A_2 \text{Sen}(w_2 t + \alpha_2) \quad (4.5.8).$$

1) Se considera que fuera de manera lineal, donde:

$$A_1 = A_2, \text{ Amplitud}$$

$$w_1 = w_2, \text{ Frecuencia}$$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2, \text{ Desfase}$$

Entonces, (4.5.8) se escribe así:

$$x = A \text{Sen}(wt + \alpha_1) + A \text{Sen}(wt + \alpha_2).$$

Ahora bien, como la identidad trigonométrica

$$\text{Sen}\beta + \text{Sen}\phi = 2\text{Cos}\left(\frac{\beta-\phi}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{\beta+\phi}{2}\right),$$

al combinarla, se tiene:

$$x = 2A\text{Cos}\left(\frac{wt + \alpha_1 - wt - \alpha_2}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{wt + \alpha_1 + wt + \alpha_2}{2}\right)$$

$$x = 2A\text{Cos}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)\text{Sen}(wt + \bar{\alpha}) \quad (4.5.9).$$

Como se puede observar, de la superposición ha resultado otro movimiento armónico, que se puede escribir simplificado:

$$x = A\text{Sen}(wt + \bar{\alpha}),$$

donde la amplitud A es:

$$2A\text{Cos}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \quad (4.5.10).$$

Como se puede ver, la amplitud de (4.5.9) depende del valor que tome el Coseno, que puede estar en el rango  $(0 \pm 1)$ ; entonces, la ecuación (4.5.10) tiene un valor máximo y un mínimo o, dicho de otro modo, puede ser  $A = 2A$ , cuando  $\text{Cos}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)$  sea igual a  $\pm 1$  o  $A = 0$ , cuando  $\text{Cos}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) = 0$ .

En seguida, se analizan estos dos casos.

i) Si  $A = 2A$ , esto se presenta cuando  $\text{Cos}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) = 1$  y, para que esto se cumpla, será precisamente  $\text{Cos}(0)$ , que es 1. Igual ocurre cuando el ángulo sea  $2\pi$ . En general, en  $2n\pi$ , es decir, en múltiplos pares de  $\pi$ , así que esto se cumple cuando  $\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) = 2n\pi$ . De esta forma, la ecuación de la amplitud (4.5.10) se puede escribir como:

$$A = 2A\text{Cos}(2n\pi).$$

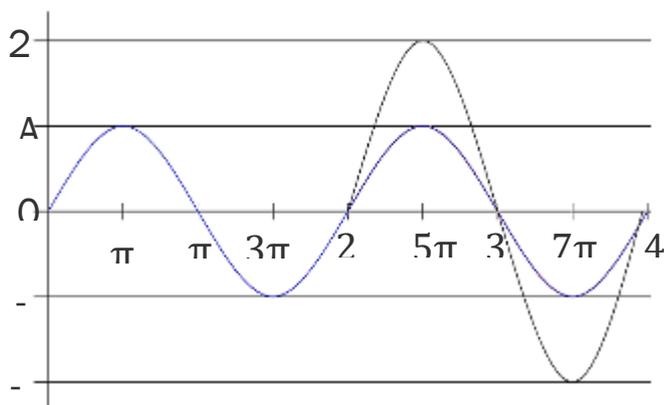


Figura 4.17. Superposición de dos funciones armónicas con desfase de  $2\pi$  o múltiplos pares de  $\pi$ . Interferencia constructiva.

Ahora bien, siempre que el desfase se pueda escribir como:  $2n\pi$ , es decir múltiplos pares de  $\pi$ , se tendrá como resultado la unidad; por tanto,  $A = 2A$ , lo que corresponde a una interferencia constructiva o interferencia positiva.

En la figura 4.17 se puede observar la superposición de dos funciones armónicas, con desfases de  $2\pi$  radianes, con lo que se obtiene una superposición positiva; es decir, la resultante es mayor que los sumandos y siempre que la segunda función inicie en un múltiplo par de  $\pi$  se obtendrá lo mismo.

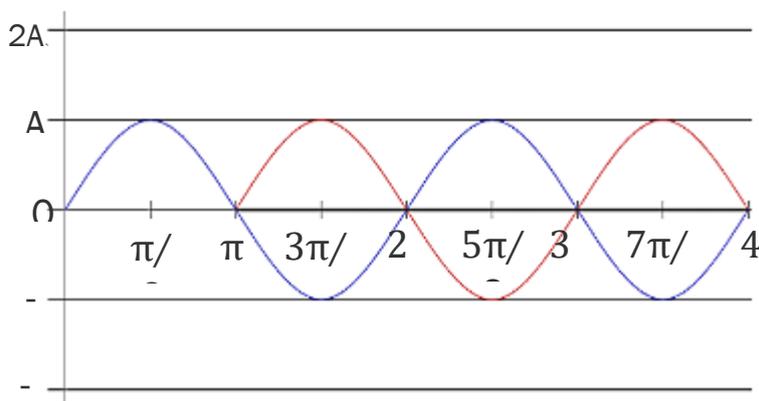


Figura 4.18. Superposición de funciones armónicas con desfase  $(2n+1)\pi$ : interferencia destructiva o negativa.

ii.) Si  $A = 0$ , esto se presenta cuando  $\text{Cos}\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) = 0$  y, para que esto se cumpla, se precisará que  $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = \frac{\pi}{2}$ ; en este valor del ángulo, el Coseno es nulo; es decir:  $\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ , pero, también, puede ser  $\text{Cos}\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ , así que, en general, se tiene:  $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$ , o sea, múltiplos impares de  $\pi/2$ . Al ordenar queda:  $\delta = \alpha_1 - \alpha_2 = (2n + 1)\pi$ ; así que, cuando se tienen superposiciones con este tipo de desfases, la amplitud se anula. En este caso, se tiene una *interferencia negativa que, dado que las amplitudes son iguales, se convierten en una interferencia destructiva; es decir, los dos movimientos oscilatorios se han anulado* (Figura 4.18).

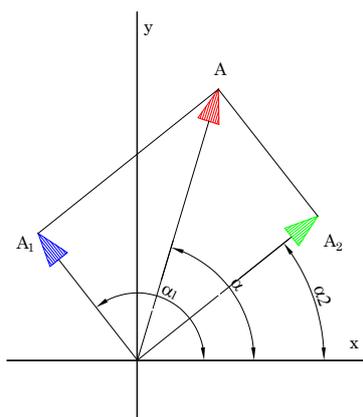


Figura 4.19. Representación vectorial de la superposición con desfase  $\pi/2$ .

iii.) Si  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , esto significa que  $(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\pi}{2}$ ; es decir, dos sistemas oscilatorios que oscilan de tal modo que, cuando uno está pasando por el punto de equilibrio, el otro está en la posición más extrema, lo que se conoce como desfase en cuadratura, como se puede ver en la Figura 4.19 y figura 4.20, de vectores rotantes. Esto significa que la ecuación correspondiente a la amplitud queda así:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (4.5.11).$$

Como  $\cos(\pi/2) = 0$ , entonces la ecuación 4.5.11 queda:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}.$$

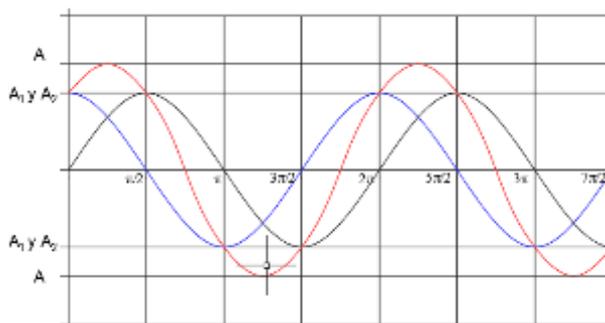


Figura 4.20. Superposición de dos sistemas oscilatorios desfasados  $\pi/2$ ; también se denomina superposición en cuadratura.

Para calcular el ángulo de desfase del vector resultante, se procede de igual forma como se lo ha hecho.

$$\text{Tag}\alpha = \frac{A_1 \text{Sen}(\alpha_1) + A_2 \text{Sen}(\alpha_2)}{A_1 \text{Cos}(\alpha_1) + A_2 \text{Cos}(\alpha_2)}.$$

Ahora bien, como  $\alpha_2 = \alpha_1 + \pi/2$ , al remplazar, se tiene:

$$\text{Tag}\alpha = \frac{A_1 \text{Sen}(\alpha_1) + A_2 \text{Sen}(\alpha_1 + \pi/2)}{A_1 \text{Cos}(\alpha_1) + A_2 \text{Cos}(\alpha_1 + \pi/2)}.$$

Como  $\text{Sen}(\pi/2) = 1$  y  $\text{Cos}(\pi/2) = 0$ , al remplazar, se obtiene:

$$\text{Tag}\alpha = \frac{A_1 \text{Sen}\alpha_1 + A_2 \text{Cos}\alpha_1}{A_1 \text{Cos}\alpha_1 - A_2 \text{Sen}\alpha_1}.$$

Al asumir que  $A_1 = A \cos \beta$  y  $A_2 = A \text{Sen} \beta$  y remplazar en la ecuación, se tiene:

$$\text{Tag} \alpha = \frac{A \text{Cos} \beta \text{Sen} \alpha_1 + A \text{Sen} \beta \text{Cos} \alpha_1}{A \text{Cos} \beta \text{Cos} \alpha_1 - A \text{Sen} \beta \text{Sen} \alpha_1} \quad (4.5.12).$$

Como  $\text{Cos} \beta \text{Sen} \alpha_1 + \text{Sen} \beta \text{Cos} \alpha_1 = \text{Sen}(\alpha_1 + \beta)$  y  $\text{Cos} \beta \text{Cos} \alpha_1 - \text{Sen} \beta \text{Sen} \alpha_1 = \text{Cos}(\alpha_1 + \beta)$ , entonces la ecuación (4.5.12) se puede escribir así:  $\text{Tag} \alpha = \frac{\text{Sen}(\alpha_1 + \beta)}{\text{Cos}(\alpha_1 + \beta)}$ ; o sea que:

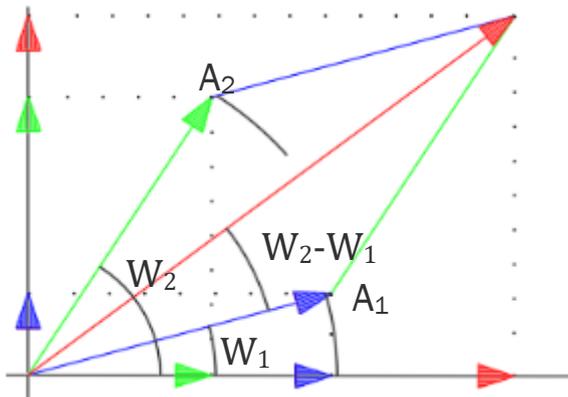
$$\text{Tag} \alpha = \text{Tag}(\alpha_1 + \beta) \quad (4.5.13).$$

Por tanto, el ángulo es:  $\alpha = \text{Tag}^{-1}(\text{Tag}(\alpha_1 + \beta))$ .

### 4.6 Superposición de MAS con igual dirección, desfase y frecuencias diferentes

En este aparte, se sumarán movimientos oscilatorios, donde las frecuencias de los movimientos oscilatorios a superponer tienen frecuencias diferentes, lo que significa que, en algún instante, se igualan o se emparejan, pero el mayor tiempo se encuentran oscilando de modo independiente, con diferente periodo. Entonces, sean los movimientos oscilatorios:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \text{Cos}(w_1 t + \alpha) \\ x_2 &= A_2 \text{Cos}(w_2 t + \alpha) \end{aligned} \quad (4.6.1).$$



Así que la superposición supone realizar una suma de las funciones del desplazamiento:

$$x = A_1 \text{Cos}(w_1 t) + A_2 \text{Cos}(w_2 t) \quad (4.6.2).$$

De acuerdo al concepto de vectores rotantes, la amplitud del movimiento oscilatorio resultante de la superposición de dos movimientos oscilatorios con frecuencia diferente, tal como se puede observar en la Figura 4.21, se puede representar como:

Figura 4.21. Representación de la suma de movimientos armónicos simples con diferente frecuencia.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_2 A_1 \text{Cos}(w_2 - w_1)t} \quad (4.6.3).$$

Se puede observar que depende del tiempo y, como las frecuencias son diferentes, ocurre que habrá momentos cuando fueran iguales y otros cuando queden totalmente opuestas, así que la amplitud, como solución de (4.6.3), será:

a) Si el arco es:  $(w_2 - w_1)t = 2n\pi$  (múltiplos pares de  $\pi$ ), entonces, como Cos de  $\pi$ , o  $2\pi$ , etc., es igual a la unidad, la ecuación (4.6.3) queda:

$$A = \sqrt{A_2^2 + A_1^2 + 2A_2A_1}$$

$$A = \pm(A_2 + A_1) \quad (4.6.4).$$

b). Si el arco  $(w_2 - w_1)t = (2n + 1)\pi$  (múltiplos impares de  $\pi$ ), entonces, como Cos  $1\pi$ ,  $3\pi$ , etc., es es igual a la unidad, pero negativa, entonces la ecuación (4.6.3) quedará:

$$A = \sqrt{A_2^2 + A_1^2 - 2A_2A_1}$$

$$A = \pm(A_2 - A_1) \quad (4.6.5).$$

En este caso, se dice que la amplitud es modulada, y se expresa como AM.

Entonces, la frecuencia que resulta de la superposición es:  $w_r = (w_2 - w_1)$ , y, como el periodo es  $T = \frac{2\pi}{w_r}$ , entonces  $T = \frac{2\pi}{w_2 - w_1}$  (4.6.6).

Periodo de fluctuación de la amplitud

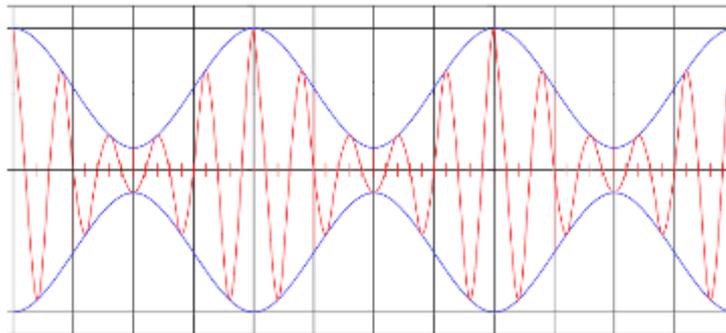


Figura 4.22.  
Pulsaciones como resultado de la superposición de sistemas oscilatorios con frecuencias diferentes.

Cuando la diferencia de las frecuencias es pequeña, se tienen periodos de pulsaciones grandes y, si la diferencia es grande, el periodo de pulsaciones es pequeño, como se puede establecer al observar la ecuación (4.6.3). y la figura 4.22.

Un caso especial se presenta cuando las amplitudes son iguales (figura 4.23); en este caso, la amplitud de la pulsación llega a ser nula y recobra la máxima, cuando la amplitud es el doble de las amplitudes. Esto se puede observar y oír cuando se afina una guitarra o cualquier instrumento de cuerdas; justo cuando las frecuencias de la cuerda 1 y de la cuerda 2 pisada en algún entraste empiezan a coincidir, se presentan vibraciones de resonancia con un periodo largo (se observan y se oyen), en este caso el instrumento estará afinado. De igual forma, se puede oír en la radio cuando hay frecuencias cercanas; dos emisoras con frecuencias cercanas se pueden oír de forma alternada (desafortunadamente este fenómeno ya no es tan frecuente, debido a que la señal de la mayoría de las emisoras radiales es señal digital).

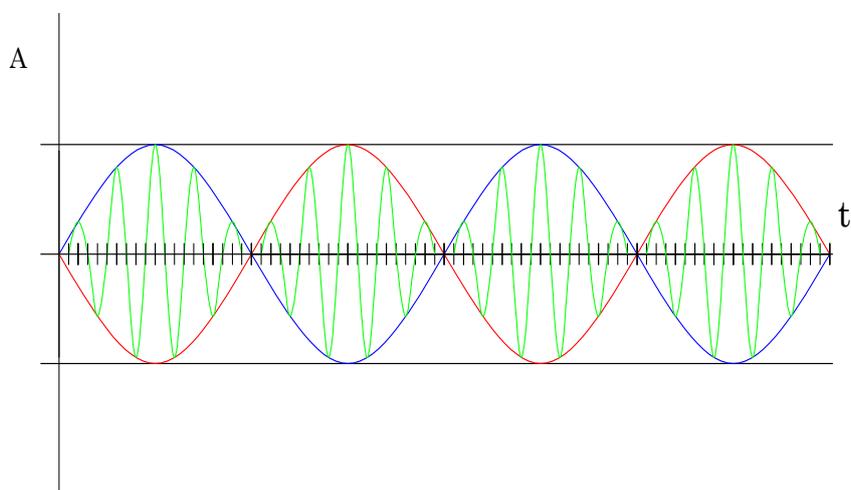


Figura 4.23. Pulsos como resultado de la superposición de dos movimientos armónicos con igual amplitud.

### 4.7 Superposición de movimientos armónicos de forma ortogonal

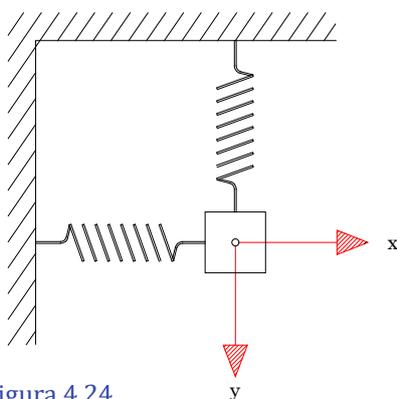


Figura 4.24. Sistema de masa y dos resortes que le imprimen movimientos oscilatorios con dirección ortogonal e independientes.

Este tipo de superposición se presenta al sumar dos movimientos armónicos, que oscilan con desplazamientos de manera ortogonal o perpendicular uno a otro. Así que los movimientos se plantean tanto en el eje x como en el eje y:

$$x = A_x \cos(\omega_x t + \alpha_x) \quad (4.7.1).$$

$$y = A_y \cos(\omega_y t + \alpha_y) \quad (4.7.2).$$

Para facilidad del análisis, se considera que:

$w_x = w_y$  y, al solucionar (4.7.1) y (4.7.2), se tiene:

$$\frac{x}{A_x} = \text{Cos}wt\text{Cosa}_x - \text{Sen}wt\text{Sena}_x$$

$$\frac{y}{A_y} = \text{Cos}wt\text{Cosa}_y - \text{Sen}wt\text{Sena}_y$$

Si estas dos expresiones se multiplican por  $\text{Cosa}_y$  y  $\text{Cosa}_x$ , de forma alternada, se tiene:

$$\frac{x}{A_x}\text{Cosa}_y = \text{Cos}wt\text{Cosa}_x\text{Cosa}_y - \text{Sen}wt\text{Sena}_x\text{Cosa}_y$$

$$\frac{y}{A_y}\text{Cosa}_x = \text{Cos}wt\text{Cosa}_y\text{Cosa}_x - \text{Sen}wt\text{Sena}_y\text{Cosa}_x.$$

Si se restan estas dos expresiones y se reducen los términos que corresponden, se tiene:

$$\frac{y}{A_y}\text{Cosa}_x - \frac{x}{A_x}\text{Cosa}_y = \text{Sen}wt(\text{Sena}_x\text{Cosa}_y - \text{Sena}_y\text{Cosa}_x).$$

De acuerdo a la identidad trigonométrica del Seno, queda:

$\frac{y}{A_y}\text{Cosa}_x - \frac{x}{A_x}\text{Cosa}_y = \text{Sen}wt\text{Sen}(\alpha_x - \alpha_y)$ , en que, si se eleva al cuadrado, se tiene:

$$\frac{y^2}{A_y^2}\text{Cos}^2\alpha_x + \frac{x^2}{A_x^2}\text{Cos}^2\alpha_y - 2\frac{yx}{A_xA_y}\text{Cosa}_y\text{Cosa}_x = \text{Sen}^2wt\text{Sen}^2(\alpha_x - \alpha_y) \quad (*)$$

Igual procedimiento de multiplicar ahora con  $\text{Sena}_y$  y  $\text{Sena}_x$  y obtener esta ecuación:

$\frac{y^2}{A_y^2}\text{Sen}^2\alpha_x + \frac{x^2}{A_x^2}\text{Sen}^2\alpha_y - 2\frac{yx}{A_xA_y}\text{Sena}_x\text{Sena}_y = \text{Cos}^2wt\text{Sen}^2(\alpha_x - \alpha_y)$ ; al sumar con la expresión (\*), se obtiene:

$$\frac{y^2}{A_x^2} + \frac{x^2}{A_y^2} - 2\frac{xy}{A_xA_y}\text{Cos}(\alpha_x - \alpha_y) = \text{Sen}^2(\alpha_x - \alpha_y) \quad (4.7.3).$$

O sea, la ecuación general de la elipse, donde los parámetros dependen de los valores de la amplitud y desfasaje. Así:

i.) Si las fases fueran iguales, es decir:  $\alpha_x = \alpha_y$ , se obtiene:

$$\frac{y^2}{A_x^2} + \frac{x^2}{A_y^2} - 2\frac{xy}{A_xA_y} = 0 \quad (4.7.4).$$

Como se trata de la solución de un binomio, entonces:

$$\left(\frac{y}{A_y} - \frac{x}{A_x}\right)^2 = 0 \quad (4.7.5).$$

Por tanto, se tiene que

$$y = \frac{A_y}{A_x}x$$

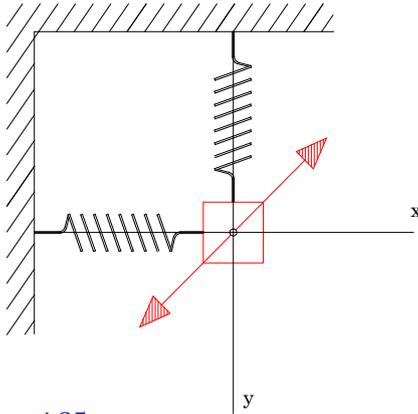


Figura 4.25. Pendiente positiva de la dirección del movimiento de la masa como resultado de la superposición.

Lo que corresponde a la ecuación de una recta, cuya pendiente es positiva; es decir, el centro de masa oscila a lo largo de una recta cuya pendiente es positiva (en la figura 4.25 de los resortes ortogonales, no se los debe tomar de manera literal como sistemas independientes, pues, en este caso, el movimiento de los resortes no es independiente y cuando uno oscila, el otro pierde la dirección de x o y respectivamente, pero da una clara idea de cómo se constituye el movimiento de la masa). En este caso, la oscilación tiene por amplitud:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}.$$

Y oscilará con un ángulo  $\delta = \text{Tan}^{-1}\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$  en caso de que las amplitudes sean iguales; entonces, la pendiente será 1 y la oscilación lo hará con un ángulo de  $45^\circ$ .

La elongación del movimiento se dará por:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; esto significa que:

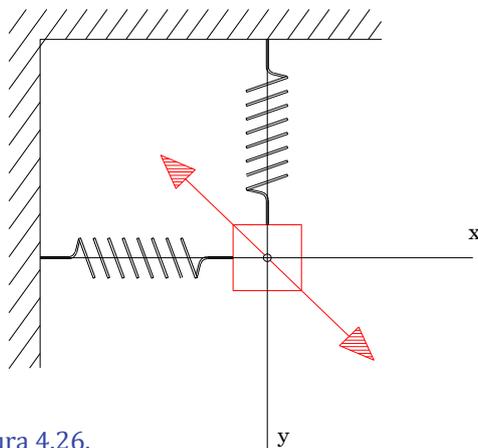
$$r = \sqrt{A_x^2 \text{Cos}^2(\omega t + \alpha_x) + A_y^2 \text{Cos}^2(\omega t + \alpha_y)};$$

como  $\alpha_x = \alpha_y$  entonces:

$$r = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \text{Cos}(\omega t + \alpha).$$

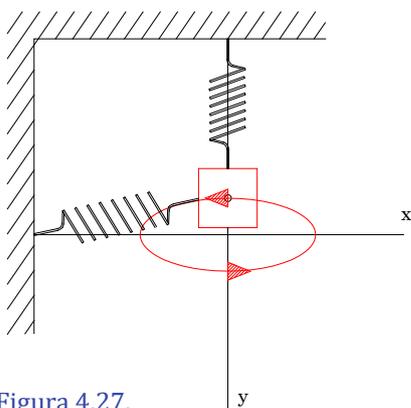
ii.) Si la diferencia de fases fuera:  $\alpha_x - \alpha_y = \pi$ , al remplazar en la ecuación (4.7.3), dará como resultado:  $\frac{y^2}{A_x} + \frac{x^2}{A_y} + 2\frac{xy}{A_x A_y} = 0$  (4.7.6).

Esto implica que  $y = -\frac{A_y}{A_x}x$  corresponde a la ecuación de una recta, cuya pendiente es negativa (figura 4.26); es decir, el centro de la masa oscilará a lo largo de una recta cuya pendiente es negativa, tal como se puede ver en la ecuación (4.7.3)



**Figura 4.26.** Pendiente negativa de la dirección del movimiento como resultado de la superposición.

Como la elongación del movimiento se da por:  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ , entonces:



**Figura 4.27.** El centro de masa oscila y describe una elipse cuando el desfase es  $\pi/2$ .

$$r = \sqrt{A_x^2 \text{Cos}(wt + \alpha_y + \pi) + A_y^2 \text{Cos}(wt + \alpha_y)},$$

lo que es igual a:

$$r = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \text{Cos}(wt + \alpha_y).$$

iii.) Si la diferencia de fases es  $\alpha_x - \alpha_y = \pi/2$ , al remplazar en la ecuación (4.7.3), dará como resultado:  $\frac{y^2}{A_x^2} + \frac{x^2}{A_y^2} = 1$ , que corresponde a la ecuación de una elipse, tal como se puede ver en la Figura 4.27; es decir, el centro de masa describe una elipse.

El sentido del giro se lo puede predecir de esta forma:

Como  $x = A_x \cos(\omega t + \alpha_x)$ , a su vez  $\alpha_x = \alpha_y + \pi/2$ , entonces:  $x = A_x \cos(\omega t + \alpha_y)$ .

Así que, al derivar, se encuentra la velocidad; al depender del sentido que se tenga, de acuerdo al signo se puede decidir cuál es el sentido de rotación.

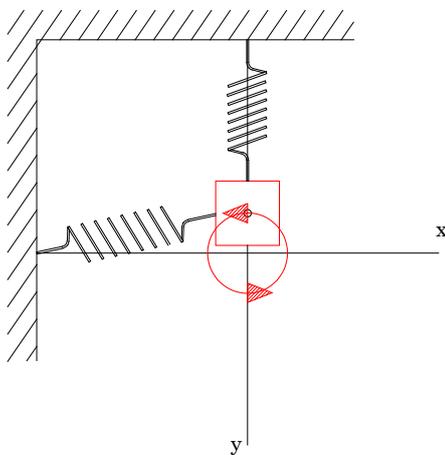
$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A_x \cos(\omega t + \alpha_y)).$$

De igual forma, para encontrar la velocidad en y, cuyo resultado es:

$$v_y = -A_y \omega \sin(\omega t + \alpha_x).$$

En uno de los cuatro extremos de la elipse las velocidades se pueden anular, ya sea  $v_x$  o  $v_y$ , con lo cual se puede encontrar el sentido de la rotación.

Con este desfase y si las amplitudes son iguales, se obtiene una circunferencia, cuya ecuación deducida de la elipse es:  $y^2 + x^2 = A^2$ , donde el sentido de rotación se encontrará de la misma forma como se realizó en la elipse (Ver figura 4.28).



**Figura 4.28.**  
El movimiento del centro de masa describe una circunferencia cuando las amplitudes son iguales.

El sistema se puede tornar mucho más complejo si las frecuencias son diferentes y pensar si en vez de dos resortes, son tres o más; para el caso de dos sistemas de oscilación, se tienen las figuras de Lissajous, como se puede observar en la Figura 4.29; en la primera fila se pueden ver figuras que se obtienen con diferentes desfases, y relación de frecuencias 1:1; además si la amplitudes de los osciladores son iguales se tiene: recta, elipse, circunferencia etc., en las siguientes filas en donde las relación de frecuencias es: 1:2, 1:3, etc. Se tienen figuras mucho mas complejas casi de infinitas formas.

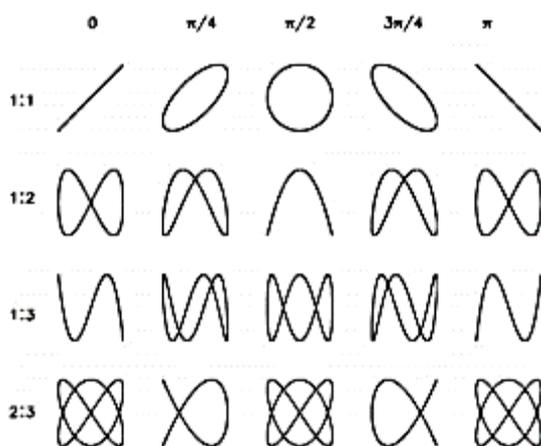


Figura 4.29.

Figuras de Lissajous. Cuando la relación de las frecuencias es 1:1 la primera fila y los desfases desde la recta con pendiente positiva hasta la pendiente negativa

Fuente: <http://www.ucm.es/theoscarlab>.

Al diseñar adecuadamente un sistema de oscilación con péndulos o espejos vibrantes, para que reflejen un rayo de luz laser, se pueden proyectar y obtener las figuras que se desee: “se sugiere investigar, en el libro de Anales del Décimo Congreso de Física, el artículo Didáctica sobre mecánica ondulatoria, figuras de Lissajous y funciones de Furier mediante péndulos y osciladores para luz laser”.



Figura 4.30.

Talla de un toro de casta en un bloque de vidrio: talla de imágenes con máquinas 3D

Fuente: (Travis, 2018)

Con el desarrollo de la tecnología y en particular de la electrónica, se pueden tener osciladores de luz laser que, además de describir la luz laser, pueden producir quemaduras y dejar su huella por donde pasan; de esta forma, se puede escribir y tallar en el interior de cristales de vidrio, como se puede ver en la Figura 4.30.

En sitios de espectáculo, como discotecas, bares y demás, se puede observar cómo las luces de colores describen figuras en pisos y paredes, lo que los torna muy llamativos; en general, este tipo de luces se habilitan con sistemas mecánicos oscilatorios señales eléctricas que mueven motores provenientes de sistemas electrónicos.

Quizá el futuro del cine fuese este tipo de tecnología, para ver en realidad cine en tres dimensiones (para mirar por delante, por detrás por encima y por debajo.) Esto implica estar bajo las tres dimensiones o los tres ejes cartesianos (X, Y, Z)

### 4.8 Resortes en serie

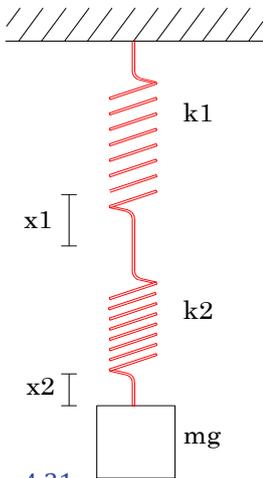


Figura 4.31. Resortes de diferente constante de elasticidad, suspendidos entre sí.

La principal característica de este sistema de resortes consiste en que cuando termina el primero se asegura el segundo y así sucesivamente (ver figura 4.31); como cada resorte tiene su propia constante, entonces, si se le aplica una fuerza o peso, cada resorte se estirará lo que le corresponde, de acuerdo a la constante de elasticidad; es decir que:  $x = x_1 + x_2$ .

Ahora bien, la Ley de Hooke establece que:  $F = -kx$ , por tanto, al combinar estas dos ecuaciones, se obtiene:  $\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$ ; si no se tiene en cuenta el peso del segundo resorte, entonces la fuerza o peso de la masa será la misma para ambos resortes; por tanto, la constante del sistema de resortes es:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}, \text{ de modo que } k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \quad (4.8.1).$$

Entonces, el periodo de oscilación de este sistema será:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ ; al remplazar lo que es la constante del sistema, se tiene:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m(k_1+k_2)}{k_1 k_2}}; \text{ en forma general, será: } T = 2\pi \sqrt{\frac{m \sum_1^n k_i}{\prod_1^n k_i}} \quad (4.8.2).$$

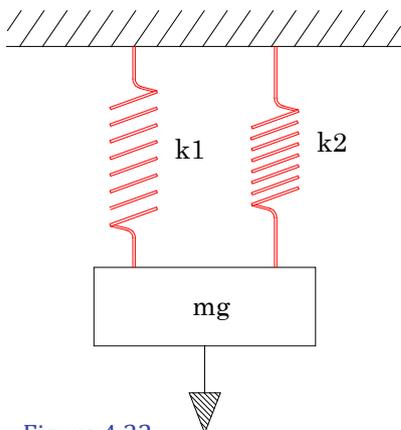


Figura 4.32. Resortes de diferente constante de elasticidad sostienen una carga.

### 4.9 Resortes en paralelo

El sistema de resortes en paralelo (figura 4.32) presupone que la masa distribuye el peso de acuerdo a como se suspende; en este caso, se distribuye equitativamente; además, por algún motivo el sistema, al oscilar, no entra en modos de vibración; en la práctica, sería como si un resorte estuviera dentro de otro; entonces, no habría modos de oscilaciones. De modo que la fuerza o el peso será:  $F_1 + F_2 = mg$  o, en general, será:  $F = F_1 + F_2$ ; como la Ley de Hooke

establece que:  $F = -kx$ , al combinar estas dos ecuaciones y tener en cuenta que el desplazamiento es el mismo, se tiene:

$$k = k_1 + k_2 \quad (4.9.1).$$

Por tanto, el periodo de oscilación será:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$  (4.9.2).

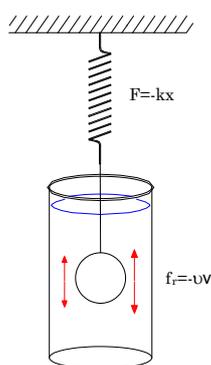


Figura 4.33. Modelo de un sistema oscilatorio amortiguado.

## 4.10 Movimiento oscilatorio amortiguado

En el mundo real de las oscilaciones, lo que se encuentra son movimientos amortiguados (Figura 4.33); los cuerpos sólidos que se encuentran oscilando siempre van estar enfrentándose a unas fuerzas que tratan de anular el movimiento, para llevarlo al punto de equilibrio o al punto de mayor potencial. Para estudiarlo, se utilizará un modelo en el cual quedan expresadas las fuerzas que causan el amortiguamiento, efecto que termina por frenar o terminar con el movimiento.

Al igual que en el movimiento armónico, la masa, cuando se encuentra en los extremos, tiene la mínima velocidad y cuando pasa por el punto de equilibrio tiene la máxima velocidad; esto significa que al cuerpo se lo somete a una aceleración; por tanto, el sistema es acelerado; así que se parte del concepto de sistema acelerado:

$$\sum_{i=1}^n f_i = m_s a \quad (4.10.1)$$

Ahora bien, las fuerzas presentes en el sistema son: por una parte, la fuerza elástica del resorte  $F = -kx$  y, como se trata de un sistema amortiguado, la fuerza que lo lleva a ser un movimiento amortiguado es precisamente la fuerza de rozamiento de la masa con el medio, que puede ser aire, agua u otro tipo de fluido viscoso, que impide que el movimiento continúe por siempre; sin entrar a analizar otros factores, la fuerza de rozamiento de la masa con el agua se da por:  $F = -vv$ , donde  $v$  es la viscosidad del medio y  $v$  la velocidad del cuerpo, para velocidades pequeñas; al tratarse de velocidades grandes, la fuerza de rozamiento se expresa:  $F = -vv^n$ , donde el exponente  $n$  toma valores desde 1 en adelante y, por tanto, resulta complejo decidir en qué momento se toma un valor u otro. Así que, al replazar estas expresiones en el concepto de sistema acelerado, se tiene:

$$-kx - vv = ma.$$

Al tomar en cuenta que la aceleración es:  $a = \frac{d^2x}{dt^2}$  y la velocidad es  $v = \frac{dx}{dt}$ , entonces, la ecuación del movimiento será:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + v \frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad (4.10.2).$$

Esta es una ecuación diferencial de segundo orden, homogénea y completa; para mejorar la presentación, se suele escribir de esta forma:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{v}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0,$$

donde  $\frac{v}{m} = 2\mu$ ,  $\mu$  será el factor de amortiguamiento y a  $\frac{k}{m} = w_0^2$  se la llamará en adelante frecuencia natural del sistema; entonces, la ecuación 4,10.2 queda:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0 \quad (4.10.3).$$

Para encontrar la solución de esta ecuación, se puede lograr con utilización del método de la característica, el mismo que se utilizó en la solución de la ecuación del MAS.

Así que la solución general es:  $x = e^{\lambda t}$ , de la cual se tienen dos soluciones, una general y una particular; es decir:  $x = c_1 x_1 + c_2 x_2$  (4.10.4).

De acuerdo con la ecuación (4.10.3), se calcula la primera y segunda derivada; esto es:  $x = e^{\lambda t}$ ,  $\dot{x} = \lambda e^{\lambda t}$  y  $\ddot{x} = \lambda^2 e^{\lambda t}$ ; al remplazar en la ecuación (4.10.3), se obtiene:

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\mu \lambda e^{\lambda t} + w_0^2 e^{\lambda t} = 0.$$

Al factorizar  $e^{\lambda t}$ , se tiene:  $e^{\lambda t}(\lambda^2 + 2\mu\lambda + w_0^2) = 0$ ; como se sabe, el factor  $e^{\lambda t}$  no puede ser cero; por tanto, le corresponde al paréntesis ser iguala a cero:  $\lambda^2 + 2\mu\lambda + w_0^2 = 0$ ; como se trata de una función cuadrática la solución es:

$$\lambda = \frac{-2\mu \pm \sqrt{4\mu^2 - 4w_0^2}}{2} \quad (4.10.5).$$

A partir de esto, se puede observar que la raíz da dos soluciones, una positiva y otra negativa y, al factorizar la constante, se tiene:

$\lambda_1 = -\mu + \sqrt{\mu^2 - w_0^2}$  y  $\lambda_2 = -\mu - \sqrt{\mu^2 - w_0^2}$ ; por tanto, las soluciones  $x_1$  y  $x_2$  quedan:

$$x_1 = e^{\lambda_1 t}; \text{ al remplazar: } x_1 = e^{(-\mu + \sqrt{\mu^2 - w_0^2})t}$$

$x_2 = e^{\lambda_2 t}$ ; al remplazar  $x_1 = e^{(-\mu - \sqrt{\mu^2 - w_0^2})t}$ ; si se remplazan estas soluciones en (4.10.4),  $x = c_1 x_1 + c_2 x_2$ , se tiene:

$$x = c_1 e^{(-\mu + \sqrt{\mu^2 - w_0^2})t} + c_2 e^{(-\mu - \sqrt{\mu^2 - w_0^2})t}.$$

Al factorizar  $e^{-\mu t}$ , se tiene:

$$x = e^{-\mu t} \left( c_1 e^{(\sqrt{\mu^2 - w_0^2})t} + c_2 e^{-(\sqrt{\mu^2 - w_0^2})t} \right) \quad (4.10.6).$$

Esta es la solución a la ecuación diferencial (4.10.3), que depende del valor que toma el coeficiente de amortiguamiento  $\mu$  respecto al valor de la frecuencia natural  $w$ .

Entonces, si  $\mu < w_0$ , la solución es compleja y el movimiento será subamortiguado; si  $\mu > w_0$ , la solución es real y el movimiento será sobreamortiguado y si  $\mu = w_0$ , la solución es real y el movimiento será amortiguamiento crítico.

### Movimiento oscilatorio subamortiguado

La condición para obtener este movimiento es ( $w_0 > \mu$ ); ahora bien, en primer lugar, la raíz  $\sqrt{\mu^2 - w^2}$  tiene unidades de frecuencia, lo que significa que  $\mu$  también debe tener unidades de frecuencia; en segundo lugar, la raíz está en el campo de los números imaginarios; por tanto, se debe expresar así:

$$x = e^{-\mu t} \left( C_1 e^{i\sqrt{w_0^2 - \mu^2}t} + C_2 e^{-i\sqrt{w_0^2 - \mu^2}t} \right);$$

Al utilizar las soluciones de Euler para números imaginarios:  $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \sin \theta$ , entonces, la ecuación se puede escribir así:

$$x = e^{-\mu t} \left( C_1 \left( \cos(\sqrt{w_0^2 - \mu^2}t) + i \sin(\sqrt{w_0^2 - \mu^2}t) \right) + C_2 \left( \cos(\sqrt{w_0^2 - \mu^2}t) - i \sin(\sqrt{w_0^2 - \mu^2}t) \right) \right)$$

$$x = e^{-\mu t} \left( (C_1 + C_2) \cos(\sqrt{w_0^2 - \mu^2}t) + i(C_1 - C_2) \sin(\sqrt{w_0^2 - \mu^2}t) \right).$$

Dado que, en esta Física clásica no tienen sentido las soluciones imaginarias, se aceptan únicamente las soluciones reales; además, como  $\sqrt{w_0^2 - \mu^2}$  tiene unidades de frecuencia, entonces a todo el radical se le llamará frecuencia  $w$ ; de modo que la ecuación se puede escribir en forma simplificada como:

$$x = e^{-\mu t} (C_1 \cos wt + C_2 \sin wt) \quad (4.10.7).$$

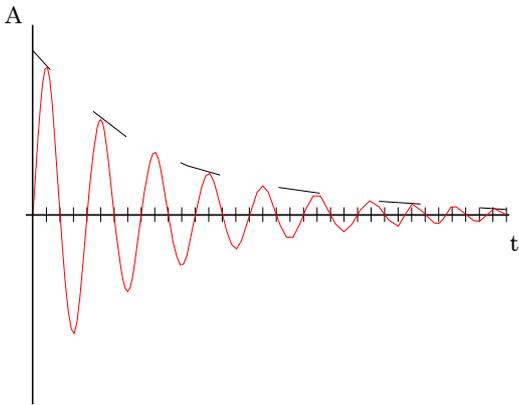


Figura 4.34. Decaimiento de la amplitud con el tiempo y  $\mu$  del valor que tome el coeficiente de amortiguamiento.

Ahora bien, si se considera que:  
 $C_1 = A \text{ sen}(\alpha)$  y  $C_2 = A \text{ cos}(\alpha)$ , entonces:  
 $x = e^{-\mu t} [A \text{ Sen}(\alpha) \text{ Cos}(wt) + A \text{ Cos}(\alpha) \text{ Sen}(wt)]$ ;  
 de acuerdo a la identidad trigonométrica, se puede escribir como:

$$x = Ae^{-\mu t} \text{Sen}(wt + \alpha) \quad (4.10.8),$$

función solución a la ecuación diferencial que describe la posición de la partícula; se llama también elongación, en la que se puede observar cómo la amplitud decae de forma exponencial con el tiempo, y con el coeficiente de amortiguamiento  $\mu$ :  $A = A_0^{-\mu t}$ . También se puede observar en la figura 4.34.

Por otra parte, como el periodo es  $T = \frac{2\pi}{w}$ , y la frecuencia del sistema es:  $w = \sqrt{w_0^2 - \mu^2}$ , entonces el periodo será:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{w_0^2 - \mu^2}} \quad (4.10.9).$$

Al factorizar  $w_0$  y remplazar los valores de  $w_0$  y  $\mu$ , se tiene:

$$T = \frac{2\pi}{w_0 \sqrt{1 - \frac{\mu^2}{w_0^2}}}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{w_0^2}}}$$

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{4mk}}} \quad (4.10.10),$$

donde  $T_0$  es el periodo inicial o natural y  $v$  es el coeficiente de viscosidad o rozamiento del objeto con el medio en donde oscila.

### Decaimiento logarítmico

Como el movimiento oscilatorio parte de una amplitud inicial  $A_0$  y a medida que transcurre el tiempo disminuye de forma exponencial hasta que prácticamente se anula, entonces en cada periodo de oscilación la amplitud disminuye así:

Como el tiempo es:  $t = nT$ , donde  $n$  es el número de oscilaciones y  $T$  el periodo, entonces la  $n$ -ésima amplitud se puede escribir como:  $A_n = A_0 e^{-\mu nT}$ . Ahora bien, esta amplitud a la  $(n-1)$ -ésima es:  $A_{n-1} = A_0 e^{-\mu(n-1)T}$ ; en términos generales, se puede decir que  $A_{n-1} \geq A_n$ , así que se puede establecer esta relación:  $\frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{A_0 e^{-\mu(n-1)T}}{A_0 e^{-\mu nT}}$ , que también se puede expresar como  $\frac{A_{n-1}}{A_n} = e^{-\mu nT + \mu T} \cdot e^{\mu nT}$ ; por último,  $\frac{A_{n-1}}{A_n} = e^{\mu T}$ .

Al aplicar logaritmo natural a esta expresión, se obtiene:

$$\delta = \ln(A_{n-1}) - \ln(A_n) = \mu T$$

$$\delta = \mu T \quad (4.10.11).$$

Esta expresión se conoce como decremento logarítmico, y muestra cómo la variación del logaritmo de la amplitud es directamente proporcional con el coeficiente de amortiguamiento.

### Ejemplo

Dada la ecuación:  $\frac{d^2x}{dt^2} + 5,2 \frac{dx}{dt} + 9x = 0$ , con  $k = 3$ , encontrar:  $w_0$ ,  $T_0$ ,  $T$ ,  $\delta$ .

a) Al comparar la ecuación que se tiene en el ejercicio con la ecuación (4.10.3), se tiene a) Como  $w^2 = 9$ ; por tanto,  $w = 3 \text{ rad/s}$ .

b) Como el periodo natural es:  $T_0 = \frac{2\pi}{w}$ , entonces  $T_0 = \frac{6,28}{3} = 2,094 \text{ s}$ .

c) Una vez más, al comparar con (4.10.3), se tiene que  $2\mu = 5,2$ ; es decir,  $\mu = 2,6$ . Ahora bien, como  $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\mu^2}{w_0^2}}}$ , lo que al remplazar los valores ya calculados, se tiene:

$$T = \frac{2,094}{\sqrt{1 - \frac{6,78}{9}}}; \text{ de modo que } T = 4,18 \text{ s}.$$

d) Para calcular el decremento logarítmico:  $\delta = \mu T$ , al remplazar valores, se tiene:  $\delta = (2,6 \text{ rad/s})(4,18 \text{ s}) = 10,88$ .

Ahora bien, como  $2\mu = \frac{v}{m}$ , entonces:  $v = 2\mu m$ ; al remplazar valores, queda:

$$v = 2(2,6 \text{ rad/s})(0,33 \text{ kg}); \text{ por tanto, se obtiene: } v = 1,73 \text{ kg/s}.$$

e) Por otra parte, si  $A_0 = 0,2 \text{ m}$ , ¿cuánto vale  $A_2$ ?

Como  $A = A_0 e^{-\mu nT}$ , al remplazar, se tiene:  $A_2 = 0,2 e^{-(2,6)(2)(4,17)}$ ; entonces:  $A_2 = 7,65 \times 10^{-11} \text{ m}$ .

### Energía de disipación

A medida que el sistema oscila, la amplitud va disminuyendo hasta alcanzar la quietud; esto significa que la energía del resorte se disipa en el sistema que amortigua el movimiento, lo que quiere decir que la potencia del sistema del resorte se disipa:

Entonces, como la potencia se define como  $P = \frac{dw}{dt}$ , pero, también, se la puede expresar como  $P = Fv$ , además, la fuerza disipadora se la puede expresar  $F = -\nu v$ , entonces, al combinar estas expresiones, se tiene:

$$\frac{dw}{dt} = -\nu^2 v \quad (4.10.12).$$

Como  $\nu = 2\mu m$ , entonces  $\frac{dw}{dt} = -2\mu m v^2$ . En esta expresión se puede observar que los dos últimos términos corresponden a la energía cinética; por tanto, para mejorar la escritura, se puede expresar así:  $\frac{dw}{dt} = -4\mu \left(\frac{1}{2} m v^2\right)$ ; como lo que se encuentra en el paréntesis es la energía cinética entonces:

$$\frac{dw}{dt} = -4\mu E_k.$$

Además, el trabajo se lo puede describir como energía; es decir:  $dw \equiv dE$ ; así que la expresión se puede escribir como:

$$\frac{dE}{dt} = -4\mu E_k.$$

Ahora bien, la energía cinética es la mitad de la energía total, en términos generales, a excepción de lo que ocurre en los extremos. Entonces,  $E_k = \frac{1}{2} E_T$ ; por tanto, se puede escribir:

$$\frac{dE}{E_T} = -2\mu dt.$$

Para solucionar esta ecuación diferencial, se procede mediante integración; entonces:

$$\int_{E_0}^E \frac{dE}{E_T} = -2\mu \int_0^t dt.$$

Y, como solución se tiene:  $\ln E - \ln E_0 = -2\mu t$ . Así que, finalmente la energía queda:

$$E = E_0 e^{-2\mu t} \quad (4.10.13).$$

Como se puede observar, la energía se disipa a medida que transcurre el tiempo de forma exponencial, a partir de la energía inicial y de acuerdo con el valor del coeficiente de amortiguamiento.

### Movimiento amortiguado sobre-amortiguado

Este movimiento se presenta cuando  $\mu > w$ ; por tanto, el radical ya tiene solución real y se llama:  $\beta = \sqrt{\mu^2 - w^2}$ . Así que, la ecuación (4.10.6) se la puede escribir como:

$$x = e^{-\mu t} [c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}] \quad (4.10.14).$$

Para solucionar la ecuación (4.10.14), si se plantea que para  $t = 0$ , se tiene:

$$x_0 = c_1 + c_2.$$

Por definición de velocidad,  $v = \frac{dx}{dt}$ ; entonces, al derivar respecto al tiempo (4.10.14), se tiene la velocidad del movimiento amortiguado crítico:

$$v = \frac{d}{dt} [e^{-\mu t} (c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t})].$$

Al realizar la derivación, se tiene:

$$v = -\mu e^{-\mu t} [c_1 e^{\beta t} + c_2 e^{-\beta t}] + e^{-\mu t} [c_1 \beta e^{\beta t} - c_2 \beta e^{-\beta t}].$$

Si la velocidad inicial  $v_0$  es justamente cuando  $t = 0$ , entonces:

$$v_0 = -\mu(c_1 + c_2) + \beta(c_1 - c_2).$$

Al factorizar, queda:

$$v_0 = c_1(\beta - \mu) - c_2(\mu + \beta).$$

De  $x_0 = c_1 + c_2$ , se puede decir que  $c_1 = x_0 - c_2$ , en que, al remplazar en la velocidad, se tiene:

$$v_0 = (x_0 - c_2)(\beta - \mu) - c_2(\mu + \beta).$$

Al despejar  $c_1$  y  $c_2$ , se tiene:

$$c_2 = \frac{-v_0 - x_0(\mu - \beta)}{2\beta} \text{ Y } c_1 = \frac{v_0 + x_0(\mu + \beta)}{2\beta} \quad (4.10.15).$$

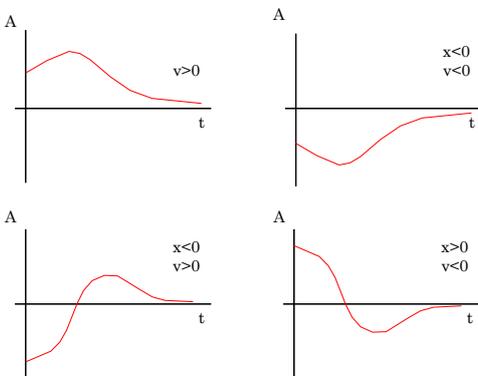


Figura 4.35. Posibilidades de amortiguamiento sobre-amortiguado.

En la Figura 4.35, se puede analizar cada una de las posibilidades: en la primera, se tiene que la masa parte desde una elongación y velocidad positiva y, a medida que corre el tiempo, la masa se acerca al punto de equilibrio; de igual forma ocurre en el segundo, donde la masa parte de una elongación y velocidad negativa. A diferencia de lo que ocurre en tres y cuatro, donde la masa pasa por el punto de equilibrio, pero rápido alcanza el punto de equilibrio para terminar el movimiento oscilatorio; así que en ninguna de las cuatro posibilidades se alcanza una oscilación o ciclo completo.

### Movimiento amortiguado crítico

Este movimiento se presenta cuando  $\mu = w$ ; por tanto,  $\beta = 0$ ; para solucionar la ecuación  $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + w_0^2x = 0$ , se plantea un método de factores; es decir:

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\mu \frac{d}{dt} + w_0^2\right)x = 0.$$

Expresión que se la puede plantear como:

$$\left(\frac{d}{dt} + \mu + \beta\right)\left(\frac{d}{dt} + \mu - \beta\right)x = 0,$$

pero como  $\beta = 0$ , entonces:

$$\left(\frac{d}{dt} + \mu\right)\left(\frac{d}{dt} + \mu\right)x = 0.$$

Si se hace  $\left(\frac{d}{dt} + \mu\right)x = y$ , se puede decir que  $\left(\frac{d}{dt} + \mu\right)y = 0$ ; con lo que se puede operar:  $\frac{dy}{dt} + \mu y = 0$ ; por tanto, la solución será:  $\frac{dy}{y} = -\mu dt$ ; es decir,  $y = c_0 e^{-\mu t}$ ; así que, al remplazar lo que vale y, se obtiene:  $\left(\frac{d}{dt} + \mu\right)x = c_0 e^{-\mu t}$ .

De aquí, al despejar la constante  $c_0$  se tiene:  $c_0 = \left(\frac{d}{dt} + \mu\right)x e^{\mu t}$ ; al operar queda  $c_0 = \frac{dx}{dt} e^{\mu t} + \mu x e^{\mu t}$ , expresión que se puede escribir así:

$$c_0 = \frac{d}{dt}(x e^{\mu t}).$$

De esta forma,  $c_0 dt = dx e^{\mu t}$  y, como solución a esta expresión, se tiene:

$$x = e^{-\mu t}[c_0 t + c_1] \quad (4.10.16).$$

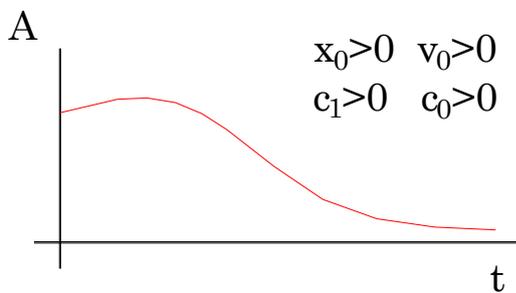


Figura 4.36. Gráfica de la elongación del movimiento oscilatorio amortiguado crítico.

Como se puede observar, la función no tiene ninguna función armónica; por tanto, el movimiento no es periódico; la masa, una vez se libera en un extremo se acerca de manera asintótica al punto de equilibrio.

En la Figura 4.36 se puede observar que la masa, una vez hubiera partido desde una posición y con velocidad positiva, sube un poco y luego se acerca de manera asintótica en busca del punto de equilibrio a medida que transcurre el tiempo.

El cálculo de la velocidad y aceleración se dejan como ejercicio.

### 4.11 Movimiento Oscilatorio Forzado

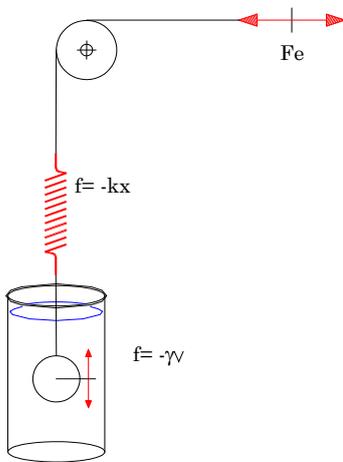


Figura 4.37. Modelo de un montaje de movimiento oscilatorio forzado.

Para mantener el movimiento de cualquier oscilador real es preciso suministrarle energía, para que contrarreste la pérdida de energía debido al rozamiento con el medio; en este caso, se dice que al oscilador se lo está forzando externamente (figura 4.37). Ahora bien, la energía suministrada en términos de fuerza puede ser de varias formas, pero en general la fuerza debe ser periódica, de tal modo que la frecuencia excitatriz debe ser similar a la frecuencia natural del sistema. Entonces, habrá una frecuencia en particular donde el sistema responde tanto que su amplitud se desborda, mientras que, en otros valores, por más que la fuerza periódica actúe, el sistema no responde; así, entonces, los sistemas osciladores solo tendrán una frecuencia natural a la que responden cuando los excitan fuerzas periódicas externas. Este fenómeno se conoce con el nombre de resonancia de la amplitud.

Al igual que en los casos anteriores, el sistema oscilador tiene velocidades máximas y mínimas; por tanto, ya es un sistema acelerado, solo que esta vez el sistema tiene una fuerza periódica externa, de tal forma que se puede expresar de modo general así:

$$\sum_{i=1}^n F_i = F_e(t) \quad (4.11.1).$$

Las fuerzas que participan en este movimiento son: fuerza de rozamiento con el medio  $F = -\gamma v$ ; fuerza elástica  $F_e = -kx$  y, por último, se halla la fuerza periódica excitatriz  $F_e(t) = F_0 \cos(\omega_e t + \alpha)$ . Como se puede ver esta fuerza depende de la frecuencia excitatriz  $\omega_e$ ; por tanto, la ecuación quedará:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega_e t + \alpha) \quad (4.11.2).$$

Esta expresión se puede escribir así:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{v}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_e t + \alpha).$$

Si se lleva a que  $\frac{v}{m} = 2\mu$  y  $\frac{k}{m} = \omega^2$ , entonces la expresión se puede escribir así:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_e t + \alpha) \quad (4.11.3).$$

La ecuación (4.11.3) es una ecuación diferencial de segundo orden homogénea completa y con solución. Cuya solución general es:  $x = x_H + x_p$  solución homogénea más la solución particular, en donde la solución homogénea ya se conoce entonces se procede a encontrar la solución particular.

En primer lugar, toda función armónica se puede expresar en términos complejos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\mu \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{F_0}{m} e^{-i(\omega_e t + \alpha)} \quad (4.11.4).$$

Se asume que la función  $x_p = Ae^{-i(\omega_e t + \alpha)}$  es la solución particular, donde se deberá determinar el valor de A. Al utilizar el método de la característica, se tienen las diferentes soluciones:

$$x_p = Ae^{-i(\omega_e t + \alpha)}$$

$$x'_p = -i\omega_e Ae^{-i(\omega_e t + \alpha)}$$

$$x''_p = -\omega_e^2 Ae^{-i(\omega_e t + \alpha)}.$$

Al remplazar estas soluciones en (4.11.4), se tiene:

$$-\omega_e^2 Ae^{-i(\omega_e t + \alpha)} + 2\mu(-i\omega_e Ae^{-i(\omega_e t + \alpha)}) + \omega_0^2 Ae^{-i(\omega_e t + \alpha)} = \frac{F_0}{m} e^{-i(\omega_e t + \alpha)}.$$

Después de cancelar  $e^{-i(\omega_e t + \alpha)}$ , queda:  $-\omega_e^2 A - 2i\mu\omega_e A + \omega_0^2 A = \frac{F_0}{m}$  y, ahora, al factorizar la amplitud A, queda:  $A[(\omega_0^2 - \omega_e^2) - 2i\mu\omega_e] = \frac{F_0}{m}$ .

Así que, al despejar la amplitud, se tiene:

$$A = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega_e^2) - 2i\mu\omega_e]} \quad (4.11.5).$$

Para poder obtener una solución real, se multiplica por el conjugado:

$$A = \frac{F_0[(w_0^2 - w_e^2) + 2i\mu w_e]}{m[(w_0^2 - w_e^2) - i2\mu w_e] [(w_0^2 - w_e^2) + i2\mu w_e]}$$

$$A = \frac{F_0 [(w_0^2 - w_e^2) - i2\mu w_e]}{m[(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2]}.$$

expresión que se puede escribir, al factorizar el corchete en el denominador como:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} \left[ \frac{w_0^2 - w_e^2}{\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} + \frac{2i\mu w_e}{\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} \right].$$

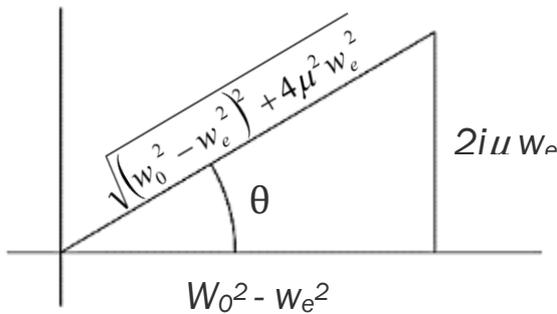


Figura 4.38.

Triángulo rectángulo, con el cual se pueden definir las funciones trigonométricas de seno y coseno.

Ahora bien, en la Figura 4.38 se representa lo que se encuentra en los corchetes; es decir, las funciones trigonométricas de seno y coseno; esto es:

$$\frac{w_0^2 - w_e^2}{\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} = \cos \theta .$$

Y la segunda parte:

$$\frac{2i\mu w_e}{\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} = \sin \theta .$$

De modo que la ecuación se la puede expresar de esta forma:

$$\frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} (\cos \theta + i \sin \theta) .$$

Según Euler, la expresión se puede escribir:  $A = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} e^{i\theta} .$

Para resumir: como la solución particular, es:

$$x_p = A e^{-i(w_e t + \alpha)} .$$

Como ya se conoce el valor de la amplitud, entonces la solución se puede expresar como:

$$x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} e^{-i(w_e t + \alpha)} e^{i\theta}$$

$$x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} e^{-i(w_e t + \alpha + \theta)} .$$

De la solución compleja, se puede tener una solución real que es:

$$x_p = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} \cos(w_e t + \alpha + \theta) \quad (4.11.6).$$

Ahora bien, como ya se dijo que la solución general es la suma de la solución homogénea más la solución particular, es decir:  $X = X_H + X_P$ , entonces la solución general es:

$$X = Ae^{-\mu t} \cos(\sqrt{w_0^2 - \mu^2} t + \alpha) + \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} \cos(w_e t + \alpha + \theta) \quad (4.11.7).$$

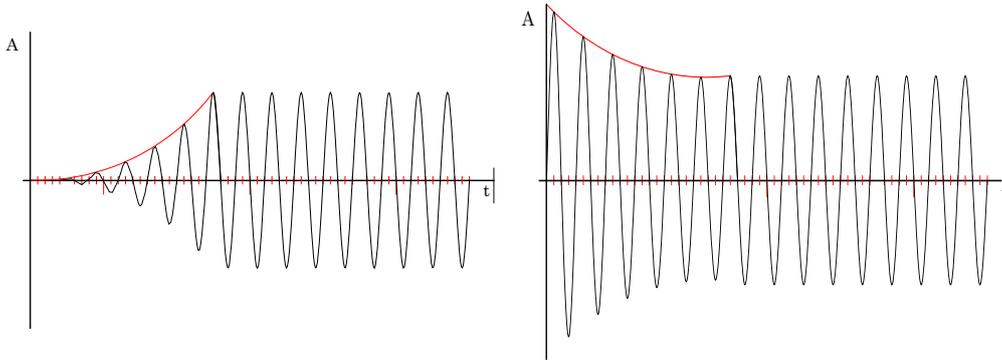


Figura 4.39.

La amplitud inicia de cero hasta alcanzar la máxima o bien desde una amplitud mayor hasta alcanzar la amplitud requerida por el coeficiente de amortiguamiento.

La solución homogénea que corresponde al movimiento subamortiguado con el tiempo desaparece, que puede ser si parte de cero o cuando lo hace desde un valor positivo o negativo como se puede ver en la figura 4.39; así, entonces, se mantiene la solución particular de la ecuación (4.11.7):

$$X = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} \cos(w_e t + \alpha + \theta) \quad (4.11.6),$$

donde la amplitud es:

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}} .$$

Como se puede ver, la amplitud depende de la frecuencia excitatriz; es decir:  $A = f(w_e)$ , lo que significa que la amplitud cambia desde valores pequeños hasta llegar a un valor crítico, que es tema de análisis; para ello, implica encontrar una frecuencia excitatriz con la cual se tiene una amplitud máxima esto es:  $\frac{dA}{dw_e} = 0$ , lo que corresponde a una derivada de cociente:  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{udv - vdu}{v^2}$ .

$$\frac{dA}{dw_e} = \frac{F_0 m \frac{1}{2} ((w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2)^{-1/2} [2(w_0^2 - w_e^2)(-2w_e) + 8\mu^2 w_e]}{m^2 ((w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2)} = 0.$$

Al realizar operaciones y dado que la fuerza y la masa no pueden ser cero, entonces el segundo paréntesis se iguala a cero:

$$\frac{dA}{dw_e} = 2(w_0^2 - w_e^2)(-2w_e) + 8\mu^2 w_e = 0$$

$$\frac{dA}{dw_e} = 4w_e [-(w_0^2 - w_e^2) + 2\mu^2] = 0$$

$$\frac{dA}{dw_e} = -w_0^2 + w_e^2 + 2\mu^2 = 0.$$

Al despejar la frecuencia excitatriz, se tiene:

$$w_e^2 = w_0^2 - 2\mu^2$$

$$w_e = \sqrt{w_0^2 - 2\mu^2} \quad (4.11.8).$$

Al final, esta es la frecuencia, donde se obtiene la máxima amplitud y se llama frecuencia de resonancia que, al remplazarla en la ecuación (4.11.6), se tiene la máxima amplitud, esto es:

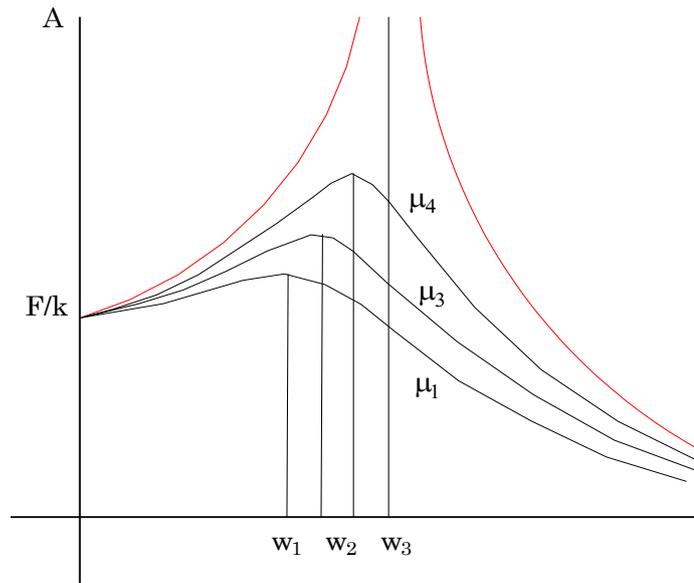


Figura 4.40. Variación de la amplitud de acuerdo al valor del coeficiente de amortiguamiento.

$$A_M = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_0^2 + 2\mu^2)^2 + 4\mu^2(w_0^2 - 2\mu^2)}}$$

$$A_M = \frac{F_0}{m\sqrt{4\mu^4 + 4\mu^2w_0^2 - 8\mu^4}}$$

$$A_M = \frac{F_0}{m\sqrt{4\mu^2w_0^2 - 4\mu^4}} .$$

Y, por último, se tiene:  $A_M = \frac{F_0}{2m\mu\sqrt{w_0^2 - \mu^2}}$ , expresión que corresponde a la máxima

amplitud o amplitud de resonancia; en el evento en que la frecuencia natural del sistema se acerca al valor del índice de amortiguamiento, la amplitud se torna infinita (figura 4.40). En este punto se presenta el verdadero efecto de resonancia, efecto causante de un desbordamiento de la amplitud que, en sistemas mecánicos, significa destrucción, como es el caso del conocido puente de Tacoma Narrows, destruido por una ventisca de solo 65 Km/h, el 7 de noviembre de 1940, con solo cuatro meses de funcionamiento, pero fue suficiente para que lo llevara a que entre en resonancia y se destruyera por sí solo. Al igual que este, otros desastres de la ingeniería se han presentado por el mismo fenómeno, entre ellos el puente de Broughton, destruido por el paso de un batallón de soldados; desde entonces, los batallones de soldados que van a atravesar puentes colgantes, deben recibir la orden de romper filas, para no tener una frecuencia que pudiera llevar a que entre en resonancia la estructura del puente; el Puente del Milenio, de Norman Foster, sobre el río Támesis, el 10 de junio del 2000, el puente de Volgogrado en 2010. y numerosos

ejemplos que se han presentado y posiblemente se seguirán presentando; de hecho, los ingenieros conocen muy bien el fenómeno y hacen todo lo posible para aminorar los efectos y evitar desastres.

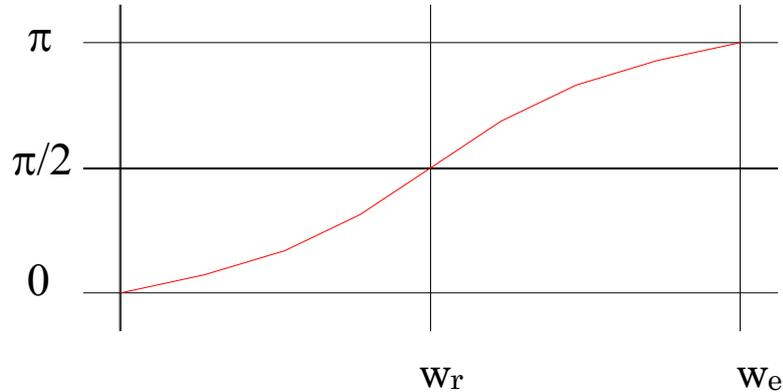


Figura 4.41. La gráfica muestra como varía la tangente con el valor de la frecuencia excitatriz.

De la Figura 4.41, se muestra la variación del ángulo con la frecuencia, cálculo que se puede hacer si se reemplaza la frecuencia de resonancia, en el cociente de los catetos según la figura 4.38 que corresponde a la tangente.; esto es:  $Tan\theta_R = \frac{2\mu w_e}{w_0^2 - w_e^2}$ . Pero como la frecuencia excitatriz cuando se presenta la resonancia es:  $w_e = \sqrt{w_0^2 - 2\mu^2}$ , entonces, al reemplazarla, se tiene (ver figura 4.41):

$$\theta_R = \tan^{-1} \frac{2\mu\sqrt{w_0^2 - 2\mu^2}}{w_0^2 - w_0^2 + 2\mu^2}$$

$$\theta_R = \tan^{-1} \frac{\sqrt{w_0^2 - 2\mu^2}}{\mu} \quad (4.11.9).$$

### Energía disipada en el movimiento forzado

Como en todos los movimientos analizados, es importante ver el comportamiento de la energía que se desarrolla en el movimiento forzado, sobre todo cuando se da el fenómeno de resonancia de la amplitud. Así que, a partir de la ecuación fundamental del movimiento forzado, se tiene:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + v \frac{dx}{dt} + kx = F_e(t) \quad (4.11.10).$$

Como la potencia se define como  $P = F_e(t) \cdot \frac{dx}{dt}$ , entonces, al combinar estas dos ecuaciones, se obtiene:

$$\left[ m \frac{d^2x}{dt^2} + v \frac{dx}{dt} + kx \right] \frac{dx}{dt} = F_e(t) \cdot \frac{dx}{dt}.$$

De tal modo que, al operar, se tiene:

$$\left[ m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + kx \frac{dx}{dt} \right] + v \left[ \frac{dx}{dt} \right]^2 = F_e(t) \cdot \frac{dx}{dt} \quad (4.11.11).$$

Ahora bien, como la energía cinética y potencial se pueden escribir como:

$E_k = \frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2$  y  $U = \frac{1}{2}kx^2$ , entonces las derivadas de estas funciones se pueden escribir así:  $\dot{E}_k = m \frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2}$  y  $\dot{U} = kx \frac{dx}{dt}$ . Al observar el contenido del paréntesis, se puede notar que lo inscrito en él resulta justamente las derivadas de la energía cinética y potencial. Así que:  $[\dot{E}_k + \dot{U}] + v \left[ \frac{dx}{dt} \right]^2 = P$ . Esta expresión se puede escribir así:  $\frac{d(E_k+U)}{dt} + v \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = P$ .

Por último, al condensar un poco, se tiene:

$$\frac{dE_t}{dt} + v \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = P \quad (4.11.12).$$

Esto muestra la potencia suministrada al sistema. Por otra parte, al considerar la solución particular  $x = A \cos(\omega_e t + \alpha - \theta)$ , la velocidad será  $v = -A\omega_e \text{Sen}(\omega_e t + \alpha - \theta)$ .

Al tomar en cuenta que  $k = m\omega_0^2$ , la energía total mecánica es  $E_T = E_k + U$  o que se puede escribir como:  $E_T = \frac{1}{2}mA^2\omega_e^2 \text{Sen}^2(\omega_e t + \alpha - \theta) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \text{Cos}^2(\omega_e t + \alpha - \theta)$

$$E_T = \frac{1}{2}mA^2[\omega_e^2 \text{Sen}^2(\omega_e t + \alpha - \theta) + \omega_0^2 \text{Cos}^2(\omega_e t + \alpha - \theta)] \quad (4.11.13).$$

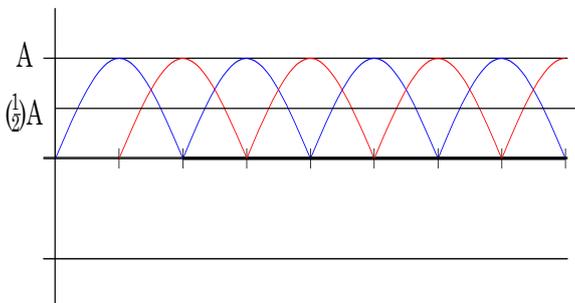


Figura 4.42.

Las funciones seno y coseno, al elevarlas al cuadrado, se invierte la parte negativa y queda todo

De acuerdo con la ecuación (4.11.13), se puede ver, en la Figura 4.42, que las funciones armónicas de seno y coseno, al elevarlas al cuadrado, la parte negativa se torna positiva y, por tanto, todo queda en la parte positiva del plano de forma alternante; la unidad de la función armónica determina el valor de la amplitud, pero hay espacios que quedan por fuera de la función, así que lo indicado es el promedio de la amplitud; además, la suma de las funciones armónicas seno y coseno, cuando se han elevado al cuadrado, es igual a la unidad; por tanto, el valor medio de la energía se puede expresar así:

$$\langle E_T \rangle = \frac{1}{2} mA^2 \left[ \frac{1}{2} w_e^2 + \frac{1}{2} w_0^2 \right] \quad (4.11.14).$$

Al factorizar, se tiene:  $\langle E_T \rangle = \frac{1}{4} mA^2 (w_e^2 + w_0^2)$ . Este es un valor constante para cualquier instante. Ahora bien, como la potencia se define de acuerdo a la expresión 4.11.12, el valor medio se expresa así:

$$\left\langle \frac{dE_T}{dt} \right\rangle + \left\langle v \left[ \frac{dx}{dt} \right]^2 \right\rangle = \langle P \rangle.$$

Como se había dicho que la energía total permanece constante, entonces su derivada será igual a cero, así:

$$\left\langle \frac{dE_T}{dt} \right\rangle = 0.$$

Por tanto, la potencia será únicamente:

$$\langle P \rangle = \left\langle v \left[ \frac{dx}{dt} \right]^2 \right\rangle.$$

Esto quiere decir que la energía por unidad de tiempo (potencia) suministrada al sistema, se consume o disipa en forma de energía por unidad del tiempo de rozamiento.

Como  $\frac{dx}{dt} = Aw_e \text{Sen}(w_e t + \alpha - \theta)$ , entonces:

$$\langle P \rangle = \langle v A^2 w_e^2 \text{Sen}^2(w_e t + \alpha - \theta) \rangle.$$

Según lo analizado en la gráfica, el valor medio de la unidad (máximo valor de la función armónica seno) es:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} v A^2 w_e^2 \quad (4.11.15).$$

Ahora bien, como la amplitud del movimiento forzado es:  $A = \frac{F_0}{m\sqrt{(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2}}$ , al remplazar en el valor medio de la potencia, se obtiene:

$$\langle P \rangle = \frac{v w_e^2 F_0^2}{2m^2((w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2)}.$$

Como  $v = 2m\mu$ , al remplazarlo, se tiene:

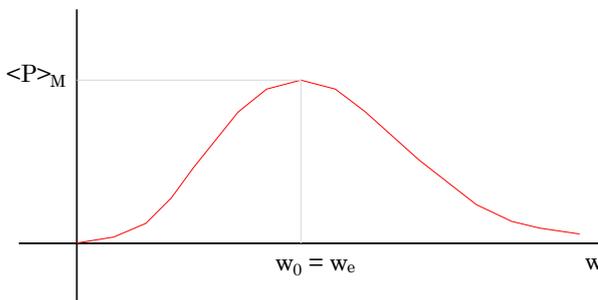
$$\langle P \rangle = \frac{\mu w_e^2 F_0^2}{m[(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2]} \quad (4.11.16).$$

Una vez más, se puede observar que la potencia depende del valor que tome la frecuencia excitatriz, por lo que se puede preguntar: ¿en qué valor de  $w_e$  se tiene el máximo valor de la potencia? Es decir:  $\frac{d\langle P \rangle}{dw_e} = 0$  esto es la deriva de un cociente para encontrar un máximo. Esto es:

$$\frac{d\langle P \rangle}{dw_e} = \frac{2\mu w_e F_0^2 m [(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2] - \mu w_e^2 F_0^2 m [2(w_0^2 - w_e^2)(-2w_e) + 8\mu^2 w_e]}{m^2 [(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2]^2} = 0.$$

Así que, al desarrollar e igualar a cero, al final se tiene:

$$w_e = w_0 \quad (4.11.17).$$



Este resultado quiere decir que, cuando se tiene la igualdad de las frecuencias, se tiene la máxima energía disipada; es decir, resonancia de la energía.

Ahora bien, si se remplaza este resultado en el valor medio de la potencia (4.11.16), se tiene:

Figura 4.43.

El pico de resonancia se da justamente cuando la frecuencia excitatriz es igual a la frecuencia natural.

$$\langle P \rangle_M = \frac{F_0^2}{4m\mu} \quad (4.11.18).$$

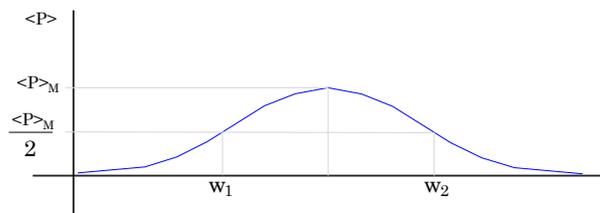


Figura 4.44.

Las frecuencias  $w_1$  y  $w_2$  tienen la misma potencia media; por tanto, determinan los extremos del ancho de banda.

### Ancho de banda

Hasta hace unas décadas era muy común tener el receptor o radio, como se conocía; sintonizar una emisora era asunto de movimientos delicados, pues se hacía girar una pequeña perilla que, a su vez, movía una pequeña aguja sobre un dial marcado con escalas de FM, AM y otras bandas; cuando la señal se acercaba a la frecuencia deseada, la emisora empezaba a escucharse de modo poco nítido hasta obtener una señal adecuada; entonces, se decía que estaba muy bien sintonizada; todo esto se realizaba de forma análoga; en algunos casos, el proceso era amplio y,

en otros, la sintonización se tornaba muy puntual, lo que implicaba que fácilmente se saliera de la frecuencia deseada y lo contrario en rangos amplios. Esto lleva a precisar lo que significa ancho de banda. Para cualquier sistema oscilante mecánico o electrónico que esté bajo la influencia de una frecuencia excitatriz, el sistema de frecuencia natural empezará poco a poco a entrar en resonancia hasta alcanzar el máximo en amplitud y en disipación de energía, de modo que este ancho lo conforman dos valores de la frecuencia excitatriz, uno mínimo y otro máximo; como se puede observar en la gráfica, el promedio del valor “medio” corta en dos ocasiones a la curva que determinan dos valores en el eje de la frecuencia excitatriz (figura 4.44) esto es:

$$\langle P \rangle_{sintonizacion} = \frac{\langle P \rangle_M}{2}.$$

Como ya se conoce el valor de la potencia máxima, entonces:

$$\langle P \rangle_{sintonizacion} = \frac{F_0^2}{8m\mu}.$$

Para encontrar los valores de la frecuencia excitatriz, se reemplaza el valor medio de la de la potencia, esto es:

$$\frac{\mu w_e F_0^2}{m[(w_0^2 - w_e^2)^2 + 4\mu^2 w_e^2]} = \frac{F_0^2}{8m\mu}.$$

Al operar, se tiene:

$$w_0^2 - w_e^2 = \pm 2\mu w_e \quad (4.11.18).$$

Si se analiza este resultado, se puede observar que, si el valor del coeficiente de amortiguamiento es pequeño, el rango de frecuencias se torna muy estrecho y lo contrario para valores grandes; esto se reflejaría en la gráfica y la torna más esbelta y, en caso contrario, más alisada; en esto, al tratarse de asuntos de sintonía, se diría que, en el caso de tener una gráfica esbelta, el rango de sintonía es mucho más estrecho.

De modo que los valores de la frecuencia excitatriz serán:  $w_e^2 = w_0^2 \pm 2\mu w_0$  Al llevarlo a un binomio, se puede escribir como:  $w_e^2 = w_0^2 \pm 2\mu w_0 + \mu^2 - \mu^2$ ; debido a que el coeficiente de amortiguamiento es pequeño, se puede despreciar  $-\mu^2$ ; entonces, se tiene:  $w_e^2 = w_0^2 \pm 2\mu w_0 + \mu^2$ ; por tanto, se puede escribir como  $w_e^2 = (w_0 \pm \mu)^2$ . De modo que los valores de la frecuencia son:

$$w_0 - \mu \leq w_e \leq w_0 + \mu \quad (4.11.19).$$

Es decir,  $w_1 = w_0 - \mu$  y  $w_2 = w_0 + \mu$ .

Así, la distancia entre  $w_1$  y  $w_2$  corresponde al ancho de banda igual a  $2\mu$ . De modo que, cuando se trata de sintonizar una radio, no es más que buscar la frecuencia con la que va a resonar; este mismo concepto sirve para producir resonancias mecánicas, con lo que se puede realizar envejecimiento precoz y calcular la vida útil de autos y demás.



Figura 4.45.

Equipo de última tecnología para su momento: años 1980.

Fuente: <https://n9.cl/86o5e>

En la Figura 4.45, se puede observar un radio de tipo analógico, en el que se puede ver el dial o escala, tanto en FM (frecuencia modulada) como en AM (amplitud modulada); para sintonizar una emisora se debía tener un poco de paciencia, que empezaba por llevar a que girara una de las perillas para mover el indicador o aguja sobre el dial; cuando se acercaba a la frecuencia deseada, empezaba la emoción ya era posible escuchar el programa deseado y solo cuando se llegaba al valor preciso de la frecuencia, la sintonización había concluido y la emisora se podía oír de forma muy clara. De igual modo, si se pasaba del valor, la emisora empezaba a perder sintonía; en general, este tipo de equipos venía calibrado de tal manera que la sintonía empezaba justamente en  $f_0 - \mu$ , y desaparecía cuando  $f_0 + \mu$ .

# Capítulo 5



## Movimiento ondulatorio



## MOVIMIENTO ONDULATORIO

Fenómenos como, el sonido, los sismos, la transmisión de la radio y televisión llevan a ver cómo la energía puede propagarse sin necesidad de que hubiera transporte de materia; en el caso de los sismos, el movimiento de la corteza terrestre puede producir daños a gran distancia del hipocentro o punto donde se ocasiona el movimiento sísmico. En el sonido, la fuente puede estar a cientos de metros del que oye, como es el caso del despegue o aterrizaje de una aeronave o simplemente cuando una persona oye cualquier fuente sonora; en 1977, la NASA envió dos sondas al espacio: Voyager 2 y Voyager 1; a la fecha de escribir este libro, ya son 42 años del hecho; por supuesto que hace varios años las sondas salieron del espacio interplanetario, es decir están más allá del último planeta, Plutón. A pesar de estar con la tecnología de los 70's, su sistema de telecomunicación aun envía señales y, de igual forma, recibe órdenes; sin embargo, el sistema digital de cualquier celular inteligente es 7500 veces más rápido, las señales que envía o recibe la nave, lo hace a mas de 25.000 millones de kilómetros de la tierra, por lo que necesita algo más de 24 horas para llegar la señal a la tierra; entonces, la pregunta es: ¿qué viaja?, ¿de qué se hacen las señales?

En 1860, en el Reino Unido, James Clerk Maxwell proponía al mundo una nueva teoría, que denominó electromagnetismo; desde entonces los científicos se dedicaron a buscar señales electromagnéticas de forma experimental; no habían pasado 20 años cuando, en 1888, Heinrich Rudolf Hertz, físico alemán, descubría cómo generar y detectar las ondas electromagnéticas; en adelante, la humanidad entendería que vive en un universo ondulatorio, pues el sol es la mayor fuente electromagnética que ha posibilitado el origen de la vida en la tierra, con una energía formada por campos eléctrico y magnético que viaja por el espacio a  $300.000 \text{ km/s}$  (velocidad de la luz).

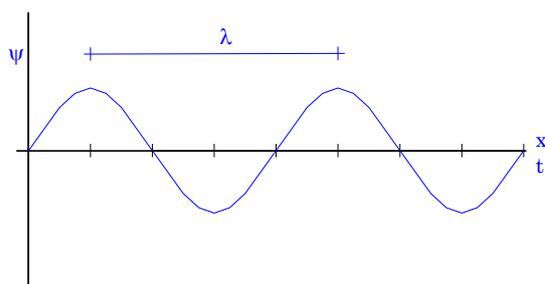


Figura 5.1.  
Representación geométrica de una onda.

Así que la fenomenología que se va a tratar es tan cotidiana que parece tan natural y es menester estudiar. Para iniciar, es necesario conocer algunos aspectos básicos que permitan ahondar en el mundo de las ondas; si se recuerda la fotografía de las ondas formadas en la superficie del agua y establece un corte para poder mirar su perfil, se puede ver en la representación geométrica de la Figura 5.1.

La representación geométrica resulta similar al movimiento de una cuerda, en la cual en uno de los extremos se aplica un movimiento oscilatorio de modo armónico; lo primero que se observa es cómo la perturbación viaja sobre la superficie del agua

o a lo largo de la cuerda, a la que se conoce como velocidad de propagación, que se o puede denotar como:

$$v = \frac{\lambda}{T} \quad (5.1),$$

donde la distancia recorrida por la perturbación en un periodo se conoce con el nombre de longitud de onda,  $\lambda$ ; a partir de esta expresión se puede combinar con la frecuencia natural y angular así:

$$v = f\lambda, \quad (5.2).$$

También  $v = \frac{w\lambda}{2\pi}$ ; entre las velocidades de propagación ondulatoria más importantes, se tiene (ver tabla 5.1):

Tabla 5.1.

**Velocidades de propagación de ondas de diferente tipo.**

ÍTEM	TIPO	VALOR
1	Velocidad de la luz (onda electromagnética)	299.972 km/s
2	Ondas de radio y televisión (o. electromagnética)	299.972 km/s
3	Ondas de sonido en sólidos metálicos	6100 m/s
4	Ondas de sonido en el agua	1500 m/s
5	Ondas sísmicas en roca sólida	1450 m/s
6	Ondas de sonido en el aire	340 m/s
7	Ondas transversales en la superficie del agua	0,25 m/s

## 5.1 Clasificación de ondas

En el mundo de las ondas, en lo fundamental, se pueden clasificar dos tipos de ondas:

Ondas mecánicas, denominadas también ondas elásticas; lo que quiere decir que son ondas que necesitan de un medio elástico, que puede ser sólido, líquido, gaseoso y plasma, entre otros; todos estos medios se caracterizan por tener un módulo de elasticidad lineal, de presión, de corte, de torsión, por lo que se puede concluir que, para que existan ondas mecánicas, necesariamente debe existir un medio elástico.

Ondas electromagnéticas. La principal característica de este tipo de ondas es que no necesitan de un medio elástico y, por otra parte, en el sistema de referencia físico son las más veloces:  $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

En adelante se estudiarán de forma muy general las ondas mecánicas.

## 5.2 Clasificación de las ondas mecánicas

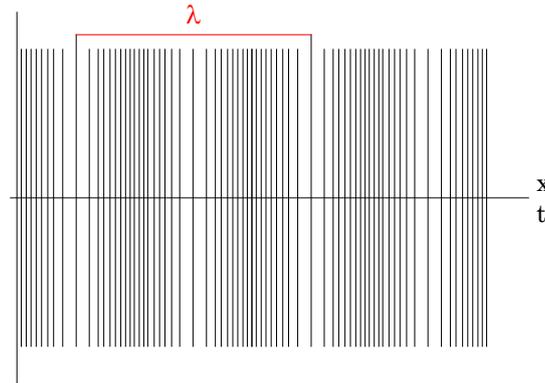


Figura 5.2.  
Representación geométrica de un tren de ondas longitudinales.

Dado que este tipo de ondas necesita de medios elásticos, es pertinente recordar que cada medio se caracteriza por su módulo de elasticidad; en este sentido, las ondas se clasifican en:

### Ondas longitudinales.

Son ondas que necesitan de un medio de elasticidad lineal, cuyo módulo es el de Young,  $Y = -P/\lambda$ . Este tipo de deformación permite que la oscilación o elongación  $\phi$  de las partículas sea colineal con la dirección de propagación. Por otra parte, el módulo de Young forma parte de los demás módulos de elasticidad, lo que conlleva que el fenómeno de deformación lineal se va a presentar en las deformaciones de sólidos, líquidos y gases; esto quiere decir que las ondas longitudinales se pueden formar en estos medios. En general, la representación geométrica es como se puede ver en la Figura 5.2; en el caso del sonido, la onda también es longitudinal; en este caso, el módulo de Young se reemplaza por el de presión.

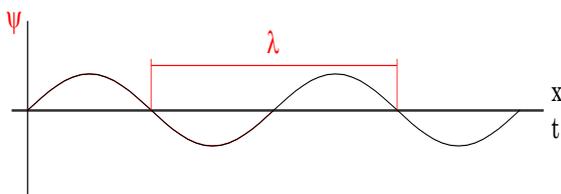


Figura 5.3.  
Representación geométrica de un tren de ondas transversales.

### Ondas transversales.

Son ondas que necesitan de un medio elástico de corte o cizallamiento, por lo que también se denominan ondas de corte, cuyo módulo es el de Coulomb o corte,  $\mu = P/\phi$ ; como la vibración o elongación  $\phi$  se realiza perpendicular a la dirección de propagación, reciben el nombre de transversales (figura 5.3).

En este grupo, también están las ondas de torsión; se debe recordar que el módulo de torsión depende del módulo de corte; además, los medios que permiten el cizallado o corte son únicamente los sólidos; por tanto, las ondas transversales y de torsión solo existen en medios sólidos.

En sismología, existe una clasificación de ondas que se conoce como: ondas tipo P (principal), que corresponden a ondas de presión o longitudinales, y ondas tipo S (secundarias), aquellas ondas de corte o transversales, y las ondas T o Love, ondas de superficie y, en general, las causantes del movimiento sísmico que se siente o mueve los objetos y edificaciones.

## 5.3 Elementos y características de las ondas

Es conveniente conocer algunos términos que permitan estar en el contexto del mundo de las ondas, así se familiariza y resulta más claro y entendible cuando se habla en un lenguaje científico y técnico.



Figura 5.4.  
Frentes de ondas circulares generados en la superficie del agua.  
Fuente: <https://n9.cl/hsg9b>

### Frente de onda

Hasta ahora solo se han visto ondas en una dimensión, pero en la naturaleza se encuentran también en dos dimensiones, como es el caso de las ondas formadas en la superficie del agua, o en tres dimensiones, como una explosión, un grito o, en general, la propagación que establece el sonido cuando sale de una fuente puntiforme.

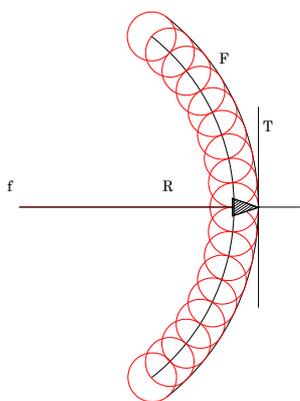
Para que se genere una onda, es necesario que hubiera al menos un punto vibrante en un medio elástico; si este medio tiene dimensiones de largo y ancho (una membrana), lo más probable es que se generen ondas alrededor del punto vibrante; si el medio elástico es homogéneo, la perturbación viajará de forma radial para formar anillos concéntricos, como lo que ocurre al perturbar la superficie del agua; en este caso, se dirá que el medio es isótropo (isos: igual; tropos: velocidad), de modo

que la perturbación puntual ha generado frentes de ondas circulares, como se puede ver en la Figura 5.4, cuya característica fundamental es que todos los puntos que conforman el frente de onda oscilan en fase.

### Principio de Huygens

Lo enunció Christian Huygens (1629-1695), un físico holandés. El frente de onda es el lugar geométrico donde cada punto es un nuevo generador de ondas circulares que oscilan en fase y cuya envolvente forma el frente de onda (figura 5.5).

En el caso de frentes de onda en tres dimensiones, los generadores de onda puntiforme formarán frentes de ondas esféricas, si el medio es isótropo; en el caso de tener generadores de ondas lineales, como las columnas de sonido de las grandes orquestas conformadas por varios parlantes, formarán frentes de onda cilíndricos o planos, en algunos casos especiales.



**Figura 5.5.** Representación de un frente de onda circular: F, frente de onda; R, rayo de onda; T, tangente al frente de onda; f, punto generador y c, frente de onda primigenia.

### Rayo de onda

Para representar la dirección de la propagación, se hará por medio de un radio vector, que se llamará rayo de onda, cuya propiedad fundamental es ser normal a la tangente del frente de onda.

### Pulso y tren de ondas

De acuerdo con el generador de ondas o fuente de ondas, se puede definir:

### Pulso

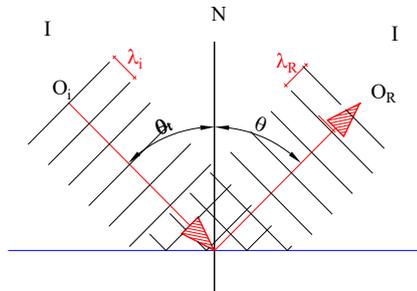
Como su nombre lo indica, corresponde a la única acción que puede ser mecánica, que genera una perturbación en un medio elástico, la que puede viajar y llevar el movimiento a los puntos del medio elástico con igual característica del primero.

### Tren de ondas

Cuando el generador de ondas establece más de un pulso, entonces se forma un tren de ondas, como se puede ver en el caso de las ondas sobre la superficie del agua: se verán varios círculos concéntricos, que se mueven de adentro hacia afuera, uno detrás de otro. Puesto que depende de la forma como oscile el generador, así serán los trenes de onda; si lo hace con MAS, el tren de ondas será armónico y cada partícula del frente de onda oscilará con MAS.

### Propiedades de las ondas

En general, las ondas tienen unas propiedades, que es importante conocer de forma básica, para avanzar en el lenguaje de las ondas.



Representación geométrica de la reflexión de ondas.

### Reflexión de ondas.

La onda tiene la propiedad de rebotar en superficies de medios en los cuales las ondas no pueden penetrar o lo hacen parcialmente. En la Figura 5.6, se puede observar cómo la onda incidente  $O_i$ , formada por un tren de ondas con frente de onda plano, al interactuar con la superficie  $S$ , se refleja y origina un tren de ondas reflejadas, con frente de onda plano; como cada frente de onda asocia un radio vector perpendicular al frente de onda, al que se le ha llamado rayo de onda, el ángulo formado entre el rayo incidente y la normal a la superficie es  $\theta_i$ , llamado ángulo de incidencia, es igual al ángulo formado entre la normal y el rayo reflejado  $\theta_R$ , llamado ángulo de reflexión. Por otra parte, se observa que la longitud de la onda incidente  $\lambda_i$  es igual a la longitud de onda reflejada  $\lambda_R$ , lo que significa que la velocidad de la onda que incide es igual a la que se refleja; de acuerdo con 5.1, se tiene:  $v_i = \lambda_i f = \lambda_R f = v_R$ .

### Refracción de ondas.

Las ondas tienen la propiedad de pasar de un medio a otro a través de la superficie que limita los dos medios; en la gráfica, se puede observar que el tren de ondas incidente  $O_i$  interactúa con la superficie  $s$  y, debido a la propiedad del medio II, de permitir que la onda penetre, como medio refractivo que es, donde la dirección del rayo incidente  $R_i$  cambia de dirección para formar el rayo refractado  $R_r$  en que, dadas las características del medio refringente respecto al medio incidente, la dirección del rayo se acerca a la normal. Como se puede ver en la Figura 5.7, el ángulo incidente formado entre el rayo incidente y la normal  $\theta_i$  es mayor que el ángulo de refracción formado entre el rayo refractado y la normal  $\theta_r$ .

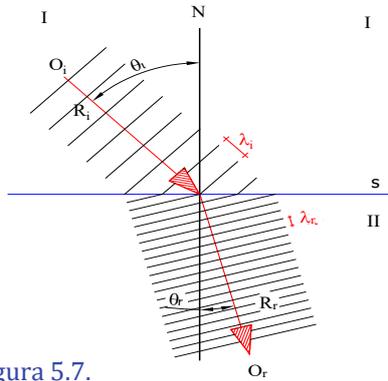


Figura 5.7. Representación geométrica refracción de ondas.

Por otra parte, se observa en la construcción geométrica que la onda, al pasar al medio II, cambia de longitud de onda; si la frecuencia permanece constante, entonces será la velocidad la que cambia; de acuerdo con la ecuación 5.1, se tiene:  $v_1 = \lambda_1 f$  y  $v_2 = \lambda_2 f$ ; por tanto,  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2}$ . De modo que la velocidad en el medio 1 es mayor que en el 2, por lo que se puede asegurar:  $\frac{v_1}{v_2} \geq 1$ , relación que resulta igual entre los senos de los ángulos incidente y refractado; esto es:  $\frac{\text{sen}\theta_i}{\text{sen}\theta_r} = \frac{v_i}{v_r} = n$  (5.1.1), donde la constante se llama **Índice de refracción**.

### Difracción de ondas

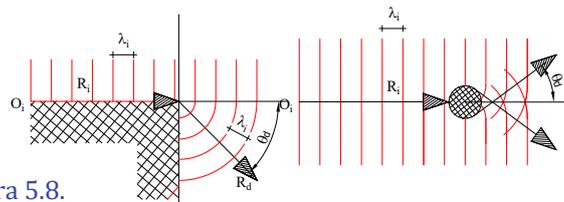


Figura 5.8. Representación geométrica de difracción de ondas por una esquina o borde y por un objeto de tamaño comparable con la longitud de onda.

La difracción es una confirmación del principio de Huygens, en virtud del cual las ondas pueden doblar esquinas y bordear obstáculos. En el primer caso de la figura 5.8, la onda, al salvar la esquina, justo allí ya tiene un punto generador de ondas y, por tanto, a partir de allí se formarán ondas con frentes de onda circulares, según la dirección de  $R_d$ . En el caso del obstáculo, la onda, al terminar de bordear el obstáculo, lleva a que en adelante empiecen a generarse nuevas ondas, que terminan por envolver al objeto y, luego, superponerse unas a otras para originar una nueva propiedad de superposición: la “interferencia”.

### Interferencia de ondas

En la superposición de ondas, se presentan dos casos especiales. Para verlo de forma general, considérense las ondas que se presentan en la superficie del agua en reposo. Cuando hay dos vibradores oscilando en fase o a la vez, cada uno genera frentes de ondas circulares; cuando estos frentes se encuentran, se presenta una superposición de ondas; en este caso, como los trenes de onda tienen la misma longitud de ondas, es decir están oscilando en fase, dado que la velocidad de propagación de las ondas en el agua es constante en cualquier dirección, además como los osciladores tienen la misma amplitud, entonces las amplitudes junto a los

generadores también, como se puede ver en la Figura 5.9, los generadores de onda puntiformes señalados como A y B y los frentes de onda señalados como C, D.

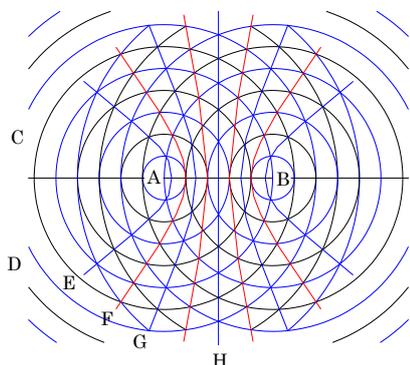


Figura 5.9. Representación de interferencia de ondas.

Ahora bien, los frentes de onda formados por líneas continuas corresponden a crestas y los punteados corresponden a valles, de modo que hay intersecciones de líneas continuas y líneas punteadas, es decir crestas y valles; estas intersecciones se señalan por las líneas de color rojo, F; en esta intersección de un valle con una cresta se obtiene una superposición nula; o sea, por una parte, la cresta trata de levantar la película de agua y el valle de sumergirla; por el hecho de sumarse con igual fase e igual amplitud pero sentido contrario, el

resultado es nulo y, en este caso, la superficie del agua que le corresponde a estos puntos no vibra y se constituye en una interferencia destructiva o negativa, mientras que al encontrarse dos crestas o dos valles el resultado es lo contrario de la superposición anterior; en este caso, se suman y de esta manera se tiene una interferencia constructiva o positiva. Estos puntos corresponden a la línea continúa señalada como: E, G y H.

### Polarización de ondas

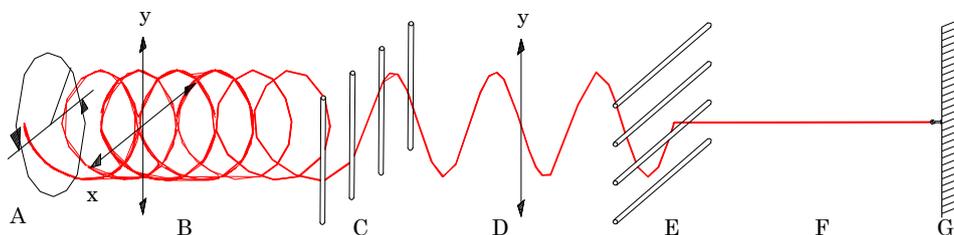


Figura 5.10. Representación de la polarización de ondas transversales que se logran formar con una cuerda o lazo.

Característica típica de las ondas transversales que se pueden ver y estudiar con lujo de detalles cuando se analicen las ondas electromagnéticas; por ahora, se verá lo más general de esta característica. Para ello, considérese el modelo de ondas formadas en una cuerda ligeramente tensa, la misma con la que se juega a la culebrilla o saltar.

En la Figura 5.10, se pueden observar tres fases: en A se genera el movimiento de rotación, lo que permite que la cuerda también gire y lo que ocurre en la fase B, al pasar por la rejilla C, la cuerda no tiene otra opción que oscilar según el patrón de la rejilla que, en este caso, será oscilar verticalmente; a la rejilla C como tal se la denomina polarizador o patrón, que ha permitido oscilar en una sola dirección y

evitar que la cuerda oscile en otras direcciones; fase D, la rejilla E está en la dirección horizontal, lo que lleva a que la onda prácticamente se anule, por no tener la posibilidad de oscilar verticalmente; de modo que, al tener una onda polarizada, se la puede anular al colocarle un polarizador de forma ortogonal. En general, se la conoce con el nombre de analizador, muy utilizado en el análisis de radiaciones de espectros de emisión o absorción, bien sea para caracterizar materiales o determinar tipos de concentración de sustancias desde uso industrial, médico y demás.

### Espectro electromagnético

El estudio de las ondas electromagnéticas (figura 5.11) requiere atención especial, tanto que se dan cursos de electromagnetismo básico y avanzado, por tanto, en este curso solo se hará una leve referencia y de manera muy general

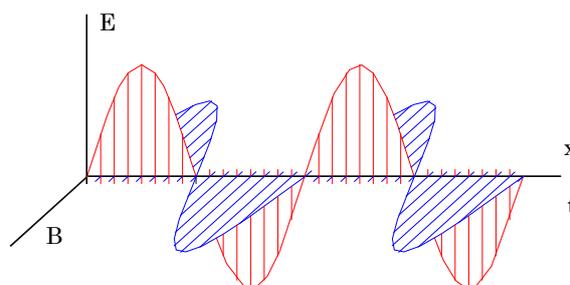


Figura 5.11. Representación de la onda electromagnética: en el plano  $zy$  el campo eléctrico y en el plano  $xy$  el campo magnético.

En 1876, el escocés James Clerk Maxwell logró unificar matemáticamente en una sola teoría los estudios realizados, hasta ese entonces, por científicos, sobre la electricidad, el magnetismo, la luz y el calor, como manifestaciones distintas. Al resultado de este estudio, considerado por los científicos de todos los tiempos como algo extraordinario, se le llamó electromagnetismo, como la conjunción entre el campo magnético y eléctrico, con lo que se pudo explicar la naturaleza de la electricidad y mucho de sus aplicaciones, y, como consecuencia de todo este análisis matemático, fue la predicción sobre la existencia de ondas electromagnéticas, que no necesitan de medios elásticos para su propagación; por tanto, tienen la principal propiedad de viajar en el vacío a la velocidad de la luz. Todo esto ocurría cuando aún se creía en la existencia del éter y no se había definido el valor exacto de la velocidad de la luz, pero por ahora se confirma que la luz tiene una naturaleza ondulatoria electromagnética, al contrario de lo que afirmaba Newton, y resurgen las teorías de Christian Huygens, Francesco María Grimaldi y Thomas Young, entre otros.

Por otra parte, la palabra spectrum proviene del latín y se entiende como simulacro, aparición, mirar. Parece que desde los tiempos del experimento de Isaac Newton (1642-1727) sobre la descomposición de la luz se acuñó el término de espectro luminoso a la descomposición de la luz del sol en siete colores. Sin embargo, no fue sino hasta 1820 cuando se retomaron los experimentos de la descomposición de la luz por William Hyde Wollaston, al presentar una serie de experimentos sobre espectroscopia, que se han multiplicado hasta hoy; en 1814, Joseph von Fraunhofer publicó los resultados de sus cuidadosas y detalladas observaciones del espectro solar, en los que mostraba 574 líneas oscuras. En adelante, se presentó una serie de descubrimientos que enriquecían cada vez más a la nascente espectrometría.

Tabla 5.2.

**Banda, longitud de onda y frecuencia.**

<b>Banda</b>	<b>Longitud de onda (m)</b>	<b>Frecuencia (Hz)</b>
Onda de radio muy larga	$10 \times 10^3$	$30 \times 10^3$
Onda de radio larga	$10 \times 10^3$	$30 \times 10^3$
Onda de radio media	650	$4,61 \times 10^5$
Onda de radio corta	180	$1,67 \times 10^6$
Onda de radio muy corta	10	$3 \times 10^7$
Onda de radio de ultra corta	1	$3 \times 10^8$
Microondas	$10^{-2}$	$3 \times 10^{10}$
Infrarrojo lejano	$1 \times 10^{-3}$	$3 \times 10^{11}$
Infrarrojo medio	$50 \times 10^{-6}$	$6 \times 10^{12}$
Infrarrojo cercano	$2,5 \times 10^{-6}$	$1,2 \times 10^{14}$
Espectro visible	$780 \times 10^{-9}$	$3,8 \times 10^{14}$
Ultravioleta cercano	$380 \times 10^{-9}$	$7,8 \times 10^{14}$
Ultravioleta extremo	$20 \times 10^{-10}$	$1,5 \times 10^{15}$
Rayos X	$1,0 \times 10^{-10}$	$3 \times 10^{16}$
Rayos gamma	$10 \times 10^{-12}$	$3 \times 10^{19}$

Con la implementación de la mecánica cuántica y la explicación sobre la naturaleza del átomo por parte de Niels Bohr y, luego, los ajustes realizados por James Chadwick, en 1936, se pudo explicar el misterioso espectro de las estrellas, con lo cual quedó demostrado que cada elemento químico produce su propio espectro, codificado en series de líneas de colores; en adelante, esta sería como la huella dactilar de cada elemento y, por ende, quedó develada la composición química de las estrellas.

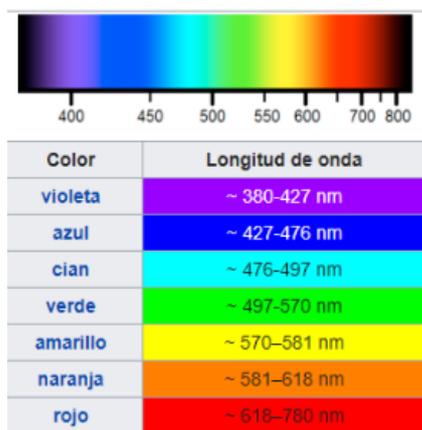


Figura 5.12.

Espectro electromagnético visible.

Fuente: <https://es.wikipedia.org/wiki/Color>

Ahora bien, solo el espectro visible corresponde a la distribución de los siete colores, como se pueden ver en la Figura 5.12, dispersión de colores que describió Newton por primera vez. Los ojos del ser humano evolucionaron ante este tipo de radiación electromagnética y, por tanto, es lo único que se ve; sin embargo, antes y después hay radiación, pero no se la puede ver; en el caso del infrarrojo, se lo puede sentir como calor, el que sale de una estufa que, en principio, es negra y con el tiempo se pone de color rojo; en el otro extremo está el ultravioleta; tampoco se lo puede ver, sin embargo, una radiación de este tipo puede quemar la córnea y la piel, como ocurre con las clásicas quemaduras de piel, cuando se está en zona de alta montaña, o lo que sienten los trabajadores de la soldadura eléctrica.

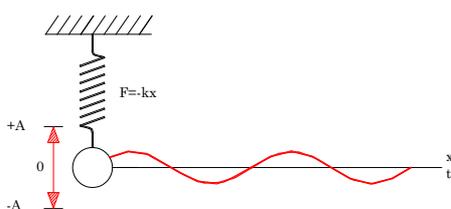
Ahora bien, existen seres vivos que pueden ver por fuera del espectro visible para el ser humano, como es el caso de algunos mamíferos, como los renos, que logran ver un rango del ultravioleta y gran cantidad de insectos tienen esta propiedad; en el campo de los infrarrojos, las serpientes son especialistas en este tipo de visión; la naturaleza las ha dotado de ojos para infrarrojos y ojos para el espectro visible.

## 5.4 Ecuación de onda

Aún en algunas estaciones de bomberos hacen sonar la sirena según ciertos códigos, al mejor estilo de Morse, con la que se advierte el tipo de emergencia; los bomberos que viven alrededor de la estación y, otros sin importar la distancia, han recibido el mismo mensaje; por tanto, acudirán a la estación preparados mentalmente para afrontar la emergencia.

Se pregunta ahora: ¿cómo llegó el mensaje sin distorsión alguna a los oídos de los bomberos? De igual forma, está la comunicación a través del aire, fenómeno con el que el hombre evolucionó y, por tanto, ha sido parte de la cotidianidad.

Para que se pudiera desarrollar un modelo matemático que muestre cómo se propaga la señal, considérese inicialmente el MAS de una masa que se suspende de un resorte y oscila libremente, como se ve en la Figura 5.13; el movimiento oscilatorio se propaga por la cuerda de tal forma que en un punto “p” cualquiera, que se encuentra en la cuerda a una distancia  $x$  de la masa, recibirá la perturbación  $t$  segundos más tarde de haberse iniciado el movimiento en la masa y el movimiento ya ha avanzado una distancia  $x$ , de modo que la perturbación se medirá respecto al origen, en términos de  $x$  y de  $t$ .



**Figura 5.13.**

El movimiento oscilatorio de la esfera se transmite por la cuerda.

Por tanto, la perturbación  $\psi$ , cuya máxima elongación es la amplitud  $A$ , que se propaga a través del tiempo  $t$  y del espacio  $x$  se define como:  $\psi = f(x)$  mientras que el punto P se definiría como:  $\psi = f(x - a)$ , donde  $a$  es la distancia a la que se encuentra el punto p del origen.

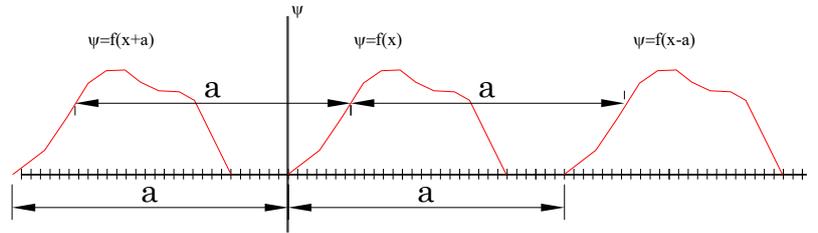


Figura 5.14.  
Traslación de la perturbación.

Entonces, si el punto se ubica en el lado negativo del eje  $x$ , se escribiría como:  $\psi = f(x + a)$ , de modo que este tipo de escritura indica que la perturbación está viajando hacia la izquierda y, si es negativo, está viajando hacia la derecha (ver figura 5.14).

Ahora bien, como  $a = vt$ , por ser una distancia donde  $v$  es la velocidad de propagación de la perturbación, entonces la función se puede escribir como:

$$\psi = f(x - vt) \quad (5.4.1).$$

Esto representa una perturbación que viaja hacia la derecha con una velocidad de propagación o fase  $v$  en el mismo sentido, si la perturbación viaja hacia la izquierda.

Para que el tratamiento fuese más sencillo, se puede establecer un cambio de variable, de tal modo que la función quede:  $\psi = f(q)$ , donde  $q = x - vt$ . Ahora bien, como la función depende de  $x$  y de  $t$ , entonces, al derivar respecto a una de estas variables, se advierte que se trata de derivada parcial. Así:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{df}{dq} \frac{\partial q}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial q}{\partial x} = 1.$$

Ahora se puede obtener la segunda derivada:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dq^2} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \frac{df}{dq}, \text{ pero } \frac{\partial q}{\partial x} = 1,$$

de modo que una segunda derivada es “cero”.

Por tanto:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{dq^2} \quad (5.4.2).$$

Lo mismo con respecto al tiempo:

$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{df}{dq} \frac{\partial q}{\partial t}$ ; como  $\frac{\partial q}{\partial t} = v$ , por tanto, queda:  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{df}{dq} v$ , donde  $v$  es la velocidad de propagación y es constante para medios isótropos: entonces, para obtener la segunda derivada, será:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{dq^2} v \cdot v + \frac{dv}{dt} \frac{df}{dq}$$

Como ya se dijo, la velocidad es constante; por tanto:  $\frac{dv}{dt} = 0$ .

De modo que se tiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{d^2 f}{dq^2} v^2 \quad (5.4.3).$$

Al combinar las dos ecuaciones 5.2.2 y 5.2.3, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.4.4).$$

Y la ecuación (5.4.4) se conoce como ecuación de onda. Ahora bien, cabe preguntarse: ¿qué función matemática satisface a la ecuación? La respuesta a esta pregunta es la función de onda, o función solución a la ecuación de onda. Entre tantas funciones de onda, la función armónica es una de las más clásicas:

$$\psi = \psi_0 \text{Sen}(wt - kx) \quad (5.4.5),$$

donde:

$\psi_0$ : amplitud de la oscilación

$w$ : frecuencia angular  $w = \frac{2\pi}{T}$

$k$ : número de onda, y se define como  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

Cabe comprobar si esta función satisface la ecuación (5.4.4); para ello, se haría justamente lo que señala la ecuación:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi_0 w \text{Cos}(wt - kx), \text{ segunda derivada: } \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\psi_0 w^2 \text{Sen}(wt - kx) \quad (5.4.6).$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\psi_0 k \text{Cos}(wt - kx), \text{ segunda derivada: } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -\psi_0 k^2 \text{Sen}(wt - kx) \quad (5.4.7).$$

Al remplazar (5.4.6) y (5.4.7) en (5.4.4), se tiene:

$$\psi_0 w^2 \text{Sen}(wt - kx) = v^2 \psi k^2 \text{Sen}(wt - kx) \quad (5.4.8).$$

De donde se obtiene que la velocidad de propagación es:

$$v = \frac{w}{k} \quad (5.4.9).$$

Esta relación también se puede obtener de:  $v = \frac{\lambda}{T}$ , el número de onda es:  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , y  $w = \frac{2\pi}{T}$ . Así, la expresión (5.4.8) es una identidad y, por tanto, la función de onda satisface a la ecuación de onda.

A la ecuación (5.4.4) se la puede extender a los otros dos ejes, así:  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}$  y  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$ . Como un frente de onda puede viajar en la superficie (dos dimensiones) o en el espacio abierto (tres dimensiones), entonces se puede extender las ecuaciones a las tres dimensiones a la vez; esto es:  $\psi = f(r - vt)$ . Ahora bien,  $r = f(x, y, z)$ , entonces las ecuaciones referidas a (5.4.4) se pueden escribir como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \quad \text{Dado que } r = f(x, y, z), \text{ es decir:}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \text{ entonces: } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \text{ lo que se puede escribir como:}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (5.4.10).$$

La expresión entre paréntesis corresponde al segundo orden del operador Nabla, que se simboliza  $\nabla^2$ ; de tal modo que (5.4.10) se escribe como:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (5.2.11).$$

Por último, (5.4.11) se puede escribir como  $\left( \nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \psi = 0$ ; a la expresión contenida en el paréntesis se la conoce con el nombre de operador de D'Alembert:  $\nabla^2 - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Phi$ .

De modo que la expresión de una onda en tres dimensiones, se expresa así:

$$\Phi \psi = 0 \quad (5.4.12).$$

## 5.5 Frente de onda esférico

En este campo están las ondas sonoras en espacio abierto; igualmente, las ondas electromagnéticas que salen desde una antena o las ondas luminosas desde una fuente puntiforme son esféricas si el medio es isótropo, lineal y homogéneo.

Entonces, como son ondas en tres dimensiones, se tiene:  $\psi = f(r)$ , donde  $r$  es el radio vector desde la fuente puntiforme hasta el frente de onda; de modo que:  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ; como la primera derivada de  $\psi$  es:  $\psi' = \frac{df}{dr}$ , y la segunda derivada es:  $\psi'' = \frac{d^2f}{dr^2}$ , ahora bien, respecto a las variables  $x, y, z$ , se tiene:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{\partial r}{\partial x}, \text{ pero } \frac{dr}{dx} = \frac{x}{r}, \text{ entonces: } \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{df}{dr} \frac{x}{r}.$$

La segunda derivada parcial es:  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(\frac{x}{r}\right)' \frac{df}{dr} + \frac{x}{r} \frac{d^2f}{dr^2}$ ; al resolver la derivada que indica el paréntesis y la segunda derivada de la función, se tiene:

$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \left(\frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2}\right) \frac{df}{dr} + \frac{x}{r} \frac{d^2f}{dr^2} \frac{x}{r}$ ; al final, se puede dejar en:  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{r^2 - x^2}{r^2}\right) \frac{df}{dr} + \frac{x^2}{r^2} \frac{d^2f}{dr^2}$ ; si se reemplaza lo que corresponde a:  $\psi' = \frac{df}{dr}$  y  $\psi'' = \frac{d^2f}{dr^2}$ , se tiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{r^2 - x^2}{r^2}\right) \psi' + \frac{x^2}{r^2} \psi'',$$

y de forma análoga para las variables  $y$  y  $z$ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{r^2 - y^2}{r^2}\right) \psi' + \frac{y^2}{r^2} \psi''$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{r^2 - z^2}{r^2}\right) \psi' + \frac{z^2}{r^2} \psi''$$

Ahora bien, si se suman las tres ecuaciones, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{1}{r} \left(\frac{3r^2 - r^2}{r^2}\right) \psi' + \frac{r^2}{r^2} \psi'';$$

al operar, queda:

$$\nabla^2 \psi = \frac{2}{r} \psi' + \psi''.$$

También, se puede expresar como:  $\nabla^2 \psi = \frac{2}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2}$ , resultado que, al establecer una regresión, es:  $\frac{1}{r} \frac{d^2(rf)}{dr^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(f + r \frac{df}{dr}\right) = \frac{1}{r} \frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2}$ , así que se puede escribir como:

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{d^2(rf)}{dr^2}.$$

Como se ve, en la ecuación no aparece de manera explícita el tiempo, así que esta función de onda debería satisfacer la ecuación de onda en tres dimensiones (x,y,z).

## 5.6 Energía de la onda

Supóngase que la función de onda es:  $\psi = \psi_0 \text{Sen}(wt - kx)$  (5.6.1).

Por otra parte, la energía cinética es:  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  (5.6.2); por tanto, de (5.6.1) se deduce la velocidad; esto es:  $v = \frac{d\psi}{dt} = \psi_0 w \text{Cos}(wt - kx)$ ; al remplazar en (5.6.2) la energía cinética, queda:  $E_k = \frac{1}{2}mw^2\psi_0^2 \text{Cos}^2(wt - kx)$  (5.6.3).

Por principio de conservación de la energía,  $E_T = E_k$  máxima.

Como  $E_k$  máxima se presenta cuando se tiene la máxima velocidad y esto ocurre cuando pasa por el origen, por tanto:  $E_{kMAX} = \frac{1}{2}mw^2\psi_0^2$ ; en consecuencia:

$$E_t = \frac{1}{2}mw^2\psi_0^2 \quad (5.6.4).$$

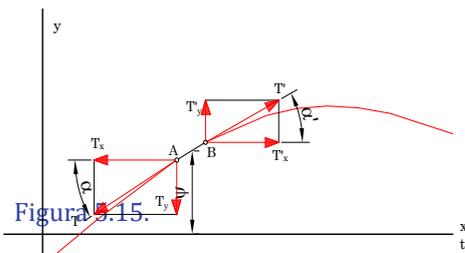
Como  $w = 2\pi f$ , entonces:  $E = \frac{1}{2}m4\pi^2 f^2 \psi_0^2$  (5.6.5).

$$E = 2m\pi^2 f^2 \psi_0^2.$$

Lo importante de esta última expresión radica en que la energía depende del cuadrado de la frecuencia y del cuadrado de la amplitud.

## 5.7 Onda transversal en una cuerda

Para analizar las ondas que se pueden formar en una cuerda semi-templada, cuando en uno de los extremos se la pone a oscilar (el juego de la culebrilla), se observa que la cuerda oscila y ese movimiento se propaga a lo largo de la cuerda hasta alcanzar el otro extremo (figura 5.15).



Tensiones que se presentan en una cuerda cuando oscila de modo

Como se sabe, la energía del movimiento oscilatorio viaja por la cuerda y la deforma de acuerdo con la sacudida que se le imprime en el extremo. Al analizar una parte de la cuerda, lo que ocurre entre los puntos A y B: en el punto A hay una tensión que tira hacia la derecha y hacia abajo, en cambio en el punto B hay una

tensión que tira hacia la derecha y hacia arriba. Ambas tensiones se descomponen en x y en y, para resultar así:

$$\begin{aligned} F_x &= FCos\alpha - FCos\alpha' \\ F_y &= FSen\alpha - FSen\alpha' \end{aligned} \quad \text{como en el movimiento ondulatorio no hay propagación de la}$$

materia, por tanto, de este sistema de ecuaciones solo queda:

$$F_y = F(Sen\alpha - Sen\alpha') \quad (5.7.1).$$

Dado que el ángulo  $\alpha$  y  $\alpha'$  son pequeños, entonces se los puede expresar en términos de tangentes, así:  $F_y = F(tan\alpha - tan\alpha')$ , pero  $tan\alpha = \frac{d\psi}{dx}$ ; por tanto, la ecuación (5.7.1) se puede escribir como:  $F_y = F\left(\frac{d\psi}{dx} - \frac{d\psi'}{dx}\right)$ , pero, al fin, se lo puede expresar como un diferencial:

$$F_y = Fd\left(\frac{d\psi}{dx}\right) \quad (5.7.2).$$

Debido a que la función de onda  $\psi$  depende del tiempo  $t$  y la posición  $x$ , se podría tener un diferencial de la fuerza respecto a  $x$ ; esto es:  $\frac{dF_y}{dx} = F \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$ ; al final, esto es:

$$\frac{dF_y}{dx} = F \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad (5.7.3).$$

Por otra parte, como la cuerda se sacude de forma transversal, donde la velocidad en los extremos llega a cero, y cuando pasa por el punto de equilibrio adquiere la máxima velocidad, por tanto, esto es un sistema acelerado:  $\sum_{i=1}^n F_i = m_s a$ .

Así que las únicas fuerzas que hay son las proyecciones en y, y la masa del sistema es la masa de la cuerda entre A y B; esto es:  $dF_y = dma$ ; por otra parte, la aceleración se escribe como:  $a = \frac{d^2\psi}{dt^2}$ ; el elemento de masa que oscila se puede escribir:  $dm = \mu dx$ , donde a  $\mu$  se la denomina densidad de masa lineal debido a que la cuerda es un elemento longilíneo; así, entonces, el elemento de fuerza queda:  $dF_y = \mu dx \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ , que se puede expresar como:

$$\frac{dF_y}{dx} = \mu \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (5.7.4).$$

Al combinar las ecuaciones (5.4.3) y (5.4.4), se tiene:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{F}{\mu} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad (5.7.5).$$

La expresión (5.4.5) es la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio transversal que se forma en una cuerda. Si se establece una analogía con la ecuación de onda general, la velocidad de propagación es:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (5.7.6).$$

Algunos autores suelen escribir la fuerza como tensión; no hay ningún problema, de modo que, entonces, la velocidad de propagación será:  $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ .

### 5.8 Ondas longitudinales en una barra

Considérese una barra metálica homogénea de longitud  $l$  y sección transversal  $S$ , a la que se golpea en un extremo, de tal modo que el golpe genera una onda mecánica debido al esfuerzo generado por el impacto que viaja a lo largo de la barra. La deformación elástica que sufre la barra de forma local en el preciso instante del golpe se transmite a la zona vecina que está delante y ésta a las que siguen, para convertirse así en una onda de tipo longitudinal. Visto de otra forma, las primeras moléculas que, debido al golpe, salieron de su estado de equilibrio, vuelven a su estado de reposo, mientras que el pulso continúa y saca de su estado de reposo a las moléculas que se encuentran a lo largo de la barra, tal como se puede ver en la Figura 5.16.

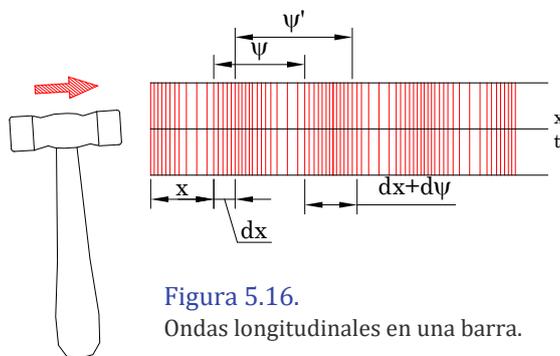


Figura 5.16. Ondas longitudinales en una barra.

En el momento del impacto las moléculas se comprimen, pero por ser una deformación elástica ellas regresan generando una zona de relajación. Así que para un mismo elemento de  $dx$  la elongación  $\psi$  varía en  $\psi'$  de tal manera que se presenta un diferencial  $d\psi$  por lo que el elemento inicial ahora es:  $dx + d\psi$ .

Como la deformación es de tipo lineal (a lo largo de la barra) entonces tiene que ver con el módulo de Young.  $Y = \frac{P}{\lambda}$  (Esfuerzo por unidad de longitud) ahora bien, como  $P = \frac{F}{S}$  y  $\lambda = \frac{\Delta l}{l}$  entonces:  $Y = \frac{F/S}{\Delta l/l}$  de tal manera que la fuerza es:

$$F = YS \frac{\Delta l}{l} \quad (5.8.1).$$

Acoplándola a la fenomenología quedará:

$$F = YS \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Si derivamos por segunda vez.

$$\frac{dF}{dx} = YS \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.8.2).$$

Por otra parte, las partículas en el momento de la oscilación pasan por puntos en donde hay  $v_{mx}$  y mínima por tanto este proceso corresponde a un sistema acelerado. esto es.

$$\sum_{i=1}^n F_i = m_s a .$$

La masa del sistema en este caso corresponde al elemento de masa que se encuentra comprometida en el impacto, si la barra se considera homogénea a toda su longitud, esto es:  $\rho = dm/dV$  a su vez  $dV = Sdx$  así que el elemento de la masa será:  $dm = \rho Sdx$  (densidad por área transversal y por un diferencial de desplazamiento) recordar también, que la aceleración de las partículas oscilantes es  $a = \frac{d^2 \psi}{dt^2}$  por otra parte como la fuerza es  $F = ma$ , entonces, un elemento de fuerza es.  $dF = \rho Sdx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$  Organizando la expresión se tiene:

$$\frac{dF}{dx} = \rho S \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (5.8.3).$$

Combinando (5.5.2) y (5.5.3) se tiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.8.4).$$

Y esta expresión se convierte en la ecuación de onda longitudinal en una barra de material sólido y homogénea. De la expresión (5.8.4) se puede deducir la velocidad de propagación.

$$v_l = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \quad (5.8.5).$$

## 5.9 Onda transversales en una barra

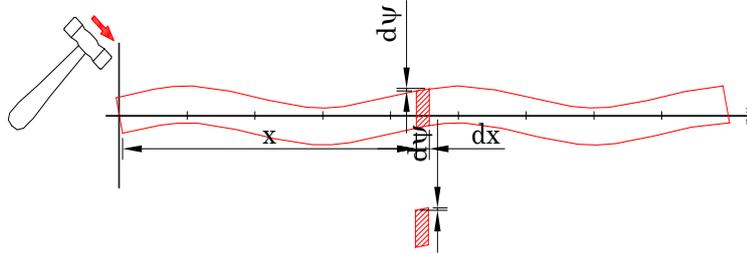


Figura 5.17.  
Onda transversal formada por el impacto del martillo sobre la barra.

Considérese una barra sólida de material homogéneo de longitud  $l$  y de sección transversal constante  $S$  a la que, en uno de sus extremos, se golpea de tal forma que el impacto fuese perpendicular al eje axial de la barra (figura 5.17); de este modo, las ondas transversales que se forman en la barra se deben a la deformación por cizallamiento o corte.

Así que la deformación por cizallamiento es:

$$\mu = \frac{P}{\varphi} \quad (5.9.1).$$

Ahora bien, el esfuerzo es  $P = \frac{F}{S}$  y la deformación unitaria es  $\varphi \cong \text{Tan}\varphi$ ; además,  $\text{Tan}\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial x}$ ; al organizar estas expresiones, se tiene:  $F = \mu S \frac{\partial\psi}{\partial x}$ ; al derivar respecto a  $x$ , queda:

$$\frac{dF}{dx} = \mu S \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \quad (5.9.2).$$

Por otra parte, la deformación elástica por cizallamiento somete a las partículas; los movimientos oscilatorios de las partículas componentes de la barra se someten a movimiento acelerado, que llevan a las partículas a tener una velocidad máxima cuando pasan por el punto de equilibrio y velocidad nula en los extremos, lo que se configura nuevamente en un sistema acelerado:

$$\sum_{i=1}^n F_i = m_s a .$$

Como en los casos anteriores, la masa del sistema se debe considerar un elemento de masa a partir de  $\rho = \frac{dm}{dv}$ ; es decir,  $dm = \rho S dx$ , y la aceleración es:  $a = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ ; de modo que el elemento de fuerza es:  $dF = \rho S dx \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ , de donde:

$$\frac{dF}{dx} = \rho S \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (5.9.2).$$

Al combinar la ecuación (5.9.1) y (5.9.2), se tiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.9.3).$$

Expresión (5.6.3) es la ecuación de onda de la onda transversal en una barra homogénea. Además, de la ecuación (5.6.3) se puede deducir la velocidad de propagación:

$$v_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (5.9.4).$$

En relación con las velocidades de la onda longitudinal y transversal, se puede tener una relación entre ellas así:

$$\frac{v_l}{v_T} = \frac{\sqrt{Y/\rho}}{\sqrt{\mu/\rho}}, \text{ esto es: } \frac{v_l^2}{v_T^2} = \frac{Y/\rho}{\mu/\rho}, \text{ o sea: } \frac{v_l^2}{v_T^2} = \frac{Y}{\mu} \quad (5.9.5).$$

Recuérdese que el módulo de cizallamiento es:  $\mu = \frac{Y}{2(1+\sigma)}$  por tanto:

$$v_l = v_T \sqrt{2(1+\sigma)} \quad (5.9.6).$$

Esto significa que la velocidad de la onda longitudinal es mayor que la velocidad de la onda transversal:

$$v_l \geq v_T.$$

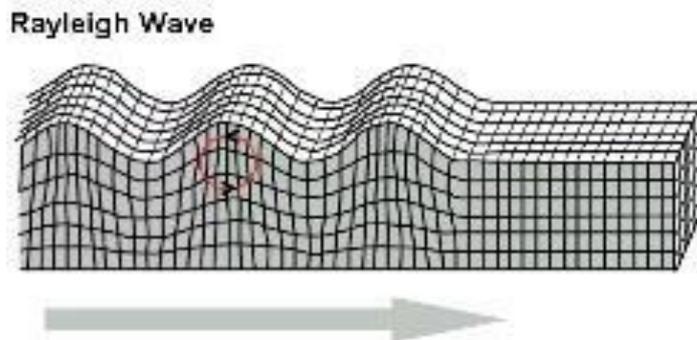


Figura 5.18.

Onda Rayleigh. Esquema del origen de las ondas superficiales; debido a la rotación de las partículas en la superficie de tipo circular y hacia abajo decaen en ondas longitudinales.

Fuente: (Zheng, Greve y Oppenheim, 2009)

Esto permite entender lo que se señaló en el Capítulo 3, cuando se analizaron los módulos de elasticidad. En los sismos tectónicos, hay fundamentalmente tres tipos de ondas siempre presentes: las ondas de tipo P (primarias) son ondas de tipo longitudinal y, como tales, atraviesan todos los medios sólidos, líquidos, coloides; en el caso del agua, llega a los 1450 m/s; en roca sólida alcanza los 5000 m/s; en general, a este tipo de onda se asocia el sonido que generalmente acompaña a los sismos fuertes; es muy común oír a la gente señalar que escucharon un sonido que venía de la tierra justo antes de que ocurriera el movimiento sísmico.

Las ondas de tipo S (secundarias) son las ondas transversales y viajan 1.73 veces más lento que las ondas primarias; esta onda sísmica causa el movimiento oscilatorio de las construcciones y edificaciones y se propaga únicamente por los medios sólidos, aquellos que se pueden cortar o cizallar. Cabe señalar que en los sismos cuyo hipocentro es de pocos kilómetros de profundidad, suelen aparecer grietas en los terrenos planos y carreteras; este tipo de fenómeno se asocia con las ondas primarias o longitudinales; en este caso, la superficie, como límite del medio sólido, no tiene forma de recuperar su elasticidad y, por tanto, una vez llegado a la fase de plasticidad, el terreno, tras estar sometido a compresión, se deforma sin posibilidad de recupera su forma inicial, dejando una huella, como zanjas a campo abierto.

Por otra parte, debido a la heterogeneidad del terreno y al depender de la intensidad de los sismos, puede darse el caso de desplazamiento del terreno en forma rotacional; en este caso, debido a una onda de torsión que, en general, se da en tramos pequeños o en lo que corresponde al terreno apropiado para este tipo de fenomenología. Existen las ondas Love y Rayleigh (figura 5.16) que, por lo común, se producen en la superficie o en la zona de cambio de medios; en el caso de las ondas Love, típicas en la superficie terrestre cuando se presenta un sismo tectónico de larga duración, causan que el suelo se moviera de un lado a otro y, por supuesto, producen graves daños.

### 5.10 Ondas de torsión

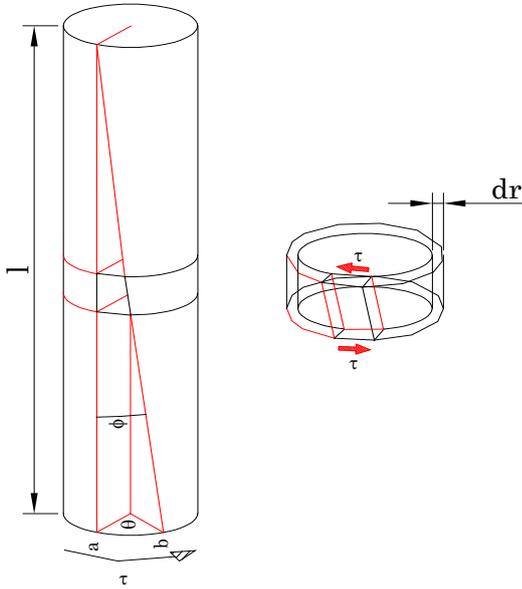


Figura 5.19. Onda de torsión en una barra homogénea.

Al considerar una barra de material homogéneo de longitud  $l$  y sección transversal  $S$ , a la que en un extremo se la somete a una sacudida de torsión o un torque en función del tiempo, esta perturbación se propagará a lo largo de la barra debido a la elasticidad del material, hasta alcanzar el extremo libre (figura 5.19). De acuerdo con la fenomenología elástica del material, corresponde a un fenómeno de torsión, cuyo módulo de elasticidad es:  $G = \frac{\tau}{\theta}$ ; también, el módulo de torsión se puede expresar como:  $G = \frac{\pi\mu a^4}{2l}$ ; de modo que  $\tau = \frac{\pi\mu a^4}{2l}\theta$ ; como el ángulo  $\theta$  es de torsión, es decir corresponde a la elongación angular definida por  $d\psi$ , para un elemento de longitud  $dl$ , la expresión del módulo de torsión se puede escribir como:  $\tau = \frac{\pi\mu a^4}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x}$ ; de tal forma que, al derivar respecto a  $x$ , se tiene:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{\pi\mu a^4}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.10.1).$$

Por otra parte, al analizar el movimiento de las partículas componentes de la barra, cuando realizan la oscilación de rotación debido a la sacudida de torsión se someten a una aceleración angular; por tanto, se tiene un sistema acelerado en términos del momento de inercia; esto es:

$$\sum_{i=1}^n \tau_i = I\alpha \quad (5.10.2).$$

Como se trata de una barra circular de radio  $r$ , entonces el momento de inercia será:  $I = \frac{1}{2}mr^2$ ; la masa para un diferencial del momento de fuerza será:  $dm = \rho S dx$ ; la aceleración angular de las partículas será:  $\alpha = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ ; de modo que, al remplazar en (5.10.2), un diferencial del torque será:  $d\tau = \frac{1}{2}\rho S dx r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ ; al organizar términos, se tiene:

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{2}\rho S r^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (5.10.2).$$

Si se combinan las ecuaciones (5.7.1) y (5.7.2), se obtiene:

$$\frac{1}{2} \rho \pi r^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{1}{2} \pi \mu r^4 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Con la cancelación de los términos que corresponde, se tiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.10.3).$$

Al igual que en los casos anteriores, la velocidad de propagación es:

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (5.10.4).$$

La velocidad de propagación de las ondas de torsión es igual a la velocidad de propagación de la onda transversal y, en el caso de los sismos, este tipo de ondas puede viajar a la misma velocidad.

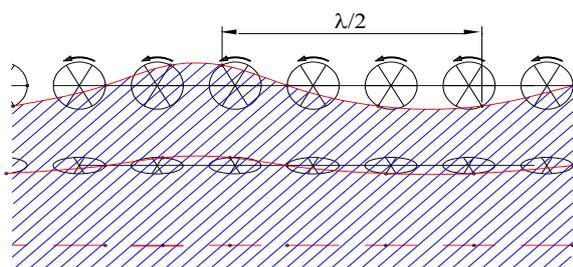
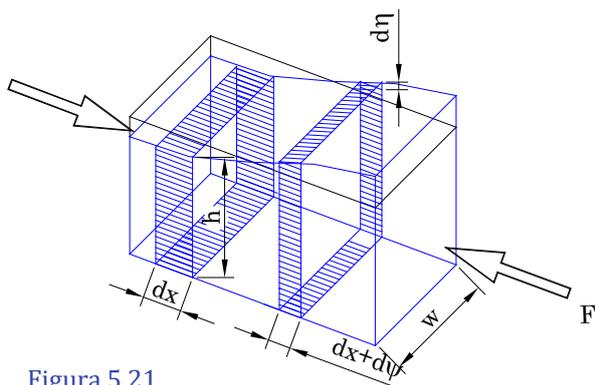


Figura 5.20.  
Modelo de la formación de la onda en la superficie del agua en quietud.

## 5.11 Ondas en la superficie del agua

Es muy común ver y hasta resulta divertido generar ondas en la superficie del agua cuando está en quietud; sin embargo, estas ondas son de gran complejidad y, como en los casos anteriores, se tratará de establecer un modelo matemático modesto que se aproxime a la realidad.

En la Figura 5.20 se puede observar cómo las moléculas del agua que están en la superficie sometidas a una perturbación son las responsables de formar la onda de manera superficial; por ser moléculas de una interface entre el aire y el agua, se someten a la acción de la tensión superficial, además, de soportar la presión atmosférica y estar en contacto con todas las propiedades del aire. En cambio, las moléculas de agua que están un poco más abajo, se hallan bajo la acción de otras propiedades, tales como presión hidrostática, viscosidad del medio, entre otras, razón por la cual el movimiento vertical de las moléculas es inexistente y únicamente podrían moverse de forma horizontal, así que el movimiento circular de las moléculas de agua en la superficie, con componentes en el eje x y el eje y en el fondo queda reducido al movimiento en el eje x, movimiento oscilatorio horizontal. Las moléculas que se encuentran un poco por debajo de la superficie han perdido un poco del movimiento vertical, por lo que su movimiento es según una elipse, hasta convertirse en un movimiento unidimensional.



**Figura 5.21.** Geometría de un elemento de volumen en reposo y, luego, ese mismo elemento de volumen participa de una perturbación, tanto vertical como horizontal, en la superficie del agua.

De modo que las componentes del movimiento circular que describen las moléculas de agua en la superficie tienen dos componentes: una vertical, designada por  $\eta$ , que, comparada con la longitud de onda  $\lambda$  y  $h$ , es despreciable. Y la componente horizontal se designa por  $\psi$ .

El elemento de volumen ( $lhdx$ ) va a ser quien cambia su geometría, para permitir las deformaciones en  $x$  y en  $y$ ; de modo que: en  $x$ :  $dx$  varía en  $dx + d\psi$ . Y en  $y$ :  $\eta$  varía en  $\eta + d\eta$ . Ahora bien, como ya se dijo, los líquidos son altamente incompresibles y, como se

puede ver en la Figura 5.21, el elemento de volumen sin perturbación debe ser igual al volumen perturbado. Esto es:  $lhdx = l(h + \eta)(dx + d\psi)$ ; al resolver esto, se tiene:  $lhdx = lhdx + l\eta dx + lhd\psi + l\eta d\psi$ ; al cancelar términos y como  $\eta$  es muy pequeño, al comparar con la profundidad  $h$ , entonces  $\eta d\psi$  tiende a cero. Por tanto esto queda:  $\eta dx = -hd\psi$ , que se puede escribir como:  $\eta = -h \frac{d\psi}{dx}$ . Además, si a esta expresión se la deriva respecto a  $x$ , se tiene:

$$\frac{d\eta}{dx} = -h \frac{d^2\psi}{dx^2} \quad (5.11.1).$$

Por otra parte, el movimiento oscilatorio de la partícula lleva a que hubiera velocidades máximas y mínimas; por tanto, hay aceleraciones, tanto verticales como horizontales; en este caso, el elemento de fuerza será:  $\Delta F = \Delta m \frac{d^2\psi}{dt^2}$ ; ahora bien, como  $\Delta F = \Delta PS$  y  $\Delta P = P' - P$ , donde  $P$  es mayor que  $P'$ , entonces, al llevar al límite, se tiene:  $-dPS = dm \frac{d^2\psi}{dt^2}$ , y como  $dm = \rho S dx$ , se tiene que:  $dPS = -\rho S dx \frac{d^2\psi}{dt^2}$ , de lo que se concluye que:

$$\frac{dP}{dx} = -\rho \frac{d^2\psi}{dt^2} \quad (5.11.2).$$

Ahora bien, al analizar de manera vertical, lo primero que se encuentra es la presión hidrostática; de modo que en el elemento de volumen se tiene que la presión manométrica  $\Delta P = \rho g \Delta \eta$ , donde  $\Delta \eta = \eta' - \eta$ , que se puede escribir como:  $dP = \rho g d\eta$ , al derivarla respecto a  $x$ , se tiene:

$$\frac{dP}{dx} = \rho g \frac{d\eta}{dx} \quad (5.11.3).$$

Al combinar las expresiones (5.8.2) y (5.8.3), se tiene:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -g \frac{d\eta}{dx} \quad (5.11.4),$$

y si a (5.11.4) se la combina con (5.11.1), se tiene:

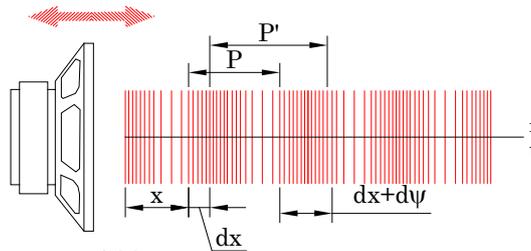
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = hg \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad (5.11.5).$$

Y, en este caso, se tiene la ecuación de onda de la perturbación en el sentido del desplazamiento horizontal, que se propaga con la velocidad:

$$v = \sqrt{hg}.$$

Esto corresponde a una longitud de onda muy larga, comparada con la deformación vertical.

## 5.12 Ondas de presión en un gas



**Figura 5.22.**  
Variación de la presión en una columna de gas provocada por la vibración de un

Las variaciones de presión periódica en un gas producen ondas elásticas que se propagan por el medio gaseoso; esta variación de presión consiste en estados de compresión y depresión, como lo hace el cono de un parlante que vibra de tal forma que, cuando va hacia adelante, produce un estado de presión en que amontona a las moléculas que se encuentran en su recorrido, pero, cuando va hacia atrás, produce una depresión que lleva a que las moléculas que antes se habían amontonado ahora se separan más de lo normal; este es el caso del sonido en el aire: de la misma forma como cambia la presión, también cambia la densidad del estado normal a un estado de mayor y a un estado de menor densidad en mayor magnitud a lo que ocurre en un sólido y esto precisamente es lo que lo torna diferente a un sólido.

Para su análisis, pártase de esto: según la Figura 5.22, se puede observar la variación de presiones, que se realiza con el mismo número de moléculas, lo que significa que, en principio, el volumen implicado en la deformación se mantiene constante. De modo que el volumen de  $dx$  es igual al volumen de  $dx + d\psi$ ; esto es:

$$\rho_0 S dx = \rho S (dx + d\psi)$$

$$\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{d\psi}{dx}\right).$$

De esta ecuación se puede despejar la densidad  $\rho = \rho_0 \left(1 + \frac{d\psi}{dx}\right)^{-1}$ , expresión que también se la puede escribir de forma muy aproximada como:

$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{d\psi}{dx}\right)$ , a su vez se la puede escribir así:

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \left(\frac{d\psi}{dx}\right) \quad (5.12.1).$$

Pero aún se la puede arreglar así:

$$\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right) = -\left(\frac{d\psi}{dx}\right) \quad (5.12.2).$$

Por otra parte, como a  $P = f(\rho)$  se la puede expresar en términos de la serie de Taylor como:

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0 + \frac{1}{2} (\rho - \rho_0)^2 \left(\frac{d^2p}{d\rho^2}\right)_0 + \dots +$$

Como  $\rho - \rho_0$  es muy pequeño y elevado al cuadrado aún más, entonces se desprecian estos términos y de la serie de Taylor se toman únicamente los dos primeros términos:

$$p = p_0 + (\rho - \rho_0) \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_0.$$

Esta expresión se puede escribir como:  $p = p_0 + \rho \left(\frac{dp}{d\rho}\right) - \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho}\right)$ ; al tercer término se lo conoce como módulo de elasticidad en los fluidos y se lo puede expresar como:  $k = \rho_0 \left(\frac{dp}{d\rho}\right)$ , de donde se puede escribir:  $\frac{k}{\rho_0} = \frac{dp}{d\rho}$  que, al remplazarlo en la misma ecuación, se tiene:  $p = p_0 + \rho \left(\frac{k}{\rho_0}\right) + k$ . Ahora bien, si se factoriza k, se tiene:  $p = p_0 + k \left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right)$  (5.12.3).

Esta ecuación corresponde a la ley de Hooke para los fluidos, en que, al combinar con (5.12.2), se tiene:

$$p = p_0 - k \left(\frac{d\psi}{dx}\right) \quad (5.12.4).$$

Ahora bien, si se deriva respecto a  $x$  y se tiene en cuenta que  $p_0$  es una constante, entonces se tiene:

$$\frac{dp}{dx} = -k \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) \quad (5.12.5).$$

Esta expresión relaciona la presión con cualquier punto de la columna de gas.

Por otra parte, de acuerdo a la tercera ley de Newton, se tiene,  $dF = dma$ , y como  $a = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ , entonces,  $dF = dm \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ . Además, la fuerza se la puede expresar en términos de presión y la masa en términos de la densidad y el volumen:  $Sdp = -\rho Sdx \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ ; al cancelar el área transversal, al fin la expresión se la puede escribir como:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (5.12.6).$$

Ahora bien, si se combina la ecuación (5.12.5) con (5.12.6), se tiene:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad (5.12.7).$$

Esta expresión matemática corresponde a la ecuación de onda, en la que se puede ver que la velocidad de propagación es:

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho_0}} \quad (5.12.8).$$

De igual forma, se puede encontrar la ecuación de onda en términos de la presión y de la densidad; para esto, a partir de (5.12.4), si se deriva respecto a  $t$  y al considerar que  $p_0$  es una constante, se tiene

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -k \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2 \partial x} \quad (5.12.9).$$

Y si a (5.12.6) se la deriva respecto a  $x$ , se tiene:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = -\rho \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial t^2} \quad (5.12.10).$$

Ahora, al combinar (5.12.9) con (5.12.10), se concluye que:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (5.12.11).$$

Esta es la ecuación de onda para la presión; la velocidad de propagación es la misma de (5.12.7); de igual forma, se puede deducir la ecuación de onda de la densidad:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{k}{\rho} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} \quad (5.12.12).$$

### 5.13 Energía en la onda de presión en una columna de gas

Considérese que el movimiento oscilatorio fuese de tipo armónico, en el que se pueden ver con toda claridad los puntos de máxima velocidad o máxima amplitud; en general, se puede establecer el principio de conservación de energía:

$$E_T = E_K + U \quad (5.13.1).$$

En los extremos, se tiene que  $E_T = E_{KM} = U_M$ ; en el caso de tener ondas armónicas,  $\psi = \psi_0 \text{Sen}(wt - kx)$ ; ahora bien, como  $E_T = E_{KM} = \frac{1}{2}mv^2$  y como la elongación es  $\psi = \psi_0 \text{Sen}(wt - kx)$ , entonces la velocidad es:  $v = \psi_0 w \text{Sen}(wt - kx)$ ; de tal forma que, al remplazarla y entender que se trata de la máxima velocidad, se tiene:

$$E_T = \frac{1}{2}mw^2\psi_0^2 \quad (5.13.2).$$

Por otra parte, la potencia se define como  $P = \frac{dE_T}{dt}$ ; de modo que, en este caso, se tiene:

$$P = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mw^2\psi_0^2 \right) \quad (5.13.3).$$

Al resolver la derivada, se tiene:  $P = \frac{1}{2}w^2\psi_0^2 \frac{dm}{dt}$ ; ahora bien, el diferencial de masa se puede expresar como:  $dm = \rho s dx$ ; por tanto, al remplazar queda así:  $P = \frac{1}{2}w^2\psi_0^2 \rho S \frac{dx}{dt}$ ,

donde  $\frac{dx}{dt} = v$  es la velocidad de oscilación del elemento en perturbación; a partir de esto, se puede expresar como:

$$\frac{P}{S} = \frac{1}{2}\rho w^2\psi_0^2 v \quad (5.13.4).$$

La expresión  $\frac{P}{S} = I$  se conoce como densidad de la energía o simplemente intensidad. Además, la expresión  $\frac{1}{2}\rho w^2\psi_0^2 = E$ , entonces se puede escribir como:

$$I = Ev \quad (5.13.5).$$

A esto se lo conoce con el nombre de vector de Pointing.

## 5.14 Ondas sonoras

El estudio de las ondas acústicas se conoce con el nombre de Fonología o Acústica; de aquí viene el nombre de los profesionales que estudian el oído y sus posibles defectos: fonoaudiólogos. De modo que el sonido no es más que ondas que pueden viajar a través de cualquier medio elástico, bien sea sólido, líquido o gaseoso. En la naturaleza es muy frecuente tener el sonido viajando en la atmósfera, pero, de igual forma, puede viajar en sólidos, como cuando se golpea una pared o golpea un par de piedras dentro del agua; la velocidad de propagación depende del medio, como se puede ver en la Tabla 5.3.

En el caso del sonido en el aire, su velocidad de propagación está alrededor de los 340 m/s, que corresponde a la velocidad de propagación de las ondas longitudinales. Entonces, el sonido constituye condensaciones y dilataciones o sus variaciones de presión del aire, siempre provocadas por una fuente vibratoria, como un parlante, un diapason, la cuerda de una guitarra o piano, etc.

A medida que las ondas sonoras viajan en el aire, los gases y demás elementos que lo conforman vibran para producir cambios de densidad y presión en la dirección del movimiento de la onda. Si la fuente de las ondas sonoras vibra sinusoidalmente, las variaciones de presión y densidad en el aire también son sinusoidales.

### Características del sonido

Tabla 5.3.

#### Velocidad de propagación del sonido en medios sólidos, líquidos y gaseosos

ÍTEM	MATERIAL	VELOCIDAD (m/s)
1	Diamante	12.000
2	Cristal Pyrex	5.640
3	Hierro	5.130
4	Aluminio	5.100
5	Bronce	4.700
6	Cobre	3.560
7	Oro	3.240
8	Lucita	2.680
9	Plomo	1.322
10	Goma	1.600
11	Glicerina	1.904
12	Agua marina	1.533
13	Agua	1.493

14	Mercurio	1.450
15	Queroseno	1.324
16	Alcohol metílico	1.143
17	Tetracloruro de Carbón	926
18	Hidrogeno	1.286
19	Helio	972
20	Aire 20°C	343
21	Aire 0°C	331

**Fuente:** (Serway y Jewett, 2008)

El sonido se caracteriza por tres cualidades muy importantes: la intensidad, el tono y el timbre.

• **Intensidad.** Como la energía de una onda depende, por una parte, del cuadrado de la amplitud y, por otra, de la intensidad de una onda, se le llama densidad de la potencia o energía por unidad de área y tiempo; o sea,  $I = \frac{P}{S}$ , con unidades  $\frac{\text{wattios}}{\text{metro}^2}$ . Si el frente de onda viene de una fuente puntiforme, lo más probable es que fuese esférica; por tanto, la superficie corresponde a una esfera que crece a la velocidad del sonido, de modo que, como el área de la esfera es:  $S = 4\pi r^2$ , entonces:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} \quad (5.14.1).$$

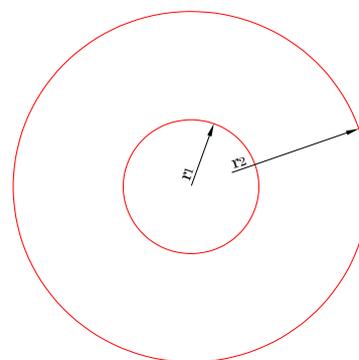
La ecuación (5.14.1) muestra cómo la intensidad disminuye con el cuadrado de la distancia; esto ocurre cuando la onda se desarrolla en un medio isotrópico; es decir, un medio en el cual la velocidad es igual en cualquier dirección; solo así se garantizará que el frente de onda fuese una esfera.

En la Figura 5.23 se pueden ver dos frentes de onda esféricos; cada frente tiene una intensidad, de acuerdo a la distancia de la fuente puntiforme. Así:

$I_1 = \frac{P}{4\pi r_1^2}$  y  $I_2 = \frac{P}{4\pi r_2^2}$ , de tal forma que, al establecer una relación entre las intensidades se tiene:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \quad (5.14.2).$$

Con esta relación se puede encontrar la intensidad de diferentes frentes de onda con base en uno de prueba.



**Figura 5.23.** Frentes de ondas esféricas y concéntricas que provienen de una fuente puntiforme.

### Ejemplo

Cuál es la intensidad sonora de una fuente sonora puntiforme de 1200W de potencia a 5 m de distancia.

### Solución

A partir de  $I = \frac{p}{4\pi r^2}$ , al remplazar valores, se tiene:  $I = \frac{1200w}{4\pi 5^2} = 3,82 \frac{w}{m^2}$ .

Si a esto se le agrega la pregunta, ¿cuál es la intensidad a 10 m?

A partir de la relación: (5.14.2), se tiene:  $I_2 = I_1 \frac{r_1^2}{r_2^2}$ ; si se remplazan valores, se llega a:  $I_2 = 3,82 \frac{5^2}{10^2} = 0,95 \frac{w}{m^2}$ .

Con estos resultados, se debe entender que la relación varía con el cuadrado de la distancia.

### Umbrales de audición

Todos los seres vivientes han evolucionado con la presencia de sonidos que ocurren en la atmósfera, en el agua y en la tierra; por tanto, hay una interface que permite estar conectados con este fenómeno de la naturaleza; en el caso de los mamíferos y en especial el ser humano, se cuenta con el oído como medio que permite escuchar los sonidos.

Cuando se trata de la intensidad del sonido, el oído humano tiene unos límites de escucha superior e inferior, algo que se conoce como umbrales de la audición para la intensidad.

El límite más bajo de audición es de  $10^{-12} w/m^2$  y el extremo más alto es de  $1 w/m^2$ ; por encima y por debajo de estos límites, claro que hay sonido, solo que el oído humano no está diseñado para escuchar este tipo de sonidos; sin embargo, como se puede ver, hay un rango muy grande de audición de 12 órdenes, lo que lo convierte en un sensor súper sensible.

Debido al intervalo tan grande, se prefiere utilizar una escala logarítmica en base a 10, que tiene como base el umbral más bajo. A esto se lo conoce con el nombre de nivel de intensidad y se expresa como:

$$\beta = 10 \log \frac{I}{I_0} \quad (5.14.1).$$

La unidad de medida del nivel de intensidad es el bel, pero, para tener una escala más asequible, se utiliza el decibel (dB), en honor al físico Alexander Graham Bell.

De acuerdo con esta ecuación empírica, se pueden encontrar los valores extremos de la intensidad sonora:

$$I = 10 \log \frac{1}{10^{-12}} = 10 \log 10^{12} = 10 \times 12 \log_{10} 10$$

$$\text{nivel} = 120\text{dB}$$

Y el valor mínimo será:

$$I = 10 \log \frac{10^{-10}}{10^{-12}} = 10 \log 10^2 = 20\text{dB}$$

De modo que, entre estos dos extremos y mucho más fácil de entender, se tienen todos los sonidos perceptibles.

Tabla 5.4.

Intensidad y niveles de intensidad de sonidos cotidianos que escucha el oído humano.

ÍTEM	FUENTE SONORA	INTENSIDAD	NIVEL DE INTENSIDAD
1	Umbral de sensación sonora	$10^{-12}$	0
2	Conversación en voz baja	$10^{-10}$	20
3	Motor pequeño	$10^{-8}$	40
4	Conversación normal	$10^{-6}$	60
5	Calle con tráfico	$10^{-4}$	80
6	Taladro de romper pavimentos	$10^{-2}$	100
7	Umbral de sensación dolorosa	$10^0$	120

*Fuente: (Openstax, 2021)*

En la Tabla 5.4, se puede ver la intensidad y los niveles de intensidad de sonidos cotidianos; se entenderá que muchos más de los escalados se encontrarán entre los valores que se presentan.

Es de sumo cuidado cuando los sonidos están por encima del nivel de audición permitido, situación que puede acompañarse con dolor y, en el extremo, con daño de las partes sensibles del oído; el elemento del oído más expuesto a este tipo de situaciones es el tímpano que, algo que se estudiará con un poco más de detalle.

### Ejemplo

Una abeja produce un sonido con un nivel de intensidad de 10 decibeles, a una distancia  $d$ . A esa misma distancia, ¿cuántas abejas generarán un nivel de intensidad de 60 decibeles?

### Solución

Para una abeja se tiene:  $10 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$

$N$  abejas producen:  $60 = 10 \log \frac{NI}{10^{-12}}$

Se establece una relación, así:

$$6 = \log \frac{NI/10^{-12}}{I/10^{-12}}.$$

Esto es:  $6 = \log N$ ; por tanto:  $N = 10^6$  abejas; es decir, un millón de abejas produce un nivel de intensidad de 60 decibelios, a la misma distancia.

### Tono

Es una sensación subjetiva correspondiente a una rama de la ciencia llamada psicofísica, que trata sobre la respuesta de los órganos humanos a estímulos físicos y, como se trata de la respuesta humana, en el caso del tono carece de la precisión en la medida como se acostumbra en la ciencia; sin embargo, el tono se relaciona íntimamente con la frecuencia, lo que permite distinguir entre un sonido agudo y un sonido grave. Para un sonido puro, el tono se determina por la frecuencia proveniente de un movimiento oscilatorio armónico; es decir, se puede decir que el tono es función de la frecuencia de oscilación de las moléculas del medio donde se genera y se propaga el sonido.

El ser humano se conecta con esta fenomenología a través del oído y aquí se define el sonido como una frecuencia audible; sin embargo, pueden existir frecuencias que el oído humano no percibe, tanto por tener una frecuencia baja como por tener una frecuencia demasiado alta; además, el oído percibe sonidos que dependen de la frecuencia y de la intensidad. Como la escucha de los sonidos no siempre es igual en todas las personas, por razones ya mencionadas, sin embargo, casi de forma precisa el oído humano, a través de los años de evolución, ha llegado a tener unos límites de audición que se conocen como umbrales; así, el umbral mínimo es de 16 Hz y el máximo de 20.000 Hz; en este rango se encuentra todo lo que resulta agradable y desagradable para el oído; no obstante, los sonidos por debajo de 16 Hz o infrasonido, que no son audibles para el oído humano, lo son para otro tipo de oídos, como es el caso de animales grandes, como caballos, vacas, elefantes, entre otros; en el caso de

los elefantes, la comunicación a larga distancia la realizan con emisión de infrasonidos, que pueden viajar por las extensas llanuras donde viven.

Por otra parte, por lo general los sismos se desarrollan por debajo de los 16 H, pero junto a esto se generan vibraciones cercanas al umbral mínimo, que ya se sabe que algunos animales pueden percibir; en el caso de ser mayor al umbral mínimo, el oído humano los percibe como ruidos de tono grave, provenientes del suelo.

Una de las aplicaciones que se dio, fue el sonar, palabra que resulta de SOund – Navigation – and – Ranging. Es una técnica utilizada por los barcos para conocer la



Figura 5.24.

Pintura en la que se muestran diferentes instrumentos musicales de la época.

Fuente: (Wilkinson, 1921-1922 d.C)

profundidad de ríos y mares, que funciona como un radar; también se lo puede utilizar como un localizador de objetos bajo el agua; históricamente, se sabe que Leonardo Da Vinci, en 1490, utilizó un tubo con un extremo bajo el agua para oír los sonidos provenientes del mar. Después del accidente del Titanic en 1912, se obtuvo la primera patente otorgada por la Oficina Británica de Patentes al meteorólogo inglés Lewis Richardson; dos años más tarde, el inglés Reginald Fessenden realizó un experimento para localizar un iceberg a dos millas de distancia; si bien en su momento era imposible determinar la dirección a la

que se encontraba, fue un gran avance para este tipo de tecnología; hoy, a todos los barcos los han equipado con este tipo de sistema, cada vez más mejorado, para que pudieran navegar sin dificultad.

Por otra parte, desde el tiempo de los pueblos antiguos, se buscaba producir sonidos agradables al oído; así surgieron los primeros instrumentos musicales; con el pasar del tiempo, se empezó a diseñar un sistema de escala, con sonidos que agradasen al escucharlos y que permitieran unificar varios instrumentos, como se puede ver en el grabado de la Figura 5.24, todo esto para que se pudiera escuchar algo agradable, razón por la cual se piensa que algo similar a escalas musicales o algo parecido debieron tener estos pueblos antiquísimos.

Por otra parte, para el homo sapiens, el único indicio para unir el cosmos con el hombre fue el periodo de rotación de la luna y el periodo menstrual de la mujer indicio claro de que el universo y el hombre se hallan unidos; de esta forma, se puso especial cuidado al periodo de rotación lunar de 28 días, de los cuales, al agrupar en 4 grupos, hoy semanas (palabra de siete letras), se tienen los siete días de la semana; así, también al arco iris se lo ajustó a siete colores. A partir de esta lógica, Pitágoras, con base en el monocordio, aparato musical de una sola cuerda tensada, puso números a las razones de las frecuencias generadas por la cuerda vibrante, de modo

que, para una longitud dada, la cuerda vibra y produce el primer sonido fundamental; al correr el puente hasta la mitad de la longitud inicial, la cuerda vibra con una frecuencia más alta; sin embargo, estos dos sonidos tienen una característica muy especial de dar la sensación de unísono (como si fuera un solo sonido); si dos cuerdas con estas características sonaran a la vez, al repetir el proceso de correr el puente a la mitad de la mitad de la mitad..., se tendrá igual sensación de unísono. En otro aparte, se verán las características del órgano del oído y la relación que hay con los intervalos sonoros.

Así que, con muy pocas excepciones, todos perciben la sensación de unísono cuando la relación de frecuencias es de 2/1; es decir, al duplicar la frecuencia se percibe otro sonido agradable, al igual que si se divide por 2. A estos intervalos se los llama octavas y se aceptan como la base de la edificación interior del sentido; es decir: dos intervalos o dos octavas serían:  $\frac{4}{1} = \frac{2^2}{1}$  y tres octavas:  $\frac{8}{1} = \frac{2^3}{1}$ ; de modo que los intervalos aumentan por adición (una octava, dos octavas, tres octavas), mientras que la razón aumenta por multiplicación, lo que indica que el tono se relaciona logarítmicamente con la razón de la frecuencia; de forma general, se tiene:

$$\frac{f_2}{f_1} = 2^n.$$

Como un intervalo o una octava es muy grande, se ha dividido en unidades menores; en la civilización occidental, se dividió en 12 intervalos iguales, denominados semitonos; así que:

$$\frac{f_2}{f_1} = 2^{\frac{s}{12}} \quad (5.14.4),$$

Tabla 5.5.

**Se puede observar que el nombre de cada nota musical corresponde a la sílaba inicial de cada verso del himno de San Juan; es decir, el nombre de las notas musicales responde a un acróstico.**

NOTA	TEXTO ORIGINAL	TRADUCCIÓN
Ut - Do	Ut queant laxis	Para que puedan
Re	Resonare fibris	Exaltar a pleno pulmón
Mi	Mira gestorum	Las maravillas
Fa	Famuli tuorum	Estos siervos tuyos
Sol	Solve polluti	Perdona la falta
La	Labii reatum	De nuestros labios impuros
Si	Sancte Iohannes	San Juan

**Fuente:** [https://es.wikipedia.org/wiki/Ut\\_queant\\_laxis](https://es.wikipedia.org/wiki/Ut_queant_laxis)

donde  $S$  serán los semitonos, y se los enumeraría de 1 a 12, de modo que entre dos notas musicales hay un intervalo de un semitono.

El nombre de estos intervalos en el mundo occidental se le debe al monje Guido de Arezzo, en 1025, al utilizar el inicio de los versos del himno a Juan Bautista, como se puede ver en la Tabla 5.5. En su trabajo original, hay seis notas, pero, en el siglo XVI, Anselmo de Flandes incluyó la séptima nota, “Si” y, al fin, en el siglo XVII, el monje Giovanni Batista cambió “Ut” por “Do”, para que la nota pudiera ser más sonora, cuando se la canta en tonos bajos. En aquellos países de baja influencia musical, se siguió conservando el antiguo cifrado de letras.

Por asuntos de gusto musical en las notas, varios músicos de renombre apuntaban a la frecuencia de 400 Hz; solo cuando se pudo medir con precisión la frecuencia de los sonidos, en 1936, después de un Congreso Internacional, la Organización Internacional de Normalización de Pesas y Medidas (ISO) recomendó tomar como patrón 440 Hz, que corresponde a la nota “La”. Como al principio las notas musicales se ajustaban al oído de cada maestro, lo que significa que el valor no necesariamente era exacto, aún se conservan diapasones calibrados con valores cercanos a los 440 Hz. Este es el caso del diapasón de Händel (1685-1759), afinado en 422.5 Hz, el diapasón de Beethoven (1770 - 1827), afinado en 455.4 Hz.

En la Tabla, se tendrán las notas y sus correspondientes frecuencias, en las que se puede apreciar el teclado de un piano de 48 teclas, con los tonos y semitonos y sus correspondientes frecuencias para una escala temperada, entre otras.

En la Figura 5.25, se puede apreciar el teclado de un piano que corresponde a una octava; como se puede ver, el teclado inicia en “Do” y termina en “Si”, un intervalo de doce semi-intervalos.

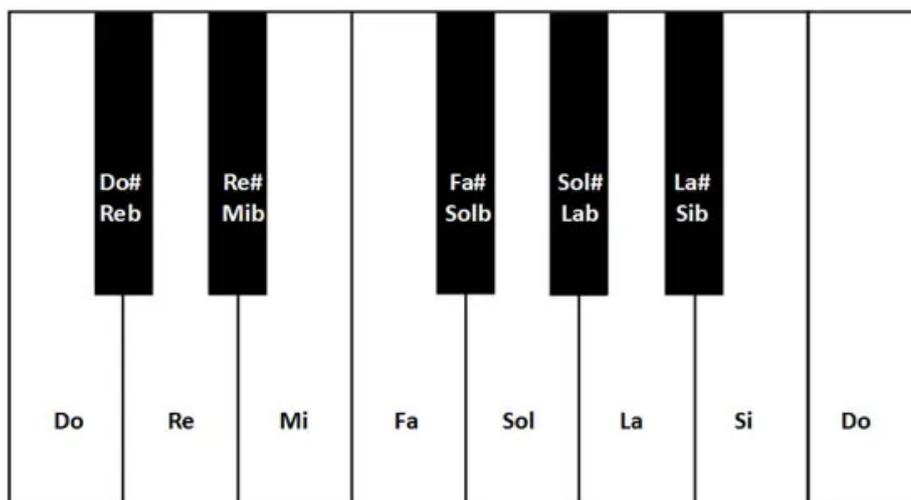


Figura 5.25.

Intervalo u octava, correspondiente al teclado de un piano. Fuente:

<https://www.escribircanciones.com.ar/teoria-musical/4447-alteraciones-musicales.html>

En la Tabla 5.6 se puede ver un teclado de 4 octavas, con sus correspondientes frecuencias. En ella se puede ver la nota “La” en varias octavas, pero solo en la cuarta octava se encuentra la frecuencia de 440 Hz, frecuencia escogida como punto de afinación estándar para los instrumentos musicales y todas las variaciones que se pudieran realizar hacia abajo y hacia arriba de este valor.

Tabla 5.6.

**Tablas que muestra el teclado de un piano con las notas, tonos y semitonos y sus correspondientes frecuencias.**

1	2	3	4	5	6	7
<i>n</i>	<i>Notas</i>	<i>N</i>	<i>S</i>	<i>S/12</i>	$2^{S/12}$	<i>f<sub>0</sub>=55</i>
1	La	1	0	0,000	1,000	55,000
	La # Si b	2	1	0,083	1,059	58,270
2	Si	3	2	0,167	1,122	61,735
	Do	4	3	0,250	1,189	65,406
3	Do # Re b	5	4	0,333	1,260	69,296
	Re	6	5	0,417	1,335	73,416
4	Re # Mi b	7	6	0,500	1,414	
	Mi	8	7	0,583	1,498	82,407
5	Fa	9	8	0,667	1,587	87,307
	Fa # Sol b	10	9	0,750	1,682	92,499
6	Sol	11	10	0,833	1,782	97,999
	Sol # La b	12	11	0,917	1,888	103,826
	La	13				110,000
	La # Si b	14				116,541
	Si	15				123,471
	Do	16				130,813
	Do # Re b	17				138,591
	Re	18				146,832
	Re # Mi b	19				155,563
	Mi	20				164,814
	Fa	21				174,614
	Fa # Sol b	22				184,997
	Sol	23				195,998
	Sol # La b	24				207,652
	La	25				220,000
	La # Si b	26				233,082
	Si	27				246,942
	Do	28				261,626
	Do # Re b	29				277,183
	Re	30				293,665
	Re # Mi b	31				311,127
	Mi	32				329,628
	Fa	33				349,228
	Fa # Sol b	34				369,994
	Sol	35				391,995
	Sol # La b	36				415,305
	La	37				440,000
	La # Si b	38				466,164
	Si	39				493,883
	Do	40				523,251
	Do # Re b	41				554,365

Re	42			587,330
Re # Mi b	43			622,254
Mi	44			659,255
Fa	45			698,456
Fa # Sol b	46			739,989
Sol	47			783,991
Sol # La b	48			830,609
La	49			880,000

En la columna 1, se puede ver la numeración de siete notas musicales; en 2, se ve el teclado de blancas y negras para los semitonos; en la columna 3, N corresponde al número de teclas; en un teclado de piano profesional, se tiene un total de 88 teclas: 36 negras y 52 blancas, lo que alcanza hasta 8 octavas. La columna 4 S corresponde a los semitonos que permiten calcular las frecuencias y van de 0 a 12. En la columna 5, se tiene la razón de  $S/12$ . En la columna 6, se tiene el resultado que corresponde al valor de 2 elevado a la razón como potencia y, por último, en la columna 7 se adquiere el producto de la frecuencia base de 55 Hz con el valor anterior.

La segunda octava se logra al multiplicar por 2 la primera octava y así sucesivamente hasta la tecla 49. En el caso de la nota más alta que tiene un piano, alcanza 4186.01 Hz, que corresponde a la nota Do<sub>7</sub>; puede ser que algún instrumento musical pudiera alcanzar notas más altas, pero resulta interesante que, aunque el oído humano es capaz de escuchar este tipo de sonido, no resulta audiblemente agradable; por el contrario, resulta muy molesto, tanto que, en algunos casos, se ha utilizado como tortura; así, hasta llegar a los 20.000 Hz, cuando el oído deja de oír, de modo que se considera el umbral superior; en adelante, las vibraciones no audibles se consideran sonidos ultrasónicos.

### Eco localización

En la naturaleza se encuentran oídos capacitados para oír este tipo de vibraciones; en el caso de los mamíferos, varios tienen la capacidad de oír sonidos por encima del umbral sonoro, como ratas, ratones, gatos; en el caso de los murciélagos (orden Chiroptera, aunque no todas las especies del orden los utilizan), los chillidos los originan en la laringe y los emiten a través de la nariz o por la boca abierta, con frecuencias comprendidas entre 14.000 y 100.000 Hz; la mayoría están en el orden ultrasónico; de igual forma ocurre con la mayoría de **delfines** (familia Delphinidae) y **cachalotes** (*Physeter macrocephalus*), que utilizan la eco-localización para encontrar alimento en las profundidades oscuras de los mares y ríos (figura 5.26). Entre las aves que utilizan este sistema para navegar en cuevas sin visibilidad están: el **guácharo** (*Steatornis caripensis*), los **vencejos y salanganas** (familia Apodidae), entre otros; igual ocurre en el mundo de los insectos.

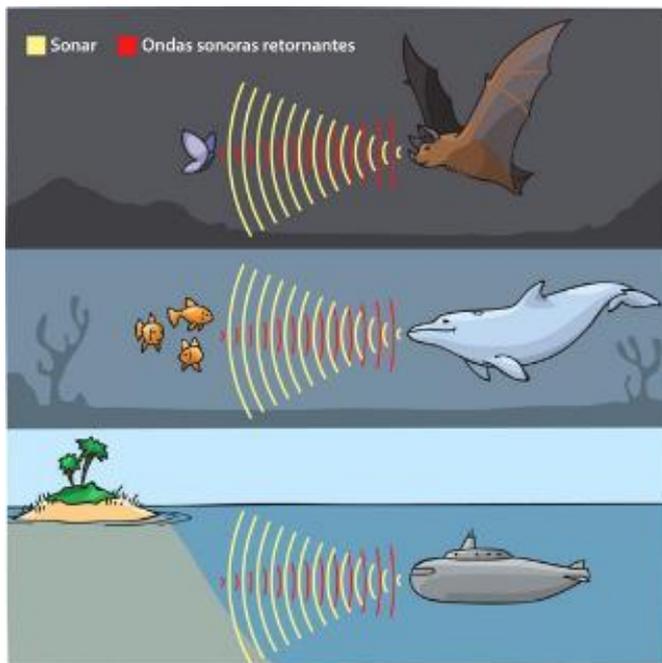


Figura 5.26.

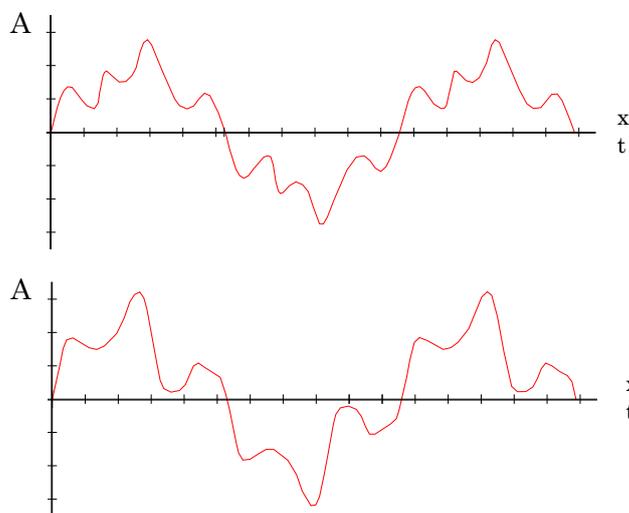
Esquema de eco localización de un murciélago, de un delfín y de un submarino, para encontrar accidentes geográficos del fondo y la costa marina.

Fuente: <https://askabiologist.asu.edu/eco-localizacion>

La eco localización también se utiliza en el diagnóstico médico y en el campo de la ingeniería; como aplicación tecnológica en la parte médica e ingeniería, este sistema de eco localización recurre al ultrasonido para realizar ecografías. Como la energía de las ondas depende del cuadrado de la frecuencia, entonces al aumentar la frecuencia adquieren propiedades capaces de penetrar medios mucho más densos

• **Timbre.** Como característica fundamental de la voz humana, resulta que cada persona tiene su propia voz inconfundible y reconocible entre otras voces; de igual forma, en los instrumentos musicales, aquel que hubiera oído el sonido de una guitarra española, no la podrá confundir con un arpa, un charango o una bandola, aunque todos estos instrumentos tienen caja sonora y cuerdas vibrantes, pero cada uno tiene su propio timbre. Y mucho más si el sonido se compara entre instrumentos musicales de cuerdas y de vientos: a pesar de que se afinan con la misma nota musical, cada uno sonará de forma muy distinguible frente a otro. Así que la pregunta será: ¿en qué se diferencian unos sonidos de otros, si vibran con la misma frecuencia? En un análisis cuidadoso de la forma de las ondas, se puede observar que la forma de la onda sonora de dos instrumentos musicales, a pesar de que se afinan en la misma nota, no es igual; en la figura 5.27 se puede observar cómo, en el registro de dos instrumentos musicales afinados en la nota La, a 440 Hz la forma de la onda es muy diferente una de otra. De un modo extraordinario el cerebro logra memorizar estos registros y los registros de la voz humana mucho más complicados;

cuando se escucha, no solo reconoce el timbre de voz, sino el instrumento y la persona dueños de ese registro.



**Figura 5.27.**  
Diferente forma de la onda, aunque tienen la misma longitud de onda e igual frecuencia.

De modo que el timbre es función de la forma de la onda sonora. La ciencia y la tecnología electrónica han logrado que un mismo aparato electrónico pudiera sonar como una guitarra, un piano o una trompeta, debido a modelos matemáticos realizados en el siglo XVIII por C. Fourier, lo que se verá luego.

### 5.15 Superposición de ondas

Resulta muy cotidiano hablar de superposición de ondas, en este mundo de envión tecnológico, como la suma de dos o más ondas. Para el análisis, únicamente se tomarán dos ondas.

Sean las ondas:

$$\psi_1 = \psi_{10} \text{Sen}(w_1 t - k_1 x_1) \quad (5.15.1).$$

$$\psi_2 = \psi_{20} \text{Sen}(w_2 t - k_2 x_2) \quad (5.15.2).$$

Para facilidad de cálculo, se puede asumir que las ondas tienen algo en común como: que fueran monocromáticas, coherentes y homogéneas, lo que significa que son de igual longitud de onda, frecuencia y amplitud, por lo que se pueden escribir como:

$$\psi_1 = \psi_0 \text{Sen}(wt - kx_1)$$

$$\psi_2 = \psi_0 \text{Sen}(wt - kx_2).$$

De esta forma, al sumar estas funciones se tiene:

$$\psi = 2\psi_0 \text{Cos} \left( \frac{wt - kx_1 - wt + kx_2}{2} \right) \text{Sen} \left( \frac{wt - kx_1 + wt - kx_2}{2} \right) \quad (5.15.3).$$

$$\psi = 2\psi_0 \text{Cos} \frac{k}{2}(x_2 - x_1) \text{Sen}(wt - k\bar{x}) \quad (5.15.4).$$

En general, se puede escribir que  $A = 2\psi \text{Cos} \frac{k}{2}(x_2 - x_1)$  corresponde a la amplitud de la función resultante, de tal modo que se puede escribir como:

$$\psi = A \text{Sen}(wt - k\bar{x}) \quad (5.15.5).$$

Ahora bien, como la amplitud es función del coseno, que toma valores entre  $(0, \pm 1)$ , quiere decir que va a tomar dos valores para la amplitud; por tanto, se establecerán estas consideraciones:

### Interferencia constructiva en las ondas

Cuando  $\text{Cos} \frac{k}{2}(x_2 - x_1) = 1$ , en este caso la amplitud será:  $A = 2\psi$ , que es el máximo valor que puede tomar la amplitud; esto implica preguntarse: ¿cuándo el coseno toma el valor de 1?: “el coseno de un ángulo es 1 cuando el ángulo es cero o 180”; en general:  $\frac{k}{2}(x_2 - x_1) = n\pi$ ; ahora bien, como  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ , al remplazar, se tiene:

$$(x_2 - x_1) = n\lambda,$$

o sea que la diferencia de camino  $(x_2 - x_1)$  debe ser un múltiplo de la longitud de onda, con lo cual se tiene una interferencia constructiva.

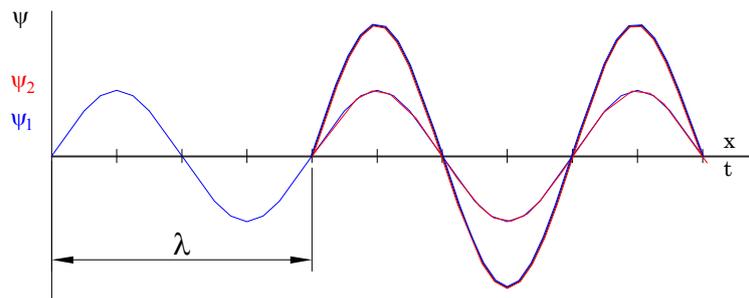


Figura 5.28.

Sobre la onda de color azul se superpone la onda de color rojo; como tienen la misma longitud de onda coinciden en todo después de encontrarse.

### Interferencia destructiva en las ondas

Cuando  $\text{Cos} \frac{k}{2}(x_2 - x_1) = 0$ , en este caso la amplitud será:  $A = 0$ .

Este es el mínimo valor que puede tomar la amplitud, lo que, una vez más implica preguntarse: ¿en qué valor del ángulo del coseno se anula? Y como respuesta a la pregunta será: cuando el ángulo es  $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ , en general:

$$\frac{(2n+1)\pi}{2}.$$

Con lo cual se tiene una interferencia destructiva, como se puede ver en la figura 5.29.

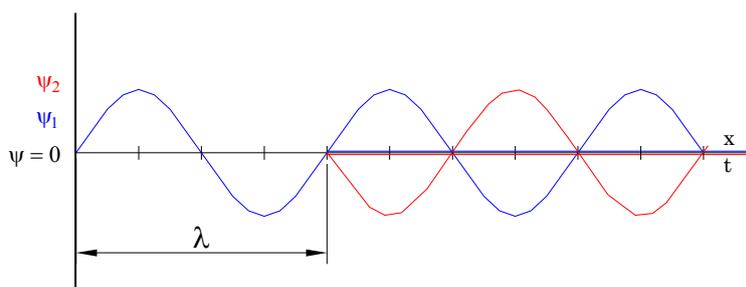


Figura 5.29.

Sobre la onda de color azul se superpone la de color rojo, con la condición de encuentro de media longitud de onda; por tanto, mientras la una es positiva la otra es negativa y el resultado es anularse, aunque tienen igual amplitud.

Este tipo de interferencia tiene que ver con los sistemas de insonorización de vehículos, en los que se conoce con el nombre de silenciadores; también, en las armas de fuego se suele utilizar para disminuir el sonido de la detonación.

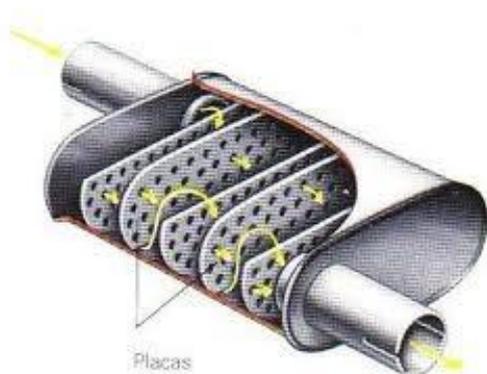


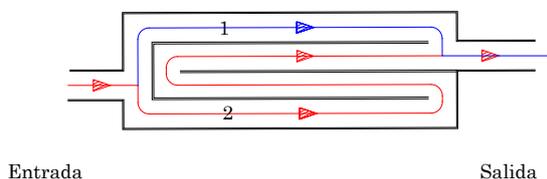
Figura 5.30.

Entre las aplicaciones están los silenciadores de los vehículos. En la ilustración se puede apreciar la serie de orificios que hay, con el fin de poder responder a la alta gama de frecuencias que generan los motores.

Fuente: (Imbaquingo, 2010, p. 9)

Entre las aplicaciones en la técnica, está la insonorización del ruido que produce la explosión del combustible en los motores de vehículos y todo aparato que tuviera un motor a gasolina o ACPM. En la Figura 5.30, se pueden ver los dos caminos  $x_2$  y  $x_1$  por los cuales puede viajar el sonido y los gases que salen del motor; por supuesto, el camino 2 es mucho más largo que 1, tan largo que, al encontrarse en el punto B, el camino 2 tiene media longitud de onda más largo que 1, lo que lleva a que los sonidos se anulasen por completo: “Esto siempre y cuando la longitud de onda coincida con las dimensiones de la caja; si no sucede así, puede ocurrir lo contrario; para

evitar este suceso, en la industria se encuentran silenciadores de motores de explosión interna de autos que pueden anular sonidos de diferentes longitudes de onda o frecuencia, tal como se puede ver en la Figura 5.30. Los múltiples agujeros en los ductos de salida logran anular la mayoría de las frecuencias producidas por el motor.



**Fig. 5.31**  
Esquema de los caminos que realiza el sonido en un silenciador de motor de explosión

Si se tratara de una sola frecuencia el sistema de anulación del sonido es como se muestra en la figura 5.31

En el caso de armas de fuego con silenciador (figura 5.32), es mucho más fácil, debido a que la explosión siempre va a tener la misma frecuencia; por tanto, el sistema es más simple y determinado para cierta frecuencia, muy propia del arma.



**Figura 5.32.**  
Las armas de detonación pueden estar equipadas con un silenciador de una única frecuencia, que corresponde a la de la detonación.  
Fuente: (Perozo, 2016).

En general, de una fuente sonora se puede obtener dos sonidos que al superponerlos dependiendo del desfase entre ellos se obtiene una interferencia constructiva o destructiva

Con el trombón de laboratorio (figura 5.33) se puede demostrar la interferencia constructiva y destructiva del sonido, pero, en la música, el sistema de superposición de ondas sonoras se establece para generar sonidos de frecuencias similares a las obtenidas en el piano, por lo que, para ciertos gustos, el sonido del trombón resulta muy agradable.



**Figura 5.33.**  
En la música, el trombón utiliza la superposición de ondas para producir una gama de frecuencias y no para producir silencio o sonidos más fuertes; se logra al superponer en valores diferentes a los tratados para la superposición constructiva y destructiva.

Las diferentes frecuencias que se obtienen con el trombón se logran al superponer ondas de una misma fuente sonora (vibración de los labios del músico experto), cuando se recorre la vara del instrumento. El paso solo lo logra el experto, que sabe cuánto debe recorrer la vara para obtener la frecuencia requerida.

### Velocidad de grupo

La velocidad de propagación de una onda se ha definido como:

$$v = \frac{\lambda}{T},$$

En que, de acuerdo con la equivalencia de la longitud de onda y del periodo, la velocidad de propagación también se puede escribir como:  $v = \frac{w}{k}$ .

Cuando se tiene un tren de ondas, es posible enviar un mensaje con modulación o variación de la amplitud; de esta forma, se refiere a una señal de amplitud modulada, AM, y si se lleva a variar la frecuencia, sería una señal de frecuencia modulada, FM, algo que no se posibilitaría cuando se tiene una sola perturbación, con una frecuencia de un Hertz.

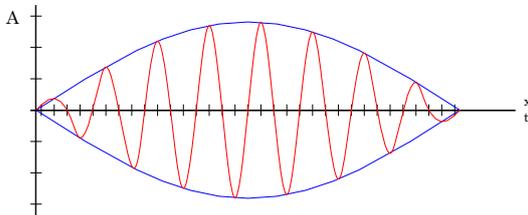


Figura 5.34.  
Pulso de onda armónica.

En el caso de tener una señal de AM, se tendría una señal de la forma de la figura 5.34, en la que se ve claramente cómo la amplitud cambia; en este caso se trataría de un pulso, de modo que cuando se refiere a la velocidad de la señal, se señala cómo viaja el pulso.

De modo aproximado, se considera una onda formada por dos frecuencias  $w$  y  $w'$ , muy cercanas, en que las amplitudes fuesen iguales; entonces, las funciones de onda pueden ser como las (5.15.1) y (5.15.2) que, al superponerse con las consideraciones realizadas, se tiene una ecuación similar a (5.12.3):

$$\psi = 2\psi_0 \cos\left(\frac{wt - kx_1 - w't + k'x_2}{2}\right) \text{Sen}\left(\frac{wt - kx_1 + w't - k'x_2}{2}\right)$$

$$\psi = 2\psi_0 \cos\frac{1}{2}((w - w')t - (k - k')x) \text{Sen}\frac{1}{2}((w + w')t - (k + k')x) \quad (5.15.6).$$

Como  $w$  y  $w'$  son muy cercanas, lo mismo ocurre con  $k$  y  $k'$ , entonces se podría reemplazar con un valor promedio; esto es:

$$\psi = 2\psi_0 \cos\frac{1}{2}((w - w')t - (k - k')x) \text{Sen}(\bar{w}t - \bar{k}x) \quad (5.15.7),$$

Lo cual representa un movimiento ondulatorio de amplitud modulada, donde la amplitud es:

$$A = 2\psi_0 \cos\frac{1}{2}((w - w')t - (k - k')x) \quad (5.15.8),$$

Donde la modulación de la amplitud corresponde a un movimiento ondulatorio, que se propaga con una velocidad:

$$v_g = \frac{w-w'}{k-k'} = \frac{dw}{dk} \quad (5.15.9),$$

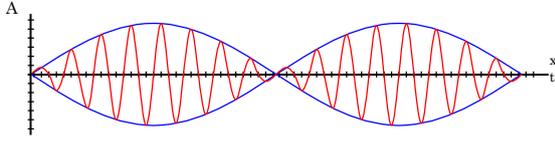


Figura 5.35.

Pulsaciones en una cuerda debido a dos frecuencias muy parecidas, que viajan con velocidad de grupo.

A la que se denomina velocidad de grupo y, como ya se ha dicho, es la velocidad de la señal. De acuerdo con la Figura 5.35, la onda sería la parte punteada.

De acuerdo con la figura 5.36,  $v = f(\lambda)$ ; aquí se tiene que:

$$\text{Tan} \alpha = \frac{CD}{BD} \text{ y esto es equivalente a: } \frac{dv}{d\lambda}$$

con lo cual se puede decir que  $CD = BD \text{Tan} \alpha$  o, lo que es lo mismo,  $CD = BD \frac{dv}{d\lambda}$ , pero  $BD = \lambda$ , entonces, se tendría:  $CD = \lambda \frac{dv}{d\lambda}$ .

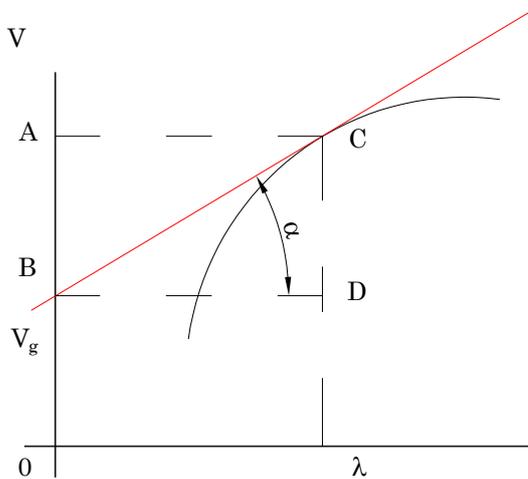


Figura 5.36.

La tangente en la curva del pulso define la derivada de la velocidad respecto a la longitud de onda.

Ahora bien:  $CD = AO - BO$ , que es lo mismo que  $CD = v - v_g$ ; al remplazar, se tiene:  $CD = v - v_g = \lambda \frac{dv}{d\lambda}$ ; de tal modo que la velocidad de grupo es:

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (5.15.5).$$

Se dice que cuando el medio es no dispersivo, entonces la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase; es decir, la derivada de la velocidad respecto a la longitud de onda es nula:

$$v_g = v$$

La ecuación (5.15.5) también se la puede expresar en términos del número de onda, así:  $v_g = v - k \frac{dv}{dk}$ . (Esta demostración se deja como ejercicio).

Funciones de Fourier

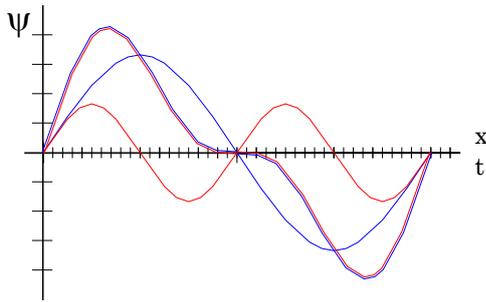


Figura 5.37. Resultado, en línea roja, de la superposición de dos funciones armónicas.

El siglo XVIII se caracterizó por dar ilustres científicos, cuyos trabajos aún hoy son motivo de investigación y aplicación; este es el caso del científico francés Jean Baptista Joseph Fourier (1768-1830), cuyo trabajo matemático novedoso y sin mayores aplicaciones técnicas en su momento, alcanzó enorme significado a finales de 1950, con el desarrollo de la electrónica transistorizada, la descomposición de funciones periódicas en series trigonométricas convergentes llamadas series de Fourier, con lo que, en principio,

permitió resolver la ecuación del calor, sirvió ahora para dar amplias aplicaciones a equipos generadores de sonido; como por arte de magia, los sintetizadores de los años 50 y 60 podían sonar como trompetas, guitarras y otros instrumentos; hoy pequeños teclados cuentan con un acopio de cientos de instrumentos sonoros de todo el mundo, aparatos que no se han visto, pero que, debido a este tipo de aparato, puede conocerse su sonido. La evolución de este tipo de tecnología ha llevado a generar la voz humana; así, máquinas robóticas contestan y dan instrucciones como si fueran verdaderas secretarías, con su propio timbre característico de voz robotizada. Así, entonces, cualquier función periódica puede describirse en varias funciones armónicas, con combinación de amplitudes, frecuencias y desfases. En esta parte del texto, solo se presentará una explicación general sobre esta temática, amplia y compleja.

Si  $f(t)$  es función periódica, entonces,  $f(t) = f(t + T)$  para cualquier tiempo. Así, sean las funciones  $x_1 = A_1 \text{Sen}(w_0 t)$  y  $x_2 = A_2 \text{Sen}(2w_0 t)$ ; al sumar estas funciones, se obtiene otra función periódica, como se puede ver en la Figura 5.37.

Aquí solo se han tratado dos funciones, pero pueden ser muchísimas. Así,  $f(t) = A_0 + [A_1 \text{Cos} w_0 t + A_2 \text{Sen} w_0 t + \dots +] + [B_1 \text{Sen} w_0 t + B_2 \text{Sen} w_0 t + \dots +]$

Al simplificar, se tiene:

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{Cos} n w_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \text{Sen} n w_0 t.$$

Como  $w = 2\pi f$ , entonces las frecuencias más altas son múltiplos enteros de la fundamental, de modo que:  $f_n = n f_1$ , donde:

$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$ ,  $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{Cos} n w_0 t dt$  y  $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \text{Sen} n w_0 t dt$ , en el caso de las ondas sonoras  $a_0 = 0$ .

Los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  representan las amplitudes de las  $n$ -ésimas armónicas, lo que resulta proporcional a  $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ ; por tanto, la intensidad de la onda resultante será

proporcional a  $A_n^2 + B_n^2$ ; es decir, cada armónico aporta en amplitud. Como se puede ver en la Figura 5.38, el timbre de un diapasón, como sonido fundamental, representado por una función sinusoidal única; el de una flauta, cuya onda sonora delata que hay más de un armónico; de igual modo, el timbre de un clarinete, cuya onda es más compleja.

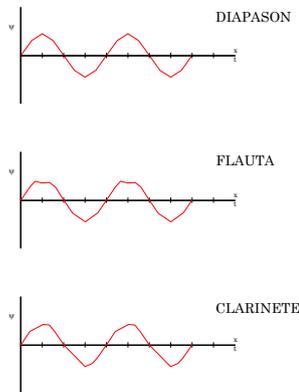


Figura 5.38. Timbre o forma de onda producida por un diapasón, flauta y clarinete.

Ahora bien, el análisis espectral de armónicos se puede ver en la Figura 5.39; en el caso de la flauta y el clarinete, tiene varios sonidos armónicos que, al sumarlos, dan el timbre característico de una flauta o un clarinete o cualquier instrumento musical; aun la voz humana, cantos de aves y gritos de animales, así que, con el avance de la electrónica, prácticamente es posible replicar cualquier sonido, por complejo que sea.

Los ingenieros electrónicos saben lo útil que resulta tener ondas cuadradas o dientes de sierra o cualquier otro tipo de onda, al depender

de la aplicación que se tuviera; como ejemplo, en la Figura 5.40 se representa una onda cuadrada de color rojo con los tres primeros armónicos de enésimos armónicos, que están de color negro, pero ya es suficiente para mostrar la tendencia de la onda cuadrada; obsérvese que la suma es de impares; es decir, que  $b_n = 0$  para todos los valores de  $n$ ; además, todos los armónicos tienen fase 0.

## 5.16 Instrumentos musicales

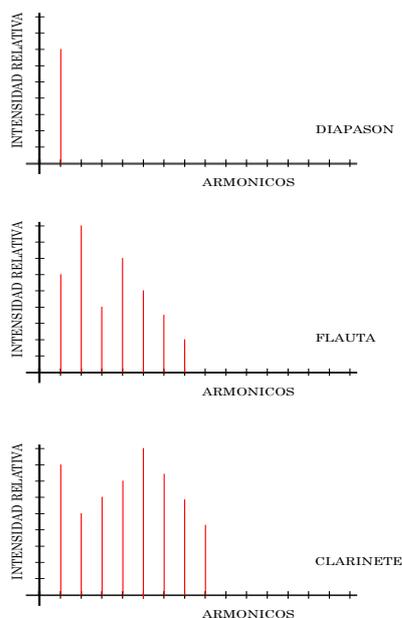


Figura 5.39. Número de armónicos e intensidad que conforman el timbre del diapasón, flauta y clarinete.

Desde tiempos inmemoriales, la especie humana ha buscado la forma de imitar los sonidos producidos por los animales, escuchar y llamar la atención de sus congéneres, razón por la cual los sonidos agradables de la música lo han acompañado siempre: desde producir sonidos con su instrumento bucal, al igual que lo hacen los animales, aves y demás, hasta elaborar instrumentos que pueden imitar la voz humana y cuanto sonido hubiera en la naturaleza. Las cuerdas sonoras fabricadas de tripas de animales (intestino delgado) parece que fueron uno más de los primeros instrumentos musicales; así, las cuerdas tensadas de los arcos de flechas, no solo son armas, sino también formaron parte del

origen de los instrumentos musicales, como se puede ver en la Figura 5.24, con arcos de flechas convertidos en arpas sonoras.

### Cuerdas vibrantes

Considérese una cuerda con una tensión  $T$ , fijada entre dos extremos fijos y de longitud  $l$  (Figura 5.41); en estas condiciones, la cuerda puede vibrar de este modo: al formar un solo vientre en el centro y nodos en los puntos donde se asegura, lo que indica que hay media longitud de onda o, lo que es decir lo mismo, hay una onda estacionaria que va desde el punto A hasta B y regresa; así que se puede decir que:  $l = 1 \frac{\lambda}{2}$ .

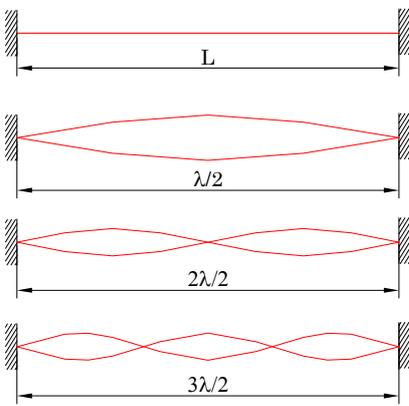


Figura 5.41. Diferentes formas de vibración de una cuerda.

Por otra parte, como la velocidad de propagación es  $v = \lambda f$ , donde la velocidad corresponde a la velocidad de propagación de la onda en una cuerda; es decir,  $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ , donde  $T$  es la tensión y  $\mu$  es la densidad lineal de masa.

Así que, al combinar estas tres ecuaciones, se tiene que:

$$f = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (5.16.2).$$

En esta ecuación, se puede observar que la cuerda puede tener varias formas de vibración, aun conservando la misma tensión, a lo que se lo denomina sonido fundamental, cuando hay un solo vientre y, en seguida, primer armónico, segundo armónico, y así sucesivamente.

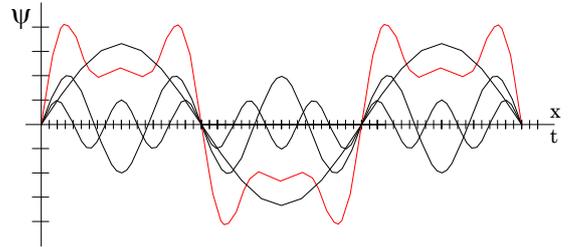


Figura 5.40. Las superposiciones de funciones armónicas, con especificaciones bien determinadas, definen funciones muy importantes, como, en este caso, la

En la tercera fila se puede observar que hay dos vientres y tres nodos; es decir, hay una longitud de onda completa o, lo que es decir lo mismo, hay dos medias longitudes de onda:  $l = 2 \frac{\lambda}{2}$ ; en el siguiente, se puede ver que hay tres vientres y 4 nodos o, lo que es decir lo mismo, hay tres medias longitudes de onda:  $l = 3 \frac{\lambda}{2}$ ; al generalizar, se puede concluir que:

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad (5.16.1).$$

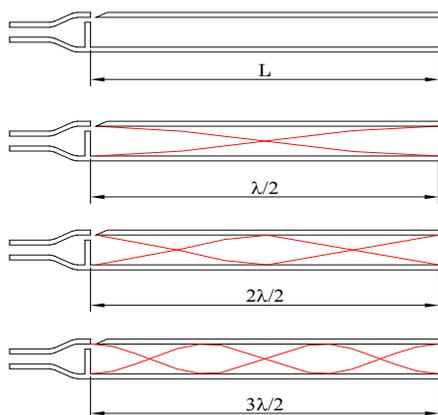


Figura 5.42. Modos de vibración del aire dentro de un tubo abierto.

### Tubos sonoros abiertos

Entre los instrumentos musicales están los tubos sonoros abiertos, como es el caso de los silbatos de niños exploradores y, en muchos casos, son utilizados en el deporte por jueces y árbitros, como en el caso del fútbol, básquetbol, entre otros. Entre los instrumentos musicales están: flautas, quenás, zampoñas y tubos de órganos.

Como se puede ver en la figura 5.42, el tubo sonoro se abre en ambos extremos; es decir, la condición de frontera, en este caso de ondas estacionarias, radica en que en los extremos del tubo debe haber vientres y en el centro un nodo. Al observar en la Figura 5.42, se puede apreciar que, en realidad, a lo largo del tubo se ha formado media longitud de onda; esto es:  $l = 1 \frac{\lambda}{2}$ ; en la siguiente figura, a lo largo del tubo se ha formado  $l = 2 \frac{\lambda}{2}$  y en la que sigue se tiene:  $l = 3 \frac{\lambda}{2}$ ; es decir que, en términos generales, se tienen múltiplos impares de  $\lambda/2$ .

$$l = n \frac{\lambda}{2} \quad (5.16.3).$$

Por otra parte, la velocidad de propagación del sonido se escribe como:  $v = \lambda f$ , de tal forma que, al combinar estas expresiones, se tiene que la frecuencia es:

$$f = \frac{n}{2l} v \quad (5.13.4),$$

donde la velocidad referida corresponde a 340 m/s.

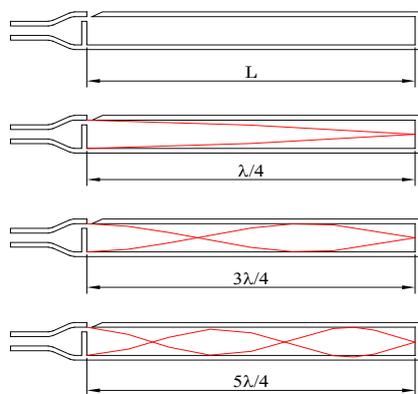


Figura 5.43. Modos de vibración del aire dentro de un tubo cerrado.

### Tubos sonoros cerrados

Como parte de los instrumentos musicales de viento también están los tubos sonoros cerrados (figura 5.43); este es el caso de trompetas, trombones, bombardas y todos aquellos que necesitan vibración de los labios entre la boquilla del instrumento, como, también, en aquellos que tienen su propio medio de vibración, como es el caso de saxofones, clarinetes, entre otros. Como característica fundamental se presenta que hay puntos de contacto con el aire; donde se genera la

vibración corresponde al pabellón del instrumento, lo que lleva a que las condiciones de frontera constituyen un vientre para esta zona y un nodo donde se produce la vibración mecánica del instrumento (labios, lengüeta, lámina, etc.); como esquema de estos instrumentos se puede ver en la figura 5.43; en la primera figura se observa que la longitud del tubo corresponde a un cuarto de longitud de onda; esto es:  $l = 1 \frac{\lambda}{4}$ ; en la siguiente figura, se tiene:  $l = 3 \frac{\lambda}{4}$  y, en general, se tiene:

$$l = (2n + 1) \frac{\lambda}{4} \quad (5.16.5).$$

Por otra parte, la velocidad de propagación, como se ha visto en el caso anterior, es:  $v = \lambda f$ ; al combinar, como se ha realizado, se tiene:

$$f = \frac{(2n+1)}{4l} v \quad (5.16.6).$$

Como ya se dijo, la velocidad de propagación es la velocidad del sonido en el aire; se precisa esto porque también pueden funcionar en atmósferas diferentes a la del aire y, por supuesto, en estos medios la velocidad de propagación es diferente, lo que lleva a que cambiaran la frecuencia.

Como aplicación de estos tubos sonoros abiertos y cerrados, aparte de los instrumentos musicales, también se halla en arquitectura, en la parte de sonorización e insonorización de ambientes, como alcobas, salones y auditorios. Es muy importante en la construcción de salones de clase definir las medidas, para que no se produzcan resonancias molestas al funcionar como tubos sonoros abiertos o cerrados; en general, al abrir las puertas se convierten en tubos sonoros cerrados, donde el foco emisor de la onda sonora es el expositor; en el caso de tener salones cerrados, se comportan como cajas cerradas, con ondas estacionarias.

### Ejemplo

¿Cuál es la frecuencia sonora de un salón de clases, cuya longitud es de 8 m?

### Solución

Se ha dicho que los salones se comportan como tubos sonoros cerrados; por tanto, la ecuación de la frecuencia fundamental es igual a la de un tubo abierto, solo que la condición de frontera es un nodo:  $f = \frac{n}{2l} v$ ; entonces:

$$f = \frac{1}{8d} 340 = 21.3Hz.$$

## 5.17 Efecto Doppler

Christian Andreas Doppler fue científico austriaco (1803-1853), físico y matemático, con dificultades laborales, que se immortalizó con el principio que lleva su nombre.

La mejor forma de detectar el efecto Doppler es oír a una ambulancia cuando se acerca y cuando se aleja; de inmediato se distingue la diferencia en el tono de la sirena al pasar de un evento al otro, lo que depende de la velocidad con que viaje la ambulancia: entre mayor sea la velocidad, el efecto es mucho más marcado; de igual modo ocurre cuando se observan las competencias de Fórmula 1 y las cámaras enfocan a los carros que se acercan y, luego, cuando se alejan.

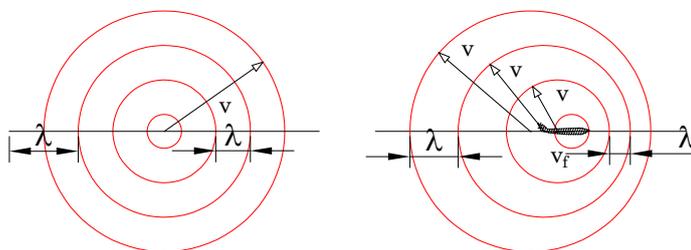


Figura 5.44.

Frentes de onda: a) cuando la fuente está en reposo y el medio es isótropo los frentes de onda son concéntricos; b) cuando la fuente tiene movimiento en un medio isótropo, los frentes de onda esféricos no son concéntricos.

Para que hubiera cambio en el tono del sonido, significa que la frecuencia cambia; es decir, cuando la fuente sonora se acerca hacia el observador (en este caso, el oyente), se percibe una frecuencia más alta, comparada con la frecuencia cuando la fuente sonora se aleja; como la velocidad del sonido es constante en cualquier dirección en un medio isótropo, entonces ocurre que la longitud de onda también cambia y justamente esto es lo que se va a demostrar:

$$v = \lambda f \quad (5.17.1).$$

Como se puede ver en la ecuación (5.17.1), si la frecuencia aumenta, la longitud de onda disminuye, para mantener la velocidad constante. Tal como se puede ver en la figura 5.44, mientras la fuente se encuentra en reposo y bajo un medio isótropo, los frentes de onda se desplazan y forman esferas concéntricas, pero, en el evento en que la fuente, en este caso un avión, se moviera, los frentes de onda que están por delante del avión se estrechan y llevan a que la longitud de onda disminuyera y, por tanto, la frecuencia aumentará, mientras que los frentes de onda que están por detrás del avión se ensanchan y llevan a que la longitud de onda se alargue, situación que puede llegar al extremo. En la figura 5.45 se puede ver que cuando la velocidad de la fuente fuese igual a la velocidad del sonido, no habría espacio para que se

formasen frentes de ondas separadas; en consecuencia, los frentes de onda se suman para formar un muro de alta energía y, en el caso en el que la fuente superase a la velocidad del sonido, se advierte que la fuente ha roto la barrera del sonido; en este caso se tiene una fuente con velocidad supersónica y, como consecuencia de esto, se forma una onda de choque explosiva de alta energía, que se escucha como una única explosión, como es el caso de la caída de un rayo: allí la descarga eléctrica se desplaza de forma supersónica; por tanto, genera una onda explosiva que es el trueno que, por acción de la reflexión del sonido, al rebotar en las montañas, se oye siempre una secuencia de sonidos.

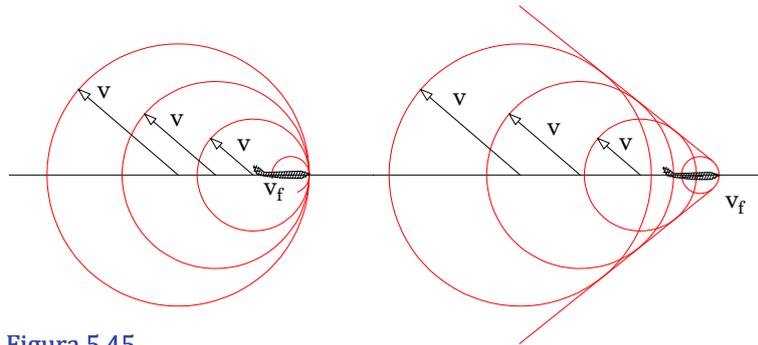


Figura 5.45.

Frentes de onda: a) agolpados uno encima de otro, cuando la velocidad de la fuente es igual a la velocidad de propagación; en este caso, se tiene la barrera del sonido; b) cuando a la velocidad de propagación de los frentes de onda la supera la velocidad de la fuente, se tiene la onda de choque u onda explosiva.

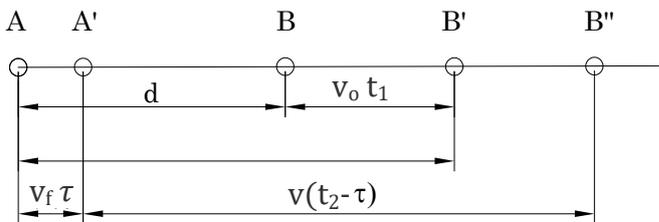


Figura 5.46.

Geometría del acontecimiento entre la fuente, el observador y la velocidad de propagación.

Sobre la Figura 5.46, se establece el análisis matemático. Como la fuente emite señales periódicas cada  $\tau$  segundos, entonces, cuando se encuentra en A emite una primera señal justamente cuando el observador se encuentra en B, que se encuentra separado a una distancia  $d$ ; mientras la señal viaja

a la velocidad del sonido  $v$ , el observador también se mueve con velocidad  $v_o$ , de tal modo que la señal le da alcance al observador en B'; es decir, mientras el sonido recorrió la distancia  $vt_1$ , el observador ha recorrido:  $v_o t_1$ ; esto es:

$$vt_1 = d + v_o t_1$$

$$t_1(v - v_o) = d$$

$$t_1 = \frac{d}{v - v_o} \quad (5.17.2).$$

Ahora bien, mientras esto ocurre en el periodo  $\tau$ , la fuente pasa de A'; es decir, recorre una distancia  $v_f\tau$ ; ahora, desde A' emite una nueva señal, que da alcance al observador en B"; entonces, esta segunda señal, medida desde A, recorre una distancia  $v(t_2 - \tau) + v_f\tau$  y el observador recorre  $d + v_0t_1 + v_0(t_2 - t_1)$ ; de modo que, al igualar, tal como aparece en la gráfica, se tiene:

$$v(t_2 - \tau) + v_f\tau = d + v_0t_1 + v_0(t_2 - t_1)$$

$$vt_2 - v_0t_2 = d + v\tau - v_f\tau$$

$$t_2 = \frac{d + \tau(v - v_f)}{v - v_0} \quad (5.17.3).$$

A partir de las dos ecuaciones, se puede encontrar la diferencia de los tiempos:  $t_2 - t_1 = \tau'$  y esto sería el periodo de la señal que ha oído el observador; de modo que:

$$t_2 - t_1 = \tau' = \frac{d + \tau(v - v_f)}{v - v_0} - \frac{d}{v - v_0}$$

$$\tau' = \tau \frac{v - v_f}{v - v_0} \quad (5.17.4).$$

En esta ecuación, se puede ver cómo el periodo de la señal que ha oído el observador no es igual a la emitida, pues depende de las velocidades del observador y de la fuente. Ahora bien, como la frecuencia es el inverso del periodo:  $f = \frac{1}{\tau}$ , entonces, la expresión se puede escribir como:

$$f' = f \frac{v - v_0}{v - v_f} \quad (5.17.6).$$

Con esto, se pueden analizar estos casos:

1) Cuando el observador se encuentra en reposo, significa que la velocidad:  $v_0 = 0$ ; entonces, la fuente se acerca o se aleja:

$$f' = f \frac{v}{v \pm v_f}.$$

2) Cuando la fuente permanece en reposo y el observador se acerca o se aleja:

$$f' = f \frac{v \pm v_0}{v}.$$

3) Cuando el observador y la fuente se mueven a la vez:

$$f' = f \frac{v \pm v_0}{v \pm v_f}.$$

## Ejemplo

Una fuente sonora produce un sonido cuya frecuencia es de 440 Hz. Calcular la frecuencia que oye el observador en los casos anteriores: cuando el observador está en reposo y la fuente se acerca con una velocidad de 80 km/h.

- 1) Cuando el observador está en reposo y la fuente se acerca con una velocidad de 80 km/h:

$$f' = 440 \frac{340}{340 - 22,22} = 470,77 \text{ Hz.}$$

- 2) Cuando se aleja:

$$f' = 440 \frac{340}{340 + 22,22} = 413,01 \text{ Hz.}$$

- 3) La fuente está en reposo y el observador se acerca a una velocidad de 60 km/h:

$$f' = 440 \frac{340 + 16,67}{340} = 461 \text{ Hz.}$$

- 4) Cuando se aleja:

$$f' = 440 \frac{340 - 16,67}{340} = 418,43 \text{ Hz.}$$

- 5) Algunas combinaciones con las velocidades de la fuente y del observador. Cuando ambos se acercan:

$$f' = 440 \frac{340 + 16,67}{340 - 22,22} = 493,85 \text{ Hz.}$$

En este caso, se tiene un sonido con la mayor frecuencia, producido por el movimiento relativo entre la fuente y el observador.

Ahora bien, quedan por analizar los casos cuando las direcciones de las velocidades se encuentran en direcciones diferentes. Para estos casos, conviene mejorar la expresión (5.14.6) que se la puede escribir como:

$$f' = f \frac{1 - v_0/v}{1 - v_f/v}$$

Esto se puede escribir como:  $f' = f \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) \left(1 - \frac{v_f}{v}\right)^{-1}$ ; al efectuar la aproximación:

$$f' = f \left(1 - \frac{v_0}{v}\right) \left(1 + \frac{v_f}{v}\right) = f \left(1 + \frac{v_f}{v} - \frac{v_0}{v} - \frac{v_0 v_f}{v^2}\right).$$

Cuando la fuente o el observador están en reposo, el cuarto término será cero y, en el caso en que hubiera velocidad en uno de ellos, el término siempre será muy pequeño, por lo se puede despreciar y, entonces, una buena aproximación será:

$$f' = f \left( 1 - \frac{v_0 - v_f}{v} \right).$$

Por lo que hay una velocidad relativa entre el observador y la fuente:  $v_0 - v_f = v_{of}$

$$f' = f \left( 1 - \frac{v_{of}}{v} \right).$$

Ahora bien, en el caso cuando las direcciones no coinciden, entonces el movimiento relativo entre el observador y la fuente están bajo una componente cartesiana; es decir:

$$f' = f \left( 1 - \frac{v_{of} \cos \theta}{v} \right) \quad (5.17.7).$$

Por ejemplo, en el caso anterior se asume que la dirección del observador respecto a la fuente es de  $35^\circ$ ; además, se acercan uno a otro:

$$f' = 440 \left( 1 - \frac{(22,22 + 16,67) \cos 35}{340} \right) = 398,77 \text{ Hz.}$$

### Ondas de choque



Figura 5.47. Perfil de la onda de choque generada por la velocidad supersónica de la nave de combate Fuente: <https://n9.cl/0uj0i>

Ahora, algo de atención: cuando la velocidad de la fuente supera a la velocidad del sonido aparece la onda de choque; en la figura 5.47 y 5.48, se observa el instante cuando el avión de combate rompe la barrera del sonido y se forma el cono de aire condensado de alta energía, que corresponde al frente de onda de choque, un muro de aire de alta presión y cargado de mucha energía, de oírse será como una explosión la intensidad; depende de la distancia a la que pase la aeronave.



Figura 5.48.

Vista frontal de la onda de choque generada por una nave de combate al vencer la barrera del sonido.

Fuente: Ensign John Gay, U.S. Navy (1999)

La velocidad supersónica se mide en relación con la velocidad del sonido: si es igual será un Mach; si es dos veces la velocidad del sonido, entonces serán dos Mach, así sucesivamente.

En 1960 se construyó el X-15, un avión norteamericano impulsado por un cohete hipersónico; esta aeronave logró un registro aún no superado, al volar a 6.7 Mach, lo que es lo mismo a 8200  $km/h$  o 2,27  $km/s$ ; además, logró alcanzar el registro de hacer el vuelo más alto, que se aproximó a los 100 Km de altura.

El mítico Concorde dejó un registro como la aeronave para pasajeros más rápida que hubiera volado, a 2150  $Km/h$ ; es decir, 597  $m/s$ , lo que significa 1,76 Mach.

Sin embargo, hay otros cuerpos que irrumpen en la atmósfera con velocidades supersónicas cercanas a los 70.000  $Km/h$ ; es decir, 57 Mach, como ocurrió con un meteorito que cayó en Rusia, el 15 de febrero del 2013, y dejó muchísimas afectaciones en estructuras y seres vivos; millares de estos cuerpos, pero de menor tamaño, caen a diario a la superficie de la tierra.

En la vida cotidiana, sonidos supersónicos se logran de forma sencilla, como cuando se sacude una franela de forma violenta: el extremo del material gira tan rápido, que puede vencer la velocidad del sonido y de allí el chasquido característico.

El efecto Doppler se utiliza con amplitud en astrofísica; es más, cuando Doppler lo propuso en 1830, intentó dar una explicación al color de las estrellas; en el caso de las estrellas con tendencia al color rojo, la explicación que dio Doppler fue el alejamiento que se presenta, de forma relativa, entre sistema solar y la estrella y lo contrario para las estrellas de tendencia al color azul; para validar la teoría, Doppler planteó un experimento, que consistía en movilizar a una banda de músicos a bordo de un tren, en que, al pasar frente a una estación, músicos expertos podían oír la variación del sonido, tanto al acercarse como al alejarse de la estación.

Aplicaciones en medicina

Entre tantas aplicaciones técnicas del efecto Doppler, con la ayuda de los ultrasonidos, se encuentra el cálculo de velocidades de flujos de fluidos a través de tuberías, lo que permite diagnosticar temprano probables obstrucciones debido a disminución de diámetros por sedimento acumulado en las paredes, técnica que se utiliza muy bien en el diagnóstico médico para analizar el comportamiento anormal del flujo dinámico de la sangre a través de las arterias y cuanta anomalía implicase la modificación de las velocidades estándar.

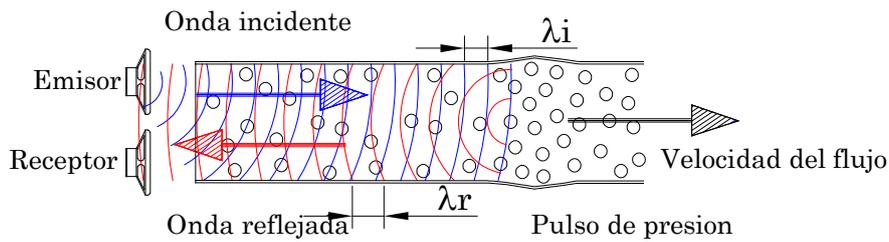


Figura 5.49.

Debido a la elasticidad en las paredes de las arterias, se produce una leve deformación en su diámetro; la onda ultrasónica incidente se refleja al encontrar el cambio de presión, de tal modo que el diagnóstico debe ser en función de la intensidad de la onda reflejada de las arterias que mide el

Como marcadores naturales, en el caso de la sangre, son los mismos componentes, tal como glóbulos rojos leucocitos y demás, que viajan con el torrente sanguíneo, pero pueden producir rebotes de la onda ultrasónica incidente; de acuerdo con la velocidad relativa de las partículas, el rebote de la onda lleva la información de la velocidad del torrente de acuerdo a la longitud de onda. Como se ve en la figura 5.49, la longitud de onda incidente es menor que la longitud de onda reflejada, cuando el torrente se aleja del emisor

El emisor o generador del ultrasonido se comunica electrónicamente con el receptor; entre los dos calculan la diferencia de onda, lo que permite calcular la velocidad con que viaja el torrente sanguíneo, así:

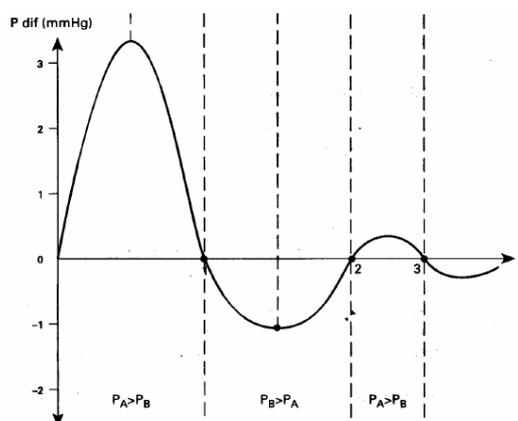
Como el equipo está en reposo, entonces la velocidad del observador es cero, mientras que las partículas del torrente se están moviendo; en este caso, se comportan como fuentes que se alejan o se acercan; por tanto, la ecuación será:  $f' = f \frac{v}{v \pm v_f}$ , donde  $v$  es la velocidad del sonido en la sangre,  $v_f$  es la velocidad de la sangre; al despejar la velocidad de la fuente, se tiene:

$$v_f = v \left( \frac{f - f'}{f'} \right) \quad (5.14.8).$$

En este caso, la velocidad de la fuente  $v_f$  es la velocidad del pulso de presión a lo largo de la arteria. La elección de la frecuencia de un rango que brinda el equipo debe

ser criterio del médico, según el examen que fuera a realizar; al final, el equipo le dará la velocidad y, de acuerdo con el contraste que se estableciera con las velocidades normales conocidas, habrá el diagnóstico.

En la Figura 5.52, se tiene un esquema de una arteria afectada por un taponamiento parcial o severo; el análisis Doppler permite diagnosticar este tipo de afección; si el espectro difiere con el que se muestra en la Figura 5.50, el médico radiólogo Luis Carlos Portilla lo explica así: la función Doppler aplicada en un ultrasonido se puede representar básicamente de dos formas: a través del color, donde, si es rojo, el flujo se acerca al transductor, y si es azul, cuando el flujo se aleja del transductor, a través de una gráfica que mide el desplazamiento del flujo sanguíneo en función de la velocidad y el tiempo, a la que se denominará onda espectral.



**Figura 5.50.**  
Perfil del espectro de la Figura 4.50.

La fisiología normal del flujo sanguíneo es de comprensión, fundamental para que se pudieran diferenciar los estados patológicos; para que existiera un movimiento de un líquido, se necesita tener un gradiente de presión; es decir, cuando la presión A es mayor que la de B, el flujo resulta hacia B o flujo anterógrado, y cuando la presión de B es mayor que la de A, el flujo es hacia A, es decir flujo retrógrado. Si se representa la curva de presión en un vaso arterial periférico, se obtendrá una gráfica como la correspondiente a la Figura 5.51, donde la presión A es la sístole de la contracción muscular cardiaca con flujo anterógrado, la presión B simboliza la contracción del músculo liso de las arteriolas distales con flujo retrógrado y su posterior relajación con flujo nuevamente anterógrado.

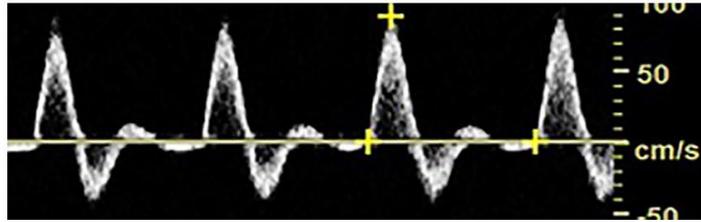


Figura 5.51.

Doppler espectral de vaso arterial de la pierna normal, tomado por ultrasonido. Fuente: (Kim et al., 2020 p. 3)

Cada onda espectral brinda información en cuanto a dirección, velocidad y aceleración; la dirección se determina en función de si la onda se encuentra por encima o por debajo del eje o línea de base; los flujos anterógrados se representan por encima de la línea de base y los flujos retrógrados por debajo. La información de la velocidad se determina en la distancia desde la línea de base a cualquier punto de inflexión de la onda y la información sobre la aceleración se establece a través de la pendiente de la curva.

Toda esta información en la onda es posible debido a la compliance (distensibilidad) arterial, que disminuye con la edad, la fibrosis y las calcificaciones, fenómenos frecuentes, que se encuentran asociados a la arterioesclerosis; por lo tanto, cualquiera de estos cambios que altere la luz y elasticidad de la arteria provocará cambios hemodinámicos y alteración en la forma de la onda espectral, representados principalmente por fenómenos de turbulencia, cambios en la aceleración y velocidades del flujo sanguíneo.

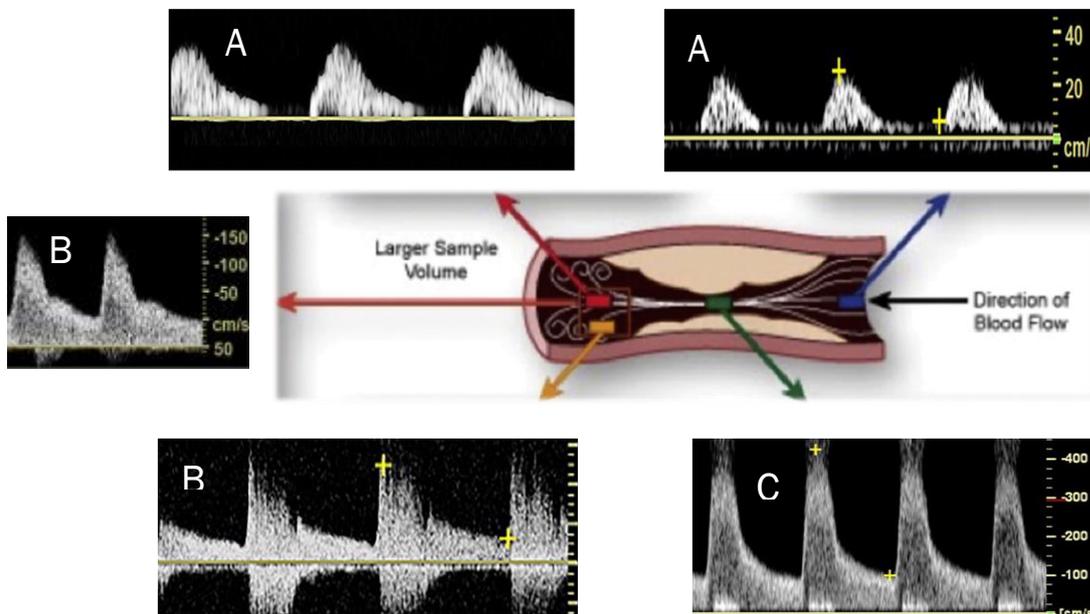


Figura 5.52.

Ejemplo de hallazgos de onda espectral Doppler en un vaso enfermo: A) Ondas con disminución de la aceleración y velocidad; B) Ondas con inversión de flujo por vórtices creados debido a turbulencia del chorro post-estenótico; C) Ondas con aumento de la velocidad de flujo de 400 cm/seg (valor normal hasta 120 cms/s). Fuente: (Kim et al., 2020).

Si se aplica este conocimiento a la vida real, se contextualizará con este caso clínico (ver figura 5.53):

Paciente de 80 años femenina, con antecedente de HTA y Diabetes Mellitus, acude por presentar dolor en los pies.

A) Lesión de tipo isquémico del primer dedo del pie derecho;

B) Ultrasonido que muestra arteria tibial anterior con irregularidad de su superficie por presencia de múltiples placas calcificadas (arterioesclerosis);

C) Estudio Doppler, con cambio en la forma de la onda espectral, que muestra áreas de turbulencia postestenóticas;

D) Onda con cambios en la velocidad, aceleración y pérdida del componente retrógrado tardus parvus (con disminución en la velocidad y aceleración), compatibles con estenosis crítica de la arteria tibial anterior secundaria a arterioesclerosis severa.

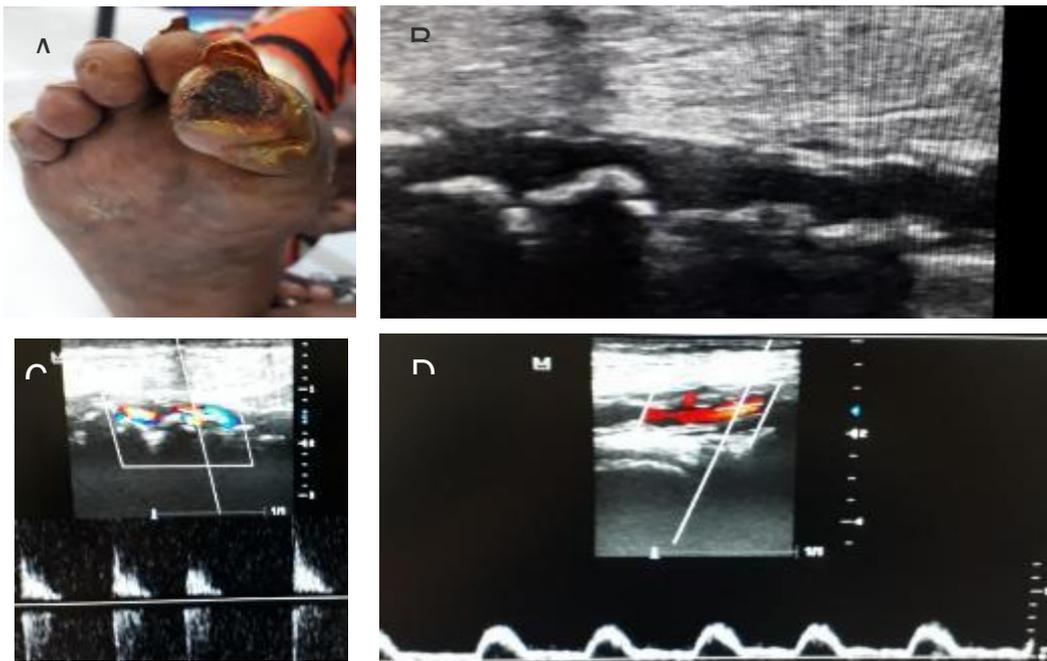


Figura 5.53.

Estudio de ultrasonido en escala de grises, Doppler color y espectral en una arteria enferma del miembro inferior derecho, realizado con equipo Mindray Z60. Fuente: (Portilla Montenegro, 2021)

# BIBLIOGRAFÍA

Alonso, M. y Finn, E. J. (1970). Física. Vol. 2: Campos y Ondas. Fondo Educativo Interamericano.

Borowitz, S. y Bornstein, L. A. (1968). A Contemporary View of Elementary Physics. McGraw-Hill.

Bronson, R. (1973). Ecuaciones diferenciales modernas. Serie Schaum. Mc Graw Hill.

Bruno-Alfonso, A., y Florêncio, A. S. (2004). Uma discussão sobre as densidades de energia em ondas mecânicas unidimensionais. Revista Brasileira de Ensino de Física, 26(3), 247-250.

Cromer, A. H. (1981). Física para las ciencias de la vida y la salud. Reverté.

Díaz, J. L., Jiménez Moreno, J. M. y López Rodríguez, M. (1982). La física en problemas. Las magnitudes físicas. Alhambra.

Ferdinand, P. B. (1988). Mecánica vectorial para ingenieros. Estática. Sexta edición. Mc Graw Hill.

Ferdinand P. B. (1988) Mecánica vectorial para ingenieros. Dinámica. Sexta edición. Mc Graw Hill.

Feynman, R., Leighton, R. B. y Sands, S. (1971). Lecturas de física. Vol. I. Addison-Wesley Iberoamericana.

Feynman, R., Leighton, R. B. y Sands, S. (1987). Lecturas de física. Vol. II. Addison-Wesley Iberoamericana.

Frish, S. y Timoreva, A. (s. f). Curso de Física General. Tomo I. MIR.

Frish, S. y Timoreva, A. (1968). Curso de Física General. Tomo II. MIR.

Frish, S. y Timoreva, A. (1977). Curso de Física General. Tomo III. MIR.

González Ibeas, J. (1974). Introducción a la Física y biofísica. Alhambra.

Hauser, W. (1969) Introducción a los principios de Mecánica. Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.

Hecht, E. (1974) Óptica. Teoría y 305 problemas resueltos. Serie de Schaum. Mc Graw Hill.

- Landau, L. y Ajieser, A. (1973). Física General. MIR.
- Maiztegui, A. y Sábato, J. A. (1974). Introducción a la Física. Tomos I. Kapelusz.
- Maiztegui, A. y Sábato, J. A. (1988). Introducción a la Física. Tomos II. Kapelusz.
- McKelvey, J. P. y Grotch, H. (1981) Física para Ciencias e Ingeniería. Tomo I. Harla.
- McKelvey, J. P. y Grotch, H. (1981) Física para Ciencias e Ingeniería. Tomo II. Harla.
- Roederer, J. G. (2002). Mecánica elemental. Eudeba.
- Serway, R. A. y Jewett, J. R. (2009). Física para ciencias e ingeniería, con Física Moderna. Séptima edición. Cengage Learning.
- Swokowski E. W. (1989). Calculo con Geometría Analítica. Segunda edición. Grupo editorial Iberoamericana.
- Tipler, P. A. (1995). Física. Reverté.
- Venegas, J. M. (1962). Texto de Física. Tomos I. Norma.
- Venegas, J. M. (1962). Texto de Física. Tomos II. Talleres de la litografía Colombia.
- Viennot, L. y Rozier, S. (1994). Pedagogical Outcomes of Research in Science Education: Examples in Mechanics and Thermodynamics. En P. Fensham., R. F. Gunstone y R. T. White. (Eds.). The content of Science: A Constructivist Approach to its Teaching and Learning (pp. 237-254). The Falmer Press.
- Watson, W. (1950). Curso de Física. Labor.
- Young, H. D. y Freedman, R. A. (2009). Física Universitaria. Tomos I. Pearson.

# REFERENCIAS

- Amazon. (2020). Retekeess TR604 AM Radio FM, radios portátiles con la mejor recepción, radio analógica con batería AC o D, con esfera transparente y perilla grande, para el hogar (plata). <https://www.amazon.com/-/es/Retekess-port%C3%A1tiles-recepci%C3%B3n-anal%C3%B3gica-transparente/dp/B08H8M1JSY?th=1>
- Aranguren, A. (2018). Aprende sobre la Bomba de aceite de un motor, partes y funcionamiento. Motoryracing. <https://www.motoryracing.com/coches/noticias/aprende-sobre-la-bomba-de-aceite-de-un-motor-partes-y-funcionamiento/>
- Ask A Biologist. (S.f.). *¿Qué es la eco localización?* <https://askabiologist.asu.edu/eco-localizacion>
- Cleynen, O. (2013). *Sondas Pitot y AoA en Global 6000*. [https://dewiki.de/Media/Datei:Pitot\\_and\\_AoA\\_probes\\_on\\_Global\\_6000.jpg](https://dewiki.de/Media/Datei:Pitot_and_AoA_probes_on_Global_6000.jpg)
- Concretos Prefabricar Y Construir. (2020, 31 de julio). Contamos con un amplio portafolio de soluciones en #concreto, para cada proyecto constructivo [publicación]. Facebook. <https://www.facebook.com/Concretos-Prefabricar-Y-Construir-110979417377577/photos/111296217345897>
- El espectador. (2021). *Noticias de René Descartes*. <https://www.elespectador.com/tags/rene-descartes/>
- Ensign John Gay, U.S. Navy. (1999). *FA-18 Hornet breaking sound barrier*. Wikimedia. [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FA-18\\_Hornet\\_breaking\\_sound\\_barrier\\_\(7\\_July\\_1999\).jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FA-18_Hornet_breaking_sound_barrier_(7_July_1999).jpg)
- Escribir canciones. (S.f.). *Alteraciones musicales*. <https://www.escribircanciones.com.ar/teoria-musical/4447-alteraciones-musicales.html>
- Evolución y ambiente. (2014). *Anomalías del agua*. <https://www.iieh.com/index.php/categories/evolucion-ambiente/de-fondo/anomalias-agua>
- Fernandez, S. (s.f) *Juguetes no aptos para alérgicos, celíacos e intolerantes*. Pinterest. <https://www.pinterest.es/pin/537758011747341969/>
- Fotografía de cotidiano. (2006). Sala de juegos para niños. Flickr. [https://www.flickr.com/photos/mural\\_virtual/242488824/](https://www.flickr.com/photos/mural_virtual/242488824/)
- Imaz Press Réunion. (2020, 10 de febrero). Première éruption de l'année 2020 au Piton de la Fournaise! [Publicación]. Facebook. <https://www.facebook.com/ipreunion/videos/premi%C3%A8re-%C3%A9ruption-de-lann%C3%A9e-2020-au-piton-de-la-fournaise-/170813430886013/>
- Imbaquingo, M. L. (2010). *Estudio de factibilidad para la creación de una empresa destinada a la fabricación de sistemas integrales de escapes para vehículos, tipo*

*tunning en la ciudad de quito* [Tesis de pregrado, Universidad Politécnica Salesiana sede Quito]. <https://docplayer.es/98446165-Universidad-politecnica-salesiana-sede-quito.html>

- Kim, E., Sharma, A. M., Scissons, R., Dawson, D., Eberhardt, R. T., Gerhard-Herman, M., Hughes, J. P., Knight, S., Kupinski, A. M., Mahe, G., Neumyer, M., Poe, P., Shugart, R., Wennberg, P., Williams, D. M. & Zierler, R. E. (2020). Interpretation of peripheral arterial and venous Doppler waveforms: A Consensus Statement from the Society for Vascular Medicine and Society for Vascular Ultrasound. *Vascular Medicine*, 1–23. [https://www.portailvasculaire.fr/sites/default/files/docs/interpretation\\_of\\_peripheral\\_arterial\\_and\\_venous\\_doppler\\_waveforms\\_-\\_a\\_consensus\\_statement\\_vm2020.pdf](https://www.portailvasculaire.fr/sites/default/files/docs/interpretation_of_peripheral_arterial_and_venous_doppler_waveforms_-_a_consensus_statement_vm2020.pdf)
- Leisure pro. (S.f). *Los 6 mejores paquetes de equipo de buceo*. <https://www.leisurepro.com/blog/scuba-gear/6-best-scuba-diving->
- Levitt, J. (S.f). *¿Eres un barómetro andante?* Upwellness. <https://www.upwellness.com/are-you-a-walking-barometer-2/>
- Lobotronix. (2014). *Los rayos x*. <https://lobo0129.wordpress.com/2014/02/page/2/>
- Medina, H. (2009). *Física 2*. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Morales, C., Rey, J. y Hernández, M. (2019). *Taller de Biología*. Madrid. <https://www.madrimasd.org/cienciaysociedad/taller/biologia/como-peza-agua/default.asp>
- Multiservicio automotriz 3h. (2011). *Suspensión del Automóvil*. <https://multiservicioautomotriz3h.blogspot.com/2011/09/suspension-del-automovil.html>
- Munuera, S. (2014). *Fotografiar agua congelada o efecto seda*. Fotos Wonderful. <https://fotoswonderful.wordpress.com/2014/08/24/agua-congelada-o-efecto-seda/>
- Perozo, H. (2016). *¿Cómo funcionan los silenciadores de las armas de fuego?*. Quora. <https://es.quora.com/C%C3%B3mo-funcionan-los-silenciadores-de-las-armas-de-fuego>
- Pixabay. (2018). *Globo de aire caliente*. <https://pixabay.com/pl/photos/balon-nagor%c4%85ce-powietrze-pi%c5%82ka-3864683/>
- Serway, R. A. y Jewett, J. R. (2008). *Física para ciencias e ingeniería*. Volumen 1 Séptima edición. Cengage Learning.
- Travis, L. (2018, 15 de octubre). *3 Magníficas Técnicas De Grabado Que Te Encantarán*. Frontsigns. <https://www.frontsigns.com/blog/3-engraving-techniques/>
- Van der Leun, G. (2008). *The last Polar Bear*. Frickr. <https://acortar.link/aBMiea>
- Vidal, D. (ed.). (S.f.). *Sistemas de unidades internacionales factores de conversión constantes físicas*. Grupo de Ingeniería y Biotecnología Ambiental, Centro de Ciencias Ambientales EULA-Chile, Universidad de Concepción.

<http://www.eula.cl/giba/wp-content/uploads/2017/09/sistemas-de-unidades-internacionales-factores-de-conversion-constantas-fisicas.pdf>

Wikipedia. (2019). *Hipsómetro*. <https://es.wikipedia.org/wiki/Hips%C3%B3metro>

Wikipedia. (S.f.). Escalas de dureza. [https://es.wikipedia.org/wiki/Escalas\\_de\\_dureza#Tabla\\_de\\_dureza\\_de\\_Mohs](https://es.wikipedia.org/wiki/Escalas_de_dureza#Tabla_de_dureza_de_Mohs)

Wikipedia. (S.f). *Color*. <https://es.wikipedia.org/wiki/Color>

Wikipedia. (S.f). *Ut queant laxis*. [https://es.wikipedia.org/wiki/Ut\\_queant\\_laxis](https://es.wikipedia.org/wiki/Ut_queant_laxis)

Wilkinson, C. (1921-1922 d.C.). *Mujeres músicos*. THE MET. <https://www.metmuseum.org/art/collection/search/557727?rpp=30&pg=1&ft=musician&where=Africa&pos=6>

Zheng, P. Greve, D. W. y Oppenheim, I. J. (2009). Multiphysics Simulation of the Effect of Sensing and Spacer Layers on SAW Velocity [Conferencia]. Boston. [https://www.comsol.com/paper/download/44427/Zheng\\_pres.pdf](https://www.comsol.com/paper/download/44427/Zheng_pres.pdf)

**Ling, S., Sanny, J y Moebis, W. (2021). *Física universitaria Vol 1*. Openstax. <https://openstax.org/books/f%C3%ADsica-universitaria-volumen-1/pages/17-3-intensidad-del-sonido>**

# Autor

## Luis Aphranio Portilla Salazar

Nació en Pupiales, el 25 de agosto de 1956. Hijo de Carlos Julio Portilla R. y Laurentina Salazar. Menor de ocho hermanos, inició sus estudios en la Escuela urbana de Varones de su ciudad natal; el bachillerato lo realizó en el Colegio de los Hermanos Maristas de Ipiales; se graduó como Licenciado en Matemáticas y Física, área mayor Física, en la Universidad de Nariño; como Ingeniero Industrial de la Universidad Cooperativa de Colombia, sede Pasto; se especializó en Empresas Constructoras, en el convenio de la Universidad de Nariño y Universidad del Valle; Especialista en Docencia Universitaria, con la Universidad de Nariño, y Doctor en Ciencias de la Educación, con Rudecolombia, de la que forma parte la Universidad de Nariño; asimismo, realizó estudios en el campo de Análisis de Estructuras, como también en Estadística.



# Editorial

Universidad de Nariño

Notas de clase de Física II es el resultado de más de 35 años de experiencia docente a nivel universitario con las asignaturas de: física I, II, III, Biofísica, Termodinámica, Óptica y mecanismos. tanto a estudiantes de la carrera de física como a servicios que lo solicitan.

Así que este libro recoge toda esa experiencia, aún, desde cuando fui estudiante de pregrado y como no recordar a los profesores José Eval Bacca, Enrique Caicedo y sobre todo al padre Remigio Fiore que si bien no nos cruzamos en el plan de profesor y alumno si me ayudó muchísimo en mis primeros años de trabajo como profesor hora catedra en la Universidad de Nariño con sus apuntes libros y consejos.

La experiencia adquirida como docente más la formación académica adquirida durante todos estos años me ha permitido elaborar estas notas de clase siguiendo una línea de construcción del conocimiento, razón por la cual, el libro está conformado por cinco capítulos que son: Hidrostática, Hidrodinámica, Deformación, Movimiento oscilatorio, y Ondas. Los conceptos analizados y demostrados en el primer capítulo son la base para el siguiente y así sucesivamente, esto ayuda al estudiante y en general al lector tener una lectura fluida, además el lenguaje utilizado es muy sencillo y cotidiano así que no hay palabras ni términos exigentes que en muchas ocasiones entorpecen la comprensión de lo expuesto.

Por otra parte, los procesos de demostraciones y ejercicios matemático se han desarrollado casi en su totalidad, entendiéndolo que nuestros estudiantes y lectores en muchos casos llegan con deficiencia cognitiva en matemáticas.

Respecto al diseño del libro las figuras y esquemas fueron realizadas en Auto-Caad. Software de diseño en ingeniería y arquitectura, dado a mi formación también como ingeniero Industrial, me permitió realizar las figuras de acuerdo a la necesidad de la redacción de las notas de clase.

Fotografías y tablas de módulos fueron tomadas de páginas de internet que no tenías ninguna reserva como material audiovisual y de manuales de las empresas manufactureras de los materiales en mención.

Finalmente, las notas de clase fueron escritas en Word y la parte matemática con el editor de ecuaciones de Word 3.0, para comprobar los resultados se utilizó Math de Cientific Word Place.

La bibliografía para escribir estas notas de clase aparece al final del libro y son libros convencionales que se ha utilizado a lo largo de todos estos tiempos.



**Editorial  
Universidad de Nariño**

ACREDITADA DE ALTA CALIDAD  
RESOLUCIÓN MEN 10547 – MAYO 23 DE 2017