

**LA CONVERSIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO
CON UNA INCÓGNITA. DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UNA METODOLOGÍA DE
ANÁLISIS PARA LIBROS DE TEXTO.**

LOREYN GABRIELA ERAZO RODRÍGUEZ

JAIME ANDRÉS MUÑOZ CAÑAR

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JUAN DE PASTO

2014

**LA CONVERSIÓN EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER GRADO
CON UNA INCÓGNITA. DISEÑO Y VALIDACIÓN DE UNA METODOLOGÍA DE
ANÁLISIS PARA LIBROS DE TEXTO.**

LOREYN GABRIELA ERAZO RODRÍGUEZ

JAIME ANDRÉS MUÑOZ CAÑAR

**Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas**

Director:

GUSTAVO ADOLFO MARMOLEJO AVENÍA

Doctor en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JUAN DE PASTO

2014

NOTA DE RESPONSABILIDAD

Las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1° del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado del Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación:

Gustavo Marmolejo Avenía

Director

Erdulfo Ortega Patiño

Jurado

Janeth Bravo Montenegro

Jurado

AGRADECIMIENTOS

Muchos iniciaron el mismo camino pero pocos pudieron llegar hasta el final.
Gracias Dios por haberme dado sabiduría durante este tiempo y permitir alcanzar una meta más
en mi vida.

A mis padres, a quienes, jamás encontraré la forma de agradecer el cariño, comprensión y apoyo
brindado en todos los momentos de mi vida.

A mis abuelitos porque gracias a su apoyo y consejos, he llegado a realizar una de mis más
grandes metas lo que constituye la herencia más valiosa que pudiera recibir.

A mis primos, tíos y demás familiares por estar pendientes de mí en todo momento.
A mi novio y compañero de tesis: Jaime Andrés, mi confidente, mi todo. Gracias por siempre
estar a mi lado con una sonrisa todos los días, por su comprensión, paciencia, amor y cariño.

Gabriela Erazo.

A mis padres Janeth y Jaime, quienes con su apoyo, esfuerzo, cariño y sabias palabras, aportaron
para poder cumplir este logro.

A mi hermana Andrea por su compañía, comprensión, risas y buen ejemplo, siempre aprendiendo
cada día más de ella.

A mis abuelitos, Rosaura, Elena, Luis y Rodrigo quienes con su experiencia me enseñaron
demasiado y son ejemplo de superación.

A mi primo Jhon por sus acciones y acertados consejos de suma importancia en mi vida.
A Gabriela quien con su compañía sentimental y académica se ha convertido en mi ángel de la
guarda, superando juntos cada escalón u obstáculo que se ha colocado en nuestro camino.

A Dios por estar siempre a mi lado y con los míos.

Jaime Muñoz.

A todos y cada uno de los profesores, Gracias por compartir sus saberes con nosotros.
A Lucyta, infinitas gracias por estar siempre al pendiente de nosotros, por sus acertados consejos,
por las experiencias compartidas y por convertirse en una madre para nosotros. Nuestros ideales,
esfuerzos y logros también son los suyos.

A Nathaly y Fulvio compañeros y realmente amigos de la carrera, gracias por la compañía, por el
apoyo y por todos los momentos compartidos.

Al director de este trabajo, profesor Gustavo Marmolejo, que desde el primer momento mostró
interés y confianza en este proyecto, por brindarnos la oportunidad de recurrir a su capacidad y
conocimiento y cuyos acertados consejos lograron que este trabajo culminara con éxito.

GRACIAS!!!

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	17
1. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES	21
1.1 Marco Teórico	21
1.1.1 Registros de Representación, Comprensión y Lenguaje	21
1.1.2 Actividades cognitivas de representación	24
1.1.3 Complejidad de la actividad cognitiva: conversión	26
1.2 Antecedentes	28
1.2.1 La conversión	28
1.2.2 Libros de texto	31
1.2.3 Ecuaciones	33
2. METODOLOGÍA	36
2.1 Planteamiento del problema	36
2.2 Objetivos de la Investigación	39
2.3 Hipótesis de trabajo	40
2.4 Metodología	40
2.4.1 Aproximación metodológica	42
2.4.2 Población, criterios de selección y unidades de análisis	43
2.4.3 Fases de la investigación	46
2.4.4 Instrumento de análisis	47
2.4.5 Proceso de diseño del instrumento de análisis	62
2.4.6 Prueba de la confiabilidad y validez del instrumento	68
2.4.7 Ejemplo de codificación	69

3. ANÁLISIS DE DATOS	74
3.1 Consideraciones para la síntesis de los datos	74
3.2 Análisis unificado de las tareas del libro según el tipo de conversión considerado.	77
3.3 Comparación entre ejemplos y ejercicios a partir del tipo de conversión promovido en ellos	92
CONCLUSIONES	103
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	115
ANEXOS.....	122

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 2.1. Aspectos generales del método implementado en la investigación	41
Tabla 2.2 Operaciones compuestas en formas de expresión en escritura algebraica	51
Tabla 2.3 Fases del diseño del instrumento metodológico	63
Tabla 2.4 Instrumento de análisis que permite caracterizar los tipos de conversión que promueve el libro Álgebra de Baldor al tratar las EPG	67
Tabla 2.5 Categorización de la tarea 124, explicitación de una relación.	70
Tabla 2.6 Categorización de la tarea 124, reducción lexical.....	71
Tabla 2.7 Categorización de la tarea 124, complejidad semiótica.....	72
Tabla 3.1. Tipos de conversiones congruentes según la naturaleza, tanto de la explicitación de una relación como de la reducción lexical.	78
Tabla 3.2. Tipos de conversiones no-congruentes según la naturaleza, tanto de la explicitación de una relación como de la reducción lexical.....	81
Tabla 3.3 Tipos de conversiones no-congruentes compuestas según la naturaleza, tanto de la explicitación de una relación como de la reducción lexical.....	85
Tabla 3.4 Tipos de conversiones no-congruentes simples según la naturaleza, tanto de la explicitación de una relación como de la reducción lexical.....	88

LISTA DE ILUSTRACIONES

	Pág.
Ilustración 2.1: Forma de expresión en lengua natural: proposición.	49
Ilustración 2.2: Forma de expresión en lengua natural: frase.	49
Ilustración 2.3: Transición: tratamiento.	53
Ilustración 2.4: Transición: Concepto matemático/ Propiedad matemática.....	54
Ilustración 2.5: Forma de expresión en lengua natural: Frase.	55
Ilustración 2.6: Forma de expresión en lengua escritura algebraica: Operación compuesta. ...	56
Ilustración 2.7: Forma de expresión en lengua escritura algebraica: Operaciones simple/ operación compuesta.	57
Ilustración 2.8: Número de veces que aparece: Una vez.	58
Ilustración 2.9: Número de veces que aparece: Más de una vez.	59
Ilustración 2.10: Transición: Tratamiento. Tarea 82,7.	60
Ilustración 2.11: Complejidad Semiótica: Univocidad semántica terminal.	61
Ilustración 2.13: Tarea 124.	70

LISTA DE GRÁFICAS

	Pág.
Grafica 3.5. Tipo de conversión congruente. Ejemplos y ejercicios con su respectiva frecuencia.....	92
Grafica 3.6 Tipo de conversión no-congruente. Ejemplos y ejercicios con su respectiva frecuencia.....	94
Grafica 3.7 Tipo de conversión no-congruente compuestas. Ejemplos y ejercicios con su respectiva frecuencia.	97
Grafica 3.8 Tipo de conversión no-congruente simples. Ejemplos y ejercicios con su respectiva frecuencia.	99

LISTA DE ANEXOS

	Pág.
ANEXO A. TIPOS DE EXPLICITACIÓN DE UNA RELACIÓN.....	123
ANEXO B. TIPOS DE REDUCCIÓN LEXICAL	124
ANEXO C. TIPOS DE CONVERSIONES OBTENIDOS A PARTIR DE LA COMBINACIÓN DE LOS TIPOS DE EXPLICITACIÓN DE UNA RELACIÓN Y REDUCCIÓN LEXICAL	125
ANEXO D. VALIDACIÓN Y OPINIONES DE CADA UNO DE LOS EVALUADORES	127

GLOSARIO

IV:	Número de veces que aparece: Una vez
CACo:	Compuesta aditiva-cociente
CACSu:	Compuesta aditiva-cociente-sustractiva
CAMCo:	Compuesta aditiva-multiplicativa-cociente
CAMu:	Compuesta aditiva-multiplicativa
CASMCo:	Compuesta aditiva-sustractiva-multiplicativa-cociente
CASMu:	Compuesta aditiva-sustractiva-multiplicativa
CASu:	Compuesta aditiva-sustractiva
CM/PM:	Concepto matemático/propiedad matemática
CMCo:	Compuesta multiplicativa-cociente
CO:	Conservación de orden
CS:	Correspondencia semántica
CSCo:	Compuesta sustractiva-cociente
CSMCo:	Compuesta sustractiva-multiplicativa-cociente
CSMu:	Compuesta sustractiva-multiplicativa
E.E.A.:	Expresión en escritura algebraica
E.L.N.:	Expresión en lengua natural
EA:	Escritura algebraica
EPG:	Ecuaciones de primer grado
ER:	Explicitación de una relación
F:	Frase

LN:	Lengua natural
MIV:	Número de veces que aparece: más de una vez
NA:	No aplica
NVA:	Número de veces que aparece
Oc:	Operaciones compuestas
Os/Oc:	Operaciones simples/operaciones compuesta
Os:	Operaciones simples
Prop:	Proposición
RL:	Reducción lexical
SAd:	Simple aditiva
SCo:	Simple cociente
SMu:	Simple multiplicativa
SSu:	Simple sustractiva
T:	Tratamiento
Tran:	Transición
UST:	Univocidad semántica terminal

RESUMEN

El interés de esta investigación recae en cómo la actividad cognitiva de la conversión se presenta en un libro de texto, de suma importancia en la escuela al tratar problemas referentes a la resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Para ello se propone una metodología de análisis que permita caracterizar los tipos de conversión presentes en tareas que suscita el libro de texto.

El instrumento de análisis considera tres categorías: explicitación de una relación, reducción lexical y congruencia/no-congruencia; las cuales permiten discriminar la manera en cómo se presentan los dos registros involucrados en estas tareas; así como también permiten identificar los tipos de conversión promovidos por ejemplos y ejercicios al suscitar el estudio de las EPG. Esta investigación se desarrolla bajo el marco teórico de Raymond Duval.

Palabras claves: Conversión, Libros de texto y Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

ABSTRACT

The purpose of this research is focused on how the cognitive activity of conversion is presented in an important school textbook, related to solving first grade equations with an unknown factor. An analysis methodology is proposed for this, which allows the characterization of the different types of conversion that are present in tasks promoted by the textbook.

The instrument of analysis considers three categories: explicit relationship, lexical reduction and congruence / non - congruence; which allow to discriminate the way how the two records involved in this work are presented; and also identify the conversion rates promoted by examples and exercises to stimulate the study of the EPG. This research develops the theoretical framework of Raymond Duval.

Keywords: Conversion, textbook and first grade equations with an unknown factor.

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas, a diferencia de otras disciplinas, se encuentran ligadas a su forma de representación; en este sentido, Duval (1999), define lo que son las representaciones mentales y semióticas, las cuales hacen referencia al conjunto de imágenes dentro y fuera de nuestra mente, respectivamente. Los registros de representación semiótica son necesarios para la comprensión de un concepto a través de la utilización y coordinación de los mismos. Cabe destacar que, ninguna representación como tal agota un concepto; al contrario, permite que el estudiante fortalezca su conocimiento siendo capaz de pasar de un registro a otro.

En toda la matemática los objetos a considerar no son sensorialmente asequibles, por el contrario, es a través de representaciones que es posible aludir a ellos (Duval, 1999). En efecto, han de permitir que se cumplan las tres actividades cognitivas (comunicar, transformar y objetivar el conocimiento matemático) inherentes a toda representación.

“En primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como *una representación de alguna cosa* en un sistema determinado. Luego, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias al sistema, de modo que se obtenga representaciones que puedan constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales. Por último, convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado” (Duval, 1999: 30)

En relación a la segunda de estas actividades cognitivas, elemento de interés en este documento, son dos los tipos de transformación que permiten las representaciones semióticas: el tratamiento y la conversión. Ambas asumidas como el paso de una representación (inicial) de un objeto, una situación o de una información a otro tipo de representación (final). En el caso de la

conversión, a diferencia del tratamiento, la representación inicial proviene de un registro semiótico y la representación final de otro registro de naturaleza distinta (Duval, 1999). La conversión se impone sobre el tratamiento como el tipo de transformación que genera mayor complejidad en el aprendizaje de las matemáticas. Pues, no sólo se considera menos espontánea y de mayor dificultad a la hora de aplicarse, sino que además es poco tratada en las apuestas de enseñanza de las matemáticas privilegiadas en la escuela (Duval, 1999). Además, como si fuera poco, a diferencia del tratamiento no existen reglas que permiten seguir un camino apropiado para realizar un correcto cambio de registro.

Una de las ramas más importante de las matemáticas es el álgebra, puesto que permite trabajar en la resolución de problemas de enunciado, conceptos de variable, realizar generalizaciones, utilizar adecuadamente los símbolos, entre otras cuestiones que promueven el uso de distintos registros de representación para aludir a un mismo objeto o concepto matemático. De esta forma, el estudio de como este tipo de problemas se considera en los libros de texto se torna importante en investigaciones realizadas en los últimos años. Pues, el estudio de como los textos escolares presentan el contenido matemático y como ellos sirven de soporte para dar forma al currículo y guiar de cierta manera al estudiante en el aprendizaje de las matemáticas fundamentan la investigación en ellos. En este sentido, desde una perspectiva semiótica se estudia la actividad cognitiva de la conversión, entendida como la transformación de la representación de un objeto en un registro inicial a otro registro de naturaleza distinta.

Entre los registros semióticos de mayor importancia, en la construcción de conocimiento algebraico en la escuela, destacan la lengua natural y la escritura algebraica. Los problemas que se presentan en esta disciplina, a nivel escolar, suelen darse a través de una consigna expuesta en lengua natural, en consecuencia, quien intenta resolver tales problemas debe, en primera instancia, convertirle en una nueva representación, en este caso, propia de la escritura algebraica.

Y, posteriormente, aplicar sobre ella tratamientos propios a este registro de representación. Es claro, que para comprender los fenómenos que subyacen al aprendizaje y a la enseñanza del álgebra, tanto la conversión como el tratamiento son aspectos a considerar.

La actividad cognitiva de conversión requiere de estudio y cuidado en la educación matemática, puesto que al permitir pasar de un registro a otro involucra diferentes niveles de complejidad relacionados con la congruencia/no-congruencia de los registros de representación empleados. Sin embargo es poco tratada en las apuestas de enseñanza de las matemáticas y se la considera como una simple traducción del texto expuesto en lengua natural a una letra que es la variable o incógnita. De este modo, es ahí que residen precisamente muchos de los problemas de aprendizaje y comprensión del álgebra, ya que la discriminación de todos los registros semióticos empleados en ella requiere de frecuentes conversiones para representar una determinada información lo cual resulta demasiado complejo para el estudiante ya que constituye un proceso que en la escuela no se desarrolla.

Por otra parte, las ecuaciones son un tópico importante a considerar en esta investigación, pues estas se encuentran inmersas en el álgebra y permiten por medio de sus reglas y elementos como: variables, signos y símbolos; manejar algebraicamente la información expuesta en el registro inicial. Estas se caracterizan por poseer cantidades conocidas y desconocidas que se relacionan por medio de un símbolo de relación "=", que actúa como una especie de balanza tomando como elementos de peso dichas cantidades.

En consecuencia, es importante realizar investigaciones que involucren este tipo de actividad cognitiva inmersa en los manuales escolares, pues la presencia de esta actividad en toda la matemática como tal, involucra la presencia de diferentes registros de representación que enriquecen y fortalecen el desarrollo del conocimiento matemático. A su vez el estudio de los libros de texto es primordial ya que tanto docentes como estudiantes recurren a él para la

iniciación en diferentes tópicos que la matemática como tal aborda, entre ellos las ecuaciones de primer grado, tema fundamental para la iniciación del álgebra en el colegio, debido a que permite realizar generalizaciones, acercarse al concepto de variable y como también representar problemas de la vida cotidiana en el registro de la lengua natural para ser sintetizado y resuelto en el registro de la escritura algebraica.

De esta manera, esta investigación caracteriza las formas cómo el libro de texto analizado promueve la actividad cognitiva de la conversión en las tareas propuestas por el mismo. El trabajo está estructurado en cuatro partes, en la primera se presentan los referentes teóricos y los antecedentes considerados para el desarrollo de esta investigación; en la segunda se plantea la metodología de investigación así como la contextualización del problema, los objetivos e hipótesis de la investigación y la población seleccionada para este estudio, también se describe el proceso de diseño del instrumento de análisis, la ejemplificación y validación del mismo. En la tercera parte, se presenta el análisis de los datos que se divide en dos apartados, el primero en el que se realiza un análisis unificado de las tareas del libro según el tipo de conversión considerado como la caracterización de las conversiones según el nivel de complejidad que promueven; y en el segundo se presenta la comparación entre ejemplos y ejercicios a partir del tipo de conversión promovido en ellos. Por último, se plantean las conclusiones de la presente investigación.

1. MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

En este capítulo se describe el marco teórico utilizado para desarrollar la investigación; así como también los antecedentes que sustentan la importancia de la misma. Se divide en dos secciones. En la primera se resalta la importancia de los registros de representación en todo el conocimiento matemático, el rol de la actividad cognitiva de la conversión en las matemáticas y la complejidad que esta representa. En la segunda, se resalta los diferentes estudios realizados alrededor de tres temas: la conversión, libros de texto y ecuaciones, fundamentales para el desarrollo de esta investigación.

1.1 Marco Teórico

1.1.1 Registros de Representación, Comprensión y Lenguaje

Todo aquello relacionado con el conocimiento debe entenderse conforme a la **representación**; esta ha sido el centro de toda reflexión que tiene que ver con la constitución de un conocimiento cierto. En palabras de Duval (1999), la noción de representación ha sido considerada de tres formas distintas.

La primera, en los años 1924-1926, en términos de *Representación mental*. En especial, en el estudio de Piaget sobre “La representación del mundo en el niño”, donde refiere las distintas creencias de los niños acerca de los fenómenos naturales y físicos. “Son las que permiten mirar el objeto en ausencia total de significante perceptible,..., se igualan generalmente con imágenes mentales” (Duval, 1999:36); aunque estas cubren un dominio más amplio donde se incluyen las proyecciones más difusas y globales que reflejan los conocimientos como conceptos, nociones, creencias y fantasías. La segunda vez, en los años 1955-1960, con la expresión *Representación interna o Computacional*- que son aquellas cuyos significantes homogéneos no requieren mirada al objeto y permiten una transformación algorítmica de una serie de significantes en otra serie, y estas representaciones internas no son conscientes. (Duval, 1999:37)-. Aquí se privilegia el

tratamiento que hace un sistema de las informaciones que recibe para que produzca una respuesta adaptada (Duval, 1999). La tercera vez, desde 1985, bajo el término *Representación semiótica*, que trata sobre la adquisición de los conocimientos matemáticos y sobre los considerables problemas que su aprendizaje suscita. La especificidad de las representaciones semióticas son relativas a un sistema particular de signos: el lenguaje, la escritura algebraica, etc. (Duval, 1999). Pueden ser convertidas en representaciones “equivalentes” en otro sistema semiótico; esta operación ha de ser descrita como un cambio de forma en el que un conocimiento está representado (Duval, 1999).

Algunos trabajos de psicología cognitiva y otros de didáctica subrayan la importancia de las representaciones semióticas, destacando el papel de la forma en relación con el contenido representado. No obstante, no se tiene en cuenta las representaciones semióticas en la gran mayoría de investigaciones sobre el estudio de las matemáticas, lo cual es inconcebible, pues no sólo permiten comunicar, también promueven el tratamiento de información y la objetivación (toma de conciencia) (Duval, 1999). Esto se ve reflejado cuando erróneamente se piensa que las representaciones semióticas son el soporte para las representaciones mentales.

De forma puntual Duval (1999) enfatiza que los sistemas semióticos permiten: constituir una marca o conjunto de marcas perceptibles o una *representación de alguna cosa en un sistema determinado*; transformar las representaciones de acuerdo a las reglas del mismo sistema y convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en un sistema distinto. Los registros de representación constituyen el margen de libertad con que un sujeto puede objetivarse una idea aun confusa para explorar las informaciones o comunicarlas. (Duval, 1999).

Ahora bien, en el desarrollo de los conocimientos y los obstáculos encontrados en el aprendizaje se enfrentan tres fenómenos que se encuentran ligados (Duval, 1999): *diversificación*

de registros de representación semiótica, diferenciación entre representante y representado y coordinación entre los diferentes registros (Duval, 1999). El primero alude a las diferencias entre registros; el segundo considera la diferencia entre forma y contenido de representación semiótica; y el tercero aborda el conocimiento de las reglas de correspondencia entre dos sistemas semióticos distintos.

Duval (1999) enfatiza que la actividad semiótica y la operación de *conversión* -es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro (Duval, 1999: 46)- funcionan verdaderamente cuando se tienen al menos dos sistemas semióticos distintos en los cuales las representaciones producidas puedan pasarse de un registro a otro. Sólo en este modo, la representación y el objeto representado no se confundirán; así la conversión requiere coordinación del sujeto para que pueda efectuarse.

Las representaciones semióticas, son representaciones conscientes - esta oposición se caracteriza por lo que se observa y lo que se escapa y por ende no es observable, cuando se da el pasaje de lo no consciente a lo consciente se da un proceso de objetivación para el sujeto que toma conciencia, y esto siendo posible mediante la significación que hace la aprehensión perceptiva o conceptual, un ejemplo claro en este punto es la aprehensión de colores o figuras geométricas (Duval, 1999: 46)- y externas -es la oposición entre lo que de un individuo, un organismo o un sistema es directamente visible y observable y lo que no lo es. Las representaciones externas por tanto cumplen función de comunicación, de objetivación y de tratamiento. La función de objetivación (para sí) casi siempre se asimila a la de expresión (para otro), a pesar de ser independientes. (Duval, 1999: 46)-. Permiten una “mirada del objeto” a través de percepción de estímulos que tienen el carácter de significantes. Hay gran variedad de representaciones, las cuales son clasificadas por Duval (1999) en dos grandes grupos a saber:

representaciones analógicas (imágenes) cuyos elementos conservan las relaciones de vecindad y las *representaciones no- analógicas (lenguas)* que no conservan ninguna relación del modelo pero pueden representar operaciones o transformaciones de este.

Existe un inconveniente a la hora de entender que existe una correspondencia directa entre las representaciones mentales y semióticas. Hay un nivel de subordinación de las segundas respecto a las primeras, esto se debe a la gran diferencia existente entre las representaciones mentales de un sujeto y las representaciones semióticas que produce para expresar las mismas, consecuentemente la diferencia fundamental que separa las representaciones semióticas de las mentales es que las primeras presentan un grado de libertad, necesario a todo tratamiento de información que las segundas no tienen.

Las representaciones semióticas permiten tener una variedad de representaciones para un mismo objeto; así, pues, no puede existir correspondencia directa entre representaciones semióticas y mentales, si no de hecho una interacción cuya complejidad escapa a los métodos de investigación.

1.1.2 Actividades cognitivas de representación

Por otra parte, es necesario hacer alusión a tres actividades cognitivas de representación inherentes a la actividad semiótica (Duval, 1999): la *primera es la **formación*** de representaciones en un registro semiótico particular que permite para expresar una representación mental o evocar un objeto real, e implica siempre una selección en el conjunto de los caracteres y de las determinaciones que constituyen lo que se quiere representar. Las otras *dos actividades*, están ligadas a la transformabilidad que conservan todo el contenido o una parte de la representación inicial; de esta forma se da el **tratamiento** cuando la transformación produce otra representación en el mismo registro y **conversión** cuando la transformación produce una representación en un

registro distinto, un ejemplo de conversión es la transformación analógica/numérica de la información sonora. (Duval, 1999).

En conclusión, formación, tratamiento y conversión son las actividades cognitivas fundamentales de la actividad semiótica, estas diferentes actividades están reagrupadas y confundidas en tareas de producción y de comprensión, la producción sea de un texto o esquema moviliza simultáneamente la formación de representaciones semióticas y su tratamiento; la comprensión, por su parte, moviliza hasta las tres actividades cognitivas (Duval, 1999).

La conversión, es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, es así como se entiende esta como una transformación externa relativa al registro de representación de partida, para ilustrar este punto se tiene en cuenta operaciones como “traducción”, “interpretación” “codificación”, etc. (Duval, 1999).

La conversión requiere que se perciba la diferencia entre el contenido de una representación y lo que esta representa, como ejemplo se tiene que la escritura decimal, la fraccionaria y con exponentes constituyen tres registros diferentes de representación de números, sin embargo, se requiere diferenciar entre la significación operatoria vinculada al significante y el número representado.

$$0,25 + 0,25 = 0,5 ; \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ y } 25 * 10^{-2} + 25 * 10^{-2} = 50 * 10^{-2}$$

Cada uno tiene una significación operatoria diferente y representa el mismo número.

Para finalizar, la distinción de las tres actividades ligadas a la actividad semiótica es fundamental para el análisis cognitivo de las tareas como para el análisis de las condiciones de aprendizaje conceptual.

En la enseñanza se privilegia el aprendizaje de las reglas que conciernen la formación de las representaciones semióticas y las que tienen que ver con su tratamiento, principalmente para el registro de discursos en lengua natural, el registro numérico y el de la escritura simbólica. Con

todo lo anterior y fundamentándose en numerosas observaciones en clase y distintas encuestas (Duval, 1999) parece ser que la conversión de las representaciones se constituye como la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de lograr, puesto que suele suceder que no hay reglas para los cambios de registro, basta considerar los enunciados de una lengua natural a las expresiones de una lengua formal, inclusive si están definidas las reglas de conversión se suscita dificultades y ambigüedades caso correspondiente a la escritura algebraica.

La actividad cognitiva de conversión es necesaria, pero se recurre a ella como si fuera una actividad natural desde los primeros años de enseñanza, para constatarlo Duval (1999) afirma que, se puede abrir cualquier libro de matemáticas donde confluyen lenguaje natural, fórmulas literales, gráficos cartesianos etc. Para hacer el contenido más accesible y comprensible.

1.1.3 Complejidad de la actividad cognitiva: conversión

En general, se entiende a la actividad de conversión como una tarea inmediata y simple, sin embargo, para entender que no es así es necesario analizar la puesta en correspondencia de dos representaciones pertenecientes a registros diferentes. Por ejemplo “el conjunto de puntos cuya ordenada es *superior* a la abscisa” $y > x$, en este caso la conversión inversa permite volver a encontrar la expresión inicial del registro de partida; “el conjunto de puntos que tenga un abscisa *positiva*” $x > 0$, aquí la conversión inversa no es fácil, debido a que en la escritura algebraica no hay una unidad significativa que corresponde a positivo, entonces para eliminar esta falta, es importante recurrir a la paráfrasis “ > 0 ”, ahora bien, la distancia a sobrepasar para realizar la conversión es mayor en “el conjunto de puntas cuya abscisa y ordenada tengan *el mismo signo*” $xy > 0$.

En el anterior caso no hay correspondencia término a término entre las unidades significantes respectivas de las dos expresiones, es por tanto necesaria una reorganización de la

expresión dada en el registro de partida para obtener la expresión correspondiente en el registro de llegada, el primer ejemplo corresponde a la congruencia y el tercero a no-congruencia.

De igual forma, para determinar si dos representaciones son congruentes o no, se debe segmentarlas en sus respectivas unidades significantes, al término de esta segmentación comparativa, se puede ver si las unidades son, en cada uno de los dos registros, unidades significantes simples o combinaciones de unidades simples, en este sentido Clark y Chase (1972, en Duval, 1999) lo ejemplificaron mediante un análisis de congruencia entre imagen y frase, ubicando dos imágenes de manera vertical una encima de otra, de este modo A^B es una representación simbólica que codifica que la primera imagen está encima de la segunda imagen, aunque se destaca que para el ejemplo dado existen cuatro frases posibles para describir la misma imagen, con base a lo anterior se configuran tres criterios de congruencia.

El primero, es la *posibilidad de una correspondencia semántica de los elementos significantes*, el segundo, es la *univocidad "semántica" terminal*, y el tercero, es el *orden del arreglo de las unidades que compone cada una de las dos representaciones*. Los tres criterios posibilitan determinar la congruencia entre dos representaciones semióticamente distintas, y que de un modo parcial representan el mismo contenido, así mismo puede haber no correspondencia porque no se cumple ninguno, dos o solo uno de los tres criterios presentados.

Así las cosas, los trabajos de Vergnaud (1976, en Duval, 1999) acerca de resolución de problemas aditivos en la primaria, demuestran el grado de complejidad cognitiva y la puesta en marcha de la conversión, finalmente los resultados arrojaron que cuando los enunciados son congruentes con las igualdades aritméticas, los problemas propuestos son rápidamente resueltos por los estudiantes, caso contrario cuando la no-congruencia aumenta.

A la hora de poner en práctica estos conceptos, se denota claramente que la no-congruencia de las representaciones tiene efectos negativos en la actividad cognitiva de conversión de los estudiantes.

Finalmente se destaca que la coordinación entre los distintos registros de representación es fundamental para que se dé la comprensión.

1.2 Antecedentes

El presente estudio tiene como principal propósito aportar respuestas tentativas a cuestiones como ¿Qué tipos de estudio se han realizado alrededor de la conversión? ¿Qué importancia tienen los libros de texto tanto para los estudiantes como para los docentes en el área de matemáticas? ¿Cuál es la importancia de las ecuaciones al momento de iniciar el aprendizaje del álgebra? En consecuencia, la caracterización de los avances que la investigación educativa ha realizado en torno al papel que desempeñan la conversión, el análisis de libros de texto y las ecuaciones en el estudio de las matemáticas, es un aspecto a contemplar. En lo que sigue describimos las diversas tendencias en que estos elementos han sido contemplados, y que la búsqueda que se ha realizado nos ha permitido identificar. En primer lugar consideraremos a la conversión como actividad cognitiva de vital importancia en la educación matemática, luego centramos nuestra atención en ecuaciones y finalmente en estudios referentes a los libros de texto.

1.2.1 La conversión

Transformación semiótica de importancia en el estudio de las matemáticas pues promueve el paso de un registro a otro y caracteriza la producción, transformación y objetivación de conocimiento matemático. Es claro el por qué el estudio de la conversión se considere en un gran número de reportes de investigación donde se reflexiona sobre los fenómenos que subyacen al estudio de las matemáticas. Muestra de ello es la diversidad de enfoques que tratan problemáticas

relacionadas con esta transformación semiótica. Es el caso de Duval (1999, 2006) y Medina y Amaya (2013) quienes realizan un énfasis en las etapas que le caracterizan, como las dificultades que presenta y los problemas que afrontan los estudiantes al realizar cambios de registros, ya que no existen reglas de conformidad, las cuales definen un sistema de representación y, en consecuencia, los tipos de unidades constitutivas de todas las representaciones posibles en un registro. Estas se refieren esencialmente a: la determinación (estrictamente limitada, o al contrario, abierta) de unidades elementales (funcionalmente homogéneas o heterogéneas...): símbolos, vocabulario... (Duval, 1999). A su vez Aznar et al. (2010) caracteriza las dificultades de los estudiantes al expresar algebraicamente sistemas de numeración, tales como representación de números naturales, enteros, racionales, reales en escritura algebraica y su paso a un registro diferente, a su vez inconvenientes en la conversión de los diferentes sistemas numéricos al realizar tareas con estos conjuntos numéricos, estudios como los de Cosci et al. (2010) por su parte describen inconvenientes que tienen los alumnos al tratar el concepto de continuidad en tareas de conversión en el registro gráfico-escritura algebraica, en el análisis del concepto en las gráficas de funciones continuas como la descripción de una función continua-discontinua, por ejemplo la dificultad que se da al conocer cuando una función es o no continua al explorar su gráfica, a su vez la mayor de las dificultades la encuentran cuando discriminan aspectos que impliquen continuidad en la escritura algebraica de una función.

También existen estudios que exploran distintos tipos de representación como por ejemplo la gráfica y su respectivo cambio de registro a una expresión algebraica, Benítez y Alma (2010) en su investigación concluyen que la conversión es importante para llegar al concepto de función lineal puesto que se hace necesario utilizar diferentes registros de representación para analizar de manera global este concepto. Así mismo Córdoba (2008) destaca la importancia de la coordinación de dos registros de representaciones, en este caso las expresiones en registro

algebraico y grafico cartesiano presentes en tareas que identifican propiedades de función lineal y su respectiva representación cartesiana y que son propuestas en los libros de texto, en su investigación Córdoba discrimina que los libros de texto promueven falencias en los dos registros antes referenciados y resalta la importancia de proponer diferentes actividades de tal manera que se identifiquen los cambios de representación necesarios para la comprensión del tema central. A su vez Lémonidis (1991) presenta un trabajo sistemático que desnuda el papel que juega la conversión figura-escritura aritmética. En este caso el concepto matemático en estudio es la homotecia. De esta manera, se discriminan algunas unidades cognitivamente pertinentes al cambio de registro como, la posición relativa entre las dos figuras, la posición del centro en relación a las figuras, las longitudes de sus lados, la talla visual de las figuras, y analiza las maneras de proceder de los estudiantes.

Por otra parte, Valencia y Salazar (2010) aseguran que la conversión entre registros no se efectúa espontáneamente a menos que sea congruente, en otras palabras que sea clara una correspondencia entre unidades significantes de los dos registros es decir elementos matemáticos importantes en las informaciones presentes en los dos registros, de esta manera Benítez (2010) y Buendía (2012) consideran la conversión grafica-escritura algebraica; considerando los polinomios de grado 2 y 3 en tareas desarrolladas por los profesores para aplicarlas en clases; analizando si son o no congruentes teniendo en cuenta la relación uno a uno de las unidades significantes de los polinomios en su representación gráfica como en su representación algebraica.

De otro modo, existen reportes que consideran tanto la conversión entre las tablas de valores y la escritura algebraica aplicada a diferentes conceptos, es el caso de Peralta (2002) quien concluye que la tabulación de funciones es de gran interés en la educación matemática ya que el paso que se quiere dar a representar este concepto, el de función, en escritura algebraica, es

muy complejo y requiere no solo de tiempo, si no de manejar de manera adecuada la actividad de la conversión. Además, Duval (2006) resalta la importancia de una visualización global en el aprendizaje de la representación gráfica de las ecuaciones de la línea recta, donde la conversión figuras-escritura algebraica es incluida; de forma similar, Marmolejo y Vega (2012) evidencian una íntima relación entre la visualización asociada a la figuras bidimensionales y los tipos de conversión (figura-escritura aritmética) que se promueven en el estudio del área.

Investigaciones como la de Castellanos y Obando (2010) afirman que la conversión es el factor fundamental en la construcción de conocimiento y apropiación de conceptos matemáticos, por tal razón en su estudio Bernal et al (2007) enuncian que los conceptos matemáticos son dependientes de las formas de representación de conocimiento, verbal, gramática, y formal en la solución de problemas en matemáticas, específicamente y con mayor detalle en el ámbito de los números enteros, puesto que sin representación no hay una coordinación de elementos importantes en la elaboración de conocimiento.

1.2.2 Libros de texto

Entre los diferentes materiales que se utilizan en la planificación, preparación y desarrollo de las clases de matemáticas así como en la articulación de las exigencias curriculares institucionales en el aula de clase, los textos escolares se imponen como los materiales didácticos de mayor uso por parte de los educadores y estudiantes. (González, 2002; Martínez y Penalba, 2006; Li, 2000; Pepin et al, 2001; Robitaille y Garden, 1989), pues entre variados aspectos reflejan en parte las intenciones oficiales de los planes de estudio dando forma a las omisiones presentes en los documentos oficiales (Schmidt et al, 1996), constituyen importantes referentes para los profesores quienes los utilizan para revisar o recordar los elementos matemáticos que deben tratar (García y García, 2007). Igualmente son una fuente para identificar el contenido cubierto (Pepin et al., 2001; Li 2000) y las formas como se presentan en el aula escolar (Cobo y

Batanero, 2004). Es claro la importancia de los libros de texto en consecuencia, la forma como el contenido en ellos es tratado ha, y debe, ser caracterizado.

En este sentido, Marmolejo (2014), ha discriminado diferentes tendencias en que el análisis de contenido es considerado en el campo de la educación matemática, a saber:

- Estructuración del contenido matemático en los libros de texto (Dormolen ,1986)
- Procesos y exigencias cognitivas que subyacen a la presentación del contenido matemático (Lithner, 2004; Marmolejo y González, 2013a, 2013b)
- Estrategias de regulación externa promovidas por los libros en el tratamiento de contenido (Marmolejo y González, 2014)
- Valoraciones sociales establecidas por régimen político en una época concreta, que determinan, parcialmente, el papel del educador en el uso de los textos escolares (Emmanuele, Gonzáles, 2010)
- Predominio de situaciones reales como contexto para representar, justificar y explicar los números negativos en los manuales españoles publicados en los siglos XVII y XIX (Maz y Rico, 2007)
- Un estudio de libros antiguos en matemáticas permiten, conocer la manera como evolucionaron y se difundieron los saberes matemáticos en épocas específicas Schubring (1987)
- Organización y secuenciación de los contenidos en los libros influyen en los modelos de enseñanza y de aprendizaje considerados en el estudio de las matemáticas, lo que determina variados enfoques de intervención en el aula Serrado y Azcarate (2003).

En relación al papel que desempeña las representaciones semióticas en la forma como los libros de texto tratan los contenidos matemáticos son pocos los trabajos realizados y por lo

general consideran aspectos distintos a los aquí tratados. Es el caso de algunas investigaciones realizadas por González (2002) quien clasifica, según los sistemas de representación empleados, los manuales estudiados en expositivos, tecnológicos y comprensivos. Harries y Sutherland (2001), por su parte analizan como los textos de enseñanza primaria tratan el número. Otros estudios como los realizados por Pang y Hwang (2006) analizan como las figuras son clasificadas en el estudio de la geometría y la medición. Por otra parte, Bruno y Cabrera (2006) resaltan que los libros suelen recurrir a diferentes representaciones al introducir un nuevo sistema numérico.

Fuson y Li (2009), al reflexionar sobre el papel de la semiótica en las representaciones lingüísticas, numéricas y visuales para dotar de significado a la adición y sustracción de números naturales, encontraron que el contenido presentado en textos estadounidenses es similar al evidenciado en manuales chinos. Por otro lado, Li, Chen y An (2009), estudian cómo el tópico de división de fracciones se introduce en tres series de textos usados: una en Japón, otra en Estados Unidos y la tercera en China. Así mismo encontramos investigaciones que desde una perspectiva ontosemiótica se interesan por los manuales escolares; es el caso de Ospina y Salgado (2010), Konic, Godino y Rivas (2010) quienes caracterizan las estructuras multiplicativas a partir de los aspectos que intervienen o emergen de los sistemas de prácticas ligados a la solución de problemas.

1.2.3 Ecuaciones

Un tópico fundamental en las matemáticas, su estudio es contemplado desde los grados inferiores, así se resalta en los estándares básicos en competencias de matemáticas donde a partir de los grados 6° y 7° “se requiere que los estudiantes se aproximen a la solución de problemas utilizando métodos informales, ensayo y error, complementación; en la solución de ecuaciones”, razón por la cual existe un sin número de investigaciones que centran su atención en esta parte, como lo hacen, Mercedes y Medina (1999) quienes presentan una síntesis del trabajo de

investigación “la adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en el álgebra por alumnos de 12 a 14 años”, en ella resaltan las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos del álgebra, a los procesos de pensamiento algebraico, al desarrollo cognitivo de los alumnos, a los métodos de enseñanza y a actitudes afectivas y emocionales hacia ella. Como inconvenientes que adquieren los estudiantes de estas edades en el álgebra cuando se comienzan a relacionar con su lenguaje. Además, Rabino et al (2011) en su investigación presentan a sus estudiantes, problemas en un contexto real y deben llegar a una resolución del mismo por medio de ecuaciones, aquí ellos usan estrategias que no necesariamente fueron aprendidas en la escuela, concluyendo así que el problema se resuelve de una manera que tiene sentido para ellos. Estudios como el realizado por Arenas (2013) muestran la experiencia en las aulas de clase en la temática de ecuaciones lineales un eje transversal con las demás ciencias del conocimiento, esta propuesta de trabajo busca apoyar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes del grado noveno en dicha temática, iniciando la elaboración de diferentes instrumentos que permitan al educador ver la concepción que tiene el estudiante de los conceptos de variable, igualdad, ecuación y solución de ecuaciones, luego se propone iniciar una transcripción del lenguaje cotidiano al simbolismo matemático donde se evidencie si el estudiante logra identificar la importancia de cada uno de los conceptos a trabajar para finalmente entrar en la solución de la ecuación siendo enfáticos en la viabilidad de la solución.

Por otro lado, las investigaciones no suelen solo centrar su atención en el bachillerato, su estudio va mucho más allá, como lo hacen Martínez y Sáez (2013) quienes describen los esquemas mentales relacionados con los sistemas de ecuaciones lineales, que tienen los alumnos al acceder al primer curso de Matemáticas en la Universidad, indicando el inconveniente que genera la pérdida y el no entendimiento de este concepto de ecuaciones, que va desde un desagrado por la asignatura hasta la misma deserción en el curso; o Trejo y Camarena (2011) que

realizan un análisis cognitivo a un grupo de estudiantes en una carrera técnica universitaria en donde abordan los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales, observando estrategias que estos utilizan frente a problemas matemáticos involucrando las ecuaciones como concepto primordial en su estudio; a su vez Hutnley y Terrell (2014), analizan el estudio de ecuaciones lineales por parte de estudiantes que ingresan a universidades en Estados Unidos, teniendo en cuenta que textos utilizaron en la escuela. Así mismo, Ochoviet y Oktac (2011), presentan resultados en torno a la producción de ecuaciones con base en condiciones dadas y la comprensión del concepto de variable en un contexto de resolución de ecuaciones por parte de estudiantes uruguayos del nivel secundario; de igual manera, Jupri et al (2014), realizan un estudio en Indonesia con profesores de matemáticas y estudiantes, analizando las dificultades que tienen los mismos al instante de estudiar el álgebra y los docentes cuando elaboran su material de trabajo.

2. METODOLOGÍA

En este capítulo se describe la metodología utilizada para el desarrollo de esta investigación. Se divide en cuatro apartados, en los tres primeros se formula el problema estudiado, se presentan los objetivos de la investigación y las hipótesis de trabajo. En el cuarto, se describe la naturaleza y fases de la investigación; se explica, además la metodología de análisis implementada y los procesos de diseño y validación. Por último, se establece las decisiones consideradas para el análisis de datos.

2.1 Planteamiento del problema

Con la obra de Vieta se llegó al punto por el cual el proceso histórico superó el umbral de no-retorno en la dirección de la utilización de símbolos algebraicos, señalando el paso definitivo del álgebra renacentista al álgebra simbólica.

En su trabajo se encuentra un nuevo simbolismo para denotar entidades algebraicas, una clara inclinación hacia el análisis como el método del álgebra y una negación de la geometría como su fundamento. Ese método, al cual llamó *logística simbólica*, fue introducido en su *Arte Analítico*, y “...emplea símbolos o signos para cosas, como, digamos, las letras del alfabeto” (Viète, 1983: 17); asimismo, en este trabajo Vieta estableció las reglas en las que se basaba su novedoso método. La logística simbólica le permitió a Vieta representar por medio de las letras del alfabeto las variables, e incluso los coeficientes, en una ecuación; esto trajo una ventaja adicional: las operaciones presentes en la resolución de una ecuación se hicieron mucho más visibles y, de esta manera, se pudo dar un paso decisivo hacia la generalización de las diferentes “recetas” que se tenían para resolver ecuaciones algebraicas, lo cual abrió nuevos caminos que le permitirían al álgebra consolidarse, en los dos siglos siguientes, como una rama totalmente independiente dentro de las matemáticas. (Rascón, 2003:1).

Desde entonces, la introducción de signos para representar y relacionar cantidades desconocidas se constituyó en una poderosa herramienta que permitió, el desarrollo de procedimientos ágiles en la comprensión y resolución de problemas cuyo interés ha seducido a los matemáticos en épocas previas a la aparición de esta disciplina. Es el caso *de la posibilidad de representar con una sola letra un conjunto de valores y el hecho de poder manejarlos de forma sencilla* (Azarquiél, 1993). De esta manera, *el álgebra se constituyó en una herramienta útil para resolver problemas prácticos que se planteaban en la vida cotidiana* (Labraña, et al 1995). Así, esta disciplina paso a ser un catalizador determinante en la construcción y desarrollo de nuevos elementos matemáticos, por ejemplo, *la teoría de ecuaciones introduce el carácter puramente formal propio de la matemática moderna* (Acevedo y Falk, 1997). No es de extrañar pues que esta disciplina se destaque por ser un objeto de estudio en la gran mayoría de los programas oficiales en los que la enseñanza de las matemáticas se circunscribe. Igualmente, por el alto número de reportes que en la literatura especializada centran su atención en los fenómenos que subyacen a su aprendizaje y enseñanza.

No solo en el álgebra sino en toda la matemática los objetos a considerar no son sensorialmente asequibles, al contrario, es a través de representaciones que es posible aludir a ellos (Duval, 1999). Por tal motivo las **representaciones semióticas** (Las representaciones semióticas son a la vez representaciones conscientes y externas... permiten una mirada del objeto a través de la percepción de estímulos (puntos, trazos, caracteres, sonidos...) que tienen el valor de significantes. Hay una gran variedad de representaciones semióticas posibles: figuras, esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, expresiones lingüísticas, etc. Duval, 1999: 34) se constituyen en un insalvable aspecto a tener en cuenta en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas. En palabras de Duval (1999) es a través de las representaciones semióticas que es posible comunicar, transformar y objetivar el conocimiento matemático. En relación a la segunda

de estas actividades cognitivas, elemento de interés en este documento, son dos los tipos de transformación que permiten las representaciones semióticas: el tratamiento y la conversión. Ambas asumidas como el paso de una representación (inicial) de un objeto, una situación o de una información a otro tipo de representación (final). En el caso de la conversión, a diferencia del tratamiento, la representación inicial proviene de un registro semiótico y la representación final de otro registro de naturaleza distinta (Duval, 1999). Pero es la conversión quien se impone como el tipo de transformación de mayor complejidad para el estudio de las matemáticas. Además, no suele ser objeto de reflexión.

“numerosas observaciones en clase, el análisis de los resultados de encuestas, así como experiencias de aprendizaje, muestran que *la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos*. No solo el cambio de registro ocasiona obstáculos que son independientes de la complejidad del campo conceptual en el que se trabaja; también, con mucha frecuencia, la ausencia de coordinación de los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales” (Duval, 1999: 49), además “no hay reglas ni asociaciones básicas, como entre palabras e imágenes en el lenguaje cotidiano para este tipo de transformación” (Duval, 2006: 150).

Es por esta razón, que la conversión de representación es el primer umbral de la comprensión en el aprendizaje de las matemáticas,..., pues es sólo en ella donde se requiere un amplio y complejo juego de transformación de representaciones (Duval, 2006: 166).

Nuestra atención recae en el estudio de las EPG* y consideramos de forma exclusiva las tareas** que en los libros de texto promueven el desarrollo de problemas donde la conversión de la lengua natural a la escritura algebraica está presente. Las razones que nos llevaron a

* Ecuaciones de primer grado.

** El término tarea se considera como las que el libro de texto propone y que el mismo resuelve –ejemplos- así como las tareas que se proponen para que los estudiantes las realicen –ejercicio-.

privilegiar estos tópicos sobre otros posibles, se relaciona, por un lado, pues los libros de texto influyen en la forma en que el contenido es presentado en el aula (Schmidt et al., 1996); y, por otro lado, porque

“uno de los problemas de las matemáticas es el aprendizaje de las EPG y la aplicación de éstas a problemas, ya que muchos de ellos están fuera de su entorno de conocimientos. Por lo general, para aplicar conocimientos de matemáticas y poder proponer modelos de solución, los alumnos requieren de la aplicación de las propiedades de la igualdad para obtener la solución de las EPG y de conocimientos básicos de física, química o biología; este problema, sin duda alguna, es de una gran dificultad, aunado a esto tenemos que el alumno no tiene preparación para la resolución de problemas, no saben leer, no interpreta preguntas, no asigna variables, etc. (Salazar y Vega,:1)

Es claro, pues, que la caracterización de cómo la conversión es tratada en las tareas de los libros de texto donde se estudia la resolución de problemas con EPG es una cuestión a considerar en el campo de la educación matemática.

2.2 Objetivos de la Investigación

En lo que sigue se procede a describir los objetivos que se pretenden alcanzar en el estudio al igual que la descripción de las hipótesis de trabajo y de investigación asumidas.

Objetivo General: Comparar las conversiones de mayor frecuencia que se promueven en las tareas de EPG con una incógnita en un libro de texto.

Objetivo Específicos:

- Diseñar un instrumento metodológico que caracterice las conversiones que con mayor frecuencia aparecen en un libro de texto al tratar las EPG.
- Caracterizar, según el nivel de complejidad, los tipos de conversión que se suscitan al estudiar los problemas que involucran las EPG.

- Validar el instrumento metodológico diseñado.
- Aplicar el instrumento metodológico a las tareas donde un libro de texto promueve el estudio de las EPG.

2.3 Hipótesis de trabajo

- Existen diferencias significativas en cómo los libros de texto de álgebra promueven conversión al considerar las EPG.
- Los libros de álgebra promueven altos niveles de congruencia en las conversiones que movilizan al promover el estudio de las EPG.
- Existen diferencias entre los tipos de conversiones que promueven los ejemplos y ejercicios al estudiar las EPG.

2.4 Metodología

En este apartado se describen los elementos que caracterizan la metodología abordada en la investigación. Se compone de siete apartados: aproximación metodológica, población, criterios de selección y unidades de análisis, fases de la investigación, instrumento metodológico, proceso de diseño, validación del instrumento metodológico y ejemplo de codificación.

En lo que sigue, antes de describir en detalle cada uno de los apartados previamente reseñados, y con el propósito de guiar la lectura del apartado, se caracteriza en la tabla 2.1 de forma sintética la metodología empleada en la investigación.

Tabla 2.1.**Aspectos generales del método implementado en la investigación**

<i>Esquema general del diseño metodológico utilizado en la investigación</i>	
Momentos	Caracterización
Tipo de investigación	Estudio cualitativo, cuantitativo, exploratorio, descriptivo e interpretativo
Captación y selección de datos	Mixta, inductiva, deductiva Se analizarán los capítulos donde explícitamente, se considera las EPG.
Población considerada	Un libro de texto de alta trascendencia para los profesores de matemáticas al diseñar e implementar sus clases de álgebra.
Unidades de información	Ejemplos y Ejercicios
Diseño del instrumento de análisis	<ol style="list-style-type: none"> 1) Estudio de las categorías que Duval (1999,2002) plantea para el estudio de la conversión. 2) Establecer subcategorías que permitieran tipificar cada categoría. 3) Crear descriptores* para cada una de las subcategorías. 4) Analizar cada una de las tareas que el libro presenta con el fin de identificar características de cada una de ellas. 5) Reorganizar los descriptores de cada subcategoría teniendo en cuenta similitudes, con el fin de reducir al máximo el número de combinaciones que se originaron para tipificar los

* Se considera descriptores a los elementos que permiten definir claramente la información presentada por el enunciado en cada una de las categorías.

diferentes tipos de conversión presentes.

Instrumento metodológico	<p>Categoría 1: Explicitación de una relación (expresión en lengua natural, expresión en escritura algebraica y transición)</p> <p>Categoría 2: Reducción lexical (expresión en lengua natural, expresión en escritura algebraica, número de veces que aparece y transición).</p> <p>Categoría 3: Congruencia/No congruencia (univocidad semántica terminal, correspondencia semántica y conservación de orden).</p>
Validación del instrumento de análisis	<p>Modelo Marmolejo (2014):</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) Evaluación de la pertinencia y coherencia de las categorías de análisis 2) Presentación del instrumento a investigadores especializados en el campo de la educación matemática. 3) Prueba piloto de codificación. 4) Argumento de evaluadores vs argumento de los diseñadores 5) Proceso de evaluación de pares ciegos a una revista especializada.
Método de análisis de datos	<ol style="list-style-type: none"> 1) Consideración para la síntesis de los datos. 2) Análisis unificado de las tareas del libro según el tipo de conversión considerado. Caracterización de las conversiones según el nivel de complejidad que promueven.

Fuente. Este estudio

2.4.1 Aproximación metodológica

La investigación es inductiva y deductiva: pues, se asumieron las categorías de análisis que Duval (1999, 2002) considera para el estudio de la conversión; y su caracterización tuvo en

cuenta la forma cómo los libros de texto promueven el estudio de las EPG. Con respecto a cómo los datos son analizados, la investigación es tanto cualitativa como cuantitativa. En el primer caso, al determinar la forma en que los libros promueven la conversión al estudiar las EPG y en el segundo, al analizar los datos con respecto a cuantas veces se repite los diferentes tipos de conversiones encontrados.

Conforme el objetivo propuesto la investigación es comparativa, descriptiva e interpretativa, ya que, el propósito, por un lado, es comparar los tipos de conversiones que el texto promueve en las tareas al suscitar la resolución de las EPG; y, por otro lado, se pretende describir y explicar la situación sometida a estudio. Así mismo, considerando el grado de abstracción se trata de una investigación básica pues, no pretende establecer aplicaciones prácticas que puedan deducirse del estudio. Su interpretación consideró tanto, el análisis funcional propuesto por Duval (2002) en relación a la actividad cognitiva vinculada a los registros semióticos, en particular lo relacionado con la conversión.

2.4.2 Población, criterios de selección y unidades de análisis

Se analizó un libro de texto, Álgebra de Baldor, utilizado comúnmente para la enseñanza de las matemáticas en la secundaria. Se consideraron los capítulos de Problemas sobre ecuaciones enteras y fraccionarias de primer grado con una incógnita; en particular, los apartados donde el manual escolar considera problemas alusivos a las EPG. Un total de 297 tareas fueron analizadas. De ellas 26 (8.75%) son ejemplos y 271 (91.25%) son ejercicios.

De cada uno de los apartados estudiados se fotografiaron las páginas que conforman las secciones donde se estudian las EPG. Se generó un archivo electrónico por cada sección registrada, según el tipo de tarea contemplada. El análisis se realizó directamente de los archivos electrónicos; haciendo uso de una rejilla en una hoja de Excel en donde las subcategorías y

descriptores de cada una de las categorías se ubicaron en columnas y las tareas analizadas en filas.

Se han considerado como **unidades de información** los espacios donde según los textos escolares presentan, ejemplifican y aplican el contenido presentado; así, son dos las unidades de información consideradas, a saber: las actividades desarrolladas y las actividades a desarrollar. A continuación se definen cada una y se discriminan los elementos que las caracterizan:

Tareas desarrolladas: forman parte de estas unidades las tareas que son propuestas y desarrolladas por el libro de texto y que aparecen en los manuales de formas diversas,

- Posteriormente a una definición, propiedad matemática, fórmula, sugerencia o comentario. En tal caso se pone en evidencia la manera como se aplica el contenido matemático antes presentado, se amplían y/o complementan los aspectos puestos en juego en el contenido o explicación previamente expuesto o se justifica el porqué de las afirmaciones de una definición o de las relaciones presentes en ellas.
- De manera previa a la exposición del contenido matemático en estudio. En este caso los elementos que acompañan a la actividad presentada permiten al lector familiarizarse con elementos o maneras de proceder propias al contenido a estudiar.
- A un lado o en medio de una actividad propuesta para ser desarrolladas por el lector. En este caso se supone que quien vaya a resolver la actividad propuesta debe reproducir la manera de proceder explicitada en la actividad desarrollada por el libro. En algunos casos este tipo de actividades explicitan nuevas maneras de proceder, en otros, se recuerdan las previamente estudiadas en tópicos, capítulos o grados previos.
- Así mismo se encuentra en este tipo de actividades aquellas que son propuestas para que el estudiante siga ciertas indicaciones dadas en ella. Por lo general su propósito es

familiarizar al lector con nuevas maneras de proceder o introducir nuevos elementos matemáticos.

Tareas a desarrollar: propuestas por el libro de texto para que el lector las resuelva.

Según la exigencia, intencionalidad y ubicación en el libro de texto este tipo de actividades aparecen en los textos escolares de dos maneras distintas:

- *Ejercitación:* tareas presentadas a continuación de una definición, explicación, descripción o ejemplo que se plantean para ejercitar el conocimiento o manera de proceder previamente aludida.
- *Evaluación:* tareas propuestas con el objetivo de evaluar las exigencias, conocimientos y maneras de proceder previamente estudiados. Se presentan al final del capítulo en estudio o lugares posteriores a él. Para este caso son *por réplica*, ya que el desarrollo de este tipo de actividades exige proceder de igual manera a la evidenciada en los ejemplos o definiciones abordadas.

El criterio de selección del libro considerado en la investigación es el siguiente:

La importancia e impacto que genera el texto escolar, para educadores y estudiantes en la secundaria, al momento de enfrentar problemas alusivos al álgebra, especialmente las EGP, todas estas características se obtuvieron, después de realizar una encuesta de carácter informal aplicada a docentes de matemáticas en algunas instituciones públicas de San Juan de Pasto, donde la pregunta principal fue: ¿Qué libro usan con mayor frecuencia para iniciar el estudio del álgebra en su institución?

Con relación a lo anterior, cabe destacar que en la encuesta realizada se obtuvieron siete libros de mayor uso por parte de los profesores, al observar cada uno de ellos el número de ejemplos alusivos al tema de EPG era casi nulo, por lo cual se hizo necesario observar las últimas

ediciones de los libros de matemáticas de grado octavo en una biblioteca con el fin de aumentar dicho número; obteniendo así un total de 13 libros para analizar, incluyendo los anteriores. Pese a este número de libros, los ejemplos eran muy escasos para realizar un análisis detallado y comparativo de ellos; por esta razón se decidió tomar un libro que los profesores usan con mayor frecuencia, es el caso del álgebra de Baldor, el cual por el gran número de tareas que posee, permite generalizar resultados al momento de analizar y comparar los tipos de conversiones que ellos promueven.

De esta manera, las tareas propuestas por el libro fueron desarrolladas en totalidad por los investigadores teniendo en cuenta el esquema que maneja el libro, explicando cada una de las designaciones que se realiza para plantear la ecuación del problema y así llegar a la solución del mismo.

2.4.3 Fases de la investigación

El estudio se desarrolló en cuatro fases:

Primera fase: con una duración de cuatro meses, se analizó el contenido teórico referente al proceso cognitivo de la conversión según Duval (1999; 2002; 2006). Así mismo, fue objeto de estudio, la manera como dichas actividades cognitivas están inmersas en los problemas algebraicos donde se estudian las EPG.

Segunda fase: se diseñó un instrumento de análisis, que permitió tipificar los diferentes tipos de conversión presentes en las tareas de un texto escolar y que promueven el estudio de EPG.

Tercera fase: se validará un instrumento de análisis a través del cual se caracterizaran las tareas del texto escolar donde se estudian EPG. Se considera el modelo de validación del instrumento metodológico que caracterizan la forma como es presentado el contenido de libros de texto de Marmolejo (2014), es decir, el instrumento de análisis se presentará para ser validado,

por un lado, a un experto en el campo de la educación matemática; y, por otro, se hará una prueba piloto de codificación con estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas. Por último, se someterá a un proceso de evaluación de pares ciegos a una revista especializada.* Se analizará un solo libro de texto, el cual proporcionará criterios de reflexión para el análisis de los datos y pasos que ofrecen las tareas para resolverlas; así como también se observará la coherencia entre los criterios de análisis planteados y la información que el libro de texto presenta con el objetivo de identificar alcances y debilidades del instrumento presentado.

Cuarta fase: con una duración de tres meses, se elaborará el informe final.

2.4.4 Instrumento de análisis

A continuación, de forma amplia se definen cada una de las categorías y sub-categorías de análisis consideradas en la investigación. Para su mejor comprensión se presentan ejemplos de cada una de ellas.

La forma en cómo se presentan los criterios de congruencia (descritos más adelante en la sección 3.1) nos permitirán clasificar los tipos de conversiones que promueven los libros de texto, mientras que las dos primeras categorías, explicitación de una relación y reducción lexical harán posible la caracterización de estos tipos de conversión que subyacen a cada tarea analizada.

Categoría 1: Explicitación de una relación (ER), “Escribir la ecuación consiste según la formulación de Lacroix (1820 p.15) en “igualar dos cantidades entre ellas”, estas cantidades son (o combinan) las cantidades conocidas y desconocidas... La expresión de esta relación varía consideradamente de un enunciado a otra. Esta puede ser marcada por un verbo,... también puede ser expresada por una frase y a veces no hay una formulación explícita que marque esta relación”

* Teniendo en cuenta que los tiempos que las revistas especializadas asignan a la evaluación y publicación de artículos, superan los asignados para la finalización del presente proyecto, se propone que el informe final del proceso de validación que se relaciona con esta fase se presentará en la sustentación de la investigación más no en el informe escrito.

(Duval, 2002: 3). Las asociaciones que permitieron caracterizar esta categoría son, expresión en lengua natural y expresión en escritura algebraica así como la transición.

a. Expresión en lengua natural (E.L.N): “Lo propio de una lengua es permitir un discurso, es decir, una expresión que “haga una referencia al mundo” de manera que pueda ser compartida entre los que quieren comunicarse entre sí (Benveniste, 1996, p.128-130). La expresión “haga referencia al mundo” debe entenderse aquí en un sentido más amplio: el discurso es una expresión “vinculada con las cosas más allá de la lengua” (Benveniste, 1974, p.225). En otros términos, el discurso es el empleo de una lengua para “decir alguna cosa”, es decir, para hablar de objetos físicos, ideales o imaginarios, que no son solo las potencialidades significantes de una lengua. En razón de esto, la práctica de un discurso es inseparable de un cierto funcionamiento cognitivo (Duval, 1999: 86); así, las expresiones que permiten la actividad discursiva para este caso, son las proposiciones y las frases.

En esta subcategoría, se encontraron dos descriptores que el libro de texto utiliza para comunicar la información:

Proposición (Prop): Unidad lingüística de estructura oracional. Constituida por sujeto y predicado que se unen mediante coordinación o subordinación a otra u otras proposiciones para formar una oración compuesta. (Cortez, C. et al. (2001). Real Academia Española. *Diccionario de la lengua española* (22.ed.). Madrid, España). En la ilustración 2.1 se puede observar que el enunciado del problema es una proposición, puesto que para obtener la ecuación del mismo, se debe tomar el enunciado completo ya que si se dividiera, la información quedaría incompleta y la ecuación del problema sería errónea; además el enunciado está compuesto por varios verbos (suma, equivale, disminuido), lo cual implica que es una proposición.

220 La suma de la tercera y la cuarta parte de un número equivale al duplo del número disminuido en 17. Hallar el número.

Sea $x =$ el número.

Tendremos: $\frac{x}{3} =$ la tercera parte del número.

$\frac{x}{4} =$ la cuarta parte del número.

$2x =$ duplo del número.

De acuerdo con las condiciones del problema, tendremos la ecuación: $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 2x - 17.$

Resolviendo: $4x + 3x = 24x - 204$
 $4x + 3x - 24x = -204$
 $-17x = -204$
 $x = \frac{204}{17} = 12,$ el número buscado. R.

Ilustración 2.1: Forma de expresión en lengua natural: proposición.

Fuente: Algebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 246

Frase (F): Conjunto de palabras que basta para formar sentido, especialmente cuando no llega a constituir una oración. (Cortez, C. et al. (2001). Real Academia Española. *Diccionario de la lengua española* (22.ed.). Madrid, España). En la ilustración 2.2 se reconoce que el enunciado tiene como forma de expresión en lengua natural, frase ya que posee un verbo nominal es y la expresión que determina la explicitación de una relación es la edad de A es el triplo de la B.

128 La edad de A es el triplo de la de B y dentro de 20 años será el doble. Hallar las edades actuales.

Sea $x =$ número de años que tiene B ahora.
 $3x =$ número de años que tiene A ahora.

Dentro de 20 años, la edad de A será $(3x + 20)$ años y la de B será $(x + 20)$ años. El problema me dice que la edad de A dentro de 20 años, $3x + 20$, será igual al doble de la edad de B dentro de 20 años, o sea, igual al doble de $x + 20$; luego, tendremos la ecuación $3x + 20 = 2(x + 20).$

Resolviendo: $3x + 20 = 2x + 40$
 $3x - 2x = 40 - 20$
 $x = 20$ años, edad actual de B. R.
 $3x = 60$ años, edad actual de A. R.

Ilustración 2.2: Forma de expresión en lengua natural: frase.

Fuente: Algebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 138

b. Expresión en escritura algebraica (E.EA): "... la ecuación tiene tres diferentes tipos de signos: -Las letras y los dígitos del sistema decimal cuya función es exclusivamente referencial, es decir, se limita a la designación de los objetos, cantidades conocidas o desconocidas, ya nombradas en el enunciado:

- Los símbolos de las operaciones con números (+, -, la unión de caracteres...)

- Un símbolo de relación, como el símbolo "=" que controla el modo de sustitución de los signos entre si y que es específico del mecanismo de expansión discursiva (el desplazamiento de una expresión de un miembro a otro que convierte una ecuación en otra) (Duval, 2002: 4).

Así para esta subcategoría, se determinaron dos descriptores que el libro de texto utiliza,

Operaciones Simples (Os): En la escritura algebraica es común encontrarse con expresiones matemáticas que se relacionan por medio de una operación, por ejemplo: simple aditiva (solo suma) –SAd-, simple sustractiva (solo resta) –SSu-, simple multiplicativa (solo multiplicación) –SMu- y simple cociente (solo división) –SCo-. En la ilustración 2.2 se identifica que la explicitación de una relación está dada por la frase La edad de A es el triplo de la B, la cual algebraicamente se expresa como $3x$, que involucra una operación, la multiplicación.

Operaciones Compuestas (Oc): Las operaciones en el álgebra articulan diferentes expresiones, las cuales no solo se relacionan por medio de una única operación. Para este caso, se hace necesario la presencia de varias operaciones que permitan enlazar la información presentada. Es el caso de las composiciones presentadas en la siguiente tabla:

Tabla 2.2**Operaciones compuestas en formas de expresión en escritura algebraica.**

Operaciones compuestas	Definición
Aditiva-Sustractiva (CASu)	Se da cuando esta la operaciones suma y resta
Aditiva-Multiplicativa (CAMu)	Se da cuando esta la operaciones suma y multiplicación
Aditiva-Cociente (CACo)	Se da cuando esta la operaciones suma y división
Sustractiva-Multiplicativa (CSMu)	Se da cuando esta la operaciones resta y multiplicación
Sustractiva-Cociente (CSCo)	Se da cuando esta la operaciones resta y división
Multiplicativa-Cociente (CMCo)	Se da cuando están la operaciones multiplicación y división
Aditiva-Multiplicativa- Cociente (CAMCo)	Se da cuando están las operaciones adición multiplicación y cociente
Aditiva-Cociente-Sustractiva (CACSu)	Se da cuando están las operaciones adición, resta y cociente
Aditiva-Sustractiva- Multiplicativa (CASMu)	Se da cuando están las operaciones adición, resta y multiplicación
Sustractiva-Multiplicativa- Cociente (CSMCo)	Se da cuando están las operaciones resta, multiplicación y división
Aditiva-Sustractiva- Multiplicativa-Cociente (CASMCo)	Se da cuando están las operaciones adición, resta, multiplicación y división

Fuente. Este estudio

En la ilustración 2.1 se percibe que la forma de expresión en lengua natural es todo el enunciado, así la expresión algebraica que representa ese enunciado está compuesta por más de

una operación básica en este caso está dada por: A (la suma de tercera) + B (y la cuarta parte de un número) = C (al duplo del número) - Z . De esta forma el ejemplo tiene una forma de expresión compuesta aditiva-sustractiva.

c. Transición (Tran): La transición en los libros de texto se promueve de dos maneras distintas: tratamiento y consideración de concepto matemático o propiedad matemática.

Tratamiento (T): “Un tratamiento es la transformación de una representación en otra representación de un mismo registro. El tratamiento es, pues una transformación estrictamente interna a un registro: utiliza únicamente las posibilidades de funcionamiento propio a un sistema; así las paráfrasis o las reformulaciones en lengua natural, el cálculo con un sistema de escritura de los números, las anamorfosis con las representaciones icónicas, las reconfiguraciones con el registro de las figuras geométricas. Como se ve, un registro ofrece posibilidades específicas de tratamiento” (Duval, 2001: 44).

En la ilustración 2.3 se considera que la información presentada en el enunciado es desorganizada puesto que, al leerlo rápidamente parecería que la ecuación queda determinada por la primera línea, es decir por la expresión: *Un hacendado ha comprado doble número de vacas que de bueyes*; en donde hace falta una expresión que aluda al valor total de la compra; por esta razón, se hace necesario parafrasear el enunciado con el fin de eliminar información intermedia que obstaculiza llegar a la ecuación como tal; así el enunciado sería: *Un hacendado ha comprado doble número de vacas que de bueyes y el total de la compra fue \$2700*. De esta manera la conversión del registro de lengua natural al de la escritura algebraica se torna menos compleja.

129 Un hacendado ha comprado doble número de vacas que de bueyes. Por cada vaca pagó \$70 y por cada buey \$85. Si el importe de la compra fue de \$2700, ¿cuántas vacas compró y cuántos bueyes?

Sea $x =$ número de bueyes.
 $2x =$ número de vacas.

Si se han comprado x bueyes y cada buey costó \$85, los x bueyes costaron $\$85x$ y si se han comprado $2x$ vacas y cada vaca costó \$70, las $2x$ vacas costaron $\$70 \times 2x = \$140x$. Como el importe total de la compra ha sido \$2700, tendremos la ecuación: $85x + 140x = 2700$.

Resolviendo: $225x = 2700$

$x = \frac{2700}{225} = 12$, número de bueyes. R.

$2x = 2 \times 12 = 24$, número de vacas. R.

Ilustración 2.3: Transición: tratamiento.

Fuente: Algebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 139

Consideración de concepto matemático o propiedad matemática (CM/PM): Para realizar la transformación de un registro a otro, en este caso de la lengua natural a la escritura algebraica, no es solo suficiente las propiedades algebraicas; se hace necesaria la presencia de diferentes conceptos u operaciones que aporten elementos de suma importancia para complementar la información del problema. Los conceptos y propiedades utilizados por los libros de texto son: algoritmo de la división, concepto de área y conversión de unidades.

En la ilustración 2.4 se percibe que para obtener la expresión algebraica que representa al enunciado del problema es necesario recurrir a propiedades externas al registro en este caso, al concepto de área de un rectángulo.

229 La longitud de un rectángulo excede al ancho en 8 m. Si cada dimensión se aumenta en 3 metros, el área se aumentaría en 57 m². Hallar las dimensiones del rectángulo.

Sea $x = \text{ancho del rectángulo}$.
 Entonces $x + 8 = \text{longitud del rectángulo}$.

Como el área de un rectángulo se obtiene multiplicando su longitud por su ancho, tendremos: $x(x + 8) = \text{área del rectángulo dado}$.

Si cada dimensión se aumenta en 3 metros, el ancho será ahora $x + 3$ metros y la longitud $(x + 8) + 3 = x + 11$ metros.
 El área será ahora $(x + 3)(x + 11)$ m².

Según las condiciones, esta nueva superficie $(x + 3)(x + 11)$ m² tiene 57 m² más que la superficie del rectángulo dado $x(x + 8)$; luego, se tiene la ecuación: $(x + 3)(x + 11) - 57 = x(x + 8)$.

Resolviendo: $x^2 + 14x + 33 - 57 = x^2 + 8x$
 $14x - 8x = 57 - 33$
 $6x = 24$
 $x = 4$ m, ancho del rectángulo dado. R.
 $x + 8 = 12$ m, longitud del rectángulo dado. R.

Ilustración 2.4: Transición: Concepto matemático/ Propiedad matemática.

Fuente: Algebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 256

Categoría 2: Reducción lexical (RL), “La elección de la incógnita para designar por un símbolo uno de los objetos ya designados en el enunciado se encuentra bajo la condición de una reducción de léxico que es utilizado en el enunciado en lengua ordinaria y esto porque los otros objetos designados en el enunciado deben ser re designados de acuerdo con la elección de la incógnita” (Duval, 2002:3). Los criterios que permitieron caracterizar esta categoría son, expresión en lengua natural, expresión en escritura algebraica, número de veces que aparece y transición.

d. Expresión en lengua natural (E.L.N): (esta subcategoría hace referencia al empleo de una lengua para decir alguna cosa sobre los objetos físicos o imaginarios, tal cual como se reseñó en la categoría 1: Explicitación de una relación, a). De esta forma, la única expresión que permite la actividad discursiva para este caso, son las frases.

Frase (F): Conjunto de palabras que basta para formar sentido, especialmente cuando no llega a constituir una oración. (Cortez, C. et al. (2001). Real Academia Española. *Diccionario de*

la lengua española (22.ed.). Madrid, España). En la ilustración 2.5 se reconoce que el enunciado tiene como forma de expresión en lengua natural, frase ya que posee un verbo nominal es y la expresión que determina la reducción lexical está determinada como: La edad de A es doble que la de B.

121 La edad de A es doble que la de B, y ambas edades suman 36 años.
Hallar ambas edades.

Sea $x =$ edad de B.

Como, según las condiciones, la edad de A es doble que la de B, tendremos: $2x =$ edad de A.

Como la suma de ambas edades es 36 años, se tiene la ecuación: $x + 2x = 36$.

Resolviendo: $3x = 36$
 $x = 12$ años, edad de B. R.
 $2x = 24$ años, edad de A. R.

Ilustración 2.5: Forma de expresión en lengua natural: Frase.

Fuente: Álgebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 131

e. Expresión en escritura algebraica (E.E.A): (esta subcategoría alude al empleo de letras, dígitos, símbolos de operación y de relación para representar una determinada información; como se definió en la categoría 1: explicitación de una relación, b). Así para esta subcategoría, se determinaron tres descriptores que el libro de texto utiliza,

Operaciones Simples (Os): (Se consideran operaciones simples, a toda operación básica, es decir, suma, resta, multiplicación y división; de la misma manera como se definió en la categoría 1: explicitación de una relación, b) En la ilustración 2.5 observa que la reducción lexical, está dada por una frase: La edad de A es doble que la de B, que algebraicamente se expresa como $2x$, que involucra una única operación básica que es la multiplicación.

Operaciones Compuestas (Oc): (Son aquellas que consideran más de una operación básica en una expresión algebraica; de la misma forma como se definieron en la categoría 1:

explicitación de una relación, b. Para observar cada una de estas combinaciones se debe referir a la tabla 1.2 del presente capítulo).

En la ilustración 2.6 se percibe que en lengua natural es la frase: Hace 15 años la edad de A era el triplo de la de B, quien marca la reducción lexical, así la expresión algebraica que representa dicha información, está compuesta por más de una operación básica en este caso está dada por: $2A-15$ (hace 15 años la edad de A) = $3(B-15)$ (el triplo de la B). De esta forma el ejemplo tiene una forma de expresión compuesta sustractiva-multiplicativa.

138 ● ALGEBRA

127 La edad de A es doble que la de B y hace 15 años la edad de A era el triplo de la de B. Hallar las edades actuales.

Sea x = número de años que tiene B ahora.
 $2x$ = número de años que tiene A ahora.

Hace 15 años, la edad de A era $2x - 15$ años y la edad de B era $(x - 15)$ años y como el problema me dice que la edad de A hace 15 años, $(2x - 15)$, era igual al triplo de la edad de B hace 15 años o sea el triplo de $x - 15$, tendremos la ecuación: $2x - 15 = 3(x - 15)$.

Resolviendo: $2x - 15 = 3x - 45$
 $2x - 3x = -45 + 15$
 $-x = -30$
 $x = 30$ años, edad actual de B. R.
 $2x = 60$ años, edad actual de A. R.

Ilustración 2.6: Forma de expresión en lengua escritura algebraica: Operación compuesta.

Fuente: Algebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 138

Operaciones simples/ operaciones compuestas (Os/Oc): En el álgebra es común, encontrarse con expresiones que involucren más de una operación y con mayor razón cuando existe más de una designación en los problemas de EPG; es en este caso, que se presentan a la vez operaciones simples y compuestas.

En la ilustración 2.7 se considera como forma de expresión en lengua natural a las frases: La edad de A es el doble de la de B y 6 años mayor que la de C, así las expresiones algebraicas

que representan estas expresiones son: $2x$ (La edad de A es el doble de la de B) y $2x-6$ (6 años mayor que la de C) respectivamente. De esta forma se observa que en la primera de la expresiones se obtiene una operación básica que es la multiplicación, mientras que en la segunda se hace necesario el uso de más una operación simple, en este caso, la expresión es sustractiva-multiplicativa. Así, al considerar estas expresiones en conjunto se obtiene una operación simple y otra compuesta.

124 La suma de las edades de A, B y C es 69 años. La edad de A es doble que la de B y 6 años mayor que la de C. Hallar las edades.

Sea $x =$ edad de B.
 $2x =$ edad de A.

Si la edad de A es 6 años mayor que la de C, la edad de C es 6 años menor que la de A; luego, $2x - 6 =$ edad de C.

Como las tres edades suman 69 años, tendremos la ecuación $x + 2x + 2x - 6 = 69$.

Resolviendo: $5x - 6 = 69$
 $5x = 69 + 6$
 $5x = 75$

$x = \frac{75}{5} = 15$ años, edad de B. R.
 $2x = 30$ años, edad de A. R.
 $2x - 6 = 24$ años, edad de C. R.

Ilustración 2.7: Forma de expresión en lengua escritura algebraica: Operaciones simple/ operación compuesta.

Fuente: Algebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 135

e. Número de veces que aparece (NVA): En el registro de lengua natural aparecen varios elementos importantes en la información del problema, los cuales permiten discriminar cada una de las tareas. Es por esto que se hace necesario separar por grupos, teniendo en cuenta el número de veces que se realizan las designaciones; de esta manera se obtuvieron dos descriptores para esta subcategoría,

Una vez (1V): Para este caso, es necesario re designar la incógnita por una única vez pues con ello la información que presenta el enunciado estaría representada completamente en el registro de la escritura algebraica. En la ilustración 2.8 se determina que la reducción lexical

aparece una sola vez, ya que la única re designación que se hace es cuando el enunciado presenta la frase: B tiene 8 años menos que A, que algebraicamente se representa como $A-8$. La información que sobra del enunciado es la que permite establecer la explicitación de una relación, es decir, la ecuación completa que representa al problema.

118 La suma de las edades de A y B es 84 años, y B tiene 8 años menos que A. Hallar ambas edades.

Sea $x =$ edad de A.

Como B tiene 8 años menos que A: $x - 8 =$ edad de B.

La suma de ambas edades es 84 años; luego, tenemos la ecuación: $x + x - 8 = 84$.

Resolviendo:

$$x + x = 84 + 8$$

$$2x = 92$$

$$x = \frac{92}{2} = 46 \text{ años, edad de A. R.}$$

La edad de B será: $x - 8 = 46 - 8 = 38$ años. R.

Ilustración 2.8: Número de veces que aparece: Una vez.

Fuente: Algebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 131

Más de una vez (M1V): En el registro inicial, se hace necesario discriminar todos los elementos importantes de la información del problema, para ello se debe realizar re designaciones que permitan abarcarla a cabalidad; pero en ocasiones es necesario recurrir a más de una re designación. En la ilustración 2.9 se puede observar que la reducción lexical aparece más de una vez: Gasto 30 en libros y los $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba después del gasto anterior en ropa, que algebraicamente se representa como $x-30$ y $\frac{3}{4}(x-30)$ respectivamente. De esta manera, toda la información que presenta el enunciado ha sido considerada para obtener la ecuación del problema.

224 A tenía cierta suma de dinero. Gastó \$30 en libros y los $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba después del gasto anterior en ropa. Si le quedan \$30, ¿cuánto tenía al principio?

Sea $x =$ lo que tenía al principio.

Después de gastar \$30 en libros, le quedaron $\$(x - 30)$.

En ropa gastó $\frac{3}{4}$ de lo que le quedaba, o sea $\frac{3}{4}(x - 30)$.

Como aún le quedan \$30, la diferencia entre lo que le quedaba después del primer gasto, $x - 30$, y lo que gastó en ropa, $\frac{3}{4}(x - 30)$, será igual a \$30; luego, tenemos la ecuación:

$$x - 30 - \frac{3}{4}(x - 30) = 30$$

Resolviendo:

$$x - 30 - \frac{3(x - 30)}{4} = 30$$

$$4x - 120 - 3(x - 30) = 120$$

$$4x - 120 - 3x + 90 = 120$$

$$4x - 3x = 120 + 120 - 90$$

$$x = 150.$$

Luego, A tenía al principio \$150. R.

Ilustración 2.9: Número de veces que aparece: Más de una vez.

Fuente: Algebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 251

f. Transición (Tran): (esta subcategoría hace referencia al empleo de mecanismos fuera del enunciado en lengua natural para obtener la ecuación del problema de una forma menos compleja, así como se reseñó en la categoría 1: Explicitación de una relación, c). Esta subcategoría en el libro de texto se promueve de una manera,

Tratamiento (T): (este tipo de transición alude a una transformación realizada internamente en un registro de representación; precisamente como se señaló en la categoría 1: Explicitación de una relación, d). En la ilustración 2.10 se considera que el enunciado como tal tiene información inmersa en él; por eso se hace necesario reescribir la información con el fin de obtener todos los datos que el presenta; así el enunciado que presenta el problema es: Hallar dos números consecutivos cuya suma sea 103 y al realizarle un tratamiento queda como: Hallar dos números consecutivos, donde el primer número y el siguiente sumen 103. De esta manera la conversión del registro de lengua natural al de la escritura algebraica se torna menos complejo y los datos del enunciado son observados con mayor claridad.

7) Hallar dos números consecutivos cuya suma sea 103

x = Primer Número
 $x+1$ = Número consecutivo de x

$$x + (x+1) = 103$$

$$2x + 1 = 103$$

$$2x = 103 - 1$$

$$2x = 102$$

$$x = \frac{102}{2}$$

$$x = 51$$

$x = 51$ Primer Número
 $x+1 = 52$ consecutivo

Ilustración 2.10: Transición: Tratamiento. Tarea 82,7* .

Fuente: Algebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 133

Categoría 3: Congruencia/ No congruencia (Complejidad Semiótica): “La conversión presenta dos características que no se encuentran en el tratamiento y cimentan una operación cognitivamente mucho más compleja... Está orientada: y, por tanto, siempre es necesario precisar cuál es el registro de partida y cuál es el registro de llegada. Puede ser congruente o no congruente. Esto quiere decir que el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede ser congruente en un sentido y no congruente en el otro. En algunos casos, el pasaje de un registro a otro se hace de manera casi espontánea.

Se hablará entonces de congruencia: la representación del registro de partida es transparente a la representación en el registro de llegada. En otros casos, la representación del registro de partida se hace opaca y no deja pensarse como una representación en el registro de llegada. Se hablará entonces de no-congruencia” (Duval, 2001: 46-47).

* Tarea 82,7 fue desarrollada por los investigadores teniendo en cuenta la forma en como el libro de texto desarrolla las mismas.

Los criterios que permiten caracterizar esta categoría son:

a. Univocidad semántica terminal (UST): “a cada unidad significativa elemental* de la representación de partida, no le corresponde más que una única unidad significativa elemental en el registro de representación de llegada. (Duval, 1999: 53). En la ilustración 2.11 se identifica que en el registro de la lengua natural existen diferentes unidades significantes como lo son: una obra en 3 días, B en 5 días y ¿En cuánto tiempo pueden hacer la obra trabajando los dos juntos?, que algebraicamente se presenta en la tarea como $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ y $\frac{1}{x}$ respectivamente, observando claramente que existe una única correspondencia entre los elementos del registro inicial y el final.

232 A puede hacer una obra en 3 días y B en 5 días. ¿En cuánto tiempo pueden hacer la obra trabajando los dos juntos?

Sea x el número de días que tardarían en hacer la obra trabajando los dos juntos.

Si en x días los dos juntos hacen toda la obra, en 1 día harán $\frac{1}{x}$ de la obra.

A, trabajando solo, hace la obra en 3 días; luego, en un día hace $\frac{1}{3}$ de la obra.

B, trabajando solo, hace la obra en 5 días; luego, en un día hace $\frac{1}{5}$ de la obra.

Los dos juntos harán en un día $(\frac{1}{3} + \frac{1}{5})$ de la obra; pero como en un día los dos hacen $\frac{1}{x}$ de la obra, tendremos: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{x}$.

Resolviendo: $5x + 3x = 15$
 $8x = 15$
 $x = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ días. R.

Ilustración 2.11: Complejidad Semiótica: Univocidad semántica terminal.

Fuente: Algebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 259

b. Correspondencia semántica (CS): “a cada unidad significativa simple** de una de las representaciones, se puede asociar a una unidad significativa elemental” (Duval, 1999:53). En la ilustración 2.8 se percibe que las unidades significantes simples de la escritura algebraica en el problema son: \underline{x} y $\underline{x-8}$, que en el enunciado del problema corresponden a las unidades

* Se considera así, a las unidades significantes que dependen del léxico en el registro de la lengua natural.

** Se consideran así, a las unidades significantes que depende del léxico en el registro de escritura algebraica.

significantes elementales, edad de A y B tiene 8 años menos que A, y al intentar realizar la conversión inversa (paso del registro final al registro inicial), esta actividad no se torna compleja.

c. Conservación de orden (CO): “Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a aprehender las unidades en correspondencia semántica según el mismo orden en las dos representaciones... es pertinente solo cuando estas tienen el mismo número de dimensiones” (Duval, 1999: 53). En la ilustración 1.11 se considera que tanto el enunciado en lengua natural como la ecuación que lo representa conservan el mismo orden, es decir, así como se enuncian cada uno de los datos en el registro inicial, de esta misma manera son tomados para obtener la ecuación. A puede hacer una obra en 3 días y B en 5 días. ¿En cuánto tiempo pueden hacer la obra trabajando los dos juntos?, que algebraicamente se presenta en la tarea como $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{1}{x}$.

2.4.5 Proceso de diseño del instrumento de análisis

En la tabla 2.3 se presentan las fases del proceso de diseño del instrumento metodológico. La manera en como los descriptores de cada una de las categorías se articulan nos permitirá identificar los tipos de explicitación de una relación así como los tipos de reducción lexical y complejidad semiótica que se promueven al estudiar las EPG. Considerar la manera en como estos tipos se articulan los unos con los otros nos permitirá determinar los tipos de conversiones que hay en el libro de texto.

Tabla 2.3

Fases del diseño del instrumento metodológico

SEGUIMIENTO DE LAS DEFINICIONES Y EJEMPLOS + RESOLUCIÓN DE LAS TAREAS PROPUESTAS PARA SER RESUELTAS POR LOS ESTUDIANTES							
Categorías de análisis							
Explicitación de una relación			Reducción lexical				Complejidad semiótica
E.L.N	E.E.A	Tran	E.L.N	E.E.A	NVA	Tran	
6	15	4	5	15	5	4	3



Discriminación de la efectividad y coherencia de las categorías y sub-categorías de análisis de acuerdo a cada una de las combinaciones que cada categoría proporciona



REAGRUPACION DE SUB-CATEGORÍAS							
Categorías de análisis							
Explicitación de una relación			Reducción lexical				Complejidad semiótica
E.L.N	E.E.A	Tran	E.L.N	E.E.A	NVA	Tran	
2	2	3	1	3	2	3	3

Fuente. Este estudio

En la primera etapa, con el propósito de discriminar las categorías de análisis e identificar los elementos que permiten caracterizar las tareas del libro en términos de la conversión, se realizó un meticuloso seguimiento de las indicaciones dadas en las definiciones y en los procedimientos desarrollados en las tareas de los libros. Igualmente, fueron desarrolladas las actividades propuestas por los manuales para ser resueltas por los estudiantes. Siguiendo los presupuestos de Duval (1999, 2002), son dos las operaciones referenciales de la conversión: la reducción lexical y la explicitación de una relación; de igual manera como un tercer aspecto a contemplar, la complejidad semiótica, quien determina el grado de dificultad entre dos registros

de representación al realizar el paso del uno al otro. Cada uno de estos tres aspectos se consideró como una categoría de análisis.

Para tipificar cada una de estas categorías, se procedió a revisar las 297 tareas propuestas en el manual escolar y para el análisis de las mismas, se construyó una tabla en una hoja de Excel, la cual permitiera registrar cada una de ellas; así, cada fila correspondió a una tarea y las columnas aluden a los descriptores de cada una de las categorías establecidas. Se establecieron tres columnas: forma de expresión en lengua natural, forma de expresión en escritura algebraica y transición para la categoría de explicitación de una relación. Cuatro columnas para la categoría reducción lexical: forma de expresión en lengua natural, forma de expresión en escritura algebraica, número de veces que aparece y transición. Y finalmente, tres columnas para la categoría de complejidad semiótica: univocidad semántica terminal, correspondencia semántica y conservación de orden.

En la categoría explicitación de una relación se discriminaron 6 formas de expresión en lengua natural (ELN): *proposición, frase simple verbal, frase simple nominal, frase compuesta yuxtapuesta, frase compuesta coordinada y frase compuesta subordinada*; 15 formas de expresión en escritura algebraica (EEA): *simple aditiva, simple sustractiva, simple multiplicativa, simple cociente, compuesta aditiva-sustractiva, compuesta aditiva-multiplicativa, compuesta aditiva-cociente, compuesta sustractiva-multiplicativa, compuesta sustractiva-cociente, compuesta multiplicativa-cociente, compuesta aditiva-multiplicativa-cociente, compuesta aditiva-sustractiva-cociente, compuesta aditiva-sustractiva-multiplicativa, compuesta sustractiva-multiplicativa-cociente y compuesta aditiva-sustractiva-multiplicativa-cociente* y 4 tipos de transición (Tran): *tratamiento, propiedad matemática, concepto matemático y no aplica*.

En la categoría reducción lexical, se discriminaron 5 formas de expresión en lengua natural: *frase simple verbal, frase simple nominal, frase compuesta yuxtapuesta, frase compuesta coordinada y frase compuesta subordinada*; 15 formas de expresión en escritura algebraica: *simple aditiva, simple sustractiva, simple multiplicativa, simple cociente, compuesta aditiva-sustractiva, compuesta aditiva-multiplicativa, compuesta aditiva-cociente, compuesta sustractiva-multiplicativa, compuesta sustractiva-cociente, compuesta multiplicativa-cociente, compuesta aditiva-multiplicativa-cociente, compuesta aditiva-sustractiva-cociente, compuesta aditiva-sustractiva-multiplicativa, compuesta sustractiva-multiplicativa-cociente y compuesta aditiva-sustractiva-multiplicativa-cociente*; número de veces que aparece (NVA): *una, dos, tres, cuatro y cinco* y por último, 4 tipos de transición: *tratamiento, propiedad matemática, concepto matemático y no aplica*.

Por último en la categoría complejidad semiótica están establecidos 3 criterios: *univocidad semántica terminal, correspondencia semántica y conservación de orden* (Duval, 1999: 53).

Todas las sub-categorías fueron extraídas por completo del análisis de las unidades de información analizadas de los textos escolares.

La discriminación de los elementos que conforman cada una de las categorías para las tareas planteadas por el texto no exigió ninguna clase de complejidad; a diferencia de las tareas donde los estudiantes deben resolver las problemáticas planteadas por el mismo, se caracterizó por tener cierto grado de complejidad, ya que fue necesario realizar tratamientos sobre el enunciado en lengua natural para discriminar las unidades significantes del mismo y de esta manera, obtener la ecuación que representa el problema.

Cada tarea propuesta por el libro presenta diferentes descriptores de cada una de las categorías por tanto, al identificar los tipos de conversiones, el número de combinaciones que caracterizan las mismas fue demasiado alto; lo que se convirtió en un impedimento para realizar agrupaciones claras teniendo en cuenta el tipo al cual pertenecían, pues en la mayoría de los casos, estos se presentaban solo una vez.

Ahora, teniendo en cuenta, que la presente investigación es un estudio comparativo en, cómo se presenta el contenido en los manuales escolares en las tareas, nuestro interés radica exclusivamente en los tipos de conversiones que promueve el texto escolar, no en todos los posibles descriptores asociados a la tarea propuesta.

En una segunda etapa del diseño de la metodología de análisis y con el doble objetivo de discriminar tanto la efectividad y coherencia de las categorías y sub-categorías diseñadas como de identificar los tipos de conversiones dominantes, en el desarrollo o comprensión de las tareas propuestas en los manuales escolares, se procedió a revisar las combinaciones obtenidas de los descriptores de cada categoría con el fin de reducir al máximo ese gran número; puesto que esto podría suscitar futuros obstáculos tanto en el análisis de datos como su interpretación puesto que, al principio de la organización del mismo se presentó aproximadamente 260 grupos que no garantizaban claridad alguna y no permitían generalizar resultados. Cabe resaltar que estas combinaciones se obtuvieron analizando las 297 tareas propuestas por el manual escolar al estudiar las EPG.

En consecuencia, se tomó la decisión, de reducir el número de formas de expresión en lengua natural, en escritura algebraica y transición, en cuanto a la categoría de explicitación de una relación; de igual forma se redujo el número de formas de expresión en lengua natural, escritura algebraica, número de veces que aparece y transición en la categoría reducción lexical. Para ello fueron agrupadas según características comunes quedando en definitiva:

Para la categoría explicitación de una relación un total de dos formas de expresión en lengua natural (*proposición y frases*); un total de dos formas de expresión en escritura algebraica (*operaciones simples y operaciones compuestas*); y un total de tres tipos para transición (*tratamiento, concepto matemático/propiedad matemática y no aplica*). Por otro lado, para la categoría de reducción lexical se obtuvo un total de una forma de expresión en lengua natural (*frases*); tres formas de expresión en escritura algebraica (*operaciones simples, operaciones compuestas y operaciones simples/operaciones compuestas*); un total de dos descriptores para número de veces que aparece (*una vez y más de una vez*) y un total de tres tipos para transición (*tratamiento, concepto matemático/propiedad matemática y no aplica*).

De esta manera, el número de combinaciones obtenidas anteriormente se redujo considerablemente y los datos producidos de este análisis permiten cumplir los objetivos planteados en la investigación.

A continuación, se presenta el instrumento metodológico definitivo con cada una de sus categorías.

Tabla 2.4

Instrumento de análisis que permite caracterizar los tipos de conversión que promueve el libro *Álgebra de Baldor al tratar las EPG*

CATEGORÍAS	EXPLICITACIÓN DE UNA RELACIÓN			REDUCCIÓN LEXICAL				Complejidad semiótica
	E.L.N	E.E.A	Tran	E.L.N	E.E.A	NVA	Tran	
DESCRPTORES	Prop	Os	T	F	Os	1V	T	UST
					Oc			
	F	Oc	CM/PM			Os/Oc	M1V	CM/PM

Fuente. Este estudio

2.4.6 Prueba de la confiabilidad y validez del instrumento

Una segunda parte que se tuvo en cuenta en la construcción de la metodología de análisis de manuales escolares aquí tratada se relaciona con la puesta a prueba de la confiabilidad y validez del instrumento de análisis. Las etapas consideradas para este proceso se muestran a continuación.

En primera instancia se solicitó por un lado a dos usuarios del libro de texto y por otro, a un especialista en el campo de la educación matemática, evaluar la pertinencia y coherencia de las tres categorías antes mencionadas, así como también realizar la prueba piloto de codificación. A cada uno de los evaluadores, se le entregó un documento en donde se definen y ejemplifican cada una de las categorías consideradas, un glosario, tres tareas* seleccionadas por los investigadores y una rejilla por cada tarea analizada, la cual consideraba cuatro columnas (subcategoría, descriptor, espacio para marcar la presencia o no del descriptor tratado y justificación del porque está o no presente. Cada uno de los evaluadores, entregó los documentos correspondientes a cada categoría; tras comparar el análisis previo de los investigadores con los realizados por los evaluadores, se observa que el grado de acuerdo entre los evaluadores y los diseñadores del instrumento fue del 87.72% para la primera tarea analizada (ejemplo 120, pg. 132), del 69.14% para la segunda tarea considerada (ejemplo 224, pg. 251) y del 70% para la última tarea analizada (ejercicio 156,2 pg. 259).

En segunda instancia, con el propósito de identificar las debilidades del instrumento, en particular las relacionadas con las dos últimas tareas, se entregó a los evaluadores una tabla donde se compararon los dos análisis para cada una de las actividades y donde se presentaban, en cada caso, los argumentos utilizados por los diseñadores para asignar a cada tarea un descriptor u

* En este caso, dos son ejemplos presentados por el libro y el otro es un ejercicio desarrollado por los investigadores tomando como guía la forma en que el libro propone los ejemplos relacionados a esta temática.

otro. De los tres evaluadores, dos entregaron el documento en las fechas establecidas; y manifestaron que al comparar la opinión de ellos con la de los investigadores identificaban un error en la comprensión de las categorías, por premura de tiempo y porque las definiciones manejan un lenguaje complejo.

De esta forma, al considerar los cambios de opinión en los dos evaluadores, el grado de acuerdo entre los evaluadores y los diseñadores del instrumento fue del 94.33% para la primera tarea analizada (ejemplo 120, pg. 132), del 86.77% para la segunda tarea considerada (ejemplo 224, pg. 251) y del 83% para la última tarea analizada (ejercicio 156,2 pg. 259). Lo que significa que el instrumento diseñado es consistente y válido.

2.4.7 Ejemplo de codificación

A continuación se expone un ejemplo de codificación de una tarea del libro de texto, a modo de ejemplo del análisis que se ha realizado para cada una de las tareas seleccionadas. En particular se consideró los capítulos donde explícita e implícitamente se trata las EPG.

La recogida, selección e interpretación de los datos considero, el análisis funcional propuesto por Duval en relación a la actividad cognitiva de la conversión, teniendo en cuenta las dos operaciones referenciales de la misma. Así como también el criterio congruencia/no-congruencia de vital importancia en el paso de un registro a otro. En la ilustración 2.13 se presenta el ejemplo a categorizar.

124 La suma de las edades de A, B y C es 69 años. La edad de A es doble que la de B y 6 años mayor que la de C. Hallar las edades.

Sea $x =$ edad de B.
 $2x =$ edad de A.

Si la edad de A es 6 años mayor que la de C, la edad de C es 6 años menor que la de A; luego, $2x - 6 =$ edad de C.

Como las tres edades suman 69 años, tendremos la ecuación $x + 2x + 2x - 6 = 69$.

Resolviendo: $5x - 6 = 69$
 $5x = 69 + 6$
 $5x = 75$
 $x = \frac{75}{5} = 15$ años, edad de B. R.
 $2x = 30$ años, edad de A. R.
 $2x - 6 = 24$ años, edad de C. R.

Ilustración 2.13: Tarea 124.

Fuente: Algebra de Baldor (Publicaciones Códice América, Venezuela), p. 135

Categoría 1: Explicitación de una relación:

Tabla 2.5

Categorización de la tarea 124, explicitación de una relación.

TAREA DEL LIBRO	LENGUA NATURAL		ESCRITURA ALGEBRAICA		TRANSICIÓN	
	E.L.N	¿COMO SE HACE?	E.E.A	¿COMO SE HACE?	TIPO	¿COMO APARECE?
AB.P.135.Ej.124	F	"La suma de las edades de A,B y C es 69 años"	SAd	"A+B+C=69"	NA	

Fuente. Este estudio

En la tabla 2.5 se puede observar la categorización de la tarea seleccionada, para ello es necesario asignar una abreviación a ella, la página y el libro donde se encuentra, así, está se identifica como AB.P.135.Ej.124. En cuanto a la forma de expresión en lengua natural se observa que está dada por la frase: la suma de las edades de A, B y C es 69 años que se identifica así por

la presencia del verbo nominal es; quien en escritura algebraica queda determinada por la expresión, $A+B+C=69$ que corresponde a una operación básica, suma (SAd). Para este caso no es necesario aplicar un tipo de transición puesto que el enunciado es suficientemente claro para dar a conocer los datos necesarios para el planteamiento de la ecuación del mismo.

Categoría 2: Reducción lexical:

Tabla 2.6

Categorización de la tarea 124, reducción lexical.

TAREA DEL LIBRO	LENGUA NATURAL		ESCRITURA ALGEBRAICA		NVA	TRANSICIÓN	
	E.L.N	¿COMO SE HACE?	E.E.A	¿COMO SE HACE?		TIPO	¿COMO APARECE?
AB.P.135.Ej.12 4	F	"La edad de A es el doble de la de B"	SMu	"2x"	M1V	NA	
		"y 6 años mayor que la de C"	CSMu	"2x-6"			

Fuente. Este estudio

En la tabla 2.6 se consideran todos los descriptores necesarios para el análisis de la tarea, se conserva la abreviatura para la misma. En cuanto al registro de la lengua natural, se obtienen dos frases las cuales determinan la información faltante para obtener la ecuación que representa el enunciado en el registro inicial, así la edad de A es el doble de la de B y 6 años mayor que la de C son consideradas como frases, puesto que presentan verbos y están unidas a través de una conjunción. Estas frases son expresadas en la escritura algebraica como: $2x$ y $2x-6$

respectivamente, es decir, en esta tarea se presenta una operación simple (SMu) para el primer caso; y para el segundo se presenta una operación compuesta (CSMu) ya que se hace necesario la presencia de dos operaciones básicas para representar dicha información. De esta manera el número de re designaciones necesarias para representar a cabalidad los datos que presenta el enunciado son dos, por esta razón, el número de veces que aparece es 2, lo que quiere decir más de una vez.

Por otra parte, esta tarea no requiere de ningún tipo de transición puesto que la información es clara al momento de discriminar los datos que hacen parte del enunciado.

Categoría 3: Complejidad semiótica:

Tabla 2.7

Categorización de la tarea 124, complejidad semiótica

TAREA DEL LIBRO	UST	CS	CO
AB.P.135.Ej.124	NO	NO	NO

Fuente. Este estudio

En la tabla 2.7 se discriminan las subcategorías de esta categoría; al igual que los ítems anteriores la abreviatura de la tarea se conserva. Con respecto a la primera subcategoría, la tarea no presenta este criterio debido a que las unidades significantes en el registro de partida se encuentran más de una vez en el registro de llegada, es el caso de \underline{x} y $\underline{2x}$, en donde \underline{x} al principio representa la edad de B, pero después es utilizada nuevamente para representar la edad de A. Por otra parte, la conservación de orden no se presenta puesto que la información presentada en el enunciado se encuentra desordenada lo que hace más complejo obtener la ecuación del mismo y como consecuencia de ello, al realizar una conversión inversa no se llegaría al registro inicial por lo que tampoco se presenta la correspondencia semántica. Concluyendo así, que la tarea es no

congruente ya que Duval (1999) afirma que puede no haber correspondencia porque no se cumple ninguno, dos o solo no de los tres criterios.

3. ANÁLISIS DE DATOS

En lo que sigue, se presentan los criterios considerados para el análisis de datos de la investigación así como también los resultados obtenidos al comparar cada uno de los tipos de conversiones que promueven tanto ejemplos como ejercicios en el libro de texto al resolver problemas que involucran las EPG.

3.1 Consideraciones para la síntesis de los datos

Con el propósito de analizar e interpretar los datos de la investigación y dar respuesta a la cuestión ¿Cómo los libros de texto promueven la conversión al tratar las EPG?, se construyó una tabla para analizar los datos. Cada entrada correspondió a una tarea. Se establecieron tres categorías: explicitación de una relación, reducción lexical y congruencia/no-congruencia. La primera está dividida en tres subcategorías (expresión en lengua natural, expresión en escritura algebraica y transición). La reducción lexical en cuatro subcategorías (expresión en lengua natural, expresión en escritura algebraica, número de veces que aparece y transición) y el último contenido en tres subcategorías (univocidad semántica terminal, correspondencia semántica y conservación de orden).

Para caracterizar los tipos de conversión, se introdujeron 16 columnas adicionales una por cada descriptor que en el libro de texto determina las tres categorías de análisis consideradas. En la primera, 2 columnas para expresión en lengua natural (forma de expresión y como se hace), 2 para expresión en escritura algebraica (forma de expresión y como se hace), y 2 para transición (tipo y como aparece). Para la segunda categoría se presentan 2 columnas para la expresión en lengua natural (forma de expresión y como se hace), 2 para expresión en escritura algebraica (forma de expresión y como se hace), 1 para el número de veces que aparece y 2 para transición (tipo y como aparece). Finalmente, en la tercera categoría, se considera 1 columna para

univocidad semántica terminal, 1 para correspondencia semántica y otra para conservación de orden.

De esta forma fue posible detectar en las 297 tareas del libro de texto analizado, 11 tipos de explicitación de una relación y 10 tipos de reducción lexical (Ver anexos 1 y 2 respectivamente). Las formas como se articulan unas y otras permitieron determinar un total de 49 clases de conversión. (Anexo 3).

El considerable número de conversiones arriba expuesto generó dificultad tanto en el análisis de los datos como en su interpretación. Teniendo en cuenta que la complejidad cognitiva que subyace a la aplicación de estas conversiones varía de un caso a otro, los 49 tipos de conversión* identificados en el estudio fueron reagrupados en cuatro grupos: *conversiones congruentes*, *conversiones no-congruentes*, *conversiones no-congruentes compuestas* y *conversiones no-congruentes simples* (las cuales serán definidas párrafos más abajo).

Para determinar los niveles de complejidad que subyacen en la aplicación de las conversiones identificadas en la investigación se consideraron los tres criterios de congruencia descritos por Duval (1999): univocidad semántica terminal: “a cada unidad significativa elemental** de la representación de partida, no le corresponde más que una única unidad significativa elemental en el registro de representación de llegada” (Duval, 1999: 53); correspondencia semántica: “a cada unidad significativa simple*** de una de las representaciones, se puede asociar a una unidad significativa elemental” (Duval, 1999:53) y conservación de orden: “Las organizaciones respectivas de las unidades significantes de las dos representaciones comparadas, conduce a aprehender las unidades en correspondencia semántica

* De los 49 tipos de conversiones encontrados, 24 de ellos se repiten más de una vez en los diferentes niveles de complejidad establecidos. Razón por la cual los porcentajes serán considerados teniendo en cuenta el número de veces que se repiten en las tareas de cada nivel de complejidad, es decir, considerando los tipos de conversión que se repiten y los que no, se obtiene un total de 90 conversiones.

** Se considera así, a las unidades significantes que dependen del léxico en el registro de la lengua natural.

*** Se consideran así, a las unidades significantes que dependen del léxico en el registro de escritura algebraica.

según el mismo orden en las dos representaciones... es pertinente solo cuando estas tienen el mismo número de dimensiones” (Duval, 1999: 53).

La conversión es una transformación semiótica orientada: y, por tanto, siempre es necesario precisar cuál es el registro de partida y cuál es el registro de llegada. Puede ser congruente o no congruente. Esto quiere decir que el pasaje entre dos representaciones de un mismo objeto puede ser congruente en un sentido y no congruente en el otro. En algunos casos, el pasaje de un registro a otro se hace de manera casi espontánea. Se hablará entonces de congruencia: la representación del registro de partida es transparente a la representación en el registro de llegada. En otros casos, la representación del registro de partida se hace opaca y no deja pensarse como una representación en el registro de llegada. Se hablará entonces de no-congruencia” (Duval, 2001: 46-47).

A partir de los criterios de congruencia enunciados por Duval (1999) fue posible agrupar las 49 clases de conversiones identificadas en la investigación en cuatro grupos a saber:

- conversiones congruentes: cuando cumplen simultáneamente los tres criterios anteriormente mencionados.
- conversiones no-congruentes: cuando no se cumple ninguno de los tres criterios establecidos.
- conversiones no-congruente compuestas: cuando se cumple dos de los tres criterios, sin importar el orden en que se presenten.
- conversiones no-congruente simples: cuando únicamente se cumple uno de los tres criterios reseñados.

El primer tipo de conversión para el estudio de las matemáticas son quienes generan el menor nivel de complejidad mientras que el segundo promueve el más alto. En cuanto a las

conversiones no congruentes compuesta y simple, si tenemos en cuenta el número de criterios de congruencias ausentes como un elemento que caracteriza la complejidad entonces la primera es menos compleja que la segunda.

A continuación presentaremos el análisis de los datos considerados en la investigación. En primer lugar, en la sección 3.2 realizamos un análisis unificado de las tareas del libro según el tipo de conversión considerado, así como también caracterizamos según los niveles de complejidad descritos arriba las 49 conversiones inicialmente discriminadas; mientras que en la sección 3.3 compararemos los ejemplos y ejercicios a partir del tipo de conversión promovido en ellos. Finalmente se establecen algunas conclusiones que se desprenden de los análisis de las tareas antes descritos.

3.2 Análisis unificado de las tareas del libro según el tipo de conversión considerado

Caracterización de las conversiones según el nivel de complejidad que promueven: En lo que sigue, describiremos en detalle las clases de conversión teniendo en cuenta el nivel de complejidad que ellas promueven en el libro de texto al estudiar las EPG.

Conversiones congruentes: presente en tareas donde se cumplen los tres criterios de congruencia (Duval, 1999); univocidad semántica terminal, correspondencia semántica y conservación de orden. Concorre en el 3.33% de los tipos de conversiones encontrados. Este tipo distingue por emplear un lenguaje claro y coherente al instante de presentar la información del problema. Las tareas que promueven este tipo de conversión generan el menor nivel de dificultad para los estudiantes puesto que existe transparencia entre el registro inicial y el registro final (Duval, 1999). La forma como el contenido es presentado, guía al usuario del libro de texto y le permite plantear de forma espontánea la ecuación que resuelve la problemática planteada. Además es donde los estudiantes no necesitan de una guía adicional del educador ni del texto

como tal. Lo cual explica que este tipo de conversión sea escaso. Solo tres o cuatro ejemplos se consideran en las tareas del libro analizado.

Son tres las conversiones que son de naturaleza congruente. En la tabla 3.1 se referencian y caracterizan cada una de ellas según los descriptores considerados en el instrumento de análisis (sección 2.4.4)

Tabla 3.1.

Tipos de conversiones congruentes según la naturaleza tanto de la explicitación de una relación como de la reducción lexical.

CONVERSIÓN	EXPLICITACIÓN DE UNA RELACIÓN			REDUCCIÓN LEXICAL			
	E.L.N.	E.E.A.	Tran	E.L.N.	E.E.A.	NVA	Tran
ER4/RL4	F	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER4/RL6	F	Os	NA	F	Os	1V	NA
ER4/RL8	F	Os	NA	F	Os	M1V	NA

Fuente. Este estudio

De esta forma, es claro que existen 3 tipos de conversiones congruentes que el libro de texto promueve al estudiar los problemas que involucran las EPG. ER4/RL4 y ER4/RL6 representan cada uno el 12.5%, mientras que ER4/RL8 concurre con el 75%. Así, este último tipo determina el mayor porcentaje presente en tareas congruentes. De allí, se concluye que las frases y operaciones simples priman en las expresiones en lengua natural y escritura algebraica respectivamente. Como también se destaca la re designación de la incógnita presente más una vez.

Las conversiones congruentes en términos generales caracterizan por:

Expresión en lengua natural: las categorías explicitación de una relación y reducción lexical presentan como descriptor de esta expresión a la frase. Esto quiere decir que la información presentada por el enunciado, es un conjunto de palabras que forman sentido sin necesidad de constituir una oración.

Expresión en escritura algebraica: en la categoría explicitación de una relación, la forma en cómo se presenta la información en el registro final, está determinada por operaciones simples, es decir por medio de operaciones básicas tales como la suma, resta, multiplicación o división. En cuanto a la categoría de reducción lexical estas expresiones se presentan de dos formas, la primera con operaciones simples/operaciones compuestas (presencia de operaciones básicas para aludir a cierta información y operaciones simples que se presentan en conjunto –compuestas- para abarcar a cabalidad toda la información presentada por el texto). Y la segunda haciendo uso de operaciones básicas para hacer referencia a datos del registro inicial.

Transición: En este tipo de conversiones tanto en la categoría de explicitación de una relación como en la reducción lexical, no es necesario utilizar elementos externos a la información que presenta el registro inicial, es decir, la información presentada es suficiente para realizar el cambio de registro (LN-EA) por tal razón, los tipos de transición expuestos en el instrumento de análisis no se consideran.

Número de veces que aparece: esta subcategoría se presenta únicamente en la categoría de reducción lexical y se introduce de dos formas, la primera aparece una sola vez mientras que la segunda aparece más de una vez, lo que indica que existen tareas en las cuales es necesario realizar re designaciones de la incógnita para obtener la información necesaria que permita resolver el problema planteado.

Conversiones no-congruentes: presente en tareas donde no se cumple ninguno de los tres criterios de congruencia (Duval, 1999); univocidad semántica terminal, correspondencia semántica y conservación de orden. Concorre en el 28.89% de los tipos de conversiones encontrados. Este tipo se caracteriza por presentar la información en el registro inicial de una manera confusa y poco entendible para obtener de esta, los datos necesarios para resolver la problemática planteada.

La forma como el contenido es presentado, no guía al usuario del libro de texto y por ello es necesario la guía adicional del educador o un ejemplo similar al desarrollado con el fin de obtener un esquema que minimice las dificultades que ocasiona el paso de un registro a otro. Lo cual explica que este tipo de conversión sea bastante amplio y permite reafirmar que la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la gran mayoría de los alumnos (Duval, 1999).

Son 26 las conversiones que son de naturaleza no-congruente. En la tabla 3.2 se referencian y caracterizan cada una de ellas según los descriptores considerados en el instrumento de análisis (sección 2.4.4)

Tabla 3.2.

Tipos de conversiones no-congruentes según la naturaleza tanto de la explicitación de una relación como de la reducción lexical.

CONVERSIÓN	EXPLICITACIÓN DE UNA RELACIÓN			REDUCCIÓN LEXICAL			
	E.L.N	E.E.A	Tran	E.L.N	E.E.A	NVA	Tran
ER1/RL1	F	Oc	NA	F	Oc	1V	NA
ER1/RL3	F	Oc	NA	F	Oc	M1V	NA
ER1/RL4	F	Oc	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER1/RL5	F	Oc	NA	F	Os/Oc	M1V	T
ER1/RL6	F	Oc	NA	F	Os	1V	NA
ER1/RL8	F	Oc	NA	F	Os	M1V	NA
ER2/RL3	F	Oc	CM/PM	F	Oc	M1V	NA
ER2/RL6	F	Oc	CM/PM	F	Os	1V	NA
ER2/RL8	F	Oc	CM/PM	F	Os	M1V	NA
ER4/RL1	F	Os	NA	F	Oc	1V	NA
ER4/RL2	F	Os	NA	F	Oc	1V	T
ER4/RL3	F	Os	NA	F	Oc	M1V	NA
ER4/RL4	F	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER4/RL5	F	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	T
ER4/RL6	F	Os	NA	F	Os	1V	NA
ER4/RL8	F	Os	NA	F	Os	M1V	NA
ER4/RL9	F	Os	NA	F	Os	M1V	T
ER7/RL3	Prop	Oc	NA	F	Oc	M1V	NA
ER7/RL4	Prop	Oc	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER9/RL3	Prop	Oc	T	F	Oc	M1V	NA
ER9/RL4	Prop	Oc	T	F	Os/Oc	M1V	NA
ER9/RL7	Prop	Oc	T	F	Os	1V	T
ER10/RL3	Prop	Os	NA	F	Oc	M1V	NA
ER10/RL7	Prop	Os	NA	F	Os	1V	T
ER10/RL9	Prop	Os	NA	F	Os	M1V	T
ER10/RL10	Prop	Os	NA	NA	NA	NA	NA

Fuente. Este estudio

De esta forma, se obtienen 26 tipos de conversiones no-congruentes que el libro de texto promueve al estudiar los problemas que involucran las EPG. ER4/RL4 representa el 22.64%, seguido del tipo ER1/RL8 con una concurrencia del 9.43%, ER4/RL8 con un 8.49%, ER4/RL9 con el 7.55%, ER4/RL1 con 6.60%, ER1/RL1 el 5.66%. Los tipos ER1/RL4, ER4/RL5 y ER10/RL3 presentan el 4.72%; las conversiones ER1/RL3, ER4/RL3 y ER9/RL4 representan el 2.83%; ER1/RL6, ER4/RL6, ER7/RL3 y ER9/RL7 con el 1.89% y finalmente ER1/RL5, ER2/RL3, ER2/RL6, ER2/RL8, ER4/RL2, ER7/RL4, ER9/RL3, ER10/RL7, ER10/RL9, y ER10/RL10 con un porcentaje del 0.94%.

Las conversiones no-congruentes en términos generales caracterizan por:

Expresión en lengua natural: en la categoría explicitación de una relación estas formas se presentan como frases y proposiciones, las primeras son palabras que forman sentido sin necesidad de conformar una oración; mientras que las segundas están constituidas por sujeto y predicado y se unen mediante conjunción o subordinación a una u otras proposiciones para formar una oración compuesta. En la categoría reducción lexical únicamente está presente la frase para describir la expresión en el registro inicial.

Expresión en escritura algebraica: en cuanto a la categoría de explicitación de una relación, este descriptor se presenta de dos formas, la primera alude a operaciones simples (suma, resta, multiplicación o división) para referirse a la información presentada en el registro inicial; mientras que la segunda necesita de la composición de estas operaciones simples –formando operaciones compuestas- para abarcar toda la información que presenta el enunciado.

La categoría reducción lexical presenta tres descriptores de expresiones en escritura algebraica: Os, para aludir al uso de operaciones simples –básicas- que permiten abarcar a cabalidad la información de la problemática presentada. Oc, para representar el uso de operaciones simples en conjunto, es decir, utilizar diferentes operaciones básicas a la vez que

permitan caracterizar los datos del registro inicial; y Os/Oc caracterizado por emplear a la vez tanto operaciones simples como compuestas para describir las re designaciones realizadas con la incógnita.

Transición: En la categoría explicitación de una relación, la transición se presenta de dos formas, la primera cuando es necesario considerar un concepto matemático o propiedad matemática. En este caso, para lograr resolver la problemática planteada, es indispensable que el estudiante recurra a aspectos externos al registro de la lengua natural con el fin de realizar el paso de un registro a otro. La segunda es la consideración de un tratamiento, es decir, la reorganización de la información que presenta el problema, con el fin de discriminar los datos importantes que permiten plantear la ecuación que alude a la tarea estudiada.

Con respecto a la categoría reducción lexical es necesario considerar el descriptor tratamiento para obtener las re designaciones de la incógnita presentes en el enunciado del problema ya que en algunos casos es muy difícil de ver. Por esta razón es importante realizar este tipo de transición porque la información sobre estas re designaciones se encuentran de manera implícita en las tareas analizadas.

Número de veces que aparece: Esta subcategoría está presente en la categoría reducción lexical. Aquí se presentan dos descriptores, el primero 1V indica que el enunciado requiere re designar la incógnita para aludir a un nuevo dato; mientras que M1V significa que es necesario realizar re designaciones de la incógnita con el fin de incluir todos los datos necesarios para el planteamiento de la ecuación.

De allí, se concluye que las tareas no-congruentes presentan un alto número de tipos de conversiones y como consecuencia de ello, la frecuencia con la que estos se promueven en las tareas varía considerablemente. Presenta mayor porcentaje el tipo ER4/RL4 que se caracteriza por poseer frase como expresión en lengua natural, operaciones simples y operaciones

simples/operaciones compuestas para el caso de expresión en escritura algebraica y no requieren de aspectos externos a la información del enunciado para obtener la ecuación de la tarea en cuestión. Por otro lado, se presentan alrededor de 10 tipos de conversiones que presentan el más bajo porcentaje en las tareas no-congruentes, lo que indica que son escasamente utilizados y requieren de diferentes caminos posibles para resolver las problemáticas planteadas por el libro conllevando así, a generar un nivel de complejidad alto al momento de comprenderlas e intentar resolverlas. Los otros tipos de conversiones oscilan entre el 1.89% y el 9.43% lo que implica que son promovidos medianamente en las tareas del libro de texto. Además el tipo ER10/RL10 presenta dicho porcentaje ya que la categoría reducción lexical no está presente, puesto que es la única tarea en este tipo de conversiones que no necesita re designaciones de la incógnita para representar la información del problema, por ello las casillas tienen la sigla NA (no aplica).

Conversiones no-congruentes compuestas: presente en tareas donde se cumple dos de los tres criterios de congruencia expuesto por Duval (1999), ya sea univocidad semántica terminal, y correspondencia semántica o univocidad semántica terminal y conservación de orden, entre otras posibles combinaciones. Presente en el 33.33% de los tipos de conversiones encontrados. Este tipo, a diferencia del anterior se caracteriza por presentar la información un poco más detallada, sin embargo el nivel de complejidad sigue siendo alto.

La forma como el contenido es presentado, no guía por completo al usuario del libro de texto, da pautas que permiten acercarse a la ecuación que modela el enunciado de la tarea y por ello es necesario la guía adicional del educador o un ejemplo similar al desarrollado con el fin de obtener un esquema que minimice las dificultades que ocasiona el paso de un registro a otro en tareas no-congruentes compuestas.

Son 30 las conversiones que son de naturaleza no-congruente compuesta. En la tabla 3.3 se referencian y caracterizan cada una de ellas según los descriptores considerados en el instrumento de análisis (sección 2.4.4)

Tabla 3.3

Tipos de conversiones no-congruentes compuestas según la naturaleza tanto de la explicitación de una relación como de la reducción lexical.

CONVERSIÓN	EXPLICITACIÓN DE UNA RELACIÓN			REDUCCIÓN LEXICAL			
	E.L.N	E.E.A	Tran	E.L.N	E.E.A	NVA	Tran
ER1/RL1	F	Oc	NA	F	Oc	1V	NA
ER1/RL4	F	Oc	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER1/RL6	F	Oc	NA	F	Os	1V	NA
ER1/RL8	F	Oc	NA	F	Os	M1V	NA
ER2/RL6	F	Oc	CM/PM	F	Os	1V	NA
ER3/RL3	F	Oc	T	F	Oc	M1V	NA
ER3/RL8	F	Oc	T	F	Os	M1V	NA
ER4/RL1	F	Os	NA	F	Oc	1V	NA
ER4/RL3	F	Os	NA	F	Oc	M1V	NA
ER4/RL4	F	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER4/RL5	F	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	T
ER4/RL6	F	Os	NA	F	Os	1V	NA
ER4/RL7	F	Os	NA	F	Os	1V	T
ER4/RL8	F	Os	NA	F	Os	M1V	NA
ER4/RL9	F	Os	NA	F	Os	M1V	T
ER5/RL6	F	Os	CM/PM	F	Os	1V	NA
ER7/RL4	Prop	Oc	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER7/RL6	Prop	Oc	NA	F	Os	1V	NA
ER7/RL8	Prop	Oc	NA	F	Os	M1V	NA
ER8/RL4	Prop	Oc	CM/PM	F	Os/Oc	M1V	NA
ER9/RL1	Prop	Oc	T	F	Oc	1V	NA
ER9/RL3	Prop	Oc	T	F	Oc	M1V	NA

Continuación tabla 3.3

ER9/RL4	Prop	Oc	T	F	Os/Oc	M1V	NA
ER9/RL8	Prop	Oc	T	F	Os	M1V	NA
ER10/RL3	Prop	Os	NA	F	Oc	M1V	NA
ER10/RL4	Prop	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER10/RL8	Prop	Os	NA	F	Os	M1V	NA
ER11/RL4	Prop	Os	T	F	Os/Oc	M1V	NA
ER11/RL5	Prop	Os	T	F	Os/Oc	M1V	T
ER11/RL8	Prop	Os	T	F	Os	M1V	NA

Fuente. Este estudio

De esta forma, se obtienen 30 tipos de conversiones no-congruente compuestas que el libro de texto promueve al estudiar los problemas que involucran las EPG. Los tipos de conversión ER1/RL8, ER3/RL3, ER4/RL5, ER4/RL7, ER5/RL6, ER7/RL6, ER7/RL8, ER8/RL4, ER10/RL3, ER11/RL5 y ER11/RL8 representan el 1.03%; ER9/RL3, ER9/RL8, ER10/RL4 y ER11/RL4 concurren con un porcentaje del 2.06%, el doble porcentaje de las mencionadas anteriormente.

ER1/RL4, ER3/RL8, ER4/RL1 y ER9/RL1 presentan el 3.09%; ER1/RL1, ER2/RL6, ER4/RL9, ER7/RL4, ER9/RL4 y ER10/RL8 el 4.12%; el tipo ER4/RL4 un 6.19%; ER1/RL6 con el 7.22%; ER4/RL6 el 9.28% y finalmente, ER4/RL3 y ER4/RL8 presentan un 10.31%. De donde se concluye que existen variados tipos de conversiones no-congruente compuestas y como consecuencia de ello, no presentan altos porcentajes que permitan generalizar y establecer un tipo de conversión más utilizado que otros, puesto que en su mayoría todos son empleados con bajo porcentaje excepto los últimos dos tipos mencionados ER4/RL3 y ER4/RL8 que presentan el porcentaje más alto en comparación con los demás. Los cuales presentan iguales descriptores en la categoría explicitación de una relación y en la categoría de reducción lexical difieren en la forma de expresión en escritura algebraica así como en el tipo de transición empleado.

Las conversiones no-congruentes compuestas en términos generales caracterizan por:

Expresión en lengua natural: en la categoría explicitación de una relación, se presentan dos descriptores para esta expresión. El primero la frase y el segundo la proposición. En cuanto a la categoría reducción lexical únicamente se presenta la frase como descriptor de la forma de expresión.

Expresión en escritura algebraica: la categoría explicitación de una relación presenta tanto operaciones simples como operaciones compuestas para aludir a la información presentada en el registro inicial. Por su parte la categoría reducción lexical, destaca tres descriptores, operaciones simples, operaciones compuestas y operaciones simples/operaciones compuestas para representar la información del problema estudiado.

Transición: la categoría explicitación de una relación presenta los dos descriptores que caracterizan a esta subcategoría, los cuales son tratamiento y consideración de un concepto matemático/propiedad matemática, lo que enfatiza que es necesario utilizar aspectos externos a la información presentada en el registro inicial con el fin de evitar dejar datos por fuera de la ecuación que representa la problemática estudiada. En la reducción lexical únicamente se presenta el descriptor tratamiento, es decir el registro inicial presenta la información en el enunciado, sin embargo no es clara, razón por la cual es necesario reorganizarla para identificar las unidades significantes que lo conforman. Este descriptor es escaso ya que únicamente se presenta en 4 tipos de conversiones de las 30 establecidas lo que conduce a concluir que en su mayoría, estos tipos presentan la información de manera clara, para comprender las re designaciones de la incógnita empleadas.

Número de veces que aparece: esta subcategoría está presente únicamente en la categoría de reducción lexical, tal cual como se reseñó anteriormente. Los descriptores que se presentan son 1V para aludir a una re designación de la incógnita para representar un dato que dependa de

la designación inicial; y M1V que determina el empleo de más de una re designación para abarcar toda la información del problema.

Conversiones no-congruentes simples: presente en tareas donde se cumple uno de los tres criterios de congruencia expuesto por Duval (1999), ya sea univocidad semántica terminal o correspondencia semántica o conservación de orden. Concorre en el 34.44% de los tipos de conversiones encontrados. En consonancia con los dos tipos anteriormente descritos, este tipo de tareas involucran un alto grado de dificultad en los estudiantes. La forma como el contenido es presentado, guía en un 33.3% al usuario del libro de texto, para acercarse a la ecuación que modela el enunciado de la tarea; razón por la cual, es necesario la guía adicional del educador o un ejemplo similar al desarrollado con el fin de obtener un esquema que minimice las dificultades que ocasiona el paso de un registro a otro en tareas no-congruente simples.

Son 31 las conversiones que son de naturaleza no-congruente simple. En la tabla 3.4 se referencian y caracterizan cada una de ellas según los descriptores considerados en el instrumento de análisis (sección 2.4.4)

Tabla 3.4

Tipos de conversiones no-congruentes simples según la naturaleza tanto de la explicitación de una relación como de la reducción lexical.

CONVERSIÓN	EXPLICITACIÓN DE UNA RELACIÓN			REDUCCIÓN LEXICAL			
	E.L.N	E.E.A	Tran	E.L.N	E.E.A	NVA	Tran
ER1/RL3	F	Oc	NA	F	Oc	M1V	NA
ER1/RL4	F	Oc	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER1/RL6	F	Oc	NA	F	Os	1V	NA
ER1/RL8	F	Oc	NA	F	Os	M1V	NA
ER3/RL8	F	Oc	T	F	Os	M1V	NA
ER4/RL1	F	Os	NA	F	Oc	1V	NA

Continuación tabla 3.4

ER4/RL3	F	Os	NA	F	Oc	M1V	NA
ER4/RL4	F	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER4/RL5	F	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	T
ER4/RL6	F	Os	NA	F	Os	1V	NA
ER4/RL8	F	Os	NA	F	Os	M1V	NA
ER4/RL9	F	Os	NA	F	Os	M1V	T
ER5/RL6	F	Os	CM/PM	F	Os	1V	NA
ER6/RL3	F	Os	T	F	Oc	M1V	NA
ER6/RL4	F	Os	T	F	Os/Oc	M1V	NA
ER6/RL6	F	Os	T	F	Os	1V	NA
ER6/RL10	F	Os	T	F	NA	NA	NA
ER7/RL1	Prop	Oc	NA	F	Oc	1V	NA
ER7/RL3	Prop	Oc	NA	F	Oc	M1V	NA
ER7/RL4	Prop	Oc	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER7/RL8	Prop	Oc	NA	F	Os	M1V	NA
ER9/RL1	Prop	Oc	T	F	Oc	1V	NA
ER9/RL2	Prop	Oc	T	F	Oc	1V	T
ER9/RL4	Prop	Oc	T	F	Os/Oc	M1V	NA
ER9/RL6	Prop	Oc	T	F	Os	1V	NA
ER10/RL1	Prop	Os	NA	F	Oc	1V	NA
ER10/RL3	Prop	Os	NA	F	Oc	M1V	NA
ER10/RL4	Prop	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER10/RL6	Prop	Os	NA	F	Os	1V	NA
ER11/RL3	Prop	Os	T	F	Oc	M1V	NA
ER11/RL8	Prop	Os	T	F	Os	M1V	NA

Fuente. Este estudio

De esta forma, se obtienen 31 tipos de conversiones no-congruentes simples que el libro de texto promueve al estudiar los problemas que involucran las EPG. Los tipos de conversión ER4/RL6 y ER4/RL4 representan el 12.79% y el 11.63% respectivamente y corresponden a los porcentajes más altos de todos los tipos de conversiones no-congruentes simples. ER4/RL8, el 8.14%; ER1/RL4 y ER9/RL4 presentan el 5.81%; ER4/RL9 el 4.65%; los tipos ER1/RL6, ER4/RL1, ER4/RL3, ER4/RL5, ER6/RL3, ER10/RL3, ER10/RL4 representan el 3.49%. Por otra

parte, ER1/RL8, ER6/RL4, ER7/RL3, ER9/RL1, ER9/RL6 presentan el 2.33% y finalmente con un porcentaje del 1.16% están los tipos, ER1/RL3, ER3/RL8, ER5/RL6, ER6/RL6, ER6/RL10, ER7/RL1, ER7/RL4, ER7/RL8, ER9/RL2, ER10/RL1, ER10/RL6, ER11/RL3 y ER11/RL8.

Las conversiones no-congruentes simples en términos generales caracterizan por:

Expresión en lengua natural: en la categoría de explicitación de una relación, se caracteriza por poseer dos descriptores, las frases y las proposiciones. En reducción lexical la única expresión que aparece es la frase.

Expresión en escritura algebraica: la categoría explicitación de una relación se caracteriza por presentar dos tipos de descriptores las operaciones simples y las operaciones compuestas para representar la información expuesta en el registro de la lengua natural. Por su parte, la categoría reducción lexical presenta los tres tipos de descriptores, operaciones simples, operaciones compuestas y operaciones simples/operaciones compuestas.

Transición: explicitación de una relación como categoría, destaca el tratamiento y la consideración de un concepto matemático/propiedad matemática como transiciones; la primera apareciendo un total de 11 veces en los tipos de conversiones mientras que la segunda se presenta una única vez en el tipo ER5/RL6, los demás tipos no requieren de aspectos externos al enunciado del problema para obtener los datos requeridos para la solución del mismo. Reducción lexical por su parte, tiene únicamente 3 tratamientos, los demás tipos no consideran aspectos externos a la información presentada en el registro inicial.

Número de veces que aparece: esta subcategoría se presenta en la categoría reducción lexical y presenta los dos descriptores, 1V (una vez) y en su mayoría M1V (más de una vez) explicados anteriormente.

Cabe resaltar que existe un tipo de conversión ER6/RL10 que no presenta reducción lexical, es decir este tipo de conversiones no requieren de re designaciones de la incógnita para representar todos los datos expuestos en el enunciado de determinado problema, razón por la cual en ese apartado presenta la sigla NA (no aplica).

De donde se concluye que por existir diferentes tipos de estas conversiones, la frecuencia de los mismos es variada, razón por la cual no se obtienen porcentajes significativamente altos, sin embargo destacan los tipos ER4/RL6 y ER4/RL4 que presentan iguales descriptores en cuanto a la categoría de explicitación de una relación y en la categoría reducción lexical difieren en la forma de expresión en escritura algebraica y en el número de veces que aparece.

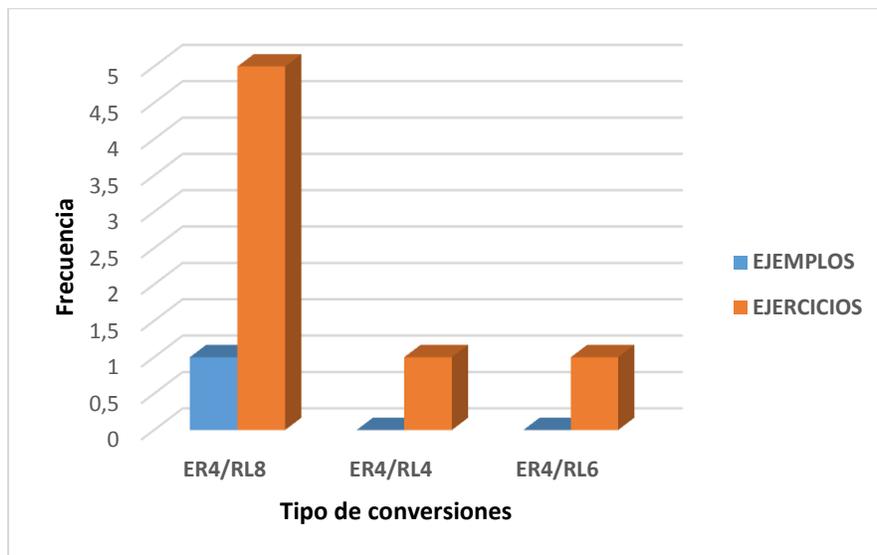
Finalmente, observando cuál de los tipos arriba expuestos tiene el mayor porcentaje, las conversiones no-congruentes simples no solo se caracterizan por ser las que presentan el porcentaje más alto en la que el libro de texto promueve la resolución de problemas con EPG, también caracterizan por la mayor variedad de conversiones posibles, el 34.44% del total de conversiones identificadas son de este tipo, del mismo modo, la conversión no congruente-compuesta presenta el 33.33% del total de las conversiones establecidas y posee un total de 30 tipos de conversiones un numero significativamente alto. De la misma manera, las conversiones no-congruentes presentan un numero variado de tipos razón por la cual, representa el 28.89% del total. Por el contrario, el tipo de conversión congruente representa apenas un 3.33%, es decir el libro de texto promueve en su mayoría y más de la mitad tareas que impliquen cierto grado de dificultad al momento de resolverlas y comprenderlas; mientras que las tareas que no generan dificultad alguna son escasamente consideradas.

3.3 Comparación entre ejemplos y ejercicios a partir del tipo de conversión promovido en ellos

En lo que sigue se analizarán y compararán los tipos de conversiones promovidos por el libro de texto tanto en ejemplos como en ejercicios al estudiar los problemas que involucran las EPG. Para ello, es necesario observar por separado las tareas que involucran los diferentes tipos de conversión establecidos en la sección anterior.

Ejemplos y ejercicios que involucran tipos de conversión congruentes: Como se enuncio anteriormente, este tipo de tareas se caracteriza por presentar los tres criterios de congruencia que Duval (1999) considera para el estudio de la conversión. Para este caso, se presentan tres tipos: ER4/RL4, ER4/RL6 y ER4/RL8 los cuales se consideran en 8 tareas de las 297 que el libro de texto promueve al estudiar las EPG.

En la gráfica 3.5 se presenta en detalle los ejemplos y ejercicios que promueven estos tipos de conversiones así como también el número de veces que se repiten.



Grafica 3.5. Tipo de conversión congruente. Ejemplos y ejercicios con su respectiva frecuencia.

Fuente. Este estudio

Los tipos de conversiones congruentes en ejemplos y ejercicios, en términos generales caracterizan por:

Frecuencia de los tipos de conversión: en cuanto a los ejemplos, el libro de texto promueve un único tipo de conversión el cual es ER4/RL8, que se repite una única vez; y representa el 12.5% del total de las tareas que se caracterizan por poseer un tipo de conversión congruente. Por su parte los ejercicios se caracterizan por presentar tres tipos de conversiones, la primera ER4/RL8 común en 5 tareas del libro de texto y representa el 62.5%; la segunda ER4/RL4 concurre con un porcentaje del 12.5% al igual que ER4/RL6 puesto que se presentan en una sola tarea y no se vuelven a repetir.

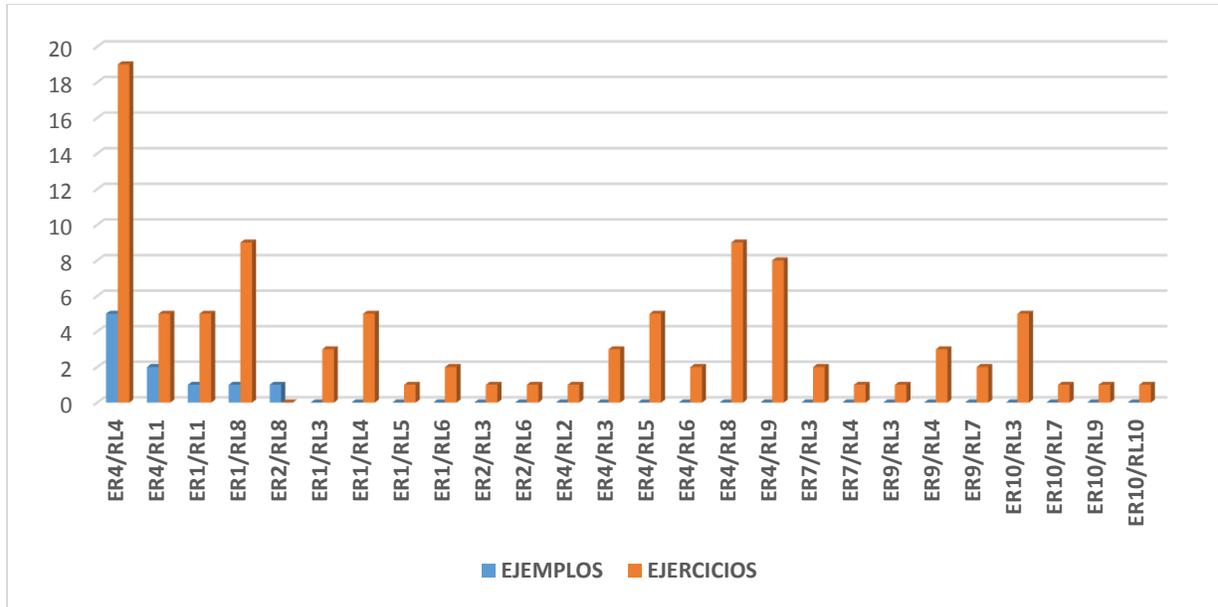
Tipos de conversión comunes y no comunes: los ejemplos presentan un tipo de conversión, mientras que los ejercicios promueven tres tipos, de los cuales ER4/RL8 es común en las tareas. Razón por la cual, se considera que los ejemplos son tomados como guía por parte de los estudiantes para lograr resolver los problemas planteados por el libro, una muestra de ello es el número de veces que este tipo de conversión es utilizado al intentar resolver los ejercicios que el libro de texto propone.

A pesar de esto, no es suficiente la presencia de un solo tipo de conversión en los ejemplos, porque además de él, en los ejercicios es necesario recurrir a otro tipo de conversiones (ER4/RL4 y ER4/RL6) que permitan comprender y resolver la problemática planteada. Lo que permite observar una falencia en las tareas que el libro propone, puesto que promueve conversiones que no se han ejemplificado lo que conlleva a que el estudiante no realice un correcto cambio de registro

Ejemplos y ejercicios que involucran tipos de conversión no-congruente: Como se enuncio anteriormente, este tipo de tareas se caracteriza por no presentar ninguno de los tres criterios de congruencia que Duval (1999) considera para el estudio de la conversión. Para este

caso, se presentan 26 tipos de conversiones; de los cuales tres han sido considerados en el análisis anterior (ER4/RL4, ER4/RL6 y ER4/RL8). Estas conversiones están presentes en 106 de las 297 tareas analizadas en esta investigación.

En la gráfica 3.6 se presenta en detalle los ejemplos y ejercicios que promueven estos tipos de conversiones así como también el número de veces que se repiten.



Grafica 3.6 Tipo de conversión no-congruente. Ejemplos y ejercicios con su respectiva frecuencia.

Fuente. Este estudio

Los tipos de conversiones no-congruente en ejemplos y ejercicios, en términos generales caracterizan por:

Frecuencia de los tipos de conversión: en los ejemplos, el libro de texto promueve 5 tipos de conversiones, los tipos ER1/RL1, ER1/RL8 y ER2/RL8 representa cada uno el 0.9% de las tareas que se caracterizan por poseer un tipo de conversión no-congruente; el tipo ER4/RL1 concurre con un 1.9% y finalmente el tipo ER4/RL4 está presente con el 4.7%. Lo que conlleva a concluir que el tipo de conversión no-congruente en ejemplos más promovido es este último, pues denota una diferencia significativa con respecto a la frecuencia en que es utilizado. Pues

tiene una repetición de 5 veces mientras que los tres primeros lo hacen una única vez y el cuarto 2 veces.

Por su parte, los ejercicios presentan 25 conversiones; los tipos ER1/RL5, ER2/RL3, ER2/RL6, ER4/RL2, ER7/RL4, ER9/RL3, ER10/RL7, ER10/RL9 y ER10/RL10 presentan el 0.9% del total de tareas que poseen tipo de conversión no-congruente. ER1/RL6, ER4/RL6, ER7/RL3 y ER9/RL7 concurren con el 1.9%; los tipos ER1/RL3, ER4/RL3 y ER9/RL4 representan el 2.8%. Con el 4.7% se encuentran ER1/RL1, ER1/RL4, ER4/RL1, ER4/RL5 y ER10/RL3; los tipos ER1/RL8 y ER4/RL8 representan el 8.5% y finalmente ER4/RL4 representa el 18% del total de tareas que consideran tipos de conversiones no-congruente.

Por lo anterior, se concluye que los ejercicios manejan diferentes tipos de conversiones razón por la cual la frecuencia con la que cada una de ellas aparece es escasa. De ahí que los porcentajes sean relativamente bajos, excepto el ultimo tipo ER4/RL4 quien presenta el porcentaje más alto con respecto a los demás tipos, pues este tipo se repite un total de 19 veces en esta clase de tareas. Los primeros nueve tipos tienen una frecuencia de una vez, los siguientes cuatro se presentan dos veces cada uno; los tres siguientes 3 veces; los cinco tipos siguientes 5 veces, el tipo que sigue 8 veces y los últimos dos 9 veces cada uno.

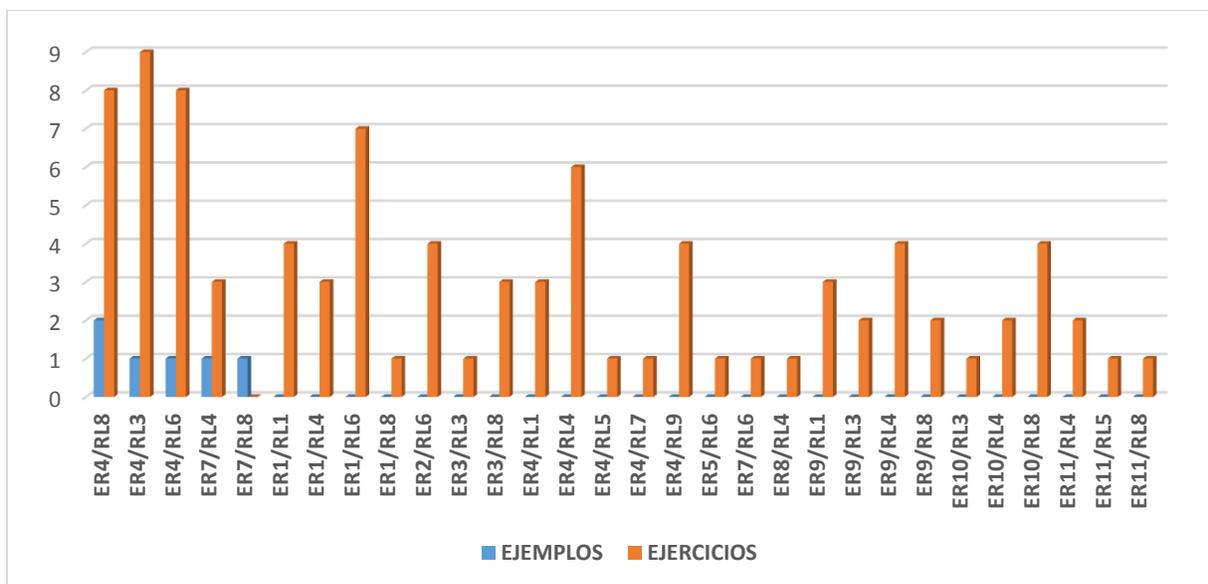
Tipos de conversión comunes y no comunes: los ejemplos presentan 5 tipos de conversiones mientras que los ejercicios promueven 25 tipos en total. Algunos de estos tipos son comunes a las tareas presentadas por el libro, como lo es el caso de los tipos ER1/RL1, ER1/RL8, ER4/RL1 y ER4/RL4, es decir los tipos de conversiones propuestos por los ejemplos son considerados para la resolución de ejercicios que el libro propone y sirven de guía para que el estudiante pueda resolverlos y comprenderlos; excepto el tipo ER2/RL8 pues este, no es promovido en los ejercicios de este tipo de conversiones.

Razón por la cual se concluye que el libro de texto propone guías para el desarrollo de los ejercicios -ejemplos- pero estos no son suficientes para resolver a cabalidad los problemas, muestra de ello es la presencia de 21 tipos de conversiones adicionales a las comunes entre ejemplos y ejercicios, para intentar resolver las problemáticas en cuestión. Por consiguiente el libro de texto establece ejercicios los cuales no han sido ejemplificados en su totalidad y a ello se debe la presencia de tipos de conversiones diferentes a los relacionados en los ejemplos. De la misma manera, el libro propone tipos de conversiones en los ejemplos, pero no se transmiten hacia los ejercicios tal es el caso del tipo ER2/RL8 quien aparece únicamente en ejemplos con una frecuencia de uno.

Ejemplos y ejercicios que involucran tipos de conversión no-congruente compuestas:

Como se enuncio anteriormente, este tipo de tareas se caracteriza por presentar dos de los tres criterios de congruencia que Duval (1999) considera para la conversión; ya sea univocidad semántica terminal y correspondencia semántica, o correspondencia semántica y conservación de orden o univocidad semántica terminal y conservación de orden. Para este caso, se presentan 30 tipos de conversiones; de los cuales 16 han sido considerados en los análisis anteriormente descritos (ER1/RL1, ER1/RL4, ER1/RL6, ER1/RL8, ER2/RL6, ER4/RL1, ER4RL3, ER4/RL4, ER4/RL5, ER4/RL6, ER4/RL8, ER4/RL9, ER7/RL4, ER9/RL3, ER9/RL4 y ER10/RL3). Estas conversiones están presentes en 97 de las 297 tareas analizadas en esta investigación.

En la gráfica 3.7 se presenta en detalle los ejemplos y ejercicios que promueven estos tipos de conversiones así como también el número de veces que se repiten.



Grafica 3.7 Tipo de conversión no-congruente compuestas. Ejemplos y ejercicios con su respectiva frecuencia.

Fuente. Este estudio

Los tipos de conversiones no-congruente compuestas en ejemplos y ejercicios, en términos generales caracterizan por:

Frecuencia de los tipos de conversión: los ejemplos promueven 5 tipos de conversiones. Los tipos ER4/RL3, ER4/RL6, ER7/RL4 y ER7/RL8 concurren con un porcentaje del 1%; mientras que ER4/RL8 se presenta con un porcentaje del 2.1%. Por consiguiente se concluye que el libro de texto a pesar de que promueva 5 tipos de conversiones estos tienen muy poca presencia en las tareas del libro de texto. Por esta razón, las frecuencias son tan bajas.

Por su parte, los ejercicios presentan 29 tipos de conversiones de los cuales el tipo ER4/RL3 representa el 9.3% de las tareas analizadas; los tipos ER4/RL6 y ER4/RL8 concurren con el 8.2%. El tipo ER1/RL6 presenta el 7.2% mientras que el tipo ER4/RL4 representa el 6.2%. Del mismo modo, con un porcentaje del 4.1% se presentan los tipos ER1/RL1, ER2/RL6, ER4/RL9, ER9/RL4 y ER10/RL8. Los tipos ER1/RL4, ER3/RL8, ER4/RL1, ER7/RL4 y ER9/RL1 concurren con un porcentaje del 3.1% mientras que los tipos ER9/RL3, ER9/RL8,

ER10/RL4, ER11/RL4 y ER1/RL8, ER3/RL3, ER4/RL5, ER4/RL7, ER5/RL6, ER7/RL6, ER8/RL4, ER10/RL3, ER11/RL5, ER11/RL8 representan el 2.1% y el 1% respectivamente.

De esta forma, se concluye que en los ejercicios el libro de texto promueve diferentes tipos de conversiones en donde las frecuencias con que aparecen varían considerablemente, clara muestra de ello son los diferentes porcentajes que cada una representa. En consecuencia, el tipo de conversión más promovido por el libro es el tipo ER4/RL3 pues se presenta un total de 9 veces en las tareas referentes a estos tipos de conversión; a diferencia de los demás que se presentan con una frecuencia baja y por consecuencia son poco empleados en las tareas que el libro de texto propone.

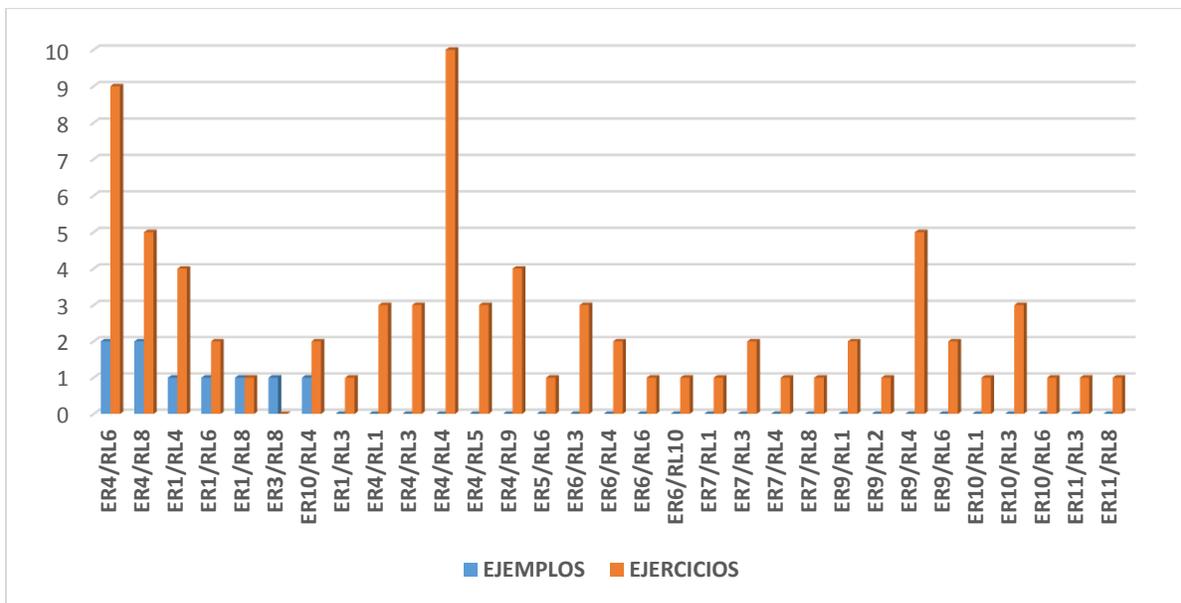
Tipos de conversión comunes y no comunes: los ejemplos presentan 5 tipos de conversiones mientras que los ejercicios presentan 29, de los cuales 4 son comunes: ER4/RL8, ER4/RL3, ER4/RL6 y ER7/RL4, y por ello se deduce que los tipos de conversiones promovidos por los ejemplos son considerados para la resolución de los ejercicios que el mismo propone. De los tipos que los ejemplos promueven, el que presenta mayor frecuencia en los ejercicios es el tipo ER4/RL3 seguido de los tipos ER4/RL6 y ER4/RL8, es decir, algunos de los ejercicios propuestos por el libro de texto requieren que se resuelven por replica, ya que el desarrollo de este tipo de actividades exige proceder de igual manera evidenciada en los ejemplos o definiciones abordadas anteriormente.

Sin embargo, los ejemplos con sus respectivos tipos de conversiones no son suficientes para abordar toda la problemática que el libro de texto presenta, pues esto se evidencia en la aparición de tipos de conversión adicionales a ellos, es decir el libro expone diferentes ejercicios que no han sido ejemplificados en su totalidad y como consecuencia de ello, los estudiantes presentan diferentes dificultades tanto al comprenderlos como al intentar resolverlos. De igual forma, el libro promueve el tipo de conversión ER7/RL8 en los ejemplos pero no trasciende hasta

los ejercicios, lo cual, se convierte en una justificación del porque los tipos de conversiones para las tareas aquí analizadas son en su mayoría diferentes y presentan porcentajes bajos.

Ejemplos y ejercicios que involucran tipos de conversión no-congruente simples: Como se enuncio anteriormente, este tipo de tareas se caracteriza por presentar uno de los tres criterios de congruencia que Duval (1999) considera para la conversión; ya sea univocidad semántica terminal ó correspondencia semántica ó conservación de orden. Para este caso, se presentan 31 tipos de conversiones; de los cuales la mayoría ya han sido considerados en los análisis anteriores, excepto los tipos ER6/RL3, ER6/RL4, ER6/RL6, ER6/RL10, ER7/RL1, ER9/RL2, ER9/RL6, ER10/RL1, ER10/RL6 y ER11/RL3. Estas conversiones están presentes en 86 de las 297 tareas analizadas en esta investigación.

En la gráfica 3.8 se presenta en detalle los ejemplos y ejercicios que promueven estos tipos de conversiones así como también el número de veces que se repiten.



Grafica 3.8 Tipo de conversión no-congruente simples. Ejemplos y ejercicios con su respectiva frecuencia.

Fuente. Este estudio

Los tipos de conversiones no-congruente simples en ejemplos y ejercicios, en términos generales caracterizan por:

Frecuencia de los tipos de conversión: en los ejemplos, el libro de texto promueve 7 tipos de conversiones, los tipos ER1/RL4, ER1/RL6, ER1/RL8, ER3/RL8 y ER10/RL4 representa cada uno el 1.16% de las tareas que se caracterizan por poseer un tipo de conversión no-congruente simple; y los tipos ER4/RL6 y ER4/RL8 concurre con un porcentaje del 2.33%. De donde se concluye que el libro de texto presenta por única vez el ejemplo con su respectivo tipo de conversión para los seis tipos de conversiones primeros, mientras que los últimos dos presentan cada uno dos ejemplos de cada tipo.

Por su parte, los ejercicios presentan 30 conversiones; los tipos ER1/RL3, ER1/RL8, ER5/RL6, ER6/RL6, ER6/RL10, ER7/RL1, ER7/RL4, ER7/RL8, ER9/RL2, ER10/RL1 ER10/RL6, ER11/RL3 y ER11/RL8 presentan el 1.16% del total de tareas que poseen tipo de conversión no-congruente simples; ER1/RL6, ER6/RL4, ER7/RL3, ER9/RL1, ER9/RL6 y ER10/RL4 concurren con el 2.33%; los tipos ER4/RL1, ER4/RL3, ER4/RL5, ER6/RL3 y ER10/RL3 representan el 3.49%. Con el 4.65% se encuentran ER1/RL4 y ER4/RL9; los tipos ER4/RL8 y ER9/RL4 presentan el 5.81% y finalmente los tipos ER4/RL6 y ER4/RL4 representan el 10.5%, 11.6% respectivamente.

Por lo anterior, se concluye que los ejercicios manejan diferentes tipos de conversiones razón por la cual, en los primeros tipos enunciados en el párrafo anterior presentan una frecuencia baja, excepto los últimos dos tipos que destacan de los demás por presentar porcentajes que representan una diferencia significativa con respecto al total.

Tipos de conversión comunes y no comunes: los ejemplos presentan 7 tipos de conversiones mientras que los ejercicios promueven 30 tipos en total. Algunos de estos tipos son comunes a las tareas presentadas por el libro, como lo es el caso de los tipos ER1/RL4, ER1/RL6,

ER1/RL8, ER4/RL6, ER4/RL8 y ER10/RL4, es decir los tipos de conversiones propuestos por los ejemplos son considerados para la resolución de ejercicios que el libro propone y sirven de guía para que el estudiante pueda resolverlos y comprenderlos; excepto el tipo ER3/RL8 pues este, no es promovido en los ejercicios de este tipo de conversiones.

Razón por la cual se concluye que el libro de texto propone guías para el desarrollo de los ejercicios -ejemplos- pero estos no son suficientes para resolver a cabalidad los problemas, muestra de ello es la presencia de 24 tipos de conversiones adicionales a las comunes entre ejemplos y ejercicios, para intentar resolver las problemáticas en cuestión. Por consiguiente el libro de texto establece ejercicios los cuales no han sido ejemplificados en su totalidad y a ello se debe la presencia de tipos de conversiones diferentes a los relacionados en los ejemplos. De la misma manera, el libro propone tipos de conversiones en los ejemplos, pero no se transmiten hacia los ejercicios tal es el caso del tipo ER3/RL8 quien aparece únicamente en ejemplos con una frecuencia de uno.

En síntesis, a pesar de que el libro de texto promueva tipos de conversión congruente, estos son escasos con respecto al número de tipos de conversiones no-congruente, no-congruente compuesta y simple que presentan. Puesto en su mayoría y más de la mitad de tareas presentan estos tipos de conversiones, las cuales aluden a de niveles de complejidad altos, puesto que no cumplen los tres criterios que Duval (1999) enuncia para el estudio de la conversión de registros de representación.

Con respecto a los tipos de conversiones promovidos por el libro y la forma en como ellos aparecen, el 79.59% de ellos se repiten en las tareas de los distintos niveles de complejidad establecidos. Tal es el caso del tipo ER4/RL4 quien está presente en los tipos de conversiones congruente, no-congruente, no-congruente compuesta y no-congruente simple, por ende el libro suscita todos estos tipos independientemente del ejemplo o ejercicio estudiado. En otras palabras,

no es consecuente con los ejercicios propuestos a partir de los ejemplos desarrollados anteriormente a la galería de los mismos, ya que se considera que los ejemplos presentados de esta forma sirven de guía para la resolución de los ejercicios propuestos a partir de ellos, de ser posible intentar resolverlos por replica observando el método empleado para realizar el paso de un registro a otro teniendo en cuenta toda la información que presenta el problema en cuestión. En esta medida, algunos ejemplos sirven de guía para que el estudiante logre comprender e intentar resolver el problema; sin embargo se quedan escasos teniendo en cuenta el considerable número de ejercicios que él propone después de la presentación de dos o tres ejemplos de un determinado problema que involucre las EPG.

De la misma manera, el libro propone tipos de conversión en los ejemplos, los cuales no se siguen estudiando en los ejercicios lo que conlleva por una parte, que los estudiantes se guíen erróneamente en ese tipo de conversión que promueve el ejemplo, pero que en el ejercicio no obtendrá un resultado satisfactorio; y por otra parte, que los estudiantes busquen otras posibles soluciones a los mismos incrementando el tipo de conversiones posibles así como también aumenten los niveles de dificultad que involucran estos problemas al estudiar el paso del registro de la lengua natural a la escritura algebraica.

CONCLUSIONES

En lo que sigue, se presentan las conclusiones obtenidas a partir del desarrollo de esta investigación. Se divide en cuatro apartados, el primero considera en qué medida han sido alcanzados los objetivos que se plantearon al inicio de este trabajo; el segundo las hipótesis de investigación establecidas en torno a los resultados alcanzados en los estudios que conforman la investigación; en el tercero, las implicaciones pedagógicas en cuanto al diseño de libros de texto y en el último los productos obtenidos a partir de la investigación.

Consecución de los objetivos de la investigación:

En este apartado, se analizará el cumplimiento de cada uno de los objetivos propuestos en la investigación,

Objetivo 1: Diseñar un instrumento metodológico que caracterice las conversiones que con mayor frecuencia aparecen en un libro de texto al tratar las EPG.

En el capítulo 2, apartado 2.4.5 se discrimina el proceso por medio del cual se diseñó el instrumento de análisis considerado para el desarrollo de esta investigación, obteniendo un total de tres categorías, explicitación de una relación, reducción lexical y congruencia/no-congruencia; la forma en cómo se presentan los criterios de congruencia nos permitieron clasificar los tipos de conversiones que promueven los libros de texto, mientras que las dos primeras categorías, hicieron posible la caracterización de estos tipos de conversión que subyacen a cada tarea analizada.

Como una segunda parte, en el apartado 2.4.4 se definieron, caracterizaron y ejemplificaron los elementos constitutivos definitivos para el estudio de la conversión, considerados por el libro de texto al tratar las EPG. La categoría explicitación de una relación presenta tres subcategorías, reducción lexical cuatro subcategorías y congruencia/no-congruencia

tres subcategorías. Según la forma como se articulan los descriptores que cada una de las subcategorías del instrumento de análisis posee, se detectaron 49 tipos de conversiones, que fueron agrupados en cuatro grupos teniendo en cuenta los niveles de complejidad semiótica que la categoría congruencia/no-congruencia presenta, conversiones congruentes, conversiones no-congruentes, conversiones no-congruente compuestas y conversiones no-congruente simples, definidas en el capítulo 3, apartado 3.1. Las conversiones congruentes destacan por promover tres criterios, univocidad semántica terminal, correspondencia semántica y conservación de orden, que Duval (1999) considera para el estudio de la conversión; mientras que las que contemplan conversiones no-congruentes, no-congruente compuestas y no-congruente simples promueven algunos o ninguno de estos tres criterios.

Objetivo 2: Caracterizar según el nivel de complejidad los tipos de conversión que se suscitan al estudiar los problemas que involucran las EPG.

En el capítulo 3, apartado 3.2 se caracteriza los tipos de conversiones según el nivel de complejidad que promueven. Las conversiones congruentes se distinguen por generar el menor nivel de complejidad para los estudiantes al momento de realizar el cambio de registro de representación, pues emplea un lenguaje claro, coherente y organizado al momento de presentar toda la información necesaria para obtener la ecuación que representa la misma. De esta forma, los estudiantes no necesitan de una guía adicional como la del educador o la del mismo libro, ya que la forma como el contenido es presentado guía de manera adecuada al usuario para que logre plantear la ecuación de la problemática en cuestión.

Por su parte, las conversiones no-congruentes destacan por generar el mayor nivel de complejidad en los estudiantes ya que al no presentar ninguno de los tres criterios considerados para la conversión (Duval, 1999), la información es confusa y desorganizada, lo cual conlleva a

que el estudiante necesite de guías adicionales a las que el libro posee con el fin de realizar un correcto cambio de registro y de esta forma llegar a la ecuación correcta que representa la información expuesta.

Del mismo modo, las conversiones no-congruente compuestas se caracterizan por presentar la información un poco más detallada que la anterior, debido a que esta considera dos de los tres criterios planteados por Duval (1999) para efectuar el cambio de registro de representación de una información. En este sentido, el estudiante requiere de una guía adicional que puede ser un educador o un ejemplo que lleve el mismo esquema de solución que el ejercicio propuesto.

Finalmente, las conversiones no-congruente simples distinguen por involucrar un alto nivel de complejidad similar al tipo no-congruente, pues en este caso únicamente se cumple uno de los tres criterios establecidos para el estudio de la congruencia en el cambio de registro de representaciones; razón por la cual el estudiante además de los ejemplos que el libro de texto presenta, necesita de la guía del educador con el fin de discriminar todos los datos inmersos en el enunciado del problema para obtener la ecuación del mismo y de esta manera obtener un correcto cambio de registro.

Más de la mitad de las tareas son de un nivel de complejidad alto en consecuencia se deben buscar estrategias que permitan reflexionar sobre las tareas no-congruentes, pues la forma en como es presentada la información en el enunciado, podría ser considerada la primera causa de la problemática de la iniciación del álgebra en el colegio, pues como lo afirma Rojas (2010).

Son varios los problemas asociados con la iniciación al álgebra escolar, algunas de cuyas manifestaciones, pueden ser referidas a aspectos generales que, según Kieran (1989), estarían relacionadas con:

- ✓ El cambio de convenciones respecto del referente aritmético

- ✓ La interpretación de las letras y
- ✓ El reconocimiento y uso de estructuras

Pues, cuando el estudiante inicia el estudio del álgebra, el acercamiento más tradicional empieza por enseñar la sintaxis algebraica, haciendo énfasis en aspectos manipulativos. Se empieza por enseñar las expresiones, las ecuaciones y las manipulaciones en ellas para terminar con la resolución de problemas, vistos más como la posibilidad de aplicación de las reglas sintácticas. (González, 2013:2). En el acercamiento al conocimiento de esta área, el primer inconveniente por parte de los estudiantes es reconocer la información que va a ser designada por una letra que representa la cantidad desconocida del problema, esto debido a que el usuario del libro de texto cuando lee la información presentada por el enunciado, designa como incógnita al primer dato que aparece en la información, un problema relativamente común, pues la mayoría de los enunciados que involucran la resolución de problemas con EPG presentan la información de una manera desorganizada, razón por la cual es necesario leer detenidamente el problema, con el fin de identificar que dato es el desconocido y cuales depende de él, para obtener correctamente la designación de la variable como incógnita. Pues Ochoviet y Oktac (2011), consideran que hay ciertos aspectos básicos que caracterizan su comprensión. Por ejemplo, es necesario reconocer en una situación problema o ecuación, la presencia de algo desconocido que puede ser determinado usando como información la que presenta en la ecuación o en el problema. Para ello, será necesario ser capaz de representar entidades desconocidas de manera simbólica y plantear expresiones algebraicas para describan las relaciones entre los datos dados. De esta manera, es necesario que el estudiante tenga la capacidad de discriminar todos los datos presentes en la información, pues las tareas propuestas por el libro de texto son variadas y complejas, lo que involucra que generalmente los usuarios del libro de texto se equivoquen en una simple escogencia del dato que representa la incógnita.

Por otra parte; el libro de texto analizado promueve diferentes tipos de conversiones, algunos de ellos son comunes en ejemplos y ejercicios, sin embargo existen tipos que se promueven en los ejemplos pero no se extienden a los ejercicios es decir el libro presenta un esquema que se supondría debería seguir utilizando, pero este no es el caso ya que lo promueve una única vez y por consiguiente los tipos de conversiones en ejercicios aumenta, esto debido a que los ejercicios propuestos presentan esquemas diferentes para su resolución y por ende involucran la consideración de tipos de conversión considerados o no en los ejemplos expuestos antes de cada galería de ejercicios.

Objetivo 3: Validar el instrumento metodológico diseñado.

En el capítulo 2, apartado 2.4.6, se presentan los pasos para la validación del instrumento. Se consideraron tres evaluadores, dos de ellos usuarios del libro de texto en estudio y el otro un especialista en el campo de la educación matemática; quienes analizaron la coherencia de las categorías establecidas en el instrumento así como también realizaron una prueba piloto de codificación con tres tareas del libro de texto seleccionadas teniendo en cuenta los niveles de complejidad que cada una presenta.

El instrumento de análisis en cuestión considera tres categorías que a su vez requieren de subcategorías y descriptores para tipificar cada una de ellas, por esta razón la lectura, comprensión y el lugar en donde cada uno de los descriptores se presenta genero cierto grado de dificultad, pues el trabajar con el registro de lengua natural involucra diferentes puntos de vista e interpretaciones a la información presentada por los problemas en cuestión. En esta medida, las subcategorías que involucraban formas de expresión de este registro así como el tratamiento en él, presentaron desacuerdo entre los investigadores y los evaluadores, ya que el enunciado en la mayoría de ocasiones es desorganizado al presentar la información lo que conlleva por un lado,

que se tome algunos datos de él pero no todos y por otro a considerar fragmentos de la información erróneos para establecer la correspondencia entre ellos y la escritura algebraica. Razón por la cual, fue necesario aclarar cuál es la diferencia entre la primera y segunda categoría. Pues la primera como su nombre lo indica explicitación de una relación alude a la relación global o envolvente que permite abarcar toda la información del enunciado, la relación general que involucra todas las relaciones más pequeñas inmersas en la información; mientras que la segunda, reducción lexical permite discriminar uno a uno los datos en donde ha sido necesario hacer nuevamente uso de la incógnita (quien previamente ha sido designada para representar el objeto principal de ese enunciado) para designar objetos completamente diferentes.

Con relación a la tercera categoría congruencia/no-congruencia, los evaluadores manifestaron que es un poco complejo entender de entrada la terminología que Raymond Duval emplea, sin embargo al leer detenidamente las definiciones de los tres criterios considerados y la ejemplificación de cada uno de ellos, no presentan mayor diferencia entre los puntos de vista de los evaluadores y el de los diseñadores, pues comprenden claramente cuando un enunciado presenta correspondencia univoca entre las unidades significantes de cada registro y el orden en que el enunciado es presentado con el fin de guiar al usuario a obtener la ecuación que modela el problema en cuestión.

Objetivo 4: Aplicar el instrumento metodológico a las tareas donde un libro de texto promueve el estudio de las EPG.

En cuanto a la aplicación del instrumento de análisis propuesto en esta investigación, el libro considerado para este hecho es el álgebra de Baldor, por ser uno de los textos escolares usados con mayor frecuencia tanto por estudiantes como por profesores al iniciar el estudio del álgebra, pues presenta un sinnúmero de ejemplos y ejercicios que permiten de cierta manera

fortalecer al estudiante en procesos mecánicos para la solución de problemas matemáticos de diversos tópicos; como lo es el caso de las EPG.

Al aplicar el instrumento diseñado a capítulos donde implícita o explícitamente se relaciona el tópico de la resolución de EPG se observa que promueve diferentes tipos de tareas. En cuanto a las formas de expresión que suscita, destacan las proposiciones y frases; estas últimas tanto para dar a conocer la relación que permite involucrar todos los datos de la información como también para aludir a las relaciones pequeñas, es decir a las re designaciones de la incógnita necesarias para referenciar objetos diferentes al designado inicialmente; mientras que las proposiciones se consideran cuando el enunciado no es claro al presentar la información y como consecuencia de ello es necesario abarcarlo todo, con el fin de evitar que algún dato se quede por fuera de la ecuación. En cuanto a las formas de expresión en escritura algebraica las tareas propuestas por el libro son ricas en operaciones pues presenta una infinidad de problemas, en donde consideran desde operaciones simples –básicas-, hasta operaciones que involucran a la vez las cuatro operaciones básicas.

Lo que es considerado una ventaja para el estudiante ya que entre más operaciones se usen en una misma tarea, conlleva a fomentar una habilidad para el reconocimiento de las operaciones aritméticas así como también permite desarrollar el razonamiento y manejo de un orden al establecer correspondencia entre la información presentada en el registro inicial con la del registro final. Aspectos importantes en la iniciación del álgebra que favorecen la comprensión de conceptos para futuros cursos de matemáticas.

Hipótesis de investigación:

En este apartado analizaremos las hipótesis de investigación establecidas en torno a los resultados alcanzados en los estudios que conforman la investigación.

Hipótesis 1: Existen diferencias significativas en cómo los libros de texto de álgebra promueven conversión al considerar las EPG.

Hemos visto que el libro de texto promueve de distinta forma la actividad cognitiva de la conversión, pues se consideran 49 tipos para un total de 297 tareas, de los cuales en su mayoría son considerados nuevamente para tipificar el tipo de conversión que una determinada tarea promueve, pues los diferentes tipos de conversión establecidos se presentan en las conversiones agrupadas por los niveles de complejidad que poseen. La principal diferencia entre estos tipos de conversión, independientemente del nivel de complejidad donde se encuentren, está en el tipo de transición que el enunciado requiera, pues, por un lado y en algunas ocasiones, es necesario parafrasear el registro inicial con el fin de esclarecer la información que este presenta y por otro se hace necesario recurrir a conceptos o propiedades matemáticas externas al enunciado que permitan obtener la ecuación del problema.

Hipótesis 2: Los libros de álgebra promueven altos niveles de congruencia en las conversiones que movilizan al promover el estudio de las EPG.

Con el análisis realizado a un libro de texto, se ha constatado que en primera instancia el libro posee escasamente un porcentaje del 3.33% en lo que a conversiones congruentes se trata, es decir en donde se consideran los tres criterios, univocidad semántica terminal, correspondencia semántica y conservación de orden y donde no se presenta mayor dificultad por parte de los estudiantes al momento de efectuar cambios de registro de representación, en este caso del registro de la lengua natural a la escritura algebraica.

En segunda instancia, la mayoría de las tareas propuestas por el libro considerado, promueven niveles de congruencia bajos pues el 96.67% lo caracteriza ya que no presentan simultáneamente los tres criterios de congruencia descritos por Duval (1999) y como consecuencia de ello promueven diferentes dificultades por parte de los estudiantes al momento de intentar comprender y resolver las tareas que el libro presenta.

Hipótesis 3: Existen diferencias entre los tipos de conversiones que promueven los ejemplos y ejercicios al estudiar las EPG.

Se ha constatado que algunos tipos de conversiones promovidos por el libro de texto difieren de los empleados en los ejemplos y en los ejercicios, esto debido a que existen tipos de conversión presentes en ejemplos pero solo se quedan hasta allí, es decir, no trascienden hasta los ejercicios y como consecuencia de ello, al momento de resolverlos, los tipos de conversión expuestos en los ejemplos no son suficientes para abarcar la cantidad de ejercicios que el libro propone. Razón por la cual se presentan tipos de conversiones que se promueven en los ejercicios pero no en los ejemplos. Lo que indica que en algunas ocasiones los ejemplos propuestos por el libro no sean considerados como guía que permita resolver los ejercicios propuestos para que el usuario del libro de texto solucione, conllevando a que se requiera de una guía adicional como la del educador para el estudiante logre comprender la tarea y de esta forma lograr el cambio de registro.

Implicaciones pedagógicas, docentes y de diseño de libros de texto:

Para los grupos de profesionales que diseñan los libros de texto y programas de formación docente es importante enfatizar que los estudiantes desarrollan conversiones poco económicas y engorrosas, las que determinan planteamientos de ecuaciones erróneos e incompletos. Esto nos lleva a considerar que los libros de texto constituyan un importante recurso para desarrollar la

conversión y la comprensión de la resolución de problemas que involucren las EPG. Pues el cambio de registro de representación no debe considerarse como una simple traducción de la lengua natural a letras que representan variables, en este caso incógnitas en la escritura algebraica.

A través de los “libros guía” diseñados para los profesores y de las temáticas abordadas en los programas de formación debería enfatizarse no solo la importancia de la conversión en matemáticas, sino también considerar los tópicos donde es posible su desarrollo así como las posibilidades y los limitantes que introducen la caracterización de los niveles de complejidad (congruencia/no-congruencia) estudiados en esta investigación. Pues como lo afirma Duval (1999) para comprensión de algo, sea un texto o un esquema, se movilizan ya sea actividades de conversión y de formación o bien las tres actividades cognitivas.

En particular, sería aconsejable que se reflexionara, en torno a,

- Los niveles de complejidad (congruencia/no-congruencia): la forma como los libros de texto los incluyen de un tópico a otro promueven que la conversión sea desarrollada pero de manera restringida, pues al considerar cambios de registros de representaciones no-congruentes, inducen al estudiante a cometer errores en este pasaje y como consecuencia generar dificultades no solo en el cambio de registro de la lengua natural al de la escritura algebraica, sino también al intentar realizar conversiones que involucren otros registros de representación. Por tanto, se debe propiciar el diseño de nuevas tareas en donde la información presentada en el enunciado conserve un orden que guíe de cierta manera al estudiante a observar todos los datos inmersos allí, así como también permita establecer las correspondencias univocas entre los datos del registro inicial y el final con el fin de promover el cumplimiento de los tres criterios de congruencia que Duval (1999) enuncia y de esta manera obtener correctos cambios de registro y por ende ecuaciones correctas que permitan modelar las tareas en cuestión.

- La manera en como la información es presentada en las tareas: pues en algunas ocasiones es necesario utilizar representaciones intermedias que permitan esclarecer la forma en cómo se presentan las cantidades conocidas y desconocidas en el enunciado, ya que en las tareas propuestas por el libro de texto, es necesario utilizar de conceptos externos al registro para obtener la ecuación del problema.

- Los tipos de conversión promovidos por los ejemplos: ya que algunos de estos tipos solo se promueven en ellos más no en ejercicios. Por esta razón se deberían suscitar tipos de conversiones que estén presentes en estos dos tipos de tareas con el fin de que los ejemplos presentados por el libro de texto antes de la galería de ejercicios se conviertan en guías que permitan asesorar al estudiante a resolverlos y por ende lograr adecuados cambios de registros de representación.

Sólo a través de consideraciones como las anteriormente referenciadas es posible que los docentes puedan seleccionar algunas tareas en detrimento de otras, adaptarlas según el propósito de la clase o diseñar otras e intervenir de forma efectiva cuando los estudiantes las realicen. Es de esta manera que la resolución de problemas que involucran las EPG expuestas por el libro de texto y explicitado en el aula de clase podría promover de manera efectiva la conversión de representaciones no solo en este tópico sino en otros que involucren cambios de registro de representación. En este sentido, la determinación de los niveles de complejidad, las formas de expresión del registro de la lengua natural y el de la escritura algebraica y los tipos de transición considerados son una herramienta importante a considerar tanto por los diseñadores de libros como por los formadores de profesores e incluso por los mismos profesores.

Productos de la investigación:

Erazo, L., Marmolejo, G., Muñoz, C. (2013). La conversión en la resolución de ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita. Un análisis semiótico de libros de texto. *14°*

Encuentro Colombiano de Matemática Educativa ECME-14, 9-11 Octubre. Universidad del Atlántico, Barranquilla.

Erazo, L., Marmolejo, G., Muñoz, C. (2014). La conversión en el tratamiento de las ecuaciones de primer grado. Caracterización de un texto escolar colombiano. *VI Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas*, 7-9 Mayo. Universidad de Medellín, Medellín, Antioquia.

Erazo, L., Marmolejo, G., Muñoz, C. (2013). La conversión, textos escolares y ecuaciones de grado uno. *V Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas*, 8-10 Mayo. Universidad de Medellín, Medellín, Antioquia.

Erazo, L., Marmolejo, G., Muñoz, C. (2013). La conversión en la resolución de ecuaciones lineales de primer grado con una incógnita. Un análisis semiótico de libros de texto. *Revista científica, edición especial*. Recuperado desde:

[http://asocolme.org/images/eventos/14/ECME_14_Revista_Cientifica_EdicionEspecial -
_Memorias_ECME_14.pdf](http://asocolme.org/images/eventos/14/ECME_14_Revista_Cientifica_EdicionEspecial_-_Memorias_ECME_14.pdf)

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Acevedo y Falk. (1997). *Recorriendo el álgebra: de la solución de ecuaciones al álgebra abstracta*. Bogotá: Ed. Colciencias.
- Arenas, B. (2013). *Las ecuaciones lineales, desde situaciones cotidianas*. Medellín: Tesis de maestría. Universidad Nacional de Colombia.
- Azarquiel, G. (1993). *Ideas y actividades para enseñar álgebra. Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Bogotá: Ed. Síntesis.
- Aznar, A., Diestefano, L., Figueroa, S., Moler, E. (2010). *Análisis de conversiones entre representaciones semióticas de números complejos*. Argentina: III REPEM.
- Benítez, P., Alma, A. (2010). *Estudio numérico de la gráfica para construir su expresión algebraica. El caso de los polinomios de grados 2 y 3*. Distrito Federal México: Redalyc.
- Bernal, R., Mecías, D., Maldonado, L., Rodríguez, G., Serrano, E. (2007). *Contraste de efectos de la representación verbal, formal y diagramática en la solución de problemas en matemáticas. Matemáticas: Enseñanza de las matemáticas*. Cali: Universidad del valle.
- Bruno, A. y Cabrera, N. (2006). *La recta numérica en los libros de texto en España*. España: Educación Matemática.
- Buendía, G. (2012). *El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores*. Distrito Federal México: Redalyc.
- Castellanos, M., Obando, J. (2009). *Errores y dificultades en procesos de representación: el caos de la generalización y el razonamiento algebraico*. Pasto, Colombia: Comunicación presentada en 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). *Significado de la medida en los libros de texto de secundaria*.

Bogotá: Enseñanza de las Ciencias.

Córdoba, R. (2008). *Análisis semiótico de la función lineal en el álgebra de Baldor*. Pasto: s.n.

Tesis de Pregrado. Universidad de Nariño.

Cortez, C. et al. (2001). *Real Academia Española. Diccionario de la lengua española*. (22.ed.).

Madrid, España: s.n.

Cosci, C., May, G., Esperanza, J., Echevarría, G y Simunovich, R. (2010). *Continuidad*.

Conversión entre registros. Santa Rosa, La Pampa, Argentina: III REPEM-Memorias.

Dormolen, V. (1986). *Textual Análisis*. En B. Christiansen, A.G. Howson y M. Otte (Eds.).

Perspectives on Mathematics Education. Dordrecht. Netherlands: Reidel.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. *Registros semióticos y aprendizaje*

intelectuales. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Colombia: Artes Gráficas Univalle.

_____. (2001). *Los Problemas Fundamentales en el Aprendizaje de las Matemáticas y las*

Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo. Traducción realizada por Myriam Vega Restrepo. Colombia: Artes Gráficas Univalle.

_____. (2002). *L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des*

objets. EEUU: Actes des Séminaires SFIDA 13-16 (IV), IREM, Nice.

_____. (2006). *Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el*

registro de representación. EEUU: La Gaceta de la RSME.

Emmanuele, D., Gonzalez, M.I., Introcaso, B. y Braccialarghe, D. (2010). *Análisis de libros de*

cálculo en carreras de ingeniería. Su relación con los cambios sociopolíticos en Argentina. Argentina: Educación Matemática.

- Fuson, K. y Li, Y. (2009). *Cross-cultural issues in linguistic, visual-quantitative, and written-numeric supports for mathematical thinking*. ZDM. EEUU: The International Journal on Mathematics Education.
- García, A. y García, J.A. (2007). *Statistical inference in textbooks: mathematical and everyday contexts*. En J.H. Woo, H.C. Lew, K.S. Park y D.Y. EEUU: Proceeding of the 31 Conference of the International Group for the psychology of Mathematics Education.
- González, A. (2013). *Iniciación al álgebra: reporte de una experiencia de aula*. En I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Santo Domingo: República Dominicana. Recuperado en: <http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/471-541-1-DR-P.pdf>
- González, M.T. (2002). *Sistemas simbólicos de representación en la enseñanza del análisis matemático: perspectiva histórica acerca de los puntos críticos*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Salamanca.
- Huntley, M., Terrell, M. (2014). *One-step and multi-step linear equations: a content analysis of five textbook series*. ZDM. EEUU: The international Journal on Mathematics Education.
- Jupri, A., Williams, G. (2014). *Optimistic problem-solving activity: enacting confidence, persistence, and perseverance*. ZDM. EEUU: The international Journal on Mathematics Education.
- Konic, P, Godino, J. y Rivas, M. (2010). *Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto*. Numeros.74. Bogotá: s.n.
- Labraña, A., et al. (1995). *Álgebra lineal: Resolución de sistemas lineales*. Bogotá: Ed. Síntesis
- Lémonidis, C. (1991). *Analyse et réalisation d'une expérience d'enseignement de homothétie*. EEUU: Recherches en Didactique des Mathématiques.

- Li, Y. (2000). *A comparison of problems that follow selected content presentations in American and Chinese mathematics textbooks*. EEUU : Journal for Research in Mathematics Education 31 (2).
- Li, Y. Chen, X, An, S. (2009). *Conceptualizing and organizing content for teaching and learning in selected Chinese, Japanese and US mathematics textbooks: the case of fraction division*. ZDM. EEUU : The International Journal on Mathematics Education.
- Lithner, J. (2004). *Mathematical reasoning in calculus textbook exercises*. EEUU : Journal of Mathematical Behavior.
- Marmolejo, G. y González, M.T. (2011). *La visualización en la construcción del área de superficies planas en la educación básica. Un instrumento de Análisis de libros de texto*. Conferencia presentada en Asocolme 12.
- Marmolejo, G. y Vega, M. (2012). *La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje*. Distrito Federal México: Redalyc.
- Marmolejo, G.A. y González, M.T. (2013A). *Función de la visualización en la construcción del área de figuras bidimensionales. Una metodología de análisis y su aplicación a un libro de texto*. En: Revista Integración, 31(1).
- Marmolejo, G. Y González, M.T. (2013B). *Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares*. Distrito Federal México: Redalyc. 25(3).
- Marmolejo, G. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles*. Tesis doctoral. Universidad de Salamanca

- Martínez, C. y Penalba, M.C. (2006). *Proceso de simbolización del concepto de potencia: análisis de libros de texto de secundaria*. Bogotá: Enseñanza de las ciencias.
- Martínez, F., Sáez, S. (2013). *Los sistemas de ecuaciones en el bachillerato*. En: Revista de didáctica de las matemáticas. Vol. 85.
- Maz, A. y Rico, L. (2007). *Situaciones asociadas a los números negativos en textos de matemáticas españoles de los siglos XVIII y XIX*. PNA. 1(3).
- Medina, P., Mercedes, M. (1999). *La adquisición del lenguaje algebraico: reflexiones de una investigación*. En: Revista de didáctica de las matemáticas.
- Ministerio de Educación Nacional (1988). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá: MEN.
- Ochoviet, C., Oktac, A. (2011). *Algunos aspectos del desarrollo del pensamiento algebraico: el concepto de raíz y de variable en ecuaciones polinómicas de segundo grado. Un estudio de casos realizado con estudiantes uruguayos de enseñanza secundaria*. México: Educación matemática, 23(3). Recuperado de: http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-58262011000300005&script=sci_arttex
- Ospina, M.A. y Salgado, J. (2010). Configuraciones epistémicas presentes en los libros de tercer grado, en torno al campo conceptual multiplicativo. En G. García (Ed.), Actas del 11 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Bogotá: Aprendizaje y Evaluación de las matemáticas. Colombia.
- Pang, J.S. y Hwang, H.M. (2006). *A comparative analysis of elementary mathematics textbooks of Korea and Singapore*. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds). *Proceeding of the 30 Conference of the International Group for the psychology of*

Mathematics Education. PME 30. Republica Checa: Praga. Charles University in Prague.

Pepin, B., Haggarty, L. y Keynes, M. (2001). *Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning culture.* EEUU: ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 33(5).

Peralta, X. (2002). *Dificultades para articular los registros gráfico, algebraico y tabular: el caso de la función lineal.* [En versión electrónica] En Memorias de la XXII Semana Regional de Investigación y Docencia en Matemática.

Rabino, A., Cuello, P., Munno, M. (2011). *Aprehender álgebra utilizando contextos significativos.* Distrito Federal México: Redalyc.

Rascón, G. (2003). *El desarrollo del álgebra moderna. Parte III: el surgimiento del álgebra abstracta.* Apuntes de historia de las matemáticas, 2(2), pp. 38-78.

Robitaille, D.F. y Garden, R. A. (1989). *The IEA study of mathematics II: Contexts and ou ! Comes of school mafhemufics.* Oxford : Pergamon Press.

Salazar, L., Vega, F. *Ecuaciones y problemas de primer grado. Instituto politécnico nacional. Centro de estudios tecnológicos "Walter Cross Buchanan".* Recuperado en: <http://bibliotecadigital.conevyt.org.mx/colecciones/documentos/somece/90.pdf>

Schmidt, W.H., Jorde, D., Cogan, L.S., Barrier, E., Gonzalo, I., Moser, U., Shimizu, Y., Sawada, T., Valverde, G., Mc Knight, C. Prawat, R., Wiley, D.E., Raizen, S., Britton, E.D. y Wolfe, R.G. (1996). *Characterizing pedagogical flow. An investigation of Mathematics and Science Teaching in Six Countries.* EEUU: Kluwers Academic Publishers. Dordrecht.

- Schubring, G. (1987). *On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author*. EEUU : For the learning of mathematics.
- Serrado, A. y Azcárate, P. (2003). *Estudio de la estructura de las unidades didácticas en los libros de texto de matemáticas para la educación secundaria obligatoria*. Bogotá: Educación Matemática.
- Sutherland, R., Winter, J. y Harries, A. (2001). *A transnational comparison of primary mathematics text books: the case of multiplication*. EEUU: Research in Mathematics Education. Vol. 3.
- Trejo, E., Camarena, P (2011). *Análisis cognitivo de situaciones problema con sistemas de ecuaciones algebraicas en el contexto del balance de materia*. Distrito Federal México: Redalyc.
- Valencia, A., Salazar, J. (2010). *La conversión de registros de representación semiótica en el trabajo con fracciones mayores que la unidad*. Cali: Tesis de pregrado. Universidad del Valle.
- Vasco, C. (1983). *El Álgebra Renacentista*. Bogotá: Universidad Nacional.
- Viète, F. (1983). *The analytical art*. EEUU: The Kent State University Press, Kent, Ohio.

ANEXOS

ANEXO A. TIPOS DE EXPLICITACIÓN DE UNA RELACIÓN

E.L.N	E.E.A	Tran	ETIQUETA
F	Oc	NA	ER1
F	Oc	CM/PM	ER2
F	Oc	T	ER3
F	Os	NA	ER4
F	Os	CM/PM	ER5
F	Os	T	ER6
Prop	Oc	NA	ER7
Prop	Oc	CM/PM	ER8
Prop	Oc	T	ER9
Prop	Os	NA	ER10
Prop	Os	T	ER11

ANEXO B. TIPOS DE REDUCCIÓN LEXICAL

E.L.N	E.E.A	NVA	Tran	ETIQUETA
F	Oc	1V	NA	RL1
F	Oc	1V	T	RL2
F	Oc	M1V	NA	RL3
F	Os/Oc	M1V	NA	RL4
F	Os/Oc	M1V	T	RL5
F	Os	1V	NA	RL6
F	Os	1V	T	RL7
F	Os	M1V	NA	RL8
F	Os	M1V	T	RL9
NA	NA	NA	NA	RL10

**ANEXO C. TIPOS DE CONVERSIONES OBTENIDOS A PARTIR DE LA COMBINACIÓN
DE LOS TIPOS DE EXPLICITACIÓN DE UNA RELACIÓN Y REDUCCIÓN LEXICAL**

TIPO DE CONVERSION	EXPLICITACION DE UNA RELACION			REDUCCION LEXICAL			
	E.L.N	E.E.A	Tran	E.L.N	E.E.A	NVA	Tran
ER1/RL1	F	Oc	NA	F	Oc	1V	NA
ER1/RL3	F	Oc	NA	F	Oc	M1V	NA
ER1/RL4	F	Oc	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER1/RL5	F	Oc	NA	F	Os/Oc	M1V	T
ER1/RL6	F	Oc	NA	F	Os	1V	NA
ER1/RL8	F	Oc	NA	F	Os	M1V	NA
ER10/RL1	Prop	Os	NA	F	Oc	1V	NA
ER10/RL3	Prop	Os	NA	F	Oc	M1V	NA
ER10/RL4	Prop	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER10/RL6	Prop	Os	NA	F	Os	1V	NA
ER10/RL7	Prop	Os	NA	F	Os	1V	T
ER10/RL8	Prop	Os	NA	F	Os	M1V	NA
ER10/RL9	Prop	Os	NA	F	Os	M1V	T
ER11/RL3	Prop	Os	T	F	Oc	M1V	NA
ER11/RL4	Prop	Os	T	F	Os/Oc	M1V	NA
ER11/RL5	Prop	Os	T	F	Os/Oc	M1V	T
ER11/RL8	Prop	Os	T	F	Os	M1V	NA
ER2/RL3	F	Oc	CM/PM	F	Oc	M1V	NA
ER2/RL6	F	Oc	CM/PM	F	Os	1V	NA
ER2/RL8	F	Oc	CM/PM	F	Os	M1V	NA
ER3/RL3	F	Oc	T	F	Oc	M1V	NA
ER3/RL8	F	Oc	T	F	Os	M1V	NA

ER4/RL1	F	Os	NA	F	Oc	1V	NA
ER4/RL2	F	Os	NA	F	Oc	1V	T
ER4/RL3	F	Os	NA	F	Oc	M1V	NA
ER4/RL4	F	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER4/RL5	F	Os	NA	F	Os/Oc	M1V	T
ER4/RL6	F	Os	NA	F	Os	1V	NA
ER4/RL7	F	Os	NA	F	Os	1V	T
ER4/RL8	F	Os	NA	F	Os	M1V	NA
ER4/RL9	F	Os	NA	F	Os	M1V	T
ER5/RL6	F	Os	CM/PM	F	Os	1V	NA
ER6/RL10	F	Os	T	F	NA	NA	NA
ER6/RL3	F	Os	T	F	Oc	M1V	NA
ER6/RL4	F	Os	T	F	Os/Oc	M1V	NA
ER6/RL6	F	Os	T	F	Os	1V	NA
ER7/RL1	Prop	Oc	NA	F	Oc	1V	NA
ER7/RL3	Prop	Oc	NA	F	Oc	M1V	NA
ER7/RL4	Prop	Oc	NA	F	Os/Oc	M1V	NA
ER7/RL6	Prop	Oc	NA	F	Os	1V	NA
ER7/RL8	Prop	Oc	NA	F	Os	M1V	NA
ER8/RL4	Prop	Oc	CM/PM	F	Os/Oc	M1V	NA
ER9/RL1	Prop	Oc	T	F	Oc	1V	NA
ER9/RL2	Prop	Oc	T	F	Oc	1V	T
ER9/RL3	Prop	Oc	T	F	Oc	M1V	NA
ER9/RL4	Prop	Oc	T	F	Os/Oc	M1V	NA
ER9/RL6	Prop	Oc	T	F	Os	1V	NA
ER9/RL7	Prop	Oc	T	F	Os	1V	T
ER9/RL8	Prop	Oc	T	F	Os	M1V	NA

ANEXO D. VALIDACION Y OPINIONES DE CADA UNO DE LOS EVALUADORES