

**ANÁLISIS DE PROTOCOLOS DE CONSENSO BAJO RETARDOS
TEMPORALES EN GRAFOS DIRIGIDOS**



DARÍO ALEJANDRO YELA GARZÓN



**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
SAN JUAN DE PASTO**

2018

**ANÁLISIS DE PROTOCOLOS DE CONSENSO BAJO RETARDOS
TEMPORALES EN GRAFOS DIRIGIDOS**

DARÍO ALEJANDRO YELA GARZÓN

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Ingeniero Electrónico**

Asesor

PhD. ANDRÉS DARÍO PANTOJA BUCHELI

Co-Asesor

PhD. GERMÁN DARÍO OBANDO BRAVO

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
SAN JUAN DE PASTO**

2018

RESPONSABILIDAD

“Las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva del autor”.

Artículo 1ro del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación:

Firma del Director del Trabajo de Grado

Firma del Jurado

Firma del Jurado

San Juan de Pasto, 27 de Octubre de 2017



ACUERDO No. 066
(11 de mayo de 2018)

EL CONSEJO DE FACULTAD DE INGENIERIA DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO
En uso de sus atribuciones reglamentarias, estatutarias y,

CONSIDERANDO

Que mediante Acuerdo No. 021 de 9 de febrero de 2018, el Consejo de Facultad designó un Jurado Evaluador, para que emita un concepto sobre sí al Trabajo de Grado "ANALISIS DE PROTOCOLOS DE CONSENSO BAJO RETARDOS TEMPORALES DE GRAFOS DIRIGIDOS", presentado y sustentado por el señor DARIO ALEJANDRO YELA GARZÓN, estudiante de Ingeniería Electrónica, bajo la dirección del ingeniero dirección del ingeniero ANDRÉS DARIO PANTOJA BUCHELI, merece la distinción de LAUREADO,

Que el Jurado designado considera conveniente otorgar la distinción de LAUREADO, al mencionado trabajo por las siguientes razones:

- El documento se encuentra bien estructurado y el desarrollo matemático del documento es consistente y acertado.
- Las herramientas utilizadas por el estudiante muestran un alto grado de conocimiento para una tesis de pregrado y los resultados son a la vez interesantes y prometedores, por lo que se exhorta al autor a continuar avanzando en esta investigación.
- Los resultados de simulación se alinean con los resultados analíticos y son adecuados a la hora de complementar e ilustrar las principales contribuciones.
- El revisor encuentra extremadamente satisfactorio el proyecto de grado presentado y felicita a su autor y asesores.
- Es importante resaltar que el tema abordado en la tesis requiere de herramientas matemáticas que, normalmente, no hacen parte de un programa de pregrado en ingeniería.
- Adicionalmente, el estudiante logró una publicación en "3rd IEEE Colombian Conference on Automatic Control" reafirmando la calidad de su trabajo de tesis.

Que el mencionado trabajo cumple las condiciones exigidas en el Estatuto Estudiantil para otorgar esta distinción.

Que en virtud de lo anterior, el Consejo de Facultad, acoge favorablemente la recomendación, y en consecuencia.

ACUERDA

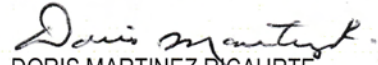
Art. 1º. Otorgar la distinción de LAUREADO al Trabajo de Grado "ANALISIS DE PROTOCOLOS DE CONSENSO BAJO RETARDOS TEMPORALES DE GRAFOS DIRIGIDOS", modalidad investigación, presentado y sustentado por el señor DARIO ALEJANDRO YELA GARZÓN, estudiante de Ingeniería Electrónica, bajo la dirección del ingeniero ANDRÉS DARIO PANTOJA BUCHELI.

Facultad de Ingeniería y OCARA, anotarán lo de su cargo.

COMUNÍQUESE Y CÚMPLASE

San Juan de Pasto, 11 de mayo de 2018


EDUARDO DELIO GÓMEZ LÓPEZ
Presidente


DORIS MARTINEZ RICAURTE
Secretaría

Revisó: Ing. Doris Martínez Ricaurte, Secretaria Académica
Elaboró: Myriam Lozano Lasso, Secretaria Decanatura Facultad de Ingeniería

AGRADECIMIENTOS

A Dios.

A mis padres, Mercedes Garzón y Darío Yela, por todo el apoyo brindado, por sus consejos y valores, por la motivación constante que me ha permitido ser cada día una persona mejor.

Al ingeniero Germán Darío Obando por su gran apoyo y ayuda.

Al ingeniero Andrés Darío Pantoja por su colaboración y disposición.

A mis hermanos y amigos, en especial a aquellos que me brindaron su apoyo en el momento en el que más lo necesitaba.

A Dios que me dió la fortaleza y me colmó de bendiciones permitiendo la culminación de este trabajo.

A mis padres por su apoyo incondicional, su dedicación, su cariño, su sacrificio.

A mis hermanos y amigos por acompañarme en el camino para alcanzar esta meta y estar siempre dispuestos a brindarme su apoyo.

RESUMEN

La creciente complejidad de los sistemas, en cuanto a escala y procesos de cómputo, ha fomentado el desarrollo e investigación de nuevas técnicas de control distribuido, tales como los protocolos de consenso. Estos protocolos se aplican en redes de agentes con el propósito de permitirles a dichos agentes llegar a acuerdos. Como toda técnica distribuida, el desempeño de los protocolos de consenso está sujeto a las características de la red de comunicaciones que permite a los agentes compartir información, que implica que los protocolos de consenso se ven afectados por los problemas inherentes a dichas redes. Uno de los problemas que presenta gran interés investigativo es el análisis del efecto que producen los retardos temporales, los cuales pueden incluso impedir la obtención de los acuerdos buscados.

En esta investigación, se usa la función W de Lambert para abordar el estudio de los protocolos de consenso en redes de agentes sujetos a retardos temporales a la entrada. Se asume que las redes de agentes pueden representarse mediante grafos dirigidos y que además poseen dinámicas de integradores. Para este tipo de redes, se obtiene una expresión cerrada que permite calcular el retardo marginal de estabilidad y se logran extraer propiedades del comportamiento en estado transitorio. Finalmente, se realiza una caracterización estadística de la robustez de distintas topologías de comunicación frente a los retardos de entrada.

PALABRAS CLAVE: Consenso, Digrafos, Redes Aleatorias, Redes de Integradores, Retardo de Entrada.

ABSTRACT

The increasing complexity of systems has encouraged the development of new distributed control techniques, such as consensus protocols. These protocols are applied in networks of agents with the purpose of reaching agreements. Like any other distributed techniques, performance of consensus protocols depends on the characteristics of the communications network that allows agents to share information. This fact implies that consensus protocols are negatively affected by the inherent problems of communications networks. One of the problems, which has received considerable research attention, is the effect of time-delays. Indeed, it is known that time-delays can prevent agents from reaching the desired agreements.

In this document, we use the Lambert W function to analyse consensus protocols in networks of agents under input time-delays. We assume that the networks of agents which have integrator dynamics, are represented by directed graphs. For these networks, we obtain a closed expression to compute the time-delay stability margin. Furthermore, we characterize some properties of the transient behavior. Finally, we perform a statistical characterization of robustness of different communication topologies in the face of input time-delays.

KEYWORDS: Consensus, Digraphs, Input time-Delays, Integrator Networks, Random Networks.

TABLA DE CONTENIDO

	pág.
1 INTRODUCCIÓN	31
2 PRELIMINARES	35
2.1 TEORÍA ALGEBRAICA DE GRAFOS	35
2.1.1 Vecindario y Grado de los Nodos.	36
2.1.2 Matriz de Adyacencia y Matriz Laplaciana.	37
2.2 CONSENSO BAJO RETARDOS TEMPORALES	39
2.2.1 Protocolos de Consenso.	40
2.2.2 Convergencia de una Red de Integradores Bajo el Protocolo de Consenso.	41
2.3 FUNCIÓN W DE LAMBERT	42
3 RETARDO MARGINAL DE ESTABILIDAD	47
3.1 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN SISTEMAS LINEALES RETARDADOS USANDO LA FUNCIÓN W DE LAMBERT	47
3.2 OBTENCIÓN DEL RETARDO MARGINAL DE ESTABILIDAD	49
3.2.1 Retardo Marginal para Redes con Topologías descritas por Grafos no Di- rigidos.	53
3.2.2 Condición Suficiente de Estabilidad.	54
3.3 SIMULACIÓN DE RESULTADOS	57
3.4 COMPARACIÓN CON OTROS RESULTADOS REPORTADOS EN LA LITERATURA	60
3.4.1 Olfati-Saber y Murray (2004).	60
3.4.2 Shen y Cao (2011).	61
3.4.3 Bliman y Ferrari-Trecate (2008).	63

3.4.4	Tian y Liu (2008).	64
3.4.5	Liu, Xu y Xie (2012).	65
3.4.6	Hou, Fue y Zhang (2016).	66
4	ANÁLISIS EN ESTADO TRANSITORIO	69
4.1	OBTENCIÓN DEL RETARDO QUE MAXIMIZA LA VELOCIDAD DE CONVERGENCIA	73
4.2	SIMULACIÓN DE RESULTADOS	75
5	ANÁLISIS ESTADÍSTICO EN GRAFOS ALEATORIOS	79
5.1	GRAFOS ALEATORIOS	80
5.1.1	Parámetros Básicos.	80
5.1.2	Algoritmos.	81
5.1.2.1	Redes Aleatorias Erdős-Rényi.	82
5.1.2.2	Redes Aleatorias Small-World.	82
5.1.2.3	Redes Aleatorias Scale-Free.	83
5.2	DESARROLLO ESTADÍSTICO	84
5.2.1	Construcción de Digrafos Aleatorios.	85
5.2.1.1	Digrafos Aleatorios con el Modelo Erdős-Rényi.	85
5.2.1.2	Digrafos Small-World con el Modelo Watts-Strogatz.	85
5.2.1.3	Digrafos Scale-Free con el Modelo Barabási-Albert.	86
5.2.2	Proceso para la Obtención de Resultados Estadísticos.	86
5.3	RESULTADOS ESTADÍSTICOS Y SIMULACIONES	91
6	CONCLUSIONES	101
	BIBLIOGRAFÍA	102
	ANEXOS	109

ANEXO A ARTICULO CONGRESO IEEE 3er CCAC 111

LISTA DE FIGURAS

		pág.
Figura 1	Representación de un grafo no dirigido y un digrafo.	36
Figura 2	Ramas y curva de corte de la función W de Lambert.	43
Figura 3	Ramas reales de $W(h)$ para un argumento real ($W_0(h)$ en línea continua, $W_{-1}(h)$ en línea discontinua).	44
Figura 4	Parte real de la rama W_0 de la función W de Lambert.	50
Figura 5	Valores calculados de C_0 usando (13) (asteriscos azules), y contorno 0 de la parte real de la rama W_0 de la función W de Lambert (línea continua verde).	52
Figura 6	Circunferencia máxima dentro del contorno cero de la rama W_0	55
Figura 7	Simulación de un digrafo de 5 nodos que ejecuta el protocolo de consenso bajo retardos expresado en (6).	58
Figura 8	Simulación de un digrafo de 40 nodos que ejecuta el protocolo de consenso bajo retardos expresado en (6).	59
Figura 9	Lugar de las raíces en digrafos para el intervalo $0 < \tau \leq \tau_c$	70
Figura 10	Lugar de la raíz más cercana al eje imaginario para 4 digrafos distintos y $0 < \tau \leq \tau_c$	71
Figura 11	Gráfica del término $W_0(\tau\lambda_i)$ para un grafo no dirigido.	72
Figura 12	Ubicación de las raíces en τ_m para el grafo \mathcal{G}_e y gráfica de la velocidad de convergencia en función del retardo de entrada.	76
Figura 13	Variación de la velocidad de convergencia en función del retardo de entrada en grafos no dirigidos.	77
Figura 14	Estado de los nodos del grafo no dirigido \mathcal{G}_e para diversos valores de τ	78
Figura 15	Distribución de Poisson y Power-Law.	82
Figura 16	Gráficas de dispersión y distribución de grado en digrafos generados por los algoritmos en 5.2.1.	88

Figura 17	Desviación estándar de τ_c versus número de muestras.	90
Figura 18	Promedio del retardo crítico ($\bar{\tau}_c$) y de la distancia promedio entre nodos ($\bar{\ell}$).	94
Figura 19	Simulaciones en redes de 100 nodos con topologías ER, SW y SF para un retardo $\tau = 0.09711$	96
Figura 20	Simulaciones en redes SW de 50, 75 y 100 nodos para un retardo $\tau = 0.1541$	97
Figura 21	Simulaciones en redes ER de 50, 75 y 100 nodos para un retardo $\tau = 0.12031$	98
Figura 22	Simulaciones en redes SF de 50, 75 y 100 nodos para un retardo $\tau = 0.05719$	99

LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1 Configuraciones del tamaño de la red y el número de arcos para la generación de datos estadísticos.	90
Tabla 2 Resultados estadísticos variando tamaño de la red.	92
Tabla 3 Resultados estadísticos variando la cantidad de enlaces.	93

GLOSARIO

AGENTES: entidades u objetos capaces de tomar decisiones. Por ejemplo: procesadores, controladores locales, objetos de software o personas.

ARCO: elemento de un grafo que indica la forma en que los nodos del grafo comparten la información. Se representa mediante una flecha, cuya cabeza apunta hacia los nodos que envían información y su cola indica los nodos que la reciben.

CAMINO DIRIGIDO: secuencia de arcos dirigidos que conecta una secuencia de nodos, donde cada arco sigue la misma dirección de sus contiguos.

COEFICIENTE DE AGRUPAMIENTO: probabilidad de que los nodos vecinos de un nodo cualquiera, sean adyacentes entre sí.

CONSENSO: se denomina consenso al acuerdo de un grupo de agentes respecto al valor de una variable de interés.

DISTANCIA ENTRE NODOS: número de arcos que forma el camino más corto entre un par de nodos definido.

GRAFO: estructura matemática que permite extraer y analizar características de una red de agentes, desde la perspectiva de como estos comparten la información entre sí. Se compone, por un conjunto de nodos, y un conjunto de arcos que indican la forma en que se comunican dichos nodos.

NODO: elemento de un grafo que representa a un agente.

POLOS RETARDADOS: raíces de la ecuación característica correspondiente al sistema

retardado.

PROBLEMA DE CONSENSO: problemas en los que se busca que un grupo de agentes lleguen a un acuerdo.

PROTOCOLO DE CONSENSO: algoritmo que constituye una ley de control local, en la que cada nodo toma decisiones usando solo información del estado de sí mismo y del estado de sus nodos vecinos.

RED ALEATORIA: existen dos definiciones para esta clase de grafo. En la primera, un conjunto de nodos se interconecta a través de un número determinado de arcos ubicados en forma aleatoria. En la segunda, cada par de nodos se interconecta bajo algún valor de probabilidad.

RETARDO DE ENTRADA: retardo de tiempo ocasionado por el tiempo de cómputo y procesamiento de un agente.

RETARDO MARGINAL DE ESTABILIDAD: retardo para el cual el sistema se vuelve marginalmente estable.

TOPOLOGÍA DE RED: configuración o disposición del conjunto de arcos que interconectan los nodos de un grafo.

VALOR PROPIO, VECTOR PROPIO: sea A una matriz $n \times n$. El número real λ es un valor propio (también conocido como eigenvalor) de A si existe un vector x distinto de cero en \mathbb{R}^n tal que $Ax = \lambda x$. Todo vector x distinto de cero que satisfaga la anterior expresión es un vector propio (también conocido como eigenvector) de A , asociado al valor propio λ .

VECINDARIO DEL NODO: conjunto de nodos conformado por todos los nodos que pueden enviar información al nodo en cuestión.

1. INTRODUCCIÓN

La continua revolución tecnológica en las distintas áreas que competen a la ingeniería, entre ellas el control, ha fomentado el estudio de nuevas teorías que permiten abordar problemas emergentes. Uno de los problemas actuales es la creciente complejidad de los sistemas en cuanto a escala y procesos de cómputo, lo que ha motivado el desarrollo de técnicas de control distribuido [1]. Entre estas técnicas se encuentran los protocolos de consenso [2], que han sido utilizados para resolver problemas tales como el control cooperativo de vehículos aéreos no tripulados (UAVs, por sus siglas en inglés) [3], el control automático de vehículos [4], control de grupos de satélites [5], coordinación en redes de sensores distribuidos [6], entre otros.

Los protocolos de consenso son algoritmos usados para solucionar problemas en los que se busca alcanzar acuerdos en redes de agentes. En los problemas de consenso, la información con la que cuenta cada agente es limitada, sin embargo, los agentes están en capacidad de compartir su información con sus pares a través de una red de comunicaciones. En este sentido, los protocolos de consenso dependen directamente de la estructura de la red de comunicaciones y sus características. Entre estas características se encuentran los retardos temporales, que pueden ser ocasionados por la influencia de los canales de comunicación y por los tiempos de cómputo y procesamiento propios de cada agente [7].

Los retardos temporales se han incluido en los análisis de desempeño de los protocolos de consenso debido a que pueden llegar a tener efectos adversos en el comportamiento de los agentes que incluso pueden impedir la obtención del acuerdo deseado [2, 8]. El estudio de los protocolos de consenso bajo retardos temporales tiene una larga tradición en el área del control distribuido. Uno de los primeros trabajos sobre este tema fue publicado en año el 2004 [2], en el que se muestra cómo los retardos de entrada (una clase de retardo que modela el tiempo que tardan los agentes para procesar la información

que reciben) pueden desestabilizar una red de agentes y hacer que estos no lleguen a consenso. Si bien es cierto que en [2] se caracteriza el retardo marginal de estabilidad, el estudio asume que el grafo que conecta a la red de agentes es no dirigido, es decir, se asume que todos los canales de comunicación son bidireccionales. Posteriormente, en [8], se estudia la estabilidad de los protocolos de consenso ante otro tipo de retardos, llamados retardos de canal (retardos inherentes a los canales de comunicación de la red de agentes). En este trabajo, se prueba formalmente que la estabilidad de la red de agentes es independiente de los retardos considerados, es decir que los agentes alcanzan consenso a pesar de que los retardos de canal sean arbitrariamente grandes. El mismo resultado es extendido en [9] para retardos de canal que varían en el tiempo. A pesar de que los protocolos de consenso son robustos ante los retardos de canal, los retardos de entrada sí pueden afectar su convergencia. En este sentido, muchos trabajos han sido orientados hacia la caracterización del máximo retardo admisible que garantice la estabilidad de las redes de agentes que emplean protocolos de consenso, es decir, el máximo retardo que asegure la convergencia al estado de consenso deseado. En [10], los autores usan funcionales Lyapunov–Krasovskii para obtener condiciones suficientes de estabilidad, que son dadas por medio de desigualdades matriciales para redes de agentes con topologías no dirigidas y variantes en el tiempo. Las condiciones dadas en [10] son posteriormente relajadas en [11] considerando grafos dirigidos. Una contribución similar se presenta en [12] para protocolos de consenso que incluyen seguimiento de líder (un tipo de protocolos en los que un agente líder fija el valor al cual el grupo converge). En [13], se desarrolla un método basado en optimización que permite establecer una cota superior para el máximo retardo admisible. En este trabajo, los autores consideran un cierto grado de incertidumbre en los retardos y además admiten que éstos sean variantes en el tiempo. En [14] se presenta una extensión de los resultados de [2] para grafos dirigidos usando análisis en el dominio de la frecuencia. No obstante, las condiciones de convergencia obtenidas son suficientes más no necesarias. Finalmente, en [15], los autores caracterizan el retardo marginal de estabilidad para redes de agentes con topologías dadas por grafos dirigidos, dicho de otra manera, los autores generalizan el resultado divulgado

en [2] considerando la posibilidad de canales de comunicación unidireccionales. Sin embargo, los resultados de [15] no brindan información del comportamiento transitorio del sistema, es decir, de la forma en que la red de agentes converge al estado de consenso.

En resumen, aunque en la literatura se han usado diversas técnicas para el estudio de los protocolos de consenso bajo retardos temporales, estas técnicas proporcionan o bien un análisis aproximado, o bien una caracterización incompleta del comportamiento del protocolo bajo retardos. Una alternativa que está cobrando relevancia en trabajos recientes es el uso de la función W de Lambert [16], la cual, en principio, permite establecer el lugar exacto de las raíces del sistema retardado. Esta propiedad es de gran importancia debido a que, conociendo las raíces del sistema, no solo se puede determinar su estabilidad, sino también su comportamiento en estado transitorio.

En este documento, se analiza el comportamiento de los protocolos de consenso bajo retardos temporales sobre grafos dirigidos mediante el uso de la función W de Lambert. Empleando las propiedades de esta función, inicialmente, se obtiene un criterio de estabilidad, que apoyado en datos técnicos recopilados en la revisión de literatura, permite un planteamiento matemático riguroso. Posteriormente, se presenta un desarrollo formal que posibilita la obtención de una expresión cerrada para calcular el retardo marginal de estabilidad en una red de integradores. Asimismo, se caracteriza el lugar de las raíces para el sistema retardado. Usando esta caracterización, se muestra que la velocidad de convergencia del sistema se incrementa para retardos suficientemente pequeños. Además, se alcanza una formulación que permite calcular analíticamente el retardo que maximiza la velocidad de convergencia del sistema. Por otro lado, se elabora un análisis estadístico, apoyado en los modelos expuestos en [17] y métodos presentados en [18], para generar redes de agentes con topologías típicas: Erdős Rényi, Small-World y Scale-Free. Esto con el propósito de determinar características del comportamiento y la robustez de estas topologías de red frente a retardos temporales a la entrada. Los resultados obtenidos se ilustran a través de simulaciones.

2. PRELIMINARES

En esta sección, se estudian algunos conceptos que se usan en el desarrollo de este trabajo. Específicamente, se presenta una exploración de la teoría algebraica de grafos, del problema general de consenso sujeto a retardos en la entrada (“*input-delays*”) y de la función W de Lambert, la cual es empleada en la literatura para analizar sistemas dinámicos con retardos temporales.

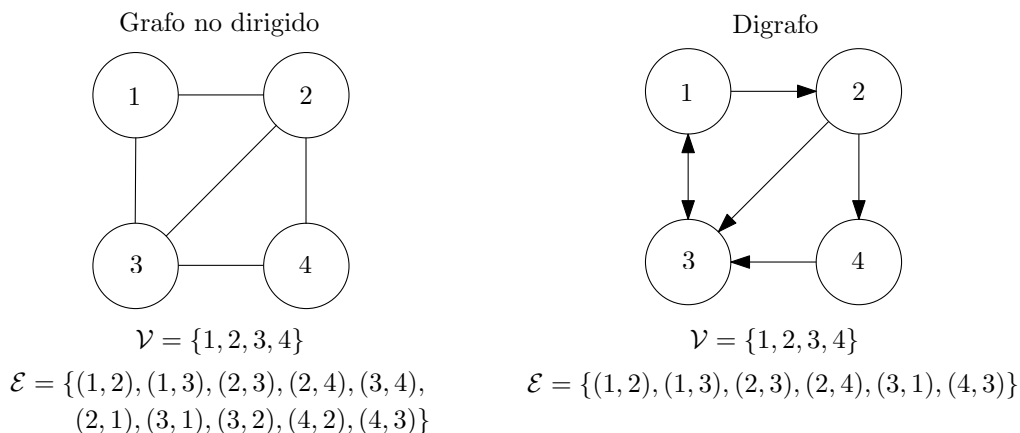
2.1 TEORÍA ALGEBRAICA DE GRAFOS

La teoría algebraica de grafos busca analizar las propiedades de las estructuras matemáticas conocidas como grafos, usando métodos pertenecientes al álgebra lineal [19]. Un grafo, que por convención se denota $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$, está compuesto por un conjunto de nodos $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ y un conjunto de arcos $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. En general, un grafo expresa las relaciones entre los nodos que lo componen, caracterizadas por el conjunto \mathcal{E} . Por ejemplo, si el arco $(i, j) \in \mathcal{E}$, entonces existe una relación entre el nodo i y el nodo j ; si por el contrario $(i, j) \notin \mathcal{E}$, entonces los nodos i y j no están relacionados. En este trabajo, las relaciones entre los nodos representan capacidad para compartir información. Por convención, $(i, j) \in \mathcal{E}$ significa que el nodo i puede recibir información del nodo j . En una forma más general, cuando a cada arco se le asigna un valor o peso a_{ij} , tal que $(i, j) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow a_{ij} > 0$, entonces se habla de grafos ponderados. Un grafo ponderado se puede definir como $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$ [2], donde \mathcal{A} es la matriz de adyacencia ponderada, la cual se tratará en la sección **2.1.2**.

Un grafo puede ser dirigido o no dirigido. Un grafo no dirigido es aquel que cumple la siguiente propiedad: si $(i, j) \in \mathcal{E}$, entonces $(j, i) \in \mathcal{E}$. Esto implica que el nodo i puede enviar y recibir información del nodo j , y la comunicación entre ellos es bi-direccional. Si la anterior propiedad no se cumple, se dice que el grafo es dirigido. Para hacer énfasis en esta característica, a un grafo dirigido se le llama digrafo. La **Figura 1** representa

un grafo no dirigido y un digrafo, cada uno con sus respectivos conjuntos \mathcal{V} y \mathcal{E} .

Figura 1. Representación de un grafo no dirigido y un digrafo.



Fuente: Original de esta investigación.

2.1.1 Vecindario y Grado de los Nodos. Una de las primeras nociones en torno a los grafos es el concepto de vecindario. El vecindario del nodo i , el cual se denota como \mathcal{N}_i , está dado por el conjunto [2]:

$$\mathcal{N}_i = \{j \mid (i, j) \in \mathcal{E}\}.$$

El vecindario del nodo i está formado por todos los nodos que pueden enviar información al nodo i . En el caso de grafos no dirigidos y no ponderados, a la cardinalidad del conjunto \mathcal{N}_i se le llama grado del nodo i y se denota por $\deg(i)$. Así, $\deg(i) = |\mathcal{N}_i|$. Note que, en este caso, la cardinalidad del conjunto \mathcal{N}_i es igual al número de vecinos del nodo i . Usando el grado de todos los nodos, es posible definir la matriz de grado del grafo dada por

$$\Delta = \text{diag}\left(\deg(1), \dots, \deg(n)\right).$$

Con respecto a los digrafos, se habla de grado de salida (deg_{out}) y grado de entrada (deg_{in}) del nodo. Para un digrafo ponderado, los grados de salida y entrada de cada nodo, se definen como sigue:

$$\text{deg}_{in} = \sum_{\{j \mid (j,i) \in \mathcal{E}\}} a_{ji}, \quad \text{deg}_{out} = \sum_{\{j \mid (i,j) \in \mathcal{E}\}} a_{ij}.$$

Siguiendo la convención empleada en la literatura sobre protocolos de consenso, en este documento se usará el grado de salida deg_{out} . Así, cuando se hable de grado de un nodo, se entenderá que se está haciendo referencia al deg_{out} , por lo que la definición de la matriz de grado de un digrafo es

$$\Delta = \text{diag}\left(\text{deg}_{out}(1), \dots, \text{deg}_{out}(n)\right).$$

2.1.2 Matriz de Adyacencia y Matriz Laplaciana. Un grafo (ya sea dirigido o no dirigido) puede ser completamente caracterizado a través de su matriz de adyacencia ponderada \mathcal{A} , cuyos elementos están dados por

$$[\mathcal{A}]_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{si } (i,j) \in \mathcal{E} \\ 0, & \text{si } (i,j) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

donde $[\mathcal{A}]_{ij}$ representa el elemento ubicado en la fila i columna j de la matriz \mathcal{A} . Cabe anotar que, si los grafos no son ponderados, entonces $a_{ij} = 1$ para cualquier $i, j = 1, \dots, n$.

A pesar de que la matriz \mathcal{A} corresponde a una representación biunívoca del grafo (es decir, una matriz de adyacencia está asociada a un único grafo y viceversa), no es fácil usar métodos de álgebra lineal directamente sobre la matriz de adyacencia para extraer características del grafo al cual representa. Por este motivo, se emplea una matriz auxiliar, denominada matriz Laplaciana, la cual se denota por la letra L , y se define como

$$L = \Delta - \mathcal{A}.$$

La matriz L , tiene las siguientes características [19]:

- Sus valores propios tienen parte real no negativa.
- Tiene al menos un valor propio igual a cero, el cual está asociado al vector propio $\mathbb{1} = [1, \dots, 1]^T$.
- Si el grafo es no dirigido, entonces L es simétrica y por lo tanto, sus valores propios son reales.
- Si el grafo es no dirigido y conexo¹, entonces el segundo valor propio más pequeño de L es estrictamente positivo. Este valor propio se denota como λ_2 y da una medida de qué tan conectado es el grafo. Entre mayor sea λ_2 mayor es el número de arcos del grafo.

La última característica de L indica que la matriz Laplaciana es usada para determinar la conectividad de los grafos. En general, para digrafos, se tiene el siguiente resultado (tomado de [19]):

Teorema 1. *Sea L la matriz Laplaciana del digrafo \mathcal{G} . \mathcal{G} posee un árbol de expansión dirigido², si y solo si L tiene un único valor propio en cero, el cual está asociado al vector propio $\mathbb{1}$.*

Este teorema es importante porque provee una condición suficiente y necesaria para determinar si un digrafo posee un árbol de expansión dirigido, es decir, si el grafo posee un nodo desde el cual es posible alcanzar a cualquier otro nodo siguiendo un camino dirigido. Además, como se verá en la siguiente sección, el **Teorema 1** permite analizar el comportamiento en equilibrio de sistemas dinámicos lineales caracterizados por matrices de estado Laplacianas, como es el caso de los protocolos de consenso.

¹Se dice que un grafo es conexo si cada par de nodos está conectado por al menos un camino o sucesión de arcos.

²Sea $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}\}$ un digrafo y $\mathcal{G}' = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}'\}$, donde $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$, un subgrafo de \mathcal{G} . Se dice que \mathcal{G}' es un árbol de expansión dirigido de \mathcal{G} si \mathcal{G}' no contiene ningún ciclo dirigido y además posee un nodo raíz, i_r , tal que existe un camino dirigido desde i_r hacia cualquier otro nodo de \mathcal{G}' .

2.2 CONSENSO BAJO RETARDOS TEMPORALES

Si a cada uno de los nodos que conforman el grafo se asocia una cantidad escalar, entonces se obtiene como resultado un grafo algebraico. Sea $x_i \in \mathbb{R}$ el escalar asociado al nodo i . El estado total del grafo, el cual representa el valor de cada una de las cantidades asociadas a los nodos, está dado por el vector $x = [x_1, \dots, x_n]^\top$. Además, se asume que el estado de cada nodo evoluciona en el tiempo bajo la siguiente ecuación diferencial,

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

donde $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función que describe la tasa de cambio de los estados de los nodos y u_i es una entrada de control, es decir, una señal que puede ser manipulada con el fin de obtener un comportamiento deseado. En aplicaciones prácticas, el estado de un grafo algebraico puede describir la potencia suministrada por un conjunto de generadores eléctricos [20], la temperatura de las habitaciones de un edificio [21], las velocidades de movimiento de un escuadrón de vehículos no tripulados [22], las frecuencias de distintos osciladores [23], las opiniones de un grupo de individuos [24], entre otros.

Un problema común a los ejemplos antes mencionados es que, en ocasiones, se requiere que los elementos del estado x alcancen un mismo valor (por ejemplo, en la aplicación referente a los osciladores, esto equivaldría a que sus frecuencias se sincronicen). Es decir, que $x_i = x_j$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Cuando se presenta esta situación, se tiene un problema de consenso.

Concretamente, el objetivo de los problemas de consenso es diseñar leyes de control locales con el fin de que las cantidades asociadas a los nodos converjan a un mismo valor. Cuando se habla de leyes de control locales, se hace referencia a leyes de control donde u_i únicamente dependa de x_i y de $\{x_j \mid j \in \mathcal{N}_i\}$ (note que esto corresponde a que cada nodo del grafo dispone de un controlador que toma decisiones usando solo información del estado del nodo y del estado de sus vecinos).

Para simplificar el posterior análisis, en este documento se asume una red de integradores, tal que la dinámica de los nodos está dada por

$$\dot{x}_i = u_i, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

A pesar de que la Ecuación (2) es un caso particular de la Ecuación (1), su campo de aplicación es amplio, y puede encontrarse en diversos problemas de ingeniería (por ejemplo, ver [2]), tales como la estimación distribuida en redes de sensores o como parte de algoritmos de optimización distribuida. Por este motivo, el análisis de grafos algebraicos cuya evolución obedece a la Ecuación (2) es relevante. De hecho, este tipo de grafos han suscitado un gran interés en los últimos años [25, 26, 27, 28, 29] debido al auge que presentan los algoritmos distribuidos, los cuales usualmente se implementan usando redes de consenso de integradores.

2.2.1 Protocolos de Consenso. Con el fin de alcanzar consenso, se propone usar la siguiente ley de control local

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j - x_i), \quad (3)$$

la cual ha sido empleada en diferentes trabajos desde principios de los años 80's [30, 31]. Aunque la ley de control (3) no es reciente, esta continúa motivando diferentes investigaciones en torno a su comportamiento y propiedades (trabajos actuales pueden encontrarse en [28, 32, 33]). Uno de los aspectos estudiados recientemente, es la capacidad de (3) para tolerar retardos temporales, es decir, la capacidad de alcanzar consenso aplicando la ley de control (3), aún cuando la información usada corresponde a estados pasados de los nodos. En este trabajo, se considera específicamente el tipo de retardo conocido en la literatura como retardo de entrada o “*input-delay*”, que puede expresarse como:

$$u_i = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau) \right), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

donde el parámetro $\tau > 0$ representa el retardo temporal. Note que en este caso, la ley de control no depende del estado actual de los nodos sino de un estado anterior. Este tipo de retardo se usa para modelar, por ejemplo, el tiempo que tarda cada controlador local para procesar la información que recibe, y es común en los sistemas biológicos y sociales [2, 34, 9]. Reemplazando (4) en (2) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales con argumento retardado,

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau) \right), \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ x(t) &= 0, \quad \forall t \in [0, \tau).\end{aligned}\tag{5}$$

Este sistema modela una red de integradores que usan un protocolo de consenso sujeto a retardos de entrada.

2.2.2 Convergencia de una Red de Integradores Bajo el Protocolo de Consenso. El sistema dado en la Ecuación (5) puede escribirse en forma compacta, usando la matriz Laplaciana del grafo que describe la interacción entre los nodos, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -Lx(t - \tau), \quad \tau > 0 \\ x(t) &= 0, \quad \forall t \in [0, \tau),\end{aligned}\tag{6}$$

donde $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $x \in \mathbb{R}^n$.

Se dice que un sistema dinámico está en equilibrio cuando su estado no varía en el tiempo, esto es, cuando $\dot{x} = 0$. Entonces, $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]^\top$ denota el estado de equilibrio de la Ecuación (6). Note que para este estado $-Lx^* = 0$, lo que implica que x^* debe ser un vector propio de L asociado al valor propio 0. Si el digrafo de comunicaciones posee un árbol de expansión dirigido, puede usarse el resultado dado en el **Teorema 1** para concluir que x^* pertenece al subespacio generado por el vector $\mathbb{1}$, es decir, que x^* puede expresarse como $x^* = c\mathbb{1}$, donde $c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $x_i^* = c$, para todo $i = 1, \dots, n$. En otras palabras, el estado de equilibrio de (6) corresponde a un estado

de consenso.

Cuando no hay retardos temporales (esto es, cuando $\tau = 0$), la Ecuación (5) se reduce a $\dot{x}(t) = -Lx(t)$. En este caso, la estabilidad del sistema está determinada por los valores propios de $-L$. Dado que se sabe que los valores propios de la matriz Laplaciana tienen parte real no negativa, se puede concluir que, si el digrafo posee un árbol de expansión dirigido (L tiene un único valor propio igual a cero), el sistema es estable. Esto implica que cualquier solución $x(t)$ converge asintóticamente a un estado de consenso. Sin embargo, se ha comprobado que cuando el retardo τ es suficientemente grande, las cantidades asociadas a los nodos del sistema no alcanzan el estado de consenso. Esto se debe a que el sistema dado en la Ecuación (5) se vuelve inestable [35] (es decir, su solución $x(t)$ diverge). La razón de esta inestabilidad es porque los polos del sistema retardado dependen directamente del valor de τ , y cuando el retardo es grande, algunos polos de (5) cruzan el eje imaginario y se vuelven inestables.

2.3 FUNCIÓN W DE LAMBERT

Una forma de analizar sistemas sujetos a retardos temporales es mediante el uso de la función W de Lambert. Esta función, también llamada Omega, es una función especial, multivaluada en el plano complejo y de argumento complejo que se denota como W_k . Para el caso de un argumento escalar $h \in \mathbb{C}$, se define como la solución de la siguiente ecuación:

$$W_k(h)e^{W_k(h)} = h. \quad (7)$$

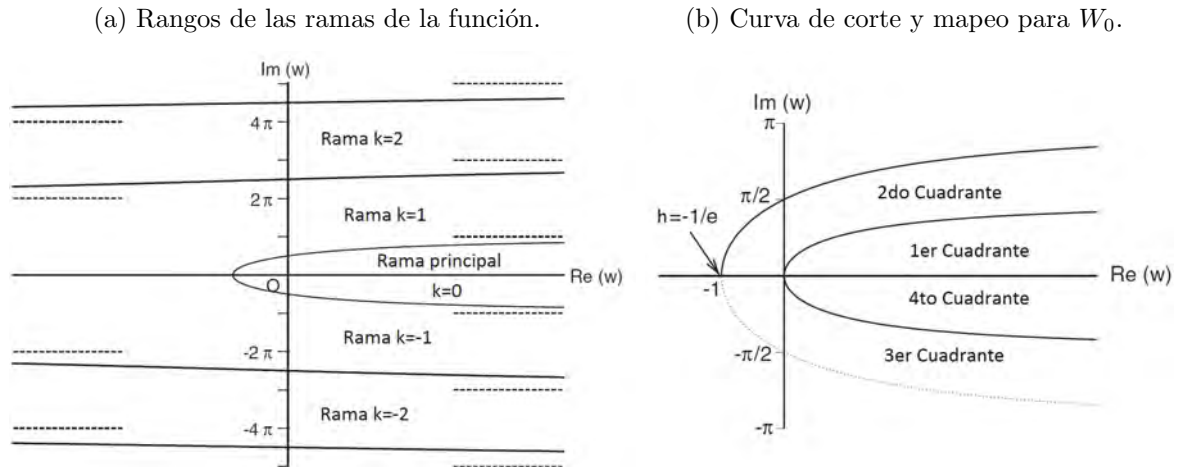
Esta función posee un infinito número de ramas, las cuales se expresan a través de $W_k(h)$, $k = \pm 1, \dots, \pm \infty$, y donde W_0 se identifica como la rama principal [16]. El rango de cada rama está específicamente determinado en la **Figura 2a**. En el caso de W_0 , la curva de corte que separa a esta de las ramas adyacentes (W_1, W_{-1}), y que será

de gran importancia en un análisis posterior, se puede apreciar en la **Figura 2b**³. Esta curva de corte está determinada por la expresión [16]:

$$\{-\alpha \cot \alpha + \alpha j \mid -\pi < \alpha < \pi\}, \alpha = \text{Im}(W_0(h)), \quad (8)$$

junto con el punto -1 (valor límite cuando $\alpha = 0$), donde $\{h \in \mathbb{R} \mid -\infty < h \leq -1/e\}$.

Figura 2. Ramas y curva de corte de la función W de Lambert.



Fuente: Shinozaki y Mori, “Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results”, 2006 [36].

La rama principal de la función W de Lambert es analítica en 0 , por lo que el cálculo de esta rama mediante series de Taylor está dado por [16]

$$W_o(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} h^n.$$

Las demás ramas se calculan a través de la siguiente ecuación [37]

$$W_k(h) = \ln_k(h) - \ln(\ln_k(h)) + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_{lm} \frac{(\ln(\ln_k(h)))^m}{(\ln_k(h))^{l+m}},$$

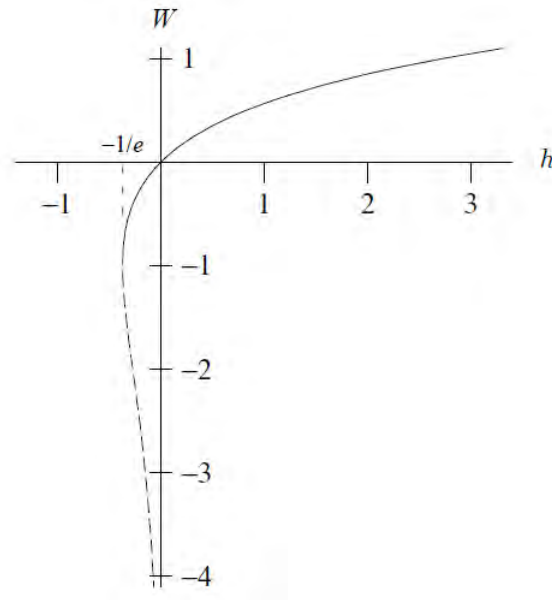
³La línea continua representa el argumento $+\pi$ de la curva de corte, y la línea punteada representa el argumento $-\pi$.

donde $\ln_k(h) = \ln(h) + 2\pi ik$, y el coeficiente C_{lm} puede ser expresado en términos de los números de Stirling [37]:

$$C_{lm} = \frac{1}{m!} (-1)^l \begin{bmatrix} l+m \\ l+1 \end{bmatrix}.$$

En el caso en el que h sea real, la función $W(h)$ recae sobre las ramas W_0 y W_{-1} , y es multivaluada en el rango $[-1/e, 0)$, de forma que la rama de la función se denota como W_0 cuando $-1 \leq W(h)$ y como W_{-1} cuando $W(h) \leq -1$, tal como se aprecia en la **Figura 3**.

Figura 3. Ramas reales de $W(h)$ para un argumento real ($W_0(h)$ en línea continua, $W_{-1}(h)$ en línea discontinua).



Fuente: R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. Hare, D. J. Jeffrey y D. E. Knuth, “On the Lambert W function”, 1996 [16].

La función W de Lambert abarca una gran cantidad de aplicaciones en áreas como: combinatoriales en funciones usadas para la numeración de árboles en teoría de grafos, exponenciación iterativa, solución de ecuaciones diferenciales, análisis de algoritmos,

entre otros [16]. Por ejemplo, se ha utilizado para describir la relación entre corriente, voltaje y resistencia de un diodo [38]; en solución de ecuaciones aplicadas en física solar [39]; cinética de enzimas [40]; como también para solucionar ecuaciones diferenciales lineales con argumento retardado [37].

3. RETARDO MARGINAL DE ESTABILIDAD

Utilizando la teoría recopilada en el capítulo anterior, se procede a calcular analíticamente el retardo máximo que le permite a una red de integradores llegar a consenso. Este retardo es conocido como retardo marginal de estabilidad¹. Para esto, asume que cada nodo está sujeto a un retardo temporal de entrada de magnitud τ , y se aplica el protocolo de consenso (4). Por lo tanto, la dinámica del sistema se rige por la Ecuación (6).

3.1 ANÁLISIS DE ESTABILIDAD EN SISTEMAS LINEALES RETARDADOS USANDO LA FUNCIÓN W DE LAMBERT

La Ecuación (6) modela un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales retardadas, las cuales se conocen como DDE's por sus siglas en inglés (*Delay Differential Equations*). La ecuación característica de (6) está determinada por

$$\det(sI + Le^{-s\tau}) = 0, \quad (9)$$

en la que I es la matriz identidad. Es importante resaltar que la función exponencial resulta de la transformada de *Laplace* del termino retardado [35].

La estabilidad del sistema en (6) está determinada por las raíces de la ecuación característica en (9). Para identificar las raíces de (6), se puede hacer uso de la siguiente expresión [41]:

$$0 = \det(sI + Le^{-s\tau}) = \det(sI - (-L)e^{-s\tau}) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i e^{-s\tau}),$$

donde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ son los valores propios de $-L$. Claramente las raíces de (6) se calculan igualando a cero los términos de la productoria. Es decir, si se considera el

¹Técnicamente, el retardo marginal de un sistema es el retardo para el cual el sistema se vuelve marginalmente estable.

i -ésimo termino, se obtiene $(s - \lambda_i e^{-s\tau}) = 0$. Por lo tanto, $s\tau e^{s\tau} = \tau\lambda_i$, y aplicando la definición de la función W de Lambert, para cualquier rama W_k , se obtiene que

$$s = \frac{1}{\tau} W_k(\tau\lambda_i). \quad (10)$$

Es decir, definiendo σ_M como el conjunto de las raíces del sistema de ecuaciones en (6), se cumple que [41]

$$\sigma_M = \bigcup_{k,i} \frac{1}{\tau} W_k(\tau\lambda_i).$$

Si bien la ecuación característica del sistema retardado tiene infinitas raíces (esto es una consecuencia directa de las infinitas ramas de la función W de Lambert), para identificar las raíces ubicadas más hacia la derecha del plano complejo, aquellas que determinan la estabilidad de (6), solo es necesario analizar la rama W_0 . Esta afirmación se encuentra respaldada por el siguiente resultado, el cual es reportado en [36]:

$$\max_{k=0,\pm 1,\dots,\pm\infty} \{\operatorname{Re}(W_k(h))\} = \operatorname{Re}(W_0(h)), \quad h \in \mathbb{C}.$$

En resumen, la estabilidad del sistema expresado en (6) está determinada por las siguientes raíces retardadas, a las que llamaremos en adelante, polos retardados:

$$s = \frac{1}{\tau} W_0(\tau\lambda_i), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (11)$$

donde, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ es el i -ésimo valor propio de $-L$.

Por facilidad de exposición y sin pérdida de generalidad, en el análisis descrito en este documento, únicamente consideraremos redes de agentes cuya topología está caracterizada por digrafos que contiene al menos un árbol de expansión dirigido (esta suposición no implica pérdida de generalidad, porque, si no se cumple, siempre es posible dividir el digrafo en sub-digrafos que contienen árboles de expansión dirigidos. En este caso, el

análisis se haría para cada sub-digrafo por separado).

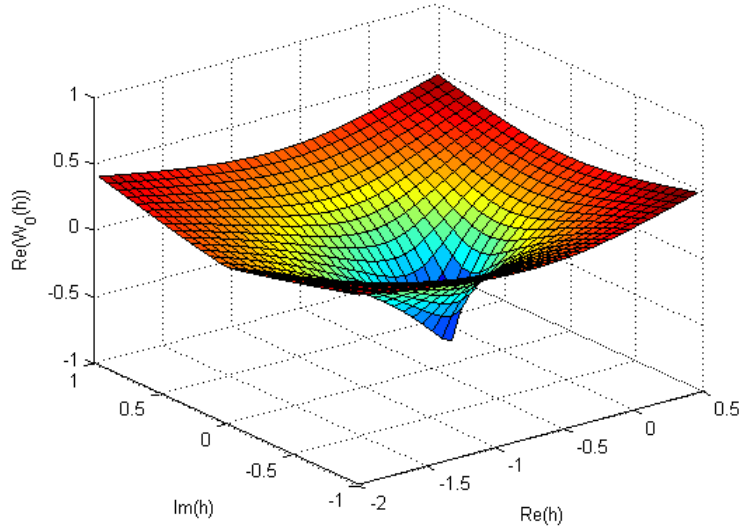
De acuerdo al **Teorema 1**, el Laplaciano de los digrafos que poseen al menos un árbol de expansión dirigido tiene un único valor propio en cero. Entonces, para esos digrafos, $-L$ tiene un valor propio simple en cero, al que se denotará como λ_1 . Este valor propio simple, no influye en la estabilidad del sistema dinámico [42] y por lo tanto se omite de aquí en adelante. En otras palabras, en el análisis subsiguiente únicamente intervendrán los valores propios de $-L$ diferentes de cero, esto es, $\{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Cabe resaltar, que el polo retardado correspondiente al valor propio en cero de $-L$, permanece en cero de acuerdo a la Ecuación (11) sin importar el valor del retardo τ .

3.2 OBTENCIÓN DEL RETARDO MARGINAL DE ESTABILIDAD

Analizando la rama W_0 de la función W de Lambert, se puede observar en la **Figura 4**, que si el argumento complejo h posee un valor lo suficientemente pequeño (en magnitud), la parte real de $W_0(h)$ es no positiva. Aplicando esta observación a la Ecuación (11), se tiene que eligiendo un rango adecuado para τ , la magnitud de $\tau\lambda_i$ puede ser lo suficientemente pequeña para que cada uno de los polos retardados dados en (11) sea estable. En este orden de ideas, el retardo marginal de estabilidad, τ_c , será el retardo de mayor valor que garantiza que la parte real de $W_0(\tau\lambda_i)$ sea no positiva para todo λ_i , con $i = 2, \dots, n$ (como se dijo antes, el valor propio $\lambda_1 = 0$, de $-L$, se suprime del análisis). Es más, τ_c debe ser tal que $W_0(\tau_c\lambda_i) = 0$ para al menos un λ_i . Note que para ese valor de τ_c , el sistema en (6) tendría al menos un polo retardado en cero y la parte real de dicho polo retardado estaría en el margen de pasar de ser negativa (polo estable) a positiva (polo inestable).

Lo anterior sugiere que, para calcular el retardo marginal de estabilidad, se necesita encontrar el valor de τ para el cual la parte real de $W_0(\tau\lambda_i)$ es igual a cero. Si se hace esto para cada $\lambda_i \in \{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ y se elige el menor τ , entonces este será igual al

Figura 4. Parte real de la rama W_0 de la función W de Lambert.



Fuente: Original de esta investigación.

retardo crítico τ_c . Encontrar τ para que la parte real de $W_0(\tau\lambda_i)$ sea igual a cero, es equivalente a encontrar τ que haga que $\tau\lambda_i$ pertenezca al contorno cero de la función $\text{Re}(W_0(h))$, donde $\text{Re}(\cdot)$ denota parte real. En términos matemáticos, el problema se reduce a encontrar τ tal que $\tau\lambda_i \in C_0$, donde $C_0 = \{h \in \mathbb{C} \mid \text{Re}(W_0(h)) = 0\}$. Note que, C_0 puede redefinirse como

$$C_0 = \{h \in \mathbb{C} \mid W_0(h) = j\alpha\}, \quad (12)$$

donde $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Este rango de α se elige de esta manera ya que corresponde al análisis de la rama 0 de la función W de Lambert (de hecho, el rango de α es el conjunto definido en (8), considerando $\alpha \cot(\alpha) = 0$). Utilizando la definición de la función W de Lambert, $h = W_0(h)e^{W_0(h)}$, se obtiene la expresión que caracteriza el conjunto de valores en C_0 , de la siguiente forma: $h \in C_0$ si y solo si $h = j\alpha e^{j\alpha}$. Por lo tanto, si $\tau\lambda_i \in C_0$, entonces

$$\begin{aligned} \tau\lambda_i &= j\alpha e^{j\alpha}, \\ &= |\alpha| e^{j(\frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\alpha) + \alpha)}, \end{aligned} \quad (13)$$

donde $\text{Arg}(\cdot)$ denota argumento principal². Entonces,

$$\text{Arg}(\alpha) = \begin{cases} \pi & \text{si } \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 0 & \text{si } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] . \end{cases} \quad (14)$$

Con el propósito de validar (13), se calculan diferentes valores de $\tau\lambda_i$, bajo el rango de α antes definido, obteniendo los resultados mostrados en la **Figura 5**. De esto, se puede apreciar que los valores obtenidos a través de (13) (señalados como asteriscos azules), efectivamente corresponden a valores del contorno cero de la parte real de W_0 (línea continua verde).

Adicionalmente, utilizando la forma polar de λ_i , se tiene que $\lambda_i = \rho_i e^{j\varphi_i}$, en donde ρ_i y φ_i son la magnitud y el argumento principal de λ_i , respectivamente. Esto es, $\rho_i = |\lambda_i|$ y $\varphi_i = \text{Arg}(\lambda_i)$. Entonces, reemplazando esta forma polar en (13) se obtiene que

$$\tau\rho_i e^{j\varphi_i} = |\alpha| e^{j(\frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\alpha) + \alpha)} .$$

Por lo tanto,

$$\tau\rho_i = |\alpha| \quad (15a)$$

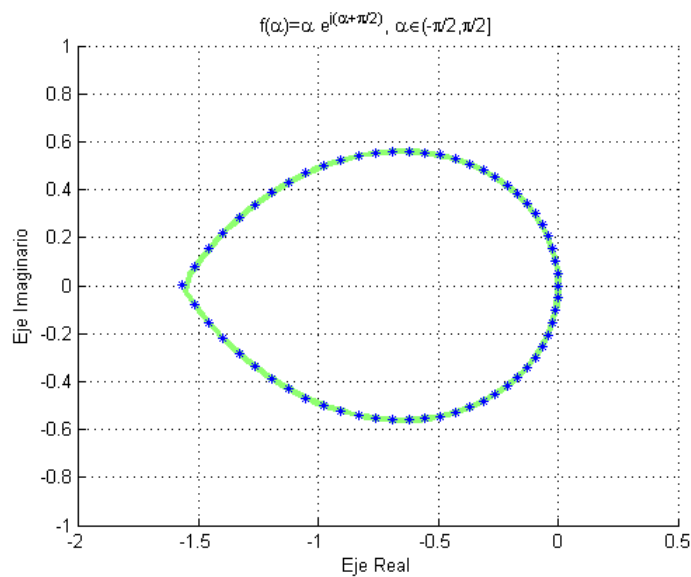
$$\varphi_i = \text{Arg} \left(e^{j(\frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\alpha) + \alpha)} \right) . \quad (15b)$$

De (15b) y (14), se tiene que

$$\alpha = \begin{cases} \varphi_i + \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}] . \end{cases} \quad (16)$$

²El argumento de un número complejo z es el ángulo formado entre el eje real positivo del plano \mathbb{C} y la línea que une z con el origen de \mathbb{C} . Si el dominio de este ángulo se restringe a $(-\pi, \pi]$, entonces se denomina argumento principal.

Figura 5. Valores calculados de C_0 usando (13) (asteriscos azules), y contorno 0 de la parte real de la rama W_0 de la función W de Lambert (linea continua verde).



Fuente: Original de esta investigación.

Así,

$$|\alpha| = \begin{cases} -\varphi_i - \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases} \quad (17)$$

Una forma de simplificar la Ecuación (17) se obtiene considerando los posibles valores que toma φ_i en función de α . De (16), se tiene que

$$\begin{aligned} \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) &\Leftrightarrow \varphi_i \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\Leftrightarrow \varphi_i \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{aligned}$$

Es decir, $|\varphi_i| = -\varphi_i$ si $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, y $|\varphi_i| = \varphi_i$ si $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Por lo tanto, (17) puede expresarse como

$$|\alpha| = |\varphi_i| - \frac{\pi}{2}. \quad (18)$$

Ahora, de (15a) y (18) se obtiene que

$$\tau = \frac{1}{\rho_i} \left(|\varphi_i| - \frac{\pi}{2} \right). \quad (19)$$

Para este valor de τ , el polo retardado dado en (11) asociado al i -ésimo valor propio de $-L$, λ_i , estará sobre el eje imaginario.

Como se discutió al inicio de este análisis, con el fin de hallar el retardo marginal, primero debe encontrarse τ usando (19) para cada uno de los valores propios de $-L$ distintos de cero ($\lambda_2, \dots, \lambda_n$), y posteriormente elegir el mínimo de los valores de τ hallados. Resumiendo, la expresión analítica que determina el retardo marginal de estabilidad para la red de consenso dada en (6) es

$$\tau_c = \min_{i=2, \dots, n} \left\{ \frac{1}{\rho_i} \left(|\varphi_i| - \frac{\pi}{2} \right) \right\}. \quad (20)$$

3.2.1 Retardo Marginal para Redes con Topologías descritas por Grafos no Dirigidos. Los Laplacianos correspondientes a grafos que describen topologías de comunicación bidireccionales, es decir, los Laplacianos de grafos no dirigidos, tienen la particularidad de ser simétricos (ver Sección **2.1.2**). Por esta razón, todos los valores propios de dichos Laplacianos son reales [19]. Esta característica permite simplificar la expresión en (20), ya que en este caso, $\varphi_i = -\pi$, para todo $i = 2, \dots, n$. Entonces, el retardo marginal para redes con topologías descritas por grafos no dirigidos es

$$\tau_c = \min_{i=2, \dots, n} \left\{ \frac{1}{\rho_i} \right\} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right).$$

Así,

$$\tau_c = \frac{\pi}{2|\lambda_{\min}(-L)|} = \frac{\pi}{2\lambda_{\max}(L)}, \quad (21)$$

donde $\lambda_{\min}(-L)$ es el mínimo valor propio de $-L$ y $\lambda_{\max}(L)$ es el máximo valor propio de L .

3.2.2 Condición Suficiente de Estabilidad. En esta sección, se define una condición suficiente de estabilidad que permite calcular un retardo que garantice la estabilidad del sistema en (6), sin necesidad de conocer los valores propios de $-L$. Para ello, se consideran las siguientes dos propiedades.

En primer lugar, de acuerdo al Teorema 2 presentado en [2], se puede establecer que, para un digrafo con Laplaciano L y máximo grado de salida³ d_{\max} , se cumple lo siguiente:

$$|\lambda_i + d_{\max}| \leq d_{\max}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (22)$$

Geoméricamente, esto equivale a que todos los valores propios de $-L$ están ubicados en el plano complejo dentro de un círculo centrado en $-d_{\max}$ y con radio d_{\max} . Multiplicando ambos lados de la desigualdad en (22) por τ , se puede determinar que las cantidades $\{\tau\lambda_i, \dots, \tau\lambda_n\}$ están ubicadas en un círculo centrado en $-\tau d_{\max}$ y con radio τd_{\max} :

$$|\tau\lambda_i + \tau d_{\max}| \leq \tau d_{\max}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (23)$$

En segundo lugar, el análisis previo presentado en este capítulo, nos permite establecer que es posible determinar la estabilidad del sistema de consenso retardado dado en (6), únicamente conociendo la ubicación de las cantidades complejas $\{\tau\lambda_i, \dots, \tau\lambda_n\}$. Note que si todas estas cantidades están dentro de la región del plano complejo delimitada por el contorno 0 de la parte real de W_0 , es decir C_0 , el sistema retardado es estable⁴. En la **Figura 5**, esta región corresponde al interior de la curva trazada usando la línea continua verde.

Conforme a estas dos propiedades, para garantizar la estabilidad del sistema en (6), es suficiente encontrar un círculo centrado en una cantidad $-r \in \mathbb{R}_{<0}$ y de radio r , que

³El máximo grado de salida de un digrafo se define como $d_{\max} := \max_i \{\deg_{out}(i) \mid i = 1, \dots, n\}$

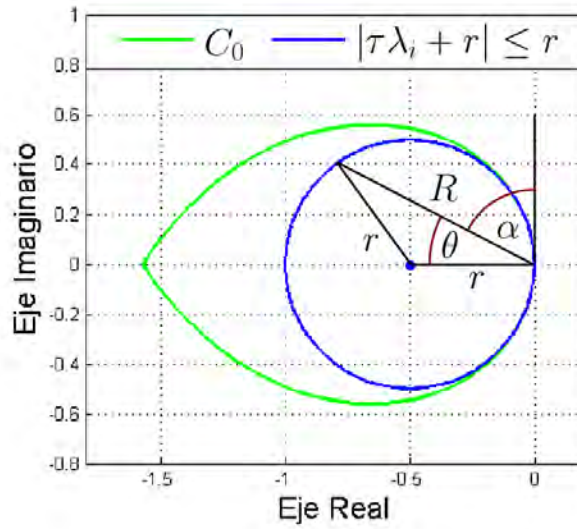
⁴Esto se debe a que si $\tau\lambda_i$ está dentro de la región delimitada por C_0 , entonces la parte real de $W_0(\tau\lambda_i)$ es no positiva y por lo tanto, el polo retardado asociado a λ_i dado en (11) es estable.

esté completamente contenido en la región delimitada por C_0 . Luego (6) es estable si

$$\tau d_{\max} \leq r. \quad (24)$$

En la **Figura 6**, se muestra un círculo que cumple estas características. El radio de este círculo se puede determinar por geometría y satisface la ecuación

Figura 6. Circunferencia máxima dentro del contorno cero de la rama W_0 .



Fuente: Original de esta investigación.

$$r^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \theta,$$

siendo R y θ los indicados en la **Figura 6**. Así,

$$R = 2r \cos \theta = 2r \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Por lo tanto,

$$R = 2r \sin \alpha.$$

Además, sabemos que C_0 puede expresarse paramétricamente como $C_0 = |\alpha| e^{(\frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\alpha) + \alpha)}$, con $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (ver Ecuación (13)). Entonces, con el fin de asegurar que la circunferencia de radio r este contenida dentro de C_0 , se debe cumplir que $R < |\alpha|$, $\forall \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Ya que existe simetría de las curvas con respecto al eje real, solo es necesario analizar el hemisferio superior, por lo tanto, se restringe el análisis a $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha &> 2r \sin \alpha \\ r &< \frac{\alpha}{2 \sin \alpha} \\ r &< \frac{1}{2}(\text{sinc } \alpha)^{-1}, \quad \forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned} \tag{25}$$

Se sabe que la función $\text{sinc } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$, tiene su máximo en $\alpha = 0$. Además, esta función es positiva para todo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Entonces, se puede concluir que $(\text{sinc } \alpha)^{-1}$ tiene su mínimo en $\alpha = 0$. Así, debe notarse que (25) se cumple si

$$r < \frac{1}{2} \left(\inf_{\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]} (\text{sinc } \alpha)^{-1} \right).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} r &< \frac{1}{2} \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \\ r &< \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Usando este valor de r en (24), la condición suficiente de estabilidad está dada por

$$\tau < \frac{1}{2d_{\max}}. \tag{26}$$

La expresión (26) provee un criterio suficiente de estabilidad en función del máximo grado de salida d_{\max} para una red de agentes bajo la dinámica descrita en (6). Si bien en (20) se determina el máximo valor del retardo permisible para que la red de agentes pueda converger al consenso, este resultado requiere calcular todos los valores propios del Laplaciano del digrafo, que para digrafos de gran tamaño, puede ser una tarea muy demandante a nivel computacional. Por el contrario, el criterio dado en (26), establece una herramienta que permite asegurar estabilidad a partir de información del sistema

de fácil obtención, como lo es el número máximo de vecinos de los nodos d_{max} . Esto evita así la necesidad de procesamiento especializado.

3.3 SIMULACIÓN DE RESULTADOS

Para corroborar los resultados obtenidos en la sección anterior, se elaboran diversos algoritmos por medio del software MATLAB, dentro de los cuales se crea matrices Laplacianas de forma aleatoria que representan diversos tipos de grafos, configurando parámetros relevantes como el número de nodos y la probabilidad de conexión entre ellos. Posteriormente, usando el toolbox Simulink, se realiza la simulación respectiva para distintos valores de retardo de entrada en términos del retardo crítico τ_c .

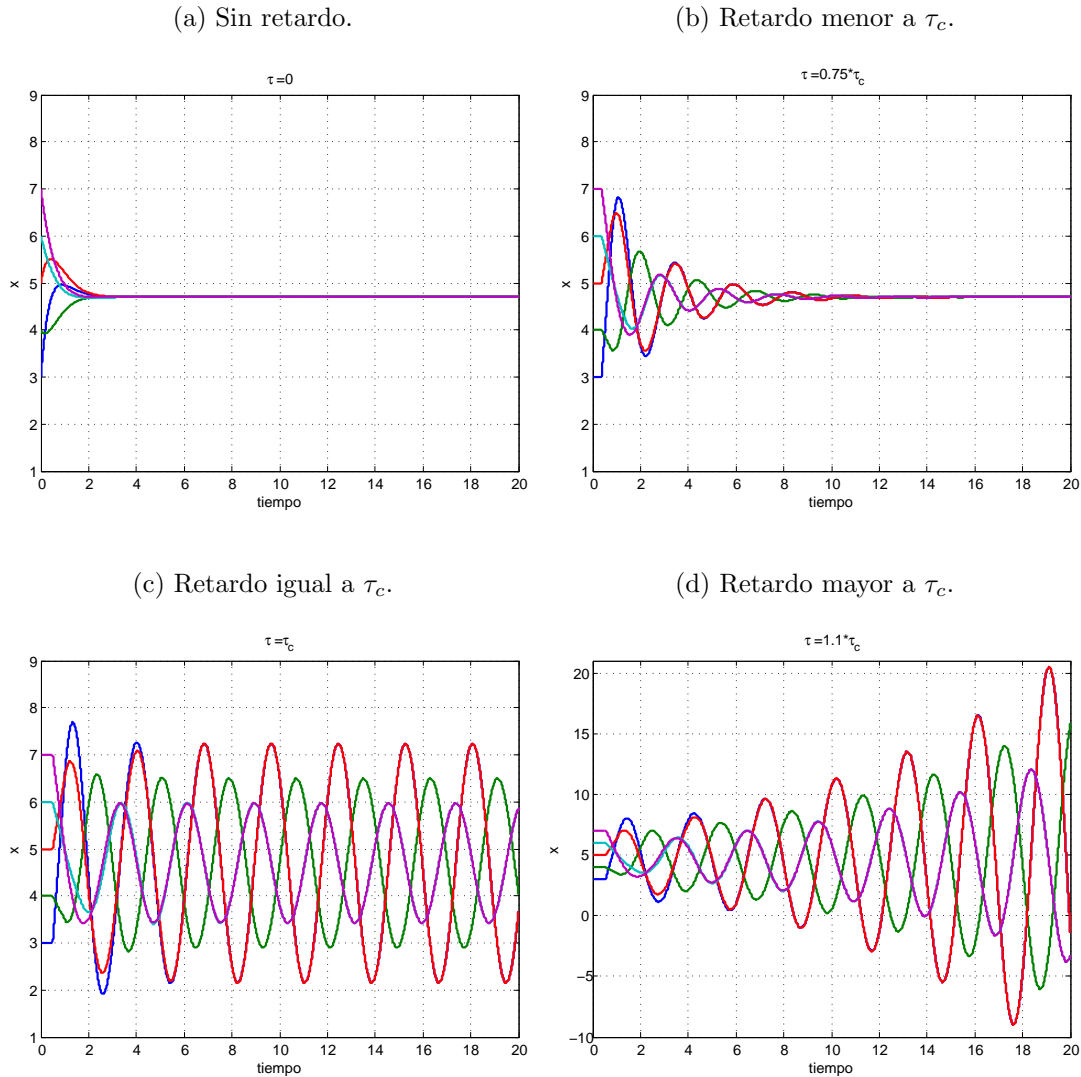
En la **Figura 7**, se muestran los resultados de simulación para una red de integradores de tiempo continuo que identifica a un digrafo representado por el Laplaciano L . Este sistema se analiza para el protocolo de consenso bajo retardos de entrada expresado por (6). La simulación se efectúa tanto para el sistema sin retardo, como también cuando este es sometido un retardo temporal a la entrada igual en cada nodo con las siguientes magnitudes: $\tau = 0.75\tau_c$, $\tau = \tau_c$ y $\tau = 1.1\tau_c$.

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \Lambda(-L) = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 + j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 - j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

El retardo marginal de estabilidad medido en segundos para este ejemplo lo determinan los valores propios $\lambda_3 = -2 + j$ y $\lambda_4 = -2 - j$, y se puede calcular con λ_3 usando (19) como

$$\tau_c \approx \frac{1}{2.2361} \left(2.6779 - \frac{\pi}{2} \right) \approx 0.4951.$$

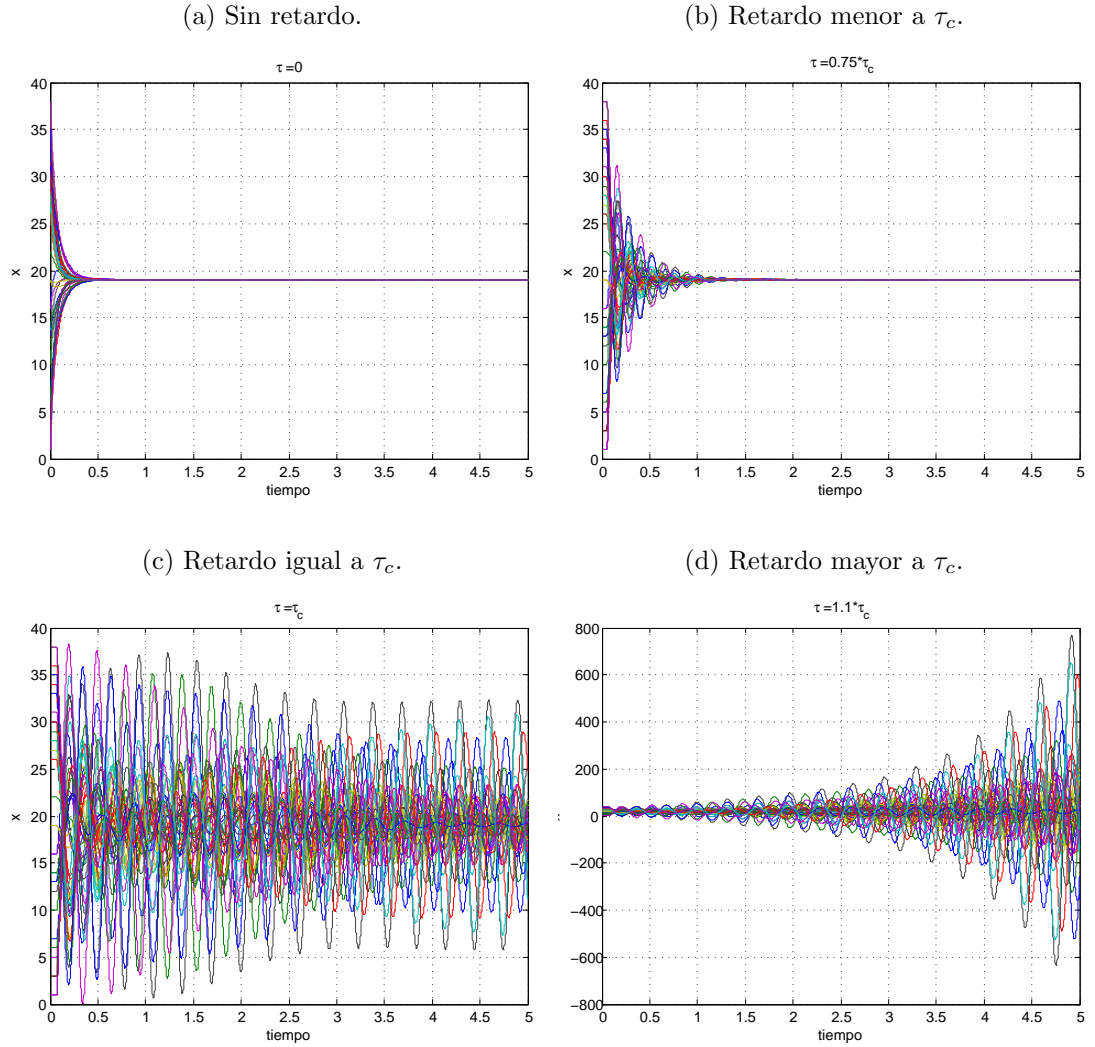
Figura 7. Simulación de un digrafo de 5 nodos que ejecuta el protocolo de consenso bajo retardos expresado en (6).



Fuente: Original de esta investigación.

De la **Figura 7** puede verse que, tal y como se espera, el sistema es estable para valores de $\tau < \tau_c$ (**Figura 7a** y **Figura 7b**). En el caso de $\tau = \tau_c$, **Figura 7c**, se observa que el sistema oscila dentro de un rango definido, consistente con una estabilidad marginal. Para $\tau > \tau_c$, **Figura 7d**, se aprecia un incremento progresivo que conlleva a la inestabilidad. Nótese que en la última ilustración la escala del eje vertical es mayor que en las

Figura 8. Simulación de un digrafo de 40 nodos que ejecuta el protocolo de consenso bajo retardos expresado en (6).



Fuente: Original de esta investigación.

demás para percibir con mejor claridad el comportamiento inestable del sistema cuando la red de integradores se encuentra bajo esta magnitud de retardo temporal.

Otra simulación, bajo condiciones similares de retardo de entrada y realizada para un digrafo con 40 nodos puede apreciarse en la **Figura 8**. En este caso el retardo crítico recae sobre los valores propios $\lambda_2 \approx -20.8639 + 0.8145j$, $\lambda_3 \approx -20.8639 - 0.8145j$. Calcu-

lando el retardo marginal de estabilidad, se obtiene un valor de $\tau_c \approx \frac{1}{20.8798}(3.1026 - \frac{\pi}{2}) \approx 0.0734$. Las gráficas obtenidas muestran los mismos resultados que en el caso anterior; llegando al consenso cuando los valores de retardo son inferiores al τ_c , **Figura 8a** y **Figura 8b**; obteniendo una respuesta divergente cuando el retardo es mayor al retardo marginal, **Figura 8d**; y presentando un estado de oscilación continua en el caso del retardo crítico, **Figura 8c**.

3.4 COMPARACIÓN CON OTROS RESULTADOS REPOR- TADOS EN LA LITERATURA

Dentro de las contribuciones que han sido presentadas en la literatura con respecto al análisis y obtención del retardo marginal de estabilidad en sistemas de redes de integradores de tiempo continuo bajo el protocolo de consenso expresado en (6), se pueden diferenciar en particular a [2] y [43], que constituyen de los primeros aportes con respecto al estudio de retardos temporales en grafos no dirigidos y dirigidos, respectivamente. Junto con estos, se realiza una revisión de varios artículos en los que se presentan resultados sobre el tema, y posteriormente se recopila una lista de autores con el fin de contrastar dichos resultados con los obtenidos en esta investigación.

3.4.1 Olfati-Saber y Murray (2004). En este documento [2], se aborda el análisis de problemas de consenso bajo retardos temporales en redes de agentes con dinámicas de integradores. Aquí se presenta el cálculo analítico del retardo máximo de estabilidad τ_c , para el caso en que los retardos son iguales en todos los canales y las redes están representadas por grafos no dirigidos con topologías fijas. En su trabajo, Olfati-Saber y Murray presentan el siguiente resultado:

$$\tau_c = \min_{\substack{\tau|\lambda_i|=\pi/2 \\ i>1}} \{\tau\} = \min_{i>1} \left\{ \frac{\pi}{2|\lambda_i|} \right\} = \frac{\pi}{2|\lambda_n|}, \quad (27)$$

donde λ_i es el i -ésimo valor propio de $-L$ y L corresponde al Laplaciano del grafo que describe la red. Hay que recordar, que para grafos no dirigidos $\lambda_i \in \mathbb{R}^-$, además que los valores propios se organizan de forma que $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n = \lambda_{\min}(-L)$.

Para llegar a esta conclusión, se parte de la función de transferencia MIMO (*Multiple Input Multiple Output*) definida como $G_\tau(s) = (sI_n + e^{-\tau s}L)^{-1}$, donde s es la variable de Laplace. De $G_\tau(s)$, después de ser analizada y tratada, se obtiene la expresión que determina sus polos en función de los valores propios de $-L$. Posteriormente, se desarrolla con base en un análisis frecuencial.

En este artículo, Olfati-Saber y Murray también presentan una condición suficiente de convergencia para el protocolo expresado en (6), que se consigue partiendo del teorema de Gerschgorin y en el que se muestra que

$$\tau \leq \frac{\pi}{4d_{\max}(\mathcal{G})}, \quad (28)$$

donde $d_{\max}(\mathcal{G})$ es el mayor grado de salida del grafo \mathcal{G} .

Ahora, en contraste con los resultados presentados en este proyecto, se puede apreciar que la expresión (21) es un ecuación consistente con la obtenida por Olfati-Saber y Murray (27), mostrada en el Teorema 10 en [2], para el caso particular donde los retardos temporales son iguales en cada nodo y la topología de la red es fija y no dirigida. Aunque a partir del resultado presentado en este proyecto (20), también se puede concluir que esta expresión no solo es válida para redes no dirigidas, sino que puede aplicarse en toda red cuyos valores propios $\lambda_i(-L) \in \mathbb{R}^-$; como es el caso de algunas de las redes representadas por digrafos que han sido generadas aleatoriamente en las simulaciones usando el software MATLAB.

3.4.2 Shen y Cao (2011). En [43], Shen y Cao estudian los problemas de consenso en sistemas de orden fraccionado con retardos temporales a la entrada sobre grafos dirigidos. Un sistema de orden fraccionado, es aquel en el que las potencias del operador diferencial pueden tomar valores reales. Se presentan dos criterios para definir el límite

del retardo temporal en redes con topología fija, en donde el sistema que se analiza es

$$x_i^{(\sigma)}(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (29)$$

donde $x_i^{(\sigma)}(t)$ es la σ -ésima derivada de $x_i(t)$, y $\sigma \in (0, 1]$. Shen y Cao muestran que el sistema definido en (29) converge asintóticamente al consenso si cumple con el siguiente criterio de estabilidad:

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\sigma}{\tau} W \left(\frac{\tau}{\sigma} \lambda_i^{1/\sigma} \right) \right) < 0, \quad \forall i > 1. \quad (30)$$

Aquí, λ_1 corresponde al valor propio 0 de $-L$. Para obtener este criterio, Shen y Cao emplean un análisis similar al usado en la Sección 3.1 para obtener la expresión (10), partiendo de la ecuación que determina los polos de la función de transferencia del sistema (29). Por otro lado, en [43] se establece que el sistema en (29) es estable para cualquier retardo τ que se encuentre en el intervalo

$$0 < \tau < \min_{i>1} \left\{ \frac{\pi - \pi\sigma/2 - \arg(\lambda_i)}{|\lambda_i|^{1/\sigma}} \right\}. \quad (31)$$

Ahora, en comparación con los resultados mostrados en este proyecto, el criterio de estabilidad dado en (30) para el caso particular en que $\sigma = 1$, concuerda con lo expuesto en la sección 3.1 al determinar (10). Sin embargo, es importante señalar que Shen y Cao no reparan en detalles técnicos tales como los dados en [36] (Lemma 3). En este sentido, el procedimiento seguido en este documento guarda mayor rigurosidad desde el punto de vista matemático. Por otra parte, puede verse que el límite marginal del retardo τ , mostrado en (31), se reduce a la ecuación (20), lo que proporciona una prueba alternativa del resultado obtenido para el cálculo del retardo máximo de estabilidad. Una diferencia con el método expuesto en este trabajo es que Shen y Cao no usan la función *W de Lambert* para obtener el intervalo de estabilidad en (31). En cambio, ellos emplean el criterio de estabilidad de Nyquist sobre la ecuación característica del sistema retardado. Además, una ventaja a considerar expuesta en este documento, consiste en la posibilidad

de establecer qué tan cerca se encuentran los valores propios del Laplaciano, cuando no existe retardo, de volverse inestables. Esto se debe a que se ha caracterizado el contorno cero de la función W de Lambert.

3.4.3 Bliman y Ferrari-Trecate (2008). El documento [44] presenta un estudio de problemas de consenso para redes de agentes no dirigidas, en donde a través de un método diferente, se llega a la misma conclusión que en [2].

Para la representación del sistema, se usa el operador Laplaciano Δ , el cual está fuertemente relacionado a la matriz Laplaciana L . Ahora, $\Delta : H^1 \rightarrow H^1$ es simétrico, y H^1 es un espacio de Hilbert cuando el grafo G es conexo. El estado del agente x en el tiempo t se denota como $v(x, t)$. Descomponiendo en la forma $v(x, t) = v_1(x, t) + \bar{v}(x, t)$, donde $v_1(x, t) \in H^1$ y $\bar{v}(x, t) \in H^1_\perp$, entonces, se cumple que $\dot{\bar{v}} = 0$ y $\dot{v}_1 = \Delta v_1$.

La dinámica del sistema bajo retardos, para el caso en que todos los retardos son iguales en cada nodo, se representa por

$$\dot{v}_1(x, t) = \Delta v_1(x, t - \tau).$$

Para este sistema, el retardo marginal τ_c es

$$\tau_c = \frac{\pi}{2\|\Delta\|}. \quad (32)$$

Ahora, $\|\Delta\| = |\lambda_{\min}| = -\lambda_{\min} > 0$, donde λ_{\min} es el mínimo valor propio del Laplaciano en H^1 .

Como puede apreciarse en (32), el resultado reportado por Bliman y Ferrari-Tricate en el Teorema 3 en [44], es el mismo mostrado en este proyecto en (21).

3.4.4 Tian y Liu (2008). En su artículo, [14], Tian y Liu abordan el estudio de problemas de consenso en sistemas multiagente bajo retardos temporales de entrada y de comunicaciones, apoyándose en un análisis sobre el dominio de la frecuencia y el uso del criterio general de estabilidad de Nyquist. Se reportan dos condiciones de consenso, una para sistemas basados en grafos no dirigidos bajo diversos retardos de entrada, y otra para sistemas basados en digrafos bajo diversos retardos tanto de entrada como de comunicaciones.

En el primer caso, se analiza un sistema bajo retardos temporales de entrada caracterizado por grafos no dirigidos y conexos de pesos a_{ij} simétricos y representado por

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(x_j(t - \tau_i) - x_i(t - \tau_i) \right), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (33)$$

donde cada agente x_i , esta sometido a un retardo de entrada τ_i . Entonces, la condición de consenso para (33) es

$$\tau_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} < \frac{\pi}{4}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (34)$$

En el segundo caso, el sistema tratado está representado por digrafos con al menos un árbol de expansión dirigido, donde cada agente está sometido a un retardo de entrada y existe un retardo de comunicación desde el agente j hasta el agente i , definido como T_{ij} . En este caso, el sistema se representa como

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} \left(x_j(t - T_{ij} - \tau_i) - x_i(t - \tau_i) \right), \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (35)$$

La condición de consenso para el sistema (35) está dada por

$$\tau_i \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} < \frac{1}{2}, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (36)$$

Además, para el sistema (35), Tian y Liu determinan que la condición de consenso (36) es dependiente de los retardos de entrada, pero, es independiente de los retardos de comunicación.

Con respecto a la expresión (34), puede verse que cuando los retardos de entrada son iguales para cada agente, ésta se reduce al resultado reportado por Olfati-Saber y Murray (28), mostrado en [2]. Por otra parte, la condición de consenso (36) presentada por Tian y Liu, es consistente con el resultado mostrado por este proyecto en (26) para el caso particular en que los retardos de entrada se mantienen constantes para cualquier $i = 1, \dots, n$. Esto permite revalidar los hallazgos obtenidos a través del procedimiento seguido en este documento, que están basados en el uso de función W de Lambert.

3.4.5 Liu, Xu y Xie (2012). Liu, Xu y Xie tratan en su manuscrito [45], problemas de consenso en sistemas de orden fraccionado sobre topologías dirigidas. Se analizan sistemas bajo retardos temporales de seguidores Multilider, donde el consenso lo determina un grupo de líderes.

Se considera un sistema de redes de orden fraccionado constituido de $n + m$ agentes, donde los agentes seguidores se etiquetan como $1, \dots, n$, y los agentes líderes como $n + 1, \dots, n + m$. El grafo que describe la interacción de los agentes seguidores se identifica por $\mathcal{G} = \{\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A}\}$, mientras que el sistema completo que abarca la totalidad de los $n + m$ agentes es modelado por el digrafo ponderado $\bar{\mathcal{G}} = \{\bar{\mathcal{V}}, \bar{\mathcal{E}}, \bar{\mathcal{A}}\}$. En general, la dinámica de cada líder es independiente de la de los seguidores, donde \bar{x}_k representa el estado del líder k y se mantiene constante. La dinámica del agente seguidor i está dada por

$$x_i^{(\sigma)}(t) = u_i(t), \quad i = 1, \dots, n, \quad (37)$$

donde $x_i^{(\sigma)}(t)$ es la σ -ésima derivada de $x_i(t)$, y $\sigma \in (0, 1]$. La ley de control aplicada al

agente seguidor i bajo la dinámica anterior es

$$u_i(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij} (x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)) + \sum_{k=n+1}^{n+m} b_k^i (\bar{x}_k(t - \tau) - x_i(t - \tau)), \quad (38)$$

donde $k = n + 1, \dots, n + m$, $b_k^i > 0$ si y solo si el líder $k \in \mathcal{N}_i$, de lo contrario $b_k^i \geq 0$.

En [45], usando análisis frecuencial y apoyándose en el Teorema de estabilidad de Nyquist en una forma muy similar que en [43], se determina que si el grafo $\bar{\mathcal{G}}$ tiene un árbol de expansión dirigido y se cumple que el retardo $\tau < \tau_c$, donde

$$\tau_c = \min_{i=1, \dots, n} \left\{ \frac{\pi - (\sigma\pi/2) - \arg(\mu_i)}{|\mu_i|^{1/\sigma}} \right\}, \quad (39)$$

entonces los agentes seguidores bajo la dinámica (37) que ejecutan la ley de control (38), pueden llegar al estado de consenso definido por el grupo de agentes líderes. μ_i es el i -ésimo valor propio de una matriz que es referida como \mathcal{H} , la cual está asociada al grafo $\bar{\mathcal{G}}$ y esta muy relacionada con el Laplaciano de \mathcal{G} .

Puede verse que la expresión (39) guarda estrecha similitud con la reportada en [43], y que cuando $\sigma = 1$, se reduce a una ecuación que si bien es específica para el caso de digrafos con multilíderes, tiene relación muy cercana a la presentada en este informe en (20).

3.4.6 Hou, Fue y Zhang (2016). En este trabajo [46], se consideran los problemas de consenso para sistemas multiagente lineales continuos en el tiempo bajo retardos temporales en redes no dirigidas. Se obtiene el valor del máximo retardo de tiempo para que un sistema de primer orden con dinámicas de integradores converja al consenso utilizando un método de análisis en el dominio de la frecuencia.

Ya que para grafos no dirigidos, $-L$ es una matriz simétrica con valores propios reales no positivos, estos últimos se pueden organizar como

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Hou, Fue y Zhang, tratan sistemas de integradores de primer orden cuya dinámica se representa por $\dot{x}_i(t) = u_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, donde el protocolo de consenso del i -ésimo agente esta dado por

$$u_i(t) = k \sum_{j \in \mathcal{N}_i} a_{ij}(x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)), \quad i = 1, \dots, n,$$

y $k \in \mathbb{R}$ es una ganancia común de diseño.

Bajo estas condiciones, el sistema de integradores converge al consenso si y solo si las raíces de s en $s - \lambda_i k e^{-\tau s} = 0$, $i = 1, \dots, n$, tienen parte real negativa. Esta condición se cumple si y solo si $k > 0$ y $\tau < \tau_c$, donde

$$\tau_c = \frac{\pi}{2k|\lambda_n|}. \quad (40)$$

Puede apreciarse que este resultado es equivalente al presentado por la expresión (21) en este informe, como también al entregado por [2], donde Ofati-Saber y Murray analizan un caso menos general del sistema mencionado.

En conclusión, a pesar de que varias investigaciones han tratado el tema de determinación del retardo crítico con diferentes métodos, éstas se basan fundamentalmente en análisis frecuenciales, lo que limita los resultados al establecimiento de intervalos de estabilidad, ya sean suficientes o necesarios, desestimando la atención hacia otros aspectos importantes tales como el lugar de las raíces, y el propio comportamiento en estado transitorio que presentan los grafos dentro del margen de estabilidad determinado por dichos criterios. Por otra parte, la mayoría de estos trabajos están enfocados en el estudio de grafos no dirigidos, además, si bien existen investigaciones sobre redes dirigidas que incluso se apoyan en el uso de la función W de Lambert, la principal diferencia con ésta investigación, es que éstas solo utilizan dicha función para encontrar los polos retardados del sistema (10), mas no para determinar el retardo critico de estabilidad como tal.

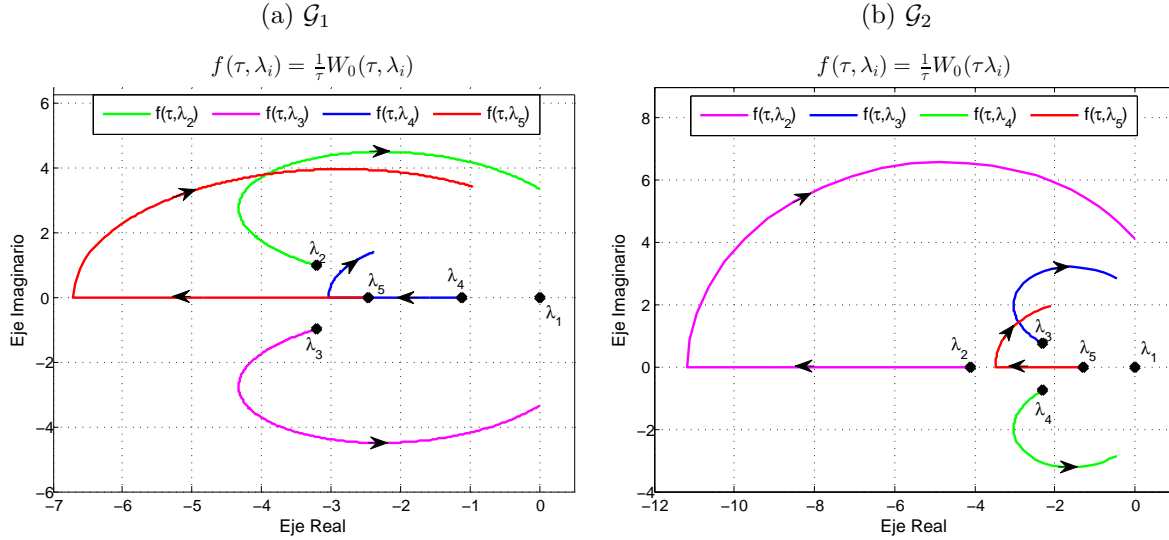
4. ANÁLISIS EN ESTADO TRANSITORIO

La función W de Lambert no solo representa una herramienta que permite desarrollar un método analítico para calcular el valor del retardo marginal de estabilidad, sino que también, ofrece la posibilidad de elaborar un análisis del lugar de las raíces, con el propósito de extraer características del comportamiento en estado transitorio de los protocolos de consenso. Bajo esta premisa, se parte de la expresión (11) para analizar los transitorios de redes de agentes con dinámicas de integradores sujetas a retardos temporales de entrada, representados por el sistema en (6). Para este propósito, se elaboran diversos algoritmos y simulaciones desarrollados en MATLAB, a partir de los cuales se caracteriza el lugar de las raíces con base en el análisis de la ecuación (11) que determina los polos retardados del sistema.

En la **Figura 9** se muestran las curvas que definen el lugar de las raíces de sistemas representados por digrafos usando dos redes ejemplo denotadas como \mathcal{G}_1 y \mathcal{G}_2 . Puede apreciarse la características que diferencian las curvas correspondientes a valores propios reales (λ_4 y λ_5 para \mathcal{G}_1 , λ_2 y λ_5 para \mathcal{G}_2), y a valores propios complejos (λ_2 y λ_3 para \mathcal{G}_1 , λ_3 y λ_4 para \mathcal{G}_2). Se observa también que en \mathcal{G}_1 el eigenvalor que determina el retardo crítico es un complejo (λ_2), mientras en \mathcal{G}_2 es un real (λ_2). En general, el lugar de las raíces para eigenvalores reales es mucho más sencillo de analizar que para el caso de complejos, ya que los valores del término $W_0(\tau\lambda_i)$ hacen parte de una curva definida formada por el segmento de recta comprendido por $[-1, 0]$ y la curva de corte de la rama W_0 , representada por la función paramétrica (8).

En el proceso de desarrollo de este trabajo, se hizo evidente la importancia que posee la raíz más cercana al eje imaginario ya que esta raíz está relacionada directamente con la velocidad de convergencia del sistema [35]. Dentro de las herramientas de análisis que sirven de apoyo para estudiar el comportamiento en estado transitorio, se encuentran las gráficas de la raíz más cercana al eje imaginario cuando el retardo varía dentro del

Figura 9. Lugar de las raíces en digrafos para el intervalo $0 < \tau \leq \tau_c$.



Fuente: Original de esta investigación.

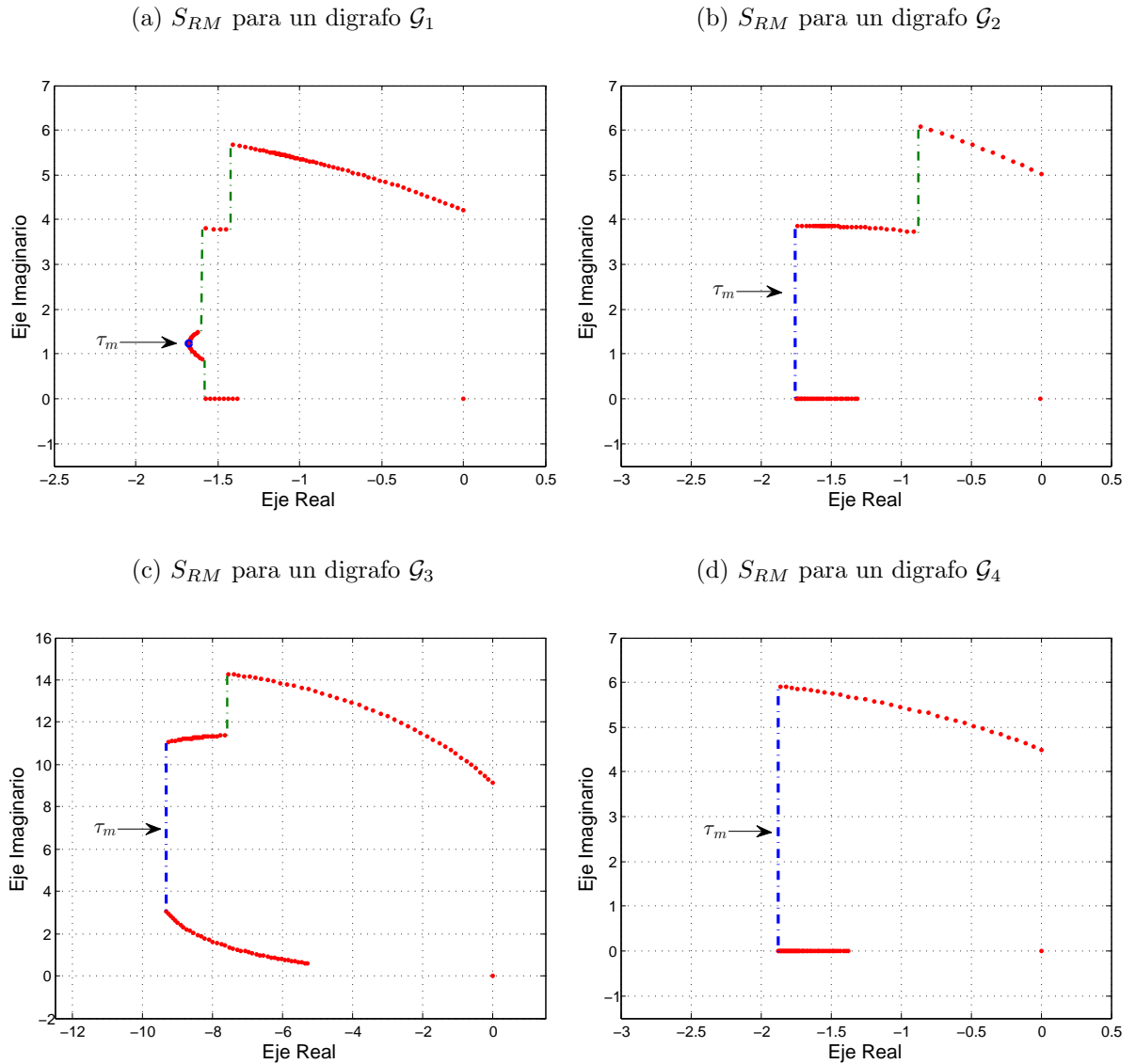
rango de estabilidad. En la **Figura 10**, se muestra las gráficas de la raíz más cercana al eje imaginario para cuatro sistemas diferentes representados por digrafos, etiquetados como \mathcal{G}_1 , \mathcal{G}_2 , \mathcal{G}_3 y \mathcal{G}_4 . Esta raíz, que en adelante se denota como S_{RM} , está dada por

$$S_{RM}(\tau) = \left\{ \frac{1}{\tau} W_0(\tau \lambda_j), \forall j = 2, \dots, n \mid \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\tau} W_0(\tau \lambda_j)\right) = \max_{i=2, \dots, n} \left\{ \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\tau} W_0(\tau \lambda_i)\right) \right\} \right\},$$

donde $0 < \tau \leq \tau_c$ y λ_i es un valor propio de la matriz $-L$.

Ahora, la parte real de la raíz más cercana al eje imaginario afecta directamente la velocidad de convergencia del sistema. Partiendo de este hecho, como se observa en las curvas de la **Figura 10**, se busca identificar el retardo para el que $\operatorname{Re}(S_{RM})$ está más alejada del eje imaginario porque al ocurrir esto, el sistema retardado converge a mayor velocidad. En otras palabras, si se define τ_m como el retardo que maximiza la velocidad de convergencia del sistema, puede apreciarse que este retardo ocurre cuando la parte real de S_{RM} alcanza su valor mínimo.

Figura 10. Lugar de la raíz más cercana al eje imaginario para 4 digrafos distintos y $0 < \tau \leq \tau_c$.

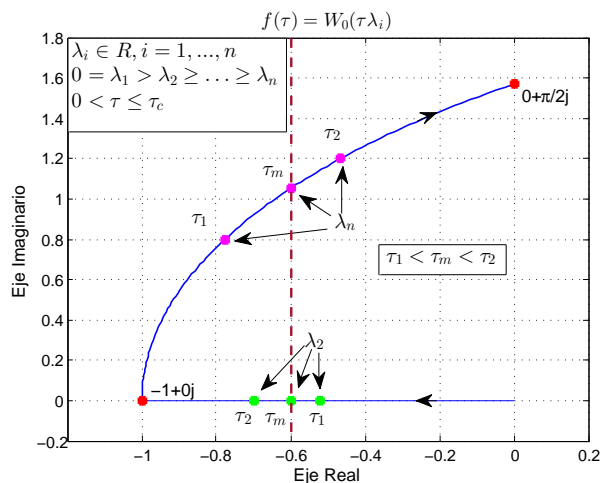


Fuente: Original de esta investigación.

En el caso de grafos no dirigidos, las curvas de la raíz más cercana siempre describen una forma como la que se muestra en la **Figura 10d**, donde los valores reales de S_{RM} corresponden a los polos retardados asociados al máximo valor propio diferente de cero

de $-L(\lambda_2)$, y los valores complejos corresponden a los polos retardados asociados al mínimo valor propio de $-L(\lambda_n)$. Entonces, al analizar el lugar de las raíces y la curva descrita por el término $W_0(\tau\lambda_i)$ se puede concluir que el retardo para el que se presenta el mínimo valor de S_{RM} dentro del rango estabilidad, es decir el retardo que maximiza la velocidad de convergencia τ_m , ocurre cuando $\text{Re}(\frac{1}{\tau}W_0(\tau\lambda_n)) = \text{Re}(\frac{1}{\tau}W_0(\tau\lambda_2))$, donde $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

Figura 11. Gráfica del término $W_0(\tau\lambda_i)$ para un grafo no dirigido.



Fuente: Original de esta investigación.

Para comprender este aspecto se analiza el término $W_0(\tau\lambda_i)$ en la expresión (11). La **Figura 11** muestra la curva general correspondiente a $W_0(\tau\lambda_i)$ para un grafo no dirigido, en la que se indica la dirección en que los puntos se ubican a medida que el retardo τ aumenta. Ya que se trata de grafos no dirigidos, todos sus eigenvalores son reales y se pueden ordenar de forma que $0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, lo que también implica que el retardo marginal de estabilidad estaría determinado por λ_n . Teniendo en cuenta que $\tau\lambda_i \in \mathbb{R}$, se puede notar que $W_0(\tau\lambda_i)$ se desplaza en el sentido de la curva (**Figura 11**) a medida que el valor de λ_i disminuye desde λ_2 hasta λ_n (se debe recordar que $\lambda_i \in \mathbb{R}^-$, $\forall i = 2, \dots, n$). Es decir, para un retardo cualquiera dentro del rango de

estabilidad, de entre los polos retardados reales el más cercano al eje imaginario siempre es el correspondiente a λ_2 , y para los polos retardados complejos, el más cercano siempre es el correspondiente a λ_n . Esto implica que el mínimo valor de la parte real de la raíz más hacia la derecha del plano complejo $\min_{0 < \tau \leq \tau_c} \{\text{Re}(S_{RM})\}$, ocurre en el retardo donde la parte real de los polos retardados asociados a λ_2 y λ_n tienen el mismo valor. Además, analizando la expresión (11) se puede notar que el término $1/\tau$ representa una ponderación de los componentes real e imaginario de los valores $W_0(\tau\lambda_i)$, en igual magnitud para cada uno; así que no influye sobre el cálculo de τ_m . En la **Figura 11** se describe el desplazamiento de los valores de $W_0(\tau\lambda_n)$ y $W_0(\tau\lambda_2)$ desde un retardo menor (τ_1) hasta uno mayor (τ_2) al retardo que maximiza la velocidad de convergencia τ_m .

4.1 OBTENCIÓN DEL RETARDO QUE MAXIMIZA LA VELOCIDAD DE CONVERGENCIA

Con base en el análisis anterior, se puede concluir que el retardo τ_m que maximiza la velocidad de convergencia de un grafo no dirigido se determina cuando se cumple que

$$\left\{ \text{Re}\left(\frac{1}{\tau_m} W_0(\tau_m \lambda_2)\right) = \text{Re}\left(\frac{1}{\tau_m} W_0(\tau_m \lambda_n)\right) \mid 0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \right\}, \quad (41)$$

donde, $\lambda_i \in \mathbb{R}^-, \forall i = 2, \dots, n$, $\lambda_2 \neq \lambda_n$, y $0 < \tau_m \leq \tau_c$.

Es necesario recordar que dentro del rango de estabilidad de τ , el máximo valor de la componente imaginaria de $W_0(\tau\lambda_i)$ es $\pi/2$. Además, la función paramétrica mostrada en (8) determina el valor de $W_0(h)$, $\forall h \in \mathbb{R}$ [16]. Ahora, teniendo en cuenta la condición presentada en (41), además, que $\text{Im}(W_0(\tau\lambda_n)) = \alpha$, y que como puede concluirse de la **Figura 11** $W_0(\tau_m\lambda_2) \in \mathbb{R}^-$. Entonces, para calcular el retardo que maximiza la velocidad de convergencia τ_m en grafos no dirigidos, se puede proceder como sigue:

$$W_0(\tau_m\lambda_n) = -\alpha \cot \alpha + j\alpha \quad \Rightarrow \quad W_0(\tau_m\lambda_2) = -\alpha \cot \alpha.$$

Por lo tanto, buscando encontrar la expresión $(\tau_m\lambda_n - \tau_m\lambda_2)$ y aplicando la definición

de la función W de Lambert, se tiene:

$$\begin{aligned}\tau_m \lambda_n &= (-\alpha \cot \alpha + j\alpha)e^{(-\alpha \cot \alpha + j\alpha)}, \\ \tau_m \lambda_2 &= (-\alpha \cot \alpha)e^{-\alpha \cot \alpha}.\end{aligned}\tag{42}$$

Resolviendo, se obtiene:

$$\begin{aligned}\tau_m(\lambda_n - \lambda_2) &= (-\alpha \cot \alpha + j\alpha)e^{(-\alpha \cot \alpha + j\alpha)} + (\alpha \cot \alpha)e^{-\alpha \cot \alpha} \\ &= (-\alpha)e^{-\alpha \cot \alpha}(\sin \alpha + \cot \alpha \cos \alpha - \cot \alpha) \\ \tau_m(\lambda_n - \lambda_2) &= (-\alpha)e^{-\alpha \cot \alpha} \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right).\end{aligned}\tag{43}$$

De (42)

$$(-\alpha)e^{-\alpha \cot \alpha} = \tau_m \lambda_2 \tan \alpha.\tag{44}$$

Reemplazando (44) en (43):

$$\begin{aligned}\tau_m(\lambda_n - \lambda_2) &= \tau_m \lambda_2 \tan \alpha \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \\ \lambda_n - \lambda_2 &= \lambda_2 \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} \right) \\ \lambda_n - \lambda_2 &= \lambda_2 \left(\frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} \right) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_n}.\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene que:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right) \Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos[\arccos(\lambda_2/\lambda_n)]}{\sin[\arccos(\lambda_2/\lambda_n)]}.$$

Ahora, aplicando que

$$\cot \alpha = \frac{\frac{\lambda_2}{\lambda_n}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_n}\right)^2}}$$

y definiendo $\sigma = \lambda_2/\lambda_n$, entonces se tiene

$$\cot \alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}}, \quad \alpha = \arccos \sigma. \quad (45)$$

Por lo tanto, reemplazando (45) en (42) se obtiene:

$$\begin{aligned} \tau_m \lambda_2 &= -\frac{\sigma \arccos \sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}} e^{-\frac{\sigma \arccos \sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}}} \\ \tau_m &= -\frac{\arccos \sigma}{\lambda_n \sqrt{1 - \sigma^2}} e^{-\frac{\sigma \arccos \sigma}{\sqrt{1 - \sigma^2}}}, \quad \sigma = \frac{\lambda_2}{\lambda_n}. \end{aligned} \quad (46)$$

La expresión (46) presenta un método analítico que permite calcular el retardo que maximiza la velocidad de convergencia en sistemas de multiagentes con dinámicas de integradores representados por grafos no dirigidos, en función del mínimo valor propio $\lambda_n(-L)$ y el mayor valor propio diferente de cero $\lambda_2(-L)$.

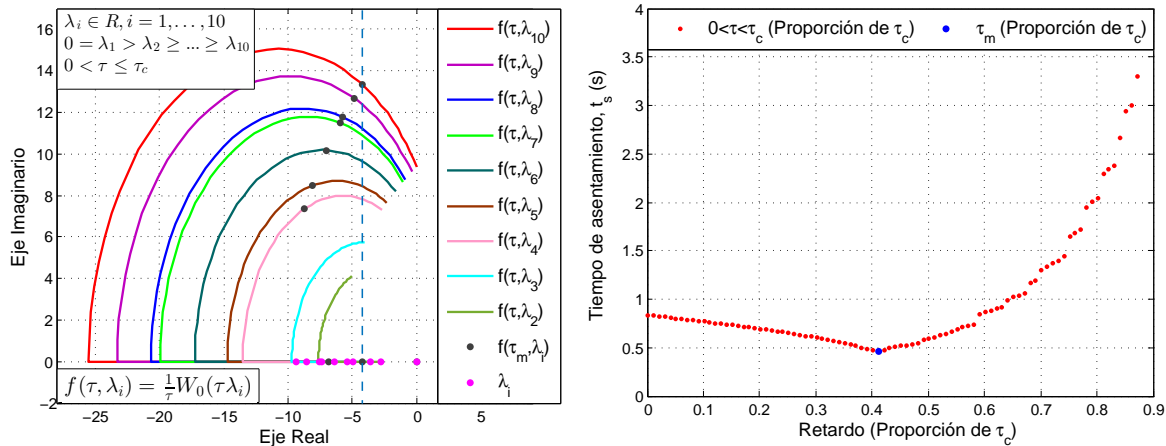
4.2 SIMULACIÓN DE RESULTADOS

Para observar este resultado, en la **Figura 12a** se muestra una simulación correspondiente a un grafo no dirigido de 10 nodos, etiquetado como \mathcal{G}_e . Se puede observar el lugar de las raíces para el grafo ejemplo y la posición de los polos retardados cuando $\tau = \tau_m$ (puntos en negro). Estos valores se grafican a partir del valor de τ_m calculado con la expresión (46), que para este caso es $\tau_m = 0.4114\tau_c \approx 0.0646$, a partir de los valores propios de \mathcal{G}_e , $\lambda_2 \approx -5.1599$ y $\lambda_{10} \approx -10.0$. En la **Figura 12b**, se aprecia la velocidad de convergencia en términos del tiempo de asentamiento t_s medido en segundos, en función del retardo del sistema mostrado como una proporción del retardo marginal de estabilidad. Estas medidas se logran a partir de simulaciones realizadas en MATLAB tomando como tiempo de asentamiento la medida del tiempo en segundos que el estado de los nodos tarda en caer dentro de un rango de variación del 0.5% de valor de convergencia del grafo y variando el retardo en un 1% de τ_c para cada medida. Se puede observar resaltada en azul la medida correspondiente al retardo τ_m , lo que

indica que el valor calculado se ubica cerca a la mayor velocidad de convergencia del grafo con respecto a la variación del retardo de entrada. Hay que recordar, que si bien la expresión (46) representa un método analítico, la ley de control objeto de estudio en este proyecto permite la convergencia del sistema solo de forma asintótica, por lo tanto el tiempo de asentamiento t_s es un valor tomado en un sentido práctico.

Figura 12. Ubicación de las raíces en τ_m para el grafo \mathcal{G}_e y gráfica de la velocidad de convergencia en función del retardo de entrada.

- (a) Ubicación de las raíces en $\tau = \tau_m$ de \mathcal{G}_e . (b) Variación de la velocidad de convergencia de \mathcal{G}_e dentro del rango de estabilidad de τ .



Fuente: Original de esta investigación.

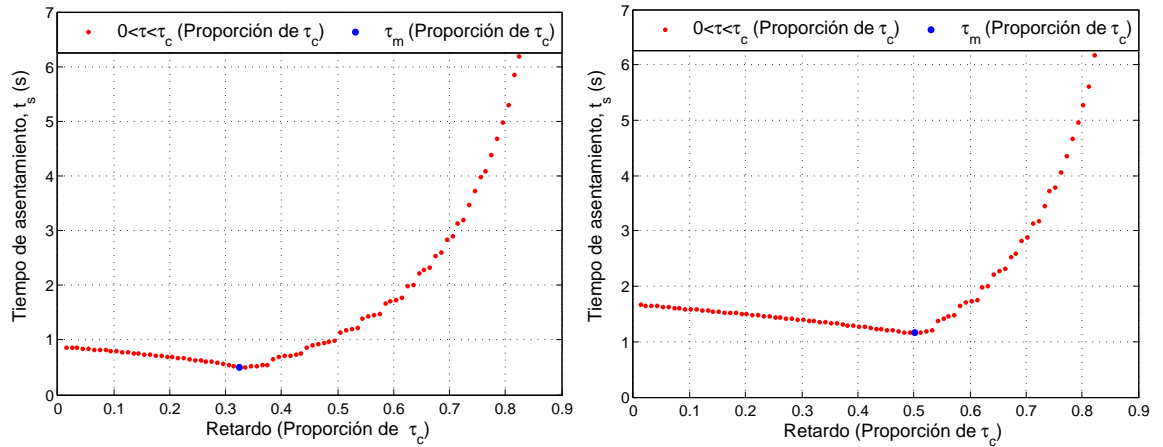
Por otra parte, en la **Figura 12b**, y en la **Figura 13** se puede apreciar una característica presente en las simulaciones realizadas para distintos grafos, en donde la velocidad de convergencia del sistema en función del retardo parece variar en forma lineal hasta τ_m , y posteriormente parece ajustarse a una función exponencial. Esta característica implica que pequeñas variaciones de retardos que sean inferiores a τ_m , producen pequeñas variaciones de la velocidad de convergencia y además velocidades de convergencia mayores que en el caso del sistema sin retardo. Sin embargo, incluso pequeñas variaciones del retardo por encima de τ_m , pueden inducir una disminución considerable de la velocidad de convergencia, por debajo de la que posee el sistema sin retardo. Las simulaciones en grafos

no dirigidos, muestran que este último aspecto es bastante evidente cuando la relación λ_2/λ_n es considerablemente pequeña. Analizar la causa de este comportamiento, representaría un objeto de estudio en proyectos futuros. Adicionalmente, también se observa que al aumentar el número de arcos de una red aleatoria, la proporción de disminución del tiempo de asentamiento t_s para el retardo τ_m , es decir $1 - t_s(\tau = \tau_m)/t_s(\tau = 0)$, también aumenta, mientras que la proporción τ_m/τ_c disminuye.

Figura 13. Variación de la velocidad de convergencia en función del retardo de entrada en grafos no dirigidos.

(a) Velocidad de convergencia en función del retardo τ , ejemplo 2.

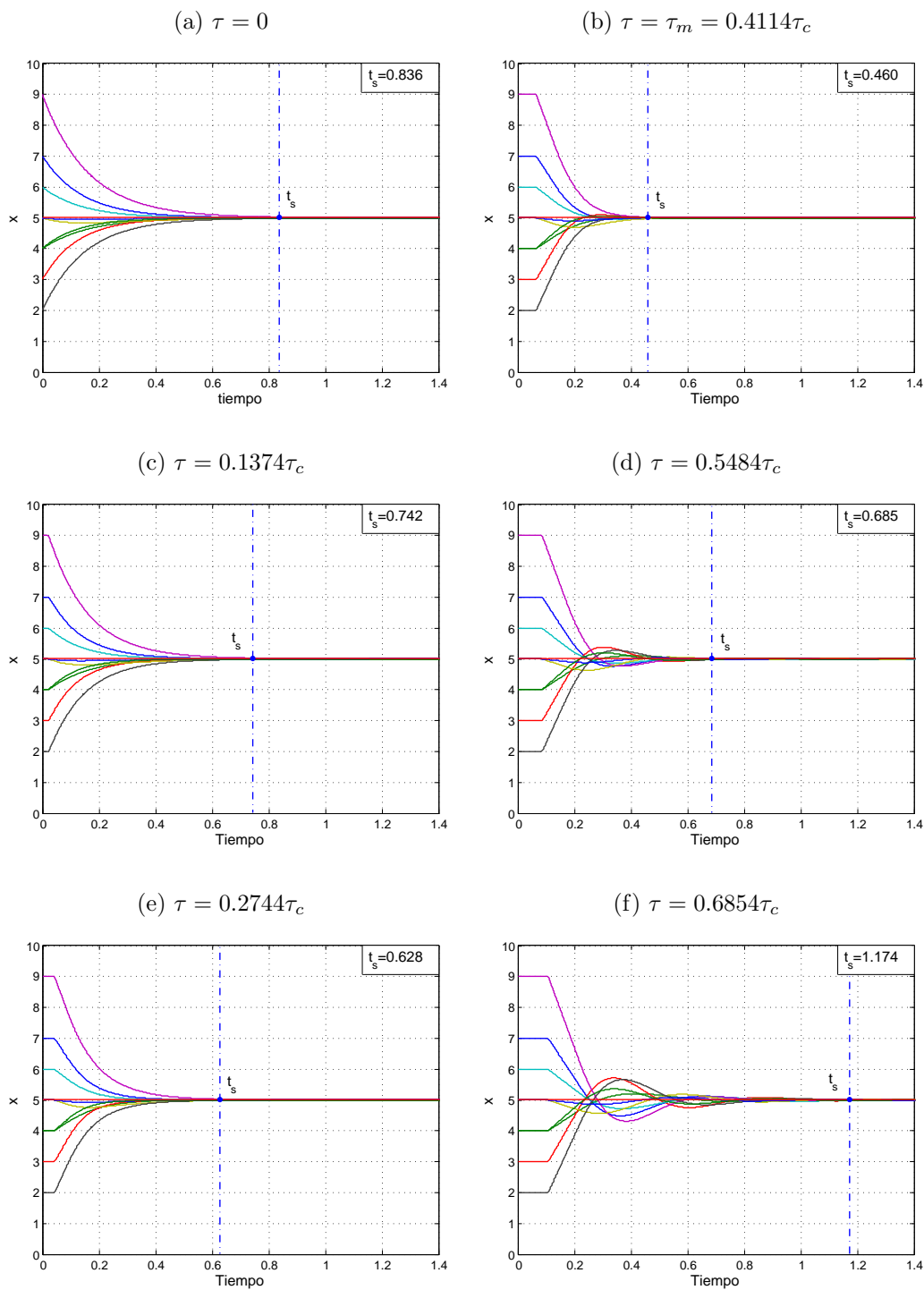
(b) Velocidad de convergencia en función del retardo τ , ejemplo 3.



Fuente: Original de esta investigación.

Además, en la **Figura 14** se puede visualizar el estado de los nodos del grafo \mathcal{G}_e para distintos valores de retardo de entrada. Esta figura muestra visualmente la variación de la velocidad en que converge el grafo ejemplo, contrastando con el valor calculado del retardo que maximiza la velocidad de convergencia τ_m . Es posible notar que el grafo converge a mayor velocidad a medida que aumenta el valor del retardo τ hasta que este se iguala a τ_m . Posteriormente la velocidad de convergencia de \mathcal{G}_e empieza a disminuir. Este comportamiento es acorde al esperado, respaldando el resultado mostrado en (46).

Figura 14. Estado de los nodos del grafo no dirigido \mathcal{G}_e para diversos valores de τ .



Fuente: Original de esta investigación.

5. ANÁLISIS ESTADÍSTICO EN GRAFOS ALEATORIOS

Un aspecto muy importante de los sistemas multiagente, consiste en las características de la red de comunicaciones (topología) que estos usan. La topología de una red define la forma en que los nodos del sistema están interconectados. Como se sabe, las redes complejas describen un gran rango de sistemas en la naturaleza y la sociedad. Ejemplos citados frecuentemente incluyen la célula, una red cuyos enlaces son reacciones químicas, y la internet, una red de routers y computadores conectados por enlaces físicos [17]. Por lo general, las redes complejas se modelan por medio de grafos aleatorios. La ciencia de redes, pretende construir modelos que reproducen las propiedades de redes reales [47]. Dentro de esta ciencia, una herramienta que estudia y modela el comportamiento de redes aleatorias es la teoría de grafos aleatorios, introducida por Paul Erdős y Alfred Rényi, en cuyo honor, a una red puramente aleatoria se le denomina como red de Erdős Rényi.

Originalmente, se define un grafo aleatorio como un conjunto de n nodos conectados por E arcos que son elegidos aleatoriamente de los $n(n-1)/2$ arcos posibles. Una alternativa equivalente de esta definición es el modelo binomial, donde cada par de nodos es conectado con base a una probabilidad p . Debe notarse que la cantidad de arcos mencionada anteriormente hace referencia a grafos no dirigidos. Para el caso de digrafos, la cantidad posible de arcos sería $n(n-1)$. Este tipo de modelos muestran que las redes aleatorias tienen una distancia entre nodos promedio (*average path length*) menor que en redes ordenadas [18]. Otra característica importante, y que resulta en un fenómeno muy común en redes reales, es la que concierne al concepto de *small-world* (mundo pequeño), también llamado “seis grados de separación”. En términos simples, describe el hecho de que a pesar de su a menudo gran tamaño, en la mayoría de la redes hay una relativamente pequeña distancia entre cualquier par de nodos [17]. La distancia entre dos nodos

se define como el número de arcos que forma el camino más corto entre ellos. Adicional a esto, un evento que se observa en muchas redes reales es la formación de “hubs”, es decir un pequeño número de nodos con cantidades de enlaces desde o hacia otros nodos mucho más grandes que el promedio [18]. A esta propiedad se la conoce como *scale-free* (escala libre). Estas observaciones, han provocado el interés de diversos investigadores para desarrollar modelos probabilísticos que capturen propiedades topológicas importantes [48], dando como resultado la formulación de varios modelos para generar grafos aleatorios y obtener propiedades clave de redes reales.

5.1 GRAFOS ALEATORIOS

En esta sección se explican conceptos importantes que permiten caracterizar redes aleatorias complejas. Además, se expone los modelos bajo los cuales se puede construir grafos aleatorios que muestren los fenómenos principales que presentan las redes reales, tales como bajas distancias promedio entre nodos, altos coeficientes de agrupamiento y formación de “hubs”.

5.1.1 Parámetros Básicos. Son valores que caracterizan la topología de una red y desempeñan un papel relevante en el estudio de redes aleatorias.

- **Distribución de Grado.** Este parámetro se refiere a la probabilidad $P(k)$, de que un nodo i seleccionado aleatoriamente tenga grado k , donde $k = 1, \dots, d_{\max}$, y d_{\max} es el máximo grado de salida (digrafos). De una forma equivalente, describe la proporción de nodos con grado k en una red de n nodos.

$$P(k) = \frac{\text{Número de nodos con grado } k}{n}.$$

- **Distancia promedio entre nodos.** La distancia entre un par de nodos i y j , d_{ij} , se define como el número de arcos que hay en el menor camino entre ellos (*shortest path*),

así que la distancia promedio ℓ (*average path length*) es simplemente el promedio de las distancias entre nodos. Con respecto a este parámetro, una diferencia importante a resaltarse entre grafos no dirigidos y digrafos, es que en estos últimos puede darse el caso de que no exista un camino dirigido entre algún par de nodos incluso cuando el sistema converge al consenso. Esto representa una distancia infinita entre estos nodos, y por ende una distancia promedio infinita. La razón de esta propiedad de los digrafos es que en términos estructurales, la condición necesaria y suficiente para la convergencia solo precisa que la red posea un nodo raíz desde el que exista al menos un camino dirigido hacia cualquier otro nodo de la red (árbol de expansión dirigido). Esto significa que d_{ij} puede ser diferente de d_{ji} , y alguno de los dos puede ser infinito, como por ejemplo en el caso de digrafos seguidores de líder.

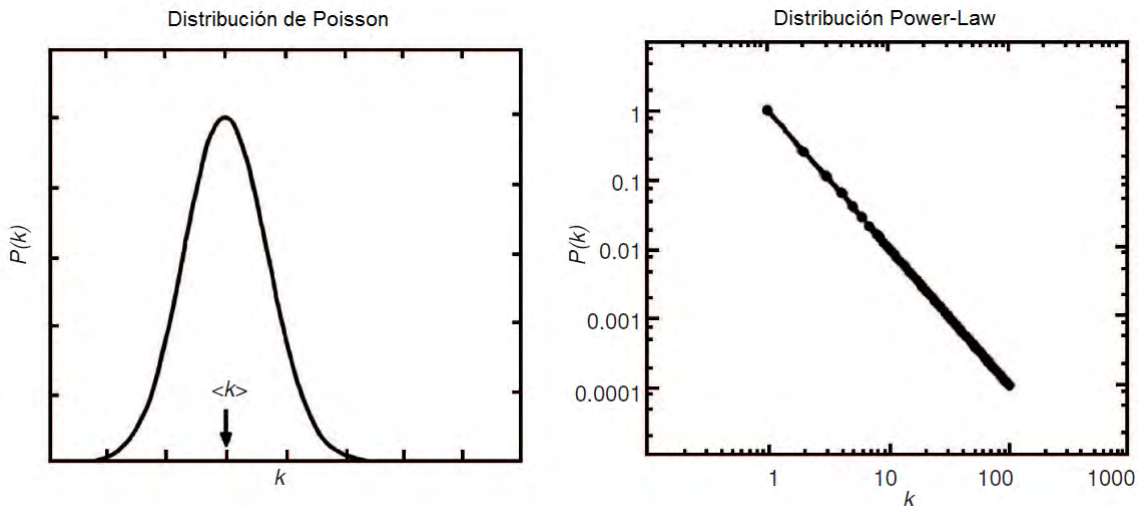
- **Coefficiente de agrupamiento.** De forma local, el coeficiente de agrupamiento (*clustering*) C_i del nodo i describe la probabilidad de que cualquier nodo vecino $j \in \mathcal{N}_i$, sea adyacente a los otros vecinos del nodo i . Entonces, el coeficiente de agrupamiento global de una red C , es el promedio de los coeficientes de agrupamiento de cada nodo. El valor de C_i , se puede obtener calculando la razón entre el número de arcos E_i que existen entre los nodos vecinos de i y la totalidad de los posibles arcos entre los nodos vecinos de i , $deg(i)[deg(i) - 1]$ (digrafos).

$$C_i = \frac{E_i}{deg(i)[deg(i) - 1]}.$$

5.1.2 Algoritmos. En la literatura existen varios modelos que permiten reproducir las principales características de redes complejas. Dentro de estos se destacan tres en particular que han adquirido gran importancia y popularidad, y han sido tratados y analizados en una gran cantidad de artículos e investigaciones.

5.1.2.1 Redes Aleatorias Erdős-Rényi. Para este proyecto se utiliza la definición $\mathcal{G}(n, E)$, donde \mathcal{G} es una red de n nodos interconectados aleatoriamente con E enlaces. En este modelo el número de enlaces es un valor definido y su grado promedio es $\langle k \rangle = p(n - 1) \cong pn$ [49]. Para este tipo de redes, la mayoría de los nodos tiene el mismo grado, que es cercano al grado promedio de la red $\langle k \rangle$, y la distribución de grado se aproxima a una distribución de Poisson (**Figura 15**) con pico en $P(\langle k \rangle)$, en la medida en que $n \gg \langle k \rangle$ [47]. Esto implica que la probabilidad decae exponencialmente cuando el valor k se aleja del grado promedio $\langle k \rangle$.

Figura 15. Distribución de Poisson y Power-Law.



Fuente: X. F. Wang y G. Chen, “Complex networks: Small-World, Scale-Free and beyond”, 2003 [49].

5.1.2.2 Redes Aleatorias Small-World. Muchas de las redes reales presentan topologías tipo small-world, lo que implica (igual que en grafos aleatorios), que su diámetro (la máxima del total de las distancias entre los nodos) aumenta de forma logarítmica con el número de nodos [50]. Esto quiere decir que aún para redes de gran

tamaño, las distancias entre nodos son pequeñas. Por otra parte, poseen grandes valores de coeficiente de agrupamiento, mucho mayores que en grafos puramente aleatorios [50]. Para analizar estas características, se hace uso del modelo de Watts y Strogatz, que se construye interpolando grafos tipo anillo entrecruzado (*ring lattice*) que poseen altos coeficientes de agrupamiento y grafos aleatorios donde se presentan bajas distancias entre nodos [47]. El modelo se basa en los sistemas sociales, donde la mayoría de la gente se relaciona con personas a distancia cercana (vecinos, colegas, amigos de amigos), pero también poseen algunos amigos que se encuentran a grandes distancias (en otros países, viejos conocidos en otros lugares) [17]. El algoritmo empieza creando una grafo simétrico del tipo anillo entrecruzado, que consiste en n nodos dispuestos en forma de anillo, donde cada nodo es adyacente a los $N/2$ nodos contiguos de un lado y a los $N/2$ nodos contiguos del otro. N es un número par. Después, se redirecciona cada arco con una probabilidad p , excluyendo enlaces a sí mismos y arcos duplicados. Variando el valor de p , puede notarse que solo se requiere redireccionar un bajo número de arcos para obtener bajas distancias entre nodos [18]. El modelo small-world puede verse como una red homogénea, en la cual todos los nodos tienen aproximadamente el mismo número de arcos [49]. En este aspecto, el modelo de Watts-Strogatz es similar al de Erdős-Rényi, donde la distribución de grado tiene el pico en $\langle k \rangle = N$ y disminuye para grados mayores y menores a este [18]. Además, cada nodo posee un grado no menor a $N/2$.

5.1.2.3 Redes Aleatorias Scale-Free. Como ha sido observado por los investigadores, muchas redes complejas son de tipo *scale-free*, lo que significa que su distribución de conectividad presenta una distribución *power-law* (**Figura 15**) que es independiente de la escala de la red [49]. Las redes *scale-free* son de naturaleza no homogénea, donde la mayoría de los nodos poseen muy pocos enlaces mientras unos pocos nodos poseen muchos enlaces, a diferencia de grafos aleatorios ER y modelos SW, cuya distribución de conectividad es homogénea, con pico en $\langle k \rangle$ y decaimiento ex-

ponencial [49]. Resultados numéricos indican que en comparación con grafos puramente aleatorios con el mismo tamaño y el mismo promedio de grado, la distancia promedio en modelos *scale-free* es un poco más baja, pero su coeficiente de agrupamiento mucho mayor [49]. Para analizar estas características se utiliza el modelo de Barabási y Albert. Mientras el objetivo al elaborar modelos es construir un grafo que presenten las características topológicas correctas, el modelamiento de redes *scale-free* se enfoca en capturar las dinámicas de estas redes [17]. El modelo se elabora tomando en cuenta dos grandes atributos de la mayoría de las redes reales. Primero, estas son abiertas y están dinámicamente formadas por la continua adición de nuevos nodos. Segundo, la mayoría de las redes reales exhiben un acoplamiento de nuevos nodos basado en preferencia (*preferential attachment*), así que la probabilidad de conectarse a un nodo depende del grado que este posea. El algoritmo de Barabási y Albert es el siguiente:

- (1) Crecimiento: Se inicia con un bajo número de nodos m_0 ; en cada paso se adiciona un nuevo nodo, que se enlaza a $m \leq m_0$ nodos ya existentes.
- (2) Acoplamiento preferencial: Para elegir los nodos a los que se conecta el nuevo nodo, se asume que la probabilidad Π , de que el nuevo nodo, se conecte al nodo i depende del grado de i , $deg(i)$, de forma que

$$\Pi(i) = \frac{deg(i)}{\sum_j deg(j)}.$$

5.2 DESARROLLO ESTADÍSTICO

En esta fase del proyecto se analiza el comportamiento de redes aleatorias de integradores representadas por digrafos, frente a retardos temporales de entrada, para distintas topologías que presentan características importantes de redes reales. Para llevar a cabo este objetivo se utilizan los siguientes modelos: el primer modelo de Erdős-Rényi, el modelo de Watts y Strogatz, y el modelo de Barabási y Albert, para representar, respectivamente, redes aleatorias, redes small-world y redes scale-free.

Aunque inicialmente los modelos y conceptos expuestos en la sección anterior fueron desarrollados para redes no dirigidas, es posible usarlos en redes dirigidas bajo pequeñas modificaciones, enfocándose en abarcar la naturaleza direccional de los digrafos. Por ejemplo, debe recordarse que el total de arcos posibles de un digrafo de n nodos es $n(n - 1)$. Además, en este proyecto, tanto el grado como la distribución de grado y el coeficiente de agrupamiento se calculan con respecto al grado de salida.

5.2.1 Construcción de Digrafos Aleatorios. Para generar digrafos aleatorios se hace uso de los modelos expuestos en la sección **5.1.2**, basándose tanto en las definiciones de cada modelo [17], como también en algoritmos presentados en [18]. La construcción de los digrafos aleatorios formulados a partir de los modelos elegidos se desarrolla en el entorno de Matlab, fijando como resultado la matriz de adyacencia A que describe al digrafo. Con respecto a la elaboración de la matriz de adyacencia, los arcos del triángulo superior de A se toman como enlaces diferentes a los del triángulo inferior, acorde a la naturaleza dirigida que poseen los digrafos. Dichas matrices, se generan de forma que se pueda fijar el número de arcos resultante.

5.2.1.1 Digrafos Aleatorios con el Modelo Erdős-Rényi. Los digrafos ER se construyen usando la definición $\mathcal{G}(n, E)$ del modelo. En el código del algoritmo, se toma como parámetros de entrada el número de nodos n y la probabilidad p , donde el número de arcos E se calcula con: $E = pn(n - 1)$. La ubicación de los E arcos en la matriz de adyacencia A se realiza de forma aleatoria.

5.2.1.2 Digrafos Small-World con el Modelo Watts-Strogatz. Los parámetros de entrada en esta función son n , k y p . Se inicia con un anillo entrecruzado simétrico formado por n nodos y kn (producto) arcos, interconectados de la forma explicada en **5.1.2.2**. Para cada nodo $i = 1, \dots, n$, se verifica los k arcos iniciales desde y hacia sus nodos vecinos. Para cada nodo vecino, se realiza un redireccionamiento tanto del arco

de entrada como el de salida enlazando i con otro par de nodos diferentes entre sí y seleccionados de forma aleatoria, basando la decisión de redireccionamiento bajo una probabilidad p . En el proceso de selección de los nuevos nodos de enlace se descarta el nodo i y se mantiene la dirección anterior del arco. El número de arcos del digrafo resultante es $E = k n$.

5.2.1.3 Digrafos Scale-Free con el Modelo Barabási-Albert. Para este caso, al igual que en [18], se inicia con un grafo completo de tamaño m_0 como semilla, al que se la adiciona secuencialmente $n - m_0$ nodos, en donde n identifica el tamaño de la red al finalizar el proceso. Cada nuevo nodo adicionado i se enlaza al sistema en crecimiento a través de m arcos hacia i y m arcos desde i , con $i = m_0 + 1, \dots, n$. La generación de los $2m$ arcos que acoplan el nodo i con el sistema se realiza en m pasos. En cada paso se selecciona de los nodos ya existentes un par de nodos j y h , diferentes entre sí, y se crea un par de arcos (j, i) y (i, h) . La probabilidad de elección de los nodos j y h es $\Pi(j)$ y $\Pi(h)$ respectivamente, y se calcula de la siguiente forma:

$$\Pi(j) = \frac{deg_{out}^t(j)}{E^t}, \quad \Pi(h) = \frac{deg_{in}^t(h)}{E^t},$$

donde E identifica el número de arcos que posee el sistema y el superíndice t indica que el valor de los parámetros E , deg_{out} y deg_{in} , cambia conforme el sistema evoluciona, y se toma del momento previo en que se adiciona los nuevos arcos (j, i) y (i, h) . En este algoritmo, el número de arcos total (al finalizar el proceso de evolución) E_T está dado por $E_T = m_0(m_0 - 1) + 2(n - m_0)m$. Para facilitar el proceso al fijar el número de enlaces de la red, se puede elegir $m = (m_0 - 1)/2$. De esta forma se obtiene $E_T = (m_0 - 1)n$, siendo m_0 un número impar.

5.2.2 Proceso para la Obtención de Resultados Estadísticos. La metodología principal a seguir consiste en generar digrafos aleatorios y calcular los parámetros necesarios que permitan contrastar el comportamiento estadístico de las topologías seleccionadas. El análisis se enfoca en la tolerancia de cada topología frente a los retardos de

entrada para sistemas cuyos nodos obedecen la ley de control sujeta a retardos mostrada por (4). Los cálculos se limitan a digrafos que cumplen con el criterio de convergencia para redes de integradores. Los parámetros a tener en cuenta para ser analizados son: el retardo marginal de estabilidad τ_c , la distancia promedio de la red ℓ , y el coeficiente de agrupamiento C .

Con respecto a estos parámetros, el valor de τ_c se calcula a partir de (20). Para la distancia promedio se hace uso del comando “*graphallshortestpaths(A)*” en Matlab, donde A es la matriz de adyacencia del digrafo expresada en forma dispersa. Dicho comando se encuentra incluido dentro del toolbox *Bioinformatics* y puede usarse tanto para grafos dirigidos como para no dirigidos. Por último, C representa el coeficiente de agrupamiento de salida, el cual se obtiene usando la expresión (47) [50], que permite calcular C_i para cada nodo i .

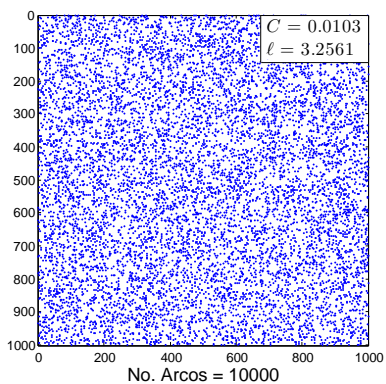
$$C_i = \frac{(A^2 A^\top)_{ii}}{\text{deg}_{out}(i)[\text{deg}_{out}(i) - 1]}, \quad (47)$$

$$C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n C_i.$$

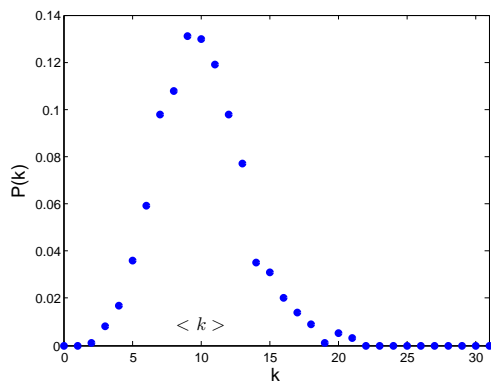
En la verificación de los algoritmos desarrollados en **5.2.1** se efectuaron diversos tipos de pruebas construyendo redes con varias configuraciones de cada algoritmo. Entre estas, se presentan los resultados obtenidos para redes de 1000 nodos con 10000 arcos en cada modelo, lo que implica que las tres redes poseen un grado promedio $\langle k \rangle = 10$. Las configuraciones se definen de forma que se pueda obtener tres grafos que posean un árbol de expansión dirigido, y por tanto cumplan con el criterio de convergencia necesario en las redes bajo estudio. En el caso de ER, se usa una probabilidad $p = 0.01001$. La red SF se genera empezando con un grafo semilla de $m_0 = 11$ nodos, con adición de $m = 5$ arcos de entrada y m arcos de salida en cada paso de evolución. Para SW se utiliza $k = 10$ y una probabilidad de redireccionamiento $p = 0.1$. La **Figura 16** muestra las gráficas de dispersión y distribución de grado para redes generadas bajo estas configuraciones.

Figura 16. Gráficas de dispersión y distribución de grado en digrafos generados por los algoritmos en 5.2.1.

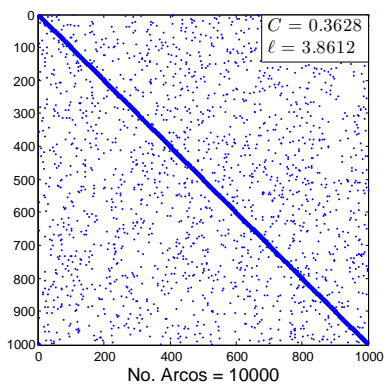
(a) Dispersión de una red tipo ER



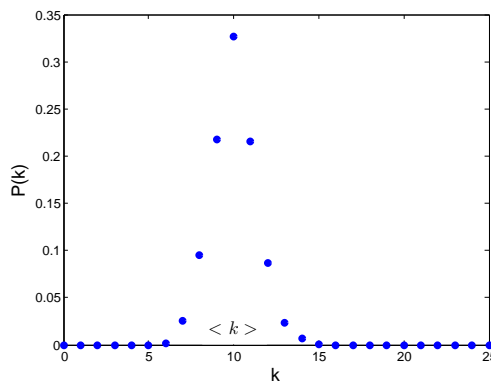
(b) Distribución de grado red ER



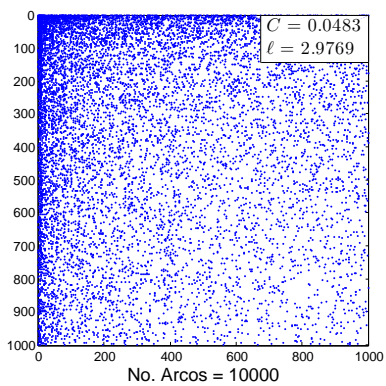
(c) Dispersión de una red tipo SW



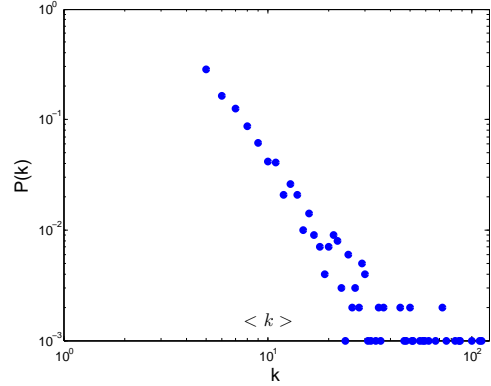
(d) Distribución de grado red SW



(e) Dispersión de una red tipo SF



(f) Distribución de grado red SF



Fuente: Original de esta investigación.

Posteriormente, el análisis estadístico se plantea obteniendo los parámetros seleccionados (τ_c , ℓ y C) para distintas configuraciones de nodos y arcos, y se organiza analizando sobre el tamaño de la red y la cantidad de enlaces de la siguiente forma:

Tamaño de red: Se computan los parámetros en cada una de las tres topologías sobre distintos tamaños de red. Para este propósito, se selecciona redes con las siguientes cantidades de nodos: 50, 75, 100, 250, 500, 750 y 1000. Para cada tamaño se fija a un mismo valor el número de arcos, de esa forma se asegura que el grado promedio sea igual en las tres topologías. En cada configuración de nodos se mantiene aproximadamente el mismo porcentaje de arcos con respecto a la cantidad máxima, $n(n-1)$. Experimentalmente se establece que debe ser superior a un 7%, con el propósito de que en las redes que poseen bajas cantidades de nodos, y que se generan con el modelo de Erdős-Renyí, se pueda obtener una tasa suficientemente alta de grafos que converjan al consenso. Por este motivo, se elige un porcentaje de arcos del 8%.

Cantidad de enlaces: Se calculan los parámetros de estudio en redes de 1000 nodos, bajo las siguientes cantidades de arcos: 20000, 30000, 40000, 50000, 60000, 70000 y 80000.

Con respecto al porcentaje de redireccionamiento utilizado en el algoritmo para redes SW se elige un $p = 0.1$, ya que experimentalmente se observa que produce una relación adecuada entre bajos valores de ℓ y altos coeficientes de agrupamiento dentro del rango de configuraciones de las redes, en comparación con los otros algoritmos. La **Tabla 1** resume los valores de nodos y arcos de las redes generadas para la elaboración de datos estadísticos.

Una variable importante para garantizar la validez estadística de las simulaciones de Monte Carlo es el número de redes de prueba de cada tipo (muestras). Para obtener este valor se obtuvo el promedio y la desviación estándar de los parámetros de las redes y se analizó para cuántas muestras este valor de variación se estabiliza. Con base en

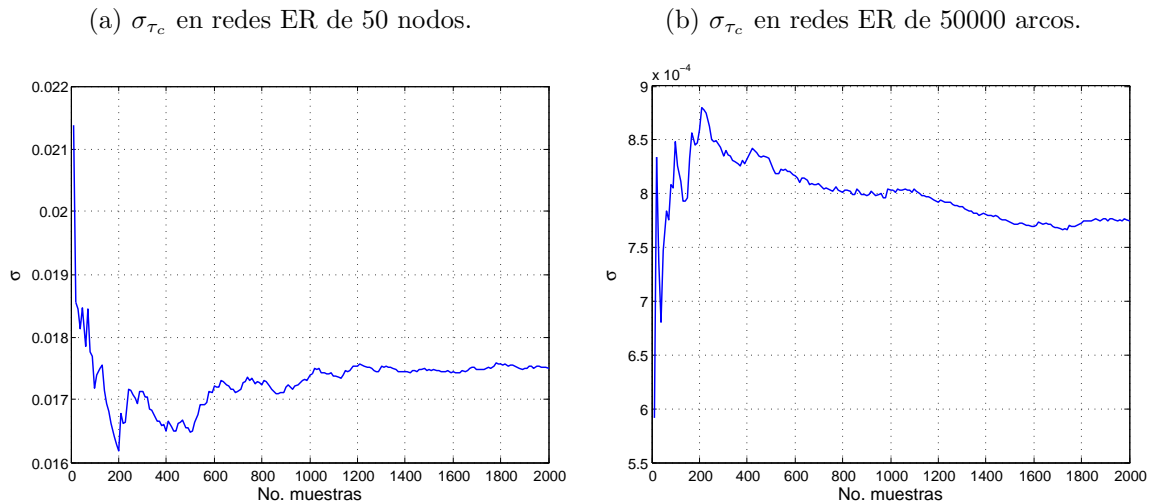
los resultados, se determina que 2000 es una cantidad de generaciones adecuada para cada configuración. El resultado puede apreciarse en la **Figura 17**, donde se observa el comportamiento de la desviación estándar con respecto al número de muestras usado en dos de los casos de estudio.

Tabla 1. Configuraciones del tamaño de la red y el número de arcos para la generación de datos estadísticos.

Tamaño de red							
Porcentaje de enlaces en cada configuración de aprox. 8% del total $n(n - 1)$.							
No. Arcos	200	450	800	5000	20000	45000	80000
No. Nodos	50	75	100	250	500	750	1000
Cantidad de enlaces							
Tamaño de la red constante de 1000 nodos.							
Porcentaje de enlaces (%)	2	3	4	5	6	7	8
No. Arcos	20000	30000	40000	50000	60000	70000	80000

Fuente: Original de esta investigación.

Figura 17. Desviación estándar de τ_c versus número de muestras.



Fuente: Original de esta investigación.

5.3 RESULTADOS ESTADÍSTICOS Y SIMULACIONES

Los resultados finales se obtienen calculando el promedio y desviación estándar de los parámetros de estudio. Para la visualización de resultados, en cada parámetro se muestra los valores del promedio y de la razón de la desviación estándar con respecto al promedio. En la **Tabla 2** se indica los datos procesados para la variación de nodos, y en la **Tabla 3** los que corresponden a la variación de la cantidad de enlaces.

Por otra parte, un suceso que se presentó en el desarrollo estadístico es que varias de las redes ER con tamaños de 50, 75 y 100 nodos, producían valores de $\ell = \infty$. Esto sucede por las razones expuestas en la sección **5.1.1**. Para estos casos, ya que ese valor no presenta utilidad y no es un indicativo preciso de conectividad en digrafos a diferencia de grafos no dirigidos, se opta por descartar esos valores y calcular ℓ a partir de las distancias entre nodos con valor finito. Como información adicional, a menor tamaño de red, se observa que la tasa de ocurrencia de este suceso es considerablemente alta.

Analizando los resultados obtenidos en la ejecución de este objetivo, se pueden presentar varias conclusiones. Para empezar, que de todas las configuraciones realizadas, la topología que muestra el comportamiento más robusto frente a retardos temporales de entrada es small-world. Sin embargo, también puede observarse que las redes ER permiten valores de retardo que aunque inferiores, presentan magnitudes similares a los soportados por redes SW. En redes SF en cambio, se evidencia una clara disminución en la magnitud de los retardos de entrada soportados en comparación con topologías ER y SW. En la **Figura 18**, se muestran los resultados estadísticos del retardo marginal de estabilidad y la distancia promedio entre nodos, para las redes bajo estudio.

Por otra parte, al analizar los datos obtenidos, no parece haber una afectación directa del coeficiente de agrupamiento con respecto a los resultados encontrados para redes ER y SW. Esto teniendo en cuenta que, a pesar de que \bar{C} aumenta en redes SW el $\bar{\tau}_c$ disminuye. Además como se aprecia en la **Figura 18a** y la **Figura 18b**, las curvas que

Tabla 2. Resultados estadísticos variando tamaño de la red.

No. Arcos	No. Nodos	$\bar{\tau}_c$			$\sigma_{\tau_c}/\bar{\tau}_c$		
		ER	SW	SF	ER	SW	SF
200	50	0.17515	0.21293	0.08564	0.09995	0.04414	0.14604
450	75	0.12666	0.15546	0.05709	0.08882	0.03962	0.11703
800	100	0.10046	0.12348	0.04339	0.08215	0.03413	0.09962
5000	250	0.04759	0.05709	0.01812	0.05521	0.02085	0.05941
20000	500	0.02636	0.03076	0.00946	0.04062	0.01206	0.03986
45000	750	0.01854	0.02114	0.00645	0.03473	0.00708	0.03280
80000	1000	0.01440	0.01610	0.00492	0.03035	0.00386	0.02695
No. Arcos	No. Nodos	$\bar{\ell}$			$\sigma_{\ell}/\bar{\ell}$		
		ER	SW	SF	ER	SW	SF
200	50	2.85420	3.27531	2.61217	0.02126	0.04503	0.02056
450	75	2.54481	2.89335	2.43095	0.00767	0.02377	0.01041
800	100	2.40270	2.70845	2.33908	0.00411	0.01590	0.00638
5000	250	2.09576	2.36863	2.10738	0.00100	0.00458	0.00255
20000	500	1.95298	2.16727	1.97921	0.00029	0.00268	0.00086
45000	750	1.92477	2.05571	1.94029	0.00008	0.00160	0.00032
80000	1000	1.91949	1.99394	1.92694	0.00002	0.00091	0.00013
No. Arcos	No. Nodos	\bar{C}			σ_C/\bar{C}		
		ER	SW	SF	ER	SW	SF
200	50	0.07560	0.29286	0.23766	0.20139	0.14771	0.20087
450	75	0.08019	0.34613	0.22457	0.10177	0.08841	0.12147
800	100	0.08065	0.36746	0.21841	0.05926	0.06588	0.08908
5000	250	0.08031	0.39918	0.20562	0.01224	0.02634	0.03267
20000	500	0.08016	0.40854	0.20157	0.00426	0.01302	0.01620
45000	750	0.08011	0.41157	0.20025	0.00220	0.00867	0.01081
80000	1000	0.08008	0.41263	0.19964	0.00144	0.00650	0.00804

Fuente: Original de esta investigación.

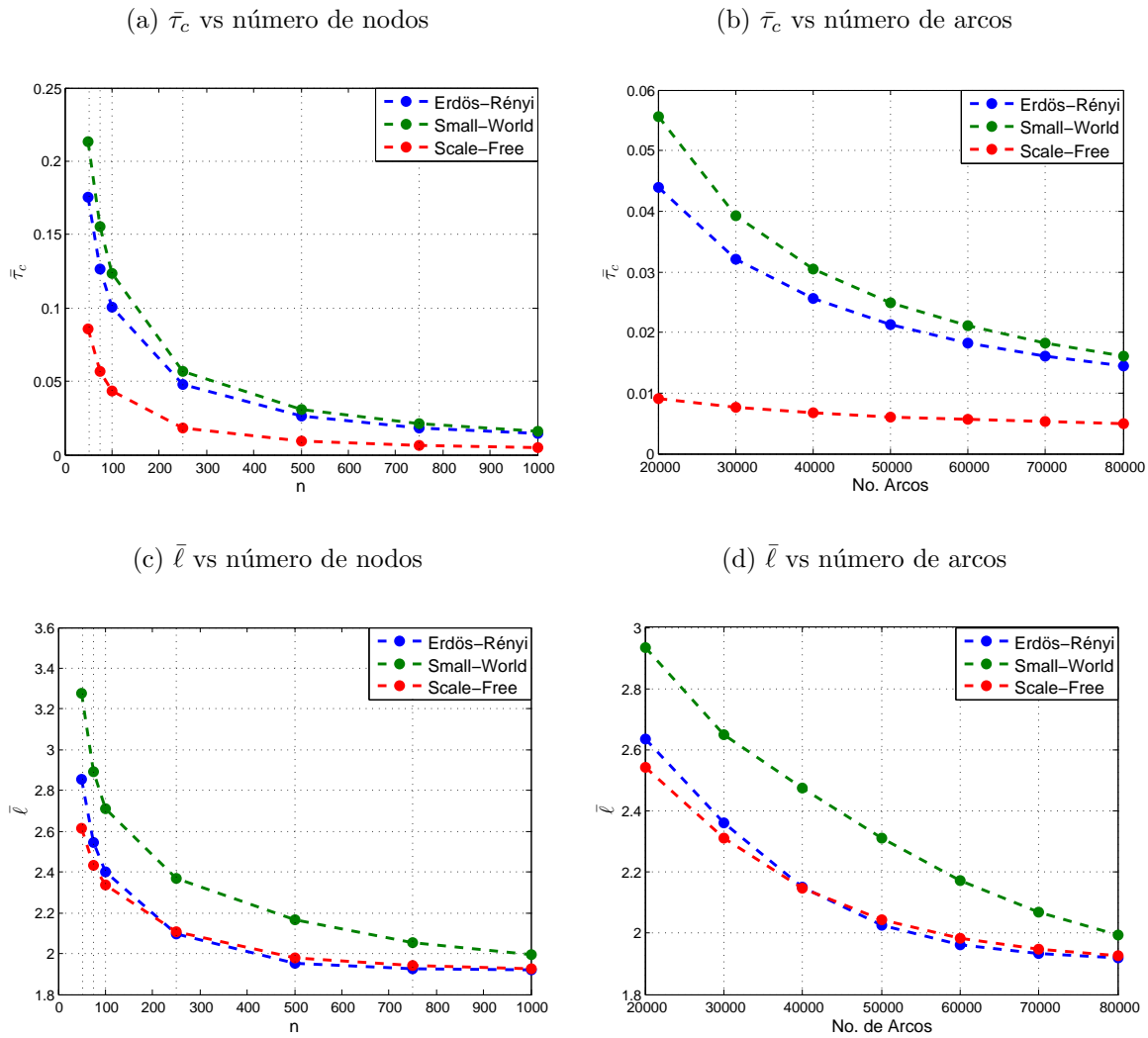
Tabla 3. Resultados estadísticos variando la cantidad de enlaces.

No. Arcos	No. Nodos	$\bar{\tau}_c$			$\sigma_{\tau_c}/\bar{\tau}_c$		
		ER	SW	SF	ER	SW	SF
20000	1000	0.04399	0.05563	0.00905	0.04922	0.02230	0.06767
30000	1000	0.03212	0.03933	0.00760	0.04361	0.01759	0.05023
40000	1000	0.02558	0.03052	0.00668	0.03826	0.01325	0.04262
50000	1000	0.02129	0.02494	0.00606	0.03636	0.01024	0.03704
60000	1000	0.01832	0.02109	0.00560	0.03308	0.00743	0.03236
70000	1000	0.01609	0.01826	0.00522	0.03177	0.00531	0.03097
80000	1000	0.01439	0.01609	0.00492	0.02928	0.00449	0.02695
No. Arcos	No. Nodos	$\bar{\ell}$			$\sigma_{\ell}/\bar{\ell}$		
		ER	SW	SF	ER	SW	SF
20000	1000	2.63637	2.93440	2.54262	0.00021	0.00264	0.00174
30000	1000	2.36180	2.65010	2.30927	0.00025	0.00132	0.00155
40000	1000	2.15133	2.47375	2.14720	0.00026	0.00161	0.00113
50000	1000	2.02564	2.30956	2.04531	0.00020	0.00174	0.00077
60000	1000	1.96350	2.17196	1.98482	0.00012	0.00164	0.00043
70000	1000	1.93483	2.06713	1.94907	0.00006	0.00131	0.00025
80000	1000	1.91949	1.99401	1.92694	0.00002	0.00093	0.00013
No. Arcos	No. Nodos	\bar{C}			σ_C/\bar{C}		
		ER	SW	SF	ER	SW	SF
20000	1000	0.02001	0.38509	0.07530	0.01260	0.01433	0.03135
30000	1000	0.03003	0.39338	0.10015	0.00656	0.01141	0.02068
40000	1000	0.04004	0.39869	0.12262	0.00414	0.00993	0.01567
50000	1000	0.05005	0.40285	0.14355	0.00294	0.00862	0.01317
60000	1000	0.06006	0.40649	0.16311	0.00222	0.00793	0.01060
70000	1000	0.07007	0.40959	0.18190	0.00178	0.00730	0.00926
80000	1000	0.08008	0.41267	0.19964	0.00140	0.00656	0.00804

Fuente: Original de esta investigación.

muestran la variación del promedio del retardo crítico presentan una forma muy similar entre sí para las tres topologías. Con base en estas observaciones, puede inferirse que la conclusión principal para estos resultados es que las topologías con una distribución de grado homogénea (ER, SW) pueden soportar retardos de entrada con magnitudes apreciablemente mayores, en comparación con redes de distribución de grado no homogénea

Figura 18. Promedio del retardo crítico ($\bar{\tau}_c$) y de la distancia promedio entre nodos ($\bar{\ell}$).

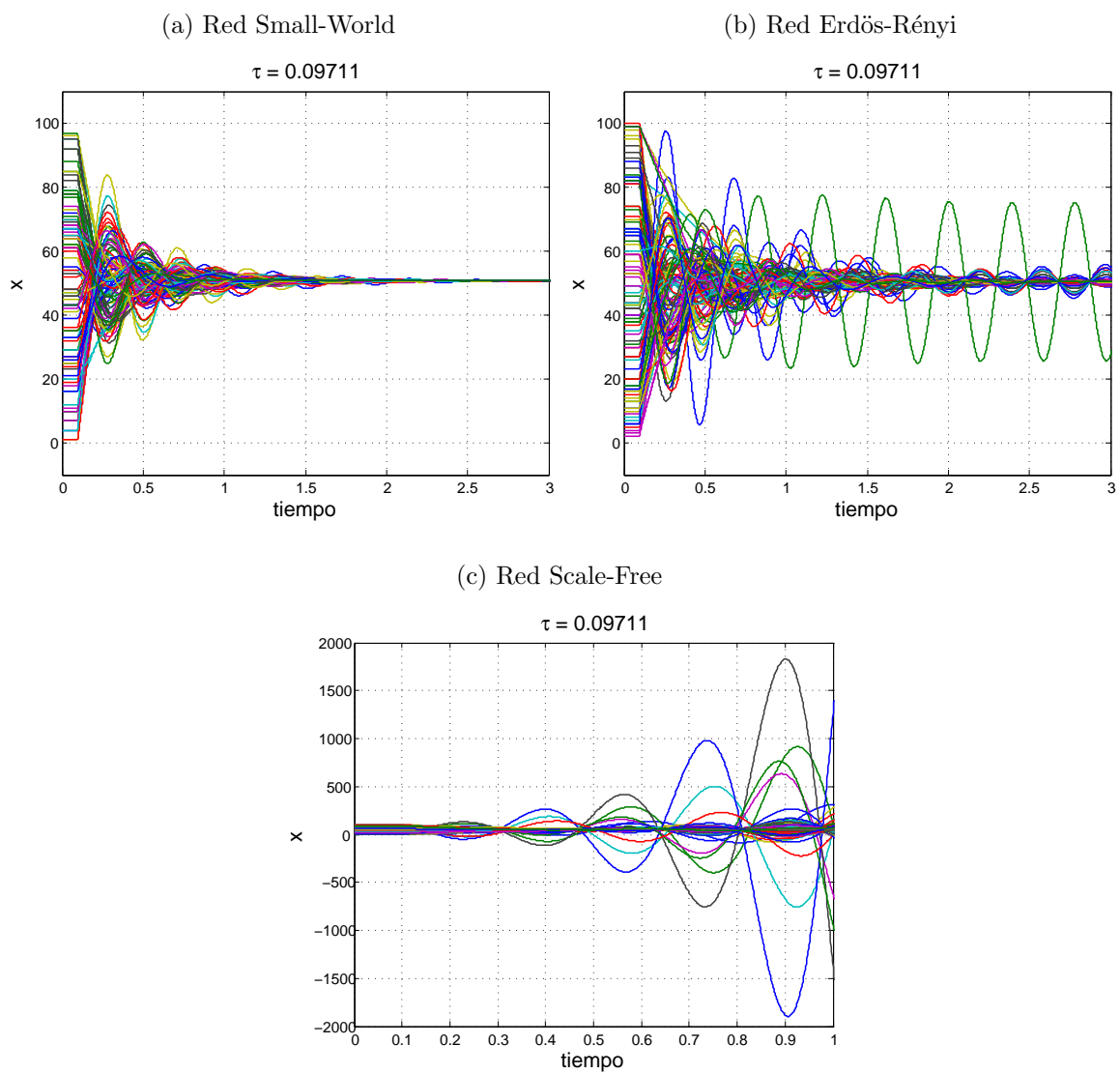


Fuente: Original de esta investigación.

(SF). Por otra parte, llama la atención con respecto a las gráficas de la **Figura 18**, la similitud que muestran las curvas de $\bar{\tau}_c$ (**Figura 18a**, **Figura 18b**) en comparación con las curvas de $\bar{\ell}$ (**Figura 18c**, **Figura 18d**), lo que podría suponer alguna relación entre el retardo crítico τ_c que pueda soportar una red y la distancia promedio ℓ de esta.

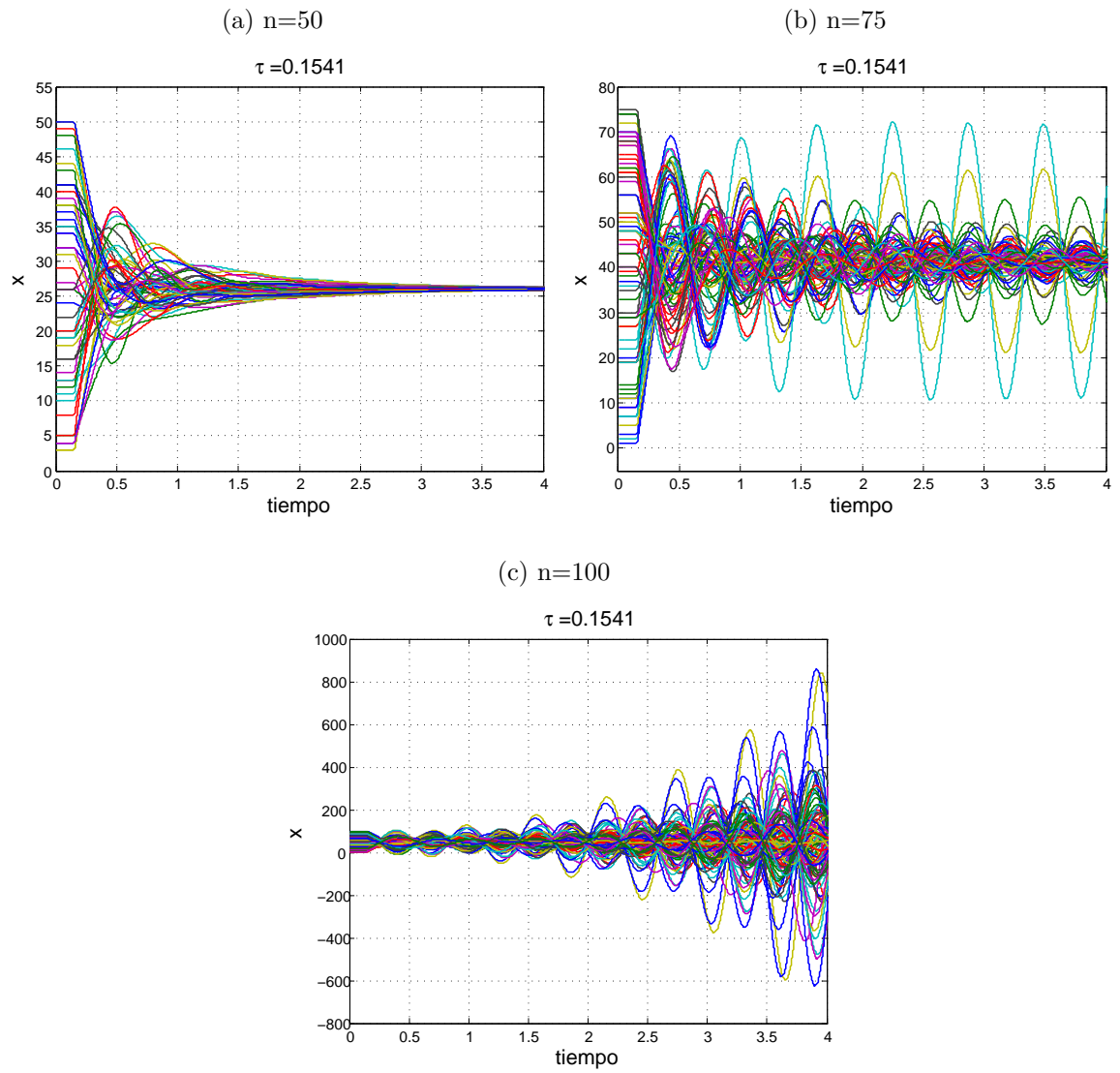
En las siguientes figuras, se puede apreciar diferentes simulaciones que permiten ilustrar los resultados obtenidos. En la **Figura 19** se muestran simulaciones de las tres topologías de estudio en redes de 100 nodos para un retardo $\tau \approx 0.09711$, que corresponde al τ_c de la red ER ilustrada por la **Figura 19b**. Se observa que para ese valor de retardo, que equivale a $0.967\bar{\tau}_c$, la red SW converge, la red ER presenta una estabilidad marginal, y la red SF diverge, conforme los resultados indicados en la **Tabla 2**. Las figuras subsiguientes ilustran tres escenarios en donde se contrasta los resultados en cada topología simulando redes de 50, 75 y 100 nodos. En cada escenario, el retardo usado se determina como el retardo marginal de la red de 75 nodos. De los resultados obtenidos en el análisis estadístico, se sabe que en cada topología las redes de 100 nodos presentan una mayor robustez frente a los retardos de entrada, seguidas de las de 75 nodos, y por último las de 50 nodos. Con base en el anterior procedimiento se muestran simulaciones para: redes small-world con un retardo $\tau = 0.1541 = 0.991\bar{\tau}_c$ en la **Figura 20**, redes Erdős-Rényi con un retardo $\tau = 0.12031 = 0.95\bar{\tau}_c$ en la **Figura 21**, y redes scale-free con un retardo $\tau = 0.05719 = 1.002\bar{\tau}_c$ en la **Figura 22**.

Figura 19. Simulaciones en redes de 100 nodos con topologías ER, SW y SF para un retardo $\tau = 0.09711$.



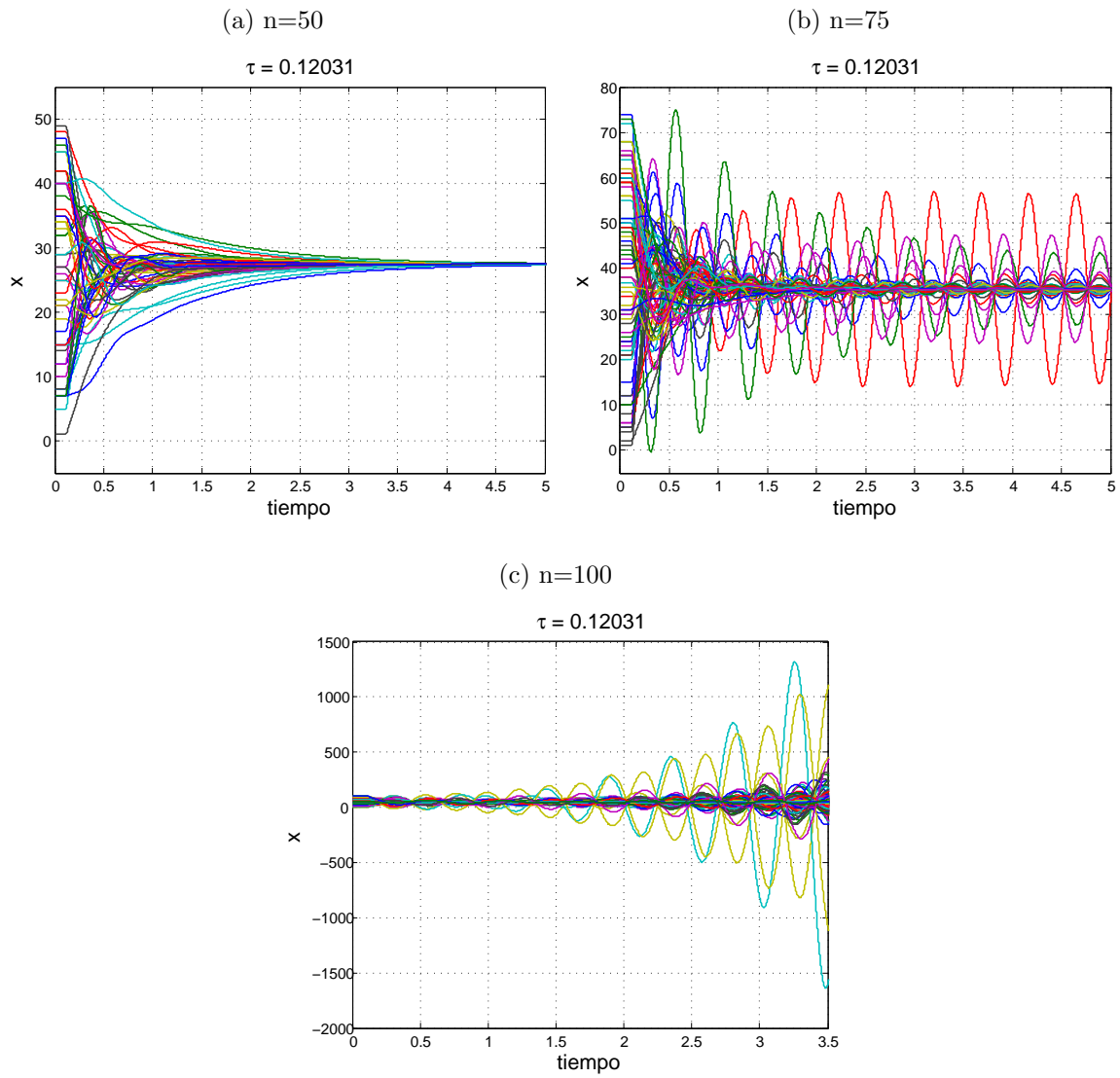
Fuente: Original de esta investigación.

Figura 20. Simulaciones en redes SW de 50, 75 y 100 nodos para un retardo $\tau = 0.1541$.



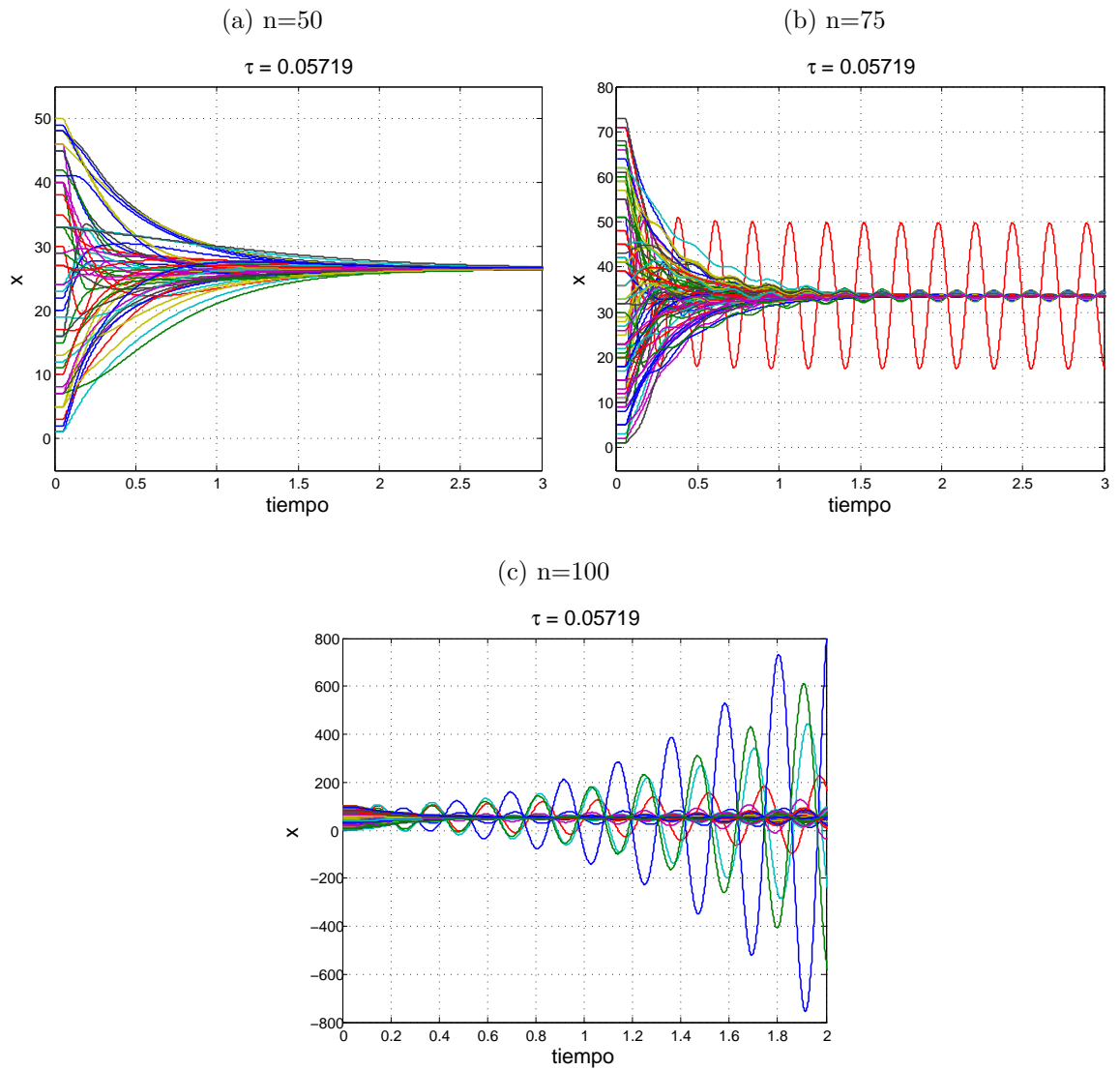
Fuente: Original de esta investigación.

Figura 21. Simulaciones en redes ER de 50, 75 y 100 nodos para un retardo $\tau = 0.12031$.



Fuente: Original de esta investigación.

Figura 22. Simulaciones en redes SF de 50, 75 y 100 nodos para un retardo $\tau = 0.05719$.



Fuente: Original de esta investigación.

6. CONCLUSIONES

En la ejecución de este proyecto, se pudo desarrollar un método analítico que permite determinar el retardo marginal de estabilidad τ_c en redes de integradores. Esto, a través de un planteamiento matemático formal y presentando un procedimiento que posibilita extraer características adicionales, tales como el criterio suficiente de estabilidad en (26). Este resultado también permite realizar una caracterización del lugar de las raíces.

Al analizar el lugar de las raíces, se pudo identificar algunos retardos diferentes a τ_c que determinan estados importantes del sistema. Por ejemplo, el retardo que maximiza la velocidad de convergencia del sistema τ_m , y el retardo bajo el cual la red converge a una velocidad igual o superior que el sistema sin retardo. Debido a la complejidad que presenta formular una expresión analítica para estos retardos, en este documento solo se realiza este proceso para hallar τ_m en grafos no dirigidos.

Por medio del estudio realizado en el desarrollo de este proyecto, se muestra que la velocidad de convergencia de una red de integradores se incrementa para retardos suficientemente pequeños. En el caso de grafos no dirigidos, se puede calcular el retardo que maximiza la velocidad de convergencia del sistema a través de la expresión (46). Por otra parte, también se pudo establecer que el tiempo de asentamiento t_s varía en forma aproximadamente lineal para retardos inferiores a τ_m , y en una forma que parece ajustarse a una curva exponencial cuando el retardo de entrada es mayor que τ_m .

Con respecto al análisis estadístico, se pudo determinar que las redes small-world presentan mayor tolerancia a los retardos de entrada en comparación con redes Erdős-Rényi y scale-free. Aunque se puede decir que la mayor conclusión deriva en que topologías que presentan una distribución de grado homogénea son más robustas frente a los retardos de entrada con respecto a topologías con distribuciones de grado no homogéneas.

Los resultados estadísticos también muestran que la desviación estándar del retardo marginal disminuye en la medida en que las redes se componen de un mayor número de nodos ó de arcos. La topología que presenta las menores desviaciones es small-world, mientras la que muestra las mayores es scale-free. Todo esto implica que las redes con topología small-world parecen ser las más robustas y estables en comparación con redes Erdős-Rényi y scale-free, frente a los retardos de entrada en cuanto a magnitud y variación de τ_c .

Parte de los resultados obtenidos en la ejecución de este proyecto fueron presentados en el *3rd IEEE COLOMBIAN CONFERENCE ON AUTOMATIC CONTROL*, desarrollado en octubre de 2017 en Cartagena de Indias, Colombia. El artículo sometido en dicho congreso se muestra en la sección **Anexos** de este documento.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] A. Bemporad, M. Heemels, and M. Johansson, “Networked control systems,” *Springer*, vol. 406, 2010.
- [2] R. Olfati-Saber and R. Murray, “Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.
- [3] R. Olfati-Saber and R. Murray, “Distributed cooperative control of multiple vehicle formations using structural potential functions.” *Presented at the 15th IFAC World Congress*, 2002.
- [4] W. Ren and E. M. Atkins, “Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 17, no. 10–11, pp. 1002–1033, 2007.
- [5] J. R. Carpenter, “Decentralized control of satellite formations,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 12, no. 2–3, pp. 141–161, 2002.
- [6] R. Olfati-Saber and J. S. Shamma, “Consensus filters for sensor networks and distributed sensor fusion,” in *Decision and Control 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05*, pp. 6698–6703, IEEE, 2005.
- [7] R. Sipahi, T. Vyhlídal, S. Niculescu, P. Pierdomenico, and A. Girard, “Time delay systems: Methods, applications and new trends,” *Springer*, 2012.
- [8] L. Moreau, “Stability of multiagent systems with time-dependent communication links,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 50, no. 2, pp. 169–182, 2005.
- [9] L. Fang and P. J. Antsaklis, “Information consensus of asynchronous discrete-time multi-agent systems,” in *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1883–1888, IEEE, 2005.

- [10] P. Lin and Y. Jia, “Average consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 387, no. 1, pp. 303–313, 2008.
- [11] J. Qin, H. Gao, and W. X. Zheng, “A new result on average consensus for multiple agents with switching topology and communication delay,” in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, and 28th Chinese Control Conference*, pp. 3703–3708, IEEE, 2009.
- [12] X. Sun, R. Zhou, D. Hou, and J. Wu, “Consensus of leader-followers system of multi-missile with timedelays and switching topologies,” *Optik-International Journal for Light and Electron Optics*, vol. 125, no. 3, pp. 1202–1208, 2014.
- [13] Y. G. Sun and L. Wang, “Consensus of multi-agent systems in directed networks with nonuniform time-varying delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 7, pp. 1607–1613, 2009.
- [14] Y.-P. Tian and C.-L. Liu, “Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 9, pp. 2122–2128, 2008.
- [15] X. Wang, A. Saberi, A. A. Stoorvogel, H. F. Grip, and T. Yang, “Consensus in the network with uniform constant communication delay,” *Automatica*, vol. 49, no. 8, pp. 2461–2467, 2013.
- [16] R. M. Corless, G. H. Gonnet, D. E. Hare, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth, “On the Lambert W function,” *Advances in Computational Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 329–359, 1996.
- [17] R. Albert and A.-L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 74, no. 1, pp. 47–97, 2002.
- [18] B. J. Pettejohn, M. J. Berryman, and M. J. McDonnell, “Methods for generating complex networks with selected structural properties for simulations: A review

- and tutorial for neuroscientists,” *Frontiers in Computational Neuroscience*, vol. 5, no. 11, pp. 1–18, 2011.
- [19] M. Mesbahi and M. Egerstedt, *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*. United States of America: Princeton University Press, 424 pages, 2010.
- [20] N. Pantoja, A. Quijano, “A population dynamics approach for the dispatch of distributed generators,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 58, no. 10, pp. 4559–4567, 2011.
- [21] G. Obando, A. Pantoja, and N. Quijano, “Building temperature control based on population dynamics,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 22, no. 1, pp. 404–412, 2014.
- [22] J. Cortés, S. Martínez, and F. Bullo, “Robust rendezvous for mobile autonomous agents via proximity graphs in arbitrary dimensions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 51, no. 8, pp. 1289–1298, 2006.
- [23] J. Giraldo, E. Mojica-Nava, and N. Quijano, “Synchronization of isolated microgrids with a communication infrastructure using energy storage systems,” *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 63, pp. 71–82, 2014.
- [24] D. Acemoglu and A. Ozdaglar, “Opinion dynamics and learning in social networks,” *Dynamic Games and Applications*, vol. 1, no. 1, pp. 3–49, 2011.
- [25] R. Olfati-Saber, J. Fax, and R. Murray, “Consensus and cooperation in networked multi-agent systems,” in *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, pp. 215–233, 2007.
- [26] J. Cortés, “Distributed algorithms for reaching consensus on general functions,” *Automatica*, vol. 44, no. 3, pp. 726–737, 2008.
- [27] W. Ren, R. W. Beard, and otros, “Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies,” *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 50, no. 5, pp. 655–661, 2005.

- [28] A. Cherukuri and J. Cortés, “Distributed generator coordination for initialization and anytime optimization in economic dispatch,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 2, no. 3, pp. 226–237, 2015.
- [29] F. Garin and L. Schenato, “A survey on distributed estimation and control applications using linear consensus algorithms,” *Networked Control Systems*, pp. 75–107, 2011.
- [30] Y. Ho, L. Servi, and R. Suri, “A class of center-free resource allocation algorithms,” *Large Scale Systems*, vol. 1, no. 1, pp. 51–62, 1980.
- [31] J. Tsitsiklis, D. Bertsekas, and M. Athans, “Distributed asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 31, no. 9, pp. 803–812, 1986.
- [32] E. Ramirez-Llanos and S. Martinez, “Distributed and robust resource allocation algorithms for multiagent systems via discrete-time iterations,” in *Proceedings of the 54th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1390–1395, IEEE, 2015.
- [33] G. Obando, N. Quijano, and N. Rakoto-Ravalontsalama, “A centre-free approach for resource allocation with lower bounds,” *International Journal of Control*, no. 0, pp. 1–16, 2016.
- [34] G. Obando, J. I. Poveda, and N. Quijano, “Replicator dynamics under perturbations and time delays,” *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 28, no. 3, pp. 1–32, 2016.
- [35] R. Sipahi, S. Niculescu, C. Abdallah, W. Michiels, and K. Gu, “Stability and stabilization of systems with time delay,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 31, no. 1, pp. 38–65, 2011.
- [36] H. Shinozaki and T. Mori, “Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results,” *Automatica*, vol. 42, no. 10, pp. 1791–1799, 2006.

- [37] F. Asl and A. Ulsoy, “Analysis of a system of linear delay differential equations,” *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 125, no. 2, pp. 215–223, 2003.
- [38] T. C. Banwell and A. Jayakumar, “Exact analytical solution for current flow through diode with series resistance,” *Electronics Letters*, vol. 36, no. 4, pp. 291–292, 2000.
- [39] S. R. Cranmer, “New views of the solar wind with the Lambert W function,” *Am. J. Phys*, vol. 72, no. 11, pp. 1397–1403, 2005.
- [40] A. R. Tzafiriri and E. R. Edelman, “The total quasi-steady-state approximation is valid for reversible enzyme kinetics,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 226, no. 3, pp. 303–313, 2004.
- [41] E. Jarlebring and T. Damm, “The Lambert W function and the spectrum of some multidimensional time-delay systems,” *Automatica*, vol. 43, no. 12, pp. 2124–2128, 2007.
- [42] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*. New York: Oxford University Press, 334 pages, 1999.
- [43] J. Shen and J. Cao, “Necessary and sufficient conditions for consensus of delayed fractional-order systems over directed graph.” Disponible en <http://www.paper.edu.cn/>, 12 pages, 2011.
- [44] P. Bliman and G. Ferrari-Trecate, “Average consensus problems in networks of agents with delayed communications,” *Automatica*, vol. 44, no. 8, pp. 1985–1995, 2008.
- [45] X. Liu, B. Xu, and L. Xie, “Distributed containment control of networked fractional-order systems with delay-dependent communications.” *Journal of Applied Mathematics*, vol. 2012, Article ID 840873, 13 pages, 2012.

- [46] W. Hou, M. Fue, and H. Zhang, “Consensusability of linear multi-agent systems with time delay,” *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 26, no. 12, pp. 2529–2541, 2016.
- [47] A.-L. Barabási, *Random Networks*, In: Network Science. United Kingdom: Cambridge University Press, pp. 72–111, 2016.
- [48] T. A. and D. J. Higham, “CONTEST: a controllable test matrix toolbox for MATLAB,” *ACM Transactions on Mathematical Software*, vol. 35, no. 4, pp. 26:1–26:17, 2009.
- [49] X. F. Wang and G. Chen, “Complex networks: Small-world, scale-free and beyond,” *IEEE Circuits and Systems Magazine*, vol. 3, no. 1, pp. 6–20, 2003.
- [50] G. Fagiolo, “Clustering in complex directed networks,” *Physical Review E*, vol. 76, no. 2, pp. 026107:1–026107:8, 2007.

ANEXOS

ANEXO A

ARTICULO CONGRESO IEEE 3er CCAC

En la siguiente hoja se presenta el paper sometido al congreso internacional 3rd IEEE COLOMBIAN CONFERENCE ON AUTOMATIC CONTROL, desarrollado en octubre de 2017 en Cartagena de Indias, Colombia.

Analysis of Consensus Protocols under Time Delays in Directed Graphs

Darío Alejandro Yela
Departamento de Electrónica
Universidad de Nariño
Pasto, Colombia
Email: lebiatan4.2@hotmail.com

Germán Obando
Departamento de Matemáticas Aplicadas
y Ciencias de la Computación
Universidad del Rosario
Bogotá, Colombia
Email: german.obando@urosario.edu.co

Andrés Pantoja
Departamento de Electrónica
Universidad de Nariño
Pasto, Colombia
Email: ad_pantoja@udenar.edu.co

Resumen—Consensus protocols, used in multiagent systems to achieve agreements, are affected by inherent issues into the communication networks. An interesting research problem is the effect of time delays in the process, which could prevent the system to obtain the desired agreement equilibrium. In this work we propose to use the Lambert W function to analyze the input time delays in a system of interacting agents, assuming directed graphs to represent a network with simple-integrator dynamics in each agent. Then, a closed-form for the marginally-stable delay is obtained and tested with simulations in a study case.

Index Terms—consensus, time delays, Lambert W function, digraphs.

I. INTRODUCCIÓN

Los protocolos de consenso [1] son algoritmos usados para solucionar problemas en los que se busca alcanzar acuerdos en redes de agentes¹. En los problemas de consenso, cada agente cuenta con información limitada y puede compartirla con sus pares a través de un esquema de comunicaciones. En este sentido, el desempeño de los protocolos de consenso se ve afectado por las características de las redes tales como los retardos temporales, efectos ocasionados por la influencia de los canales de comunicación y por los tiempos de cómputo y procesamiento propios de cada agente [2].

Los retardos temporales se incluyen en los análisis de desempeño de los protocolos de consenso debido a que pueden llegar a tener efectos adversos en el comportamiento de los agentes e incluso, impedir la obtención del acuerdo deseado. En [1], se muestra cómo los retardos de entrada (aquellos que modelan el tiempo que tardan los agentes para procesar la información que reciben) pueden desestabilizar una red con topología no dirigida o que emplea canales de comunicación bidireccionales. Muchos otros trabajos han sido orientados hacia la caracterización del máximo retardo admisible que garantice la estabilidad de los protocolos de consenso. Como ejemplo, en [3] los autores obtienen condiciones suficientes de estabilidad para redes de agentes con topologías no dirigidas y variantes en el tiempo. Por su parte, las condiciones dadas en [3] son relajadas en [4] considerando grafos dirigidos

(cuando se habla de topologías dirigidas, cabe la posibilidad de que los canales de comunicación sean unidireccionales). En [2] se presenta una extensión de los resultados de [1] para grafos dirigidos usando análisis en el dominio de la frecuencia, obteniendo condiciones de convergencia suficientes más no necesarias. Finalmente, en [5], los autores también caracterizan el retardo marginal de estabilidad para topologías dadas por grafos dirigidos, pero los resultados no brindan información del comportamiento transitorio del sistema, es decir, de la forma en que la red de agentes converge al estado de consenso. Algunos resultados recientes, que involucran redes de consenso con características especiales, han sido divulgados en [6], [7]. En resumen, la técnicas usadas en la literatura para el estudio de los protocolos de consenso bajo retardos temporales proporcionan un análisis aproximado o una caracterización incompleta del comportamiento del protocolo bajo retardos. Una alternativa que está cobrando relevancia en trabajos recientes es el uso de la función W de Lambert [8], que en principio permite establecer el lugar exacto de las raíces del sistema retardado. Esta propiedad es de gran importancia debido a que, conociendo las raíces del sistema, no solo se puede determinar su estabilidad, sino también su comportamiento en estado transitorio.

En este documento se analiza el comportamiento de los protocolos de consenso bajo retardos temporales sobre grafos dirigidos mediante el uso de la función W de Lambert. Empleando las propiedades de esta función, inicialmente se obtiene un criterio de estabilidad exacto. Posteriormente, se presenta un desarrollo formal que posibilita la obtención de una expresión cerrada para calcular el retardo marginal de estabilidad en una red de integradores. Asimismo, se caracteriza el lugar de las raíces para el sistema retardado y se brinda un criterio suficiente de estabilidad que puede ser computado de forma eficiente dado que únicamente requiere como insumo el grado de los nodos de la red.

II. PRELIMINARES

II-A. Teoría Algebraica de Grafos

Un grafo es una dupla ordenada, $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$, que está compuesta por un conjunto de nodos $\mathcal{V} = \{1, \dots, n\}$ y un conjunto de arcos $\mathcal{E} \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. En este documento, los

¹Entidades capaces de tomar decisiones. Por ejemplo, procesadores, animales, seres humanos, etc.

arcos representan capacidad para compartir información. Por convención, $(i, r) \in \mathcal{E}$ significa que el nodo i puede recibir información del nodo r .

Cuando a cada arco se le asigna un peso a_{ir} , tal que $(i, r) \in \mathcal{E} \Leftrightarrow a_{ir} > 0$, entonces se habla de grafos ponderados. Un grafo ponderado se puede definir como $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{A})$ [1], donde \mathcal{A} es la matriz de adyacencia ponderada, la cual se tratará mas adelante. Un grafo no dirigido es aquel que cumple que si $(i, r) \in \mathcal{E}$, entonces $(r, i) \in \mathcal{E}$, es decir, la comunicación entre los nodos i y r es bidireccional. Si la anterior propiedad no se cumple, se dice que el grafo es dirigido. Para hacer énfasis en esta característica, a un grafo dirigido se le llama digrafo.

II-A1. Vecindario y Grado de los Nodos: El vecindario del nodo i , denotado como \mathcal{N}_i , está dado por el conjunto $\mathcal{N}_i = \{r \mid (i, r) \in \mathcal{E}\}$. Note que el vecindario está formado por todos los nodos que pueden enviar información al nodo i . En el caso de grafos no dirigidos y no ponderados, al número de vecinos del i -ésimo nodo se le llama grado del nodo i y se denota por $\deg(i)$. Con respecto a los digrafos, se habla de grado de salida (\deg_{out}) y grado de entrada (\deg_{in}) del nodo. Para un digrafo ponderado, los grados de salida y entrada del i -ésimo nodo se definen, respectivamente, como $\deg_{in}(i) = \sum_{\{r \mid (r, i) \in \mathcal{E}\}} a_{ri}$ y $\deg_{out}(i) = \sum_{\{r \mid (i, r) \in \mathcal{E}\}} a_{ir}$. Siguiendo la convención empleada en la literatura sobre protocolos de consenso, en este trabajo se usa el grado de salida \deg_{out} para denotar el grado de un nodo. Usando el grado de todos los nodos, es posible definir la matriz de grado del digrafo dada por $\Delta = \text{diag}(\deg_{out}(1), \dots, \deg_{out}(n))$.

II-A2. Matriz de Adyacencia y Matriz Laplaciana: Un grafo puede ser completamente caracterizado a través de su matriz de adyacencia ponderada \mathcal{A} definida por

$$[\mathcal{A}]_{ir} = \begin{cases} a_{ir}, & \text{si } (i, r) \in \mathcal{E} \\ 0, & \text{si } (i, r) \notin \mathcal{E}, \end{cases}$$

donde $[\mathcal{A}]_{ir}$ representa el elemento ubicado en la fila i columna r de la matriz \mathcal{A} . Cabe anotar que, si los grafos no son ponderados, entonces $a_{ir} = 1$ para cualquier $i, r = 1, \dots, n$.

La matriz Laplaciana es una matriz auxiliar que permite extraer características del grafo al que representa y se define como $L = \Delta - \mathcal{A}$. La matriz L , tiene las siguientes características [9]: *i)* sus valores propios tienen parte real no negativa; *ii)* tiene al menos un valor propio igual a cero, el cual está asociado al vector propio $\mathbf{1} = [1, \dots, 1]^T$; y *iii)* si el grafo es no dirigido, entonces L es simétrica y por lo tanto, sus valores propios son reales.

En general, para digrafos, se tiene el siguiente resultado (tomado de [9]) que es importante en el análisis de los protocolos de consenso:

Teorema 1. *Sea L la matriz Laplaciana del digrafo \mathcal{G} . \mathcal{G} posee un árbol de expansión dirigido² si y solo si L tiene un único valor propio en cero asociado al vector propio $\mathbf{1}$.*

²Un digrafo \mathcal{G} posee un árbol de expansión dirigido, si \mathcal{G} tiene un nodo i_v (nodo raíz), tal que para cualquier otro nodo $r \in \mathcal{V}(\mathcal{G})$, existe un camino dirigido desde i_v hacia r .

II-B. Consenso bajo Retardos Temporales

Si a cada uno de los nodos que conforman el grafo se asocia una cantidad escalar, se obtiene un grafo algebraico. Sea $x_i \in \mathbb{R}$ el escalar asociado al nodo i , el estado total del grafo está dado por el vector $x = [x_1, \dots, x_n]^T$. Este estado evoluciona en el tiempo bajo la ecuación diferencial

$$\dot{x}_i = f_i(x_i, u_i), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

donde $f_i : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ es una función que describe la tasa de cambio de los estados de los nodos y u_i es una entrada de control que puede ser manipulada con el fin de obtener un comportamiento deseado. En aplicaciones prácticas, el estado de un grafo algebraico puede describir la temperatura de las habitaciones de un edificio, las frecuencias de distintos osciladores o las opiniones de un grupo de individuos, entre otras.

El objetivo de los problemas de consenso es diseñar leyes de control locales con el fin de que las cantidades asociadas a los nodos converjan a un mismo valor, es decir que $x_i = x_r$, para todo $i, r = 1, \dots, n$. Cuando se habla de leyes de control locales, se hace referencia a que cada nodo del grafo dispone de un controlador que toma decisiones usando solo información del estado del nodo y del estado de sus vecinos. Formalmente, una ley de control local u_i únicamente depende de x_i y de $\{x_r \mid r \in \mathcal{N}_i\}$.

Para simplificar el posterior análisis, en este artículo se asume una red de integradores cuyas dinámicas están dada por

$$\dot{x}_i = u_i, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (2)$$

A pesar de que la Ecuación (2) es un caso particular de la Ecuación (1), su campo de aplicación es amplio y puede encontrarse en diversos problemas de ingeniería [1].

Con el fin de alcanzar consenso, se propone usar la siguiente ley de control local

$$u_i = \sum_{r \in \mathcal{N}_i} a_{ir}(x_r - x_i). \quad (3)$$

En este trabajo se analiza la capacidad de (3) para tolerar retardos temporales. Específicamente, se estudia el tipo de retardo conocido como retardo de entrada o “*input-delay*”, que puede incluirse de la forma

$$u_i = \sum_{r \in \mathcal{N}_i} a_{ir}(x_r(t - \tau) - x_i(t - \tau)), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

donde $\tau > 0$ es el retardo temporal, que usualmente muestra el tiempo que tarda cada controlador local para procesar la información que recibe. Los retardos de entrada son comunes en los sistemas biológicos y sociales [2], [10]. Reemplazando (4) en (2), se obtiene el siguiente sistema que modela una red de integradores que usan un protocolo de consenso sujeto a retardos de entrada

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= \sum_{r \in \mathcal{N}_i} a_{ir}(x_r(t - \tau) - x_i(t - \tau)), \quad \forall i = 1, \dots, n, \\ x(t) &= 0, \quad \forall t \in [0, \tau). \end{aligned} \quad (5)$$

II-B1. Convergencia de una Red de Integradores Bajo el Protocolo de Consenso: El sistema dado en (5) puede escribirse en forma compacta de la forma

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -Lx(t - \tau), \quad \tau > 0 \\ x(t) &= 0, \quad \forall t \in [0, \tau),\end{aligned}\quad (6)$$

donde $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz Laplaciana del grafo que describe la interacción entre los nodos.

Sea $x^* = [x_1^*, \dots, x_n^*]^\top$ el estado de equilibrio de la Ecuación (6). Note que para este estado $-Lx^* = 0$, lo que implica que x^* debe ser un vector propio de L asociado al valor propio 0. Si el digrafo de comunicaciones posee un árbol de expansión dirigido, puede usarse el resultado dado en el Teorema 1 para concluir que x^* pertenece al subespacio generado por el vector $\mathbb{1}$, es decir, que x^* puede expresarse como $x^* = c\mathbb{1}$, donde $c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, $x_i^* = c$, para todo $i = 1, \dots, n$. Luego, el estado de equilibrio de (6) corresponde a un estado de consenso.

Cuando no hay retardos temporales ($\tau = 0$), la Ecuación (5) se reduce a $\dot{x}(t) = -Lx(t)$. En este caso, la estabilidad del sistema está determinada por los valores propios de $-L$. Dado que se sabe que los valores propios de la matriz Laplaciana tienen parte real no negativa, se puede concluir que si el dígrafo posee un árbol de expansión dirigido, el sistema es estable. Esto implica que $x(t)$ converge asintóticamente a un estado de consenso. Sin embargo, se ha comprobado que cuando el retardo τ es suficientemente grande, $x(t)$ diverge. La razón de esta inestabilidad es porque los polos del sistema retardado dependen directamente del valor de τ . Cuando τ es grande, algunos polos de (5) cruzan el eje imaginario y se vuelven inestables [1].

II-C. Función W de Lambert

Una forma de analizar sistemas sujetos a retardos temporales es mediante el uso de la función W de Lambert que es una función especial en el plano complejo y de argumento complejo. Se denota con la letra W y para el caso de un argumento escalar $h \in \mathbb{C}$, se define como la solución de la ecuación

$$W(h)e^{W(h)} = h. \quad (7)$$

Debido a que (7) tiene infinitas soluciones, la función W de Lambert es multivaluada, es decir, tiene infinitas ramas cada una asociada a una de las soluciones de (7). La k -ésima rama se denota como W_k , con $k = \pm 1, \dots, \pm\infty$, siendo W_0 la rama principal. El rango de cada rama está específicamente determinado en la Figura 1(a).

Como se propone en la siguiente sección, la rama principal W_0 es fundamental en el análisis del desempeño de los protocolos de consenso retardados. En la Figura 1(b), se detalla el rango de esta rama. La curva de corte que separa a W_0 de las ramas adyacentes (W_1, W_{-1}) está dada por la expresión (ver[8])

$$\{-\alpha \cot \alpha + \alpha j \mid -\pi < \alpha < \pi\}, \quad \alpha = \text{Im}(W_0(h)), \quad (8)$$

junto con el punto -1 (valor límite cuando $\alpha = 0$), donde $\{h \in \mathbb{R} \mid -\infty < h \leq -1/e\}$.

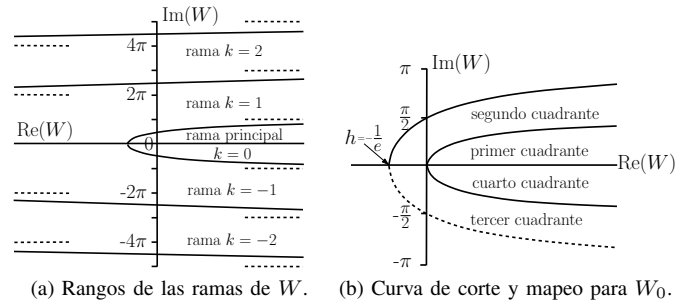


Figura 1. Ramas y curva de corte de la función W de Lambert (tomada de [11]).

Cabe resaltar que la rama principal de la función W de Lambert es analítica en cero y por lo tanto se puede expresar mediante su serie de Taylor [8]: $W_0(h) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1}}{n!} h^n$.

La función W de Lambert abarca una gran cantidad de aplicaciones, entre las que se encuentra la solución de ecuaciones diferenciales lineales con argumento retardado.

III. RETARDO MARGINAL DE ESTABILIDAD

En esta sección se calcula analíticamente el retardo máximo que le permite a una red de integradores llegar a consenso. Este retardo es conocido como retardo marginal de estabilidad³. Se asume que cada nodo está sujeto a un retardo temporal de entrada de magnitud τ , y se aplica el protocolo de consenso (4). Por lo tanto, la dinámica del sistema se rige por la Ecuación (6).

III-A. Análisis de Estabilidad en Sistemas Lineales Retardados Usando la Función W de Lambert

La Ecuación (6) modela un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales retardadas. La ecuación característica de (6) está determinada por

$$\det(sI + Le^{-s\tau}) = 0, \quad (9)$$

en la que I es la matriz identidad. Es importante resaltar que la función exponencial resulta de la transformada de Laplace del término retardado.

La estabilidad del sistema en (6) está determinada por las raíces de la ecuación característica en (9). Para identificar las raíces de (6), se puede hacer uso de la siguiente expresión [12]:

$$0 = \det(sI + Le^{-s\tau}) = \prod_{i=1}^n (s - \lambda_i e^{-s\tau}),$$

donde $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ son los valores propios de $-L$. Claramente, las raíces de (6) se calculan igualando a cero los términos de la productoria. Es decir, si se considera el i -ésimo término, $(s - \lambda_i e^{-s\tau}) = 0$. Por lo tanto, $s\tau e^{s\tau} = \tau\lambda_i$, y aplicando la definición de la función W de Lambert, para cualquier rama W_k se obtiene que $s = \frac{1}{\tau} W_k(\tau\lambda_i)$. Es decir, definiendo

³Técnicamente, el retardo marginal de un sistema es el retardo para el cual el sistema se vuelve marginalmente estable.

σ_M como el conjunto de las raíces de (9), se cumple que $\sigma_M = \bigcup_{k,i} \frac{1}{\tau} W_k(\tau\lambda_i)$ [12].

Si bien la ecuación característica del sistema retardado tiene infinitas raíces (consecuencia directa de las infinitas ramas de la función W de Lambert), para identificar las raíces ubicadas más hacia la derecha del plano complejo y que determinan la estabilidad de (6), solo es necesario analizar la rama W_0 . Esta conclusión está basada en que [11]

$$\max_{k=0, \pm 1, \dots, \pm \infty} \{\operatorname{Re}(W_k(h))\} = \operatorname{Re}(W_0(h)), \quad h \in \mathbb{C}.$$

En resumen, la estabilidad del sistema (6) está determinada por las siguientes raíces retardadas, llamadas en adelante polos retardados

$$s = \frac{1}{\tau} W_0(\tau\lambda_i), \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (10)$$

donde, $\lambda_i \in \mathbb{C}$ es el i -ésimo valor propio de $-L$.

Por facilidad y sin pérdida de generalidad, en el análisis descrito en este documento, únicamente se consideran redes de agentes cuya topología está caracterizada por digrafos que contiene al menos un árbol de expansión dirigido (esta suposición no implica pérdida de generalidad, porque, si no se cumple, siempre es posible dividir el digrafo en sub-digrafos que contienen árboles de expansión dirigidos. En este caso, el estudio se haría para cada sub-digrafo por separado). De acuerdo al Teorema 1, el Laplaciano de los digrafos que poseen al menos un árbol de expansión dirigido tiene un único valor propio en cero. Entonces, para esos digrafos, $-L$ tiene un valor propio simple en cero, al que denotaremos como λ_1 . Este valor propio simple, no influye en la estabilidad del sistema dinámico [13] y por lo tanto se omite de aquí en adelante. Así, en el análisis que realizaremos, se consideran solamente los valores propios de $-L$ diferentes de cero: $\{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Cabe resaltar que, de acuerdo con (10), el polo retardado correspondiente al valor propio cero de $-L$ permanece en cero sin importar el valor del retardo τ .

III-B. Obtención del Retardo Marginal de Estabilidad

Analizando la rama W_0 de la función W de Lambert, se puede concluir que si el argumento complejo h posee un valor lo suficientemente pequeño (en magnitud), la parte real de $W_0(h)$ es no positiva. Aplicando esta observación a la Ecuación (10), se tiene que eligiendo un rango adecuado para τ , la magnitud de $\tau\lambda_i$ puede ser lo suficientemente pequeña para que cada uno de los polos retardados dados en (10) sea estable. En este orden de ideas, el retardo marginal de estabilidad, τ_c , será el retardo de mayor valor que garantiza que la parte real de $W_0(\tau_c\lambda_i)$ sea no positiva para todo λ_i , con $i = 2, \dots, n$ (como se dijo antes, el valor propio $\lambda_1 = 0$, de $-L$, se suprime del análisis). Es más, τ_c debe ser tal que $W_0(\tau_c\lambda_i) = 0$ para al menos un λ_i . Note que para ese valor de τ_c , el sistema en (6) tendría al menos un polo retardado en cero y la parte real de este polo estaría en el margen de pasar de ser negativa (polo estable) a positiva (polo inestable).

Lo anterior sugiere que para calcular el retardo marginal de estabilidad se necesita encontrar el valor de τ para el cual la parte real de $W_0(\tau\lambda_i)$ es igual a cero. Si se hace esto

para cada $\lambda_i \in \{\lambda_2, \dots, \lambda_n\}$ y se elige el menor τ , entonces este será igual al retardo crítico τ_c . Encontrar τ para que la parte real de $W_0(\tau\lambda_i)$ sea igual a cero, es equivalente a encontrar τ que haga que $\tau\lambda_i$ pertenezca al contorno cero de la función $\operatorname{Re}(W_0(h))$, donde $\operatorname{Re}(\cdot)$ denota parte real. En términos matemáticos, el problema se reduce a encontrar τ tal que $\tau\lambda_i \in C_0$, donde $C_0 = \{h \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(W_0(h)) = 0\}$. Note que, C_0 puede redefinirse como

$$C_0 = \{h \in \mathbb{C} \mid W_0(h) = j\alpha\}, \quad (11)$$

donde $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Este rango de α se elige de esta manera ya que corresponde al análisis de la rama 0 de la función W de Lambert (de hecho, el rango de α es el conjunto definido en (8), considerando $\alpha \cot(\alpha) = 0$). Utilizando la definición de la función W de Lambert, $h = W_0(h)e^{W_0(h)}$, el conjunto de valores en C_0 está caracterizado por $h \in C_0$ si y solo si $h = j\alpha e^{j\alpha}$. Por lo tanto, si $\tau\lambda_i \in C_0$ entonces

$$\begin{aligned} \tau\lambda_i &= j\alpha e^{j\alpha}, \\ &= |\alpha| e^{j(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg}(\alpha) + \alpha)}, \end{aligned} \quad (12)$$

donde $\operatorname{Arg}(\cdot)$ denota argumento principal⁴. Entonces,

$$\operatorname{Arg}(\alpha) = \begin{cases} \pi & \text{si } \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ 0 & \text{si } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \quad (13)$$

Adicionalmente, utilizando la forma polar de λ_i , se tiene que $\lambda_i = \rho_i e^{j\varphi_i}$, donde ρ_i y φ_i son la magnitud y el argumento principal de λ_i , respectivamente. Esto es, $\rho_i = |\lambda_i|$ y $\varphi_i = \operatorname{Arg}(\lambda_i)$. Reemplazando esta forma polar en (12) se obtiene que $\tau\rho_i e^{j\varphi_i} = |\alpha| e^{j(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg}(\alpha) + \alpha)}$. Por lo tanto,

$$\tau\rho_i = |\alpha| \quad (14a)$$

$$\varphi_i = \operatorname{Arg}\left(e^{j(\frac{\pi}{2} + \operatorname{Arg}(\alpha) + \alpha)}\right). \quad (14b)$$

De (14b) y (13), se tiene que

$$\alpha = \begin{cases} \varphi_i + \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \quad (15)$$

Así,

$$|\alpha| = \begin{cases} -\varphi_i - \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0) \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2} & \text{si } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]. \end{cases} \quad (16)$$

Una forma de simplificar la Ecuación (16) se obtiene considerando los posibles valores que toma φ_i en función de α . De (15), se tiene que $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ si y solo si $\varphi_i \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$, y $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ si y solo si $\varphi_i \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Es decir, $|\varphi_i| = -\varphi_i$ si $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$, y $|\varphi_i| = \varphi_i$ si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Por lo tanto, (16) puede expresarse como

$$|\alpha| = |\varphi_i| - \frac{\pi}{2}. \quad (17)$$

Ahora, de (14a) y (17),

$$\tau = \frac{1}{\rho_i} \left(|\varphi_i| - \frac{\pi}{2} \right). \quad (18)$$

⁴El argumento de un número complejo z es el ángulo formado entre el eje real positivo del plano \mathbb{C} y la línea que une z con el origen. Si el dominio de este ángulo se restringe a $(-\pi, \pi]$, entonces se denomina argumento principal.

Para este valor de τ , el polo retardado dado en (10) asociado al i -ésimo valor propio de $-L$ estará sobre el eje imaginario. Como se discutió inicialmente, con el fin de hallar el retardo marginal primero debe encontrarse τ usando (18) para cada uno de los valores propios de $-L$ distintos de cero $(\lambda_2, \dots, \lambda_n)$, y posteriormente elegir el mínimo de los valores de τ hallados. Entonces, la expresión analítica que determina el retardo marginal de estabilidad para la red de consenso dada en (6) es

$$\tau_c = \min_{i=2, \dots, n} \left\{ \frac{1}{\rho_i} \left(|\varphi_i| - \frac{\pi}{2} \right) \right\}. \quad (19)$$

III-B1. Retardo marginal para redes con topologías descritas por grafos no dirigidos: Los Laplacianos correspondientes a grafos que describen topologías de comunicación bidireccionales (grafos no dirigidos), tienen la particularidad de ser simétricos (ver Sección II-A2) y por lo tanto, todos sus valores propios son reales [9]. Esta característica permite simplificar la expresión en (19), ya que en este caso, $\rho_i = \lambda_i(L)$ y $\varphi_i = -\pi$, para todo $i = 2, \dots, n$. Entonces, el retardo marginal para redes con topologías descritas por grafos no dirigidos es $\tau_c = \min_{i=2, \dots, n} \left\{ \frac{1}{\lambda_i(L)} \right\} \left(\pi - \frac{\pi}{2} \right)$. Así,

$$\tau_c = \frac{\pi}{2\lambda_{\max}(L)}, \quad (20)$$

donde $\lambda_{\max}(L)$ es el máximo valor propio de L .

III-B2. Condición suficiente de estabilidad: En esta sección se define una condición suficiente de estabilidad que permite calcular un retardo que garantice la estabilidad del sistema (6), sin necesidad de conocer los valores propios de $-L$. Para ello, se considera en primer lugar que de acuerdo al Teorema 2 en [1], se puede establecer que para un digrafo con Laplaciano L y máximo grado de salida⁵ d_{\max} , se cumple

$$|\lambda_i + d_{\max}| \leq d_{\max}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (21)$$

Geoméricamente, esto equivale a que todos los valores propios de $-L$ están ubicados en el plano complejo dentro de un círculo centrado en $-d_{\max}$ y con radio d_{\max} . Multiplicando ambos lados de la desigualdad en (21) por τ , se puede determinar que las cantidades $\{\tau\lambda_1, \dots, \tau\lambda_n\}$ están ubicadas en un círculo centrado en $-\tau d_{\max}$ y con radio τd_{\max}

$$|\tau\lambda_i + \tau d_{\max}| \leq \tau d_{\max}, \quad \lambda_i \in \mathbb{C}, \quad i = 1, \dots, n.$$

En segundo lugar, con el análisis previo se establece que es posible determinar la estabilidad del sistema de consenso retardado únicamente conociendo la ubicación de las cantidades complejas $\{\tau\lambda_2, \dots, \tau\lambda_n\}$. Note que si todas estas cantidades están dentro de la región del plano complejo delimitada por el contorno 0 de la parte real de W_0 , el sistema es estable⁶. En la Figura 2, esta región corresponde al interior de la curva trazada en línea continua.

⁵El máximo grado de salida de un digrafo se define como $d_{\max} := \max_i \{\text{deg}_{\text{out}}(i) \mid i = 1, \dots, n\}$

⁶Esto se debe a que si $\tau\lambda_i$ está dentro de la región delimitada por C_0 , entonces la parte real de $W_0(\tau\lambda_i)$ es no positiva y por lo tanto, el polo retardado asociado a λ_i dado en (10) es estable.

Conforme a estas dos propiedades, para garantizar la estabilidad del sistema es suficiente encontrar un círculo centrado en una cantidad $-\varrho \in \mathbb{R}_{<0}$ y de radio ϱ , que esté completamente contenido en la región delimitada por C_0 . Luego (6) es estable si

$$\tau d_{\max} \leq \varrho. \quad (22)$$

En la Figura 2 se muestra un círculo que cumple estas características. El radio de este círculo satisface la ecuación $\varrho^2 = \varrho^2 + R^2 - 2\varrho R \cos \theta$, siendo R y θ los indicados en la Figura 2. Así, $R = 2\varrho \cos \theta = 2\varrho \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$. Por lo tanto, $R = 2\varrho \sin \alpha$. Además, se sabe que C_0 puede

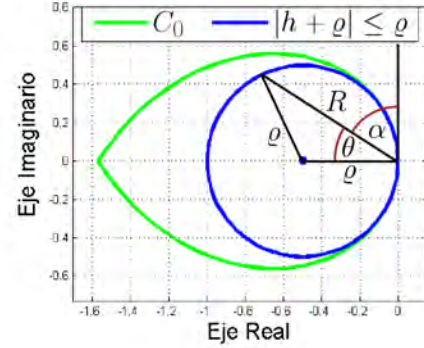


Figura 2. Circunferencia máxima dentro del contorno cero de la rama W_0 .

expresarse paraméricamente como $C_0 = |\alpha| e^{(\frac{\pi}{2} + \text{Arg}(\alpha) + \alpha)}$, con $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (ver Ecuación (12)). Entonces, con el fin de asegurar que la circunferencia de radio ϱ esté contenida dentro de C_0 , se debe cumplir que $R \leq |\alpha|$, $\forall \alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ya que existe simetría de las curvas con respecto al eje real, solo es necesario analizar el hemisferio superior restringiendo el análisis a $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Entonces,

$$\varrho \leq \frac{1}{2} (\text{sinc } \alpha)^{-1}, \quad \forall \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]. \quad (23)$$

Se sabe que la función $\text{sinc } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$ tiende a su supremo cuando α tiende a cero. Además, esta función es positiva para todo $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Entonces, se puede concluir que $(\text{sinc } \alpha)^{-1}$ tiende a su ínfimo cuando α tiende a cero. Así, debe notarse que (23) se cumple si $\varrho \leq \frac{1}{2} \left(\inf_{\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]} (\text{sinc } \alpha)^{-1} \right) = \frac{1}{2}$.

Usando este valor de ϱ en (22), la condición suficiente de estabilidad está dada por

$$\tau \leq \frac{1}{2d_{\max}}. \quad (24)$$

La expresión (24) provee un criterio suficiente de estabilidad en función del máximo grado de salida d_{\max} para una red de agentes bajo la dinámica descrita en (6). Si bien en (19) se determina el máximo valor del retardo permisible para que la red de agentes pueda converger a consenso, este resultado requiere calcular todos los valores propios del Laplaciano del digrafo, que para digrafos de gran tamaño, puede ser una tarea muy demandante a nivel computacional. Por el contrario, el criterio dado en (24), establece una herramienta que permite asegurar estabilidad a partir de información simple del sistema.

IV. SIMULACIÓN DE RESULTADOS

Para corroborar los resultados obtenidos, en la Figura 3 se muestran los resultados de simulación para una digrafo de 5 nodos bajo la dinámica de (6). La simulación se efectúa para: $\tau = 0$, $\tau = 0.75\tau_c$, $\tau = \tau_c$, y $\tau = 1.1\tau_c$.

Los valores propios de $-L$ para este ejemplo son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -2 + j$, $\lambda_4 = -2 - j$ y $\lambda_5 = -2$. El retardo marginal de estabilidad está determinado en este caso por el par conjugado y se calcula a través de (19), dando como resultado $\tau_c \approx 0.4951$.

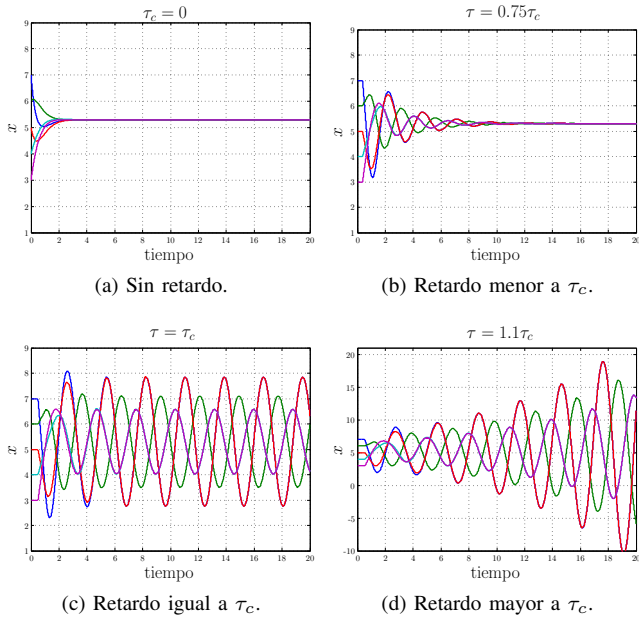


Figura 3. Simulación de un digrafo de 5 nodos que ejecuta el protocolo de consenso bajo retardos expresado en (6).

Las simulaciones de la Figura 3 muestran que como se estableció en el análisis de la Sección III, el sistema es estable para valores de $\tau < \tau_c$. En el caso de $\tau = \tau_c$, se observa una estabilidad marginal. Para $\tau > \tau_c$, se aprecia un incremento consistente de la amplitud de las oscilaciones que conlleva a la inestabilidad.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se desarrolla un método analítico que permite determinar el retardo marginal de estabilidad τ_c en redes de integradores. El análisis se realiza con base en la función W de Lambert que facilita realizar un planteamiento para obtener una expresión cerrada del retardo crítico y posibilita extraer características adicionales, tales como un criterio suficiente de estabilidad basado en una característica topológica simple de la red. Dado que el análisis presentado permite realizar una caracterización del lugar de las raíces retardadas, se propone como trabajo futuro explotar esta propiedad para estudiar, por ejemplo, el comportamiento en estado transitorio de la red de agentes.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Profesor Nicanor Quijano por sus valiosos aportes en el desarrollo de esta investigación. Parte de este trabajo fue desarrollado mientras G. Obando estaba en el Departamento de Ingeniería Electrónica de la Pontificia Universidad Javeriana, Bogotá, Colombia.

REFERENCIAS

- [1] R. Olfati-Saber, R. Murray, "Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 49, no. 9, pp. 1520–1533, 2004.
- [2] Y. Tian, C. Liu, "Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 53, no. 9, pp. 2122–2128, 2008.
- [3] P. Lin, Y. Jia, "Average consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 387, n. 1, pp. 303–313, 2008.
- [4] J. Qin, H. Gao, W. X. Zheng, "A new result on average consensus for multiple agents with switching topology and communication delay", in *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control, and 28th Chinese Control Conference*, pp. 3703–3708, IEEE, 2009.
- [5] X. Wang, A. Saberi, A. Stoorvogel, H. Grip, T. Yang, "Consensus in the network with uniform constant communication delay", *Automatica*, vol. 49, no. 8, pp. 2461–2467, 2013.
- [6] D. Irofti, F. Atay, "Dynamic average consensus in the presence of communication delay over directed graph topologies", in *Proceedings of the 13th IFAC Workshop on Time Delay Systems*, pp. 206–211, 2016.
- [7] H. Moradian, S. Kia, "On the delay margin for consensus in directed networks of anticipatory agents", in *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 4663–4668, 2017.
- [8] R. Corless, G. Gonnet, D. Hare, D. Jeffrey, D. Knuth, "On the Lambert W function", *Advances in Computational Mathematics*, vol. 5, no. 1, pp. 329–359, 1996.
- [9] M. Mesbahi, M. Egerstedt, *Graph Theoretic Methods in Multiagent Networks*, Princeton University Press, 2010.
- [10] G. Obando, J. Poveda, N. Quijano, "Replicator dynamics under perturbations and time delays", *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, vol. 28, no. 3, pp. 1–32, 2016.
- [11] H. Shinozaki, T. Mori, "Robust stability analysis of linear time-delay systems by Lambert W function: Some extreme point results", *Automatica*, vol. 42, no. 10, pp. 1791–1799, 2006.
- [12] E. Jarlebring, T. Damm, "The Lambert W function and the spectrum of some multidimensional time-delay systems", *Automatica*, vol. 43, no. 12, pp. 2124–2128, 2007.
- [13] C. Chen, *Linear System Theory and Design*, Oxford University Press, 1999.