ALGUNAS TÉCNICAS BÁSICAS DE CONTEO PARA OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

VICTOR ALFONSO BRAVO BRAVO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2018

ALGUNAS TÉCNICAS BÁSICAS DE CONTEO PARA OLIMPIADAS MATEMÁTICAS

VICTOR ALFONSO BRAVO BRAVO

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
John Hermes Castillo Gómez
Doctor en Matemáticas
Co-Asesora
Catalina María Rúa Álvarez
Doctora en Matemática Aplicada

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2018

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1996 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

John Hermes Castillo Gómez

Director de Tesis

Catalina María Rúa Alvarez

Co-Directora de Tesis

Erika Alejandra Rada Mora

Jurado

Fernando Andrés Benavides Agredo

Jurado

San Juan de Pasto, Marzo 8 de 2018

Este trabajo está dedicado a:
Mi mamá María Sonia Isabel Bravo Alvarez y a mi papá Luis Alfonso Bravo Oviedo
Como reconocimiento por toda la entrega incondicional a sus hijos y
por su apoyo sin medidas.
Victor

Agradecimientos

A Dios por darme fuerzas cada momento de mi vida para lograr todas y cada una de las metas que me he propuesto.

A mi madre, por todo lo que me ha dado, amor, cariño, comprensión, consejos y gracias por brindarme apoyo sin condiciones en todos los proyectos que he decidido realizar, te amo madre mía.

A mi padre, que a pesar de todas la dificultades siempre da lo mejor de si a sus hijos.

A mis hermanos Rocio, Jose Luis y Carlos, amigos de toda la vida, compañeros en las buenas y en las malas, que como buenos hermanos mayores me han cuidado y siempre han querido lo mejor para mi, los quiero.

A mis sobrinos, ellos fueron los que en momentos de agobio siempre me brindaban su alegría, con ellos siempre tuve momentos para jugar, distraerme y salir por un momento de todo el estrés que en ocasiones la U trae.

A mis abuelitos Rosa y Filadelfio "Fila", por siempre tenerme en sus oraciones. Abuelitos son unas personas maravillosas, llenas de vida, nada los detiene para seguir adelante, el mejor ejemplo de tenacidad, fuerza y constancia, los adoro.

A mi prima Sandra, por todo su carisma, sencillez y apoyo que siempre recibí de su parte.

A la Universidad, por darme la oportunidad de formarme como profesional, crecí como estudiante y como ser humano, de ella me llevo grandes momentos que quedarán por siempre en mi mente.

A mis compañeros del programa Nathaly, Nazly, Janeth, Marisol, Blanca, Christiam, Oscar, Steven, Fulvio con los que estudié, reí, peleé, trasnoché. Gracias por todos esos momentos interminables de estudio y por el apoyo mutuo en todas las actividades.

A todos los profesores del programa, que hicieron parte de mi formación no solo matemática, sino también parte de mi formación integral, basada en el respeto, rigurosidad y excelencia.

A Los profesores John Castillo y Catalina Rúa, quienes tienen un compromiso incansable con la academia y sus estudiantes. Gracias por ayudarme a superar los inconvenientes que tuve y por ayudarme a sacar adelante este trabajo.

Resumen

La resolución de problemas ofrece un espacio a partir del cual se puede apreciar otra faceta de las matemáticas, que se puede considerar como llamativa, innovadora y divertida, que al mismo tiempo le ofrece a sus practicantes situaciones retadoras en las cuales pone a prueba su ingenio y curiosidad. Este trabajo busca presentar un camino a seguir para aquellas personas que se interesan en la resolución de problemas de conteo y combinatoria.

Los problemas en las olimpiadas matemáticas son de naturaleza muy variada, una de las clases de problemas son los de conteo y combinatoria, que son los de interés para este trabajo. La resolución de problemas en esta área muestran cierto tipo de complejidad, ya que las definiciones y conceptos que se usan llevan a confusiones al momento de su aplicación, Así para llegar hasta la respuesta se hará uso de la metodología de Pólya, la cual con la ayuda de sus pasos se intentará despejar dudas sobre qué técnica aplicar para resolver un determinado problema.

En este trabajo se presentarán las siguientes técnicas de conteo y combinatoria: *principios básicos de conteo*, *variaciones*, *permutaciones* y *combinaciones*, presentadas cada una en un capítulo. En cada capítulo se resolverán cuatro problemas haciendo uso de la metodología de Pólya y se dejarán quince problemas propuestos.

Abstract

The problem solving offers a space from which another facet of mathematics can be appreciated, which can be considered as striking, innovative and fun, which at the same time offers its practitioners challenging situations in which they put their ingenuity to the test and curiosity. This work seeks to present a way forward for those people who are interested in solving problems of counting and combinatorics.

The problems in the mathematical olympics are of a very varied nature, one of the classes of problems are those of counting and combinatorics, which are the ones of interest for this work. The resolution of problems in this area show some kind of complexity, since the definitions and concepts that are used lead to confusion at the moment of its application. Thus, to arrive at the answer, the methodology of Pólya will be used, which with the help of their steps will try to clear up doubts about which technique to apply to solve a certain problem.

In this paper, the following counting and combinatorial techniques will be presented: *basic principles of counting*, *variations*, *permutations* and *combinations*, presented each in a chapter. In each chapter, four problems will be solved using the Pólya's methodology and fifteen proposed problems will be left.

Índice general

Introducción viii

1. Principios básicos de conteo **1**
- 1.1. Introducción . . . 1
- 1.2. Principio de la suma . . . 1
- 1.3. Principio de la multiplicación . . . 3
- 1.4. Problemas propuestos . . . 10

2. Variaciones **13**
- 2.1. Introducción . . . 13
- 2.2. Variaciones ordinarias . . . 13
- 2.3. Variaciones con repetición . . . 16
- 2.4. Problemas propuestos . . . 20

3. Permutaciones **22**
- 3.1. Introducción . . . 22
- 3.2. Permutaciones ordinarias . . . 22
- 3.3. Permutaciones con repetición . . . 24
- 3.4. Problemas propuestos . . . 32

4. Combinaciones **35**
- 4.1. Introducción . . . 35
- 4.2. Combinaciones ordinarias . . . 35
- 4.3. Combinaciones con repetición . . . 38
- 4.4. ¿Cómo diferenciar permutaciones y combinaciones? . . . 44
- 4.5. Problemas propuestos . . . 47

Conclusiones **49**

Referencias **50**

Introducción

Las olimpiadas matemáticas son concursos de resolución de problemas que se realizan en todo el mundo a nivel regional, nacional e internacional. La participación en estas competencias, en las que se plantean problemas novedosos e interesantes, alejados de la rutina, puede estimular el interés de muchos estudiantes por la matemática y además, podría ayudarlos a descubrir aptitudes y vocaciones ocultas.

Para los profesores, las olimpiadas ponen al alcance de su mano un amplio material que puede ser usado para reorientar y enriquecer la enseñanza: problemas cuidadosamente diseñados, libros y revistas sobre resolución de problemas, juegos matemáticos y muchos otros recursos. Además, en torno a estas competencias generalmente se realizan seminarios y talleres para los educadores y estudiantes. Los problemas son el corazón de la matemática, y por lo tanto deben ser el punto focal de la enseñanza de esta disciplina.

En este sentido se pronunció el insigne matemático y educador George Pólya [22] (1887-1985) "Entender la matemática significa ser capaz de hacer matemática. ¿Y qué significa hacer matemática? En primer lugar, significa ser capaz de resolver problemas matemáticos".

Los problemas en las olimpiadas matemáticas son de naturaleza muy variada, pero a grandes rasgos se pueden clasificar en las siguientes categorías: geometría, teoría de números, álgebra, lógica y combinatoria. Los problemas de geometría son básicamente de geometría euclidiana plana (rara vez se proponen problemas de geometría del espacio). Los de teoría de números giran alrededor de los números primos y la divisibilidad de números enteros. Los de álgebra incluyen polinomios, raíces, ecuaciones, sistemas de ecuaciones algebraicas, ecuaciones funcionales y desigualdades. Los problemas de combinatoria, podrían verse como los más difíciles a la hora de caracterizarlos, una vez que estos pueden ser presentados por medio de diferentes situaciones y es tarea de quien trata de resolverlos identificar los principios y las estrategias a ser utilizadas.

En un sentido muy general, la combinatoria es el estudio de las configuraciones formadas con un número finito de elementos. Uno de sus aspectos más básicos es la combinatoria enumerativa, que se ocupa de enumerar y contar dichas configuraciones.

Aunque muchas de las olimpiadas existentes incluyen problemas de combinatoria o relacionados con ella en sus pruebas, en Colombia los estudiantes de educación básica no tienen bases suficientes para enfrentarse a esta clase de problemas. Al revisar el documento de los Estándares Básicos de Competencias publicado por el Ministerio de Educación Nacional [8], se encuentra que hasta el décimo grado es casi nula la aparición de la combinatoria, únicamente se dan nociones superficiales de conteo. A seguir por conjuntos de grados, se resaltan de estos estándares los pocos relacionados con combinatoria:

- Primero a tercero (pensamiento numérico y sistemas numéricos): "Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).”

- Cuarto a quinto (pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos): “Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.”
- Sexto a séptimo (pensamiento numérico y sistemas numéricos): “Reconozco argumentos combinatorios como herramienta para interpretación de situaciones diversas de conteo.”
- Octavo a noveno (pensamiento aleatorio y sistemas de datos): “Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).”
- Décimo a undécimo (pensamiento aleatorio y sistemas de datos): “Resuelvo y planteo problemas usando conceptos básicos de conteo y probabilidad (combinaciones, permutaciones, espacio muestral, muestreo aleatorio, muestreo con remplazo).”

Analizando las pruebas de las Olimpiadas Regionales de la Universidad del Valle (ORM-Univalle) entre 2012 y 2016, cada año aparece un problema de conteo o combinatoria, mientras que, al revisar en el mismo periodo, las correspondientes en el concurso internacional de matemáticas Canguro matemático, donde participan anualmente alrededor de cinco millones de estudiantes, aparecen hasta 5 problemas relacionados con estos temas, lo que nos da una muestra de que en otros países se da una mayor importancia a esta área. Luego una forma llamativa de llevar a los estudiantes de la región a interesarse por la combinatoria es incluyendo problemas de este tema en las Olimpiadas Regionales de Matemáticas-Universidad de Nariño (ORM-UDENAR).

Como resultado de este trabajo se incluyeron problemas de conteo y combinatoria en la 2da ORM-UDENAR realizada en el 2017, como el que se presenta en el Ejemplo 1. Este puede parecer sencillo, pero puede ser todo un reto para algunos estudiantes, y detrás de su proceso de resolución hay elementos que se rescatan y son útiles para este trabajo.

Ejemplo 1. [ORM-UDENAR, nivel I, 2017]En el restaurante ***Cuy Sabor*** se ofrecen platos con las siguientes opciones: tres tipos de carnes diferentes (cuy, pollo, res), cuatro acompañamientos distintos (papa, maduro, yuca, lapingachos) y dos tipos de bebidas (limonada, café). Si cada cliente debe seleccionar solamente un tipo de carne, de acompañamiento y bebida, ¿de cuántas formas diferentes se puede elegir un plato?

Pensemos en las formas en que se puede elegir el menú. Por ejemplo, si se pide en el plato como opción de carne cuy, ¿cuáles son las opciones, entre los cuatro acompañamientos, que podría también llevar el plato? La Figura 1, ayuda a observa las posibles opciones para este caso.

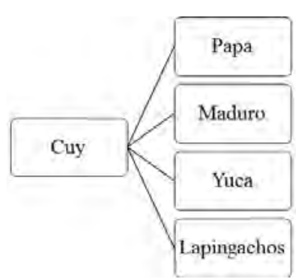


Figura 1: cuy y acompañamientos.

Si escogiera cuy con papa ¿con qué bebidas puedo pedirlo?, representamos como sería esta situación en la Figura 2.

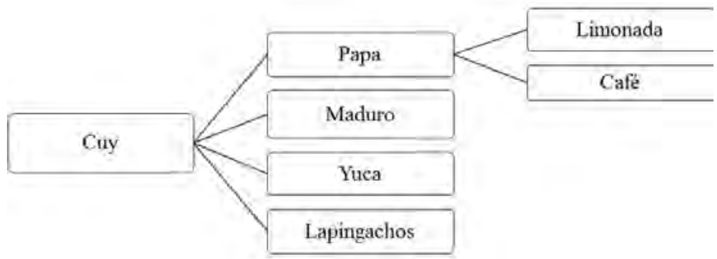


Figura 2: cuy, papa y bebidas.

De esta manera las formas de escoger el menú si empezamos pidiendo cuy es 8, ver Figura 3.

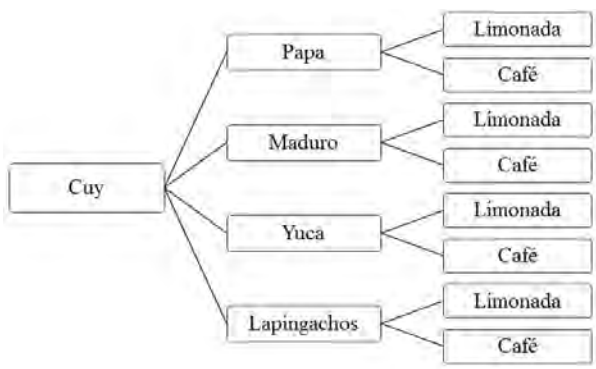


Figura 3: cuy, acompañamientos y bebidas.

Del mismo modo se tiene que si se pide primero pollo el plato se puede armar de 8 maneras distintas, similarmente si nuestra primera elección es res. Con eso, las formas de escoger un plato se remite a sumar el número de extremos de cada uno de los gráficos; es decir la respuesta es 24.

Sin embargo, es posible representar el proceso de pedir algún tipo de carne, acompañamiento y bebida como se muestra en la Figura 4.

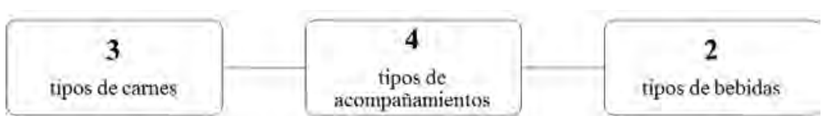


Figura 4: carnes, acompañamientos y bebidas.

De lo cual es posible ver que "casualmente" el resultado de multiplicar las cantidades que aparecen en esta figura, es decir

$$3 \times 4 \times 2 = 24,$$

es el mismo valor a que si se resolviera contando una por una. En el desarrollo del trabajo se observa que no es una mera casualidad, sino que es el producto de aplicar una de las técnicas que aquí se estudian.

En consecuencia existen dos caminos para resolver este tipo de problemas. El primero es estudiar las posibilidades uno a uno hasta que podamos consolidar un resultado final. Sin embargo, esta técnica no es tan eficiente si nos enfrentamos a problemas de mayor envergadura. El segundo camino para emprender esta tarea, es mejor aprender y entender las distintas técnicas de conteo que existen en la literatura, por supuesto aquí estudiaremos las más básicas pero que juegan un papel crucial en el desarrollo de la combinatoria y sus aplicaciones.

El desarrollo de este trabajo se realizó con el propósito de presentar la solución de algunos problemas de olimpiadas matemáticas relacionados con conteo y combinatoria, destacando las estrategias y técnicas utilizadas, siendo que la inclusión de conceptos teóricos de forma clara son primordiales. Además, entre los objetivos se destaca presentar un compendio de problemas de cada tema estudiado, dado que es una forma en poner en práctica y afianzar en los conceptos expuestos y adquiridos. Para cumplir estos objetivos y que este trabajo esté al servicio de los estudiantes de secundaria como preparación para competencias matemáticas como las ORM-UDENAR, esta tesis se desarrolla en diferentes capítulos como se describe a continuación.

En el Capítulo 1 empezaremos estudiando los principios básicos de conteo: principio de la suma y principio de la multiplicación. Mientras tanto en el Capítulo 2 se estudia el concepto de variaciones.

Ahora bien, la dificultad no solo radica en cómo aplicar las técnicas para hacer menos dispendioso el conteo, tal y como se observó en el anterior problema, sino en saber cuál es la técnica apropiada para resolver un problema determinado; ese inconveniente se observa frecuentemente en los problemas que se deben resolver con permutaciones o combinaciones, debido a que esas dos técnicas aparentan ser iguales, sin embargo en la aplicación son completamente diferentes. En los capítulos 3 y 4, dedicados a estudiar estas dos técnicas, se revisan problemas que ayudan a diferenciar una de la otra.

En este trabajo se resolvieron problemas en el área de combinatoria, haciendo uso de la metodología de Pólya, método que lo que busca es que el profesor mediante preguntas orientadoras lleve al estudiante a encontrar la respuesta. En su intento por asistirlos en forma normal y objetiva, sin obligar a seguir un camino específico, el profesor puede hacer algunas preguntas una y otra vez e indicar un camino alternativo. Así, en innumerables problemas, se puede hacer la pregunta: ¿cuál es la incógnita? Cambiar el vocabulario y hacer la misma pregunta en diferentes formas: ¿qué se requiere?, ¿qué quiere usted determinar?, ¿qué se le pide a usted que encuentre? El propósito de estas preguntas es concentrar la atención del estudiante sobre el problema, no necesariamente con el fin de que encuentre la solución, llegando así a una serie de pasos que le pueden ser útiles:

1. Comprender el problema.
2. Concebir un plan.
3. Ejecutar el plan.
4. Mirada retrospectiva (examinar la solución obtenida).

El método planteado por Pólya, tal y como lo manifiesta María Callejo [5], trata de imitar el diálogo socrático, que puede describirse como un tipo de interrogatorio, en el cual una pregunta se responde como si esta hubiera sido una pregunta retórica, así se fuerza a realizar al preguntador una nueva pregunta que aporte más luz a su discurso.

Para este trabajo los problemas tienen un proceso de resolución el cual se guía con los pasos anteriores y los cuales se llevan a cabo mediante una conversación entre el profesor (**P.**) y el alumno (**A.**). Esos problemas, así como los problemas propuestos son seleccionados de olimpiadas matemáticas y textos relacionados con combinatoria. Por esta razón para ubicar al lector los problemas son identificados en el caso de olimpiadas con el nombre de la olimpiada, el año, el nivel y el número del problema, ver Tabla 1; y para el caso cuando son tomados de textos, la referencia del texto, la página, y el número del problema.

Olimpiada	Abreviatura	Enlace
Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico	OMPR	https://om.pr/
Olimpiada Juvenil de Matemáticas	OJM	http://www.acm.ciens.ucv.ve/
Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe	OMCC	http://www.oei.es/oim/omcc.htm
Olimpiada Regional de Matemáticas Universidad de Nariño	ORM-UDENAR	http://orm.udenar.edu.co/
Olimpiada Regional de Matemáticas Universidad del Valle	ORM-UNIVALLE	http://matematicas.univalle.edu.co/orm/
Olimpiadas de Matemáticas Universidad de Antioquia	OMUA	http://ciencias.udea.edu.co/olimpiadas/
Canguro Matemático	CM	http://www.canguromat.org.es/
Olimpiada Mexicana de Matemáticas	OMM	http://www.ommenlinea.org/

Tabla 1: Olimpiadas de Matemáticas.

En este trabajo se presentan cuatro técnicas de conteo, que son: *principios básicos de conteo*, *variaciones*, *permutaciones* y *combinaciones*, una estrategia por cada capítulo, en cada capítulo se desarrollan 4 problemas y se dejan 15 propuestos, cada uno de los problemas resueltos es desarrollado mediante preguntas orientadoras, las cuales buscan que el estudiante pase por las cuatro fases que según Pólya son indispensable en la resolución de todo problema.

En este trabajo el criterio utilizado para escoger cada problema, bien sea en los resueltos o en los propuestos, fue el de que estos permitan ejemplificar la técnica estudiada, más allá de tener en cuenta su nivel de exigencia y tal vez sin considerar a que público está dirigido. Sin embargo, la mayoría de problemas vienen acompañados del evento o texto del cual fue tomado, esto con el objetivo de mostrarle al lector donde se puede encontrar más material para seguir capacitándose.

Capítulo 1

Principios básicos de conteo

1.1. Introducción

En este capítulo se abordan las técnicas básicas para contar elementos de un conjunto, la rama de las matemáticas que se encarga de estudiar y aplicar estas técnicas es la combinatoria.

La combinatoria puede considerarse tan vieja como las propias matemáticas, ya que la operación básica de contar los elementos de un conjunto está ligada al origen mismo del concepto de número; con este representamos la cantidad de objetos con los que interactuamos en nuestra vida cotidiana.

Comencemos por ilustrar la necesidad de aprender técnicas de conteo con unos ejemplos. Si se nos enseña un puñado de canicas y nos preguntan ¿cuántas son? un vistazo nos bastará para contarlas y dar la respuesta, sin embargo, si se nos pregunta ¿cuántas patas tienen 100 perros? en lugar de contar las patas de los 100 perros, hacemos la operación que corresponda, para este caso usando la técnica del principio de la suma. Desde luego hay preguntas que necesitan técnicas más elaboradas.

En este capítulo estudiaremos el principio de la suma y el principio de la multiplicación.

1.2. Principio de la suma

Definición 1.1. Si se desea escoger un objeto que puede ser de r tipos disjuntos, y para el primer tipo hay t_1 opciones, para el segundo tipo hay t_2 opciones, para el tercer tipo t_3 opciones, y así sucesivamente hasta t_r opciones para el último tipo, entonces el objeto puede escogerse de

$$t_1 + t_2 + \cdots + t_r$$

maneras.

Pongamos en práctica la anterior definición resolviendo un pequeño ejemplo. Si en la biblioteca de la universidad hay 40 libros de texto de sociología, 50 de antropología y 36 de historia, ¿de cuántas maneras un estudiante puede elegir un libro?

En este caso como los libros son de diferentes tipos de áreas, se hace uso del principio de la suma, por tanto un estudiante podría elegir entre

$$40 + 50 + 36 = 126$$

libros de texto para aprender acerca de alguno de estos temas.

Para entender y poner en práctica esta técnica, resolvemos un problema haciendo uso de la metodología de Pólya, tal y como se presentan a continuación.

Ejemplo 1.1. Se desea escoger un representante de los dos grados décimo (10°-1 y 10°-2) que hay en el colegio, 10°-1 tiene 25 estudiantes y 10°-2 tiene 30 estudiantes ¿de cuántas maneras se puede hacer esta elección?

P. Leamos detenidamente el problema anterior.
A. ...

P. ¿Qué nos pide el problema?
A. La cantidad de formas en las que se puede elegir un representante de grado.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. En un colegio hay 2 grados, 10°-1 y 10°-2, con 25 y 30 estudiantes, respectivamente.

P. En el grado 10°-1, ¿de cuántas maneras puedo elegir un representante?
A. De 25 formas puedo elegir un representante de dicho grado.

En este punto se espera que el estudiante se de cuenta que las maneras de elegir un representante es igual a la cantidad de estudiantes del grado.

P. Si ahora el representante se debe elegir de dos cursos, ¿cuántas formas hay para hacer esto?
A. Como hay 25 en un grado y 30 en el otro, por lo tanto tengo

$$25 + 30 = 55,$$

formas de elegir un representante de los grados décimos.

La revisión de la solución obtenida es un momento muy importante que siempre se debe tener en cuenta.

Mirada retrospectiva: El docente podría preguntar al estudiante ¿qué pasa si todos los estudiantes no pueden ser representantes?, ¿el problema cambia si la cantidad de estudiantes aumenta o disminuye?, ¿si se incluye otro curso?; estas preguntas ayudan al estudiante a evaluar su procedimiento.

1.3. Principio de la multiplicación

Definición 1.2. Si una tarea debe realizarse en n etapas, y si la primera etapa tiene k_1 maneras de realizarse, la segunda tiene k_2 maneras, y así sucesivamente hasta k_n maneras de realizar la última, entonces el número de formas de realizar la tarea es $k_1 \times k_2 \times \cdots \times k_n$.

Con un ejemplo se hace fácil comprender la definición. El club de teatro de la universidad realiza ensayos para una obra de teatro que se presentará en un festival. Si 6 hombres y 8 mujeres ensayan para los papeles principales (masculino y femenino). ¿De cuántas maneras el director de la obra puede elegir a la pareja principal?

Como se trata de elegir una pareja, es decir dos personas a la vez, se hace uso del principio de la multiplicación, así, el director puede elegir a la pareja de

$$6 \times 8 = 48$$

formas.

A continuación se presenta un problema donde se hace uso de la técnica, de la misma forma se usa la metodología de Pólya para resolverlo.

Ejemplo 1.2 (OMPR- 2006-07 - Nivel I - Prob. 5)**.** Juan llega a un restaurante y encuentra que para tomar puede seleccionar entre jugo de parcha[1] o china[2]. Para comer puede seleccionar una carne entre pollo, cerdo o pescado. Para postre tiene que seleccionar uno entre helado, flan de queso o calabaza. Si Juan solo puede seleccionar un jugo, un tipo de carne y un postre, ¿de cuántas formas diferentes puede seleccionar su almuerzo?

P. Leamos detenidamente el problema anterior.
A. ...

P. ¿Qué nos pide el problema?
A. Saber cuántas formas tiene Juan de seleccionar su almuerzo.

P. ¿Cómo puede ser un almuerzo?
A. Puedo comer pollo, flan de calabaza y china.

[1]Maracuyá.
[2]Naranja.

P. Si pides pollo, ¿el flan de calabaza sería la única opción de postre con esa carne?
A. No, también sería posible almorzar pollo, flan de calabaza y jugo de parcha.

Para este momento se espera que el estudiante se de cuenta que necesita pedir tanto una carne, como un postre y una bebida, lo que implica que debe pedir las tres cosas a la vez para poder formar su almuerzo, de este modo, el profesor puede realizar la siguiente pregunta.

P. Si solo se pidiera carne y jugo, ¿cuántas son las opciones disponibles?
A. Serían $3 \times 2 = 6$, ya que debo pedir ambas cosas a la vez entonces aplico el principio de multiplicación, así tengo 6 opciones para pedir carne y jugo.

P. ¿Para pedir un almuerzo completo, cuántas opciones tendría?
A. Juan tendría $6 \times 3 = 18$ opciones, porque tengo 6 de las anteriores selecciones y como también debo pedir postre entonces es una operación que puedo hacer de forma consecutiva, por lo tanto vuelvo y aplico el principio de multiplicación, así que, hay 18 formas distintas para que Juan pida un almuerzo.

Se solucionó el problema y el momento que sigue es muy importante, tanto para la verificación de la solución como para poder formular otros problemas.

Mirada retrospectiva: Es posible preguntar, si Juan debe seleccionar una carne y escoger entre una bebida y un postre ¿de cuántas maneras puede hacerlo? Por otro lado si Juan regresa al mismo restaurante a la hora de la cena, pero no puede repetir el ninguna de las opciones que escogió en el almuerzo ¿de cuántas maneras puede armar su cena?

Como observamos en los anteriores problemas, para cada problema se usó la técnica respectiva, sin embargo hay problemas en los cuales es necesario usar más de una técnica, sin contar algunos procesos algebraicos adicionales. En seguida presentamos algunos problemas que en su proceso de resolución, haciendo uso de la metodología de Pólya, tienen una combinación de ambas técnicas (Principio de la suma, Principio de la multiplicación).

Ejemplo 1.3 (OMPR - 2003-04 - Nivel I - Prob. 2)**.** Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 se quieren formar números de cuatro dígitos distintos. Si el 3 debe ocupar el lugar de las centenas o el lugar de las decenas, ¿cuántos números distintos se pueden armar?

P. Leamos detenidamente el problema anterior.
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. La cantidad números distintos se pueden armar con los dígitos 1, 2, 3 y 4, con la condición de que el 3 debe ocupar el lugar de las centenas o el lugar de las decenas.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Con los dígitos 1, 2, 3 y 4 se quieren formar números de 4 dígitos distintos con las restricciones anteriores.

P. ¿Cuántos dígitos deben tener los números?
A. Cuatro.

P. ¿En cuántas posiciones puede estar el 3?
A. Son dos las posiciones.

P. ¿Se pueden repetir los dígitos?
A. No, tienen que ser dígitos distintos.

P. ¿Cuántos casos se deberían considerar?
A. Dos.

Aquí el estudiante ya debe tener claro que camino seguir y tal vez no sea necesario hacer más preguntas orientadoras, porque ya puede saber la respuesta; pero si no es así, podríamos plantear otras preguntas, que despejen las dudas que quedan y permitirles a los estudiantes llegar a la solución. Hay dos casos por considerar: si el 3 está en las centenas o el 3 está en las decenas.

Caso 1. Si el 3 está en las centenas.

P. Si el 3 está en las centenas ¿cuántos dígitos restantes hay para ocupar las otras casillas quedan?
A. Quedan 3 dígitos restantes.

P. Si en la casilla de los miles fijamos un número de los tres que estaban disponibles ¿cuántos dígitos restantes quedan?
A. Quedan 2 dígitos.

P. Si en la casilla de las decenas fijamos un número de los dos que estaban disponibles. ¿Cuántos dígitos restantes quedan?
A. Queda solo uno.

P. ¿Qué se puede concluir?
A. La cantidad de números que se pueden construir será $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Es claro que para el caso 2 procedemos de la misma forma que el caso 1.

Caso 2. Si el 3 está en las decenas.

Realizando las mismas preguntas que en el caso anterior concluimos que la cantidad de números que se pueden construir será

$$3 \times 2 \times 1 = 6.$$

La cantidad total de números que se pueden formar será la suma de las cantidades en los dos casos, es decir

$$6 + 6 = 12.$$

Aunque ya hemos encontrado la solución, nos queda por hacer el último paso y quizás el que siempre olvidamos considerar; revisar la solución obtenida, este paso nos permite verificar cada uno de los procedimientos efectuados en el desarrollo del problema.

Mirada retrospectiva: El docente podría preguntar al estudiante ¿será que los casos aquí considerados son los únicos por tomar en este problema?, ¿el problema cambia si en lugar de usar el 3 se pide usar otro número? y ¿si fuera posible usar cualquier dígito? estas preguntas ayudan al estudiante a evaluar su procedimiento.

Ejemplo 1.4 (ORM-UNIVALLE, nivel I, 2009, prob. 4)**.** ¿Cuántos números de cuatro dígitos hay, tal que empiezan por 1 y tienen exactamente un dígito que se repite, exactamente dos veces? Por ejemplo, los números 1003 y 1255, satisfacen las condiciones, pero el número 1133 no las satisface.

P. Lee cuidadosamente el problema.
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Hallar la cantidad de números de cuatro dígitos que empiezan por 1 y tienen exactamente un dígito que se repite, exactamente dos veces.

Como el problema tiene ejemplos de que números cumplen con las condiciones y que números no, el profesor puede usar ese recurso para guiar al estudiante a la elaboración de una solución.

P. ¿Por qué el número 1003 satisface las condiciones?
A. Porque está compuesto de cuatro dígitos, inicia con el 1 y hay un dígito (0) que se repite exactamente dos veces.

P. ¿Por qué el número 1255 cumple las condiciones?
A. Porque tiene cuatro dígitos, empieza con el 1 y el dígito 5 se repite exactamente dos veces.

P. ¿Por qué el número 1133 no cumple con las condiciones?
A. Porque a pesar que tiene cuatro dígitos e inicia con el 1, hay más de un dígito que se repite dos veces, esto es el 1 y el 3, lo que hace que ese número no satisfaga las condiciones del problema.

Al terminar de analizar los ejemplos, el profesor puede seguir con otras preguntas para llevar al estudiante a la compresión global del problema.

P. ¿Se puede decir cosas adicionales de los números que cumplen con las condiciones del problema?
A. Sí.

P. ¿Qué otras observaciones se pueden hacer?
A. Hay diferentes casos que se deben tener en cuenta para saber que números satisfacen el problema.

P. ¿En los ejemplos se observaron casos diferentes?
A. Sí.

P. ¿Cuáles casos?
A. En el primer ejemplo (1003) los números que se repiten están en la segunda y tercera posición, para el segundo ejemplo (1255) los números que se repiten están en la tercera y cuarta posición; mientras que en el último ejemplo (1133) no se tuvo en cuenta que el primer dígito, que siempre va fijo, y se lo volvió a escribir, por lo tanto ya no se podría volver a repetir un número diferente al inicial.

P. ¿En los ejemplos se muestran todos los casos?
A. No.

Para este momento el estudiante debería haber comprendido que el problema es posible resolverlo mirando los casos necesarios, siguiendo las condiciones del problema, se tienen los siguientes casos: los dígitos que se repiten están en la segunda y tercera posición, los dígitos que se repiten están en la tercera y cuarta posición, los dígitos que se repiten están en la segunda y cuarta posición, los dígitos que se repiten están en la primera y segunda posición, los dígitos que se repiten están en la primera y tercera posición; y los dígitos que se repiten están en la primera y cuarta posición.

Caso 1. Los dígitos que se repiten están en la segunda y tercera posición.

P. ¿En la primera posición cuántos dígitos se pueden ubicar?
A. Solo un número puedo ubicar, ya que el problema me dice que debe iniciar con el 1.

P. ¿Para la segunda posición cuántos dígitos se pueden ubicar?
A. Como los números que se deben repetir son el de esta y la tercera posición, entonces puedo ubicar nueve dígitos, ya que el dígito 1 está en la primera posición y no puede repetirse.

P. ¿Para la tercera posición cuántos dígitos se pueden ubicar?
A. El dígito de esta posición se repite, por lo tanto puedo ubicar solo un dígito.

P. ¿Para la cuarta posición cuántos dígitos se pueden ubicar?
A. Los dígitos que se repitieron ya están, así que se pueden ubicar ocho dígitos.

P. ¿Cuántos números hay para este caso?
A. Aplicando el principio de multiplicación se tiene que hay

$$1 \times 9 \times 1 \times 8 = 72$$

números que cumplen con las condiciones planteadas en el problema.

Es claro que para los siguientes casos siguientes, en donde el primer dígito no es el que se repite, se puede proceder de la misma forma que el caso anterior.

Caso 2. Los dígitos que se repiten están en la tercera y cuarta posición.

Realizando las mismas preguntas que en el caso 1 se puede decir que la cantidad de números que satisfacen las condiciones del problema para este caso son

$$1 \times 8 \times 9 \times 1 = 72.$$

Caso 3. Los dígitos que se repiten están en la segunda y cuarta posición.

De manera análoga se tiene que

$$1 \times 9 \times 8 \times 1 = 72.$$

Caso 4. Los dígitos que se repiten están en la primera y segunda posición.

P. ¿En la primera posición cuántos dígitos se puede ubicar?
A. Solo un número puedo ubicar, ya que el problema me dice que debe iniciar con el 1.

P. ¿En la segunda posición cuántos dígitos se puede ubicar?
A. Como este y el primer dígito son los números que se deben repetir, hay un número que puedo ubicar aquí.

P. ¿En la tercera posición cuántos dígitos se puede ubicar?
A. No hay más dígitos que se repitan, por lo tanto solo puedo ubicar nueve dígitos.

P. ¿En la cuarta posición cuántos dígitos se puede ubicar?
A. No hay más dígitos que se repitan, por lo tanto solo puedo ubicar ocho dígitos.

P. ¿Cuántos números hay para este caso?
A. Aplicando el principio de multiplicación se tiene que hay

$$1 \times 1 \times 9 \times 8 = 72$$

números que cumplen con las condiciones planteadas en el problema.

Para los casos restantes se puede proceder de la misma manera que el caso anterior.

Caso 5. Los dígitos que se repiten están en la primera y tercera posición.

Realizando las mismas preguntas que en el anterior caso, entonces hay

$$1 \times 9 \times 1 \times 8 = 72.$$

Caso 6. Los dígitos que se repiten están en la primera y cuarta posición.

De manera similar procedemos para este caso

$$1 \times 9 \times 8 \times 1 = 72.$$

La cantidad total de números que se pueden formar será la suma de las cantidades en los todos casos, es decir

$$72 + 72 + 72 + 72 + 72 + 72 = 6 \times 72 = 432.$$

Aunque ya se ha encontrado la solución, sin embargo aún no está totalmente resulto el problema, queda por hacer el último paso y quizás el que siempre se olvida considerar; revisar la solución obtenida, este paso nos permite verificar cada uno de los procedimientos efectuados en el desarrollo del problema.

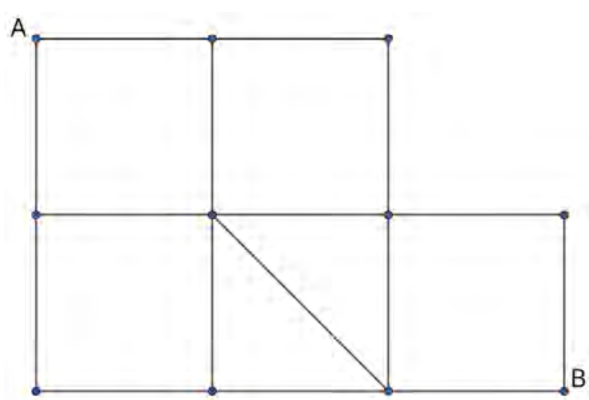
Mirada retrospectiva: El docente podría preguntar al estudiante ¿será que los casos aquí considerados son los únicos por tomar en este problema?, ¿el problema cambia si en lugar de usar el 1 como dígito inicial se pide usar otro número?, ¿si fuera posible usar cualquier dígito? y ¿el número de veces que se repita un dígito sea más de dos veces? estas preguntas ayudan al estudiante a evaluar su procedimiento.

1.4. Problemas propuestos

En esta sección se dejan algunos problemas propuestos, los cuales han sido recopilados de olimpiadas matemáticas y textos relacionados con combinatoria.

1. (OMUA, taller de preparación, ejercicio 2.2, pág. 3). Una señora dispone de un pollo para cocinarlo. En su libro de recetas encuentra tres recetas diferentes para hacerlo al horno, dos para hacerlo frito y cuatro para prepararlo cocido. ¿De cuántas maneras diferentes puede la señora preparar su pollo?

2. ¿De cuántas maneras se puede ir de A a B, siempre avanzando?



3. (OMPR, 2003-04, nivel I, prob. 3). En la biblioteca hay 6 mesas con 4 sillas cada una, 4 mesas con dos sillas cada una y 3 mesas con 6 sillas cada una. ¿Cuántas sillas hay en total?

4. (OMPR, 2003-04, nivel I, prob. 15). Una familia quiere viajar de Mayaguez a San Juan haciendo dos paradas en el camino. La primera parada puede ser en Isabela, Quebradillas o Camuy.

Para la segunda parada, pueden elegir entre Vega Alta o Vega Baja. ¿De cuántas maneras puede hacer el viaje la familia?

5. ([10], ejemplo, pág. 9). ¿De cuántas maneras pueden colocarse una torre blanca y una torre negra en un tablero de ajedrez de modo que se ataquen?

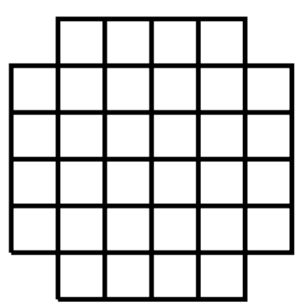
6. (CM, 2014, Nivel 1. prob. 24). Hay una hilera de 60 árboles, que suponemos numerados del 1 al 60. Los árboles que llevan número par son arces; los que llevan un número múltiplo de 3 son arces o tilos. Los demás árboles son abedules. ¿Cuántos abedules hay?

7. ([11], ejemplo 2.3, pág. 14). ¿Cuántos números de tres cifras pueden escribirse de manera que la primera cifra sea impar, la segunda sea par y la tercera sea diferente de las dos primeras?

8. En un acto deben hablar Luis, María, Pedro, Pablo y Luisa. ¿De cuántas maneras se puede confeccionar la lista de oradores con la condición de que Luis hable antes que Pedro? ¿Y si la condición es que María hable inmediatamente después que Luis? ¿Y si deben alternarse oradores de distinto sexo?

9. (ORM-UNIVALLE, nivel III, 2011, prob. 5). Pilar y Andrea vieron a un hombre alejarse en automóvil frente a un banco, antes de que sonara una alarma contra robos. Al momento de ser interrogadas por la policía, dieron la siguiente información acerca de la placa (que constaba de tres letras y tres dígitos). Pilar estaba segura de que la segunda letra de la placa era una "O" o una "Q", la tercera era una "J" o una "L", y que el último dígito era un "3" o un "8". Andrea dijo que la primera letra de la placa era una "C" o una "G" y que el primer dígito era definitivamente un "7". ¿Cuántas placas diferentes tendrá que verificar la policía para poder identificar el vehículo que Pilar y Andrea vieron?

10. (OJM, 2009, 3°, prob. 2). Ana tiene seis monedas idénticas y desea poner cada una de ellas en una casilla del tablero de la figura, de tal manera que cada fila contenga exactamente una moneda y cada columna contenga exactamente una moneda. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerlo?



11. (OMUA, taller de preparación, prob. 15). A, B y C son ciudades que están comunicadas de la siguiente manera: para ir desde A hasta C, es necesario pasar por B; hay tres rutas distintas entre A y B, y cuatro rutas distintas entre B y C. ¿Cuál es el número de maneras posibles para viajar desde A hasta C?

12. (OMUA, taller de preparación, prob. 3). En un estante hay 5 libros de Alemán, 7 libros de español y 8 libros de Inglés, Cada libro es diferente del otro. ¿De cuántas formas podemos poner los libros en el estante, si los libros de cada clase deben estar juntos?

13. (OMPR, 2003-04, nivel I, prob. 9). Ignacio, Diego, Santiago, Eduardo y Ana van al cine y encuentran 5 sillas consecutivas libres. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse si Ana y Eduardo quieren estar juntos, Ana siempre a la izquierda de Eduardo?

14. (ORM-UNIVALLE, problemas de preparación, nivel 2, prob. 1). En cierta ciudad las matrículas de los autos se forman con 2 vocales diferentes seguidas de 5 dígitos todos diferentes. Determinar la cantidad de matrículas que pueden hacerse.

15. (OMPR, 2012- 13, nivel II, prob. 13). Un número capicúa es uno que se puede leer igual de izquierda a derecha o de derecha a izquierda, como por ejemplo el 1771. ¿Cuántos números capicúas de cuatro dígitos hay?

Capítulo 2

Variaciones

2.1. Introducción

Según la Real Academia Española (RAE) combinatoria se define como "la parte de las matemáticas que estudia el número de posibilidades de ordenación, selección e intercambio de los elementos de un conjunto, es decir, las combinaciones, variaciones y permutaciones". Así un problema combinatorio consiste usualmente en establecer una regla sobre cómo deben ser las agrupaciones y determinar cuántas existen que cumplan una determinada regla. En este capítulo nos centramos al estudio de las variaciones.

En combinatoria se denomina variación de n objetos tomados de k en k a las sucesiones de k términos diferentes que pueden formarse con los n objetos. Así por ejemplo los arreglos de las letras a, b, c tomadas de dos en dos son: ab, ac, ba, bc, ca, cb; en términos generales también pueden llamarse variación a cada una de las tuplas que pueden formarse tomando elementos de un conjunto.

En combinatoria de conjuntos finitos frecuentemente se necesita conocer el número de variaciones de un conjunto de n elementos tomados en tuplas de k elementos, con o sin elementos repetidos en las tuplas, siendo esos los casos que estudiaremos.

2.2. Variaciones ordinarias

Definición 2.1. Se llama variaciones ordinarias de n elementos tomados de k en k, con $(n \geq k)$ a los distintos grupos formados por k elementos de forma que no entran todos los elementos, en estas importa el orden y no se repiten elementos. El número de variaciones ordinarias de n elementos tomados de k en k se denota por $V_{n,k}$ y está dada por la siguiente expresión

$$V_{n,k} = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-k+1).$$

Como veníamos haciendo, mostremos un ejemplo sencillo como ayuda para entender la definición.

De un grupo de 6 asociados necesitamos elegir un presidente, un vicepresidente y un tesorero. ¿De cuántas formas podemos hacer dicha elección?

Como necesitamos elegir un grupo de 3 personas (presidente, vicepresidente y tesorero), de un grupo total de 6, por lo tanto no entran todos los elementos, el orden si importa, ya que si en una primera opción elegimos a alguien de presidente, este ya no podrá elegirse como tesorero. Por la misma razón los elementos (asociados) no se repiten, por lo tanto este ejercicio conforma una variación

$$
\begin{aligned}
V_{6,3} &= 6 \cdot (6-1) \cdot (6-2) \\
&= 6 \cdot 5 \cdot 4 \\
&= 120.
\end{aligned}
$$

Haciendo uso de esta técnica y de la metodología de Pólya, resolvemos el siguiente problema.

Ejemplo 2.1 (OMPR - 2011-12 - Nivel I - Prob. 8)**.** ¿Cuántos números de tres dígitos podemos formar usando los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4 una sola vez?

P. Leamos detenidamente el problema.
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Los números que se pueden formar usando los dígitos 0, 1, 2, 3 y 4 una sola vez.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Los dígitos con los cuales puedo formar el número y que solo los puedo usar una vez.

P. ¿Cuántos dígitos deben tener los números buscados?
A. Deben tener 3 dígitos.

P. Los números que se desean, ¿pueden iniciar con cualquier número?
A. No.

P. ¿Por qué razón esos números no pueden iniciar por cualquiera de los dígitos dados?
A. Porque a pesar que nos dan una lista de dígitos, todos ellos no se pueden usar como dígito inicial, en particular un dígito, el 0.

Con las aclaraciones que el mismo estudiante hizo, se puede continuar con el proceso de resolución de este problema.

P. ¿Por qué ese dígito no puede usarse como inicial?
A. Porque si un número de tres cifras inicia con 0, al final solo sería un número de dos dígitos, por lo tanto no cumpliría con las condiciones planteadas en el problema.

Con el problema del dígito inicial resuelto, seguimos ahora sí con el camino a la solución.

P. Si el número debe tener 3 dígitos, ¿cuántos dígitos pueden ir en la primer posición?
A. Como el 0 no puede estar ubicado ahí, puede ir cualquiera de los 4 dígitos restantes.

P. En la segunda posición ¿ ya pueden ir los 5 dígitos?
A. No, porque en el problema me dicen que los dígitos únicamente los puedo usar una vez.

P. Entonces, ¿cuántos dígitos puedo ubicar en la segunda posición?
A. 4 dígitos, ya que en la primer posición se ubicó un dígito.

En este momento el estudiante comprende que cada que ubica un dígito, debe quitarlo de la lista de dígitos iniciales.

Por lo tanto hay

$$4 \times 4 \times 3 = 60$$

números de tres dígitos que satisfacen las condiciones del problema.

Como se observa en la respuesta, en este problema se usa la técnica del principio de multiplicación, ya que el primer dígito se puede tomar de 4 maneras que a su vez se multiplica por la técnica estudiada este momento, las variaciones, porque para los dos dígitos restantes de 4 elementos se toman grupos de 2 en 2.

Se ha solucionado el problema, pero se hace necesario la verificación, no solo de la solución, sino de todo el plan que ejecutó el estudiante para llegar a esta.

Mirada retrospectiva: El profesor puede preguntar lo siguiente al estudiante ¿si se aumenta los dígitos, cambia el problema?, ¿si se fija un número en una determinada posición, qué pasaría? y ¿que los números puedan repetirse en dos, más o todas la posiciones? Estas preguntas ayudan a evaluar el proceso al estudiante.

2.3. Variaciones con repetición

Definición 2.2. Se llaman variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k a los distintos grupos formados por k elementos de manera que no entran todos los elementos si $n > k$, sí pueden entrar todos los elementos si $n \leq k$, aquí se debe tener en cuenta el orden y se pueden repetir elementos. Este tipo de variaciones se denota usualmente $VR_{n,k}$ y está dada por la siguiente expresión

$$VR_{n,k} = n^k.$$

Con un ejemplo entendamos lo anterior. Con los dígitos 1, 2 y 3, ¿cuántos números de cinco cifras pueden formarse?

Como en el ejemplo no hay ningún tipo de restricción y por la longitud del número que pide, se asume que los dígitos dados en el problema se pueden repetir, así su solución vendría dada por una variación con repetición, de este modo hay

$$VR_{3,5} = 3^5 = 243.$$

En seguida presentamos unos problemas y un proceso de solución para cada uno usando esta técnica y la metodología de Pólya.

Ejemplo 2.2. Una lotería usa 9 números para su sorteo y el número ganador lo conforman 3 números, cuando el primer número sale se vuelve a ingresar a la urna, nuevamente se realiza el sorteo y sale el segundo número, y este se vuelve ingresar a la urna y así sucesivamente. ¿Cuántos números ganadores pueden haber?

P. Lee detenidamente el problema.
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. El total de números ganadores de una lotería.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Son 9 los números usados en el sorteo, el número ganador esta compuesto por 3 de estos y cada que un número sale se vuelve a ingresar a la urna para sortear el siguiente.

P. ¿Cuántas opciones tienes para el primer número del número ganador?
A. Tengo 9 opciones, ya que son 9 números los que se usan para el sorteo.

P. ¿El número que se eligió puede estar nuevamente en el número ganador?
A. Sí, porque la condición dice que el número que sale ingresa nuevamente a la urna y se sigue con el sorteo.

P. Entonces, ¿cuántos números se pueden elegir para el segundo número?
A. Nuevamente 9 números, debido a que el primer número vuelve a estar en el sorteo.

Se espera que el estudiante en este momento tenga claro que para el tercer número del ganador se procede de igual manera, por lo tanto se sigue con el dialogo hasta su resolución.

P. Para el tercer número también hay 9 opciones.
A. Sí, ya que los números que salen seleccionados ingresan otra vez a la urna, por lo tanto quedan los 9 números.

Entonces hay

$$9 \times 9 \times 9 = 9^3 = 729$$

posibles números ganadores de la lotería.

Se soluciona el problema, sin embargo se hace necesaria la verificación del plan ejecutado por parte del estudiante para llegar hasta la respuesta final del problema.

Mirada retrospectiva: El profesor puede preguntar lo siguiente al alumno ¿si se aumenta los números, cambia el problema?, ¿si se fija un número en una determinada posición?, ¿qué pasa si el número ganador de la lotería sea una combinación de más números?, ¿que el numero que salga no vuelva ingresar en el sorteo? Estas preguntas ayudan a evaluar el proceso al estudiante.

Ejemplo 2.3 ([10], prob. 1, pág. 21)**.** ¿Cuántas banderas con tres franjas horizontales del mismo ancho y distintos colores pueden formarse, si se dispone de tela amarilla, azul, verde, blanca y roja?

P. Lee el problema.
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. La cantidad de banderas con tres franjas horizontales.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Las franjas son horizontales, tienen el mismo ancho, deben ser diferentes colores entre amarillo,

azul, verde, blanca y roja.

P. ¿Cuántas opciones tienes para ubicar lo colores en las banderas?
A. 3, porque son tres las franjas que tiene la bandera.

P. ¿Hay alguna distinción entre las franjas?
A. No, porque todas tienen el mismo ancho; sin embargo, se diferencian en el color, ya que no debe ser el mismo para cada franja.

El estudiante ya ha entendido el problema y puede idear un plan que lo lleve a la resolución.

P. Para la primer franja, ¿Cuántos colores pueden ir?
A. Todos los colores de telas disponibles, es decir cinco.

P. En la segunda franja, ¿Cuántos colores puede tener esta franja?
A. Debido a que los colores no se deben repetir, solo pueden ir cuatro colores.

De la misma forma el estudiante puede deducir las posibles telas de colores que tendrá para la tercera franja. Así

P. ¿Cuántas banderas hay?
A. Hay

$$5 \times 4 \times 3 = 60$$

banderas de tres franjas, donde ninguna franja repite color.

Se ha solucionado el problema, pero se hace necesario la verificación, no solo de la solución, sino de todo el plan que ejecutó el estudiante para llegar a esta.

Mirada retrospectiva: El profesor puede preguntar lo siguiente al estudiante ¿si la primera franja debe ser de un color en especifico?, ¿si fueran más franjas, que pasaría con el número de opciones, cambiaría?, ¿el ancho de las franjas tiene importancia en la resolución del problema?, y ¿si fueran de diferentes anchos las franjas, en que cambia el proceso y la solución? Estas preguntas ayudan a evaluar el proceso al estudiante.

Ejemplo 2.4 (OMUA, taller de preparación, ejercicio 3.1)**.** Ocho caballos compiten en una carrera hípica. Si se sabe que los caballos nunca cruzan iguales la meta, ¿de cuántas maneras distintas pueden estos ocho caballos ocupar el primer, segundo y tercer lugar?

P. Leamos atentamente el problema.
A. ...

P. ¿Qué nos pide el problema?
A. Las distintas formas en que ocho caballos ocupan el primer, segundo y tercer lugar.

P. ¿Cuáles son los datos que el problema proporciona?
A. Son ochos los caballos que compiten, los caballos nunca llegan iguales a la meta.

En este momento el estudiante ya ha entendido el problema y podemos seguir ideando un plan para la solución.

P. ¿Cuántos caballos pueden llegar en el primer lugar?
A. Como es el primero, ningún caballo antes ha cruzado la meta, por lo tanto 8 caballos pueden llegar en el primer lugar.

P. ¿Para el segundo lugar pueden llegar ocho caballos?
P. No, porque ya ha cruzado un caballo, a parte que la condición inicial del problema dice que no llegan iguales a la meta.

P. Entonces, ¿cuántos caballos pueden llegar en el segundo lugar?
A. Debido a que un caballo ya cruzó, entonces el segundo lugar lo pueden ocupar 7 caballos.

P. Y ¿En el tercer lugar, cuántos caballos pueden estar?
A. La condición me dice que no deben llegar en la misma posición y como también han cruzados dos caballos más anteriormente, entonces son 6 los caballos que pueden llegar en el tercer lugar.

Por lo tanto hay

$$8 \times 7 \times 6 = 336$$

formas de que ochos caballos ocupen el primer, segundo y tercer lugar, sin que lleguen lleguen iguales a la meta.

Mirada retrospectiva: El profesor puede preguntar, ¿Si se premia hasta el cuarto lugar, en que varía la solución del problema?, ¿qué pasa si se deja la posibilidad que en algunas posiciones lleguen caballos iguales a la meta? y ¿al aumentar la lista de corredores, cambia la solución?

2.4. Problemas propuestos

En esta sección se dejan algunos problemas propuestos, los cuales han sido recopilados de olimpiadas y de textos.

1. ([23], ejemplo, pág. 4). Se escriben las letras a, b, c, d, e, f en papelitos distintos y luego se revuelven los seis papelitos en una bolsa. Se desea formar palabras de cuatro letras con esas letras. Se extrae un papelito, se apunta la letra, y se regresa a la bolsa, repitiendo este proceso 4 veces. ¿Cuántas palabras se puede formar?

2. ([23], ejemplo, pág. 3). ¿Cuántos números de 5 cifras están formados únicamente de cuatros y doses (ejemplos: 44242, 24422)?

3. ([23], ejemplo, pág. 5). El alfabeto tiene 27 letras. ¿Cuántas palabras de 5 letras se pueden formar en las que ninguna letra se repita?

4. (OMUA, taller de preparación, prob. 21). Una prueba de opción múltiple consta de 5 preguntas, cada una de ellas con 4 posibles respuestas, de las cuales solo una es la correcta. El número de maneras distintas para que un estudiante asigne una respuesta a cada pregunta es

5. (ORM-UNIVALLE, problemas de preparación, nivel 1, prob. 1). Una caja fuerte se abre mediante una cierta clave de 5 dígitos (pueden ser repetidos). Ud. es lo suficientemente audaz como para intentar abrirla, y lo hace probando números al azar. ¿Cuántas claves posibles hay? ¿Cuántas claves posibles hay si se usan sólo los dígitos de 1 a 6 en vez de usar los 10?

6. (OMM, libro de preparación, ejemplo 1.10). De un grupo de 5 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 para que cada uno visite un museo de una lista de 3 museos. ¿Cuántas comisiones distintas se pueden formar?

7. (ORM-UNIVALLE, nivel II, 2011, prob. 6). Felipe necesita llamar a Andrea, pero de los 7 dígitos del número telefónico de ella, solo recuerda lo siguiente: Los 3 primeros dígitos son primos, el quinto dígito es par, el último dígito es impar. La cantidad de números que existen con estas especificaciones es.

8. ([23], ejemplo, pág. 6). Si en un concurso de matemáticas participan 50 personas, ¿de cuántas maneras pueden quedar repartidos el primer, segundo y tercer lugar?

9. (ORM-UNIVALLE, nivel III, 2013, prob. 4). Carlos desea pintar una bandera compuesta por cinco barras horizontales y posee tres colores distintos. Cada barra se debe pintar de un solo color y dos barras adyacentes deben pintarse de colores distintos. La cantidad de formas en que Carlos puede pintar la bandera es.

10. ([19], prob. 1.4.7, pág 19). Hay 8 velocistas en la final olímpica de 100 metros. La medalla de oro va al primer lugar, la plata al segundo y el bronce al tercero. ¿De cuántas maneras se pueden otorgar las medallas?

11. (OMM, libro de preparación, ejercicio 1.32). ¿De cuántas maneras distintas se pueden sentar 5 personas en una fila de 8 asientos numerados del 1 al 8?

12. ([10], prob. 5, pág 22). ¿Cuántos números mayores que 3000 y menores que 4000 pueden formarse con los dígitos 2, 3, 5 y 7 si cada cifra puede emplearse las veces que se desee?

13. ([23], ejemplo, pág. 5). Si se baraja un paquete completo de 52 cartas. ¿De cuántas formas pueden quedar ordenadas?

14. (OMM, libro de preparación, ejemplo 1.11). De un grupo de 5 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 para que juntos visiten un museo (el mismo todos). ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar?

15. (OMCC, 2003, prob. 5). Un tablero cuadrado de 8 cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1 cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2 cm de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

Capítulo 3

Permutaciones

3.1. Introducción

En este capítulo se revisará un tipo importante de agrupación como lo son las llamadas permutaciones. El concepto de permutación aparece en la obra hebrea titulada Séfer Yetzirah (*El libro de la creación*), un manuscrito elaborado por un místico entre el año 200 y el 600 d.C. Pero existía ya un resultado anterior de Jenócrates de Calcedonia (396-314 a.C.) [7].

A un grupo ordenado de elementos de un conjunto se le denomina permutación, mientras que a un grupo no ordenado de elementos de un conjunto se le denomina combinación.

Por ejemplo, tomando el conjunto $\{X, Y, Z\}$, los arreglos YXZ, ZYX, se consideran una combinación, mientras que cada una de las 6 posibles combinaciones diferentes de éstas letras es una permutación:

$$XYZ, XZY, YXZ, YZX, ZXY, ZYX.$$

En este capítulo nos centraremos en el estudio de las permutaciones ordinarias y con repetición.

3.2. Permutaciones ordinarias

Definición 3.1 (Factorial)**.** El factorial de un número entero positivo n se denota por $n!$ y se define como el producto de los primeros n enteros:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n.$$

El factorial de 0 se define como 1:

$$0! = 1.$$

El simbolo $n!$ se lee "*n factorial*".

Definición 3.2. Se llama permutaciones ordinarias de n elementos tomados de n en n, a los distintos grupos formados por n elementos que se tienen en cuenta todos los elementos, importa el orden y no se admiten repeticiones. Estas permutaciones se denotan por

$$P_n = n!$$

Para comprender lo dicho anteriormente pensemos en un grupo de 3 letras ABC. En una permutación, ABC y CAB son resultados distintos, pero en una combinación (tema que trataremos en el siguiente capítulo), estos resultados son el mismo. ¿Cuántas maneras diferentes hay de ordenar las letras A, B, y C? Es decir, ¿cuántas permutaciones hay para este grupo en particular? Es fácil ver que las permutaciones son: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA.

De esta manera, existen 6 maneras de ordenar estas letras. Lo que estamos haciendo es encontrando el número de permutaciones de 3 objetos cuando elegimos los 3 ($n = 3$ y $k = 3$). Entonces, usando la fórmula, existen

$$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

resultados. Lo que corresponde con el resultado que encontramos.

Haciendo uso de esta técnica y de la metodología de Pólya, resolvemos el siguiente problema.

Ejemplo 3.1 (OMPR, 2003-04, nivel I , prob. 21)**.** ¿Cuántos números de 4 cifras distintas puedes formar usando solamente el 1, el 2, el 5 y el 9?

P. Leamos atentamente el problema.
A. ...

P. ¿Qué nos pide el problema?
A. Los números de 4 dígitos que se pueden formar usando solamente el 1, el 2, el 5 y el 9.

P. ¿Cuáles son los datos que el problema proporciona?
A. Las cifras que conforman el número deben ser diferentes y solo se deben usar el 1, el 2, el 5 y el 9.

Una forma que puede ayudar al alumno a entender el problema es pidiendo que de ejemplos que cumplan las condiciones del problema.

P. ¿Qué número cumple con lo pedido en el problema?
A. Un número que cumple es el 1259.

P. ¿Por qué ese número cumple con lo que se pide en el problema?
A. Porque es un número de 4 dígitos y se usaron solo los dígitos 1, 2, 5 y 9.

P. Ahora, da un ejemplo de un número que no cumpla.
A. El número 1159 no cumple.

P. ¿Por qué ese número no cumple con las condiciones?
A. Porque, a pesar que tiene cuatro dígitos no está usando todos los dígitos que pide el problema, en este caso el 2 no se uso y el 1 se está usando dos veces.

De esta manera el alumno puede aclarar lo que seguirá para el proceso de resolución.

P. Entonces, ¿no se puede repetir los números de la lista?
A. No, solo se usa el dígito dado.

P. ¿Cuántos números serían?
A. Debido a que el número que se usa no se vuelve a repetir y la cantidad de dígitos que debe tener el número pedido es igual a los dígitos dados para formar dicho número, se tiene que hay

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

números que satisfacen el problema.

El proceso de resolución, que con ayuda del profesor, el alumno desarrolló puede no ser el único y con la ayuda del último paso planteado en la metodología de Pólya se revisa la solución, el proceso y además pueden surgir posibles diferentes procesos de resolución.

Mirada retrospectiva: El profesor puede preguntar, ¿si se pide que los números tengan más dígitos, pero que se usen los mismos dígitos dados?, ¿si se da la posibilidad de repetir los números de la lista, cambia el problema?, ¿qué pasaría si solo se pudiera repetir uno de los dígitos dados o algunos de ellos? y ¿en caso que aumentarán los dígitos de la lista, pero que los dígitos que conforman los números pedidos no cambie?

3.3. Permutaciones con repetición

Definición 3.3. Se usan cuando un elemento se repite a veces, otro b veces, otro elemento c veces, y así sucesivamente. Sea $n = a + b + c + \cdots$.

De esta manera estamos interesados en saber la cantidad de grupos distintos que pueden formarse con esos n elementos de forma que se deben tener en cuenta todos los elemento, importa el orden y se repiten los elementos seleccionados. Este número se denota por

$$PR_n^{a,b,c,\ldots}$$

y está dado por

$$\frac{P_n}{a!\cdot b!\cdot c!\cdots}.$$

Ilustremos la anterior definición mediante un ejemplo. Obtenga todas las permutaciones posibles con las letras de la palabra OSO.

Supongamos que todas las letras de la palabra OSO son diferentes y para diferenciarlas pondremos subíndices a las letras O, por lo que quedaría, O_1SO_2. Con la condiciones impuestas observe que las letras O son diferentes, las permutaciones ordinarias a obtener serían

$$P_3 = 6.$$

Definiendo las permutaciones tenemos que estas serían,

$$O_1SO_2, O_2SO_1, SO_1O_2, SO_2O_1, O_1O_2S, O_2O_1S.$$

Pero, ¿realmente podemos hacer diferentes a las letras O?, eso no es posible, entonces ¿cuántos arreglos reales se tienen?

$$\begin{aligned} O_1SO_2, O_2SO_1 &= OSO,\\ SO_1O_2, SO_2O_1 &= SOO,\\ O_1O_2S, O_2O_1S &= OOS. \end{aligned}$$

Así se observa que en realidad solo es posible obtener tres permutaciones con repetición con las letras de la palabra OSO debido a que las letras O son idénticas. Haciendo el anterior análisis podemos observar su solución con la fórmula.

Dado que la letra O está dos veces (O=2) y la letra S una vez (S=1), se sigue que $n = 2+1$. Por lo tanto

$$PR_3^{2,1} = \frac{3!}{2!\cdot 1!} = \frac{3\cdot 2!}{2!} = 3.$$

Este problema plantea una serie de inconvenientes uno de ellos es el análisis que ya realizó en su proceso de resolución y es el de identificar que las letras que se repiten se deben tener en cuenta para la solución, el otro inconveniente que puede surgir es el de saber cual técnica, si permutaciones o combinaciones (técnica que se estudia en el capítulo 4), realmente aplica a ese problema. Lo que nos lleva al problema como hacer para poder diferenciar entre una técnica y la otra, situación que se revisará en un apartado del capítulo 4.

Para entender y poner en práctica estas técnicas, resolvemos unos problemas haciendo uso de la metodología de Pólya, tal y como se presentan a continuación.

Ejemplo 3.2 ([7], ejemplo 1.13, pág. 9)**.** La MASSASAUGA es una serpiente venenosa marrón y blanca originaria de América del Norte. ¿Cuántas disposiciones posibles existen de esa palabra en las que las letras A estén juntas?

P. Leamos atentamente el problema.
A. ...

P. ¿Qué nos pide el problema?
A. Las permutaciones de la palabra MASSASAUGA donde las letras A estén juntas.

P. ¿Qué datos proporciona el problema?
A. Las letras de la palabra MASSASAUGA, y que las disposiciones sean en donde las letras A estén juntas.

P. Usando la definición de permutación ¿cuántas permutaciones tiene la palabra MASSASAUGA?
A. Si uso esa técnica, tengo que hay

$$P_{10} = 10! = 3628800$$

permutaciones de esa palabra.

P. ¿Qué pasa con las letras que se repiten?
A. Se las puede distinguir entre sí.

P. ¿De qué manera se las distingue entre sí?
A. Los subíndices ayudan.

P. ¿Cómo queda la palabra?
A. Haciendo uso de los subíndices la palabra se puede escribir de la siguiente forma $MA_1S_1S_2A_2S_3A_3UGA_4$

Con esa ayuda el alumno fue capaz de diferenciar las letras repetidas A y S, con cuatro y tres veces, respectivamente.

P. ¿Entonces la respuesta fue la anterior, usando permutaciones ordinarias?
A. No.

P. ¿Por qué esa no es la respuesta al problema?
A. Porque, como lo acabamos de revisar en la palabra hay letras que se repiten.

P. Y eso ¿qué implica en la solución planteada anteriormente?
A. Ya que se usó la técnica de permutaciones ordinarias, eso implica que por ejemplo las permutaciones

$$MA_1S_1S_2A_2S_3A_3UGA_4$$

y

$$MA_2S_1S_2A_1S_3A_3UGA_4$$

se las cuenten como diferentes, sin embargo al final terminan siendo la misma permnutación MASSASAUGA.

Con esto el estudiante se espera que entienda que para ese tipo de problemas es útil reconocer y diferenciar las letras repetidas, para así mismo identificar que la solución del problema viene dada por otra técnica.

P. Con las observaciones hechas ¿cómo procedes?
A. Debido a que hay letras repetidas no funciona la técnica de permutaciones ordinarias, sino la de permutaciones con repetición.

Aquí el estudiante ya debe tener claro la técnica a aplicar, y procediendo como lo plantea la definición se tiene son dos letras repetidas A=4 veces y S=3, M=1, U=1, G=1 así $n = 4 + 3 + 1 + 1 + 1 = 10$ que son las letras de la palabra y se tienen

$$PR_{10}^{4,3,1,1,1} = \frac{10!}{4! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 25200$$

permutaciones de la palabra MASSASAUGA.

P. ¿El problema quedó resuelto?
A. Aún no.

P. ¿Por qué?
A. Porque no cumple todas las condiciones que el problema plantea.

P. ¿Cuál condición hizo falta tener en cuenta?
A. La condición de que las letras A estén juntas.

P. ¿Cómo haces para que esa condición se cumpla?
A. Tomar esas cuatro letras A como una.

Con esa idea, se procede de la misma forma, S=3, AAAA=1, M=1, U=1, G=1,

$$n = 3 + 1 + 1 + 1 + 1$$

así se tienen

$$PR_7^{3,1,1,1,1} = \frac{7!}{3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 840$$

permutaciones de la palabra MASSASAUGA en las que las cuatro letras A están juntas.

Aquí ya hemos encontrado la solución, sin embargo aún no está totalmente resulto el problema, nos queda por hacer el último paso y quizás el que siempre olvidamos considerar, revisar la solución obtenida, este paso nos permite verificar cada uno de los procedimientos efectuados en el desarrollo del problema.

Mirada retrospectiva: El profesor puede preguntar al alumno, ¿qué pasaría si se pide que sean otras las letras que estén juntas?, ¿que, a parte que las letras estén juntas, solo estén en una determinada posición?, esas preguntas ayudan al estudiante a revisar su proceso y por que no, plantear otro.

Ejemplo 3.3 ([23], ejemplo, pág. 5)**.** Si se tienen 7 libros, ¿de cuántas formas se puede ordenarlos en un librero (uno junto a otro)?

P. Leamos atentamente el problema.
A. ...

P. ¿Qué nos pide el problema?
A. Ordenar 7 libros en un librero uno junto a otro.

P. ¿Qué datos proporciona el problema?
A. Son 7 los libros que hay que ordenar los cuales deben estar uno junto a otro.

Estos pasos son esenciales para involucrar al alumno con el problema.

P. Si vas a ubicar el primer libro en el librero, ¿de cuántas formas puedes hacer eso?
A. Ya que apenas empezaré a ubicarlos, los libros están todos, es decir que para ubicar el primer libro puedo hacerlo de 7 formas.

P. El libro que ubicaste ¿puede estar en las opciones para la siguiente colocación?
A. No.

P. ¿Por qué eso no es posible?
A. Porque, los libros deben estar uno junto a otro y si se llega a poner el mismo libro en la siguiente posición, la anterior queda vacía, lo que hace que no cumpla la condición del problema.

P. Entonces cuando vayas a ubicar el siguiente libro, ¿cuántas opciones tienes para hacer eso?
A. Como deben ir uno junto al otro y como el mismo libro no puede estar junto así mismo, entonces para ubicar el siguiente libro se puede hacer de 6 formas.

En este momento el alumno ya tiene una idea más clara de el proceso a seguir y de forma análoga se tiene que para los acomodaciones que siguen tendrá 5, 4, 3, 2 y 1 opciones para cada posición respectivamente.

Así los los libros se pueden ordenar de

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7! = 5040$$

formas en el librero.

Mirada retrospectiva: El profesor puede preguntar, ¿qué pasa si los libros son indistinguibles?, ¿el problema cambia si hay libros repetidos?, ¿que ocurre en caso que hayan libros de igual asignatura? y ¿se pide que los de igual área queden juntos o se pida que queden separados?.

Ejemplo 3.4 ([24], ejemplo 3, pág. 3)**.** ¿Cuántos números de 5 dígitos mayores que 21300 hay de modo que sus dígitos son enteros distintos tomados de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

P. Leamos atentamente el problema.
A. ...

P. ¿Qué nos pide el problema?
A. Encontrar números de cinco dígitos que estén formados por los dígitos $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

P. ¿Qué datos proporciona el problema?
A. Los números que piden deben ser mayores a 21300, los dígitos que conforman los números deben

ser distintos y deben ser tomados de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

P. Si tienes que formar números compuestos por cinco dígitos distintos y tienes una lista de cinco dígitos para usar ¿cómo haces para saber cuántos números se pueden formar?
A. En ese caso aplica la técnica de las permutaciones.

P. Y ¿cómo aplicarías esa técnica al problema planteado?
A. Para el primer dígito se tienen cinco dígitos, para el segundo cuatro, y así sucesivamente hasta la quinta posición que tiene un solo dígito por ubicar, lo que corresponde a $5! = 120$.

Hasta este momento se ha logrado que el estudiante identifique la técnica a aplicar, sin embargo el problema aún no se ha resuelto.

P. Con lo que acabas de hallar, el número 12345 hace parte de los números que encontraste, ¿pero ese número cumple con las condiciones del problema?
A. No.

P. ¿Por qué?
A. Porque a pesar que tiene cinco dígitos, todos son tomados de la lista y son diferentes, no cumple con la condición que debe ser mayor de 21300.

Aquí se espera que el estudiante sepa que con la solución anterior algunos números no cumplen con las condiciones del problema.

P. ¿Qué problema tiene la solución planteada anteriormente?
A. Que esa solución toma los números que inician con el dígito 1, lo que hace que inmediatamente sean menores al número 21300.

P. ¿Y los números que inician con el dígito 2 cumplen con las condiciones?
A. Sí.

P. ¿Por qué los números que inician con el dígito 2 cumplen?
A. Porque el siguiente número, el menor es el dígito 1, ya iríamos con el número $21\cdots$.
En la siguiente posición, el menor número que hay es el 3, ya está el número $213\cdots$.
Para la siguiente posición, el menor número para escoger es el 4, ya se va conformando el número $2134\cdots$.

P. ¿Qué quieres mostrar con ese análisis?
A. Que aunque se ubiquen los dígitos más pequeños después de la primer posición, que será el 2, ya serán mayores que 21300, por lo tanto los números que inician con el 2 sí cumplen con las condiciones.

P. ¿Toca revisar más dígitos iniciales de los números?
A. No, porque ya quedan los dígitos 3, 4, 5; formarían números mayores al 21300.

P. Ya sabes que los números que inician con el 1 no cumplen las condiciones, ¿qué debes hacer entonces?
A. A la solución planteada debo quitar los números que inician con el 1, porque como ya revisamos los números que inician con los otros dígitos cumplen con la condición.

Para este momento el alumno sabe que los números que inician con el 1 debe quitarlos, ahora el problema está en encontrar esos números.

P. ¿Cómo hallamos esos números?
A. Debido a que deben ser los números de cinco dígitos que inician con el 1, entonces se tiene que para la primera posición solo hay una opción, para la siguiente ya solo hay cuatro posibles dígitos, para la siguiente 3 posibles dígitos, y así sucesivamente hasta la última posición que solo queda con una posibilidad.

Así, se tiene que el alumno encontró que hay

$$1 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 1 \times 4! = 4! = 24$$

números que inician con el 1.

Y para la solución del problema, tal y como se dijo, es quitarle a los números formados por los cinco dígitos, los números que inician con el 1 que resulta al final en una operación entre permutaciones, de la siguiente manera

$$5! - 4! = 96.$$

Por lo tanto hay 96 números formados por cinco dígitos, todos diferentes y mayores a 21300.

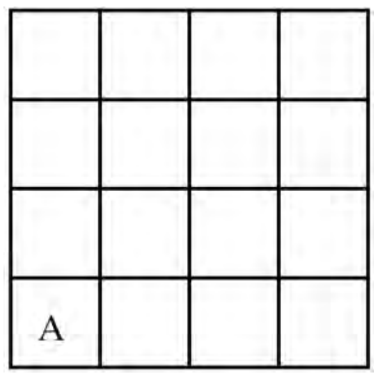
Con el problema resuelto, viene la parte en donde el alumno revisa su proceso.

Mirada retrospectiva: El profesor puede preguntar al alumno, ¿qué pasa si en lugar de iniciar revisando los números que no cumplen, inicia con los números que cumplen las condiciones?, ¿que tal si el problema da la posibilidad de más dígitos?, ¿repetir los dígitos dados para la formación de los números pedidos?, esto es una ayuda para la revisión del proceso y posibles planteamientos de otras soluciones y por qué no formulación de nuevos problemas.

3.4. Problemas propuestos

En esta sección se dejan algunos problemas propuestos, los cuales han sido recopilados de olimpiadas matemáticas y textos relacionados con combinatoria.

1. (OMPR, 2010-11, nivel III , prob. 2). Un grillo está saltando en un tablero y hace saltos de cualquier longitud y en cualquier sentido. Si el grillo empieza en el cuadro A y salta de cuadro en cuadro recorriendo el tablero y parando en cada cuadro sólo una vez, ¿de cuántas maneras diferentes puede hacerlo?



2. (OMUA, taller de preparación, prob. 3). En un estante hay 5 libros de Alemán, 7 libros de español y 8 libros de Inglés, Cada libro es diferente del otro.
¿De cuántas formas podemos poner los libros en el estante?
¿De cuántas formas podemos poner los libros en el estante, si los libros de cada clase deben estar juntos?
¿De cuántas formas podemos poner los libros en el estante, si todos los libros de francés deben ir juntos?

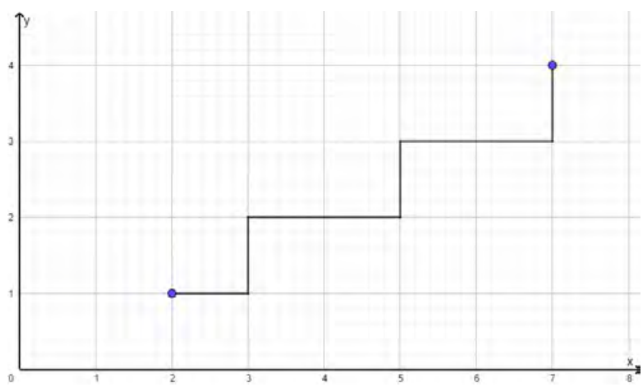
3. (OMPR, 2002-03, nivel II , prob. 26). El señor Zapata y su señora quieren bautizar al bebe Zapata de tal forma que las iniciales de sus dos nombres y su apellido estén en orden alfabético sin letras repetidas. ¿Cuántas combinaciones de iniciales, que cumplen con estas condiciones, pueden darse? (suponga que el alfabeto contiene 26 letras).

4. (OMM, libro de preparación, ejemplo 1.11). De un grupo de 5 estudiantes quiere elegirse una comisión de 3 para que juntos visiten un museo (el mismo todos). ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar?

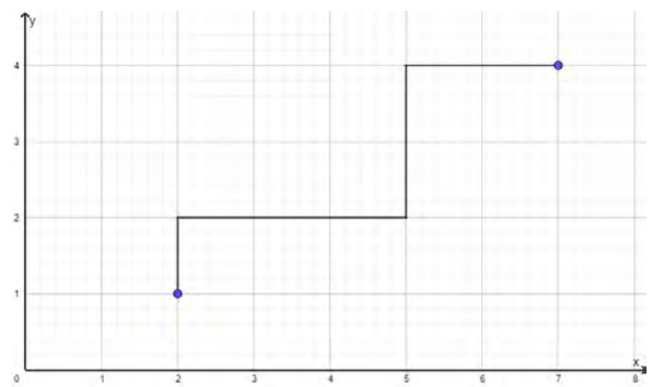
5. ([7], ejemplo 1.14, pág. 10). Determine el número de trayectorias (escalonadas) del plano xy de $(2,1)$ a $(7,4)$; cada trayectoria está formada por escalones individuales que van una unidad hacia la derecha (R) o una unidad hacia arriba (U). Las lineas de las figuras muestran dos de estas trayectorias.

   Debajo de cada trayectoria de la figura enumeramos cada escalón. Por ejemplo, en la parte (a), la lista R, U, R, R, U, R, R, U indica que a partir del punto $(2,1)$, primero nos movemos una unidad hacia la derecha [a $(3,1)$], luego una unidad hacia arriba [a $(3,2)$], luego dos unidades a la derecha [a $(5,2)$], etc., hasta alcanzar el punto $(7,4)$.

   La trayectoria de la parte (b) de la figura esta formada por 5 letras R y 3 letras U.



(a) R, U, R, R, U, R, R, U



(b) U, R, R, R, U, U, R, R

6. (OMPR, 2002-03, nivel II , prob. 46). Un entero positivo de n dígitos se llama "*curioso*" si sus n dígitos son un arreglo (permutación) del conjunto $1, 2, 3, ..., n$ y sus primeros k dígitos forman un entero que es divisible por k, para $k = 1, 2, 3, \ldots, n$. Por ejemplo, 321 es un entero curioso de 3 dígitos. ¿Cuántos enteros positivos de 6 dígitos son curiosos?

7. (OMPR, 2002-03, nivel II , prob. 9). Llámese memorable a un número telefónico $d_1d_2d_3d_4d_5d_6d_7$ de 7 dígitos si la sucesión de prefijo $d_1d_2d_3$ es exactamente igual a cualquiera de las sucesiones $d_4d_5d_6$ o $d_5d_6d_7$ (o ambas). Suponiendo que cada dígito puede ser cualquiera de los dígitos decimales $0, 1, 2, \ldots, 9$; la cantidad de números telefónicos memorables distintos es.

8. (OMPR, 2002-03, nivel II , prob. 18). Andrea, Carla, Julieta, Paola y María compraron boletos de tren para un viaje. Los números de sus asientos eran 7, 8, 9, 10 y 11. Los asientos impares están del lado de las ventanas. Andrea y Carla ocuparon asientos del lado de las ventanas. ¿De cuántas maneras distintas pudieron sentarse las cinco muchachas?

9. (OMPR, 2002-03, nivel II , prob. 2). Se tiene un cubo con las 6 caras de diferente color. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar los números del 1 al 6 si 1 y 6; 2 y 5; 3 y 4 deben estar siempre en caras opuestas?

10. ([23], ejemplo, pág. 7). ¿Cuántos números de 3 cifras tienen todas sus cifras impares y al menos una de ellas está repetida?

11. (OMUA, taller de preparación, prob. 36). La cantidad de números naturales mayores a 7000 que tienen cuatro dígitos, todos diferentes es.

12. (OMM, libro de preparación, ejemplo 1.38). ¿Cuántas palabras distintas se pueden escribir revolviendo las letras de la palabra MATEMATICA?

13. ¿Cuántos números de 4 cifras cumplen la propiedad de que el producto de dichas cifras es un cuadrado perfecto?

14. ([23], ejemplo, pág. 5). Si se baraja un paquete completo de 52 cartas. ¿De cuántas formas pueden quedar ordenadas?

15. (OMM, libro de preparación, ejemplo 1.23). En una bolsa hay 3 pelotas rojas y 2 azules. Se quiere formar una fila con todas ellas. ¿De cuántas maneras distintas puede quedar la fila?

Capítulo 4

Combinaciones

4.1. Introducción

Leibniz (1646-1716) dedicó bastante atención a la Combinatoria. Hacia 1676 obtuvo la fórmula para los coeficientes multinomiales, redescubierta y publicada por De Moivre veinte años más tarde [10].

La Combinatoria puede definirse como el estudio de las configuraciones formadas con los elementos de un conjunto finito, entendiendo por tales las aplicaciones del conjunto en otro (posiblemente provisto de cierta estructura) que satisfagan unas restricciones determinadas.

En este capítulo se revisarán las combinaciones, una técnica de la combinatoria que estudia los problemas de enumeración y las estructuras de orden en conjuntos finitos.

Esta técnica de conteo permite calcular el número de arreglos que pueden realizarse con todos o con una parte de los elementos de un solo conjunto, en donde no interesa el orden de los elementos.

4.2. Combinaciones ordinarias

Definición 4.1. Cuando escogemos k objetos de n objetos en total, en un orden que no importa, el número de combinaciones es el número de variaciones para k de n objetos dividido entre el número de permutaciones para escoger k de k objetos. Es decir,

$$C_{n,k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1} = \frac{V_{n,k}}{P_k}.$$

La cual resulta de resolver la expresión de las combinaciones dada en factoriales,

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Y que suele escribirse
$$\binom{n}{k}.$$

Veamos una aplicación de la definición. En una floristería hay 15 flores de diferentes colores, ¿de cuántas formas se puede armar un ramo de 8 flores?

Tengamos en cuenta que para este ejercicio el orden no interesa, ya que si elegimos un ramo formado por flores de los colores amarillo, azul, rojo, verde, negro, blanco, purpura y rosado, será el mismo ramo formado por las flores de colores azul, amarillo, verde, rojo, purpura, blanco, rosado y negro, de ahí que se divide entre permutaciones para escoger k de k objetos, con el fin de que solo quede una de esas variaciones posibles, por lo tanto se tiene que hay

$$C_{15,8} = \frac{15!}{8! \cdot 7!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8!}{8! \cdot 7!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6435$$

maneras de formar un ramo.

Con la idea de ejemplificar esta técnica, presentamos el siguiente problema.

Ejemplo 4.1 (OMUA, taller de preparación, ejercicio 4.1)**.** ¿De cuántas maneras distintas se puede formar un comité de 5 personas a partir de un grupo de 12 personas?

Para ayudar al estudiante el docente una vez más puede hacer uso de algunas preguntas como las siguientes.

P. ¿Qué nos pide el problema?
A. Calcular el número en que se puede formar un comité de 5 personas a partir de un grupo de 12 personas.

P. ¿Qué datos proporciona el problema?
A. El grupo del que se quiere formar el comité tiene 12 personas.

P. ¿Puedes dar un ejemplo de un comité?
A. Tal y como lo presenta el enunciado no.

P. ¿Por qué?
A. Porque el enunciado del problema solo da la cantidad de personas, pero no dice quienes son esas personas.

P. ¿Cómo harías para identificar a las personas?
A. Podemos nombrarles con letras.

Con esas observaciones el alumno puede dar los ejemplos y así poderse guiar para ir viendo los posibles comités.

P. ¿Cuáles serían las personas del grupo para formar los comités?
A. Son 12 y se pueden nombrar con letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, L, M.

P. ¿De cuántas formas se pueden ordenar esas 12 en personas en grupos de 5?
A. Se pueden ordenar de

$$12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95040$$

formas diferentes.

P. ¿A qué tipo de configuración vista corresponde ese desarrollo que hiciste?
A. Corresponde a variaciones de 12 elementos tomados de 5 en 5, $V_{12,5}$.

P. ¿De todos esos grupos, podrías dar un ejemplo de un comité?
A. Un comité puede ser A, B, C, D, E.

P. Si ese es un comité, ¿el comité formado por C, A, E, D, B; es otro comité?
A. No.

P. ¿Por qué no es otro comité?
A. Porque en el enunciado del problema solo dice que se debe formar con 5 personas y no hay condiciones para el orden en que esas 5 personas conformen el comité.

P. Entonces ¿la solución anterior no es la respuesta?
A. No.

P. ¿Por qué?
A. Porque en la solución anterior surge el problema que un comité se cuenta más de una vez.

P. Si el orden de esas 5 personas no interesa, ¿Cuántos son los comités que resultarían siendo los mismos?
A. Como el orden no importa, hacemos uso de las permutaciones y así sabemos cuántos comités

serían los mismos, que para ese grupo son

$$5! = 120.$$

P. ¿Qué se debe hacer con la anterior solución?
A. De todas esas formas que salen de la anterior solución, debemos quitar las que se repiten y solo dejar una de ellas, que será el comité.

P. ¿Cómo hacer eso?
A. En la solución anterior, al final resultó que se encontraron las variaciones de 12 tomados de 5, pero esas contaban grupos de 5 que se repiten; pero como en el comité no importa el orden, de esos grupos que se repiten debemos dejar solo 1, por lo tanto a las variaciones de las 12 personas tomadas de 5 lo dividimos entre el número de formas de organizar esas 5 personas, para que así quede solo 1 de esos arreglos.

Así se tiene que hay

$$\frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 792$$

maneras de formar un comité con 5 integrantes a partir de un conjunto con 12 personas.

Así queda resuelto el problema planteado, pero el paso que sigue es importante.

Mirada retrospectiva: Se puede preguntar lo siguiente, ¿qué pasaría si dentro del comité hay ciertas funciones para cumplir?, ¿qué sucedería si la cantidad de personas que deben formar el comité es mayor a las funciones que hay en el comité o todo lo contrario? y ¿la técnica a utilizar cambia si se aumenta la cantidad de personas que deben estar en el comité o si se cambia la cantidad de personas de donde se deben formar los comités?

4.3. Combinaciones con repetición

Definición 4.2. Cuando escogemos k objetos de n objetos en total, en un orden que no importa y admitiendo elementos repetidos, el número de combinaciones viene dado por

$$CR_{n,k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

A continuación apliquemos la técnica. En una pastelería hay 6 tipos distintos de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 pasteles si puedo elegir más de uno de cada tipo?

Como nos damos cuenta si nos gusta un pastel lo podemos pedir hasta cuatro veces, en consecuencia estamos en el caso en el que no nos importa el orden en que elijamos los pasteles y podemos repetir, son combinaciones con repetición. De este modo hay

$$CR_{6,4} = \frac{(6+4-1)!}{4!(6-1)!} = \frac{9!}{4!\cdot 5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5!}{4!\cdot 5!} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{4!} = 126$$

formas de elegir 4 pasteles con la posibilidad de repetir uno de ellos.

Con la metodología de Pólya y esta técnica, resolvamos un problema.

Ejemplo 4.2. Una ficha de dominó es un rectángulo en el que hay dos partes, en cada una de ellas hay una serie de puntos que indican la puntuación de cada parte. Estas puntuaciones van de blanca (0 puntos) a 6. También hay fichas con pares de puntuaciones de 0 a 6. ¿Cuántas fichas tiene el juego del dominó?

Para ayudar al estudiante el docente una vez más puede hacer uso de algunas preguntas como las siguientes.

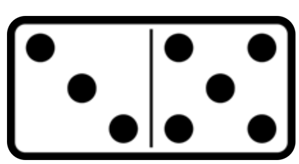
P. ¿Qué nos pide el problema?
A. Encontrar el total de fichas que conforman el juego de dominó.

P. ¿Qué datos proporciona el problema?
A. Las fichas se dividen en dos partes, cada parte tiene una serie de puntos que indican cantidades que van blanca (0 puntos) a 6 y también hay fichas con pares de puntuaciones de 0 a 6.

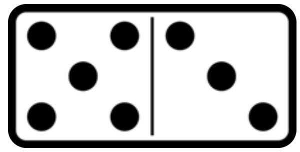
Ahora el profesor debe intentar llevar al estudiante a entender el problema.

P. Teniendo en cuenta esas condiciones, ¿me puedes dar un ejemplo de una ficha de ese juego?
A. Sí.

P. ¿Cuál ficha tienes como ejemplo?
A. La ficha 3/5.



P. Y esta ficha



La 5/3, ¿se cuenta como otra ficha para el juego?
A. No.

P. ¿Por qué esa ficha no se cuenta como otra ficha diferente?
A. Porque las puntuaciones de la ficha son los mismos, lo que hace diferentes esas fichas es la posición, sin embargo es la misma ficha.

P. Entonces se puede decir que ¿el orden de las puntuaciones en las fichas no importa?
A. Así es.

P. Cuando eso pasa, ¿qué tipo de configuración se tiene?
A. Se tiene que son combinaciones.

P. ¿Y con combinaciones ordinarias se puede llegar a la respuesta del problema?
A. No.

P. ¿Por qué con combinaciones ordinarias no es posible llegar a la respuesta?
A. Porque se debe tener en cuenta las demás condiciones que el problema da.

P. Como ¿cuáles condiciones?
A. Que hay fichas con pares del 0 al 6.

P. ¿Eso qué quiere decir?
A. Eso significa que hay fichas con puntuaciones repetidas.

P. Con estos hallazgos, ¿qué tipo de configuración es el problema?
A. Ya sabemos que son combinaciones y como hay elementos que se repiten, serían combinaciones con repetición.

El estudiante fue capaz de llegar a entender el problema y lo que debe hacer para encontrar su solución. De este modo se deben acomodar 7 tipos de puntuaciones en combinaciones de 2 tipos de puntuaciones y ya saben que el orden no importa y los elementos se van a repetir, así se tiene que hay

$$CR_{7,2} = \frac{(7+2-1)!}{2!(7-1)!} = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2!} = 28$$

fichas de dominó.

El problema planteado se ha solucionado con un proceso de resolución, el siguiente paso permite que el proceso sea evaluado.

Mirada retrospectiva: Pueden hacerse algunas preguntas, ¿Qué pasaría si la posición de las fichas influye en el problema?, ¿el problema cambia si se pide que sean otros tipos de puntuación?, ¿en caso que se pida un dominó especial, con rangos más amplios en puntuación o con rangos menos amplios? y ¿ si se pidiera que no hayan pares? Esto permitiría que el estudiante evalúe su proceso, que eventualmente halle otro proceso para llegar a la solución y que formule nuevos problemas.

Veamos otros problemas relacionados con este tema y con la ayuda de la metodología de Pólya propongamos un proceso de resolución para cada uno.

Ejemplo 4.3 (ORM-UNIVALLE, nivel II, 2008, prob. 2)**.** En un salón de clases hay veinte alumnos de distintos grados que conforman un grupo de estudio de Olimpiadas Matemáticas distribuidos de la siguiente manera: cinco de séptimo, cuatro de octavo, seis de noveno y cinco de once. Se desea escoger cuatro de séptimo, tres de octavo, cinco de noveno y cuatro de once, para un concurso intercolegiado. ¿De cuántas formas se puede escoger este grupo?

P. Leamos detenidamente el problema.
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. El número de formas en las que se puede escoger un grupo para un concurso intercolegiado conformado por alumnos de séptimo, de octavo, de noveno y de once.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. En el grupo de estudio de Olimpiadas Matemáticas hay cinco alumnos de séptimo, cuatro de octavo, seis de noveno y cinco de once.
El grupo para el concurso intercolegiado debe estar formado por cuatro alumnos de séptimo, tres de octavo, cinco de noveno y cuatro de once.

P. ¿Se puede hacer la elección directamente de los veinte alumnos que están en el grupo de estudio?
A. No.

P. ¿Por qué no se puede hacer eso?
A. Eso no se puede hacer porque el grupo que va para el concurso intercolegiado debe estar formado por una cierta cantidad de alumnos de cada grado.

P. De esa forma, si en el grupo de estudio hay cinco alumnos de séptimo y para el concurso se deben elegir cuatro alumnos de ese grado, ¿de cuántas formas puede hacerse eso?
A. Debido a que los cuatro alumnos que se escogen no importa el orden entre ellos, esto se puede hacer de

$$C_{5,4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4!} = 5$$

formas diferentes.

De la misma forma se tiene que para escoger tres alumnos de cuatro del grado octavo hay

$$C_{4,3} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$$

formas de hacer la elección.
Igualmente se sigue para hacer la elección en el grado noveno

$$C_{6,5} = 6.$$

Y el grado once

$$C_{5,4} = 5.$$

P. Como ya dijiste anteriormente la elección no se puede hacer directamente con los veinte alumnos, sino que grado por grado, ¿qué quiere decir eso?
A. Eso quiere decir que las formas de elegir el grupo para el concurso no depende del total del grupo de estudio, sino que depende de la elección que se haga en cada grado.

Como ya se sabe, la elección no puede hacer con todos los grados juntos, debe hacerse grado por grado, lo que se puede interpretar como sucesos disjuntos, así el total de formas de elegir el grupo para el concurso intercolegiado viene dada por la suma de las formas de escoger los estudiantes en cada grado, de esa forma hay

$$5 + 4 + 6 + 5 = 20$$

formas de elegir un grupo para el concurso intercolegiado.

Mirada retrospectiva: El profesor puede realizar las siguientes preguntas, ¿si se aumentan los integrantes?, ¿que pasa si en el grupo de estudio hay estudiantes de todos los grados escolares, cambia el problema?, ¿si se pidiera que para el concurso solo puedan enviarse estudiantes de determinados grados o que vayan de todos los grados pero solo los de mayor edad? y ¿qué pasa en el caso que se deban enviar igual número de mujeres y hombres?

Ejemplo 4.4 (OMUA, taller de preparación, prob. 18)**.** Si en un salón hay 12 hombres y 15 mujeres, ¿de cuántas formas se puede escoger un grupo de tres estudiantes?

P. Leamos detenidamente el problema.
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Las formas en que se pueden escoger un grupo de tres estudiantes de un salón donde hay 12 hombres y 15 mujeres.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. En el salón hay 12 hombres y 15 mujeres, y los grupos a formar deben estar integrados por tres estudiantes.

P. ¿Hay alguna otra condición para escoger los tres estudiantes?
A. No, solo las dichas anteriormente.

P. ¿Influye en algo la distinción entre mujeres y hombres para escoger los grupos?
A. No.

P. ¿Por qué?
A. El problema no plantea ninguna condición para escoger los tres estudiantes que conformen el grupo.

Con esto se espera que el estudiante comprenda que para elegir los grupos es necesario tener en cuenta todos los alumnos del salón y no es necesario la separación entre mujeres y hombres como lo muestra el problema.

P. Entonces ¿cuántas maneras tienes para escoger los grupos?
A. Tengo lo que corresponde al total del salón, es decir de $12 + 15 = 27$ estudiantes puedo hacer la elección de los grupos.

Como los grupos deben estar formados por 3 estudiantes del salón, y no hay condiciones para esos tres estudiantes, se tiene que se pueden formar

$$C_{27,3} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{3!} = 2925$$

grupos de 3 personas.

El problema no termina hasta que hayamos hecho la revisión del proceso.

Mirada retrospectiva: El profesor puede realizar las siguientes preguntas, ¿en qué cambia el problema si se pide que el grupo esté integrado por un cierto número mujeres o de hombres?, ¿si se aumentaran los integrantes del salón o la cantidad de alumnos que deben formar el grupo? y ¿qué pasaría si se aumentan más salones?

4.4. ¿Cómo diferenciar permutaciones y combinaciones?

Un error común surge cuando se presenta un problema y no se sabe si este se resuelve con el uso de permutaciones o combinaciones. El inconveniente empieza desde que se usa la palabra "combinación", ya que se usa descuidadamente, sin pensar en si el orden de las cosas es importante. Por ejemplo:

"*Mi ensalada de frutas es una* ***combinación*** *de manzana, uva y papaya*": no importa en qué orden pusimos las frutas, podría ser "papaya, uva y manzana" o "uva, manzana y papaya", termina siendo la misma ensalada.

"*La* ***combinación*** *de la cerradura es 472*": ahora sí importa el orden. "724" no funcionaría, ni "247", aunque tengan los mismos dígitos. Tiene que ser exactamente $4-7-2$.

Así, para identificar que técnica (permutación o combinación) se usará para resolver un problema, se revisarían casos particulares del problema y se mira lo siguiente:

1. Si el orden no importa, es una combinación.

2. Si el orden sí importa, es una permutación.

Debido a que la "permutación" no es un palabra que se use comúnmente y en general no está en el vocabulario de las personas; para iniciar a introducir el término se podría decir que una permutación es "una combinación ordenada".

Con una problema aclaremos la posible confusión entre permutación y combinación.

Ejemplo 4.5. Alicia, Berta y Carlos son atletas que están corriendo en una pista ¿de cuántas maneras pueden ocupar el primer, segundo y tercer lugar?

P. Leamos detenidamente el problema.
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. El número de maneras en las que 3 atletas pueden ocupar el primer, segundo y tercer lugar.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Son 3 los atletas que están corriendo en las pista.

P. ¿Cómo puede ser el orden de llegada?
A. Puede ser Alicia, Berta y Carlos

Este momento sirve para que el alumno vaya comprendiendo que tipo de agrupación es el problema.

P. En una carrera interesa que todos crucen la meta, ¿es importante el orden de llegada?
A. Si los atletas solo deben cruzar la meta el orden de llegada no importa.

Con esta pregunta se intenta aclarar al estudiante las condiciones que el problema plantea, y así ir llevándolo a la técnica que se debe aplicar para resolver el problema.

P. En la carrera en particular planteada en el problema, si solo interesa que crucen la meta, ¿de cuántas maneras pueden cruzar la meta los tres atleta?
A. Como únicamente deben cruzar no importa si el orden de llegada es

- Alicia, Berta y Carlos.
- Alicia, Carlos y Berta.
- Berta, Alicia y Carlos.
- Berta, Carlos y Alicia.
- Carlos, Alicia y Berta.
- Carlos, Berta y Alicia.

Al final todos cruzarán. Así que las maneras en las que pueden cruzar la meta los atletas solo es 1, ya que solo interesa que lleguen.

Gracias a ese análisis hecho por el estudiante, el profesor ya puede llevarlo a identificar las técnicas y eso también ayudara a diferenciarlas.

P. De la anterior solución, en donde el orden de llegada no importaba, sino que solo crucen la meta, ¿qué tipo de técnica podemos decir que es?
A. Debido a que el orden no interesaba, eso quiere decir que su solución venia dada por una *combinación*.

El estudiante fue capaz de entender el tipo de configuración que representaba la solución que planteó anteriormente.

P. Pero el problema pide que se encuentre las formas en las que pueden ocupar el primer, segundo y tercer lugar de la carrera, ¿qué pasa con esa condición del problema?
A. Para la anterior solución, esa condición no se tuvo en cuenta. Ahora el orden importa; para este problema con esa condición las posiciones de llega en la carrera importa.

Ahora el profesor lo lleva a tener en cuenta la condición del problema, así el estudiante observa que el orden ya se tiene en cuenta para poder llegar a la solución.

P. De los atletas, ¿Cuántos pueden llegar en la primera posición?
A. Como es el primer atleta en cruzar la meta, entonces serían cualquiera de los 3 quienes pueden llegar en esa posición.

P. ¿Cuántos pueden llegar en la segunda posición?
A. Ya que un atleta cruzó la meta, entonces son 2 corredores los que pueden ocupar la segunda posición.

P. ¿Cuántos pueden llegar en la tercera posición?
A. Debido que ya han cruzado dos atletas y son solo 3 corredores, entonces solo 1 corredor puede ocupar en la tercera posición.

El alumno pudo comprender la importancia de que en el problema haya un condición en donde las posiciones tienes un papel importante, para ese problema el orden de llegada.

P. Como en el problema se tiene en cuenta el orden de llegada, ¿qué tipo de técnica corresponde a esas características?
A. Debido a que el orden interesa, eso quiere decir que su solución venia dada por una *permutación*.

El estudiante pudo hallar diferencia entre una técnica y otra, lo que le permitió identificar la técnica adecuada para aplicar en la resolución del problema. Así, ya con el análisis hecho por orden de llegada, se tiene que hay

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

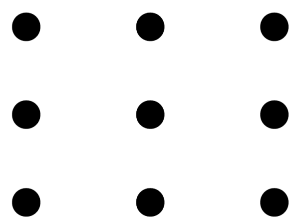
formas de que los atletas Alicia, Berta y Carlos ocupen el primer, segundo y tercer lugar.

4.5. Problemas propuestos

En esta sección se dejan algunos problemas propuestos, los cuales han sido recopilados de olimpiadas matemáticas y textos relacionados con combinatoria.

1. (OMPR, 2002-03, nivel II , prob. 40). Se forma una cuadrícula con 12 puntos, dispuestos en 4 filas y 3 columnas. ¿Cuántos triángulos hay que tengan sus vértices en dichos puntos?

2. (OMPR, 2002-03, nivel II , prob. 5). Se colocan 9 puntos en el plano formando un cuadrado de la manera que se muestra en el dibujo. ¿Cuántos conjuntos distintos de 4 puntos tienen la propiedad de que no hay tres de ellos colineales?



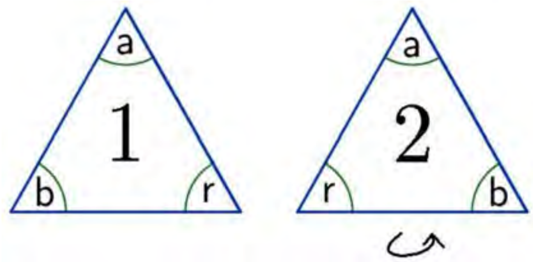
3. ([10], prob. 9, pág 22). ¿Cuántos triángulos se pueden formar que tengan como vértices los vértices de un decágono regular?

4. ([23], ejemplo, pág. 8). El poker se juega con 32 cartas, cada una de las cuales tiene un "número" que puede ser 7, 8, 9, 10, J, Q, K, A y un símbolo (o "palo") que puede ser $\heartsuit$, $\clubsuit$, $\diamondsuit$, $\spadesuit$ de este modo, (10,$\heartsuit$) representa el diez de corazones. Un jugador recibe cinco cartas. Si de las cinco cartas, hay 3 de un mismo número y dos de otro, ¿de cuántas maneras se puede hacer?

5. (OMUA, taller de preparación, prob. 8). Paco, Ramón, Francisco y Gabriel van a acampar esta noche en una actividad de los niños exploradores. Si ellos tienen dos casetas de acampar y van dos niños en cada caseta, ¿de cuántas formas diferentes se pueden acomodar?

6. (OMUA, taller de preparación, prob. 20). Juan va a la panadería y quiere comprar 6 panes y en la panadería venden 9 estilos de pan, ¿De cuántas maneras Juan puede escoger sus seis panes?

7. (ORM-UNIVALLE, nivel III, 2009, prob. 13). Se colorean los vértices de un triángulo equilátero con los colores: azul (a), rojo (r) y blanco (b). Dos formas de colorear el triángulo se consideran iguales, si se puede obtener una coloración a partir de la otra coloración, rotando y/o volteando el triángulo. Por ejemplo: en la figura las dos formas en que se han coloreado los vértices son iguales, porque volteando el triángulo 2 obtenemos la misma forma como está coloreado el triángulo 1.



8. (OMUA, taller de preparación, ejercicio 4.2). ¿De cuántas maneras se puede formar un comité compuesto por 5 abogados y 3 economistas, si se cuenta con 7 abogados y 6 economistas elegibles para formar parte de él?

9. (OMUA, taller de preparación, prob. 27). Jairo empaca su maleta para irse de vacaciones. Él decide llevarse 3 camisetas de manga larga, 4 camisetas de manga corta y 2 pantalones. Si en su armario hay 16 camisetas de manga larga, 20 camisetas de manga corta y 13 pantalones, de cuántas maneras diferentes puede empacar la maleta?

10. (OMM, libro de preparación, ejemplo 1.19).De un grupo de 10 niños y 15 niñas se quiere formar una colección de 5 jóvenes que tenga exactamente 2 niñas. ¿Cuántas colecciones distintas se pueden formar?

11. (OMUA, taller de preparación, prob. 43). De 12 libros, ¿el número de maneras en las que podemos seleccionar 5 libros es?

12. (OMUA, taller de preparación, prob. 45). Un colegio participa en 12 partidos de fútbol en una temporada. ¿El número de maneras posibles en las que el equipo puede terminar la temporada con 7 victorias es?

13. (ORM-UNIVALLE, problemas de preparación, nivel I, prob. 7). En un torneo de tenis hay 10 competidores. El organizador debe arreglar estos 10 en 5 parejas para jugar la primera ronda. ¿De cuántas maneras puede arreglarse esta primera ronda?

14. (ORM-UNIVALLE, nivel II, 2007, prob. 7). Un equipo de fútbol se conforma por un arquero y 10 jugadores. ¿Cuántos equipos de fútbol pueden formarse con 16 jugadores sabiendo que sólo tres de ellos pueden ser arqueros?. (Nota: Los arqueros pueden jugar en cualquier otra posición si se desea.)

    ¿Cuántas formas diferentes de colorear los vértices del triángulo existen?

15. ([6], prob. 13, pág. 16). ¿De cuántas formas se puede elegir un comité de 3 personas de un grupo de 20? ¿Y de cuántas si uno debe ser el presidente, otro el vicepresidente y el tercero el secretario?

Conclusiones

- Se presenta de manera organizada y detallada la solución de problemas de conteo y combinatoria aplicando en todos ellos la metodología de Pólya. por lo que podrá ser de valiosa ayuda tanto para profesores y estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de esta área específica de las matemáticas.
- Se realiza el estudio, mediante problemas, de algunas técnicas de conteo y combinatoria, de ahí que este trabajo es posible usarse como un apoyo para la preparación de los estudiantes al momento de presentarse en una actividad, en particular en olimpiadas.
- Se deja un material inicial de problemas propuestos en cada técnica, que prodrán ser usados por los estudiantes para practicar lo aprendido.
- Este trabajo se deja al servicio de los estudiantes de secundaria como preparación para las competencias matemáticas y en particular las Olimpiadas Regionales de Matemáticas de la Universidad de Nariño (ORM-UDENAR).
- Las técnicas que aquí se presentan son solo algunas de las que existen en la teoría, por eso este trabajo servirá como base para realizar futuros trabajos en otras técnicas de conteo como pueden ser los diagramas de árbol, los principios de inclusión y exclusión, la teoría de grafos, polinomios de torre, etc.

Referencias

[1] Biggs, N., Lloyd, E., & Wilson, R. (1995). *Handbook of Combinatorics. The history of combinatorics.* Elsevier Science.

[2] Canguro Matemático. (2018). Online. Consultado 10 de enero de 2018. Disponible en: http://www.canguromat.org.es/

[3] Cabezas, N. (2017). *Resolución de problemas mediante estrategias matemáticas.* Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

[4] Cáceres, L., Nieto, J., & Sanchez, R. (2017).*Competitions for Young Mathematicians: Perspective from five continents.* Springer.

[5] Callejo, M. (1994). *Un club matemático para la diversidad.* El proceso de resolver problemas, páginas 29-30. Narcea editores.

[6] García, F. (2002). *Un Pequeño Manual para la Resolución de Problemas.*

[7] Grimaldi, R. P. (2004). *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction.* Pearson Education.

[8] Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias.* Imprenta Nacional de Colombia.

[9] Nardín, A., & González, I. (2009). *Checking as a part of mathematics problem solution. Pedagogía Universitaria, 14*(5).

[10] Nieto, J. (1996). *Teoría Combinatoria.* La Universidad del Zulia, Maracaibo, Venezuela.

[11] Nieto, J. (2014). *Combinatoria para Olimpiadas Matemáticas.* Asociación Venezolana de Competencias Matemáticas, Caracas, Venezuela.

[12] Olimpiadas de Matemáticas de la Universidad de Antioquia. (2017). Online. Consultado 10 de enero de 2018. Disponible en: http://ciencias.udea.edu.co/olimpiadas/

[13] Olimpiada Juvenil de Matemáticas. (2018). Online. Consultado 10 de enero de 2018. disponible en: http://www.acm.ciens.ucv.ve/

[14] Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe. (2007). Online. Consultado 10 de enero de 2018. Disponible en: http://www.oei.es/oim/omcc.htm

[15] Olimpiada Mexicana de Matemáticas. (2017). Online. Consultado 10 de enero de 2018. Disponible en: http://www.ommenlinea.org/

[16] Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad de Nariño. (2017). Online. Consultado 10 de enero de 2018. Disponible en: http://orm.udenar.edu.co/

[17] Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad del Valle. (2016). Online. Consultado 10 de enero de 2018. Disponible en: http://matematicas.univalle.edu.co/orm/

[18] Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico. (2018). Online. Consultado 10 de enero de 2018. Disponible en: https://om.pr/

[19] Patrick, D. (2005). *Introduction to Counting and Probability*. AoPS Incorporated.

[20] Pérez, M. *Cuadernos de olimpiadas matemáticas*. Combinatoria. Olimpiada Mexicana de Matemáticas.

[21] Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas.

[22] Polya, G. (1971). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton university press.

[23] Sánchez, P. (2002). *Apuntes de Combinatoria para la Olimpiada de Matemáticas*.

[24] Zhang, Y. (2011). *Combinatorial Problems in Mathematical Competitions*. East China Normal University Press.