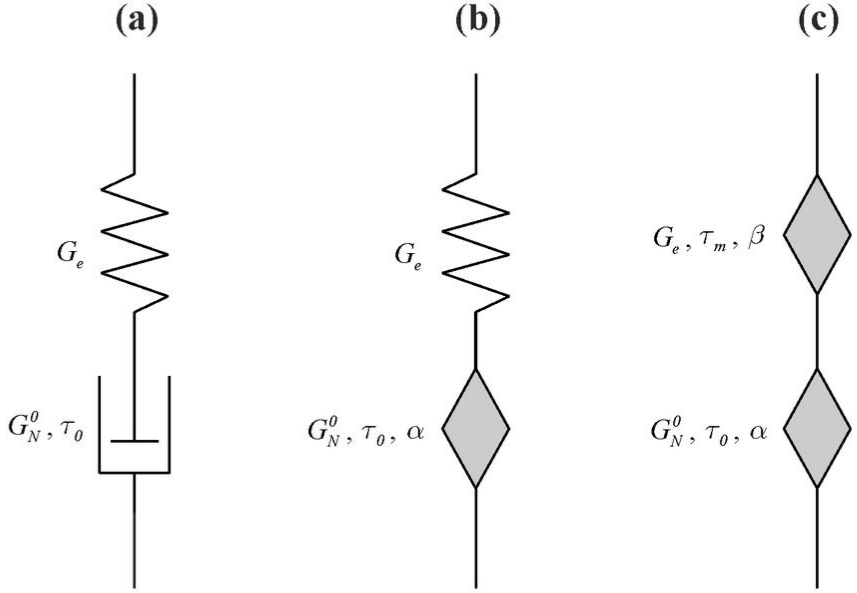
El Cálculo Fraccionario

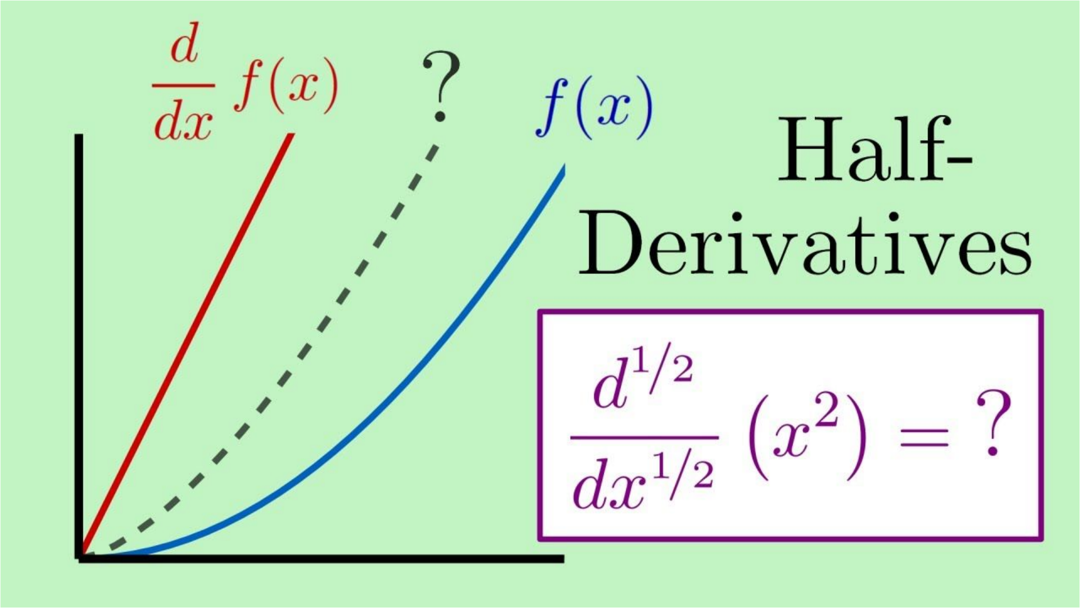


PhD Jorge Hernán López Melo

Apunte Histórico del Cálculo Fraccionario

El origen del cálculo fraccionario se remonta al año de 1695 cuando en la correspondencia entre L'Hopital y Leibniz nacía la pregunta acerca del significado de la derivada de orden 1/2.

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}\left(\frac{d^{1/2}f}{dx^{1/2}}\right)=\frac{df}{dx}$$



Algunas propuestas para la generalizar el Cálculo Clásico

$$\frac{d^n e^{ax}}{dx^n} = a^n e^{ax} \Longrightarrow \frac{d^\alpha e^{ax}}{dx^\alpha} = a^\alpha e^{ax}$$

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \frac{d^2 x^n}{dx^2} = n(n-1)x^{n-2}, \cdots \frac{d^k x^n}{dx^k} = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

$$k \in \mathbb{N} \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \qquad \frac{d^\alpha x^n}{dx^\alpha} = \frac{n!}{\Gamma(n-\alpha+1)} x^{n-\alpha} = D^\alpha(x^n)$$

La derivada de una constante:

$$D^{1/2}(x^0) = \frac{0!}{\Gamma(1/2)} x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}$$

Derivada de Grunwald-Letnikov

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\frac{f(x) - f(x-h)}{h} - \frac{f(x-h) - f(x-2h)}{h}}{h} \right\}$$

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^2} \{f(x) - 2f(x-h) + f(x-2h)\}$$

$$f^n(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - jh)$$

$$n \in \mathbb{N} \longrightarrow \alpha \in \mathbb{R}$$

$$f^{\alpha}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h^{\alpha}} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j!\Gamma(\alpha-j+1)} f(x-jh)$$

$$n = \frac{x-a}{h} \quad h \longrightarrow 0 \Longrightarrow n \longrightarrow \infty$$

$$f^{\alpha}(x) = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{x-a}\right)^{\alpha} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{j} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{j!\Gamma(\alpha-j+1)} f\left(x - \frac{j}{n}(x-a)\right)$$

Difícil!

Integral de Riemann-Liouville

$\alpha \longrightarrow -\alpha$: Integral de orden α

$$I^{\alpha}(f) = f^{-\alpha}(x) = \lim_{n\to\infty} h^{\alpha} \sum_{j=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha + j)}{j!\Gamma(\alpha)} f(x - jh) \quad h = \frac{x-a}{n} \quad a < x$$

Para $\alpha = 1$

$$I^{1}(f) = \lim_{n\to\infty} h \sum_{j=0}^{n} f(x - jh) = \int_{a}^{x} f(s)\, ds$$

Para $\alpha = n, \quad n \in \mathbb{N}$

$$I^n(f) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-1} f(s)\, ds$$

Por extensión para $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\boxed{{}_aI_x^\alpha(f) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds}$$

Derivada de Riemann Liouville

$$D^{\alpha} f(x) = D^{n} D^{-(n-\alpha)} f(x) = D^{n} I^{(n-\alpha)} f(x)$$

Por esta relación para n=1 y la integral de Riemman-Liouville, obtenemos

$$D_{a,x}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_{a}^{x} \frac{f(s)}{(x-s)^{\alpha}} ds$$

Derivada de Caputo

$$D^{\alpha} f(x) = D^{-(n-\alpha)} D^{n} f(x) = I^{(1-\alpha)} D^{1} f(x)$$

Por la integral de Riemman-Liouville se obtiene

$${}_{C}D^{\alpha}_{a,x} f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{a}^{x} \frac{f'(s)}{(x-s)^{\alpha}} \, ds$$

Demostración usando la librería *numfracpy*

Ecuaciones Diferenciales con Derivadas fraccionarias

Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Los diferentes métodos de Runge-Kutta varían en la forma de la aproximación de la derivada.

Queremos resolver el siguiente problema con condiciones iniciales.

$${}_C D_{0,t}^{\alpha} u(t) = f(t, u(t))$$

The numerical solution of the initial value problem

$$\begin{cases} {}_{C}D_{0,t}^{\alpha}u(t) = f(t, u(t)), & m-1 < \alpha < m \in \mathbb{Z}^{+} \\ u^{j}(0) = u_0^j, & j = 0, 1, \cdots, m-1 \end{cases}$$

where ${}_{C}D_{0,t}^{\alpha}$ is the Caputo derivative and u_0^j is the j^{th} derivative of u at $t = 0$. This problem is equivalent [K. Diethelm and N.J. Ford, Analysis of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl. 265 (2002) 229–248] to the following Volterra integral equation

$$u(t) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} u_0^j + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, u(s)) ds = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t^j}{j!} u_0^j + {}_{RL}D_{0,t}^{-\alpha} f(t, u(t))$$

To solve this problem, we use the *fractional Adams method* [Numerical Methods for Fractional Calculus, page 104] based on the following relations

$$u_{n+1}^P = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^j + \Delta t^\alpha \sum_{j=0}^{n} b_{j,n+1} f(t_j, u_j)$$

$$u_{n+1} = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{t_{n+1}^j}{j!} u_0^j + \sum_{j=0}^{n} a_{j,n+1} f(t_j, u_j) + a_{n+1,n+1} f(t_{n+1}, u_{n+1}^P)$$

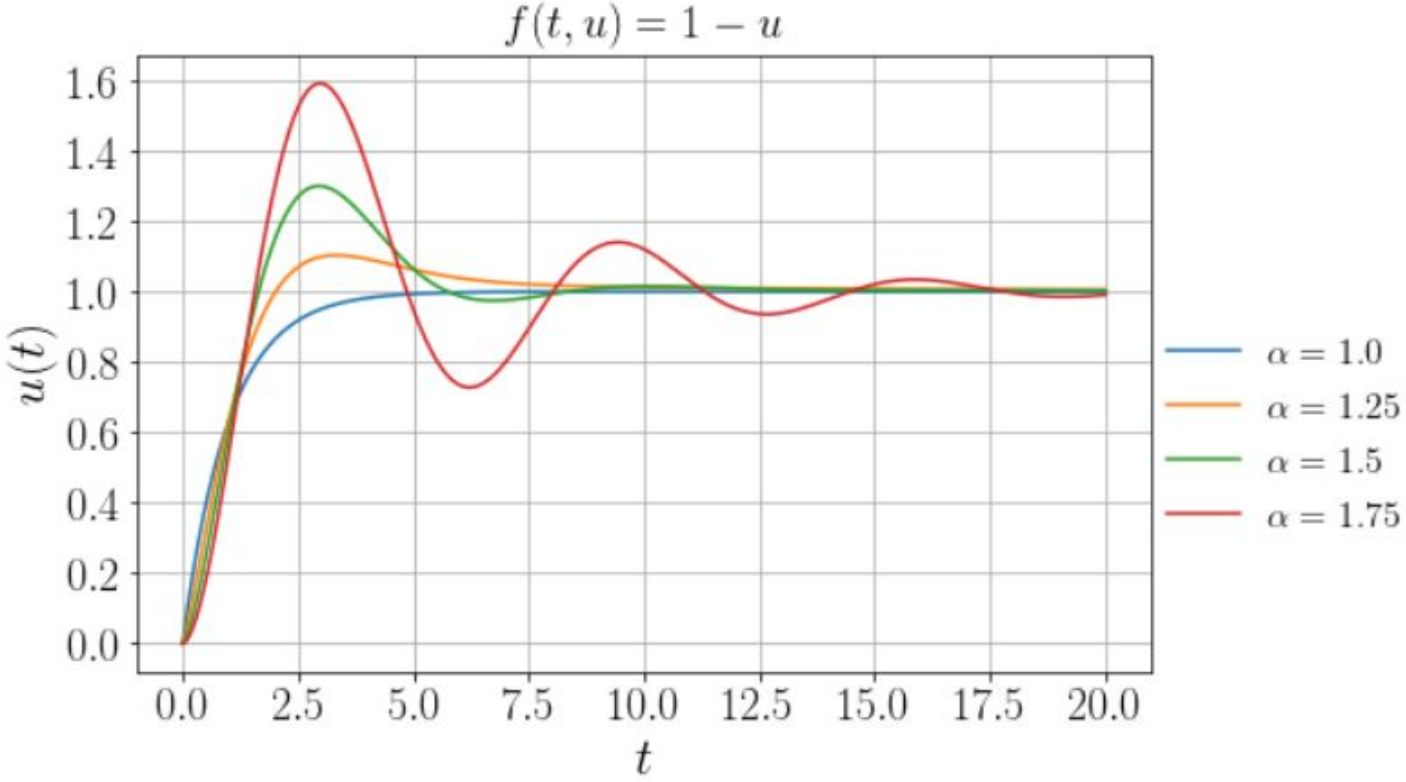
where

$$b_{j,n+1} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} [(n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha]$$

$$a_{j,n+1} = \frac{\Delta t^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j = 0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j = n+1 \end{cases}$$

Example: ${}_{C}D^{\alpha}_{0,t}u(t) = 1 - u(t); 1 \leq \alpha < 2, t \in [0, 20]$

Problema tomado de: Diethelm, Kai, et al. "Algorithms for the fractional calculus: a selection of numerical methods." *Computer methods in applied mechanics and engineering* 194.6-8 (2005): 743-773.



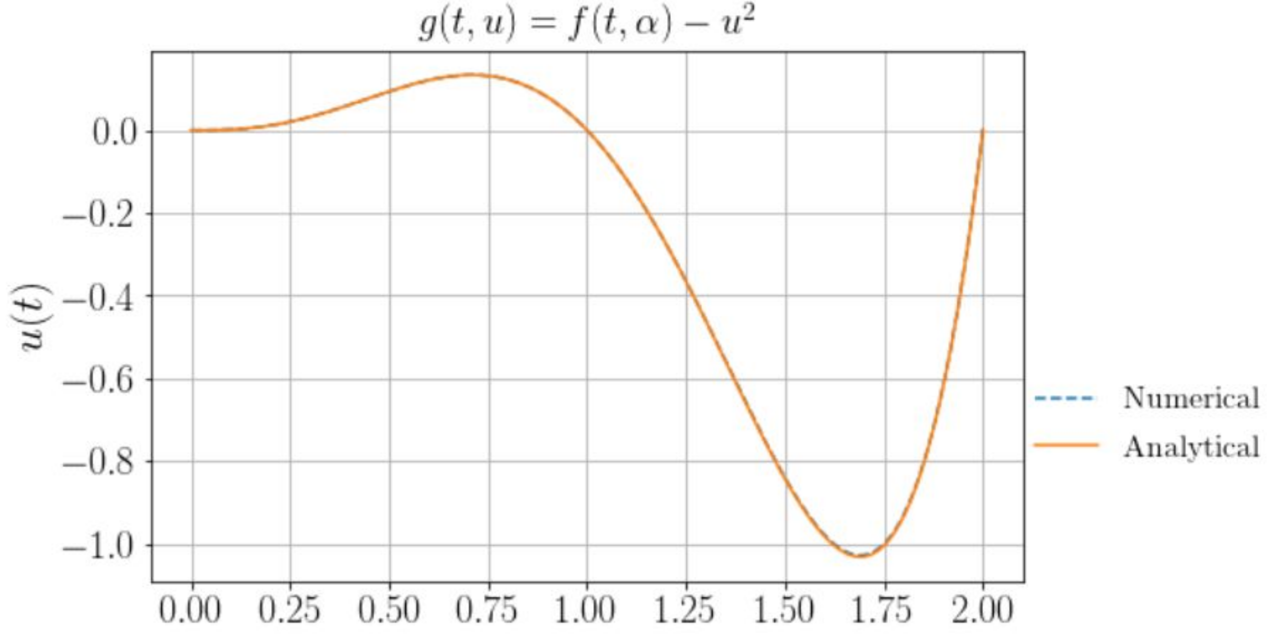
Example: ${}_C D_{0,t}^{\alpha} u(t) + u^2(t) = f(t); 0 < \alpha < 1, t \in [0, 5]$

Let us solve this problem for

$$f(t) = \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(6-\alpha)} t^{5-\alpha} - 3\frac{\Gamma(5)}{\Gamma(5-\alpha)} t^{4-\alpha} + 2\frac{\Gamma(4)}{\Gamma(4-\alpha)} t^{3-\alpha} + (t^5 - 3t^4 + 2t^3)^2$$

with initial condition $u(0) = 0$ and $\alpha = 1/2$. The analytical solution is given by [Numerical Methods for Fractional Calculus, page 109]

$$u(t) = t^5 - 3t^4 + 2t^3$$



Aplicaciones del Cálculo Fraccionario

Física

- Spin fraccionario
- Espectroscopía fraccionaria de Hadrones
- Cálculo Tensorial Fraccionario
- Campos Fraccionarios
- Invarianza Gauge en Teorías de Campos Fraccionarios
- La ecuación Fraccionaria de Langevin en la descripción de la difusión anómala en líquidos complejos.
- La técnica del cálculo fraccionario en la búsqueda aleatoria óptima.

Mecánica y Sistemas Dinámicos

- Modelos de elasticidad nolocal y viscoelasticidad fraccionarias de nanoestructuras
- Microflujos de fluidos viscoelásticos con relaciones constitutivas fraccionarias
- Transporte de gas en medios heterogéneos
- Un modelo de red de orden fraccionario para modelar una epidemia de rápida propagación
- Análisis de la vibración de una viga o placa en un suelo viscoelástico

Biología

- Modelos fraccionarios de la difusión para la MRI (Magnetic Resonance Imaging)
- Patrones de “bursting” abundante de un modelo neuronal fraccionario simple de Morris-Lecar
- Modelos de tumores óseos usando derivadas de orden variable
- Estudio de la viscoelasticidad de células y tejidos
- Difusión celular anómala

Procesamiento de Señales e Imágenes

- Aplicación del GPCF (Generalized Pearson Correlation Function) y los DGIs (Discrete Geometrical Invariants) para mejorar la resolución y calidad de nanoimágenes.
- Aplicación de las NAFASS (Non-orthogonal Amplitude Frequency Analysis of the Smoothed Signals) para proveer un modelo fractal intermedio para el ajuste de datos en sistemas complejos.

Teoría de Control

Estudios del medio ambiente

Ciencia de los Materiales

Economía

Propuestas de Trabajo a Futuro

- **Big Data and Machine Learning in Physics**

- Aplicaciones de los Grupos de Lie en la resolución de las Ecuaciones Diferenciales. (Tesis de Maestría en Matemáticas en 2006)


Thanks!