

SISTEMAS CUÁNTICOS ABIERTOS. IMPLICACIONES DE LAS DESIGUALDADES DE BELL EN LA INFORMACIÓN CUÁNTICA



TRABAJO DE GRADO

Para optar el título profesional de:

Físico

Jenny Patricia Concha Obando

Universidad de Nariño
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
San Juan de Pasto, Colombia
Mayo 2016

SISTEMAS CUÁNTICOS ABIERTOS. IMPLICACIONES DE LAS DESIGUALDADES DE BELL EN LA INFORMACIÓN CUÁNTICA

Jenny Patricia Concha Obando

TRABAJO DE GRADO

Asesor:

Juan Bautista Florez Moreno

PhD. en física Universidad de Nariño

Coasesor:

Paola Andrea Concha Obando

MSc. en física Universidade Federal Fluminense- RJ-Brazil

Universidad de Nariño

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

San Juan de Pasto, Colombia

Mayo 2016

©2016 - Jenny Patricia Concha Obando

“Las ideas y conclusiones aportadas en la tesis de grado son responsabilidad exclusiva de los autores”

Artículo 1. del acuerdo No. 324 del 11 de Octubre de 1966, emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Todos los derechos reservados.

Nota de Aceptación

PhD. Juan Bautista Florez

Director

PhD. Alvaro Rugeles

Jurado

MSc. Nicolás Avilán

Jurado

San Juan de Pasto, Mayo 2016



PROPOSICIÓN N° 049
(Agosto 12 de 2016)

EL COMITÉ CURRICULAR Y DE INVESTIGACIÓN DEL DEPARTAMENTO DE FÍSICA
DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO

En ejercicio de sus atribuciones legales, reglamentarias y estatutarias, y

CONSIDERANDO:

- Que el día 17 de junio del 2016 la estudiante del Programa de Física de la Universidad de Nariño **JENNY PATRICIA CONCHA OBANDO** sustentó y aprobó el trabajo de grado titulado “**SISTEMAS CUANTICOS ABIERTOS IMPLICACIONES DE LAS DESIGUALDADES DE BELL EN LA INFORMACIÓN CUANTICA**”.
- Que el Director del mencionado trabajo de grado es el Docente **JUAN BAUTISTA FLORÉZ MORENO**.
- Que mediante Acuerdo No 036 de junio 14 del 2016 el Comité Curricular designó como jurados evaluadores a los docentes **NICOLAS AVILAN VARGAS Y ALVARO RUGELES PERÉZ**.

Que según el concepto de los jurados en mención el trabajo realizado por la estudiante **JENNY PATRICIA CONCHA OBANDO**

- Presenta apropiadamente la motivación filosófica y conceptual de las desigualdades de Bell.
- Presenta apropiadamente el formalismo teórico de las desigualdades de Bell y lo aplica a sistemas cuánticos sencillos.
- Analiza explícitamente sistemas cuánticos abiertos correctamente.
- Durante la sustentación la estudiante mostró dominio de los temas desarrollados.
- El trabajo realizado supera las expectativas de un trabajo de pregrado.
- Que los jurados por la calificación obtenida de 100/100, sugieren otorgar al trabajo de grado la distinción de tesis **LAUREADA**.
-
- Que el Comité Curricular y de Investigaciones avala esta solicitud y por tanto:

PROPONE AL CONSEJO DE FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO

PRIMERO: Otorgar la distinción de tesis **LAUREADA** al trabajo de grado titulado “**SISTEMAS CUANTICOS ABIERTOS IMPLICACIONES DE LAS DESIGUALDADES DE BELL EN LA INFORMACIÓN CUANTICA**” presentado por la estudiante del Programa de Física de la Universidad de Nariño **JENNY PATRICIA CONCHA OBANDO**, según la parte motiva de la presente Proposición.



Universidad de **Nariño**
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Dado en San Juan de Pasto, a los doce (12) días del mes de agosto de dos mil dieciséis (2016).

ALVARO RUGELES PEREZ

Presidente

Comité Curricular y de Investigaciones

Departamento de Física

Ciudadela Universitaria Torobajo - Calle 18 No. 50 - 02 - Bloque I - Conmutador 7311449 - Ext. 203
Línea gratuita 018000957071 - email: fisica@udenar.edu.co
www.udenar.edu.co - San Juan de Pasto - Nariño - Colombia



GP-CER 112092



SC-CER 110449



CO-SC-CER 110449

Agradecimientos

Agradezco principalmente a mis padres Duarte Concha y Clara obando, por su esfuerzo inagotable y su absoluto amor a lo largo de mi camino. A mi hermana Marcela por acompañar mis inquietudes, sueños, quebrantos, por enseñarme la franqueza y la fuerza para enfrentar la vida y devorar los prejuicios. A mi hermana y codirectora Paola por guiar mis ilusiones con su ejemplo y valentía, inspirando mis pasos con su dedicación, fortaleza y su respeto hacia la ciencia. A mi gran maestro y asesor Juan Florez por la constante confianza que manifestó, por sembrar en mí su fascinación por el conocimiento y compartir conmigo su legado y sabiduría. A mis familiares Viviana Gomez, German Obando, Carlos Obando, por todo su cariño y palabras de aliento. A mis incondicionales amigos Erik Potosi y Cristian Castro, por su apoyo, protección y su constante compañía. A todos mis compañeros de aula que motivaron con sus sonrisas mis estudios todos estos años. También a los que se marcharon de mi camino, pero que aun así dejaron huella y bellos recuerdos. Finalmente a todos los que de una u otra manera hicieron parte de mi crecimiento y encuentro con mis metas.

A mi madre que llena de luz y sabiduría mis días.

SISTEMAS CUÁNTICOS ABIERTOS. IMPLICACIONES DE LAS DESIGUALDADES DE BELL EN LA INFORMACIÓN CUÁNTICA

Resumen

En el presente trabajo se estudia el carácter fundamental y conceptual que brinda la teoría cuántica en su interpretación de Copenhague, la cual conduce a la comprensión y al reconocimiento de conceptos esenciales, tales como: no-localidad, desigualdades de Bell, entrelazamiento cuántico, etc. Estos conceptos son de gran importancia en la teoría cuántica de la información y en sus aplicaciones.

Adicionalmente se analiza los fenómenos propios de sistemas cuánticos abiertos con la ayuda de métodos computacionales y análisis numérico, mediante las siguientes aplicaciones: La decoherencia para un sistema de un qubit y la evolución del entrelazamiento por medio de la concurrencia cuántica para sistemas de dos-qubits acoplados a diferentes tipos de ruido. Que finalmente permite concluir sobre sus implicaciones en términos de información cuántica.

QUANTUM OPEN SYSTEMS. IMPLICATIONS OF THE BELL INEQUALITIES IN QUANTUM INFORMATION

Abstract

In this work, it is studied the fundamental and conceptual character that is given to the quantum theory by the Copenhagen interpretation, which leads to the comprehension and acknowledgement of essential concepts, such as: non locality, Bell inequalities, quantum entanglement, etc. These concepts are of great importance to the quantum information theory and its applications.

Additionally it is analyzed the behavior of the open quantum systems using computational methods and numerical analysis. The proposed systems in this part of work are one-qubit and two-qubit decoherent systems. Finally conclusions are made about the implications of this kind of dynamics in terms of quantum information.

Índice general

1. Introducción	1
2. Interpretación de Copenhague y paradoja EPR	3
2.1. Formalismo cuántico e interpretaciones	3
2.1.1. Postulados de la mecánica cuántica	4
2.1.2. El problema de la medida	7
2.1.3. Relaciones de incertidumbre, Desigualdades de Heisenberg	8
2.1.4. Interpretaciones de la mecánica cuántica	10
2.2. Interpretación de Copenhague	12
2.2.1. Origen de la interpretación de Copenhague, (Un poco de historia)	12
2.2.2. Tesis de la interpretación de Copenhague	14
2.2.3. Consecuencias de esta interpretación	19
2.3. Crítica de Einstein Podolsky y Rosen, <i>Paradoja EPR</i>	21
2.3.1. La descripción del argumento EPR	22
3. Desde las desigualdades de Bell hacia el entrelazamiento cuántico	30
3.1. Teorema de Bell	30
3.1.1. Primera desigualdad de Bell	33
3.1.2. Predicciones cuánticas	34
3.2. Desigualdades de Bell	35
3.2.1. Desigualdad CHSH	36
3.2.2. Segunda desigualdad de Bell	37
3.2.3. Veredicto experimental	40
3.3. No-localidad y entrelazamiento cuántico	41
4. Formalismo de los sistemas cuánticos abiertos y entrelazamiento cuántico	44
4.1. Estados puros y mixtura	45
4.2. Operador densidad	46
4.2.1. Propiedades de la matriz densidad	47
4.2.2. La evolución temporal del operador densidad	49
4.2.3. Matriz densidad para sistemas de dos niveles	50
4.2.4. Sistemas compuestos o bipartitos	52
4.3. Sistemas cuánticos abiertos	54
4.3.1. Dinámica de sistemas cuánticos abiertos	55
4.3.2. Ecuaciones maestras	56
4.4. Entrelazamiento cuántico y su evolución	57

4.5. Separabilidad versus entrelazamiento	57
4.6. Medidas de entrelazamiento para estados bipartitos puros	59
4.7. Medidas de entrelazamiento para estados mixtura	60
4.7.1. Concurrencia	60
5. Aplicación del formalismo de sistemas cuánticos abiertos en sistemas de un-qubit y de dos-qubits	63
5.1. Sistemas de un-qubit	63
5.1.1. Amortiguación de Amplitud	64
5.1.2. Amortiguación de fase	69
5.1.3. Amortiguación de fase y amortiguación de amplitud	74
5.2. Sistemas de dos-qubits o bipartitos	76
5.2.1. Amortiguación de fase	80
5.2.2. Amortiguación de fase y amortiguación de amplitud	82
Conclusiones y recomendaciones	89
A. Partículas con espín 1/2	90
A.1. Una partícula	90
A.2. Dos partículas	92
A.3. Valor esperado de componentes de espín en direcciones arbitrarias	94
B. Representación de Heisenberg y representación interacción	96
Bibliografía	99

Índice de figuras

3.1.	Propuesta de Bohm para ilustrar la paradoja EPR.	31
3.2.	Predicción cuántica para el parámetro de Bell, Las líneas horizontales marcan el límite $S = \pm 2$ de la desigualdad.	39
4.1.	Esfera de Bloch. Representación geométrica del espacio de estados puros de un sistema cuántico de dos niveles, a través de puntos pertenientes a una esfera unitaria.	52
4.2.	Imagen esquemática de un sistema cuántico abierto	55
5.1.	Gráfica de las soluciones (5.10) y (5.11), correspondientes a un sistema de un-qubit bajo amortiguación de amplitud (a) Evolución de las poblaciones de $\rho(\tau)$. (b) Traza: $\rho_{11} + \rho_{22} = \langle + \rho(\tau) + \rangle + \langle - \rho(\tau) - \rangle$. El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(-\rangle\langle - + -\rangle\langle + + +\rangle\langle - + +\rangle\langle +)$	66
5.2.	Gráfica de las soluciones (5.8) y (5.9), correspondientes a un reservorio térmico a temperatura efectiva cero (a) Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, donde la línea punteada (indistinguible) pertenece a la coherencia $\langle - \rho(\tau) + \rangle$. (b) Evolución de la parte imaginaria de coherencias de $\rho(\tau)$. El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\gamma = 0,3$ y $\omega_0 = 3$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(-\rangle\langle - + -\rangle\langle + + +\rangle\langle - + +\rangle\langle +)$	67
5.3.	Evolución de la población $\langle + \rho(\tau) + \rangle$, para diferentes valores de γ . El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(-\rangle\langle - + -\rangle\langle + + +\rangle\langle - + +\rangle\langle +)$	68
5.4.	Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, para diferentes valores de γ . El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\omega_0 = 1$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(-\rangle\langle - + -\rangle\langle + + +\rangle\langle - + +\rangle\langle +)$	69
5.5.	Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, para diferentes valores de ω_0 . El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\gamma = 1$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(-\rangle\langle - + -\rangle\langle + + +\rangle\langle - + +\rangle\langle +)$	69
5.6.	Gráfica de las soluciones (5.20) y (5.21), correspondientes a un reservorio térmico a temperatura efectiva cero (a) Evolución de las poblaciones de $\rho(\tau)$, donde la línea punteada (indistinguible) pertenece a la población $\langle + \rho(\tau) + \rangle$. (b) Traza: $\rho_{11} + \rho_{22} = \langle + \rho(\tau) + \rangle + \langle - \rho(\tau) - \rangle$. El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(-\rangle\langle - + -\rangle\langle + + +\rangle\langle - + +\rangle\langle +)$	71

- 5.7. Gráfica de las soluciones (5.18) y (5.19), correspondientes a un reservorio térmico a temperatura efectiva cero (a) Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, donde la línea punteada (indistinguible) pertenece a la coherencia $\langle -|\rho(\tau)|+\rangle$. (b) Evolución de la parte imaginaria de coherencias de $\rho(\tau)$. El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\gamma = 0,3$ y $\omega_0 = 3$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$ 72
- 5.8. Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, para diferentes valores de γ . El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\omega_0 = 1$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$ 73
- 5.9. Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, para diferentes valores de ω_0 . El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\gamma = 1$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$ 73
- 5.10. Gráfica de las soluciones (5.25) y (5.26), correspondientes a un reservorio térmico a temperatura efectiva cero (a) Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, donde la línea punteada (indistinguible) pertenece a la coherencia $\langle -|\rho(\tau)|+\rangle$. (b) Evolución de las poblaciones de $\rho(\tau)$. El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\gamma = 0,3$ y $\omega_0 = 3$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$ 75
- 5.11. Ilustración esquemática de un arreglo en el cual dos átomos A y B están ubicados dentro de dos cavidades espacialmente separadas. Los dos átomos están inicialmente con entrelazamiento pero no interactúan entre si 76
- 5.12. Evolución de la concurrencia en función de $\tau = \gamma t$ con $\gamma_a = \gamma_b$, donde la condición inicial esta dada por los estados de Bell 78
- 5.13. Evolución de la concurrencia, asociada a la evolución (5.27) con condición inicial (4.54). La variable temporal es $\tau = \gamma t$, donde $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$ 79
- 5.14. Evolución de la concurrencia en función de $\tau = \gamma t$ donde $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$, donde la condición inicial esta dada por los estados de Bell 80
- 5.15. Evolución de la concurrencia, asociada a la evolución (5.31) con condición inicial (4.54). La variable temporal es $\tau = \gamma t$ con $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$, donde a parametriza la condición inicial. 82
- 5.16. Evolución de la concurrencia en función de $\tau = \gamma t$ con $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$, donde la condición inicial esta dada por los estados de Bell 83
- 5.17. Evolución de la concurrencia, asociada a la evolución (5.35) con condición inicial (4.54). Para diferentes valores del parámetro a . La variable temporal es $\tau = \gamma t$, con $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$ 85
- 5.18. Evolución de la concurrencia, asociada a la evolución (5.35) con condición inicial (4.54). La variable temporal es $\tau = \gamma t$, donde $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$ 85

Capítulo 1

Introducción

La teoría cuántica tal como se expone en la actualidad, descansa de manera clara sobre una base interpretativa que no es única. La interpretación de Copenhague es la más difundida. Intentar describir esta interpretación con precisión es difícil pues el término “interpretación de Copenhague” sugiere algo más que un conjunto definido de reglas para interpretar el formalismo matemático de la mecánica cuántica [1].

Esta interpretación ha sido sometida a uno de los cuestionamientos de mayor rigor, el argumento EPR de Einstein, Podolsky y Rosen, el cual condujo al llamado teorema de Bell, que es útil para demostrar las propiedades no-clásicas y la no-localidad de ciertos estados cuánticos [2, 3].

En el contexto de esta teoría la definición de no-localidad está asociada al fenómeno conocido como entanglement o entrelazamiento cuántico, la demostración experimental de que sistemas con entrelazamiento cuántico pueden violar la desigualdad de Bell es de enorme importancia en la historia de la ciencia, por que se considera como una refutación de las teorías de variables ocultas y con mayor relevancia sostiene uno de los recursos más importantes para las aplicaciones prácticas en el campo de la información cuántica [4].

Actualmente se sabe que una teoría completamente cuántica de la información y de su procesamiento descansa sobre los principios fundamentales de la mecánica cuántica, el entrelazamiento pasa de esta forma a no solamente ser un objeto de profundos debates filosóficos sino que constituye una nueva fuente de tareas cuánticas, su caracterización y evolución son de gran interés, así como los agentes causantes de su degradación, en este campo la teoría de sistemas cuánticos abiertos es de gran utilidad permitiendo extender el estudio hacia sistemas físicos más reales [5]. De esta forma la motivación para investigar sobre el entrelazamiento cuántico radica en sus potenciales aplicaciones en el área de la información cuántica.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo 2 se presentan las principales interpretaciones de la mecánica cuántica enfatizando en el debate epistemológico de la interpretación de Copenhague y la paradoja EPR. Continuando con esta discusión en el capítulo 3 se realiza una revisión y análisis de las desigualdades de Bell, con el fin de entender las principales consecuencias de su teorema para el entrelazamiento cuántico. El capítulo 4 está dedicado al estudio de las principales herramientas para el análisis de sistemas cuánticos entrelazados y la discusión de sistemas cuánticos abiertos. Posteriormente en el capítulo 5 se presenta la aplicación de los conceptos estudiados a lo largo de este trabajo, analizando sistemas de un qubit y de dos qubits acoplados a diferentes tipos de ruidos, en donde para el caso bipartito se analiza también el efecto del ambiente sobre el entrelazamiento. El estudio se basa en soluciones analíticas y simulaciones numéricas de la evolución de la matriz densidad. El conjunto de todos los análisis presentados son realizados con base al programa Mathematica (Wolfrange Research).

Capítulo 2

Interpretación de Copenhague y paradoja EPR

En este capítulo se presenta un marco teórico encaminado al problema interpretativo de la mecánica cuántica, sin olvidar su componente formal. Enfocándose exclusivamente en la importante cuestión de las ideas del físico danés Niels Bohr, que junto a las aportaciones de Max Born y Werner Heisenberg dieron origen a lo que hoy se conoce como interpretación de Copenhague (Ortodoxa) de la mecánica cuántica [6].

Además, se hace una descripción completa sobre la paradoja EPR, la cual es una oposición clara a los dos conceptos cruciales de la interpretación: la no localidad de la mecánica cuántica (es decir, la posibilidad de acción a distancia) y el problema de la medición.

La necesidad de atender los problemas de origen conceptual e interpretativo justifican el desarrollo de este capítulo, que busca dar una completa idea del porque y de donde surgen los tópicos básicos de los temas a investigar, rescatando la trascendencia que encierra el análisis interpretativo para originar y desarrollar aplicaciones [7].

Es importante destacar que en la actualidad la comunidad científica adopta una postura independientemente del interés que se tenga o no en el problema interpretativo, lo cual es aceptar que la teoría cuántica es completa y equivale a negar la posibilidad de su desarrollo y crecimiento. Al analizar este hecho se identifica una “crisis de comprensión” que se debe atender con la revisión, entendimiento y búsqueda de propuestas interpretativas.

2.1. Formalismo cuántico e interpretaciones

Esta sección se familiariza con aquellos conceptos claves del formalismo, como los axiomas de la mecánica cuántica y las relaciones de incertidumbre, debido a que su contenido

hace parte de un panorama estándar de la teoría cuántica y fundamentan las varias interpretaciones que han surgido a lo largo del desarrollo de la mecánica cuántica.

2.1.1. Postulados de la mecánica cuántica

Se especifica la teoría introduciendo seis postulados básicos:

1. El estado de un sistema

A un tiempo fijo t_0 el estado de un sistema físico está definido por un ket $|\psi(t_0)\rangle$ que pertenece al espacio de estados \mathcal{H}^1 . Note que puesto \mathcal{H} es un espacio vectorial, este postulado implica un principio de superposición: una combinación lineal de vectores de estado es un vector de estado.

Implicaciones:

- Características de la función de onda: Esta función debe ser univaluada, continua, con derivadas continuas, y de cuadrado integrable.
- Existen varias apreciaciones acerca de este postulado:
 - El vector de estado describe la información disponible sobre un sistema cuántico.
 - El vector de estado describe la realidad física de un sistema cuántico individual.
 - El vector de estado no es una propiedad de un sistema físico individual, si no simplemente un protocolo para preparar un conjunto de tales estados

Estos diferentes puntos de vista no tienen ninguna consecuencia sobre las aplicaciones prácticas de la mecánica cuántica. Esta es la razón por la cual la mayoría de los que trabajan en la mecánica cuántica no les interesa sus propuestas filosóficas.

2. Observables y Operadores

Cada cantidad física medible O viene descrita por un operador \hat{O} actuando sobre \mathcal{H} ;

¹ \mathcal{H} es un espacio de Hilbert

este operador es un observable. Note que en la mecánica cuántica un estado físico es representado por un vector y una cantidad física por un operador.

Implicaciones:

- Las propiedades del sistema como por ejemplo, la posición, la energía, el momento o el espín, se representan por medio de operadores lineales hermitianos.
- Un operador \hat{O} es lineal si y sólo si $\hat{O}(|A\rangle + |B\rangle) = \hat{O}|A\rangle + \hat{O}|B\rangle$ y $\hat{O}(|\alpha A\rangle) = \alpha\hat{O}(|A\rangle)$ para todo par de vectores $|A\rangle$ y $|B\rangle$ y toda constante α
- Para cualquier pareja de funciones bien comportadas:

$$\int_{R^n} \psi_i^* \psi_j dq \longrightarrow \langle \psi_i | \psi_j \rangle. \quad (2.1)$$

Un operador hermítico cumple:

$$\int_{R^n} \psi_i^* \hat{O} \psi_j dq = \int_{R^n} (\hat{O} \psi_i)^* \psi_j dq. \quad (2.2)$$

Si \hat{O} es un operador, puede existir un operador \hat{O}^* en el mismo espacio tal que :

$$\langle \hat{O} \psi_i | \psi_j \rangle = \langle \psi_i | \hat{O}^* \psi_j \rangle, \quad (2.3)$$

\hat{O}^* se denomina como el operador conjugado de \hat{O} . Para cada operador \hat{O} , existe y solo existe un operador conjugado \hat{O}^* . Se denominan *operadores hermíticos*, simétricos o auto conjugados a todos aquellos que coinciden con su conjugado: $\hat{O} \equiv \hat{O}^*$.

La hermiticidad garantiza que sus valores propios sean siempre reales.

3. Medida individual de observables, Autovalores de operadores

El único resultado posible de la medida de una cantidad física O es uno de los autovalores del correspondiente observable \hat{O} . Una medida de O siempre da un valor real puesto que \hat{O} es por definición hermítico. Si el espectro de O es discreto, los resultados que pueden ser obtenidos midiendo \hat{O} están cuantizados.

Implicaciones:

- sinónimos: {función propia, autofunción, eigen function, } ; { valor propio, auto valor, eigen value. }
- La relación entre los operadores que representan propiedades, y los valores de dichas propiedades en los posibles estados del sistema, está dada por lo que se conoce como la regla eigenvalor/eigenvector (E/E) que dice lo siguiente:
Un estado posee el valor λ de una propiedad representada por el operador \hat{O} si y sólo si ese estado es un vector propio de \hat{O} con valor propio λ .

4. Descomposición espectral

Este postulado tiene que ver con los tres casos de descomposición espectral.

- Caso de un espectro discreto no-degenerado
- Caso de un espectro degenerado
- Caso de un espectro continuo no-degenerado

5. La evolución en el tiempo

La evolución temporal del vector de estado $|\psi(t)\rangle$ viene dada por la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle, \quad (2.4)$$

siendo $\hat{H}(t)$ el observable asociado con la energía total del sistema

6. Postulado de proyección o de colapso

Si la medida de la cantidad física O en un sistema en el estado $|\psi\rangle$ nos da el resultado a_n , el estado del sistema inmediatamente después de la medida viene dada por la proyección normalizada

$$\frac{P_N |\psi\rangle}{\sqrt{\langle \psi | P_N | \psi \rangle}}, \quad (2.5)$$

de $|\psi\rangle$ sobre el auto espacio asociado con a_n .

En otras palabras, cuando se hace una medida en el tiempo t_0 del observable O dando

el resultado a_n , el vector de estado del sistema sufre una abrupta modificación y se convierte en $|u_n\rangle$ y este nuevo estado inicial es el que evoluciona; esto es lo que algunos llaman “*el colapso de la función de onda*” [8, 9].

2.1.2. El problema de la medida

El problema conceptual más difícil y controversial en la mecánica cuántica, tiene que ver con la naturaleza y el significado de la medida, o lo que hoy se conoce como el problema de la medición.

Los postulados establecen que la medida de una cantidad física siempre produce un resultado igual a uno de los autovalores, por ejemplo el autovalor q_n del operador \hat{Q} representando esa cantidad; que la función de onda inmediatamente después de la medida es la misma que la correspondiente auto función ϕ_n , y que si la función de onda es ψ antes de la medida, la probabilidad de obtener el resultado q_n es igual a $|c_n|^2$ donde $\psi = \sum_n c_n \phi_n$.

Este proceso, el que se conoce como el “colapso” de la función de onda, es fundamentalmente un proceso estocástico lo que significa que el resultado es imprevisible, no obstante, las propiedades estadísticas de un gran número de experimentos similares pueden ser calculadas.

En contraste, la evolución “unitaria” de la función de onda entre medidas es perfectamente determinista, esto significa que si conocemos la función de onda en cualquier tiempo, podemos, en principio, y en ausencia de medidas, usar la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para calcular su forma en cualquier tiempo futuro. Por lo tanto, se puede concluir que existen dos tipos de reglas diferentes para calcular la dependencia temporal en mecánica cuántica: la dependencia temporal de la ecuación de Schrödinger la cual controla la evolución determinista de la función de onda, y el postulado de la medida que es discontinua, indeterminista y nos produce los resultados al azar [6].

¿Cómo acomodar la teoría a este par de evoluciones temporales tan diferentes? ¿no dan lugar a inconsistencias?. De entrada parece que no, pues el formalismo estándar especifica en qué situación se debe utilizar una u otra de las leyes dinámicas. En detalle, se propone lo siguiente:

i) Cuando no está sucediendo una medición, todos los estados evolucionan de acuerdo

con la ecuación de Schrödinger.

ii) Cuando alguna medición sucede, los estados cambian de acuerdo con el postulado del colapso.

A primera vista, puede parecer razonable pues implica que en cada momento solo una de las leyes dinámicas debe ser utilizada, evitando así inconsistencias. Sin embargo, al mirarla con más detalle, revela ser sumamente insatisfactoria.

El problema esencial para poder utilizar el formalismo cuántico, depende crucialmente del concepto de medición, pero esta noción no tiene un significado preciso dentro del mismo formalismo. El resultado es entonces, en el mejor de los casos, un formalismo vago, con dos leyes de evolución incompatibles, definir la frontera entre estos dos procesos constituye lo que se conoce como “problema de la medida”[10].

2.1.3. Relaciones de incertidumbre, Desigualdades de Heisenberg

En términos matemáticos, el principio se escribe de la siguiente manera:

Para cada par de variables \hat{x} , \hat{p} canónicamente conjugadas, su conmutador es $i\hbar$ y por lo tanto se tiene la desigualdad

$$\Delta x_i \Delta p_{xi} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.6)$$

Esta desigualdad se cumple para los pares de variables (x, p_x) , (y, p_y) , (z, p_z) [6].

Las relaciones de incertidumbre son la expresión matemática del hecho de que en la mecánica cuántica es imposible mantener el ideal clásico. la física clásica nunca se enfrentó a un reto como este, en ella se considera que la posición y momentum en cualquiera de los instantes de tiempo son medibles con precisión. En la teoría cuántica se encuentra que no se puede hablar de precisión en la medida.

La principal implicación de las anteriores desigualdades es el principio de dualidad onda-partícula, el hecho de que una partícula parezca poseer cierto grado de incertidumbre acerca del lugar donde se encuentra, dice que esta partícula pareciera no tener un comportamiento determinado, en ciertas ocasiones presenta características de partícula y en otras las características de una onda.

Otras consecuencias:

- No existe “cosas” tales como un electrón que posea simultáneamente una posición precisa y un momentum preciso.
- No se pueden predecir los acontecimientos futuros con exactitud, si ni siquiera se puede medir el estado presente del universo de forma exacta
- La “limitación experimental” no tiene que ver con el experimentador, métodos o habilidades , mas bien, viene marcada por la naturaleza dual de la materia.
- Las relaciones de incertidumbre representaron para Bohr la idea de complementariedad, según la cual ambas descripciones, la ondulatoria y corpuscular son necesarias para entender el mundo cuántico.
- Una observación experimental sólo tiene sentido en el contexto del experimento y no puede utilizarse para extrapolaciones sobre características no observadas.²

Los anteriores postulados y las relaciones de incertidumbre conducen a un esquema constituido por:

1. Una estructura matemática y una postura física (postulados 1, 2, 3, 4 y 5).
2. Una actitud filosófica ante los objetos que constituyen la naturaleza (esto es la dualidad onda-partícula).
3. Un problema conceptual sobre la medida (postulado 6).

²Cuando se escribe una cierta Ψ , no se esta tratando de enunciar algo respecto a un sistema físico dado, sino algo respecto a nuestros conocimientos de tal sistema. “la teoría cuántica no se refiere a la naturaleza sino a nuestros conocimientos de la naturaleza”. W. Heisenberg.

2.1.4. Interpretaciones de la mecánica cuántica

La mecánica cuántica posee varias interpretaciones, la mayoría de ellas tienen como punto de conflicto el razonamiento de la medida, su necesidad e implicaciones, y por otra parte la fuente de controversia originada por la aparente no-localidad de la mecánica cuántica un fenómeno relacionado estrechamente con el entrelazamiento cuántico.

Las interpretaciones más destacadas son:

1. **Interpretación estadística (Max Born, 1926):** También conocida como la interpretación conjunta, establece que la función de onda no se aplica a un sistema individual, se propone que la ecuación de Schrödinger describe la evolución de un ensemble de sistemas igualmente preparados, proporcionando un análisis de la función de onda ψ que determina únicamente las propiedades estadísticas de un conjunto de sistemas. Por ejemplo: las partículas cuánticas se consideran algo así como “corpusculos materiales” que poseen trayectorias y momentos definidos aunque indeterminados por su estocasticidad, y las relaciones de incertidumbre se deben a errores en la medida (el mismo problema que se tiene con la estadística clásica). Para explicar la causa de la estocasticidad en los procesos se propone que existen variables físicas no conocidas “variables ocultas”. Esta interpretación es una descripción objetiva, causal y libre de elementos irracionales, es la que más se aproxima a nuestra lógica natural [11].
2. **Interpretación con variables ocultas (V.O) o de Bohm (Louis de Broglie, 1927; David Bohm, 1952):** La interpretación es un ejemplo de teoría de variables ocultas en la que se admite que las variables ocultas pueden proveer una descripción objetiva determinística que pueda resolver o eliminar muchas de las paradojas de la mecánica cuántica, el problema de la medida, el colapso de la función de onda, etc.
David Bohm publicó la teoría de variables ocultas no locales más conocida, en ella Bohm tomó la idea original de Louis de Broglie, de postular para cada partícula la existencia de una “onda guía” que gobierna su movimiento, la onda es una especie de onda piloto que guía a la partícula por medio de una fuerza cuántica puntual, la cual es generada por un potencial cuántico. Cada partícula existe en todo momento en todos

los tiempos y sigue una trayectoria precisa completamente determinada por el potencial cuántico mediante las ondas piloto que genera. En síntesis, en la interpretación bohmiana, el indeterminismo y la aleatoriedad desaparecen del universo (cuántico).

Además, afirma la existencia de acciones a distancia, introduciendo la idea del orden implicado (o implícito) que se explica como una conexión existente entre todas las partes del universo, que no es directamente accesible desde el mundo macroscópico, por lo cual los cálculos requeridos por el universo para llevar a cabo dichas conexiones son de una complejidad impresionante [12].

3. **Interpretación de Copenhague (Niels Bohr, Werner Heisenberg, 1927):** Esta interpretación es el eje del estudio del proyecto. Su análisis se realizara en este capítulo de manera completa.
4. **Interpretación de Neumann (John von Neumann , 1932, Wheeler, Wigner):** La interpretación de von Neumann- Wigner, también descrita como “ la conciencia provoca colapso (de la función de onda)”, es una interpretación de la mecánica cuántica en la que la conciencia se postula como necesaria para la realización del proceso de medición cuántica (la conciencia del observador debe tomar parte en la última fase de medición).
En la década de 1960, Eugene Wigner reformuló el “gato de Schrödinger” experimento mental como “amigo de Wigner” y propuso que la conciencia de un observador es la línea de demarcación que precipita el colapso de la función de onda, independiente de cualquier interpretación realista. La mente no física se postula a ser el único aparato de medición de verdad [11, 13].
5. **Interpretación multiverso (Hugh Everett, 1957).** Según esta interpretación, las implicaciones que se derivan del principio de superposición se llevan al extremo, se elimina el postulado que establece el colapso de la función de onda y la consecuencia es que todos los resultados posibles del un experimento ocurren realmente, pero cada uno en una “ramificación” distinta del universo. Así, se conserva el sentido probabilístico de la naturaleza cuántica, aunque ya no de forma fundamental si no como consecuen-

cia del estado de desconocimiento del observador, las cosas incluidos los aparatos de medida y los observadores, ocupan todos los autoestados posibles, de forma que, ante cada interacción el universo se desdobra en tantos universos como posibles resultados tenga tal interacción. De este modo el gato de schödinger no se encuentra en una superposición de auto estados sino que, inmediatamente, el universo se desdobra en dos : uno con el gato vivo (y el observador consciente de ello) y otro con el gato muerto (y el observador consciente de ello) [11].

2.2. Interpretación de Copenhague

2.2.1. Origen de la interpretación de Copenhague, (Un poco de historia)

La interpretación de Copenhague marcó una ruptura profunda respecto a las concepciones físicas tradicionales y al modo de concebir el mundo. Ya con la llamada “vieja teoría cuántica” (los conceptos introducidos en la primera década del siglo XX por M. Planck, A. Einstein, Sommerfeld y otros) se había producido una primera superación radical del enfoque mecanicista-clásico que había dominado la física del siglo precedente. La situación de la física atómica hacia 1920, generaba grandes inquietudes en la comunidad científica Europea, consciente de la falta de una teoría general que diera cuenta y explicara de manera clara y menos artificiosa los fenómenos atómicos conocidos hasta el momento.

Para ese entonces los grandes centros internacionales de física, cada uno de los cuales se caracterizaba por seguir una de las direcciones de trabajo que se presentan en la física teórica, eran: *Copenhague*, donde el prestigio alcanzado por Bohr le había valido la creación de un instituto internacional de física con una tendencia conceptual o filosófica, que aspiraba ante todo a establecer con claridad los conceptos con los que hay que describir los fenómenos naturales; *Munich*, con la tendencia fenomenológica (intentando relacionar de forma significativa los resultados observados experimentalmente por medio de fórmulas matemáticas) esta línea de trabajo era claramente representada por la escuela de Sommerfeld y que entre sus alumnos contaba con Pauli, Heisenberg entre otros; y *Gotinga* que era por excelencia la

cuna de la matemática (tendencia matemática) de entonces, con Hilbert a la cabeza y adonde acababan de llegar futuros premios Nobel como Franck y Born.

El auge de la física de entonces propició, gracias a la recuperación económica de Alemania tras la posguerra, que todas estas tendencias se dieran cita en Gotinga en el verano de 1922, a propósito de un ciclo de conferencias que impartiría Bohr en esta universidad. Posteriormente a este encuentro y con enormes consecuencias, se generaron las primeras discusiones entre Niels Bohr y Werner Heisenberg sobre conceptos físicos relacionados con las órbitas electrónicas y el hecho, que tanto preocupaba a Bohr, de que el lenguaje de la física clásica no era apropiado en la teoría atómica.

Hacia 1924/1925, los encuentros entre los tres institutos y principalmente las intensas relaciones de sus representantes (Heisenberg, Bohr y Born), promovieron que se hablara ya de una nueva mecánica cuántica, término que apareció acuñado por primera vez en un trabajo que Born publicó ese verano con el título "*Sobre la mecánica cuántica*". A comienzos de 1926 se conoció el trabajo de Schrödinger sobre la mecánica ondulatoria, siguiendo las ideas de de Broglie, un gran aporte para la nueva mecánica cuántica, pero que representaba un problema más (el encuentro entre la mecánica matricial y ondulatoria), la prueba de equivalencia entre la mecánica cuántica de Gotinga (matricial) y la ondulatoria fue enviada por el propio Schrödinger el 18 de marzo de 1926, equivalencia que también demostró Pauli.

En septiembre de ese año, Schrödinger y Heisenberg fueron invitados a Copenhague por Bohr para tener ocasión de debatir los aspectos disconformes de la teoría. Las discusiones entre los tres comenzaron de inmediato. Fueron intensas y se desarrollaron día tras día. Dos semanas después, Schrödinger, regresó a Viena sin reconocer las dificultades que presentaban las ondas de materia y su idea de evitar los saltos cuánticos, entretanto Heisenberg se quedó en Copenhague trabajando en las ideas discutidas, centrando su atención en la trayectoria del electrón en la cámara de niebla. De regreso al Instituto de Bohr, realizó precipitadamente unos cálculos que confirmaron sus supuestos; como resultado, encontró que el producto de la masa del electrón por su posición y su velocidad no podía ser más pequeño que la constante de Planck, enunciado que se conoce por relación de incertidumbre, y le valió el Premio Nobel de Física en 1932.

En sus vacaciones en Noruega, Bohr también había avanzado y llegó a concebir el concepto de complementariedad, que permitía conocer un mismo suceso bajo dos aspectos distintos pero complementarios. Solamente quedaba el debate con la opinión pública del mundo físico, que tuvo lugar en otoño de 1927 en una asamblea general de físicos en Como (Italia), en la que Bohr dio una conferencia donde resumía todos los aspectos de la teoría cuántica. Entonces, había “nacido” la interpretación de Copenhague [14].

2.2.2. Tesis de la interpretación de Copenhague

A continuación se expondrán los principales pilares de la interpretación, entre ellos la incapacidad para trazar un límite entre el mundo cuántico y el clásico macroscópico, el fundamento probabilístico de la función de onda, los fenómenos de superposición, el problema de la medida, la dualidad onda-partícula, las relaciones de incertidumbre, que en la interpretación también denominada Ortodoxa se traduce en indeterminismo, subjetividad, completud, y complementariedad

El fundamento probabilístico de la función de onda

“Estamos aquí tan lejos de una descripción causal, que incluso se podría decir que un átomo en un estado estacionario tiene la posibilidad de elegir libremente a otros estados estacionarios entre varias transiciones posibles”.

Niels Bohr

La comprensión de la mecánica cuántica exige modelos mentales no comparables con los de la física clásica, donde cada situación es representable con una imagen completa, objetiva en el terreno de lo causal-determinista, en este ámbito se conocen con precisión las condiciones en que se encuentra un proceso físico en un instante cualquiera y además, se conocen las leyes que gobiernan su comportamiento, entonces es posible proveer las condiciones en que ese mismo proceso se encontrará en cualquier otro instante futuro, o en que se encontraba

en cualquier instante pasado. Contrario a esta visión, la mecánica cuántica no permite esta estructuración [15]; el procedimiento es ligeramente distinto. Podemos interesarnos, por ejemplo, en el movimiento de un electrón en una cámara de niebla y podemos determinar, mediante algún tipo de observación, la posición y velocidad iniciales del electrón. Pero esta determinación no habrá de ser precisa; contendrá, por lo menos, las inexactitudes derivadas de *las relaciones de incertidumbre*, y probablemente otros errores mayores debidos a dificultades propias del experimento. Es donde se introduce una *función de probabilidad*, que representa la situación experimental en el momento de la medición, incluyendo también los probables errores de medida. La interpretación de Copenhague, postula que la función de onda ψ contiene *toda* la información acerca del sistema y de acuerdo con el postulado quinto, la ecuación de Schrödinger describe la evolución de un *único* sistema. Esta función de probabilidad representa una mezcla de dos cosas: en parte, un hecho, (en la medida en que asigna a la situación inicial la probabilidad uno en el momento inicial) y en parte, el conocimiento de un hecho. Por lo que para esta interpretación las afirmaciones probabilistas son juicios subjetivos, como una medida del grado de incertidumbre o de ignorancia que tenemos del sistema y no como una medida de la fracción de casos que objetivamente ocurren en cada situación. Así, La interpretación implica el abandono de la hipótesis determinista y adopta la idea de que las “leyes de la naturaleza” son intrínsecamente probabilistas [6, 16].

La intervención del observador -El problema de la medida

“Lo que observamos no es la naturaleza en sí misma,
sino la naturaleza expuesta a nuestro método de observación”.

Werner Heisenberg

A diferencia de la mecánica clásica, en la cual las variables dinámicas del sistema lo describen completamente sin ninguna restricción (con precisión absoluta), en la mecánica cuántica la situación no es tan directa, la medición requiere la interacción del sistema con un aparato de medida el cual se considera clásico, en el proceso el estado dinámico del sistema se ve afectado por la medida, esto en mecánica clásica es despreciable pero en mecánica cuántica es de relevancia fundamental puesto que la medida perturba el sistema de una manera impre-

visible e incontrolable [17].

La evolución temporal de un sistema dinámico está regida por dos mecanismos distintos: por una parte hay una evolución dinámica de tipo determinista, continuo que viene dado por la ecuación de Schrödinger, este tipo de evolución se produce en el caso de sistemas “aislados”, o sea no sujetos a observación (o medida). Por otro lado, cuando el sistema microscópico (es decir, partícula, átomo, etc) se observa mediante un sistema macroscópico (aparato de medida), se produce un salto cuántico, un proceso discontinuo, desde una superposición de estados a uno bien definido (autoestado del observable que se mide). Es este proceso discontinuo, el “salto cuántico”, el responsable de la mayoría de los problemas de interpretación de la teoría cuántica [18].

En la teoría cuántica cada observación introduce un elemento por completo nuevo e incontrolable, como consecuencia de la imposibilidad de desprejar la interacción con el instrumento de medida. Como ha hecho notar E. Wigner, “todo va bien en mecánica cuántica, mientras que no se pregunta cómo tiene lugar la observación”.

La interpretación de Copenhague aborda este problema proponiendo:

- a) La función de onda ψ , se refiere solo a propiedades de los datos observacionales de que disponemos para conocer y referirnos al sistema y como estos datos varían con nuestras observaciones, -ellas, las observaciones- son las que definen el estado del sistema. En esta interpretación, se propone como hipótesis fundamental de que el sistema observado y el observador son lógicamente inseparables a nivel cuántico.
- b) Cuando se interactúa con un sistema (se mide), es decir, se hace parte del sistema y por supuesto de la función de onda, y en este caso el postulado tres dice que solo podemos obtener uno de los autovalores de esta y el postulado seis nos dice que la función de onda colapsa, esto significa que solo el autovector asociado con el autovalor resultante sobrevive y sigue evolucionando, los demás desaparecen. Lo extraño de la interpretación de Copenhague del mundo cuántico es que el acto de observar al sistema físico es lo que obliga a seleccionar una de sus opciones, que entonces se hace real. Es decir, cuando mido la posición de la partícula su momentum desaparece y viceversa (colapsa).

En el experimento de las dos rendijas, la interferencia de las probabilidades puede interpretarse en términos del electrón que, tras abandonar el disparador, se desvanece desapareciendo de la vista, y es sustituido por una colección de electrones fantasmas, cada uno con un camino diferente hasta llegar a la pantalla detectora. Los fantasmas interfieren entre sí y cuando se observa la detección de los electrones en la pantalla se encuentran las leyes de esta interferencia, incluso si se trabaja con un solo electrón real en cada instante. Sin embargo, esta distribución de electrones fantasmas solo da cuenta de lo que pasa cuando no se observa y cuando se observa todos los fantasmas, excepto uno desaparecen y uno de estos fantasmas se materializa como un electrón real. El “Colapso de la función de onda” es el núcleo de la interpretación de Copenhague (1927). Si hay más de una forma en que un suceso pueda ocurrir (estando abiertos los dos agujeros) entonces la probabilidad de cada suceso posible (la probabilidad de que un electrón llegue a un detector determinado) viene dada por el cuadrado de la suma de las funciones de onda, y aparece la interferencia. Pero si se efectúa una observación para descubrir cual de las alternativas ocurre en realidad (detectar por que agujero pasó el electrón) la distribución de probabilidad es justamente la suma de los cuadrados de las respectivas funciones de onda, y el término de interferencia desaparece; la función de onda colapsa.

Se sabe que el primer postulado implica un principio de superposición: Una combinación lineal de vectores de estado es un vector de estado (efectos de interferencia). ¿Qué es lo que hace impensable este postulado? ¿la función de onda ψ contiene un electrón con espín arriba y abajo a la vez! ya que acuerdo con la interpretación de Copenhague la función de onda ψ describe toda la información acerca del sistema, es decir describe a un electrón que tiene espín $\frac{\hbar}{2} \equiv$ espín arriba y $-\frac{\hbar}{2} \equiv$ espín abajo *¡a la vez!*. ¿Qué pasa cuando “yo” hago la medición? *¡hago colapsar la función de onda!* y solo uno de los estados sobrevive y el otro colapsa, es decir mi conciencia hace que la función de onda colapse y por lo tanto soy “yo” el que crea un electrón, la creación del espín le corresponde a la naturaleza. hay que recordar que cuando se mide se hace parte, parcialmente, de la función de onda, es decir el cuerpo y el cerebro hacen

parte de la función de onda y de la ecuación de Schrödinger *¡pero no la conciencia!* [6].

Argumento de complementariedad

De acuerdo con Bohr uno de sus objetivos es: “[defender] un punto de vista denominado adecuadamente complementariedad para abarcar los rasgos característicos de individualidad de los fenómenos cuánticos y aclarar al propio tiempo los aspectos particulares del problema de la observación en este campo de la experiencia”.

En general, el argumento de la complementariedad se fundamenta en tres elementos:

1. *La condición cuántica:* plantea el cuanto de acción como un descubrimiento universal y elemental. Además éste imprime un carácter de indivisibilidad y totalidad a los fenómenos. A este carácter de indivisibilidad Bohr lo llama “el postulado cuántico”. Este es un postulado que no se discute, se acepta sin más.
2. *Implicaciones del postulado cuántico:* el postulado cuántico implica una discontinuidad en los fenómenos de la naturaleza rompiéndose así la idea de continuidad de los procesos físicos. Además, toda observación implica una interacción incontrolable entre los sistemas físicos y el aparato de medición, de ahí que sea imposible llevar a cabo de manera simultánea descripciones espacio-temporales y causales.
3. *La dualidad onda partícula:* esta es, una evidencia empírica que se manifiesta en la existencia de dos formalismos consistentes empleados para describir y predecir fenómenos que son mutuamente excluyentes, de acuerdo con Bohr, ambas interpretaciones de los fenómenos surgen como la expresión exacta de la evidencia experimental y no se trata de contradicciones sino más bien de “descripciones complementarias” de los fenómenos que sólo juntas constituyen una generalización natural, para describir la totalidad de los fenómenos que comprenden a los sistemas atómicos (cuánticos).

Estos elementos son constantes en la argumentación de Bohr, ellos marcan el punto de partida para el establecimiento del nuevo marco conceptual. Implícito en estos elementos de

la argumentación está la noción de realismo; la necesidad de una descripción completa de los fenómenos es decir, una representación exhaustiva de la realidad (i.e., que abarque las manifestaciones fenomenológicas de onda y de partícula) y, la necesidad de asegurar la consistencia en la interpretación de la teoría cuántica [19].

Pensando en el principio de dualidad y recordando que decía W. Heisenberg:

“Un átomo no es una formación material en el espacio y en el tiempo, en cierto modo es un símbolo adoptado, por medio del cual las leyes de la naturaleza adquieren una forma particularmente simple. Es decir, los átomos no son “cosas”. Las ideas clásicas acerca del mundo tienen que ser abandonadas. El movimiento de un átomo ya no puede ser descrito en término del concepto clásico de una “cosa” moviéndose continuamente de un lugar a otro. Esta idea solamente trabaja para objetos grandes. Si la “cosa” es del tamaño atómico esto no tiene sentido”.

En otras palabras, los conceptos son razonables únicamente cuando ellos describen bien “nuestra” observación real y no de “nuestras” ideas acerca de lo que pensamos que está sucediendo. Puesto que un átomo no se le puede ver, este es un concepto sin significado. Un concepto es útil cuando se sabe como fue realizada su medida. Este punto de vista cuestiona cualquier concepto que no tuviera definición operacional. Se puede definir únicamente lo que se puede medir. Solo tienen significado real las preguntas sobre los resultados experimentales y son estas las únicas preguntas que puede contestar la física teórica.

Finalizando con lo que dice Ernst Pauli al respecto “El concepto de objeto material, de constitución y naturaleza independientes del observador, es ajeno a la física moderna, la que, forzada por los hechos, ha debido renunciar a esta abstracción” [6].

2.2.3. Consecuencias de esta interpretación

- La teoría cuántica es universal; el carácter probabilístico de la naturaleza es irreducible, el indeterminismo no se “elimina” mediante más conocimiento experimental, pues dicho conocimiento está limitado por el carácter absoluto del cuanto de acción, o, en otras palabras, del principio de Heisenberg.

- La función de onda Ψ es un objeto matemático.
- Un principio de superposición que nos dice las cosas son y no son a la vez.
- Una “partícula cuántica” que no es una formación material en el espacio y en el tiempo sino un símbolo adoptado.
- “partículas cuánticas” que no son ni ondas, ni partículas.
- Unas relaciones de conmutación que dicen que dos magnitudes canonicamente conjugadas (que por tanto no conmutan) no pueden ser medidas simultáneamente y que, por tanto, si mido una de estas la otra desaparece.
- Demuestra John Von Neumann en términos matemáticos: cuando un sistema microscópico se empareja con un instrumento de medida macroscópico, el efecto de emparejamiento consiste en hacer que el sistema microscópico se comporte como si estuvieran ausentes los efectos de interferencia. Es decir, el estado del microsistema pasa de una superposición de estados a un conjunto genuino de posibilidades alternativas excluyentes. Por desgracia, este análisis no equivale a una demostración de la “reducción” a una realidad, puesto que otro resultado del emparejamiento consiste en transferir efectos de interferencia al aparato medidor, y para que el aparato se “reduzca” a una realidad, otro sistema debe hacer otra medición del aparato, este el mismo razonamiento puede extenderse al siguiente sistema, requiriendo entonces otro instrumento, y así sucesivamente, al parecer, hasta el infinito. Solo un observador conciente, haciendo algo no contemplado por la física, puede inducir el colapso de la función de onda. Solo un observador conciente puede llevar a cabo una auténtica observación. *“La ciencia más empírica, la física, parece basarse en última instancia en la conciencia”*[6].

Estas consecuencias hacen de la mecánica cuántica una teoría matemática, subjetiva, no causal, no determinista, no permite calcular trayectorias y que además es un observador (humano) el que está creando la realidad. Todo esto nos hace pensar ¿Qué tiene la mecánica

cuántica de realidad? Sin embargo, no existe hasta ahora un experimento que la contradiga, y es más, un tercio de la economía mundial proviene de la construcción de aparatos que funcionan con algún principio cuántico, lo cual nos dice que esta teoría va por buen camino. De este modo, la teoría cuántica muestra, como dice Bohr “la vieja sabiduría que aconseja no olvidar, al buscar la armonía de la vida, que en el drama de la existencia somos al mismo tiempo actores y espectadores. Es comprensible que en nuestra relación científica con la naturaleza nuestra propia actividad se torne muy importante cuando debemos tratar con porciones del mundo en las cuales sólo podemos penetrar por medio de los más elaborados instrumentos” [16].

2.3. Crítica de Einstein Podolsky y Rosen, *Paradoja EPR*

Es usual asociar la oposición de Einstein al indeterminismo de la teoría cuántica, para Einstein el universo se rige, finalmente, por leyes deterministas, pero no era éste el punto esencial de las dudas de Einstein respecto al carácter que los “padres” de la interpretación de Copenhague atribuían a la mecánica cuántica. Era, sobre todo, el hecho de que la mecánica cuántica parece indicar la inexistencia de una realidad física objetiva, independiente del observador, lo que motivaba en lo profundo la oposición de Einstein a dicho carácter definitivo de la teoría, a la cual consideraba enormemente positiva, pero provisional y sujeta a mejora por una eventual teoría causal, determinista y objetiva [18].

En 1935, Einstein, junto con Boris Podolsky y Nathan Rosen, publican un artículo cuyo título era *¿Puede considerarse completa la descripción de la realidad física que da la Mecánica Cuántica?*, o mejor conocido como argumento EPR [2]. Así el argumento EPR además de formular una crítica concreta de los dos conceptos cruciales de la interpretación: la no localidad de la mecánica cuántica (es decir, la posibilidad de acción a distancia) y el problema de la medición, estableció las bases de lo que contaba como una genuina interpretación realista, siendo el origen de las llamadas “teorías de variables ocultas” [20].

La descripción del argumento EPR se basa en el análisis de un experimento mental, es decir, un experimento conceptualmente consistente.

2.3.1. La descripción del argumento EPR

La idea básica de la propuesta consiste en utilizar la información experimental sobre una partícula para deducir propiedades, como la posición y el momento, de una segunda partícula de la siguiente manera:

→ Sean dos partículas, A y B, que después de haber interactuado se separan.

→ La mecánica cuántica dice: para cada partícula individual, $[q, p] \neq 0$, esto es, posición y momento son observables complementarios, de forma que la medida de uno introduce una indeterminación en el otro (en la potencialidad de resultados para la medida del otro), de acuerdo con las relaciones de indeterminación; en otras palabras es imposible medir la posición y el momento de una partícula, simultáneamente, con precisiones respectivas ilimitadas.

→ Se introduce y se acepta el siguiente criterio de realidad EPR (condición suficiente):

Criterio de realidad EPR: “Si, sin perturbar en modo alguno un sistema, podemos predecir con certeza (es decir, con una probabilidad igual a la unidad) el valor de una magnitud física, entonces existe un elemento de realidad física correspondiente a esta cantidad física”

→ Se considera ahora los observables posición Q y momentum P:

$$Q = q_A - q_B \qquad P = p_A + p_B$$

Que son tales que $[Q, P] = 0$, de manera que se les pueden asignar, simultáneamente elementos de realidad (dado un montaje experimental concreto).

→ Se prepara a los sistemas (partículas A y B) en un estado descrito por una función de onda ψ (EPR construye una explícitamente) que sea:

a) autofunción de P con valor propio P_0 : $P\psi = P_0\psi$

b) autofunción de Q con valor propio Q_0 : $Q\psi = Q_0\psi$

→ Si se realiza una medida simultánea de q_A sobre la partícula A y q_B sobre la partícula B, los resultados mostrarán la correlación estricta $q_A - q_B = Q_0$.

→ A continuación, se separa A y B suficientemente (una gran distancia EPR separabilidad o regiones EPR separadas).

Al realizarse una medida de la posición de A, se obtiene como resultado q_A . Se puede prede-

cir con certeza que una medida de la posición de la partícula B daría, si se hiciera, el resultado $q_B = q_A - Q_0$.

Si se consideran muchos sistemas idénticos entre sí de dos partículas A y B, y preparados todos en el estado ψ , siempre que se midieran las posiciones de las dos partículas, en cada sistema de parejas A - B, se encontraría el resultado $q_A - q_B = Q_0$. Es decir, al ir midiendo sobre cada uno de esos sistemas iríamos encontrando los resultados $q_{A1}, q_{A2}, q_{A3}, \dots$, y podemos predecir con certeza que mediciones simultáneas de q_B proporcionarían los resultados correspondientes $q_{A1} - Q_0, q_{A2} - Q_0, q_{A3} - Q_0, \dots$

⇒ Por tanto, evocando el criterio de realidad EPR, puede concluirse que a la posición q_B de la partícula B le corresponde un elemento de realidad. Este elemento de realidad debe existir se mida o no la posición q_A de la partícula A, porque, si no, habría de ser creado instantáneamente y a distancia al hacer la medida de q_A

Entonces, por el criterio de realidad EPR, a q_B le corresponde un elemento de realidad para todos los sistemas del ensemble.

⇒ Se escoge ahora otro subconjunto de sistemas del ensemble, y se mide p_A , obteniendo $p_{A1}, p_{A2}, p_{A3}, \dots$ ahora se puede predecir con certeza que la medida de p_B dará como resultado $P_0 - p_{A1}, P_0 - p_{A2}, P_0 - p_{A3}, \dots$, entonces a p_B le corresponde un elemento de realidad para todos los sistemas del ensemble y finalmente a ambos q_B y p_B le corresponde un elemento de realidad para todos los sistemas del ensemble.

⇒ Se intercambia $A \leftrightarrow B$. Entonces a ambos q_A y p_A le corresponde un elemento de realidad para todos los sistemas del ensemble

⇒ Se concluye que posición y momento de una partícula son considerados como “reales”, antes de hacer una medida, en el sentido de existir algo en la realidad física de A y B que conduce con certeza a resultados predeterminados siempre, y cuando, una medida de uno u otro de los observables se realiza.

⇒ Se introduce y se acepta el siguiente criterio de completitud EPR (condición necesaria):

Criterio de completitud EPR: “Cada elemento de la realidad física debe tener una contrapartida en la teoría física” [2]

Einstein et al. observan que los criterios de realidad física y completitud enunciados en la

sección anterior, aplicados en mecánica cuántica al caso de dos cantidades descritas por operadores que no conmutan (el conocimiento de la una excluye el conocimiento de la otra) llevan a una disyuntiva excluyente entre dos afirmaciones:

1. O la descripción de la realidad dada por la función de onda no es completa.
2. O dos observables conjugados no pueden tener realidad simultáneamente.

La estrategia de Einstein et al. fue mostrar que dos observables conjugados de una partícula en un estado enredado podrían pertenecer a la misma realidad física. Esto haría que (2) sea falso y por lo tanto (1) verdadero por lo tanto se concluye:

''La Mecánica Cuántica es una teoría incompleta'' [21].

Descripción mecano-cuántica

En la descripción mecano-cuántica del comportamiento de una partícula con un grado de libertad, el estado de esta partícula viene caracterizado por la función de onda ψ , la cual es una función de las variables escogidas para caracterizar su comportamiento, se sabe también que para todo observable físico existe un operador \hat{O} hermitico, tal que si ψ es autofunción de \hat{O} se tiene que

$$\hat{O}\psi = O\psi \quad \text{con } O \text{ su autovalor,} \quad (2.7)$$

Tomando por ejemplo ψ en el espacio de la coordenadas $\psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar}p_0x}$ entonces:

$$\hat{p}\psi(x) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{\frac{i}{\hbar}p_0x} = p_0\psi \Rightarrow \hat{p}\psi = p_0\psi. \quad (2.8)$$

Teniendo en cuenta ahora el operador posición y como estamos en el espacio de coordenadas, operar con \hat{x} significa simplemente multiplicar por x

$$\hat{x}\psi = x\psi. \quad (2.9)$$

Se observa que en este caso x es la variable independiente y por lo tanto no se tiene un valor particular para x , es decir x no puede ser determinada. La probabilidad de encontrar la

partícula en un intervalo (a, b) es

$$P(a, b) = \int_a^b \bar{\psi}\psi dx = \int_a^b dx = a - b, \quad (2.10)$$

es el mismo intervalo.

La conclusión Mecano-cuántica es: *cuando el momento de una partícula es conocido su coordenada no tiene realidad física.*

En general, en mecánica cuántica, se demuestra que: si dos operadores correspondientes a las cantidades físicas \hat{A} \hat{B} , no conmutan, es decir $\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$; el conocimiento preciso de una de ellas excluye el conocimiento de la otra (es decir, esta cantidad no tiene realidad física), de aquí se concluye que:

- La descripción Mecano-Cuántica dada por la función de onda no es completa, o
- Cuando los operadores correspondientes a dos cantidades físicas no conmutan, las dos cantidades físicas no pueden tener realidad simultánea

Recordando: *La condición de completez*: cada elemento de la realidad física debe tener un contratérmino en la teoría física.

Se trabaja ahora con dos sistemas I y II los cuales interactúan en el intervalo de tiempo entre $t = 0$ y $t = T$ y supongamos que el estado de los dos sistemas para $t < 0$ eran conocidos. Se puede calcular, usando la ecuación de Schrödinger, el estado del sistema combinado I+II para cualquier tiempo posterior, en particular para $t > T$. Sea $\Psi(x_1, x_2)$ la función de onda de estos dos estados, no se puede saber el estado en el cual uno de los dos sistemas ha quedado después de la interacción ya que esto solo puede ser hecho unicamente con la ayuda de medidas posteriores (reducción del paquete de ondas-colapso de la función de onda).

Veamos esto:

Tomando dos operadores \hat{A} y \hat{B} no conmutantes y sean $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ los autovalores de una cantidad física \hat{A} que pertenece al sistema I y sean $u_1(x_1), u_2(x_1), u_3(x_1) \dots u_n(x_1)$ sus autovectores con x_1 las variables utilizadas para describir el sistema I, y expandamos $\Psi(x_1, x_2)$ como función de x_1

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x_2)u_n(x_1). \quad (2.11)$$

Los $\psi_n(x_2)$ son considerados como los coeficientes de expansión de $\Psi(x_2, x_1)$ en autofunciones de $u_n(x_1)$. Se supone que la cantidad \hat{A} es medida y se halla que esta tiene el valor a_k . Se concluye entonces que después de la medida el primer sistema queda en el estado $u_k(x_1)$ y el segundo sistema queda en el estado $\psi_k(x_2)$ es decir, la función de onda $\Psi(x_1, x_2)$ colapsa en:

$$\Psi(x_1, x_2) = \psi_k(x_2)u_k(x_1), \quad (2.12)$$

según el postulado sobre reducción del paquete de ondas.

se toma ahora la cantidad \hat{B} , perteneciente también al sistema I, la cual tiene como autovalores $b_1, b_2, b_3 \dots b_n$ y con autovectores $v_1(x_1), v_2(x_1), v_3(x_1) \dots v_n(x_1)$ y expandiendo Ψ de nuevo como:

$$\Psi(x_1, x_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x_2)v_n(x_1), \quad (2.13)$$

después de la medida se halla que tiene el valor b_s por lo tanto la función de onda $\Psi(x_1, x_2)$ colapsa en:

$$\Psi(x_1, x_2) = \phi_s(x_2)v_s(x_1). \quad (2.14)$$

Aquí se tiene un problema muy serio. veamos;

- Para el primer caso, después de la medida, el sistema I queda en el autoestado dado por la función de onda $u_k(x_1)$ y el sistema II queda en el autoestado dado por la función de onda $\psi_k(x_2)$ es decir el sistema colapsa en $\Psi(x_1, x_2) = \psi_k(x_2)u_k(x_1)$
- Para el segundo caso, después de la medida, el sistema I queda en el autoestado dado por la función de onda $v_s(x_1)$ y el sistema II queda en el autoestado dado por la función de onda $\phi_s(x_2)$ es decir el sistema colapsa en $\Psi(x_1, x_2) = \phi_s(x_2)v_s(x_1)$

es decir, como consecuencia de dos diferentes medidas realizadas en el sistema I, el sistema II queda con estados con dos diferentes funciones de onda $\psi_k(x_2)$ y $\phi_s(x_2)$; por otro lado, puesto que en el tiempo de la medida los dos sistemas ya no interactúan, ningún cambio real puede tener lugar en el sistema II debido a que estas estas medidas se hicieron solamente en el sistema I, en consecuencia es posible asignar dos diferentes funciones de onda $\psi_k(x_2)$ o $\phi_s(x_2)$ a la misma realidad.

¿Qué pasaría si $\psi_k(x_2)$ y $\phi_s(x_2)$ son autofunciones de operadores que no conmutan como por ejemplo \hat{p} y \hat{q} ? Supongamos que cada uno de los dos sistemas son dos partículas y que se puede escribir:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0) p dp \quad \text{con } x_0 = \text{constante.} \quad (2.15)$$

Puesto que en este caso se tiene espectros continuos, vamos a expandir la función $\Psi(x_1, x_2)$ en autofunciones $u_p(x_1)$ con autovalores $\psi_p^*(x_2)$:

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_p^*(x_2) u_p(x_1) dp. \quad (2.16)$$

Sea \hat{A} el operador momentum de la primera partícula, con el subíndice p indicando sus autofunciones del operador momentum

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \quad (2.17)$$

y sus respectivas autofunciones

$$u_p(x_1) = e^{\frac{i}{\hbar} x_1 p} \quad \psi_p^*(x_2) = e^{-\frac{i}{\hbar} (x_2 - x_0) p}, \quad (2.18)$$

se puede escribir:

$$\Phi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{i}{\hbar}(x_1 - x_2 + x_0) p dp \quad \text{con } x_0 = \text{constante.} \quad (2.19)$$

Aplicando ahora el operador momentum a cada una de estas autofunciones

$$\hat{p}u_p(x_1) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1} u_p(x_1) = pu_p(x_1), \quad (2.20)$$

$$\hat{p}\psi_p(x_2) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2} \psi_p(x_2) = -p\psi_p(x_2). \quad (2.21)$$

Se toma ahora la siguiente expansión para $\Psi(x_1, x_2)$

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_x(x_2) v_x(x_1) dx, \quad (2.22)$$

con

$$v_x(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_1)p} dp \quad y \quad \phi_x(x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i}{\hbar}(x-x_2+x_0)p} dp, \quad (2.23)$$

por otro lado si se aplica el operador posición \hat{Q} a la primera primera partícula, este tiene por autofunción

$$v_x(x_1) = \delta(x_1 - x) \quad \text{con autovalor} \quad x, \quad (2.24)$$

y el operador posición para la segunda partícula tiene por autofunción

$$\phi_x(x_2) = \delta(x - x_2 + x_0) \quad \text{con autovalor} \quad (x + x_0). \quad (2.25)$$

Por tanto, en general es posible para ψ_k y ϕ_r ser autofunciones de dos operadores no conmutantes que corresponden a cantidades físicas p_k y q_r respectivamente. Así, si se mide p ó q se esta en posición de predecir con certeza y sin perturbar de ninguna manera el segundo sistema, el valor de la cantidad p_k o el valor de la cantidad q_r . De acuerdo al criterio de realidad, en el primer caso se debe considerar la cantidad p_k como un elemento de la realidad, y en el segundo caso la cantidad q_r es un elemento de la realidad. Como se ha visto ambas funciones de onda ψ_k y ϕ_r pertenecen a la misma realidad.

Anteriormente habíamos dicho que: (1) La descripción Mecano-Cuántica dada por la función de onda no es completa o (2) cuando los operadores correspondientes a dos cantidades físicas no conmutan, las dos cantidades físicas no pueden tener realidad simultánea. Partiendo entonces de la suposición que da la función de onda de una descripción completa de la realidad física, se ha llegado a que dos cantidades físicas cuyos operadores son no conmutantes pueden tener realidad simultánea, por lo tanto la negación de (2) lleva a que la descripción mecano-cuantica de la realidad física dada por la función de onda es incompleta.

Esta conclusión puede objetarse siempre y cuando el criterio de realidad no sea lo suficientemente *restrictivo*. Realmente se podría no arribar a esta conclusión si se insiste que dos o más cantidades físicas pueden ser consideradas como elementos simultáneos de realidad unicamente cuando ellos pueden ser simultaneamente medidos o predichos. Con base en este punto de vista, puesto que la una o la otra pero no ambas simultaneamente, de las cantidades \hat{P} y \hat{Q} pueden ser predichas, ellas no son simultaneamente reales. Esto hace que la realidad

de \hat{P} y \hat{Q} dependan del proceso de medida llevado a cabo en el primer sistema, el cual no perturba el segundo sistema de ninguna manera. Ninguna definición razonable de realidad permitiría esto [6].

La alternativa elegida por EPR de considerar que la mecánica cuántica daría una versión incompleta de la realidad física, implica la necesidad de una teoría alternativa que sea local, completa y realista a la vez. Este tipo de teorías se denomina genéricamente “de variables ocultas”. Dado que existe un considerable conjunto de evidencia experimental a favor de la mecánica cuántica, una teoría de variables ocultas debería “complementar” la descripción de la función de onda Ψ reproduciendo los mismos resultados que la mecánica cuántica.. El ejemplo más elaborado de teoría de variables ocultas se debe a David Bohm [22]. Sin embargo, el ejemplo de Bohm es no local y tiene el mismo conjunto de predicciones que la mecánica cuántica, el ejemplo de Bohm (llamado por algunos, mecánica Bohmiana) se acerca mas a una interpretación alternativa de la mecánica cuántica que a una teoría alternativa o complementaria [21].

La teoría realista local (TRL) que, según las expectativas de algunos físicos, podría complementar la descripción cuántica de la realidad no llego a plasmarse en algo concreto. Esto se debe al trabajo de John Bell, que mostró que había casos en que las teorías locales realistas (TRL) y la mecánica cuántica daban predicciones discrepantes para el mismo experimento, tema que se abordara en el próximo capítulo.

Capítulo 3

Desde las desigualdades de Bell hacia el entrelazamiento cuántico

John Stewart Bell, un físico irlandés, comenzó a estudiar el problema de la no localidad y, en particular, la cuestión de si la misma es un requisito necesario para que una teoría de variables ocultas (como la de Bohm) sea consistente con todas las predicciones cuánticas. Durante tres décadas, Este debate estuvo ligado al carácter filosófico, hasta que en 1964 John Bell propuso una forma matemática para poder verificar la paradoja EPR, para ello publica un artículo [22], en el que demuestra, a modo de teorema, que en cualquier teoría de variables ocultas que cumpla una cierta condición de localidad, las correlaciones observables entre pares de partículas separadas deben satisfacer ciertas desigualdades (desigualdades de Bell) que, en determinadas circunstancias, contradicen las predicciones de la mecánica cuántica. Lo cual implica que las teorías deterministas locales de variables ocultas y la mecánica cuántica son mutuamente excluyentes [21].

3.1. Teorema de Bell

La primer desigualdad de Bell [3], esta formulada en el contexto de la propuesta de Bohm para la paradoja EPR y es satisfecha por cualquier teoría determinista, local de variables ocultas. Bell muestra que existen casos en que las predicciones cuánticas no satisfacen esta desigualdad, de modo que el siguiente es un enunciado compacto del Teorema de Bell:

Ninguna teoría determinista y local puede reproducir todos los resultados de la mecánica cuántica.

Para el establecimiento de su teorema, Bell utiliza el dispositivo experimental Fig.(3.1) propuesto por Bohm para la paradoja E.P.R. Un sistema de espín (spin) cero que decae natural-

mente en dos partículas. En esta situación se puede medir la proyección de los espines de cada una de las partículas (con la ayuda de un aparato Stern-Gerlach) en principio sin afectar la otra, La fuente F emite un par de partículas de espín 1/2 que se desplazan en sentidos opuestos. Las partículas están en un estado de espín total 0 de modo que sus spines están anticorrelacionados. Alice puede medir la componente z o variar la orientación de su analizador en 90° para medir la componente x del espín de la partícula 1. Inmediatamente después, el observador B analiza la componente z (la dirección de su analizador se supone fija) de espín de la partícula 2.

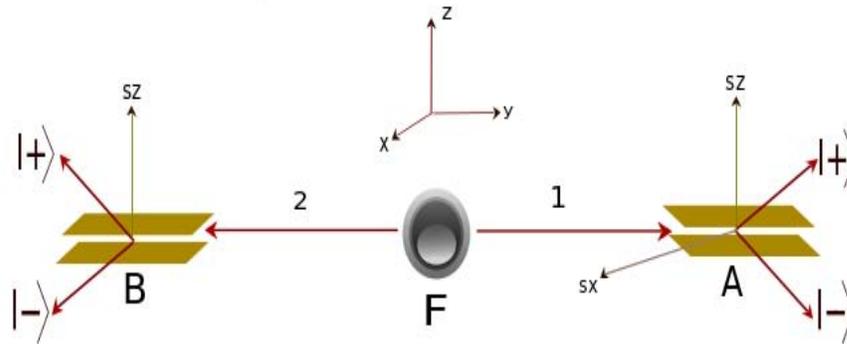


Figura 3.1: Propuesta de Bohm para ilustrar la paradoja EPR.

Los observables relevantes son las componentes de espín de cada partícula en direcciones seleccionadas una vez que ambas se han separado y ya no interactúan entre sí. Dos observadores, Alice y Bob, equidistantes de la fuente del par de partículas miden en forma simultánea las componentes de espín de cada partícula en dos direcciones espaciales (\mathbf{a} , \mathbf{b}) Se denotará $\sigma_{1.\mathbf{a}}$ al observable asociado al espín de la partícula 1 en la dirección \mathbf{a} y $\sigma_{2.\mathbf{b}}$ al observable asociado al espín de la partícula 2 en la dirección \mathbf{b} [23].

El teorema de Bell se basa en dos hipótesis:

i) *Determinismo*

Con base al argumento EPR, se requiere información adicional a la contenida en la función de estado Ψ para especificar completamente el valor de todos los observables. Se supone que

λ representa el conjunto de variables ocultas necesario para especificar el estado en forma completa. Estas variables pueden ser una o muchas, con valores distribuidos en forma continua o discreta¹ se considera un ensemble de pares de partículas preparadas en estados que son completamente especificados por un valor $\lambda \in \Lambda$. La restricción sobre el espacio de estados Λ es que se pueda definir una función de distribución $\rho(\lambda)$ en el modo usual: $d\rho = \rho(\lambda)d\lambda$ es la probabilidad de que el estado este en el intervalo $[\lambda, \lambda + d\lambda]$. La densidad de estados ρ tiene normalización

$$\int_{\Lambda} \rho(\lambda)d\lambda = \int_{\Lambda} d\rho = 1. \quad (3.1)$$

En este ensemble, el valor medio, $P(X)$, de un observable X sera:

$$P(X) = \int_{\Lambda} X(\lambda)\rho(\lambda)d\lambda, \quad (3.2)$$

promediando sobre estados, es decir, sobre los posibles valores de la variable oculta λ que describe cada par de partículas emitido por la fuente [21].

ii) *Localidad*

El producto de ambos observables (necesario para calcular la correlación $E(AB)$) depende del estado del par y de las orientaciones de ambos aparatos de medida, $AB = [AB](\mathbf{a}, \mathbf{b}; \lambda)$. La hipótesis de localidad asumida por Bell [3]:

“La suposición fundamental es que el resultado B para la partícula 2 no depende de la configuración a del imán para la partícula 1, ni (A) de b”

implica que la dependencia de AB es de la forma

$$[AB](\mathbf{a}, \mathbf{b}; \lambda) = A(\mathbf{a}; \lambda)B(\mathbf{b}; \lambda). \quad (3.3)$$

Asi, el resultado de la medida de Alice, $A(\mathbf{a}; \lambda)$, depende exclusivamente del estado λ y de la orientación de su analizador y no de la orientación del analizador de Bob [21].

¹Sin pérdida de generalidad, se escribe las ecuaciones para una variable continua λ . Un estado cuántico Ψ representar una media sobre un ensemble de estados descritos por varios valores de la variable oculta λ

3.1.1. Primera desigualdad de Bell

Para encontrar un ejemplo en el cual las predicciones de teorías deterministas, locales y las de la mecánica cuántica difieran, es necesario especificar una forma concreta de correlación entre el par de partículas.

Se supone que el resultado de la medición del espín de cada una de las partículas es *totalmente determinado* por las direcciones de medición y por el parámetro oculto λ . Entonces es posible medir los resultados de estas mediciones como funciones A y B, con posibles valores ± 1

$$A(\lambda, \mathbf{a}) = \pm 1, \quad B(\lambda, \mathbf{b}) = \pm 1. \quad (3.4)$$

Esta forma de escribir las funciones implica la suposición de separabilidad y localidad, puesto que, por ejemplo no se permite que el resultado de A dependa de la dirección \mathbf{b} .

El parámetro λ debe tener una densidad de probabilidad $\rho(\lambda)$ tal que reproduzca las predicciones estadísticas usuales de la mecánica cuántica. En particular la hipótesis de localidad implica que la correlación entre ambas medidas de spin (es decir, el valor medio del observable conjunto), teniendo en cuenta la Ec.(3.2) y Ec.(3.3) se puede escribir,

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \langle A(\lambda, \mathbf{a}) B(\lambda, \mathbf{b}) \rangle = \int A(\lambda, \mathbf{a}) B(\lambda, \mathbf{b}) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.5)$$

Dada la correlación entre los espines, se sabe que si las funciones A y B son evaluadas en la misma dirección deben cumplir:

$$A(\lambda, \mathbf{a}) = -B(\lambda, \mathbf{a}), \quad (3.6)$$

lo cual permite reescribir (3.5) en la forma

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = - \int A(\lambda, \mathbf{a}) A(\lambda, \mathbf{b}) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.7)$$

Si se considera otra dirección de medición, se puede escribir

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int [A(\lambda, \mathbf{a}) A(\lambda, \mathbf{b}) - A(\lambda, \mathbf{a}) A(\lambda, \mathbf{c})] \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.8)$$

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = - \int A(\lambda, \mathbf{a}) A(\lambda, \mathbf{b}) \times [A(\lambda, \mathbf{b}) A(\lambda, \mathbf{c}) - 1] \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.9)$$

Para la última igualdad ha sido usado el hecho de que $A^2 = 1$. Dado que $A \leq 1$ se concluye:

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq \int [1 - A(\lambda, \mathbf{b}) A(\lambda, \mathbf{c})] \rho(\lambda) d\lambda, \quad (3.10)$$

donde se nota de inmediato que la segunda parte de la integral es $P(\mathbf{b}, \mathbf{c})$, así que teniendo en cuenta que $\rho(\lambda)$ es una distribución normalizada se obtiene:

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{c})| \leq 1 + P(\mathbf{b}, \mathbf{c}), \quad (3.11)$$

Bell demostró [3] que las correlaciones asociadas a estas medidas satisfacen la anterior desigualdad (desigualdad de Bell), que es solamente una conclusión matemática basada en la forma que deben tener las funciones y distribuciones involucradas [23].

3.1.2. Predicciones cuánticas

Para completar el Teorema de Bell se debe mostrar que la predicción de la mecánica cuántica viola la desigualdad (3.11).

Se supone que el sistema físico es descrito por una función de onda Ψ . lo que quiere decir que Ψ describe un conjunto de sistemas de dos partículas preparadas en las mismas condiciones y al cual representamos por el ket $|\Psi\rangle$. Con el fin de averiguar una propiedad estadística del conjunto, se busca el valor esperado del operador correspondiente a dicha propiedad, en este caso el operador es el producto de las variables de proyección de espín, para la partícula 1 en la dirección \mathbf{a} y la proyección del espín de 2 en la dirección \mathbf{b} .

El valor esperado del producto del observable conjunto $(\sigma_1 \cdot \mathbf{a})(\sigma_2 \cdot \mathbf{b})$, se calcula en el apéndice A, sección A.3 y está dado por:

$$P_{MC}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv \langle \Psi | (\sigma_1 \cdot \mathbf{a})(\sigma_2 \cdot \mathbf{b}) | \Psi \rangle = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -\cos \theta_{ab}. \quad (3.12)$$

La correlación cuántica depende solamente de la orientación relativa, $\theta_{ab} \equiv |\theta_a - \theta_b|$, de ambos analizadores, con lo que debería cumplirse para (3.11) que:

$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq 1 - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}. \quad (3.13)$$

Es fácil ver que para ciertas orientaciones se violan la Ec.(3.13). Por ejemplo, conciderese \mathbf{a} perpendicular a \mathbf{b} , y \mathbf{c} a un ángulo de $\pi/4$ respecto ambos a y b; en este caso $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ y $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = 1/\sqrt{2}$

$$|1/\sqrt{2} - 0| \leq 1 - 1/\sqrt{2} \rightarrow 1/\sqrt{2} \leq 1 - 1/\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2} \leq 1,$$

un resultado absurdo, que llevan a la violacion predicha de la *desigualdad de Bell*.

La conclusión a la que llega Bell, y lo que es en realidad su teorema, es que no existe ningún modelo de variables ocultas que reproduzca las predicciones cuánticas, a menos de que se permita que el resultado de la medición sobre una partícula dependa no solo de la dirección en que esta se realiza, si no también de la dirección en la que se lleva a cabo las medición sobre la otra partícula (sin importar que tan lejos estén entre si), lo que claramente lleva aun comportamiento no local, descrito por una función no separable [21, 23].

3.2. Desigualdades de Bell

El primer resultado de Bell es seguido por una generalización (desigualdad CHSH o segunda desigualdad de Bell). En la época en que ocurren estos desarrollos las limitaciones experimentales estimulan la búsqueda de otras desigualdades derivadas, que puedan ser demostradas en el laboratorio. Existen por lo tanto varias versiones de la desigualdad de Bell y muchas de ellas implican suposiciones adicionales a las del resultado original de Bell o su generalización. Es usual referirse a todas estas generalizaciones como “*desigualdades de Bell*”[21].

3.2.1. Desigualdad CHSH

En 1969, se publica el fermental trabajo de Clauser, Horne, Shimony y Holt [24], donde se realizan tres aportes significativos:

- CHSH demuestra una versión mas general del Teorema de Bell en la cual mantienen las suposiciones básicas de determinismo (i) y localidad (ii), pero no asumen la correlación perfecta. La desigualdad que obtienen es equivalente a la forma más conocida de desigualdad de Bell:

$$-2 \leq S \equiv P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \leq 2, \quad (3.14)$$

aplicable a experimentos con detección de dos canales (como en la propuesta de Bohm). El parámetro de Bell, S , definido en la Ec.(3.14), es una combinación lineal de correlaciones para dos pares de orientaciones de los analizadores de Alice (\mathbf{a}, \mathbf{a}') y Bob (\mathbf{b}, \mathbf{b}')[21].

- CHSH usa la hipótesis adicional, que si un par de fotones emerge de los filtros polarizadores, la probabilidad de detección coincidente es independiente de las orientaciones (\mathbf{a}, \mathbf{b}) de los filtros. para obtener una forma de la desigualdad de Bell susceptible de ser verificada experimentalmente con la tecnología disponible en la época.
- CHSH proponen un experimento concreto que permita probar la desigualdad propuesta. Su propuesta esta basada en una generalización de la primera experiencia con polarización de pares de fotones correlacionados creados en un decaimiento atómico en cascada [25]. Esta propuesta fue realizada poco después en Berkeley por Freedman y Clauser y se convirtió en la primer refutación experimental del realismo local[26].

La importancia de la desigualdad CHSH se debe a la utilidad en trabajos pioneros para la verificación experimental de la desigualdad de Bell, es su uso frecuente en experiencias modernas, y además al aplicar un límite superior a las teorías realistas y locales que también impone un aporte mayor para la mecánica cuántica en su interpretación de Copenhague. Con la desigualdad CHSH se verificó experimentalmente la violación de la desigualdad dada

por la Ec.(3.14) en 1982 en la segunda experiencia de Aspect [27], de la que se hablara posteriormente [21, 28]

3.2.2. Segunda desigualdad de Bell

Bell mantiene el esquema general del desarrollo de su primera desigualdad, basado en medidas de espín de dos partículas. Teniendo en cuenta que el estado de los aparatos de medida podría influenciar las correlaciones, el mismo se incluye en la descripción del sistema por variables ocultas.

Esto implica que el valor medio Ec.(3.5), tomado sobre los estados λ de las partículas, se redefine en terminos de \bar{A} y \bar{B} , las observaciones promediadas en los grados de libertad (ocultos) de los instrumentos. Estas variables \bar{A} , \bar{B} ya no son binarias, como en la Ec.(3.4), en cambio cumplen

$$-1 \leq \bar{A} \leq 1 \quad y \quad -1 \leq \bar{B} \leq 1. \quad (3.15)$$

Por lo tanto la correlación entre un par de medidas es ahora,

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Gamma} \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \bar{B}(\lambda, \mathbf{b}) \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.16)$$

En esta expresión, Γ representa el conjunto de estados λ asociados a las partículas. La posibilidad de no detectar una partícula queda automáticamente contemplada suponiendo que el resultado de una medida de una componente de espín puede ser 0 si por alguna razón no hay detección en ninguno de los dos canales. Bell intentaba contemplar así imperfecciones en los mecanismos de detección. Se puede pensar en \bar{A} , \bar{B} como variables aleatorias cuya correlación dada por la Ec.(3.16) es consistente con el requisito de localidad. Gracias al elemento aleatorio, asociado a los estados de los aparatos de medida (y a eventuales fallas de detección) se abandona el determinismo.

El siguiente proceso conduce a la segunda desigualdad de Bell

Sean (\mathbf{a}, \mathbf{b}) y $(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$ dos conjuntos de orientaciones de los aparatos de medida. Se considera

la diferencia de correlaciones

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}') = \int_{\Lambda} [\bar{A}(\lambda, \mathbf{a})\bar{B}(\lambda, \mathbf{b}) - \bar{A}(\lambda, \mathbf{a})\bar{B}(\lambda, \mathbf{b}')] \rho(\lambda) d\lambda. \quad (3.17)$$

Utilizando la notación $\bar{A}(\lambda, \mathbf{a}) \rightarrow A_a$, se escribe la identidad algebraica

$$\begin{aligned} A_a B_b - A_a B_{b'} &= A_a B_b \pm A_a B_b A_{a'} B_{b'} - A_a B_{b'} \mp A_a B_b A_{a'} B_{b'} \\ &= A_a B_b [1 \pm A_{a'} B_{b'}] - A_a B_{b'} [1 \pm A_{a'} B_b]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Teniendo en cuenta la Ec.(3.15), los productos $|\bar{A}\bar{B}| \leq 1$, porque lo tanto $1 \pm \bar{A}\bar{B} \geq 0$ y, usando la identidad algebraica anterior, el valor absoluto de la diferencia Ec.(3.17) satisface la desigualdad:

$$\begin{aligned} |P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| &\leq \int_{\Gamma} |\bar{A}(\lambda, \mathbf{a})\bar{B}(\lambda, \mathbf{b})| [1 \pm \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}')\bar{B}(\lambda, \mathbf{b}')] \rho(\lambda) d\lambda \\ &\quad + \int_{\Gamma} |\bar{A}(\lambda, \mathbf{a})\bar{B}(\lambda, \mathbf{b}')| [1 \pm \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}')\bar{B}(\lambda, \mathbf{b})] \rho(\lambda) d\lambda \\ &\leq \int_{\Gamma} [1 \pm \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}')\bar{B}(\lambda, \mathbf{b}')] \rho(\lambda) d\lambda \\ &\quad + [1 \pm \bar{A}(\lambda, \mathbf{a}')\bar{B}(\lambda, \mathbf{b})] \rho(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la condición de normalización Ec.(3.1), resulta

$$|P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}')| + |P(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}')| \leq 2, \quad (3.19)$$

si se elige $\mathbf{a}' = -\mathbf{b}$ y se asume una anticorrelación perfecta, $P(\mathbf{b}, \mathbf{b}) = 1$ se obtiene la primera desigualdad de Bell Ec.(3.11). La Ec.(3.19) se puede expresar en términos del parámetro de Bell S ,

$$-2 \leq S \equiv P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P(\mathbf{a}, \mathbf{b}') + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}) + P(\mathbf{a}', \mathbf{b}') \leq 2, \quad (3.20)$$

y es por lo tanto equivalente a la *desigualdad CHSH*, Ec. (3.14) [21].

Para completar esta generalización del teorema de Bell, basta mostrar que en algún caso las

correlaciones cuánticas violan la desigualdad dada por la Ec.(3.20).

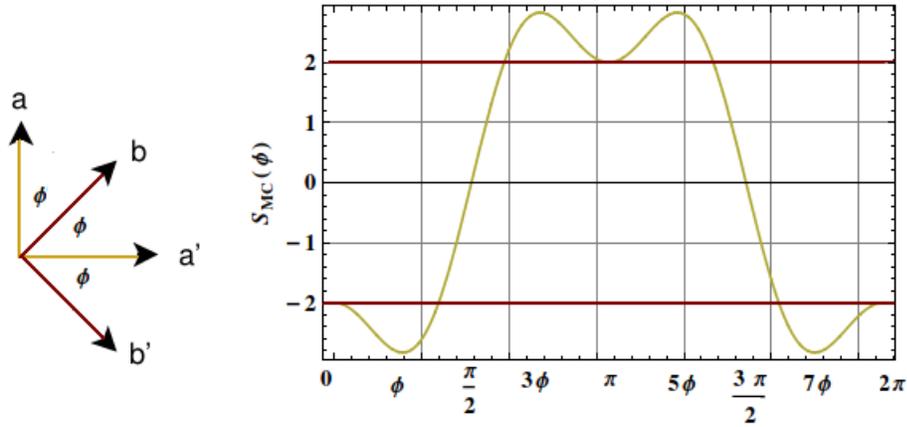


Figura 3.2: Predicción cuántica para el parámetro de Bell, Las líneas horizontales marcan el límite $S = \pm 2$ de la desigualdad.

Se toma las direcciones de Alice \mathbf{a} , \mathbf{a}' y las de Bob \mathbf{b} , \mathbf{b}' coplanares y ortogonales entre si y que el sistema de Bob esta rotado un ángulo $\phi \in [0, 2\pi]$ respecto al de Alice, como se indica en la Fig.(3.2). Haciendo uso de la correlación cuántica $P_{MC}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\cos\theta_{ab}$, la predicción cuantica para el parametro de Bell (S) es:

$$S_{MC}(\phi) = \cos(3\phi) - 3\cos(\phi). \quad (3.21)$$

Función que se muestra en Fig.(3.2). Los ángulos para los cuales la violación de la desigualdad (3.20) es máxima son:

$$\begin{aligned} \text{para } \phi = 45^\circ, \phi = 315^\circ &\rightarrow S = -2\sqrt{2} < -2 \\ \text{para } \phi = 135^\circ, \phi = 225^\circ &\rightarrow S = 2\sqrt{2} > 2 \end{aligned}$$

La segunda desigualdad de Bell, Ec.(3.20), es una generalización importante con respecto a la primera que se aplica a toda teoría realista, local. Se ha abandonado la exigencia de una correlación perfecta, se aparta del determinismo y se da un paso en dirección al laboratorio, incluyendo la posibilidad de una falla del detector (conteo nulo).

Las desigualdades de Bell desarrolladas en el contexto de partículas de espín 1/2 no son directamente aplicables a experiencias de un canal². Construyendo sobre su propuesta inicial [24], Clauser y Horne [29] obtienen una desigualdad de Bell “*Desigualdad CH74*” [21].

3.2.3. Veredicto experimental

La importancia del resultado de Bell y sus principales generalizaciones reside en colocar, por primera vez, el dilema filosófico planteado por la paradoja EPR en términos aptos para verificación experimental. Al demostrar que las teorías locales, deterministas de variables ocultas y la mecánica cuántica no comparten el mismo conjunto de predicciones, se abre la puerta a la posibilidad de decidir experimentalmente entre ambos tipos de teorías.

El trabajo experimental realizado en los últimos 35 años tendiente a dilucidar si las desigualdades de Bell son o no satisfechas en experiencias tipo EPR, se puede dividir en tres etapas:

La primera generación de experimentos orientada a probar directamente versiones simplificadas de la desigualdad Bell, se realizó en la primer mitad de la década del 70 en Berkeley [26], y en la universidad de Texas [30]. Estos experimentos usaron pares de fotones correlacionados en polarización emitidos en ciertos decaimientos atómicos en cascada. La mayoría de ellos confirmaron las predicciones de la mecánica cuántica por un margen aceptable y contradijeron las de las teorías realistas locales.

Las experiencias de segunda generación, iniciadas a comienzos de la década del 80. Dentro de esta generación se encuentran los primeros experimentos que son considerados como concluyentes respecto a la cuestión de la violación de la desigualdad de Bell son los que se realizan por Alain Aspect y colaboradores en el instituto de óptica teórica y aplicada de la Universidad de París-Sur, en Orsa [27, 31, 32]. Es a partir de este tipo de experiencias, que el debate comienza inclinarse decididamente en favor de la mecánica cuántica.

Las experiencias de tercera generación se realizan a partir de 1988 [33, 34, 35], que observan violaciones de las desigualdades de Bell eliminando problemas presentes en los experimentos de las dos anteriores generaciones. Una de las experiencias más reconocidas dentro de

²Las experiencias con polarización de fotones se hicieron usando filtros polarizadores, seguidos de un tubo fotomultiplicador para detectar los fotones que los atraviesan. Es decir, un esquema de detección de un canal.

esta generación es la realizada por Weihs et al. [36].

Desde el punto de vista cuantitativo, en la literatura se encuentran varias decenas de experimentos reportando la violación de algún tipo de desigualdad de Bell por varias desviaciones estándar, en todos los experimentos realizados hasta la fecha se confirma la predicción cuántica.

Experimentos de Aspect

Las tres experiencias realizadas por Alain Aspect y colaboradores a comienzos de la década del 80, con el mérito de haber conseguido montar un experimento con mayores garantías, dejan bastante bien establecido que las correlaciones medidas de polarización de fotones no satisfacen las desigualdades de Bell por un amplio margen.

Los experimentos consistían esencialmente en una situación comparable a la descrita en la experiencia EPR, solo que en lugar de medir posición y momento de un sistema de dos partículas, se medía el ángulo de polarización de dos fotones correlacionados emitidos por una fuente en común. Tomadas en conjunto, las tres experiencias del grupo de Aspect representaron un avance impresionante con respecto a la implementación práctica del teorema de Bell y proporcionaron la evidencia más clara en favor de la mecánica cuántica y sus predicciones [21].

3.3. No-localidad y entrelazamiento cuántico

El teorema de Bell aplicado a la teoría cuántica se obtiene como una consecuencia de aceptar el supuesto de que la mecánica cuántica a de ser completada mediante variables ocultas y el criterio de localidad propuesto. El teorema en sí, como se mostró en este capítulo, es una desigualdad matemática que limita el nivel de correlación esperable para los resultados de medidas simultáneas efectuadas sobre dos partículas que han estado interactuando. Esta desigualdad marca la diferencia cuantitativa susceptible a la verificación entre la interpretación de Copenhague y la teoría realista-local. La mecánica cuántica entendida a modo de Copenhague predecía que bajo ciertas condiciones el grado de correlación debía sobrepasar

el límite marcado por la desigualdad de Bell y era, por tanto, mayor que el grado de correlación permitido por la teoría entendida a modo de Einstein (realismo-local). Que predecía el cumplimiento de las desigualdades en todas las circunstancias [37].

De esto se concluyó que si las predicciones cuánticas son correctas, entonces había que desestimar la teoría de variables ocultas, y había que hacerlo no tanto porque la idea de completar la mecánica cuántica fuese en sí misma inaceptable, sino porque una teoría de variables ocultas no podría encajar con las predicciones cuánticas a no ser que contemplara la existencia de un “mecanismo por el cual la colocación de un aparato de medida pueda influir en el resultado proporcionado por otro instrumento no importa lo remoto que se encuentre”, es decir, a no ser de que se prescindiera del supuesto de localidad, pues “es el requisito de localidad [...] lo que crea la dificultad esencial” [38].

Dicho de otra forma el incumplimiento de las desigualdades de Bell impiden cualquier modelo cuántico realista y local, por lo que apartir de Bell y los experimentos realizados posteriormente, existe la tendencia a tomar la no-localidad como una característica fundamental e intrínseca del universo.

El entrelazamiento cuántico es una propiedad y consecuencia de la mecánica cuántica que fue reconocida desde sus primeros años. Respecto de este fenómeno, en 1935 Erwin Schrödinger escribe: “Cuando dos sistemas, de los que conocemos sus estados por su respectiva representación, entran en interacción física temporal debido a fuerzas conocidas entre ellos y tras de un tiempo de influencia mutua se separan otra vez, entonces ya no pueden describirse como antes, esto es, dotando a cada uno de ellos de una representación propia. Yo no llamaría esto “un” sino “el” rasgo característico de la mecánica cuántica” [39]. Se puede decir que el *entrelazamiento cuántico* es una propiedad cuántica que inicialmente fue cuestionada e indirectamente predicha por los contradictores Einstein, Podolsky y Rosen ³. Posteriormente Bell dio un nuevo impulso gracias a un refinado análisis de las sutilezas que involucra el entrelazamiento y describió esta conexión entre partículas como “*no-local*”. El artículo EPR como las desigualdades de Bell fueron, por lo tanto, un importante incentivo

³En el contexto original del artículo EPR, el entrelazamiento se postula como una propiedad estadística del sistema físico formado por una pareja de partículas que provienen de una fuente común y están altamente correlacionados debido a la ley de conservación del momento lineal de ambas

para la investigación del entrelazamiento.

Los estados entrelazados en sistemas de dos spines surgen muy naturalmente y juegan un papel muy importante en muchos fenómenos de la física atómica y molecular. En ese contexto las consecuencias paradójales de este fenómeno no se ponen de manifiesto. Pero es evidente que, tal como fue analizado en el trabajo de EPR, cuando el entrelazamiento está presente a escala macroscópica es responsable de buena parte de los misterios de la física cuántica. Parece intuitivo pensar que las reglas de la física que se aplican a nivel atómico serían transferibles al mundo macroscópico. Sin embargo, los intentos para demostrar esto no han sido fáciles. De hecho, cuando el tamaño de un sistema cuántico aumenta, interactúa mucho más con su ambiente circundante, lo cual destruye rápidamente sus propiedades cuánticas. Este fenómeno, conocido como la decoherencia cuántica, es una de las limitaciones en la capacidad de los sistemas macroscópicos para retener sus propiedades cuánticas.

El entrelazamiento a nivel macroscópico es una de las principales áreas de investigación actual en el campo de la física cuántica, y se ha explorado el uso del entrelazamiento como un recurso físico, abordándose teórica y experimentalmente tareas vinculadas con el procesamiento y transmisión de la información cuántica (teleportación, computación cuántica, criptografía cuántica, entre otras) [40].

Capítulo 4

Formalismo de los sistemas cuánticos abiertos y entrelazamiento cuántico

Paradójicamente, el entrelazamiento es considerado una de las manifestaciones más “no clásicas” del formalismo cuántico. Fue usado por Einstein, Podolsky y Rosen en su intento para atribuir valores a cantidades físicas antes de la medida. Como se presentó en el capítulo anterior, fue Bell quien mostró lo opuesto, es justo el entrelazamiento el cual irreversiblemente descarta tal posibilidad. Bell, mostró que la probabilidad para las salidas obtenidas cuando se mide convenientemente algún estado cuántico entrelazado viola las desigualdades de Bell. En este camino el entrelazamiento cuántico es un rasgo del formalismo cuántico, el cual hace imposible simular las correlaciones cuánticas con cualquier formalismo clásico[41].

Ha sido claro que el entrelazamiento no es solo objeto de debates filosóficos, constituyéndose en una nueva fuente de tareas cuánticas, las cuales no pueden ser desarrolladas por medio de herramientas clásicas, en este orden, a lo largo del presente capítulo se expondrán algunas de las herramientas que permiten el estudio de sistemas cuánticos y posteriormente el análisis del entrelazamiento. Adicionalmente, debido a que el aislamiento perfecto de sistemas cuánticos no es posible, ya que cualquier sistema real está influenciado por un acoplamiento inevitable con el ambiente, en este capítulo se examina este fenómeno mediante el formalismo de sistemas cuánticos abiertos. El efecto del ambiente, sobre el sistema cuántico se refleja como pérdida de entrelazamiento, este proceso es conocido como decoherencia, y es tema central del capítulo posterior.

Este capítulo se ordena de la siguiente manera: inicialmente se hace una breve descripción de estados puros y mixtura, para posteriormente abordar el estudio del operador densidad y sistemas compuestos, lo cual permite el análisis de sistemas cuánticos abiertos para finalmente describir medidas de entrelazamiento para estados puros y para estados mixtura.

4.1. Estados puros y mixtura

En mecánica clásica el estado de un sistema se puede determinar especificando los valores de un número suficiente de variables o propiedades del mismo, por ejemplo, la dinámica del estado para una partícula está completamente determinado por los valores de la posición y momento en un instante determinado, así, el estado del sistema en cualquier momento posterior puede ser predecido con certeza. En lo que respecta a la mecánica cuántica la máxima información posible, tiene un significado más restringido que la física clásica ya que no todos los observables físicos pueden ser medidos simultáneamente con precisión, por lo que el procedimiento clásico no puede utilizarse para identificar su estado. Hechos como éste condujeron a la introducción de una herramienta matemática, vector de estado o función de onda, para identificar estados.

Es conocido por los postulados de la mecánica cuántica estudiados en el capítulo 2, que a cada estado de un sistema se le asocia una función de onda $|\psi\rangle$ que lo describe completamente; es decir, contiene toda la información física que concierne a dicho estado. Para algunos estados, la función de onda queda determinada especificando los valores que toman ciertas propiedades. Cuando conocemos la función de onda de un sistema decimos que éste se encuentra en un *estado puro*.

En la práctica, una preparación completa de un sistema se consigue rara vez, y en la mayoría de los casos las variables dinámicas medidas durante la preparación no constituye un conjunto completo. Como resultado el estado del sistema no es puro y no se puede representar por un único vector de estado. Sin embargo, es posible describirlo, afirmando que el sistema tiene algunas probabilidades W_1, W_2, \dots, W_n de encontrarse dentro de un determinado conjunto de estados puros: $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_n\rangle\}$, respectivamente. En el ensemble mezclado, es necesario el uso de una descripción estadística, los sistemas se denominan mezclas estadísticas y sus estados son conocidos como *estados mixtura* [42].

En este caso:

1. Los estados ya no están completamente definidos.

2. Las mediciones no se describen a través de proyecciones ortogonales del estado del sistema.
3. La evolución no es unitaria.

La representación matemática de un estado mixtura se hace mediante un operador o matriz densidad, como se vera en la sección 4.2.

4.2. Operador densidad

El lenguaje del operador densidad provee un medio conveniente para la descripción de sistemas cuánticos cuyo estado no esta completamente definido o es conocido en sentido estadístico. El objetivo de esta sección es describir la formulación y algunas propiedades de este operador, que a menudo se conoce como la matriz densidad. (Se utilizarán los dos términos, indistintamente).

Sea un sistema cuántico donde $\{|\varphi_i\rangle\}$ denota una base ortonormal en su correspondiente espacio de Hilbert [43]

$$\langle\varphi_i|\varphi_j\rangle = \delta_{ij}, \quad (4.1)$$

y completa

$$\sum_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| = 1. \quad (4.2)$$

Un ensemble de estados cuánticos se define a partir de una serie de funciones de onda $|\psi_n\rangle$ cada una indexada por n. Además, la probabilidad respectiva de cada estado $|\psi_n\rangle$, en el conjunto total de estados es denotada como W_n , satisfaciendo la normalización $\sum W_n = 1$. Considerando una mixtura, de n estados preparados independientemente, el operador densidad que define la mixtura esta definido por:

$$\rho = \sum_n W_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|, \quad (4.3)$$

donde la suma se realiza sobre todos los estados presentes en la mixtura.

Se puede expresar el operador (4.3) en forma de matriz usando la base completa de autoestados. Teniendo en cuenta

$$|\psi_n\rangle = \sum_{m'} a_{m'}^{(n)} |\varphi_{m'}\rangle, \quad (4.4)$$

la Ec. (4.3) resulta

$$\rho = \sum_{mm'n} W_n a_{m'}^{(n)} a_m^{(n)*} |\varphi_{m'}\rangle \langle \varphi_m|. \quad (4.5)$$

Tomando los elementos de la Ec.(4.3) entre los estados $|\varphi_i\rangle$ y $|\varphi_j\rangle$, y aplicando las condiciones de ortonormalidad se obtiene

$$\langle \varphi_i | \rho | \varphi_j \rangle = \sum_n W_n a_i^{(n)} a_j^{(n)*}. \quad (4.6)$$

El conjunto de todos los elementos de esta ecuación, donde i y j corren sobre todos los estados bases sobre los cuales se extiende la suma, genera una representación matricial explícita del operador (4.3), conocida como la matriz densidad.

4.2.1. Propiedades de la matriz densidad

Una matriz densidad satisface las siguientes propiedades [42]:

- Según la definición (4.6), se puede observar que ρ es Hermitiana, esto es

$$\langle \varphi_i | \rho | \varphi_j \rangle = \langle \varphi_j | \rho | \varphi_i \rangle^*. \quad (4.7)$$

- Dado que la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|\psi_n\rangle$ es W_n , y donde la probabilidad que $|\psi_n\rangle$ pueda ser encontrada en el estado $|\varphi_m\rangle$ es $|a_m^{(n)}|^2$, la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|\varphi_m\rangle$ está dado por los elementos de la diagonal:

$$\rho_{mm} = \langle \varphi_m | \rho | \varphi_m \rangle = \sum_n W_n |a_m^{(n)}|^2. \quad (4.8)$$

Dado que las probabilidades son números positivos de la Ec. (4.8), se tiene que:

$$\rho_{mm} \geq 0. \quad (4.9)$$

De esta propiedad y la anterior se sigue que la matriz densidad es un operador definido positivo.

- La probabilidad $W(\psi)$ de encontrar el sistema en el estado arbitrario $|\psi\rangle$ después de una medición está dada por los elementos de matriz:

$$W(\psi) = \langle \psi | \rho | \psi \rangle. \quad (4.10)$$

- La traza de ρ es una constante independiente de la base usada en el espacio de Hilbert. Usando la normalización y la condición $\sum_n W_n = 1$, se tiene que:

$$\text{tr } \rho = \sum_i \rho_{ii} = \sum_a W_a \sum_a |a_i^{(n)}|^2 = 1 \quad (4.11)$$

- El valor de expectación o el valor esperado de un operador Q , está dado por la traza del producto de ρ y Q

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle &= \sum_{m'm} \sum_n W_n a_{m'}^{(n)} a_m^{(n)*} \langle \phi_m | Q | \phi_{m'} \rangle \\ &= \sum_{m'm} \langle \phi_{m'} | \rho | \phi_m \rangle \langle \phi_m | Q | \phi_{m'} \rangle = \text{tr } (\rho Q) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Este resultado es de notoria importancia, ya que en mecánica cuántica toda la información del comportamiento de un sistema puede ser expresada en términos de los valores de expectación de una base de operadores. El valor de expectación de un operador puede ser obtenido por (4.12), de donde se concluye que la matriz densidad contiene toda la información significativa del sistema.

- Un sistema cuántico cuyo estado $|\psi\rangle$ es conocido exactamente, se dice que está en un estado puro. El operador densidad correspondiente está dado por

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|. \quad (4.13)$$

En cualquier otro caso se dice que ρ es un estado mixtura. Un estado puro satisface

$$\text{tr } (\rho^2) = 1. \quad (4.14)$$

mientras un estado mixtura satisface que

$$\text{tr}(\rho^2) < 1. \quad (4.15)$$

Estas ecuaciones dan un criterio simple para determinar si un estado es puro o mixtura.

4.2.2. La evolución temporal del operador densidad

La evolución temporal del estado de un sistema cuántico está dada por la ecuación de Schrödinger [44]

$$i\hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t)|\psi(t)\rangle. \quad (4.16)$$

La ecuación para el estado adjunto es

$$-i\hbar \frac{\partial \langle \psi(t)|}{\partial t} = H(t)\langle \psi(t)|. \quad (4.17)$$

Introduciendo el operador de evolución temporal $U(t)$, el cual transforma el estado $|\psi(0)\rangle$ en el estado $|\psi(t)\rangle$,

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle, \quad (4.18)$$

la ecuación de Schrödinger (4.16) implica que

$$i\hbar \frac{\partial U(t)}{\partial t} = H(t)U(t). \quad (4.19)$$

Suponiendo que a tiempo $t = 0$, una cierta mixtura esta representada por el operador densidad

$$\rho(0) = \sum_n W_n |\psi_n(0)\rangle \langle \psi_n(0)|, \quad (4.20)$$

y dado que cada estado $|\psi_n(0)\rangle$ evoluciona de acuerdo a la Ec.(4.18), el operador densidad en función del tiempo resulta

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \sum_n W_n U(t) |\psi_n(0)\rangle \langle \psi_n(0)| U(t)^\dagger \\ &= \sum_n W_n |\psi_n(t)\rangle \langle \psi_n(t)|, \end{aligned} \quad (4.21)$$

lo cual se puede escribir como

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U(t)^\dagger. \quad (4.22)$$

Diferenciando esta ecuación con respecto al tiempo y reemplazando en la Ec. (4.19), con su respectivo operador adjunto, se obtiene

$$i\hbar \frac{d\rho(t)}{dt} = [H(t), \rho(t)], \quad (4.23)$$

donde el operador de conmutación es

$$[H(t), \rho(t)] = H(t)\rho(t) - \rho(t)H(t). \quad (4.24)$$

La evolución temporal del operador densidad puede ser determinado desde la Ec. (4.22) o equivalentemente, desde la Ec. (4.23). Esta última es llamada *la ecuación de Liouville- von Neumann*.

4.2.3. Matriz densidad para sistemas de dos niveles

Sea un sistema cuántico de dos niveles, cuyo espacio de Hilbert es expandido por dos estados, un estado excitado $|+\rangle$ y un estado base $|-\rangle$ [42].

$$|+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.25)$$

Las matrices de Pauli, σ_x , σ_y y σ_z , y la matriz identidad, escritas en la base de los estados $|+\rangle$, $|-\rangle$ son

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Notar que $|\pm\rangle$ son los autoestados de σ_z . Es conveniente también definir los operadores de creación y destrucción

$$\sigma_+ = |+\rangle\langle-|, \quad \sigma_- = |-\rangle\langle+|, \quad (4.27)$$

con su correspondiente representación matricial

$$\sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

La matriz densidad en la base z (autoestados de σ_z), puede escribirse de la forma

$$\rho = \begin{pmatrix} \langle +|\rho|+ \rangle & \langle +|\rho|- \rangle \\ \langle -|\rho|+ \rangle & \langle -|\rho|- \rangle \end{pmatrix}, \quad (4.29)$$

Los elementos diagonales corresponden a las poblaciones y los no diagonales son denominados coherencias.

La matriz densidad puede escribirse alternativamente como

$$\rho = \frac{1}{2} \left(I + \sum_{i=x,y,z} p_i \sigma_i \right), \quad (4.30)$$

donde

$$p_i = \text{tr} [\rho \sigma_i], \quad (4.31)$$

los coeficientes $\{p_i\}$ definen un vector de tres componentes, denominado vector de Bloch. El mismo satisface que $|p| \leq 1$, condición equivalente al requerimiento que $\rho(t)$ es definida positiva. Para $|p| < 1$, la matriz densidad correspondiente describe un estado mixtura, mientras que un vector de Bloch que satisface $|p| = 1$ representa un estado puro.

También es posible demostrar que el conjunto de matrices densidad de un sistema de dos niveles es isomórfico a la esfera unidad, conocida como esfera de Bloch (Fig 4.1). La superficie de la misma corresponde al conjunto de estados puros. Dada una dirección arbitraria \hat{n}

$$\begin{aligned} n_z &= \cos\theta, \\ n_x &= \text{sen}\theta \cos\beta, \\ n_y &= \text{sen}\theta \text{sen}\beta, \end{aligned} \quad (4.32)$$

se puede definir la correspondiente matriz de Pauli en dicha dirección

$$\sigma_n = \sum_{i=x,y,z} n_i \sigma_i, \quad (4.33)$$

obteniéndose

$$\sigma_n = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta e^{-i\beta} \\ \operatorname{sen}\theta e^{i\beta} & -\cos\theta \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

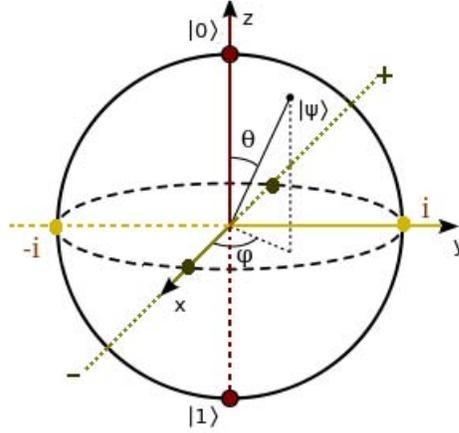


Figura 4.1: Esfera de Bloch. Representación geométrica del espacio de estados puros de un sistema cuántico de dos niveles, a través de puntos pertenecientes a una esfera unitaria.

De esta manera, se puede parametrizar una matriz densidad arbitraria (dos niveles) como función de los parámetros θ , β y q ($0 \leq q \leq 1$)

$$\rho = \frac{1}{2}(I + q\sigma_n), \quad (4.35)$$

donde θ , β y q se corresponden con las coordenadas esféricas que definen la esfera de Bloch.

4.2.4. Sistemas compuestos o bipartitos

Considerando dos sistemas cuánticos interactuantes $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$, donde sus espacios de Hilbert son denotados como $\mathcal{H}^{(1)}$ y $\mathcal{H}^{(2)}$. Su espacio \mathcal{H} de estados conjunto $S = S^{(1)} + S^{(2)}$ está dado por el producto tensorial de los espacios de Hilbert pertenecientes a los dos subsistemas $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ [5],

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(1)} \otimes \mathcal{H}^{(2)}. \quad (4.36)$$

Si se tiene en cuenta las bases ortonormales $\{\varphi_i^{(1)}\}$ y $\{\varphi_j^{(2)}\}$, en $\mathcal{H}^{(1)}$ y $\mathcal{H}^{(2)}$ respectivamente, un estado general en el espacio \mathcal{H} se puede escribir como

$$|\Psi\rangle = \sum_{ij} \alpha_{ij} |\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_j^{(2)}\rangle, \quad (4.37)$$

esto es, los elementos $|\varphi_i^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_j^{(2)}\rangle$ forman una base del espacio \mathcal{H} , cuya dimensión es igual a el producto de las dimensiones de $\mathcal{H}^{(1)}$ y $\mathcal{H}^{(2)}$.

Un operador A actuando sobre \mathcal{H} puede ser representado como una combinación lineal de productos tensoriales,

$$A = \sum_{\alpha} A_{\alpha}^{(1)} \otimes A_{\alpha}^{(2)}, \quad (4.38)$$

donde $A_{\alpha}^{(1)} \otimes A_{\alpha}^{(2)}$ son operadores que actúan sobre $\mathcal{H}^{(1)}$ y $\mathcal{H}^{(2)}$ respectivamente.

Los observables del sistema $S^{(1)}$ toman la forma $A^{(1)} \otimes I^{(2)}$, mientras que los observables de sistemas $S^{(2)}$ están dados por la expresión $I^{(1)} \otimes A^{(2)}$. Los operadores identidad en $\mathcal{H}^{(1)}$ y $\mathcal{H}^{(2)}$, están denotados respectivamente por $I^{(1)}$ y $I^{(2)}$.

La matriz densidad del sistema compuesto S , es un operador en el espacio \mathcal{H} , la matriz densidad total toma la forma del producto tensorial de las matrices densidad de los subsistemas

$$\rho = \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)}. \quad (4.39)$$

Esto implica que los valores esperados de un producto tensorial factorizable de operadores pertenecientes a los subsistemas es

$$\langle A^{(1)} \otimes A^{(2)} \rangle \equiv tr\{(A^{(1)} \otimes A^{(2)})\rho\} = tr^{(1)}\{A^{(1)}\rho^{(1)}\}tr^{(2)}\{A^{(2)}\rho^{(2)}\} = \langle A^{(1)} \rangle \langle A^{(2)} \rangle \quad (4.40)$$

donde, $tr^{(1)}$ y $tr^{(2)}$ denotan las trazas parciales sobre los espacios de Hilbert $\mathcal{H}^{(1)}$ y $\mathcal{H}^{(2)}$, respectivamente [43].

Cuando se está interesado solamente en los observables del subsistema $S^{(1)}$, esto es sólo en operadores de la forma

$$A = A^{(1)} \otimes I^{(2)}, \quad (4.41)$$

es conveniente introducir la matriz densidad reducida pertinente a dicho subsistema, definida como

$$\rho^{(1)} \equiv tr^{(2)}\rho, \quad (4.42)$$

donde $tr^{(2)}$ denota la traza parcial tomada sobre el segundo espacio de Hilbert $\mathcal{H}^{(2)}$.

El formalismo del operador densidad presentado en esta sección permite el estudio de sistemas cuánticos abiertos, tema que será abordado en la siguiente sección. Además como se presentará en las secciones posteriores, corresponde a una herramienta esencial para el estudio del entrelazamiento cuántico.

4.3. Sistemas cuánticos abiertos

Un sistema cuántico abierto es aquel que está en interacción con un sistema cuántico externo, el ambiente. El objetivo de esta sección es comprender y describir el comportamiento de un sistema que interactúa y evoluciona de forma conjunta a un entorno. En contraste al caso de un sistema cerrado, la dinámica cuántica de un sistema abierto no puede en general, ser representada en términos de la evolución unitaria temporal [8][9]. Por el contrario, resulta útil formular la dinámica de un sistema abierto mediante una apropiada ecuación de movimiento para su matriz densidad [43].

4.3.1. Dinámica de sistemas cuánticos abiertos

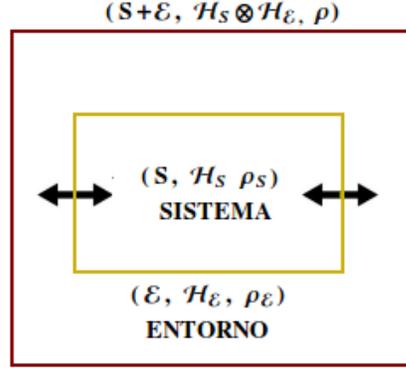


Figura 4.2: Imagen esquemática de un sistema cuántico abierto

Un sistema cuántico abierto es un sistema cuántico S que está acoplado a otro sistema \mathcal{E} llamado “entorno”. Es por eso, que el sistema S en realidad representa un subsistema del sistema total combinado $S + \mathcal{E}$, generalmente considerado cerrado. Por consiguiente, un estado del sistema S cambiará como consecuencia de su dinámica interna y de la interacción con su entorno. Esta interacción genera ciertas correlaciones entre el sistema y el entorno que harán que el estado de S permanezca constante a partir de cierto momento, y por lo tanto, S responde a una evolución unitaria a partir de entonces. La dinámica del subsistema S inducida por el Hamiltoniano del sistema total es generalmente conocida como la dinámica del sistema reducido, y S es llamado el sistema reducido.

Se llama H_S al espacio de Hilbert del sistema S y H_E al espacio de Hilbert del entorno \mathcal{E} . El espacio de Hilbert del sistema total $S + \mathcal{E}$ está generado por el producto tensorial $H = H_S \otimes H_E$. El Hamiltoniano total del sistema se puede escribir según [5]:

$$H(t) = H_S \otimes I_E + I_S \otimes H_E + H_I(t), \quad (4.43)$$

donde H_S es el Hamiltoniano del sistema S , H_E es el Hamiltoniano libre del entorno \mathcal{E} y $H_I(t)$ describe la interacción entre el sistema y el entorno.

De acuerdo a la sección 4.2.4 los observables referentes a S son todos de la forma $A \otimes I_B$,

donde A es el operador actuando sobre el espacio de Hilbert H_S y I_B denota la identidad en el espacio de Hilbert H_E . Si el estado del sistema total es descrito por ρ el valor esperado de A es:

$$\langle A \rangle = \text{tr}_S \{ A \rho_S \}, \quad (4.44)$$

$\rho_S = \text{tr}_E \rho$ es la matriz reducida de un sistema cuántico abierto, mientras que tr_E denota la traza parcial sobre el ambiente E .

La matriz densidad $\rho_S(t)$ en el tiempo t se obtiene desde la matriz densidad total $\rho(t)$ tomando la traza parcial sobre el ambiente, en donde la matriz densidad evoluciona unitariamente. Se obtiene:

$$\rho_S(t) = \text{tr}_E \rho(t) = \text{tr}_E \{ U(t, t_0) \rho(t_0) U(t, t_0)^\dagger \}, \quad (4.45)$$

donde $U(t, t_0)$ es el operador evolución temporal del sistema total.

4.3.2. Ecuaciones maestras

Para el estudio de los sistemas cuánticos abiertos existen diversas herramientas, en esta sección, se usará el enfoque de las ecuaciones maestras. El objetivo principal en este contexto es el de describir la evolución temporal de un sistema abierto con una ecuación diferencial que describe adecuadamente el comportamiento no unitario. Esta descripción es proporcionada por la ecuación diferencial [43]:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \frac{-i}{\hbar} [H, \rho(t)] + \mathcal{L}[\rho(t)], \quad (4.46)$$

llamada ecuación maestra cuántica. El generador \mathcal{L} representa un superoperador Lindblad, el cual en forma general puede ser escrito como [5]:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \frac{-i}{\hbar} [H, \rho] + \sum_{k=1}^{N^2-1} \gamma_k (A_k \rho A_k^\dagger - \frac{1}{2} A_k^\dagger A_k \rho - \frac{1}{2} \rho A_k^\dagger A_k), \quad (4.47)$$

donde el primer término del generador representa la parte unitaria de la dinámica dada por el Hamiltoniano H . Los operadores adimensionales A_k , son usualmente denominados como operadores Lindblad, representando el acoplamiento del sistema con su ambiente. Las cantidades positivas γ_k tienen dimensiones de la inversa del tiempo y representan las tasas de decaimiento.

La dinámica de los sistemas cuánticos abiertos, permitirá el estudio de sistemas que interactúan con diferentes tipos de ruidos, para estos casos la estructura de la Ec.(4.47) será modificada en función de los operadores que mejor describan la interacción. La interacción de un sistema con el ambiente es uno de los factores que ocasionan la decoherencia del mismo, esto será analizado en conjunto con el entrelazamiento para sistemas específicos en el capítulo 5.

4.4. Entrelazamiento cuántico y su evolución

Tal como se presentó en la discusión en el capítulo 3, la motivación para el entendimiento del concepto de entrelazamiento no solo radica en su carácter fundamental sino también es incentivada por sus potenciales aplicaciones en el área de información cuántica. El fenómeno de entrelazamiento cuántico [41] está definido al considerar sistemas cuánticos compuestos (ver subsección 4.2.4) y es un recurso que admite ser cuantificado y transformado. En esta sección se discutirá algunos tipos de medida de entrelazamiento para estados puros y para estados mixtura (definidos en la sección 4.1).

4.5. Separabilidad versus entrelazamiento

Se considera un sistema multipartito S de N partículas. El estado del sistema es definido en un espacio de Hilbert, resultante del producto tensorial de los N espacios individuales de Hilbert de los subsistemas [45],

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_N. \quad (4.48)$$

Un estado cuántico $|\Psi\rangle$ puro que describe un sistema con muchas partes se dice que es estado producto o *separable* si y solo si es posible escribirlo como el producto de los estados de cada

parte

$$|\Psi\rangle = |\psi\rangle \otimes \dots \otimes |\psi_N\rangle. \quad (4.49)$$

Esto significa que es posible asignarle un vector de estado a cada subsistema, cada uno de los cuales tiene información completa sobre cada subsistema. Si se realiza una medición sobre uno de los subsistemas, esta no tiene ninguna influencia sobre el otro subsistema, esto es, no hay correlación entre los resultados de las mediciones de los subsistemas.

Por otro lado, cuando el estado global del sistema no puede escribirse de la forma (4.49) si existe correlación entre las mediciones de los subsistemas. A este tipo de estados se les llama estados *entrelazados*. En este caso, una medición local causa la reducción del estado sistema total y por lo tanto cambia los resultados de mediciones futuras en los sistemas.

Un estado general del sistema total puede ser escrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_{j_1 \dots j_N} a_{j_1 \dots j_N} |j_1\rangle \otimes \dots \otimes |j_N\rangle \equiv \sum_{j_1 \dots j_N} a_{j_1 \dots j_N} |j_1 \dots j_N\rangle, \quad (4.50)$$

donde $|j_i\rangle$, con $0 \leq j_i \leq d_i - 1$, es una base ortonormal de \mathcal{H}_i (de dimensión d_i).

Si se restringe a un sistema cuántico bipartito compuesto por dos subsistemas A y B, cuyos estados están en los espacios de Hilbert H_A y H_B de dimensión finita, $d_{A,B} \equiv \dim(H_{A,B}) = \dim(H_A) \dim(H_B)$, el espacio completo evidentemente es $H = H_A \otimes H_B$ (ver subsección 4.2.4). Para sistemas de dos niveles o qubits¹, sea la base $|+\rangle$ y $|-\rangle$. Entonces tenemos cuatro estados separables posibles [43]:

$$|-\ +\rangle, \quad |+\ -\rangle, \quad |-\ -\rangle, \quad |+\ +\rangle, \quad (4.51)$$

donde por ejemplo, $|-\ -\rangle_{AB} \equiv |-\rangle_A \otimes |-\rangle_B$. Debido a la posibilidad de superposición de estados en el espacio de Hilbert, también se puede tener, por ejemplo, estados de la forma

$$|\Psi\rangle = \alpha |-\ -\rangle + \beta |+\ +\rangle \in H, \quad (4.52)$$

¹El término qubit o bit cuántico [43], hace referencia a un sistema cuántico en el cual los estados booleanos clásicos 0 y 1 son reemplazados por un par de estados cuánticos mutuamente ortogonales denotados por $|0\rangle, |1\rangle$. Si se representa $|0\rangle = |-\rangle$ y $|1\rangle = |+\rangle$ estos dos estados forman una base computacional.

el cual es un estado entrelazado, ya que no puede ser escrito en forma factorizable. Una base completa del espacio de Hilbert bipartito esta dada por [41]

$$|\Psi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-+\rangle \pm |+ - \rangle), \quad |\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|--\rangle \pm |++\rangle), \quad (4.53)$$

los cuales son llamados usualmente la base de Bell. Esta base constituye un conjunto de estados con entrelazamiento máximo. Otro caso importante para destacar son los estados de Werner definidos como

$$\rho = p|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (1-p)\frac{I}{4}, \quad 0 \leq p \leq 1. \quad (4.54)$$

Al contrario de la base de Bell (algunas veces llamados estados EPR), este es un estado mixtura el cual presenta entrelazamiento solo para $p > 1/3$.

Claramente las afirmaciones previas descansan sobre la posibilidad de definir una medida de entrelazamiento, a continuación se expondran las correspondientes medidas para estados puros y estados mixtura.

4.6. Medidas de entrelazamiento para estados bipartitos puros

Para cada estado bipartito puro ρ la medida de entrelazamiento $E(\rho)$, puede ser definido como la entropía de Von Neumann calculada a partir de la matriz densidad reducida correspondiente a uno de los subsistemas [41, 45]

$$E(\rho) = S_A = S_B = -tr(\rho_A \log_2 \rho_A) = -tr(\rho_B \log_2 \rho_B). \quad (4.55)$$

Notar que esta medida es igual a cero para subsistemas puros (que implica un estado bipartito separable o producto).

En la siguiente sección se presenta el estudio de estados mezclados, para los cuales, la medida de entrelazamiento definida por la entropía de Von Neuman no se aplica.

4.7. Medidas de entrelazamiento para estados mixtura

Un estado mixtura es llamado separable si este puede ser preparado por las dos partes en una “manera clásica”. Por ejemplo, ambas partes pueden comunicarse clásicamente y coordinar como mezclan diferentes ensambles descritos por una dada matriz densidad. Específicamente, un estado mixtura es llamado separable si el mismo puede ser expresado como la combinación convexa de los estados producto de todos los subsistemas constituyentes [43]

$$\rho = \sum_{\mu} W_{\mu} \rho_{1\mu} \otimes \dots \otimes \rho_{N\mu}, \quad \sum_{\mu} W_{\mu} = 1, \quad W_{\mu} \geq 0. \quad (4.56)$$

donde $\rho_{i\mu}$, $1 \leq i \leq N$, es la matriz de densidad correspondiente al sistema i , y el subíndice μ se refiere al μ -miembro del conjunto de producto-estado de realización de ρ . En cualquier otro caso, se dice que el estado tiene entrelazamiento.

Es muy complicado mostrar directamente que un estado mixtura puede o no puede ser expresado en la forma (4.56). Por esta razón, se introdujeron otras definiciones alternativas. A continuación se describe un criterio propuesto por William K. Wootters [46], para detectar entrelazamiento, el cual puede ser evaluado en forma simple luego de definir la correspondiente matriz densidad.

4.7.1. Concurrencia

Un estado mixtura puede ser descompuesto como $\rho = \sum_i W_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|$. Fijando el estado ρ existen muchas maneras de lograr esta descomposición, esto es, distintos conjuntos de pesos W_i y estados puros $|\Psi_i\rangle$. El entrelazamiento de un estado mixtura ρ es definido como el entrelazamiento promedio de los estados puros de la descomposición, minimizado sobre todas las posibles descomposiciones de ρ [46].

$$E(\rho) = \min \sum_i W_i E(|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|), \quad (4.57)$$

donde $E(|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|)$, es definida por Ec. (4.55). En general, el proceso de minimizaciones extremadamente difícil, y su complejidad aumenta al aumentar la dimensión del espacio de

Hilbert de cada subsistema. Sin embargo, una expresión analítica exacta puede obtenerse cuando ambos subsistemas son sistemas de dos niveles.

La expresión obtenida por W.K. Wootters [46] es definida en términos de un estado auxiliar $\tilde{\rho}$,

$$\tilde{\rho} = (\sigma_y \otimes \sigma_y) \rho^* (\sigma_y \otimes \sigma_y), \quad (4.58)$$

donde ρ^* es la matriz conjugada de ρ , definida en la base de σ_z . El entrelazamiento de un estado mixtura ρ de dos qubits (dos estados de dos niveles) es

$$E(\rho) = \mathcal{E}(C(\rho)), \quad (4.59)$$

donde $\mathcal{E}(x)$ es una función convexa y $C(\rho)$, llamada la *conurrencia* del estado ρ , es definida como

$$C(\rho) = \text{máx}\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\}. \quad (4.60)$$

Aquí los coeficientes λ_i son los autovalores, en orden decreciente, de la matriz hermítica

$$\sqrt{\sqrt{\rho} \tilde{\rho} \sqrt{\rho}}. \quad (4.61)$$

Equivalentemente, se puede definir los λ_i como las raíces cuadradas de los autovalores de la matriz $\rho \tilde{\rho}$.

Dado que en la Ec. (4.59), $\mathcal{E}(x)$ es una función convexa, puede tomarse la conurrencia $C(\rho)$ Ec. (4.60) como medida de entrelazamiento. Bajo estas consideraciones, si se tiene una conurrencia cero el entrelazamiento será también cero y el estado bipartito es separable; si la conurrencia es uno el entrelazamiento es máximo.

En la contribución [47], para estados bipartitos se utiliza la siguiente representación de la matriz densidad de dos qubits, donde se utiliza el ordenamiento convencional de filas y columnas relacionados con los estados propios de σ_z^A y σ_z^B en la secuencia $[++, +-, -+, --]$:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} a(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b(t) & z(t) & 0 \\ 0 & z^*(t) & c(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d(t) \end{pmatrix}, \quad (4.62)$$

Obviamente $a + b + c + d = 1$. La concurrencia para esta estructura de matriz densidad esta dada por:

$$C[\rho(t)] = 2\text{máx}\{0, |z| - \sqrt{ad}\}. \quad (4.63)$$

En donde la existencia del entrelazamiento esta garantizada para valores de $|z| > \sqrt{ad}$. En el capítulo siguiente, se utiliza el formalismo planteado a lo largo de este capítulo, con el objetivo de estudiar sistemas cuánticos expuestos a ruidos, para el caso de sistemas compuestos, las mediciones de decoherencia del sistema se realizarán mediante la medida de la concurrencia.

Capítulo 5

Aplicación del formalismo de sistemas cuánticos abiertos en sistemas de un-qubit y de dos-qubits

Las observaciones dentro de los procesos de información cuántica son atenuadas, porque los sistemas reales sufren de interacciones no deseadas con el exterior. Estos procesos de decoherentes pueden ser modelados como ruidos en información cuántica. Se debe entender y controlar tales procesos de ruido con el fin de construir sistemas de procesamiento de información cuántica útiles [5]. Para fines de la aplicación de los formalismos propuestos en los capítulos anteriores, se examinan en el presente capítulo las características más importantes de dos modelos ideales de ruido y su formulación matemática para el estudio del sistema que se propone.

5.1. Sistemas de un-qubit

Se considera un sistema cuántico de dos niveles. El Hamiltoniano es diagonal en la base $|+\rangle, |-\rangle$, autoestados de la matriz σ_z Ec.(4.26). Entonces [43]:

$$H = \frac{\hbar}{2}\omega_0\sigma_z, \quad (5.1)$$

donde $\omega_0 > 0$ es la frecuencia de transición. Físicamente, este esquema de dos niveles surge siempre que la dinámica del sistema está efectivamente confinada a un espacio bidimensional, esto es, bajo la condición de que las transiciones a otros niveles puedan ser despreciadas.

5.1.1. Amortiguación de Amplitud

El ruido de amortiguación en amplitud o amplitude damping es un modelo esquemático que describe los efectos de disipación de energía debido a la pérdida de energía de un sistema cuántico [43]. por ejemplo:

- Las dinámicas de un átomo que emite un fotón de forma espontánea.
- El funcionamiento de un sistema de espín a alta temperatura en aproximación de equilibrio con su entorno.
- El estado de un fotón en un interferómetro o cavidad cuando está sujeta a la dispersión y atenuación.

Cada uno de estos procesos tiene sus propias características, pero el comportamiento general de todos ellos está bien caracterizado por el modelo de amplitud damping.

Para el desarrollo de la aplicación, se considera un átomo de dos niveles acoplado al vacío, sometido a emisión espontánea. La parte coherente de la evolución del átomo es descrito por el hamiltoniano $H = -\hbar\omega\sigma_z/2$, $\hbar\omega$ es la diferencia de energía atómica de los niveles. La emisión espontánea hace que un átomo en el estado excitado ($|1\rangle$) caiga al estado base ($|0\rangle$), emitiendo un fotón en el proceso. Esta emisión se describe por el operador Lindblad $\sqrt{\gamma}\sigma_-$, Donde $\sigma_- \equiv |0\rangle\langle 1|$ es el operador de descenso atómico, y γ es la tasa de emisión espontánea. La ecuación maestra que describe este proceso es:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[H, \rho(t)] + \gamma[\sigma_-, \rho(t)\sigma_+] + [\sigma_-\rho(t), \sigma_+], \quad (5.2)$$

donde γ es la tasa de decaimiento entre los dos niveles. σ_- y σ_+ son los operadores destrucción y creación, introducidos previamente, Ec.(4.28). Notar que los mismos son auto-operadores del Hamiltoniano atómico

$$[H, \sigma_-] = -\omega_0\sigma_- \quad [H, \sigma_+] = \omega_0\sigma_+. \quad (5.3)$$

Entonces σ_{\pm} cambia la energía del sistema en una cantidad $\pm\omega_0$, correspondiente al proceso de absorción y emisión de fotones.

La evolución de las poblaciones y coherencias de la matriz densidad, correspondiente a la Ec.(5.2) se escriben de manera explícita mediante las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\rho_{11} = \frac{d}{dt}\langle +|\rho(t)|+\rangle = -2\gamma\langle +|\rho(t)|+\rangle, \quad (5.4)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = \frac{d}{dt}\langle +|\rho(t)|-\rangle = -(i\omega_0 + \gamma)\langle +|\rho(t)|-\rangle, \quad (5.5)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{21} = \frac{d}{dt}\langle -|\rho(t)|+\rangle = (i\omega_0 - \gamma)\langle -|\rho(t)|+\rangle, \quad (5.6)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{22} = \frac{d}{dt}\langle -|\rho(t)|-\rangle = 2\gamma\langle -|\rho(t)|-\rangle. \quad (5.7)$$

Solucionando este sistema de ecuaciones diferenciales, para una condición arbitraria $\rho(0)$, se tiene para las coherencias

$$\rho_{12}(t) = \langle +|\rho(t)|-\rangle = \langle +|\rho(0)|-\rangle e^{t(-i\omega_0 - \gamma)}, \quad (5.8)$$

$$\rho_{21}(t) = \langle -|\rho(t)|+\rangle = \langle -|\rho(0)|+\rangle e^{t(i\omega_0 - \gamma)}, \quad (5.9)$$

donde se observa que las coherencias oscilan con frecuencia ω_0 , asociada con el Hamiltoniano Ec.(5.1). La atenuación debida al término $e^{-\gamma t}$, es inducida por decaimiento natural del sistema.

Las poblaciones son descritas por ecuaciones acopladas, cuya solución para condiciones iniciales arbitrarias son

$$\rho_{11}(t) = \langle +|\rho(t)|+\rangle = \langle +|\rho(0)|+\rangle e^{-2\gamma t}, \quad (5.10)$$

$$\rho_{22}(t) = \langle -|\rho(t)|-\rangle = \langle -|\rho(0)|-\rangle - \langle +|\rho(0)|+\rangle [e^{-2\gamma t} - 1]. \quad (5.11)$$

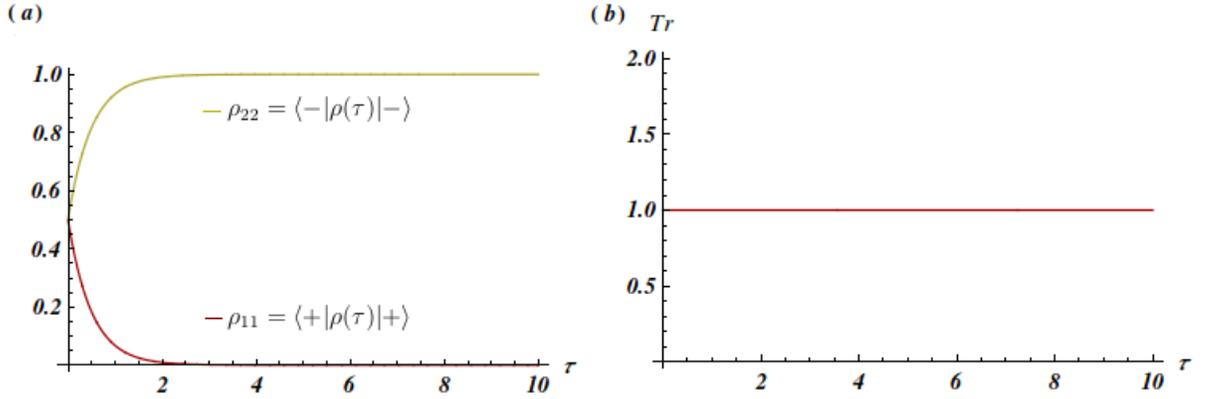


Figura 5.1: Gráfica de las soluciones (5.10) y (5.11), correspondientes a un sistema de un-qubit bajo amortiguación de amplitud (a) Evolución de las poblaciones de $\rho(\tau)$. (b) Traza: $\rho_{11} + \rho_{22} = \langle +|\rho(\tau)|+ \rangle + \langle -|\rho(\tau)|- \rangle$. El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$.

Notar que la población superior es absorbida por la inferior,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle +|\rho(t)|+ \rangle = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \langle -|\rho(t)|- \rangle = 1 \quad (5.12)$$

Las poblaciones representan probabilidades de que el sistema se encuentre un estado determinado. Las gráficas describen un proceso de transición entre las poblaciones, las cuales, alcanzan un estado estacionario, por lo cual se tiene que todos los elementos diagonales de $\rho(t)$ se encuentran entre los valores de cero y uno, $0 \leq \rho_{ii} \leq 1$. Esto implica que la suma de las poblaciones mostrada en la parte (b) de la Fig.(5.1), cumple con la propiedad dada por la Ec. (4.11).

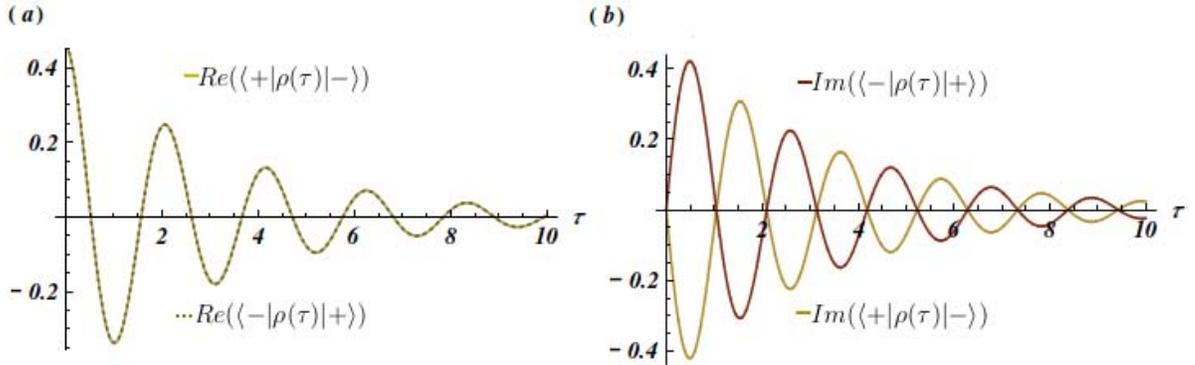


Figura 5.2: Gráfica de las soluciones (5.8) y (5.9), correspondientes a un reservorio térmico a temperatura efectiva cero (a) Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, donde la línea punteada (indistinguible) pertenece a la coherencia $\langle -|\rho(\tau)|+\rangle$. (b) Evolución de la parte imaginaria de coherencias de $\rho(\tau)$. El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\gamma = 0,3$ y $\omega_0 = 3$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -|)$.

Los elementos no diagonales de la matriz densidad, que se conocen como coherencias, están relacionados con fenómenos de interferencia entre las funciones de onda correspondientes. Estrictamente, lo que se puede apreciar en las gráficas, es que las oscilaciones pertenecientes a las coherencias se atenúan y disminuyen con el tiempo debido a la interacción del sistema con el ambiente.

En la Fig. (5.3) se muestra como evoluciona la población $\langle +|\rho(\tau)|+\rangle$ para diferentes valores de γ , puesto que γ es la tasa de decaimiento entre los dos niveles, la población indicada se amortigua más rápidamente a medida que γ crece, indicando un acoplamiento más fuerte entre el qubit y su entorno.

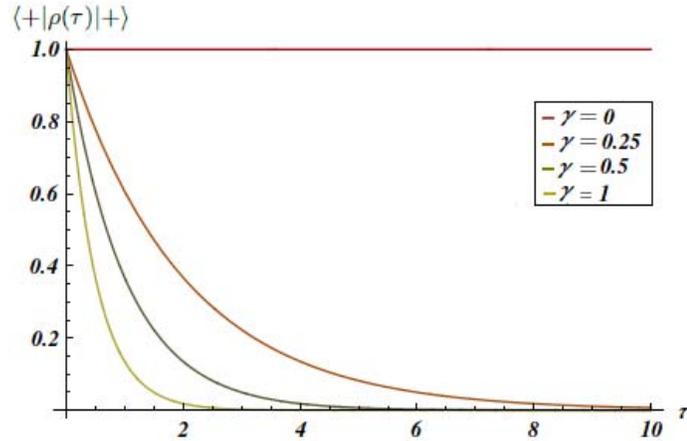


Figura 5.3: Evolución de la población $\langle +|\rho(\tau)|+ \rangle$, para diferentes valores de γ . El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$.

Se observa que para $\gamma = 0$ la población permanecen estable, pues no se ve afectada por el entorno y la evolución del sistema es netamente descrito por la parte unitaria, lo que representa que el sistema, es un sistema cuántico cerrado.

Para el caso de las coherencias sometidas a diferentes valores de γ , Fig. (5.4) se puede observar que las oscilaciones se atenúan mas rápidamente mientras el parámetro γ toma valores mayores, en el caso de $\gamma = 0$ la amplitud de las oscilaciones de las coherencias no se ven afectadas.

Por otra parte, la dinámica de la coherencia mostrada en la Fig. (5.5), muestra su comportamiento para diferentes valores ω_0 , para este caso a mayor frecuencia de transición, la frecuencia de las oscilaciones son mayores.

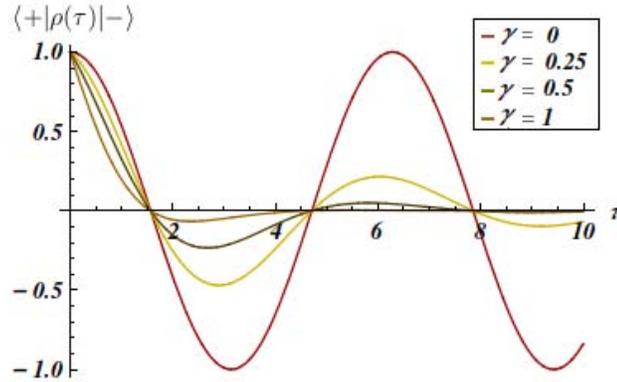


Figura 5.4: Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, para diferentes valores de γ . El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\omega_0 = 1$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$.

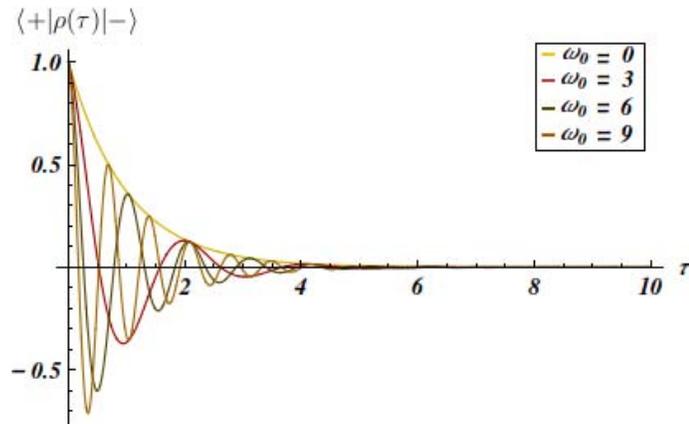


Figura 5.5: Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, para diferentes valores de ω_0 . El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\gamma = 1$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$.

5.1.2. Amortiguación de fase

El ruido de amortiguación de fase o phase damping puede ser descrito de la siguiente manera [43]:

Se supone que se tiene un sistema cuántico de dos niveles (un-qubit), sobre el cual que

se aplica la operación de rotación $R_z(\theta)$, donde el ángulo de rotación θ es aleatoria. La aleatoriedad podría originarse, por ejemplo, de una interacción determinista con un medio ambiente, que nunca más interactúa con el sistema y por lo tanto se mide de forma implícita, se llamará a este azar en la rotación R_z un “phase kick”. Se considerará este ruido como resultado de un proceso en el que, o bien no pasa nada a un qubit, con una probabilidad p , o con probabilidad $1 - p$, el qubit es girado por la operación σ_z . Para este proceso la matriz densidad del sistema evoluciona de la siguiente forma:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[H, \rho(t)] + \gamma[\sigma_z\rho(t)\sigma_z - \rho(t)], \quad (5.13)$$

donde γ es la tasa de decaimiento entre los dos niveles.

La evolución de las poblaciones y coherencias de la matriz densidad, correspondiente a la Ec. (5.13) se escriben de manera explícita mediante las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{dt}\rho_{11} = \frac{d}{dt}\langle +|\rho(t)|+ \rangle = 0 \quad (5.14)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{12} = \frac{d}{dt}\langle +|\rho(t)|- \rangle = -(i\omega_0 + 2\gamma)\langle +|\rho(t)|- \rangle, \quad (5.15)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{21} = \frac{d}{dt}\langle -|\rho(t)|+ \rangle = (i\omega_0 - 2\gamma)\langle -|\rho(t)|+ \rangle, \quad (5.16)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{22} = \frac{d}{dt}\langle -|\rho(t)|- \rangle = 0. \quad (5.17)$$

Al solucionar este sistema de ecuaciones diferenciales, para una condición arbitraria $\rho(0)$, se tiene para las coherencias

$$\rho_{12}(t) = \langle +|\rho(t)|- \rangle = \langle +|\rho(0)|- \rangle e^{t(-i\omega_0 - 2\gamma)}, \quad (5.18)$$

$$\rho_{21}(t) = \langle -|\rho(t)|+ \rangle = \langle -|\rho(0)|+ \rangle e^{t(i\omega_0 - 2\gamma)}. \quad (5.19)$$

Las poblaciones son constantes para las condiciones iniciales arbitrarias:

$$\rho_{11}(t) = \langle +|\rho(t)|+ \rangle = \langle +|\rho(0)|+ \rangle, \quad (5.20)$$

$$\rho_{22}(t) = \langle -|\rho(t)|- \rangle = \langle -|\rho(0)|- \rangle. \quad (5.21)$$

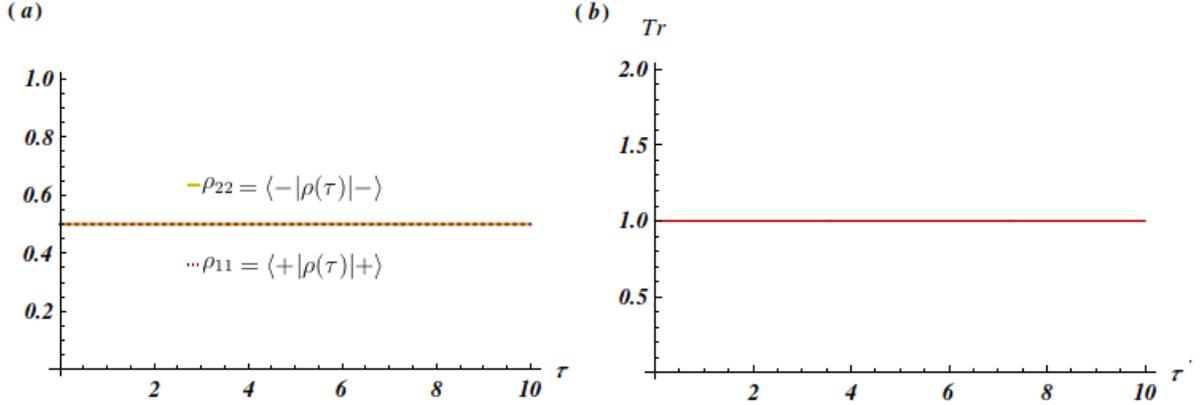


Figura 5.6: Gráfica de las soluciones (5.20) y (5.21), correspondientes a un reservorio térmico a temperatura efectiva cero (a) Evolución de las poblaciones de $\rho(\tau)$, donde la línea punteada (indistinguible) pertenece a la población $\langle +|\rho(\tau)|+ \rangle$. (b) Traza: $\rho_{11} + \rho_{22} = \langle +|\rho(\tau)|+ \rangle + \langle -|\rho(\tau)|- \rangle$. El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -|)$.

La parte (a) de la Fig.(5.6) describe un proceso estacionario para las poblaciones, es decir constantes para cualquier tiempo, en donde el valor de γ no tiene ningún efecto. Este comportamiento está asociado con el hecho en el cual los estados propios de energía de un sistema cuántico sometido a amortiguación en la fase no cambian como una función del tiempo.

Las poblaciones representan la probabilidad de que el sistema se encuentre en un estado determinado, para este caso se tiene probabilidad de $\frac{1}{2}$ para cada estado, esto implica que la suma de las poblaciones mostrada en la parte b) de la Fig.(5.6), cumple con la propiedad dada por la Ec.(4.11).

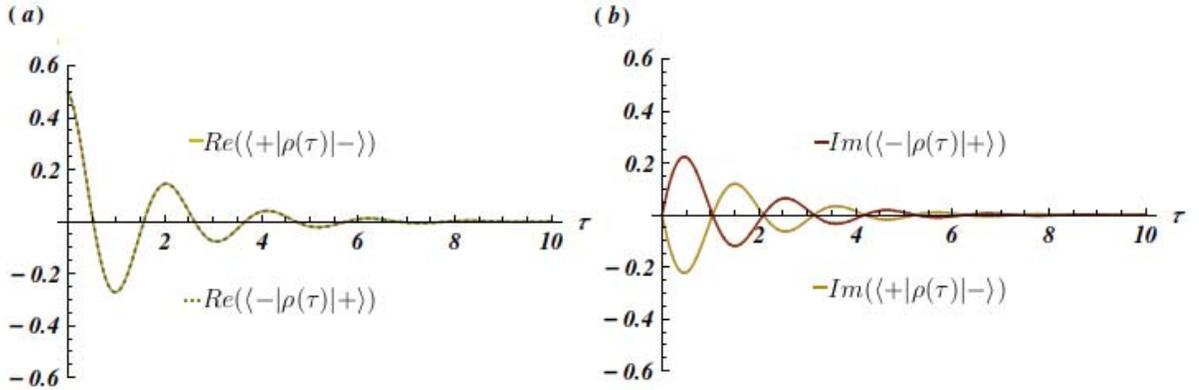


Figura 5.7: Gráfica de las soluciones (5.18) y (5.19), correspondientes a un reservorio térmico a temperatura efectiva cero (a) Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, donde la línea punteada (indistinguible) pertenece a la coherencia $\langle -|\rho(\tau)|+\rangle$. (b) Evolución de la parte imaginaria de coherencias de $\rho(\tau)$. El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\gamma = 0,3$ y $\omega_0 = 3$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$.

En la Fig.(5.7), se observa que las coherencias oscilan atenuándose y disminuyendo con el tiempo como resultado de la interacción del qubit con el ambiente. Este hecho se refiere a que la aleatoriedad de “phase kick” hace que el valor esperado de los elementos fuera de la diagonal de la matriz densidad se atenué exponencialmente a cero con el tiempo sufriendo un proceso de relajación. Esto es un resultado característico de amortiguación de fase que describe la pérdida de información cuántica sin pérdida de energía.

En comparación al caso de la Fig.(5.2), a pesar de tener los mismos parámetros $\gamma = 0,3$ y $\omega_0 = 3$ que en el presente caso, se nota que la atenuación en las coherencias son mas rápidas, esto se debe a que este tipo de ruido afecta especialmente a las coherencias.

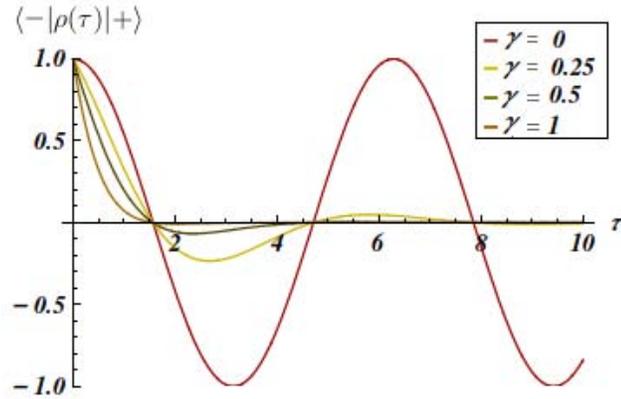


Figura 5.8: Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, para diferentes valores de γ . El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\omega_0 = 1$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$.

Para las coherencias sometidas a diferentes valores de γ , Fig.(5.8) se observa que las oscilaciones se atenúan con mayor rapidez mientras la tasa de decaimiento entre los dos niveles γ es mas alta, en el caso de $\gamma = 0$ la amplitud de las oscilaciones de las coherencias no se ven afectadas.

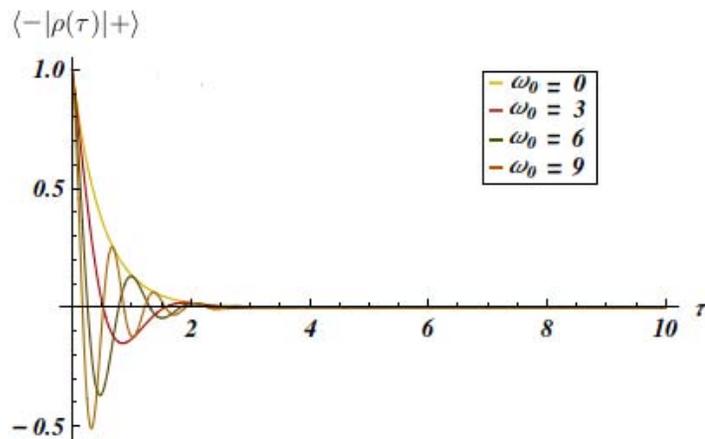


Figura 5.9: Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, para diferentes valores de ω_0 . El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\gamma = 1$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$.

La dinámica de la coherencia mostrada en la Fig.(5.9), muestra el comportamiento para diferentes valores ω_0 , en este caso a mayor frecuencia de transición, el número de oscilaciones por unidad de tiempo es mayor.

5.1.3. Amortiguación de fase y amortiguación de amplitud

Finalmente se supone el qubit acoplado a los dos ambientes, en un caso un ruido en la amplitud y otro en la fase, de esta forma tenemos la interacción del qubit con dos fuentes de ruido diferentes [47]. Como se presentó en los resultados anteriores, la dependencia del tiempo de la coherencia del qubit para el caso del ruido de atenuación de amplitud son:

$$\rho_{12}(t) = \langle +|\rho(t)|- \rangle = \langle +|\rho(0)|- \rangle e^{t(-i\omega_0 - \gamma)}. \quad (5.22)$$

Mientras que para el caso del ruido en la fase

$$\rho_{12}(t) = \langle +|\rho(t)|- \rangle = \langle +|\rho(0)|- \rangle e^{t(-i\omega_0 - 2\gamma)}. \quad (5.23)$$

Ahora conectando ambos, un ruido en la amplitud y un ruido en la fase al mismo tiempo, la ecuación maestra para el qubit en la representación interacción (Apéndice B) es:

$$\frac{d}{dt}\rho = \frac{\gamma_1}{2}(2\sigma_- \rho \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_- \rho - \rho \sigma_+ \sigma_-) + \frac{\gamma_2}{2}(\sigma_z \rho \sigma_z - \rho). \quad (5.24)$$

La solución, para las coherencias del qubit es:

$$\rho_{12}(t) = \langle +|\rho(t)|- \rangle = \langle +|\rho(0)|- \rangle e^{-i\omega_0 t} e^{-(\frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2)t}, \quad (5.25)$$

$$\rho_{21}(t) = \langle -|\rho(t)|+ \rangle = \langle -|\rho(0)|+ \rangle e^{i\omega_0 t} e^{-(\frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2)t}. \quad (5.26)$$

Con esto se demuestra que la decoherencia interna total de un qubit sobre un ruido en atenuación de fase y un ruido en atenuación de amplitud aplicados al mismo tiempo es dada por la suma de las tasas de decaimiento separadas: $\frac{1}{2}\gamma_1 + \gamma_2$. Donde se observa la linealidad de la interacción de los ruidos.

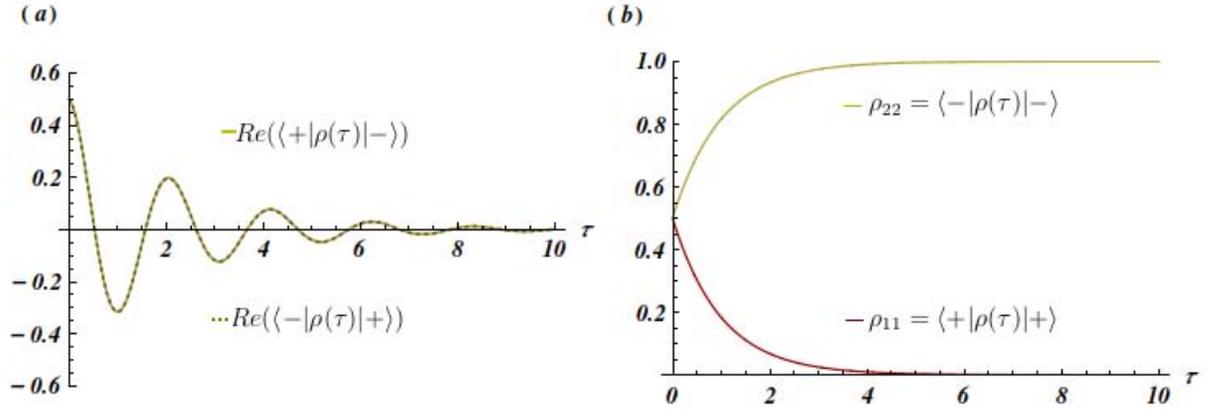


Figura 5.10: Gráfica de las soluciones (5.25) y (5.26), correspondientes a un reservorio térmico a temperatura efectiva cero (a) Evolución de la parte real de coherencias de $\rho(\tau)$, donde la línea punteada (indistinguible) pertenece a la coherencia $\langle -|\rho(\tau)|+ \rangle$. (b) Evolución de las poblaciones de $\rho(\tau)$. El parámetro temporal es $\tau = t/\tau_0$ y $\tau_0 = 1/\gamma$, con $\gamma = 0,3$ y $\omega_0 = 3$. La condición inicial es $\rho(0) = \frac{1}{2}(|-\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| + |+\rangle\langle -| + |+\rangle\langle +|)$.

La Fig.(5.10), muestra que la dinámica de coherencias y poblaciones para un qubit sometido a un ruido de atenuación de amplitud y un ruido en atenuación de fase aplicados al mismo tiempo, es igual a aplicar los ruidos por separado, se observa claramente un comportamiento similar. (a) Las oscilaciones pertenecientes a las coherencias se atenúan y disminuyen con el tiempo porque las fluctuaciones del ambiente no alcanzan a excitar apreciablemente el sistema, (b) Describe un proceso de transición entre las poblaciones, las cuales alcanzan un estado estacionario.

El estudio hasta aquí presentado de sistemas cuánticos abiertos, se basa en el escenario en el cual un sistema cuántico esta en contacto o interacción con el ambiente o ruido (según lo presentado a lo largo de este capítulo), causante de la pérdida de coherencia del sistema causando su relajación.

En este orden, en la siguiente subsección se extenderá esta discusión a un sistema compuesto por dos partes o un sistema bipartito (Ver subsección 4.2.4). Los aspectos bipartitos de la información cuántica tal como los estados mixtos y entrelazamiento (Resultado fundamental en el estudio propuesto en los capítulos 1 y 2), no están presentes en un solo sistema (siste-

ma de un-qubit) o en un par de sistemas clásicos y permite nuevos efectos de los sistemas cuánticos abiertos.

5.2. Sistemas de dos-qubits o bipartitos

La concurrencia presentada en el capítulo anterior usada como medida del entrelazamiento para un sistema de dos qubits, permite el estudio de la evolución del entrelazamiento y de esta manera, el análisis del efecto de los ruidos cuánticos sobre el sistema. El objetivo de esta sección es presentar el estudio de la evolución de la concurrencia de sistemas cuánticos acoplados a un ambiente (amortiguación de fase y de amplitud).

Se consideran dos qubits con un dado entrelazamiento inicial. La dinámica del entrelazamiento (medida por la concurrencia) es calculada a partir de la matriz densidad del sistema bipartito. La evolución de esta última está dada por una ecuación tipo Lindblad que describe el decaimiento natural de cada subsistema. Así se estudiará la evolución del entrelazamiento para determinadas condiciones iniciales.

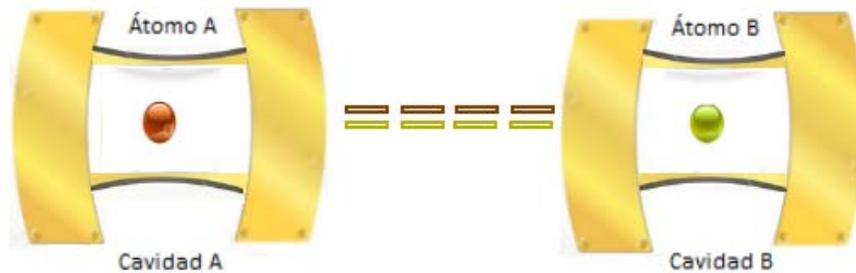


Figura 5.11: Ilustración esquemática de un arreglo en el cual dos átomos A y B están ubicados dentro de dos cavidades espacialmente separadas. Los dos átomos están inicialmente con entrelazamiento pero no interactúan entre sí.

Una situación experimental [48] que corresponde al modelo teórico es el de dos átomos A y B, acoplados individualmente a dos cavidades, Fig.(5.11). Los dos átomos pueden ser descritos mediante una aproximación de dos niveles (no hay excitaciones a niveles superiores). Los mismos se identifican como el sistema (bipartito) de interés, mientras que las dos

cavidades representan el ambiente de cada subsistema. La interacción entre cada átomo y su ambiente da lugar a la pérdida de coherencia (local) y también del entrelazamiento cuántico entre los dos átomos.

Se supone que inicialmente entre los dos átomos existe entrelazamiento (conurrencia inicial no nula) entre sí. La evolución de la matriz densidad del sistema bipartito sometido a un ruido en amplitud (Amplitud Damping) puede ser descrita por una ecuación tipo Lindblad la cual fue introducida en la sección anterior. Aquí la diferencia es que hay que considerar dos subsistemas. Se denota con γ_a y γ_b las tasas de decaimiento de cada subsistema, la ecuación maestra del sistema de dos átomos para este caso es:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[H_{at}, \rho] + \frac{\gamma_a}{2}([\sigma_-^A, \rho\sigma_+^A] + [\sigma_-^A\rho, \sigma_+^A]) + \frac{\gamma_b}{2}([\sigma_-^B, \rho\sigma_+^B] + [\sigma_-^B\rho, \sigma_+^B]), \quad (5.27)$$

donde H_{at} es el Hamiltoniano

$$H_{at} = \frac{1}{2}\omega_A\sigma_z^A + \frac{1}{2}\omega_B\sigma_z^B. \quad (5.28)$$

En estas expresiones, se ha introducido los operadores $\sigma_z^A = \sigma_z \otimes I$, $\sigma_z^B = I \otimes \sigma_z$, $\sigma_-^A = \sigma_- \otimes I$, $\sigma_+^A = \sigma_+ \otimes I$, $\sigma_-^B = I \otimes \sigma_-$, $\sigma_+^B = I \otimes \sigma_+$. La ecuación maestra (5.27) en una representación interacción respecto a H_{at} , sólo incluye la contribución disipativa. La solución general obviamente depende de la condición inicial, se presenta a continuación los resultados considerando diferentes condiciones iniciales.

Estados de Bell

Se analizó el problema para los estados de Bell como condición inicial Ec.(4.53), la evolución de la concurrencia para la ecuación maestra (5.27), se presenta en la Fig.(5.12). Para este caso, la concurrencia presenta un decaimiento monótono por la interacción con el ruido.

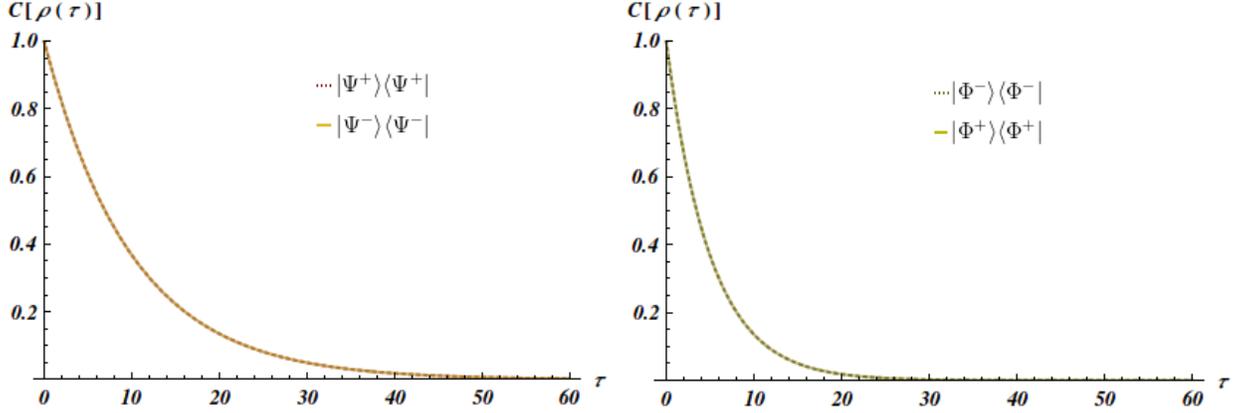


Figura 5.12: Evolución de la concurrencia en función de $\tau = \gamma t$ con $\gamma_a = \gamma_b$, donde la condición inicial esta dada por los estados de Bell

Estados de Werner:

Para condiciones iniciales dadas por los estados de Werner $\rho(0) = a|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (1-a)\frac{I}{4}$, en donde $0 \leq a \leq 1$, Ec.(4.54). La solución de la ecuación maestra es:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4}(2e^{-t\gamma_a} - (1-a)e^{-t(\gamma_a+\gamma_b)}) & -\frac{1}{2}ae^{-t\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}ae^{-t\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)} & \frac{-1}{4}(2e^{-t\gamma_b} - (1-a)e^{-t(\gamma_a+\gamma_b)}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

donde $\alpha = \frac{-1}{4}(a-1)e^{-t(\gamma_a+\gamma_b)}$ y $\beta = \frac{1}{4}(4 - 2e^{-t\gamma_a} - 2e^{-t\gamma_b} + (1-a)e^{-t(\gamma_a+\gamma_b)})$. La matriz (5.29) presenta la misma estructura dada por Ec.(4.62), por lo tanto usando la ecuación para la concurrencia Ec.(4.63) se obtiene:

$$C[\rho(t)] = 2\max\left\{0, \left|-\frac{1}{2}ae^{-t\frac{1}{2}(\gamma_a+\gamma_b)}\right| - \frac{1}{4}\sqrt{(a-1)e^{-2t(\gamma_a+\gamma_b)}(a - (-1 + 2e^{t\gamma_a})(-1 + 2e^{t\gamma_b}))}\right\}. \quad (5.30)$$

Notar que sólo existe entrelazamiento para $1/3 < a \leq 1$, siendo cero para $a \leq 1/3$. Se observa que la evolución de la concurrencia para valores de tiempos diferentes de cero, depende del parámetro a , el cual depende de forma no trivial de las tasas de decaimientos γ_a y γ_b . Los resultados presentados en la Fig.(5.12) muestran que el comportamiento de la concurrencia decae monótonamente para $a > 1/3$.

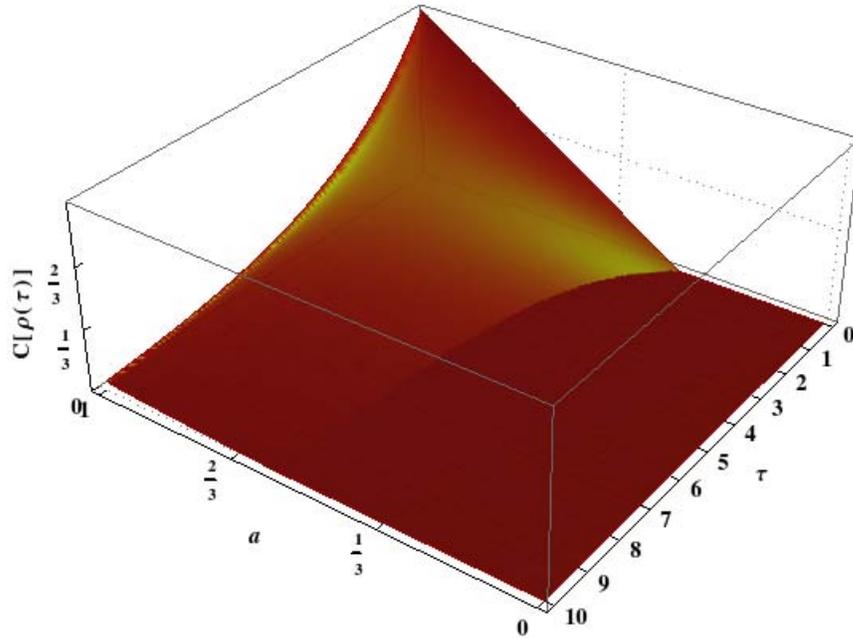


Figura 5.13: Evolución de la concurrencia, asociada a la evolución (5.27) con condición inicial (4.54). La variable temporal es $\tau = \gamma t$, donde $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$.

Estados puros separables

Es importante destacar que si el estado inicial es un estado separable, por ejemplo $\rho(0) = \frac{I}{2} \otimes \frac{I}{2}$, la concurrencia $C(t) = \max\{0, -1/2\} = 0$ es para todo tiempo. Esto indica que la dinámica propuesta en la Ec.(5.27) no crea entrelazamiento. De esta manera, observando los resultados obtenidos para diferentes condiciones iniciales, es evidente el rol importante que las mismas desempeñan en la evolución del entrelazamiento.

5.2.1. Amortiguación de fase

Considerando ahora que el sistema bipartito propuesto en esta sección, está acoplado con un ruido de amortiguación de fase, denotando con γ_a y γ_b las tasas de decaimiento de cada subsistema, la ecuación maestra del sistema de dos qubits es:

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[H, \rho(t)] + \gamma_a[\sigma_z^A \rho(t) \sigma_z^A - \rho(t)] + \gamma_b[\sigma_z^B \rho(t) \sigma_z^B - \rho(t)], \quad (5.31)$$

donde H_{at} es el Hamiltoniano

$$H_{at} = \frac{1}{2}\omega_A \sigma_z^A + \frac{1}{2}\omega_B \sigma_z^B. \quad (5.32)$$

Se ha introducido los operadores $\sigma_z^A = \sigma_z \otimes I$, $\sigma_z^B = I \otimes \sigma_z$. La ecuación maestra (5.31) en la representación interacción respecto a H_{at} , sólo incluye la contribución disipativa.

Las soluciones de la evolución del entrelazamiento (5.31) pueden obtenerse exactamente como en el caso anterior, mediante la solución numérica, en donde las condiciones iniciales representan un rol esencial en la dinámica decoherente del sistema.

Estados de Bell

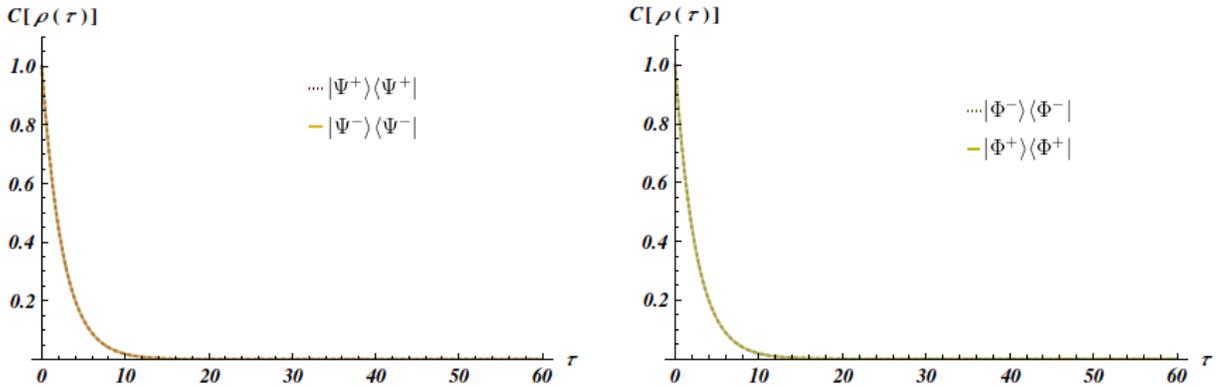


Figura 5.14: Evolución de la concurrencia en función de $\tau = \gamma t$ donde $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$, donde la condición inicial está dada por los estados de Bell

Considerando los estados de Bell como condiciones iniciales, Ec.(4.53), la evolución de la concurrencia para la ecuación maestra (5.31), se presenta en la Fig.(5.14). En este caso, la concurrencia presenta un decaimiento monótono por la influencia del ruido.

Estados de Werner

Para condiciones iniciales dadas por los estados de Werner $\rho(o) = a|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (1-a)\frac{I}{4}$ en donde $0 \leq a \leq 1$, Ec.(4.54). Se puede ver que la solución de la ecuación maestra (5.31) en representación interacción tiene la siguiente estructura:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-a}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+a}{4} & -\frac{1}{2}e^{-t(2\gamma_a+2\gamma_b)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}e^{-t(2\gamma_a+2\gamma_b)} & \frac{1+a}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-a}{4} \end{pmatrix}, \quad (5.33)$$

la cual tiene la misma estructura dada por Ec. (4.62), por lo tanto usando la ecuación para la concurrencia Ec.(4.63) se obtiene:

$$C[\rho(t)] = 2\max\{0, |\frac{1}{2}ae^{-t(2\gamma_a+2\gamma_b)}| - \frac{1}{4}(1-a)\}. \quad (5.34)$$

Notar que para este estado, en el tiempo $t = 0$, existe entrelazamiento para $1/3 < a \leq 1$. Mientras que para valores de tiempos diferentes de cero, la existencia o no del entrelazamiento, depende del parámetro a y de las tasas de decaimiento, es decir, existe entrelazamiento para:

$$\frac{1}{2}(e^{-2t(\gamma_a+\gamma_b)} + 1/2) < a \leq 1.$$

El comportamiento de la concurrencia presenta un decaimiento monótonico, asociado con las tasas de decaimiento. Estos resultados son presentados en la Fig.(5.15).

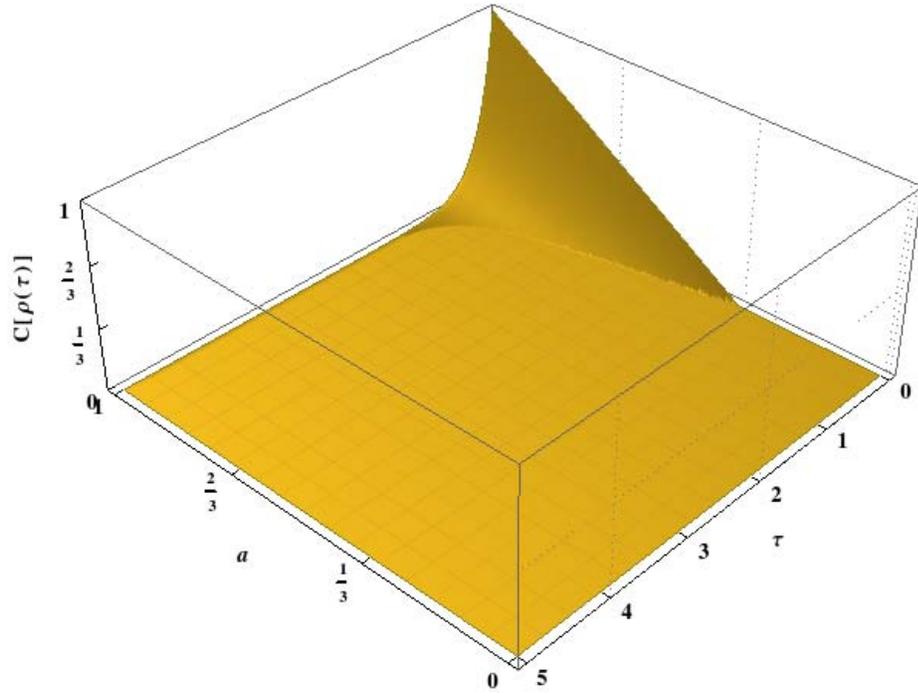


Figura 5.15: Evolución de la concurrencia, asociada a la evolución (5.31) con condición inicial (4.54). La variable temporal es $\tau = \gamma t$ con $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$, donde a parametriza la condición inicial.

Estados puros separables

Para el estado inicial dado por un estado separable, por ejemplo $\rho(0) = \frac{I}{2} \otimes \frac{I}{2}$, la concurrencia $C(t) = \max\{0, -1/2\} = 0$ para todo tiempo. La dinámica del sistema Ec.(5.27) no crea entrelazamiento.

5.2.2. Amortiguación de fase y amortiguación de amplitud

Finalmente, se estudia un sistema de dos-qubits, en el cual un qubit se acopla a un ruido de amortiguación de amplitud y el otro qubit se acopla a un ruido de amortiguación de fase. La interacción de los qubits con dos fuentes de ruido diferentes esta dada por la ecuación (En

la representación interacción):

$$\frac{d\rho(t)}{dt} = \frac{-i}{\hbar}[H, \rho(t)] + \frac{\gamma_a}{2}([\sigma_-^A, \rho\sigma_+^A] + [\sigma_-^A\rho, \sigma_+^A]) + \frac{\gamma_b}{2}[\sigma_z^B\rho(t)\sigma_z^B - \rho(t)]. \quad (5.35)$$

Estados de Bell

Para estados de Bell como condición inicial, Ec.(4.53). La evolución de la concurrencia para la ecuación maestra (5.35), se presenta en la Fig.(5.16). Para este caso, la concurrencia presenta un decaimiento monótono debido a la influencia de los ruidos a los que ha sido sometido el sistema.

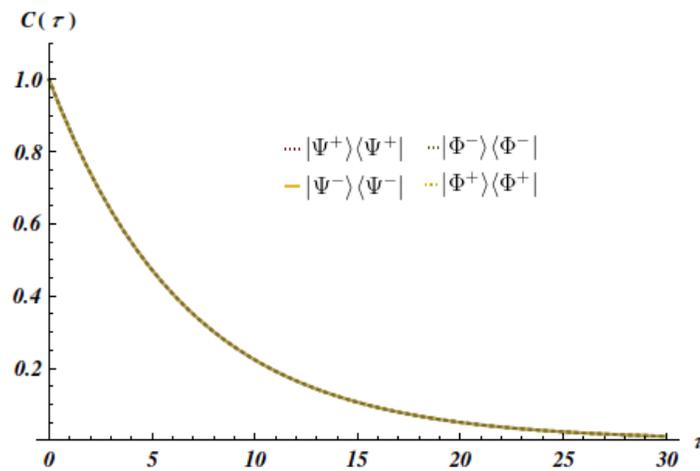


Figura 5.16: Evolución de la concurrencia en función de $\tau = \gamma t$ con $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$, donde la condición inicial esta dada por los estados de Bell

Estados de Werner

Para condiciones iniciales dadas por los estados de Werner $\rho(o) = a|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + (1-a)\frac{I}{4}$ en donde $0 \leq a \leq 1$, Ec. (4.54). La solución de la ecuación maestra es:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{4}(-1+a)e^{-t\gamma_a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{4}(-1-a)e^{-t\gamma_a} & -\frac{1}{2}ae^{-t\frac{1}{2}(\gamma_a+2\gamma_b)} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}ae^{-t\frac{1}{2}(\gamma_a+2\gamma_b)} & \frac{1}{4}(2-(1-a)e^{-t\gamma_a}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(2-(1+a)e^{-t\gamma_a}) \end{pmatrix}, \quad (5.36)$$

la cual presenta la misma estructura dada por Ec. (4.62), por lo tanto usando la ecuación para la concurrencia Ec (4.63) se obtiene:

$$C[\rho(t)] = 2\text{máx}\{0, |-\frac{1}{2}ae^{-\frac{1}{2}t(\gamma_a+2\gamma_b)}| - \frac{1}{4}\sqrt{(1-a)e^{-2t\gamma_a}(-1-a+2e^{t\gamma_a})}\} \quad (5.37)$$

Notar que para este estado, en el tiempo $t = 0$, existe entrelazamiento para $1/3 < a \leq 1$ Mientras que para valores de tiempos diferentes de cero, la existencia o no del entrelazamiento, depende del parámetro a el cual depende de forma no trivial de las tasas de decaimientos γ_a y γ_b . Los resultados para este caso se muestran en Fig.(5.18), la concurrencia decae de forma monótona para diferentes valores del parámetro a , donde a parametriza las condiciones iniciales, de tal forma que estas pueden estar entrelazadas o no Fig.(5.17).

Una consecuencia interesante, del sistema compuesto por dos-qubits, es el hecho asociado a la no linealidad en la suma de ruidos Ec.(5.37), contrario al caso de sistemas un-qubit donde la sumatoria de los ruidos dio como resultado una sumatoria lineal de las decoherencias asociadas a cada ruido.

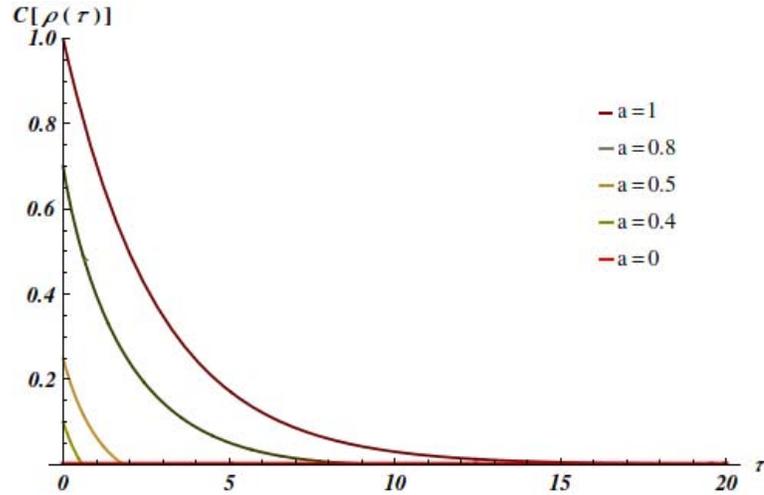


Figura 5.17: Evolución de la concurrencia, asociada a la evolución (5.35) con condición inicial (4.54). Para diferentes valores del parámetro a . La variable temporal es $\tau = \gamma t$, con $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$.

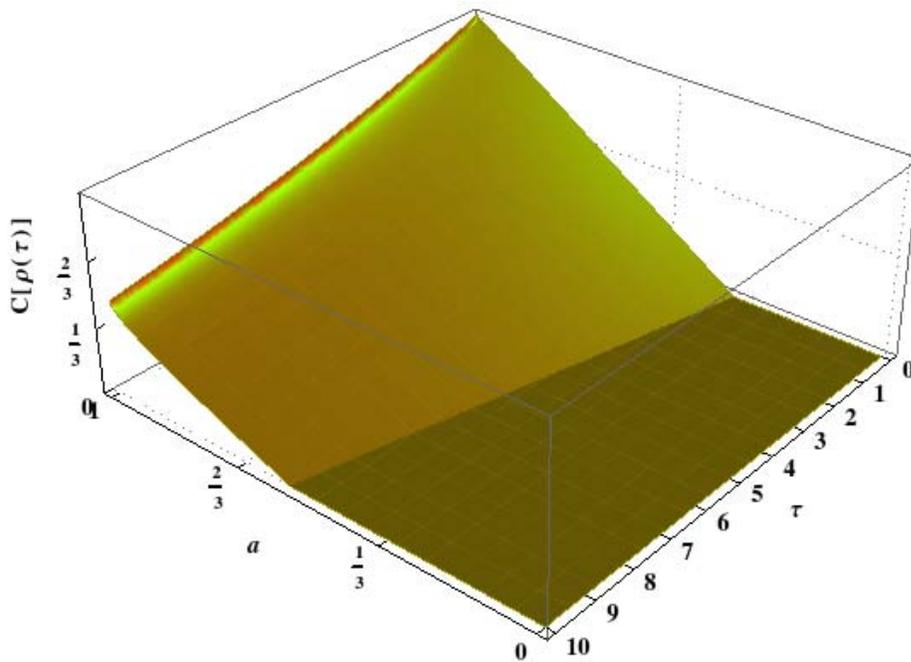


Figura 5.18: Evolución de la concurrencia, asociada a la evolución (5.35) con condición inicial (4.54). La variable temporal es $\tau = \gamma t$, donde $\gamma_a = \gamma_b = \gamma$.

A lo largo de este capítulo se estudio sistemas de un y dos qubits expuestos a dos tipos de ruidos, uno de amortiguación de amplitud y otro de amortiguación de fase, para esto se uso como herramienta computacional, para las soluciones numéricas y analíticas el programa Wolfram Mathematica. Los resultados, obtenidos aquí, mostraron las principales características de la dinámica de sistemas decoherentes. Para el caso de un-qubit, se mostró el comportamiento de poblaciones y coherencias de una matriz densidad, en donde se observa la perdida de coherencia del sistema cuando este es expuesto a algún tipo de ruido, finalmente con el acoplamiento del qubit a una mezcla de ruidos, se puede observar, que el decaimiento esta asociado a la suma de decaimientos propios de cada ruido.

Para el caso de sistemas de dos-qubits, la dinámica de decoherencia, se torna un poco mas compleja. En este caso, para estudiar la evolución del entrelazamiento se uso la concurrence, y se presentaron de forma analítica las soluciones para los dos sistemas. Como conclusión en esta parte del trabajo, adicionalmente al efecto de decaimiento monotónico debido a la interacción con el ambiente, el sistema acoplado a dos tipos de ruido, presenta un comportamiento no lineal.

Conclusiones y recomendaciones

A continuación, se resume la contribución de la presente tesis, así como las perspectivas abiertas para investigaciones futuras.

En los capítulos de la presente tesis se expusieron distintos componentes y herramientas como también su uso para la descripción del problema analizado.

Dentro de los capítulos 2 y 3 se presentó una revisión de las principales discusiones de la mecánica cuántica, partiendo de su base formal se expuso como sobre los debates filosóficos de los conceptos de la mecánica cuántica en su interpretación de Copenhague se han desarrollado los ejes principales de esta teoría con mayor aplicabilidad en la ciencia, como son las desigualdades de Bell, de las cuales se realizó un análisis demostrativo, que inicia con la paradoja EPR y culmina con las pertinentes consecuencias acerca de las nociones de No-localidad y entrelazamiento cuántico, pilares fundamentales en el campo de la información cuántica. De esta forma el auge en la investigación que se advierte en este campo en base a la mecánica cuántica no puede ser producto del análisis netamente científico, puesto que necesitó un soporte en discursos y discusiones de carácter filosófico.

En el capítulo 4, se estudiaron los conceptos fundamentales y las herramientas necesarias para el entendimiento de sistemas cuánticos abiertos, se introdujo el concepto de matriz densidad, que proporciona la descripción estadística más general de un sistema cuántico. Con la base teórica se dio lugar a la formulación de una ecuación maestra para el estudio de la dinámica de sistemas cuánticos abiertos. Posteriormente se desarrolló otro de los ingredientes fundamentales de la tesis, sistemas cuánticos bipartitos, distinguiendo entre estados separables y estados con entrelazamiento cuántico, tanto para estados puros como estados mixtura. Dentro del contexto se examinó la noción de correlaciones cuánticas, enfatizando en el entendimiento del entrelazamiento cuántico que posteriormente permitió definir el cuantificador del entrelazamiento denominado concurrencia.

En el capítulo 5 se realizaron algunas aplicaciones, mostrando el comportamiento de sistemas cuánticos abiertos. En la primera sección se acopló un sistema de un-qubit con el ambiente, modelado por dos tipos de ruido. Como resultado se observó la pérdida de coherencia,

la cual decae de forma exponencial. Además, al acoplar el sistema a dos ruidos simultáneos, la decoherencia evoluciona proporcionalmente a la suma de cada ruido, presentando así un comportamiento lineal, donde la interacción con diversos ruidos puede ser considerada como la suma de los mismos.

En la segunda sección, se acopló un sistema de dos-qubits con diferentes ambientes, la decoherencia del sistema se analizó mediante la evolución del entrelazamiento con la ayuda de la concurrencia. El resultado para este caso depende de las condiciones iniciales, para sistemas con entrelazamiento inicial, el entrelazamiento decae con el tiempo como resultado del efecto del ambiente sobre el sistema. Adicionalmente, considerando el acoplamiento con los dos ruidos de forma simultánea, la concurrencia no se comporta de forma lineal (suma del efecto de cada uno de los ruidos), evolucionando de forma más compleja.

Los resultados obtenidos por medio de métodos numéricos sugieren que en los sistemas cuánticos analizados se pueden presentar diferentes tipos de acoplamientos a entornos y ruidos de diferentes características, los cálculos mostrados sólo cubren una pequeña parte de un nuevo dominio de la física de ruido y el entrelazamiento. La evaluación del entrelazamiento no es una tarea sencilla en general. Gracias a los resultados se evidencia los problemas relacionados con la decoherencia y además como el entrelazamiento de un sistema como el propuesto es muy sensible en los parámetros que caracterizan a un estado (poblaciones y coherencias) al someterse a determinado ruido. De esta forma, el entrelazamiento resulta ser un obstáculo desde el punto de vista del tratamiento clásico de sistemas cuánticos, y un recurso desde el punto de vista de la información cuántica, suponiendo que se disponga de sistemas cuánticos controlables, por lo que la caracterización cualitativa y cuantitativa del entrelazamiento utilizando la herramienta propuesta y otras herramientas relacionadas son esenciales para en el control de sistemas cuánticos concretos y para el desarrollo en protocolos de información cuántica.

Como perspectivas futuras de este trabajo, para sistemas cuánticos abiertos, se propone usar condiciones iniciales diferentes, estructuras más generales como estados Bell diagonal, estados-X que pueden revelar comportamientos interesantes para el entrelazamiento. Adicionalmente, se propone el estudio de otro tipo de correlaciones cuánticas, tales como: Discordia,

correlaciones clásicas y totales, además del uso de otro tipo de cuantificadores para el entrelazamiento.

Finalmente, y a modo más general, se pretende incentivar la búsqueda y entendimiento conceptual e interpretativo, no solo de la mecánica cuántica si no también de todos los campos de investigación en la física. Atender los problemas de comprensión proporciona las herramientas necesarias para identificar las coincidencias y discrepancias, así como las ventajas y limitaciones de las investigaciones, abriendo la posibilidad de acercar el conocimiento a niveles aún más profundos de los establecidos, y tal como lo expresa John Bell, este tipo de concepción “debería ser expuesta a todos los estudiantes, pues ello estimula la flexibilidad y precisión de pensamiento”.

Apéndice A

Partículas con espín 1/2

En este apéndice se resumen algunos resultados asociados a la descripción cuántica de sistemas de espín 1/2 que son relevantes para los temas tratados en este trabajo. Esta basado en material estándar de textos de mecánica cuántica [9][8].

A.1. Una partícula

Las componentes cartesianas del espín \vec{S} , satisfacen¹ las relaciones de conmutación características de un momento angular

$$[S_x, S_y] = iS_z \quad [S_z, S_x] = iS_y \quad [S_y, S_z] = iS_x. \quad (\text{A.1})$$

Es decir que S_x, S_y, S_z son observables conjugados entre si y solo se puede determinar una componente a la vez. Las medidas de las mismas están ligadas entre si por relaciones de incertidumbre. De acuerdo a la mecánica cuántica, sólo es posible asignar un valor concreto a una de las tres componentes y en ese caso, la ignorancia sobre las otras dos es máxima. En los términos de EPR, si una componente se conoce con certeza, las otras dos componentes no tienen realidad física.

Para el caso de espín $S = 1/2$, la componente a lo largo de cualquier dirección puede tomar dos valores, $\pm 1/2$. Por lo tanto, el estado de espín es un sistema de dos estados (*un qubit*) y existe en un espacio de Hilbert de dimensión 2. Tomando los autovectores de S_z como base,

$$|+\rangle_z \leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |-\rangle_z \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

¹En este apéndice se trabaja con $\hbar = 1$.

donde

$$S_z|+\rangle_z = \frac{1}{2}|+\rangle_z, \quad S_z|-\rangle_z = -\frac{1}{2}|-\rangle_z. \quad (\text{A.3})$$

En esta representación, los operadores asociados a las tres componentes de espín son proporcionales a las matrices de Pauli.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\text{A.4})$$

de modo que $S_k = \frac{1}{2}\sigma_k$ para $k = x, y, z$. Los autoestados de S_x y S_y se expresan en términos de autoestados S_z de la siguiente forma:

$$S_x|\pm\rangle_x = \pm\frac{1}{2}|\pm\rangle_x \implies |\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z \pm |-\rangle_z) \quad (\text{A.5})$$

$$S_y|\pm\rangle_y = \pm\frac{1}{2}|\pm\rangle_y \implies |\pm\rangle_y = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_z \pm i|-\rangle_z). \quad (\text{A.6})$$

A partir de la Ec.(A.5) se obtiene la relación recíproca, que expresa los autoestados de S_z en la base de autoestados de S_x ,

$$|\pm\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{A.7})$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle) \quad (\text{A.8})$$

$$(|+\rangle_x \pm |-\rangle_x). \quad (\text{A.9})$$

Evidentemente, existe una relación análoga en términos de autoestados de S_y .

La relación de incertidumbre ya está presente en la estructura de estos autoestados. Suponiendo que se intenta determinar el valor de más de una componente de S . Para ello, partiendo de un autoestado de S_y , se realiza una medida de S_z , seguida de una medida de S_x .

A partir de la Ec.(A.6) se ve que la probabilidad de obtener $+1/2$ al medir S_z es $1/2$. El sistema queda en uno de los estados $|\pm\rangle_z$ y ya no hay información de la componente S_y . Para explorar el resultado de la segunda medida S_x , se expresa $|+\rangle_z$ en términos de autoestados

de S_x , Ec. (A.3), y se ve que, nuevamente, la probabilidad de obtener $+1/2$ es $1/2$. El nuevo estado es uno de $|\pm\rangle_x$ y se ha perdido toda información sobre la componente S_z .

A.2. Dos partículas

Estados enredados o entrelazados

Dado que el espacio de Hilbert para dos espines es $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2$, los estados base de dos partículas se obtienen a partir del producto tensorial de $|\pm\rangle_z$,

$$|+, +\rangle, \quad |+, -\rangle, \quad |-, +\rangle, \quad |-, -\rangle \quad (\text{A.10})$$

donde $|+, +\rangle \equiv |+\rangle \otimes |+\rangle$ etc. y se omite los subíndices zz para no recargar la notación. En éstos estados, la componente S_z de cada espín individual esta bien definida. Sin embargo, en un estado genérico de ξ_2

$$|\Psi\rangle = \alpha|+, +\rangle + \beta|+, -\rangle + \gamma|-, +\rangle + \delta|-, -\rangle \quad (\text{A.11})$$

con $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ constantes complejas arbitrarias ² esto no es así. En general, las componentes individuales de espín estarán bien definidas si el estado se construye como un producto. Si el primer espín esta descrito por $a|+\rangle + b|-\rangle$ y el segundo por $c|+\rangle + d|-\rangle$ donde a, b, c, d son constantes complejas arbitrarias que satisfacen el requisito de normalización, el estado conjunto sería

$$(a|+\rangle + b|-\rangle) \otimes (c|+\rangle + d|-\rangle) = ac|+, +\rangle + ad|+, -\rangle + bc|-, +\rangle + bd|-, -\rangle \quad (\text{A.12})$$

Es claro que el estado genérico (A.11) tiene esta forma, sólo en el caso de que sus coeficientes satisfacen la relación adicional

$$\alpha\delta = \beta\gamma. \quad (\text{A.13})$$

En los estados en que no se satisface esta relación (la mayoría no es posible asignar estados bien definidos a las partículas individuales. Se denomina a estos estados, estados enredados o entrelazados.

²En realidad, satisfacen la relación de normalización $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1$

Espín total

En un sistema de dos partículas de espín 1/2, es conveniente usar autoestados de espín total $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, ya que las componentes de espín de cada partícula $S_{1,z}$ y $S_{2,z}$ no conmutan con S^2 . Sin embargo, su suma $S_Z = S_{1,z} + S_{2,z}$ si lo hace. Es decir que puede ocurrir que en un estado de dos espines, no estén bien definidas las componentes individuales, pero la suma S_Z siempre tiene un valor bien definido.

Los autoestados simultáneos de $\{S^2, S_Z\}$ son

$$S^2|s, m_s\rangle = s(s+1)|s, m_s\rangle \quad S_Z|s, m_s\rangle = m_s|s, m_s\rangle \quad (\text{A.14})$$

De acuerdo a las reglas de suma de momentos angulares, los números cuánticos s, m_s toman los valores $s = 0, 1$ y $m_s = 0, \pm 1$. Los autoestados de estos operadores se expresan en la representación dada por la Ec.(A.10) como

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle - |-, +\rangle) \quad (\text{A.15})$$

$$|1, +1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, +\rangle)$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+, -\rangle + |-, +\rangle) \quad (\text{A.16})$$

$$|1, -1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|-, -\rangle)$$

Estos cuatro estados conforman en ξ una representación alternativa a (A.10).

El estado con $s = 0$ es el singlete de espín y tiene carácter antisimétrico frente al intercambio de las dos partículas. Los otros tres estados son simétricos y conforman el triplete ($s = 1$). Si un par de partículas es producido con espín total nulo, como en el caso de la formulación de Bohm de la paradoja EPR, entonces están en el estado singlete (A.15). Ambos estados con $m_s = 0$, están entrelazados (no se cumple la Ec.(A.13)). En los mismos no es posible asociar valores definidos a las componentes de espín individuales.

A.3. Valor esperado de componentes de espín en direcciones arbitrarias

Se puede escribir el operador S en una dirección arbitraria \mathbf{n} :

$$S_n = \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta)e^{-i\varphi} \\ \text{sen}(\theta)e^{i\varphi} & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

Donde θ y φ son los ángulos polares y azimutales de las coordenadas esféricas habituales.

Los autovectores correspondientes a los autovalores $S_n = \pm\hbar/2$

$$|n_+\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle + \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|-\rangle = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi} \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

$$|n_-\rangle = \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)|+\rangle - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi}|-\rangle = \begin{pmatrix} \text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.19})$$

El estado singlete

sea $|0\rangle$ el estado de dos partículas de espín 1/2 total cero

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_2, \quad (\text{A.20})$$

donde los índices 1, 2 se refieren a los estados de las partículas 1, 2.

El valor medio del producto de las componentes de espín en las direcciones α, β , está dado por

$$\langle 0 | (\alpha \cdot \sigma_1) (\beta \cdot \sigma_2) | 0 \rangle. \quad (\text{A.21})$$

Los operadores $\alpha \cdot \sigma_1$ y $\beta \cdot \sigma_2$ son representados por las matrices

$$\alpha \cdot \sigma_1 = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \text{sen}(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}_1, \quad (\text{A.22})$$

$$\beta.\sigma_2 = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & \text{sen}(\beta) \\ \text{sen}(\beta) & -\cos(\beta) \end{pmatrix}_2. \quad (\text{A.23})$$

Aplicando el operador $\beta.\sigma_2$ sobre $|0\rangle$ se obtiene

$$\beta.\sigma_2|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \text{sen}(\beta) \\ -\cos(\beta) \end{pmatrix}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \text{sen}(\beta) \end{pmatrix}_2. \quad (\text{A.24})$$

Aplicando ahora $\alpha.\sigma_1$ sobre $\beta.\sigma_2|0\rangle$ se obtiene

$$(\alpha.\sigma_1)(\beta.\sigma_2)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \text{sen}(\alpha) \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \text{sen}(\beta) \\ -\cos(\beta) \end{pmatrix}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \text{sen}(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix}_1 \begin{pmatrix} \cos(\beta) \\ \text{sen}(\beta) \end{pmatrix}_2. \quad (\text{A.25})$$

Como $\langle 0| = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0)_1(0, 1)_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1)_1(1, 0)_2$, se tiene finalmente que

$$\langle 0|(\alpha.\sigma_1)(\beta.\sigma_2)|0\rangle = -\cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta) \quad (\text{A.26})$$

$$\langle 0|(\alpha.\sigma_1)(\beta.\sigma_2)|0\rangle = -\cos(\alpha)\cos(\beta) - \text{sen}(\alpha)\text{sen}(\beta), \quad (\text{A.27})$$

o,

$$\langle 0|(\alpha.\sigma_1)(\beta.\sigma_2)|0\rangle = -\cos(\alpha - \beta) = -\alpha.\beta. \quad (\text{A.28})$$

Apéndice B

Representación de Heisenberg y representación interacción

En la representación Schrödinger la matriz de densidad $\rho(t)$ se rige la ecuación de Liouville - Von Neumann (4.23). Una descripción equivalente de la dinámica cuántica se obtiene mediante la transferencia de la dependencia del tiempo de la matriz de densidad a los operadores en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Esto conduce a la representación de Heisenberg [5].

Se supone que en algún tiempo fijo inicial los estados cuánticos en ambas representaciones coinciden, es decir $\rho(t_0) = \rho_H(t_0)$ (En la representación de Heisenberg los operadores son indexados con H) para la representación de Schrödinger y la de Heisenberg los operadores están relacionadas a través de la transformación canónica

$$A_H(t) = U^\dagger(t, t_0)A(t)U(t, t_0). \quad (\text{B.1})$$

donde el operador en la representación de Schrödinger depende explícitamente del tiempo. Para el tiempo t_0 los operadores en ambas representaciones coinciden $A_H(t_0) = A(t_0)$. En la representación de Heisenberg los valores esperados se determinan a través de la matriz densidad $\rho_H(t_0)$.

La equivalencia física de las dos representaciones se hace evidente por el hecho de que el valor esperado de un observable $A(t)$ es el mismo en ambas representaciones.

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}\{A(t)\rho(t)\} = \text{tr}\{A_H(t)\rho_H(t_0)\}. \quad (\text{B.2})$$

La ecuación de movimiento para un operador $A_H(t)$ en la representación de Heisenberg se obtiene derivando ambos lados respecto al tiempo la ley de transformación (B.1).

$$\frac{d}{dt}A_H(t) = i[H_H(t), A_H(t)] + \frac{\partial A_H(t)}{\partial t}, \quad (\text{B.3})$$

Donde $H_H(t)$ denota el hamiltoniano en la representación de Heisenberg,

$$H_H(t) = U^\dagger(t, t_0)H(t)U(t, t_0). \quad (\text{B.4})$$

Teniendo en cuenta

$$\frac{\partial A_H(t)}{\partial t} = U^\dagger(t, t_0) \frac{\partial A(t)}{\partial t} U(t, t_0). \quad (\text{B.5})$$

Si $dA_H(t)/dt = 0$, entonces A_H es una constante de movimiento.

La representación de Schrödinger y la de Heisenberg son los casos particulares de un cuadro mas general, que se conoce como representación interacción. Se escribe el hamiltoniano del sistema como la suma de dos partes

$$H(t) = H_0 + H_I(t). \quad (\text{B.6})$$

La forma precisa del hamiltoniano depende de la situación física en estudio. En general, H_0 representa la suma de las energías de dos sistemas cuando la interacción entre los sistemas se ignora, se asume tambien que es independiente del tiempo; $H_I(t)$ es entonces el hamiltoniano que describe la interacción entre los sistemas. Una vez más, el operador de evolución temporal del sistema total se denota por $U(t, t_0)$. De acuerdo con la Ec.(B.2) el valor esperado de un observable $A(t)$ (que puede depender explícitamente del tiempo t) esta dado por

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}\{A(t)U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0)\}, \quad (\text{B.7})$$

donde $\rho(t_0)$ es el estado del sistema a un tiempo t_0 .

Ahora se introduce los operadores de evolución en el tiempo unitario

$$U_0(t, t_0) \equiv \exp[-iH_0(t - t_0)], \quad (\text{B.8})$$

y

$$U_I(t, t_0) \equiv U_0^\dagger(t, t_0)U(t, t_0), \quad (\text{B.9})$$

el valor esperado (B.7) se escribe como

$$\langle A(t) \rangle = \text{tr}\{U_0^\dagger(t, t_0)A(t)U_0(t, t_0)U_I(t, t_0)\rho(t_0)U_I^\dagger(t, t_0)\} \equiv \text{tr}\{A_I(t)\rho_I(t)\}, \quad (\text{B.10})$$

donde se ha introducido $A_I(t)$ como el operador de la representación interacción

$$A_I(t) \equiv U_0^\dagger(t, t_0)A(t)U_0(t, t_0), \quad (\text{B.11})$$

y $\rho_I(t)$ como la matriz densidad en la representación interacción:

$$\rho_I(t) \equiv U_I(t, t_0)\rho(t_0)U_I^\dagger(t, t_0). \quad (\text{B.12})$$

Es importante tener en cuenta que, en contraste a la representación Heisenberg la evolución en el tiempo de los operadores no se genera por el hamiltoniano completo H pero si y solamente por la parte libre H_0 . Si $H_I(t) = 0$ se tiene $U_0(t, t_0) = U_I(t, t_0) = I$, de esta manera que la representación interacción es idéntica a la de Heisenberg. Por el contrario, en el caso donde el hamiltoniano libre desaparece, $H_0 = 0$ se tiene $H_I(t) = H(t)$ tal que $U_0(t, t_0) = I$ y $U_I(t, t_0) = U(t, t_0)$ así, se recupera la representación de Schrödinger.

Está claro que en la representación interacción la evolución en el tiempo del operador $U_I(t, t_0)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$i\frac{\partial}{\partial t}U_I(t, t_0) = H_I(t)U_I(t, t_0), \quad (\text{B.13})$$

sujeta a la condición inicial $U_I(t_0, t_0) = 1$ y el hamiltoniano de interacción esta dado por:

$$H_I(t) = U_0^\dagger(t, t_0)H_IU_0(t, t_0). \quad (\text{B.14})$$

de este modo la correspondiente ecuación de von Neumann en el marco de interacción toma la forma

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t) = -i[H_I(t), \rho_I(t)] \quad (\text{B.15})$$

A menudo, la ecuación de von Neumann en la representación interacción se escribe equivalentemente en forma integral

$$\rho_I(t) = \rho_I(t_0) - i \int_{t_0}^t ds [H_I(s), \rho_I(s)]. \quad (\text{B.16})$$

Bibliografía

- [1] D. L. Valladares and R. S. Ferramola. *Interpretación de Copenhague: de la explicación al instrumento predictivo*. Universidad Nacional de San Luis Argentina, 2011.
- [2] B. Podolsky y N. Rosen A. Einstein. Can quantum mechanical description of physical reality be considered complete? *physical review*, 4.7, 1935.
- [3] J. S. Bell. On the Einstein-Podolsky-Rosen paradox. *Physics*, 1:195–200, 1965.
- [4] Andrei B. Klimov. Información cuantica: ideas y perspectivas. *Revista Cinvestav*, 27(1):12–17, 2008.
- [5] Breuer F. Petruccione H.P. *The theory of open quantum systems*. 1a ed. Oxford University Press, 2002.
- [6] Juan Florez Bautista. Que dice Copenhague. 2013.
- [7] E González and J Roldán. La aproximación causal y usual frente al problema interpretativo de la teoría cuántica. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia*, 4(1):8–9, 2003.
- [8] Claude Cohen-Tannoudji and et al. *Quantum Mechanics*. Wiley, 1991.
- [9] J.J. Sakurai. *Modern Quantum Mechanics*. Addison-Wesley, 1994.
- [10] Elias Okon. El problema de la medición en mecánica cuántica. *Revista mexicana de física E*, 60(2):130–140, 2014.
- [11] Antonio Aparicio Juan. La teoría cuántica y sus interpretaciones: Un enfoque filosófico realista. *Laguna: Revista de filosofía*, 13:41–67, 2003.
- [12] Carlos Eduardo Maldonado. El problema y el reto de la interpretación en ciencia: D.Bohm y la física cuántica. *Unos cuantos para todo*, pages 339–356, 2009.

- [13] Shan Gao. A quantum physical effect of consciousness. *journal of Cosmology*, 14, 2011.
- [14] Rafael López Valverde. Heisenberg y la interpretación de Copenhague, 2001.
- [15] Juan Arana. El problema de la causalidad en la mecánica cuántica. *Eikasia: revista de filosofía*, (43):17–34, 2012.
- [16] Werner Heisenberg. *Física y filosofía, título original: Physics and Philosophy*. ed. La Isla, Buenos Aires, 1959.
- [17] Andrés Sicard Ramirez and Mario E Vélez Ruiz. Cuántica y computación: Una aproximación desde los postulados de la mecánica cuántica. Master's thesis, 1999.
- [18] Sánchez Gómez José. Bohr y los fundamentos de la mecánica cuántica. *Seminario OROTAVA de historia de la ciencia*, pages 103–111, 2001.
- [19] Oscar Navarro Rojas. El surgimiento de la complementariedad: Niels Bohr y la conferencia de Como. *Revista de Filosofía de la Universidad de Costa Rica*, 2011.
- [20] Luis A. Reyes. Mecánica cuántica, localidad y realismo: El teorema de Bell en la filosofía de la física. Master's thesis, Universidad Pontificia de Salamanca, 2004.
- [21] Gonzalo Abal. Paradoja EPR y desigualdades de bell: Pruebas experimentales, estado actual del conocimiento. *Universidad de la República, Montevideo*, 2007.
- [22] David Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of hidden variables. *physical review*, 85, 1952.
- [23] Erik L. Patiño. ¿Es no separable la mecánica cuántica? *revista Mexicana de física*, 47(2):181–200, 2000.
- [24] John F Clauser, Michael A Horne, Abner Shimony, and Richard A Holt. Proposed experiment to test local hidden variable theories. *Physical review letters*, 23(15):880, 1969.

- [25] Carl A Kocher and Eugene D Commins. Polarization correlation of photons emitted in an atomic cascade. *Physical review letters*, 18(15):575, 1967.
- [26] Stuart J Freedman and John F Clauser. Experimental test of local hidden variable theories. *Physical Review Letters*, 28(14):938, 1972.
- [27] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental tests of realistic local theories via Bell's theorem. *Physical review letters*, 47(7):460, 1981.
- [28] Marco Túlio Coelho Quintino and Mateus Araújo Santos. Desigualdades de Bell: Uma introdução à não-localidade quântica. *Teorema*, 2(01):10.
- [29] John F Clauser and Michael A Horne. Experimental consequences of objective local theories. *Physical review D*, 10(2):526, 1974.
- [30] Edward S Fry and Randall C Thompson. Experimental test of local hidden variable theories. *Physical Review Letters*, 37(8):465, 1976.
- [31] Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm gedankenexperiment: a new violation of Bell's inequalities. *Physical review letters*, 49(2):91, 1982.
- [32] Alain Aspect, Jean Dalibard, and Gérard Roger. Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers. *Physical review letters*, 49(25):1804, 1982.
- [33] ZY Ou and L Mandel. Violation of Bell's inequality and classical probability in a two-photon correlation experiment. *Physical Review Letters*, 61(1):50, 1988.
- [34] YH Shih and Cs O Alley. New type of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm experiment using pairs of light quanta produced by optical parametric down conversion. *Physical Review Letters*, 61(26):2921, 1988.
- [35] Paul G Kwiat, Edo Waks, Andrew G White, Ian Appelbaum, and Philippe H Eberhard. Ultrabright source of polarization-entangled photons. *Physical Review A*, 60(2):R773, 1999.

- [36] Gregor Weihs, Thomas Jennewein, Christoph Simon, Harald Weinfurter, and Anton Zeilinger. Violation of Bell's inequality under strict Einstein locality conditions. *Physical Review Letters*, 81(23):5039, 1998.
- [37] Antonio Javier Diéguez Lucena. Realismo y teoría cuántica. *Contrastes: revista internacional de filosofía*, (1):75–105, 1996.
- [38] J. S. Bell. *Lo decible y lo indecible de la mecánica cuántica*. ALianza, Madrid, 1990.
- [39] Erwin Schrödinger. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 23(49):823–828, 1935.
- [40] Guillermo García Alcaine. Einstein y la mecánica cuántica. *Monografías de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas, Químicas y Naturales de Zaragoza*, (27):107–118, 2005.
- [41] Ryszard Horodecki, Pawel Horodecki, Michal Horodecki, and Karol Horodecki. Quantum entanglement. *Reviews of modern physics*, 81.
- [42] Blum K. *Density Matrix Theory and Applications*. 2a ed. New York: Plenum, 1996.
- [43] Michael A Nielsen and Isaac L Chuang. *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.
- [44] Shankar R. *Principles of Quantum Mechanics*. 2a Ed. Klower Academic/plenum publishers, 1994.
- [45] M Orszag. *Quantum optics: including noise reduction, trapped ions, quantum trajectories, and decoherence*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [46] William K Wootters. Entanglement of formation of an arbitrary state of two qubits. *Physical Review Letters*, 80(10):2245, 1998.
- [47] Ting Yu and JH Eberly. Quantum open system theory bipartite aspects. *Physical Review Letters*, 97(14):140403, 2006.

- [48] Ting Yu and JH Eberly. Finite-time disentanglement via spontaneous emission. *Physical Review Letters*, 93(14):140404, 2004.