

¿CÓMO UN PROFESOR EN FORMACIÓN AL SUSCITAR LA PLANIFICACIÓN DE ACCIONES VISUALES A TRAVÉS DEL ESTUDIO DE LA RELACIÓN PERÍMETRO-ÁREA PROMUEVE EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO AUTÓNOMO?

OSCAR FRANCISCO MUÑOZ JOJOA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JUAN DE PASTO

2017

¿CÓMO UN PROFESOR EN FORMACIÓN AL SUSCITAR LA PLANIFICACIÓN DE ACCIONES VISUALES A TRAVÉS DEL ESTUDIO DE LA R(P/A) PROMUEVE EL DESARROLLO DE PENSAMIENTO AUTÓNOMO?

OSCAR FRANCISCO MUÑOZ JOJOA

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Licenciado en Matemáticas**

Asesor:

GUSTAVO ADOLFO MARMOLEJO AVENIA

Doctor en educación matemática

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JUAN DE PASTO

2017

NOTA DE RESPONSABILIDAD

Las ideas y conclusiones aportadas en este Trabajo de Grado son Responsabilidad de los
autores.

Artículo 1 del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966, emanado del Honorable Consejo
Directivo de la Universidad de Nariño.

NOTA DE ACEPTACIÓN

GUSTAVO ADOLFO MARMOLEJO AVENIA

Director

MYRIAM BELISA VEGA RESTREPO

Jurado 1

LOREYN GABRIELA ERAZO RODRIGUEZ

Jurado 2

San Juan de Pasto, 23 de noviembre de 2017

AGRADECIMIENTOS

A mi director de tesis, Dr. Gustavo Adolfo Marmolejo Avenia por su esfuerzo y dedicación, quien, con sus conocimientos, su experiencia, su paciencia y su motivación ha logrado en mí que pueda terminar mis estudios con éxito.

También me gustaría agradecer a mis profesores durante toda mi carrera profesional, pues, todos han aportado con un granito de arena en mi formación.

A mi mamá Socorro Jojoa, quien con su apoyo, esfuerzo y cariño fue el principal soporte para sacar este proyecto adelante.

A mis abuelos, Plinio Jojoa y María Inés del Carmen Jojoa quienes con su experiencia me enseñaron demasiado y son ejemplo de superación.

A mis tíos, tías y primos, por su incondicional apoyo y palabras de aliento llenas de ternura, esperanza y comprensión.

A mis amigos y compañeros con quienes compartí en la universidad Steven Londoño, Nathaly Sanchez, Oscar Chilanguad, y Christiam Pistala, de cada uno me llevo algún aprendizaje, algún recuerdo que estará siempre presente.

En realidad, son muchas las personas que han formado parte de mi vida profesional a las que me encantaría agradecerles su amistad, consejos, apoyo, ánimo y compañía en los momentos más difíciles de este proceso. Algunas están aquí conmigo y otras en mis recuerdos y en mi corazón, sin importar en donde estén quiero darles las gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han brindado y por todas sus bendiciones.

A Dios por estar siempre a mi lado y con los míos.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN.....	12
1 OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN	16
2 MARCO TEÓRICO	18
2.1 visualización	18
2.2 Regulación y control.....	20
2.3 Pensamiento autónomo	23
3 Metodología.....	25
3.1 Naturaleza	25
3.2 Población y trabajo de campo.....	25
3.3 Unidades de análisis e instrumento de recolección de datos	27
3.4 Instrumento metodológico	27
3.4.1 Transformaciones visuales	29
3.4.2 Estrategias de planificación.....	29
3.4.3 Elementos de control	31
3.4.4 Niveles de autonomía	33
4 Resultados y discusión	34
4.1 Análisis a priori.....	34
4.1.1 Presentación de la propuesta de enseñanza	35
4.1.2 Momentos a considerar para promover la enseñanza de la planificación	37
4.1.3 Transformaciones visuales esperadas y elementos de control incluidos:.....	38
4.2 Análisis a posteriori	43
4.2.1 Momentos de planificación inverso y directo simple.....	44
4.2.2 Momentos de planificación de Ejercitación y Directo justificativo	50
4.2.3 Momento de planificación de Coordinación	53
4.3 Contraste entre el análisis a priori y a posteriori	55
4.3.1 Efecto de los elementos de control y estrategias de planificación en la planificación de acciones visuales.....	56

4.3.2 Vínculo entre las estrategias y/o elementos de control con las posibilidades que brinda la planificación para el desarrollo del pensamiento autónomo.	59
CONCLUSIONES.....	61
BIBLIOGRAFÍA.....	65

LISTA DE ILUSTRACIONES

	Pág.
<i>Ilustración 1. Pasos de planificación 1.....</i>	<i>45</i>
<i>Ilustración 2. Pasos de planificación 2.....</i>	<i>45</i>
<i>Ilustración 3. Pasos de planificación 3.....</i>	<i>51</i>

LISTA DE TABLAS

	Pág.
<i>Tabla 1</i>	35
<i>Tabla 2</i>	39
<i>Tabla 3</i>	40
<i>Tabla 4</i>	41
<i>Tabla 5</i>	42
<i>Tabla 6</i>	43
<i>Tabla 7</i>	49
<i>Tabla 8</i>	52
<i>Tabla 9</i>	55

Resumen

La investigación aporta elementos de reflexión para la comprensión de los fenómenos que subyacen a la enseñanza de la planificación a través del estudio de la relación perímetro-área, en adelante $R(p/a)$ desde una perspectiva visual, y en el proceso promocionar el desarrollo de pensamiento autónomo (Holec, 1981). De forma cualitativa, se caracteriza la propuesta de enseñanza de un educador en formación en adelante (EF). El instrumento de análisis consta de cuatro categorías: transformaciones visuales, estrategias de planificación, elementos de control y niveles de autonomía, promocionados por el educador. Los resultados evidencian que promover la enseñanza de la planificación a través de tareas que exigen el recurso de la visualización, y que en el proceso se generen oportunidades para el desarrollo de pensamiento autónomo, es un asunto complejo para los educadores, al menos en el caso aquí estudiado. Asimismo, que la explicitación de interacciones bidireccionales y el planteamiento de preguntas abiertas favorecen la inclusión de estrategias de planificación y de acciones visuales, así como la explicitud de estrategias que pueden promover el desarrollo de la autonomía. A manera de conclusión, se resalta que los programas de formación de educadores matemáticos deben considerar espacios donde la planificación sea objeto de experimentación. De no ser así, serán persistentes tanto las dificultades reseñadas en la literatura acerca de la inclusión de la planificación y de la visualización, como la recurrente preocupación por los altos niveles de heteronomía de los estudiantes al estudiar matemáticas.

Palabras clave: Estrategias de planificación, visualización, autonomía, propuesta de enseñanza, aprendizaje autónomo

Abstrac

The research provides elements of reflection for the understanding of the phenomena that underlie the teaching of planning through the study of the perimeter-area relationship, henceforth $R(p/a)$ from a visual perspective, and in the process promote the development of autonomous thinking (Holec, 1981). Qualitatively, the teaching proposal of an educator in training (EF) is characterized. The instrument of analysis consists of four categories: visual transformations, planning strategies, elements of control and levels of autonomy, promoted by the educator. The results show that promoting the teaching of planning through tasks that require the use of visualization, and that in the process generate opportunities for the development of autonomous thinking, is a complex issue for educators, at least in the case here studied. Also, that the specification of bidirectional interactions and the posing of open questions favor the inclusion of planning strategies and visual actions, as well as the explicitness of strategies that can promote the development of autonomy. By way of conclusion, it is emphasized that the training programs of mathematical educators should consider spaces where planning is subject to experimentation. Otherwise, the difficulties described in the literature about the inclusion of planning and visualization, as well as the recurring concern about the high levels of heteronomy of students when studying mathematics, will be persistent.

Keywords: Planning strategies, visualization, autonomy, teaching proposal, autonomous learning

INTRODUCCIÓN

La metacognición alude tanto al conocimiento de los propios procesos cognitivos como a su regulación y control (Flavell, 1976). Influye positivamente en el desarrollo de la capacidad intelectual de un sujeto (Van der Stel, Veenman, Deelen, & Haenen, 2010), promueve altos niveles de eficiencia y sostenibilidad (Fresenborg, Kramer, Pundsack, Sjuts, & Sommer, 2010) y modifica procesos cognitivos asociados al aula, entre otros, la comunicación oral, la comprensión lectora, la atención y la memoria (Schneider & Artelt, 2010); en matemáticas, la argumentación (Sánchez, Castaño, & Tamayo, 2015), el razonamiento (Mevarech & Fridkin, 2006) y la resolución de situaciones problema. (Mevarech, Terkieltaub, Vinberger, & Nevet, 2010).

La planificación, sub-componente de la regulación (Schraw, Crippen, & Hartley, 2006), es el objeto de interés en la presente investigación. La revisión de la literatura en Educación Matemática que hemos realizado, evidencia que el rol de la planificación en la resolución de problemas es una de las cuestiones que mayor consideración ha tenido. En este sentido, se ha destacado que la incorporación de estrategias metacognitivas de planificación mejoran los resultados en los procesos de resolución de problemas, por ejemplo, la orientación (comportamientos estratégicos para evaluar y comprender un problema), la Organización (Planificación del comportamiento y elección de las acciones), la ejecución (regulación de las acciones de acuerdo a los planes considerados) y la verificación (evaluación de las decisiones tomadas y de los resultados de los planes ejecutados) (Garofalo & Lester, 1985). Lester, (1994), por su parte, establece que la exploración, reflexión y formulación son estrategias metacognitivas que contribuyen a mejorar la capacidad de resolución de problemas matemáticos. Zimmerman y Martínez (1986),

evidencian otro tipo de estrategias metacognitivas que benefician el rendimiento académico en los estudiantes, es el caso de la organización de información, la fijación de objetivos y la organización de las tareas propuestas de acuerdo al contexto social. Finalmente, García y Santarelli (2004) concluyen que, independientemente del contenido considerado, en situaciones de enseñanza y aprendizaje se contemplan estrategias metacognitivas de la misma naturaleza. En la misma línea de ideas, en estudios como los de Zimmerman, (1989), por ejemplo, se evidencia que la organización de información, la fijación de objetivos y la organización del contexto de la tarea, son estrategias asociadas a la planificación que benefician el rendimiento académico en los estudiantes.

Lo anterior evidencia, un marcado interés en la investigación educativa en torno al rol de la planificación en el estudio de las matemáticas. No obstante, en torno a que la planificación sea una cuestión susceptible de enseñanza, son limitados los estudios que le asumen como asunto de interés. En tal sentido, la atención recae en la determinación de los momentos más propicios para favorecer su inclusión, de esta forma, Van der Stel et al (2010) establecen que las edades apropiadas para el desarrollo de la planificación oscilan entre los 13 y 14 años, y Schneider y Artelt (2010) concluyen que el conocimiento metacognitivo asociado a la planificación usualmente se desarrolla a través de los primeros años de la primaria, pero, es en la adolescencia que se fortalece.

En la misma línea de ideas, también existen estudios que consideran una serie de estrategias para promover la enseñanza de la planificación, por ejemplo, Mevarech et al. (2010) consideran un conjunto de cuatro estrategias, una consecutiva de la otra: comprensión (descripción de la problemática planteada en palabras propias del solucionador), conexión (relación de la tarea propuesta con tareas que han sido resueltas

previamente), estrategia (habilidades necesarias para la solución del problema) y reflexión (análisis tanto de los procesos de resolución como de la solución en sí). La implementación de este tipo de estrategias genera una apuesta hacia la enseñanza de la planificación y al mejoramiento del rendimiento matemático (Mevarech & Fridkin, 2006), pues, entre variados aspectos, potencializan métodos en los que se genera la toma de conciencia de los procesos aplicados en la resolución de problemas, apoyan la comprensión de lo que el problema trata, y cómo se conecta con los conocimientos previos del solucionador, asimismo, ayuda tanto en el proceso de resolución como en la regulación del mismo.

En cuanto a cómo el desarrollo de la autonomía es propiciado a través de la planificación de actividades cognitivas, objeto de interés en la presente investigación, la situación es aún más crítica. En tal caso no existen investigaciones que evidencian tal consideración. La importancia de estudios de esta naturaleza radica en que la inclusión de estrategias metacognitivas favorece la generación de la autonomía, pues, entre variados aspectos, posibilitan y estimulan la creatividad (López, 2006), la responsabilidad y el control del proceso de aprendizaje (Escribano, 1995).

En esta investigación, la actividad cognitiva a considerar es la visualización, es decir, todo proceso de articulación entre las operaciones (Marmolejo & Vega, 2012) y las deconstrucciones dimensionales (Duval, 1998) aplicadas sobre una configuración al estudiar una actividad matemática, sea que conduzcan de forma asertiva o no a la resolución de la problemática planteada; o que, al contrario, suscite resoluciones equivocadas.

Nuestra atención recayó en la visualización, pues, existe un doble vínculo entre ella y el acto de planificar. Por un lado, la visualización permite delimitar de inicio la clase de

hipótesis o alternativas a considerar en un problema o en una demostración (Duval, 1999, pág. 153), es decir, la visualización apoya a la planificación en la selección de estrategias. Por otro lado, la visualización debe propiciarse como objeto de reflexión en el aula (Duval, 1998), y la planificación, al propender el desarrollo de procesos y actividades cognitivas (Schneider & Artelt, 2010), puede constituirse en un soporte para su desarrollo.

En cuanto a la R(p/a), se consideró, pues, su estudio exige la promoción de acciones visuales. Puntualmente de tareas que susciten la verificación de que dos figuras con igual área no siempre tienen igual perímetro o viceversa, en consecuencia, la aplicación de transformaciones superficiales y longitudinales de figuras.

El presente informe se desarrolla en cinco apartados. Los dos primeros, respectivamente, presentan los objetivos y preguntas de investigación y se exponen los referentes conceptuales que guiaron su consecución; el tercero, describe la metodología empleada, el cuarto apartado, por su parte, presenta los resultados de la investigación y su discusión a partir de criterios: a) el efecto de los elementos y estrategias de regulación en la planificación de acciones visuales y b) el vínculo entre las estrategias y elementos de control con las posibilidades que brinda la planificación para el desarrollo del pensamiento autónomo. Finalmente, se exponen las conclusiones generales y se proponen aspectos a considerar en futuras investigaciones.

1 OBJETIVOS Y PREGUNTAS DE INVESTIGACIÓN

1.1. Objetivo general

Determinar las oportunidades de desarrollo de pensamiento autónomo que un EF suscita al promover la enseñanza de la planificación de acciones visuales a través del estudio de la R(p/a)

1.2. Objetivos específicos

- Discriminar los momentos de planificación y las transformaciones visuales y/o elementos de control visual que un EF considera en sus diseños de enseñanza para suscitar el estudio de la R(p/a).
- Identificar las estrategias de planificación que un EF incluye para promover la planificación de acciones visuales a través de la aplicación de diseños de enseñanza que susciten el estudio de la R (p /a).
- Detectar los elementos de control regulativo que un EF privilegia en la promoción de la planificación de acciones visuales a través de la aplicación de diseños de enseñanza que susciten el estudio de la R (p /a).
- Establecer los niveles de autonomía que un EF promueve al suscitar la planificación de acciones visuales a través de la aplicación de diseños de enseñanza que privilegian el estudio de la R(p /a).

1.3. Cuestiones que guían la consecución de los objetivos específicos

En cuanto al primero de los objetivos específicos: ¿Qué rol desempeñaron las acciones visuales (transformaciones visuales y elementos de control visual) considerados por el EF para la generación de oportunidades para el desarrollo de pensamiento autónomo? ¿Todos los elementos de control visual considerados por el EF para suscitar el estudio de la

R(p/a) fueron, en el proceso de enseñanza, objetos de explícita reflexión? ¿Cuáles son las transformaciones visuales se consideran en los momentos de planificación?

En cuanto al segundo de los objetivos específicos: ¿Qué estrategias metacognitivas de planificación fueron consideradas por el EF para promocionar el estudio de la planificación de acciones visuales? ¿Cuáles estrategias metacognitivas suscitaron oportunidades para el desarrollo del pensamiento autónomo? ¿Cuáles no? ¿De qué forma las estrategias metacognitivas de planificación apoyaron u obstaculizaron el desarrollo de pensamiento autónomo?

En cuanto al tercero de los objetivos específicos: ¿Qué elementos de control planificativo fueron considerados por el EF? ¿Cuáles de los elementos de control planificativo propiciaron oportunidades para el desarrollo de pensamiento autónomo? ¿Cuáles no? ¿Cómo el método de enseñanza adoptado por el EF suscitó la consideración de elementos de control planificativo?

En cuanto al cuarto de los objetivos específicos: ¿Qué niveles de autonomía promovió el EF? ¿Existe un vínculo entre los niveles de autonomía detectados en la investigación y las transformaciones visuales, elementos de control visual y elementos de control planificativo considerados por el EF? ¿En el proceso de planificación adoptado por el EF qué tipo de dificultades encontró en torno a promover el desarrollo de pensamiento autónomo? ¿Cómo el educador procedió ante ellas?

2 MARCO TEÓRICO

En este capítulo se exponen los referentes conceptuales que dan sentido al problema de la investigación. En primera instancia, se define cómo el término regulación es asumido en la investigación y se contempla el rol que desempeña en el estudio de las matemáticas. Posteriormente, la atención recae en la visualización asociada al registro semiótico de las figuras geométricas bidimensionales (en adelante V2D), en este sentido, se definen tanto los tipos de *operaciones y deconstrucciones dimensionales* (Marmolejo & Vega , 2012); (Marmolejo & González, 2013); (Duval, Geometry from a cognitive point a view, 1998) como *los elementos y funciones de control visual* (Marmolejo & González, 2015); (Marmolejo, Vega, & Galeano , 2017) que, intervienen en el estudio del área incluida su articulación con el perímetro. Finalmente, se define el concepto de pensamiento autónomo y se determina su importancia en los procesos de enseñanza, en particular, en lo relacionado con la planificación de procesos visuales. A continuación, se describe en detalle cada uno de los referentes conceptuales referenciados.

2.1 visualización

La V2D, es determinante para el estudio de las matemáticas, entre variados aspectos soporta o guía el desarrollo de un problema y permite la comprensión del despliegue de un procedimiento (Marmolejo & González, 2013). Para describir el aporte de las figuras en la actividad matemática, se debe distinguir el tipo de aprehensión susceptible de sugerir la solución del problema planteado (Duval, 1999): *perceptiva* (información visual relacionada con lo que a primer golpe de vista nos llega), *secuencial de formas* (despliegue de un conjunto de instrucciones relativas a la utilización de un instrumento para respetar

las restricciones impuestas por el tipo de magnitud en cuestión), *operatoria* (transformación heurística de las figuras), y *discursiva* (articulación entre discurso y unidades figurales que le determinan). En ciertos casos, estas formas se subordinan unas a otras, se relacionan, y en otros se oponen (Duval, 2003). Las aprehensiones operatoria y discursiva son quienes determinan el estudio de la relación perímetro área, aspecto de interés en la investigación.

En cuanto a la aprehensión operatoria, alude a todo tipo de transformación que se puede aplicar sobre una figura, con el fin de generar modificaciones de distinta naturaleza. Marmolejo y González (2013) consideran que en el estudio del área de superficies planas (incluida su articulación con el perímetro) la aprehensión operatoria está caracterizada por tres elementos: *cambio figural*, *cambio de focalización bidimensional* y *operaciones*. En el presente estudio, la atención recae exclusivamente en las operaciones, pues, la posibilidad de exploración de una figura está relacionada con la gama de modificaciones figurales a aplicar en ella (Duval, 1999). Con cada modificación se realizan operaciones cognitivas que brindan su productividad heurística (Duval, 1999).

En este sentido, se consideran exclusivamente la aplicación de dos operaciones: *configuración* y *fraccionamiento*, la primera alude al “ensamblaje de un conjunto de figuras independientes entre sí para representar una nueva, cuya superficie está compuesta por la unión de las superficies de las figuras dadas” (Marmolejo & González, 2013, pág. 74) y la segunda, considera la “Descomposición bidimensional de una figura en sub-figuras o sub-configuraciones” (Marmolejo & González, 2013, pág. 78).

Por otro lado, la aprehensión discursiva puede entenderse como la acción cognitiva que produce una asociación entre la consigna de la figura y las unidades figurales que la conforman (Duval, 1999). Dicho lo anterior, la aprehensión discursiva contempla la

deconstrucción dimensional de las formas, “acto que consiste en descomponer la figura en unidades figúrales de dimensión inferior a la figura de partida” (Duval, 2004, pág. 20). Lo cual implica que se realice un cambio dimensional sobre una figura bidimensional, pues, en primera instancia, se reconoce una forma de esa misma dimensión y, seguidamente, se pasa a discriminar los lados que la constituyen.

La importancia de estos dos tipos de aprehensiones, radica en que permiten identificar y caracterizar los tipos de visualización que son coherentes con el aprendizaje de las matemáticas (Duval, 2004). Por otro lado, entre los diferentes tipos de discriminación que permiten las figuras, la aprehensión operatoria y la discursiva son las que suscitan mayor complejidad cognitiva en el estudio de las matemáticas (Duval, 1999).

2.2 Regulación y control

La metacognición es el conocimiento que se tiene acerca de los propios procesos cognitivos o cuestiones relacionadas a ellos (Flavell, 1976). Centra su atención en “la supervisión activa y consecuente regulación y organización de estos procesos en relación con los objetos o datos cognitivos sobre los que actúan” (Flavell, 1976, pág. 232). Su importancia radica en que permite predecir el rendimiento matemático (Wang, Haertel, & Walberg, 1993), mejora la confianza al abordar tareas auténticas (Kramarski, Mevarech, & Arami, 2002) y ayuda a superar obstáculos al enfrentar situaciones complejas (Stillman & Galbraith, 1998).

La metacognición es susceptible de aprendizaje (Mevarech & Fridkin, 2006) y promueve el desarrollo de procesos y actividades cognitivas (Schneider & Artelt, 2010), es el caso de la significación, la adquisición de conocimiento sobre el propio proceso de pensamiento y el desarrollo de actividades de supervisión y regulación (Schoenfeld, 1987).

La regulación y control sobre la actividad cognitiva son cuestiones que determinan el estudio de la metacognición (Flavell, 1976). La regulación contempla cómo los alumnos dirigen sus comportamientos proactivamente o seleccionan estrategias para alcanzar sus metas, así como todo conjunto de retroalimentaciones afectivas, cognitivas, motivacionales y conductuales empleadas (Cleary & Zimmerman, 2004). La regulación incluye tres subprocesos: planificación, supervisión y evaluación (Schraw & Moshman, 1995). El primer subproceso, asunto de interés en la presente investigación, implica el establecimiento de metas, asignación de recursos, elección de estrategias adecuadas y administración del tiempo. Mientras que el segundo subproceso incluye habilidades de auto detección necesarias para controlar el aprendizaje. En cuanto al tercero de los subprocesos, refiere a la valoración de los productos, la revisión de los procesos de aprendizaje y la evaluación de las metas propias (Schraw & Moshman, 1995). Por lo general, la planificación se lleva a cabo antes del aprendizaje, la supervisión durante y la evaluación inmediatamente después del aprendizaje (Mevarech, Terkieltaub, Vinberger, & Nevet, 2010).

Las estrategias de regulación, es decir, las acciones dirigidas a la adquisición de la información, o a las habilidades que involucran el establecimiento y supervisión de los objetivos (Zimmerman & Martínez, 1986), son claves en los procesos de enseñanza (Salmerón, Gutiérrez, Salmerón, & Rodríguez, 2011) y permiten a los estudiantes regularse en sus actividades de aprendizaje para afrontar satisfactoriamente las demandas planteadas en sus contextos educativos (Vermunt, Relations between student learning patterns and personal and contextual factors and academic performance, 2005).

En el estudio de las matemáticas, la planificación es contemplada como una competencia determinante para la praxis educativa, pues, entre variados aspectos, suscita el desarrollo de

capacidades específicas como la organización de contenidos, selección de acciones y prioriza los significados de los objetos matemáticos (Rico, Marín, Lupiñaes, & Gómez, 2008).

En cuanto al control sobre la actividad cognitiva, alude a la planificación de comportamientos y la selección de acciones como la evaluación de las decisiones realizadas y los resultados de los planes ejecutados, así como los aspectos que lo determinan (Balachef & Gaudin, 2010). Al respecto, Marmolejo y González (2015) caracterizan los elementos de control y las funciones de control visual. “Los primeros permiten identificar sobre qué elementos de la visualización (operaciones o cambios dimensionales) se ejerce control ..., los segundos, por su parte, establecen las formas en que se promueve el control visual y su efecto en el control establecido” (Marmolejo, Vega, & Galeano, 2017, pág. 6).

Son cuatro los elementos de control identificados por Marmolejo y González (2015) a saber: *procedimiento* (alude al tipo de visualización “mostrado” en una tarea), *contenido* (refiere a la visualización que, explícita o implícitamente, subyace la presentación del concepto, propiedad o relación matemática a considerar), *visibilidad* (la introducción de ciertos elementos en la figura o la consideración de algunas de sus características privilegian u obstaculizan la forma de ver) e *iconismo* (cuando la figura representa o alude a un objeto físico o a una acción física).

De acuerdo al número de elementos de control presentes en las tareas, así como la cantidad de elementos visuales que intervienen, son tres las funciones de control visual a contemplar: *simple* o *disjunta* (“se produce cuando el elemento o los elementos generadores de control suscitan, parcial o totalmente, un tipo de visualización específico y pertinente a la resolución de la tarea planteada”, (Marmolejo & González, 2015, pág. 320)); *por*

refuerzo (“cuando son varios los elementos generadores de control introducidos en la actividad o tarea, que en conjunto imponen una única manera de ver pertinente a su desarrollo o comprensión” (Marmolejo & González, 2015, pág. 321)); y *ambigua* (se produce cuando varios elementos ejercen control sobre el tipo de visualización; mientras unos introducen maneras de ver pertinentes para la resolución de la tarea, otros, suscitan visualizaciones de naturaleza distinta a las tratadas en el tópico a considerar, que no son pertinentes a la resolución de la tarea propuesta o conllevan a procedimientos engorrosos). Así mismo, la ambigüedad puede introducirse por la presencia parcial de elementos de control (Marmolejo & González, 2015).

2.3 Pensamiento autónomo

Alude a la habilidad de hacerse cargo del propio aprendizaje, implica ser capaz de pensar por sí mismo con sentido crítico (Holec, 1981), en otras palabras, es la facultad que le permite a un sujeto tomar decisiones que le conduzcan a regular su propio aprendizaje (Monereo & Castelló, 1997). Esta habilidad no es innata, debe ser adquirida (Holec, 1981), pues, nacemos heterónomos y es a través de la experiencia que le desarrollamos (Kamii & López, 1982). El pensamiento autónomo es indispensable en los procesos de enseñanza, entre variados aspectos, promociona la adquisición de conocimientos y permite la toma de decisiones de acuerdo a condiciones específicas (Monereo & Castelló, 1997) y permite el diagnóstico previo a las necesidades propias de aprendizaje (Knowles, 1975). En breve, el aprendizaje autónomo se fundamenta en las experiencias previas y define estrategias para enfrentar nuevas situaciones, apoya además acciones de naturaleza metacognitiva, pues, ayuda a dirigir, controlar, regular y evaluar la forma de aprender (Villavicencio, 2004).

En los procesos de enseñanza, promover el aprendizaje autónomo, es una de las prioridades de las instituciones educativas (Valdez & Machorro, 2014). En este sentido, las exigencias que ofrece la escuela frente a las características de aprendizaje autónomo se relacionan con tres aspectos (Vermunt, 1995): 1) estrategias cognitivas o procedimientos intencionales que permiten al estudiante tomar las decisiones oportunas de cara a mejorar su estudio y rendimiento; 2) estrategias metacognitivas o de reflexión sobre el propio proceso de aprendizaje y 3) estrategias de apoyo referidas al autocontrol del esfuerzo y de la persistencia, y a promover condiciones que faciliten afectivamente el estudio.

Así pues, la estimulación del aprendizaje autónomo persigue, esencialmente, junto a los currículos educativos, lograr en el estudiante, y en consecuencia en el futuro profesional, un grado de autonomía que lo habilite para su propio gobierno (Holec, 1981), el aprendizaje continuo, la toma de decisiones y la gestión independiente o vinculada a otros profesionales (Lobato, 2006). Por ello, es esencial que se tenga en cuenta, la contextualización de los aprendizajes, la reflexión personal, la construcción de conocimientos, la aplicación práctica de los mismos y la evaluación del proceso realizado (Lara , 2012). De lo anterior, se desprende que los factores que favorecen el aprendizaje autónomo respecto a las otras pedagogías y didácticas se refieren al modo cómo la persona se educa a sí mismo, a interactuar con los compañeros y con la sociedad, al uso y generación del conocimiento y a establecer la ruta en torno al proyecto de vida. Por tanto, una de las principales preocupaciones de los educadores de educación básica debe ser la estimulación del propio aprendizaje (Ramsden, 1994).

3 Metodología

En este capítulo se describe la metodología utilizada para el desarrollo de esta investigación. Se divide en cuatro apartados, en el primero, se describe la naturaleza. El segundo, alude a la población y trabajo de campo, en el tercer apartado, se presenta el instrumento de recolección de datos y las unidades de análisis. Finalmente, en el último apartado se define el instrumento metodológico utilizado.

3.1 Naturaleza

Siguiendo los parámetros de (Bisquerra , 1989), la investigación fue de naturaleza inductiva, pues, las categorías de análisis se extrajeron directamente del proceder del educador analizado. En cuanto a la manera como fueron filtrados los datos, la investigación es cualitativa, es decir, se consideraron según los criterios de los investigadores y se acopiaron a través de las formas de proceder discriminadas en el estudio. Teniendo en cuenta la población (un profesor en formación, en adelante EF) se asumió la metodología de estudio de caso. Finalmente, considerando, el análisis de datos, la investigación es de control, pues, “comprende una parte *descriptiva* y una *predictiva*, centrada en las características de la situación diseñada y que se pretende presentar en la clase a los estudiantes” (Artigue, Douady, Moreno, & Gómez, 1995).

3.2 Población y trabajo de campo

Los estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Nariño, a partir del octavo semestre, cursan tres asignaturas electivas, en ellas se reflexiona sobre un tópico específico y se busca darle vida a través del diseño de propuestas de enseñanza, es el caso del análisis del rol de la planificación como actividad metacognitiva, el establecimiento de

estrategias que susciten el acto de planificar y su articulación con el diseño de propuestas de enseñanza que privilegian el recurso a procesos visuales, objeto de interés en la investigación. Ocho estudiantes (profesores en formación) participaron en el proceso.

La primera de las electivas, consideró referentes conceptuales que definen y evidencian cuestiones asociadas a la metacognición y su relación con el desarrollo de procesos y actividades cognitivas vinculadas al estudio de las matemáticas, es el caso de la planificación y su vínculo con la visualización. En la segunda electiva, la atención recayó en la regulación de la cognición y de los subprocesos que le determinan, como en la discriminación de estrategias metacognitivas que susciten la regulación. Finalmente, en la tercera de las electivas, se consideró la inclusión de estrategias de planificación en una propuesta de enseñanza que apunta a la promoción del estudio de la $R(p/a)$ desde una perspectiva visual. Si bien todos los profesores en formación incluyeron estrategias de planificación en la propuesta de enseñanza reseñada, por cuestiones temporales (finalización del semestre), solo uno logró promover su aplicación en el aula. Como se ha dicho a lo largo del documento, aludiremos a este estudiante con el término EF.

La aplicación de la propuesta de enseñanza estuvo a cargo de uno de los integrantes del grupo seleccionado, para ello se consideró un curso de tercero de primaria (edades entre los 8 y 9 años) de una institución educativa de Pasto. Los estudiantes, en el momento de la aplicación de la propuesta de enseñanza, no tenían conocimiento sobre el perímetro y el área de figuras geométricas. Cabe aclarar que el propósito del EF fue construir el concepto de estas magnitudes incluida su relación, y en el proceso promover la planificación de acciones visuales, en ningún caso, su interés fue promover el desarrollo de pensamiento autónomo.

La aplicación de la propuesta de enseñanza se desarrolló en tres sesiones de clase de dos horas cada una, las acciones llevadas a cabo por el EF, permitieron que cada sesión de trabajo coincidiera con los momentos de la propuesta. En la primera sesión de clase, se consideró elementos que relacionan características cualitativas de las figuras respecto a los conceptos de contorno y superficie, así como el establecimiento de similitudes y diferencias entre ellos. En la segunda sesión de clase, se indagó sobre los aspectos que posibilitan la comparación de figuras según sus áreas y perímetros respectivamente, y se promovió la construcción de figuras con características métricas particulares. Finalmente, en la tercera sesión de clase, se analizaron las posibilidades y tipos de relación entre las dos magnitudes, igualmente, se establecieron las conclusiones correspondientes. En todos los casos, la visualización es el soporte que carga de sentido el estudio del objeto matemático considerado.

3.3 Unidades de análisis e instrumento de recolección de datos

En esta investigación se han considerado como unidades de información, el análisis a priori de las tareas diseñadas, los registros de observación de la aplicación de la propuesta de enseñanza y las entrevistas semi-estructuradas, consideradas para ampliar o comprender las actuaciones del EF.

3.4 Instrumento metodológico

Para dar respuesta a la pregunta ¿cómo un educador en formación promueve la planificación como objeto de reflexión en el estudio de la R (p/a) y en el proceso promueve tanto la inclusión de la visualización como la generación de pensamiento autónomo?, fue necesario considerar cuatro categorías de análisis: transformaciones visuales, estrategias de

planificación, elementos de control y niveles de autonomía. En este orden de ideas, mientras la primera y la tercera de las categorías fueron consideradas de manera previa a la aplicación de las tareas por parte del EF, la segunda y cuarta categoría fueron consideradas en la aplicación de la propuesta de enseñanza.

La importancia de cada categoría radica en que, aportan elementos para alcanzar los objetivos específicos. En este sentido, la primera categoría se relaciona y permite alcanzar el primero de los objetivos específicos, “Discriminar las transformaciones visuales y elementos de control visual que un EF considera para suscitar el estudio de la R(p/a)”. La segunda categoría por su parte, aporta elementos para la consecución del segundo objetivo específico, es decir, “Identificar las estrategias de planificación que un EF incluye para promover la planificación de acciones visuales a través del estudio de la R(p/a)”.

En cuanto a la categoría elementos de control, se consideran dos aspectos, por un lado, los elementos de control planificativo y, por otro lado, la forma en que el control visual es promovido por las tareas propuestas (elementos de control visual). El primero, está relacionado con el tercero de los objetivos específicos planteados en la investigación, “Detectar los elementos de control regulativo privilegiados por un EF al suscitar la planificación de acciones visuales a través del estudio de la R(p/a)” y el segundo aspecto, está vinculado al primer objetivo. De acuerdo a lo anterior, esta categoría aporta elementos para responder a las cuestiones ¿Qué rol desempeñaron las acciones visuales (transformaciones visuales y elementos de control visual) considerados por el EF para la generación de oportunidades para el desarrollo de pensamiento autónomo? ¿Qué elementos de control planificativo fueron considerados por el EF? ¿Cuáles de los elementos de control planificativo propiciaron oportunidades para el desarrollo de pensamiento autónomo? Finalmente, la última categoría de análisis, permite “establecer los niveles de autonomía

promovidos por un EF al suscitar la planificación de acciones visuales a través del estudio de la R(p/a)”. En lo que sigue se presenta y caracteriza cada una de las categorías.

3.4.1 Transformaciones visuales

La visualización en matemáticas, “no se adquiere de forma inmediata ni simple; más bien es de tratamiento de información susceptible de un aprendizaje específico” (Marmolejo & Vega , 2012, pág. 29), el cual, en palabras de Duval (2004) debe propender la inclusión de transformaciones visuales [externas] de una figura a partir de unidades visuales de dimensión 2 y, transformaciones visuales internas que permiten pasar de una discriminación de unidades visuales de dimensión 2 a unidades visuales de dimensión 1. Desde este punto de vista, Las tareas que el profesor aplicó en la investigación aportan elementos para el desarrollo de la visualización, pues, suscitan de forma independiente o articulada (transformación visual articulada) las transformaciones previamente reseñadas.

En relación con el rol de las de las transformaciones visuales en el alcance de los objetivos de la investigación, se relaciona con su aplicación en el desarrollo de las tareas propuestas, pues, inducen la manipulación del área y el perímetro de forma cualitativa, acción determinante para la comprensión de dichos conceptos, puesto que promueve su estudio como magnitud (Fraudental, 1983) y asigna sentido a su medida (Chamorro, 1997).

3.4.2 Estrategias de planificación

Acciones dirigidas a la adquisición de la información, o a las habilidades que involucran el establecimiento y supervisión de los objetivos (Zimmerman & Martínez , 1986). Su importancia radica en que permiten la anticipación y prevención de situaciones de aprendizaje (Rojas, 2006), posibilitan la regulación de procesos cognitivos adecuando las

actuaciones de un sujeto (Paz, 2011) y optimizan el rendimiento académico de los estudiantes (Martínez, 2007). Dos de las estrategias de planificación detectadas coincidieron con trabajos previos: *Orientación* (Garofalo & Lester, 1985); (Artzt & Armour, 1992) y *Reflexión* (Mevarech & Fridkin, 2006), las restantes: *Obstáculo*, *Regularización*, *Retrospectiva* y *Aplicación*, fueron extraídas directamente de la propuesta de enseñanza analizada. En lo que sigue se definen cada una de ellas.

- *Orientación*: discrimina en qué consiste el problema, identifica información y acciones que aportan al desarrollo de la problemática planteada y considera ¿en qué sentido el problema es similar o diferente de los problemas que se han resuelto en el pasado?
- *Reflexión*: examina la coherencia de los diferentes procesos que han sido considerados en la planificación y permite determinar si su aplicación es pertinente o no.
- *Retrospectiva*: una vez realizada una tarea y considerando las estrategias realizadas, se procede a discriminar, de forma a posteriori (observar hacia atrás), los pasos que, en un inicio, implícita o explícitamente, pudieron guiar su resolución
- *Obstáculo*: identifica cuestiones que impiden la discriminación del acto de planificar y de las estrategias de planificación a considerar.
- *Regularización*: aplicación de acciones que inhiben el obstáculo encontrado en la planificación y que transforman la tarea propuesta en otra de estructura similar a tareas que previamente fueron resueltas.

- *Aplicación*: establecimiento de relaciones entre los conocimientos o acciones previamente reflexionados y su inclusión, en orden lógico y pertinente, en el desarrollo de la tarea propuesta.

3.4.3 Elementos de control

“Permite expresar los medios necesarios para realizar selecciones, tomar decisiones y promover juicios que permiten decidir si una acción es relevante o no, o si un problema está resuelto” (Balachef & Gaudin, 2010, pág. 192). Conformada por uno o varios procesos y/o estrategias que direccionan el control ejercido (Marmolejo, 2014). Su importancia en la investigación radica, en que permitirá establecer cuáles de los elementos de control considerados en el proceso de planificación adoptado por el EF, generan oportunidades para el desarrollo del pensamiento autónomo y cuáles de ellos le obstaculizan. Igualmente, su identificación, hace posible discriminar los procesos de verificación (Meza, 2004) y razonamiento (Lithner, 2004). Como se dijo previamente esta categoría considera dos aspectos 1) elementos de control planificativo y 2) elementos de control visual, estos últimos, coinciden con los reportados en Marmolejo y González (2017). A continuación, se definen y caracterizan cada uno de los elementos de control.

- *Preguntas*: cuestiones que el docente plantea a sus estudiantes para guiar el proceso de planificación o la inclusión de acciones visuales, por tanto, el desarrollo de la tarea propuesta. Se consideran dos tipos: *preguntas abiertas*, cuando no pueden responderse con un sí o un no, es necesario una expansión discursiva, y *preguntas cerradas* sí se responden con un sí, un no o una respuesta muy corta; en ningún caso, suscitan reflexión alguna.

- *Interacción*: formas en que los integrantes de la clase (educadores y/o estudiantes) se relacionan entre sí. Pueden ser *Unidireccional* (el profesor o un estudiante se dirige a un estudiante, a un grupo o al grueso de ellos, para explicitar indicaciones, precisar formas de proceder o establecer conclusiones; no se promueven intervenciones por parte del o los “receptores”; de hacerlo, su contenido o intencionalidad no modifica el discurso inicial), o *Bidireccional* (la intencionalidad es suscitar una interacción “emisor-receptor” donde las decisiones adoptadas surgen de un proceso de negociación de significados).

- *Visual*: considera todo tipo de acciones, indicaciones o medios que pretenden enfatizar, designar o evidenciar elementos a considerar en el desarrollo de la tarea. Aparece de dos formas: *figuras* (de naturaleza bidimensional) y *Gestos* (movimiento de las manos que acompaña al ritmo de las palabras y que señalan partes específicas de las representaciones o recrean la imagen de un concepto (Mcneill, 1992)).

- *Procedimiento*: “Despliegue (total o parcial) de procedimientos; descomposición de problemas complejos en otros de menor complejidad y establecimiento de un orden de resolución; indicaciones a seguir en el desarrollo del problema; y representación de la figura de partida junto a la de llegada” (Marmolejo & González, 2015, pág. 319).

- *Contenido*: Considera la visualización desplegada en el desarrollo de una tarea.

- *Visibilidad*: “Se relaciona con el fraccionamiento introducido en las figuras, sub-figuras convexas, complementariedad de formas, desdoblamiento, grado de

inclinación de la figura o de un eje de simetría, ubicación del centro de homotecia y características del contorno” (Marmolejo & González, 2015, pág. 319).

- Iconismo: “Características del objeto o acción física representada o aludida” (Marmolejo & González, 2015, pág. 319).

3.4.4 Niveles de autonomía

Alude a la capacidad de pensar y tomar decisiones por sí mismo entrelazando, privilegiando o ignorando variados puntos de vista (Kamii & López, 1982). Permite la toma de decisiones que susciten la regulación del aprendizaje en función de la meta, contexto o condiciones establecidas (Monereo & Castelló, 1997).

La investigación evidenció que, al tomar decisiones o introducir estrategias de enseñanza, el educador puede promover (*Autonomía Favorable*) o no (*Autonomía Inviabile*) oportunidades para que los estudiantes asuman como suya, y de forma autónoma, la responsabilidad de construir conocimiento o desarrollar habilidades cognitivas; asimismo, el profesor puede considerar simultáneamente acciones que susciten lo uno o lo otro, siendo las inviabiles, las mayoritariamente incluidas (*Autonomía Parcial*).

En este sentido, la importancia de esa categoría en la investigación se relaciona con las posibilidades que brinda la planificación de acciones visuales a través de la R(p/a) en el desarrollo de las capacidades de analizar, sintetizar y evaluar los procesos de aprendizaje (Villavicencio, 2004).

4 Resultados y discusión

En este apartado se presenta los resultados de la investigación y se realiza su discusión. En cuanto al primer aspecto, se expresa en dos momentos: análisis a priori (predictivo) y análisis a posteriori (descriptivo). El segundo aspecto, por su parte, se contempla mediante el contraste entre los dos análisis previamente reseñados. En este sentido, en el análisis a priori, se consideran los comportamientos visuales que el EF pretendió promover con la aplicación de las tareas diseñadas, asimismo las estrategias que introdujo para suscitar la consideración de tales procedimientos. También, se exponen los momentos a través de los cuales el EF pretendió suscitar reflexiones sobre el acto de planificar.

En el análisis a posteriori, se describe cómo el EF, al llevar las tareas al aula, suscitó la planificación como objeto de reflexión, cuáles fueron las estrategias que incluyó, qué acciones visuales privilegió, y, si en el proceso, estimuló u obstaculizó oportunidades para que sus estudiantes desarrollaran pensamiento autónomo. Finalmente, en el contraste entre el análisis a priori y el a posteriori, puntualmente, se define el vínculo entre las estrategias que el EF utilizó para promover la planificación de transformaciones visuales y las oportunidades que, implícitamente generó, para el desarrollo de pensamiento autónomo.

4.1 Análisis a priori

Permite alcanzar el primero de los objetivos específicos, puntualmente, permitirá identificar cuáles de los elementos de control visual considerados por el EF son objeto de reflexión, asimismo, se da respuesta a las cuestiones ¿Qué rol desempeñaron las transformaciones visuales y elementos de control visual considerados por el EF?

Contempla tres instancias: 1) presentación de la propuesta de enseñanza diseñada, 2) descripción de los momentos a considerar para el estudio de la planificación y 3) procedimientos visuales esperados y elementos de control incluidos. En lo que sigue se describe en detalle cada instancia.

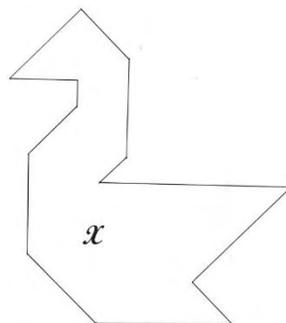
4.1.1 Presentación de la propuesta de enseñanza

La propuesta de enseñanza diseñada (Tabla 1) pretende introducir a los estudiantes de grado tercero de primaria, al estudio del área, el perímetro y sus posibles relaciones, por primera vez y desde una perspectiva que privilegia la magnitud como objeto de reflexión.

Tabla 1.

Tareas diseñadas y aplicadas

Tarea 1
Utilicen las fichas del tangram para construir dos figuras distintas.
Tarea 2
Utiliza las fichas del tangram para cubrir totalmente la superficie de la Figura (figura representada abajo). No debes sobreponer entre sí las partes de las figuras del Tangram ni dejar espacios de la superficie de la Figura X sin recubrir.

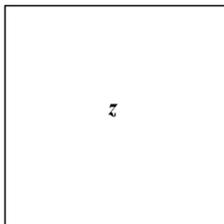


Fuente. Este estudio

Tabla 1. (Continuación).

Tarea 3

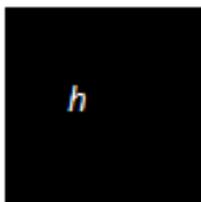
En la Imagen de abajo se representa un cuadrado que designaremos con la letra **Z** De acuerdo al proceso realizado en la tarea anterior verifica si puedes aplicarlo con la figura *z*. describe en detalle el proceso realizado en este caso.

**Tarea 4**

Utiliza las cintas que te entregó el profesor para comparar el contorno de la figura de superficie *z* con el contorno de la figura de superficie *x*.

Tarea 5

Ordena de mayor a menor las figuras abajo representadas. Considera primero las cantidades de superficie de cada una de las figuras y luego sus longitudes de contorno.



Fuente. Este estudio

La propuesta de enseñanza considera cuatro momentos. En el primero (Contorno Vs Superficie) se relacionan características cualitativas de las figuras con los conceptos de contorno y superficie, y se establecen diferencias entre ellos. En el segundo (Superficie: cantidad, equivalencia y orden) y tercero (Contorno: longitud, orden y equivalencia) se exploran herramientas para comparar figuras según sus perímetros y áreas, y se promueve la construcción de figuras con características métricas particulares. En el último momento (longitud de contorno y cantidad de superficies) se analizan las posibilidades y tipos de relación entre las dos magnitudes contempladas.

4.1.2 Momentos a considerar para promover la enseñanza de la planificación

El EF en el intento de hacer que sus estudiantes entendieran el término planificar y lo consideraran en el desarrollo de tareas visuales, propuso de manera previa a la aplicación de la propuesta de enseñanza cinco momentos: *Inverso* (Inv), *Directo simple* (Ds), *Ejercitación* (Ej), *Directo justificativo* (Dj) y *Coordinación* (Co). Se aplicaron una a continuación del otro y su explicitación coincidió con el desarrollo de cada una de las tareas propuestas (Momento 1 con la Tarea 1, Momento 2 con la Tarea 2, etc.).

Cada momento tuvo un propósito distinto que buscaba la inclusión de la planificación en el desarrollo de tareas matemáticas. En este sentido, los momentos Inverso y Directo simple propendieron, respectivamente, a la “comprensión del término planificar y a la discriminación, en retrospectiva, de los pasos que determinan los caminos a seguir”, y a la “adaptación de un tipo de planificación, a partir de otro previamente establecido, lo que implica ignorar o adicionar los pasos a seguir y establecer un nuevo orden de secuenciación”. Mientras que el momento de Ejercitación, “ejercitó la aplicación del proceso de planificación establecido para resolver tareas previas, el momento Directo justificativo, “enfaticó que la planificación varía según el tipo de tarea propuesta y ejercitó el diseño de nuevos procesos de planificación”. A diferencia del momento Directo simple, en el Directo justificativo, los estudiantes, por sí mismos, fueron los responsables de justificar el porqué de los pasos considerados al planificar. En cuanto al último de los momentos, “buscó la articulación entre las planificaciones previamente establecidas y las venideras”

4.1.3 Transformaciones visuales esperadas y elementos de control incluidos:

Todas las tareas que el EF aplicó en la investigación tienen un enunciado en lengua natural, tres de ellas (segunda, tercera y quinta tarea) reseñan las figuras con letras minúsculas. En todas las tareas la visualización es la que guía el proceso de resolución, pues, la potencia heurística de las figuras involucradas es alta, y se incluyen elementos de control que pretenden suscitar la consideración de transformaciones visuales específicas. La resolución de ninguna de las tareas, exige la aplicación de conceptos o procedimientos matemáticos de ningún tipo, menos la utilización de fórmulas. En cuanto a los conocimientos necesarios para solucionar las tareas, son básicos (reconocimiento de figuras bidimensionales, descomposición de figuras en partes más pequeñas e identificación de las partes de las figuras, es el caso de los lados, vértices y ángulos). En cada tarea se exige una explicación y justificación de los procedimientos que los estudiantes pondrán en juego.

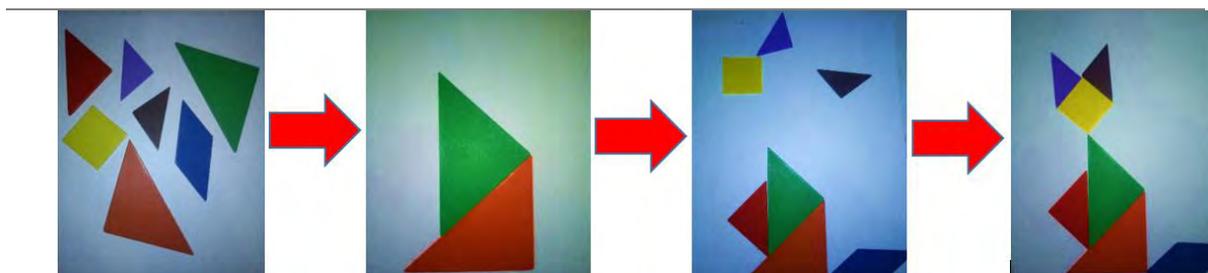
Las tres primeras tareas privilegiaron transformaciones visuales externas, en la cuarta tarea, transformaciones visuales internas, y en la última de las tareas, transformaciones visuales articuladas. Los tres tipos de transformaciones fueron comandados por la operación de configuración, pero, solo en las transformaciones visuales articuladas se incluye la aplicación de un fraccionamiento. En lo que sigue se presentan las transformaciones visuales esperadas y los elementos e control incluidos.

Tarea 1: su resolución exige la aplicación de la operación de configuración. Para su consideración es necesario, aplicar operaciones intraconfigurales como la rotación y la traslación (ver tabla 2). Lo anterior busca evidenciar que las figuras son susceptibles de transformación, y que con partes iguales es posible configurar nuevas figuras de forma distinta e igual cantidad de área. En cuanto a los elementos de control visual, son tres los

que se incluyen: procedimiento, visibilidad y preguntas. Mientras que los dos primeros, pretenden promover la aplicación de la operación de configuración, el tercer elemento de control apunta a suscitar la reflexión sobre el acto de planificar.

Tabla 2.

Transformación visual considerada en la resolución de la tarea 1



Fuente. Este estudio

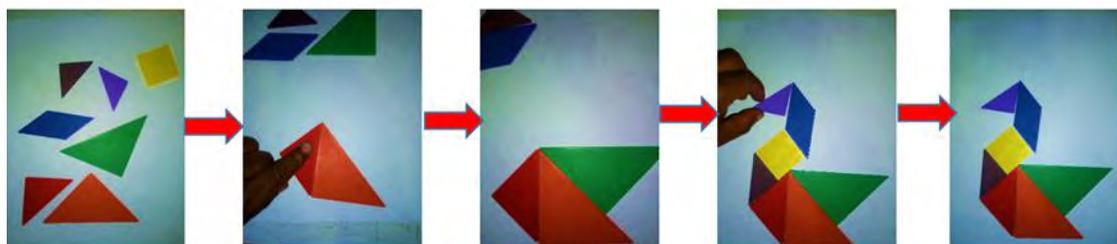
En este sentido, el procedimiento como elemento de control se determina de forma explícita en la consigna de la tarea a través de la inclusión de la expresión “reúnanse en parejas y utilicen las fichas del tangram para formar dos figuras distintas”. El EF debe entregar a cada grupo de estudiantes una copia del tangram, así, se pretende que los estudiantes reorganicen las figuras entregadas y a partir de ellas construyan una nueva figura. La visibilidad por su parte, está presente a través de las características del contorno de las figuras entregadas a los estudiantes (lados iguales o distintos entre las figuras). Su discriminación propiciará la comparación entre las figuras y determinará el cómo agruparlas. En cuanto al tercer elemento de control (preguntas), se incluye a través de la explicitación de preguntas abiertas, es el caso de ¿cómo te das cuenta que esta es la ficha que va allí? ¿Esta figura la puedes ubicar en un lugar distinto y obtener el mismo

resultado?, las cuales serán expuestas por el educador paralelo al desarrollo de la tarea, con ellas el EF pretende generar reflexión sobre los procesos a considerar en su resolución.

Tarea 2: la tarea solicita cubrir la superficie de una figura a partir de un conjunto de superficies dadas. Su desarrollo exige la aplicación de operaciones intraconfigurales tipo rotación y traslación. En la tabla 3 se presenta el flujo de las transformaciones consideradas.

Tabla 3.

Transformación visual considerada en la resolución de la tarea 2



Fuente. Este estudio

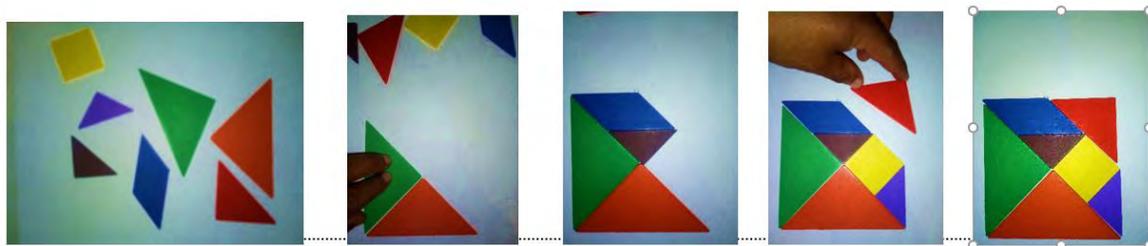
Los elementos de control visual que se incluyen en el proceso de resolución son dos, primero, el procedimiento que se evidencia cuándo de manera explícita en la consigna de la tarea, y en lengua natural, se designan acciones que dirigen la manera de proceder. En este caso, la expresión “cubrir totalmente la superficie de la figura”, da indicios que determinan la operación u operaciones a aplicar sobre la figura. Segundo, la visibilidad, igual que la tarea previa, se relaciona con las características del contorno de la figura inicial (figura cóncava) que guía el reagrupamiento de las partes dadas y su adecuada colocación sobre la figura de partida. Por otro lado, la posibilidad de generar reflexión en el acto de planificar

se considera a través de la interacción como elemento de control regulativo, en particular la interacción unidireccional, con la que, de manera previa a la presentación de la tarea, el EF explicita sus indicaciones y precisa las formas de proceder.

Tarea 3: la naturaleza de esta tarea es similar a la anterior, pues en ella se solicita cubrir la figura de partida con el conjunto de superficies dadas. Igualmente, este hecho, exige la aplicación de operaciones de rotación y traslación (ver tabla 4).

Tabla 4.

Transformación visual considerada en la resolución de la tarea 2



Fuente. Este estudio

En este sentido, los elementos de control visual que el EF incluye son el procedimiento, el contenido y la visibilidad. El primer elemento de control, se evidencia en la consigna de la tarea que sugiere la acción a realizar (utilizar el procedimiento utilizado para resolver la Tarea 2 para solucionar la nueva tarea). El segundo elemento de control, por su parte, se da cuando el mismo desarrollo de la tarea exige establecer relaciones entre la tarea previa y la nueva tarea propuesta, lo anterior, con el propósito de identificar si el proceso de resolución es el mismo. Finalmente, el elemento de control visibilidad se da cuando se identifica el

tipo de figura representada (polígono regular) y cómo sus propiedades geométricas (figura convexa, lados iguales) sugieren el tipo de reconfiguración a considerar.

Tarea 4: la naturaleza de esta tarea es distinta a las tres que se han resuelto, pues, en ella no se pide ni la construcción de figuras ni su recubrimiento a partir de superficies dadas, en este caso hay que hacer uso de cintas de colores para establecer elementos que permitan la comparación entre el contorno de las dos figuras expuestas (figuras representadas en las tareas 2 y 3 respectivamente), para su resolución, es necesario contemplar acciones visuales, entre otras, pasar de centrar la atención en la superficies de las figuras a focalizarla en sus unidades unidimensionales y aplicación de operaciones (uniones, rotaciones y traslaciones) entre segmentos (ver tabla 5).

Tabla 5.

Transformación visual considerada en la resolución de la tarea 4



Fuente. Este estudio

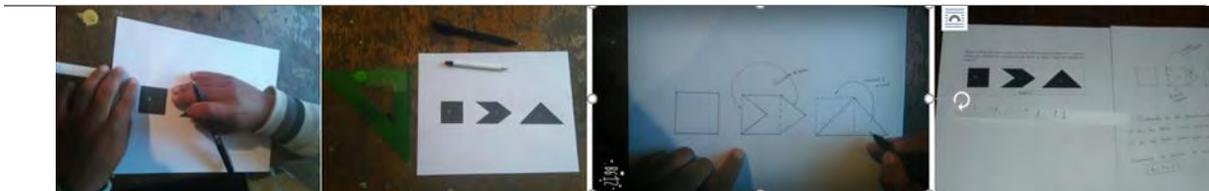
En este sentido, los elementos de control que el EF incluyó son dos, el procedimiento y el contenido, el primero se da cuando en la consigna de la tarea se pide comparar el contorno de las dos figuras, y el segundo elemento de control se privilegia cuando se tiene

en cuenta las propiedades geométricas de los polígonos regulares e irregulares y pasa a centrar la atención en los elementos constituyentes de las figuras [segmentos].

Tarea 5: su resolución exige la aplicación de las operaciones de configuración y fraccionamiento, en particular, es necesario aplicar operaciones intraconfigurales como la rotación, traslación y unión (de superficies o segmentos) (ver tabla 6).

Tabla 6.

Transformación visual considerada en la resolución de la tarea 5



Fuente. Este estudio

Así, el procedimiento como elemento de control se identifica en la consigna de la tarea cuando se señala la acción a considerar “ordenar de mayor a menor las figuras representadas”. Son dos los aspectos que se consideran, primero, el ordenamiento de las figuras de acuerdo a la cantidad de superficie y segundo de acuerdo la longitud de contorno. Otro elemento de control considerado es la visibilidad que está demarcada por la forma del contorno de las figuras que sugieren el fraccionamiento a introducir y que determinan las partes claves, para comprender el tipo de transformación a considerar.

4.2 Análisis a posteriori

En este apartado, se generan elementos que responden las cuestiones relacionadas con el segundo y tercero de los objetivos específicos, es el caso de ¿Qué estrategias

metacognitivas de planificación fueron consideradas por el EF para suscitar el estudio de la planificación de acciones visuales? ¿Qué elementos de control regulativo fueron considerados por el EF? ¿Cuáles de los elementos de control regulativo propiciaron oportunidades para el desarrollo de pensamiento autónomo? ¿Cuáles no? ¿Cómo el método de enseñanza adoptado por el EF suscitó la consideración de elementos de control regulativo?

En este sentido, la investigación evidenció que los momentos considerados para suscitar el desarrollo de la planificación desencadenaron procedimientos de enseñanza de naturaleza distinta. Su caracterización, aportó elementos que reconocen a la planificación como una actividad regulativa que promueve la generación de pensamiento autónomo y guía el proceso de aprendizaje. En lo que sigue se describen las estrategias y/o elementos de control considerados por el EF en cada momento de planificación, su caracterización se presenta teniendo en cuenta la relación entre los momentos de planificación.

4.2.1 Momentos de planificación inverso y directo simple

Estos son los dos primeros Momentos de planificación que el EF considera su modelo de enseñanza, en ellos, se consideraron el mismo número de estrategias de planificación, siendo la orientación y la aplicación comunes, y la retrospectiva y la reflexión consideradas solo en uno u otro Momento de planificación. En ambos Momentos de planificación, para el caso de la estrategia de orientación y en el primer Momento de planificación, para el caso de la aplicación y la retrospectiva, los elementos de control que suscitaron su inclusión fueron: preguntas cerradas, interacciones unidireccionales y gestos (utilizados para resaltar partes de figuras que evidencian la configuración, como la operación a considerar). A diferencia, en el segundo Momento de planificación, en el caso de las estrategias de

reflexión y aplicación, respectivamente, se incluyeron preguntas abiertas o interacciones bidireccionales, en uno y otro caso, articuladas a interacciones unidireccionales, preguntas cerradas y elementos de control visual, como el procedimiento y visibilidad.

La común unión de las estrategias de planificación y de los elementos de control reseñados suscitaron la discriminación de una serie de pasos (así como su orden de aplicación) que, al ser considerados, previamente al desarrollo de las tareas 1 y 2, permitieron, en el primer caso, comprender el problema planteado, identificar los procedimientos visuales posibles, considerar cómo aplicarlos y entender el término planificación así como su rol en la resolución de la tarea, y en el segundo caso, adaptar un tipo de planificación a otro según la naturaleza de la tarea propuesta. La secuenciación de estos pasos, aluden a la planificación 1 y planificación 2 (ver ilustraciones 1 y 2)

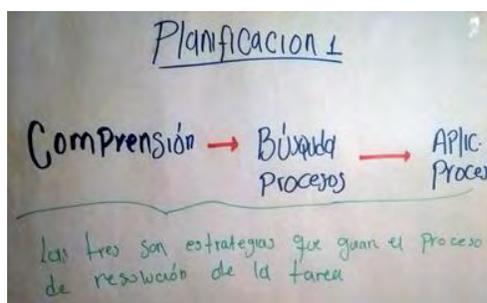


Ilustración 1. Pasos de planificación 1

Fuente. Este estudio

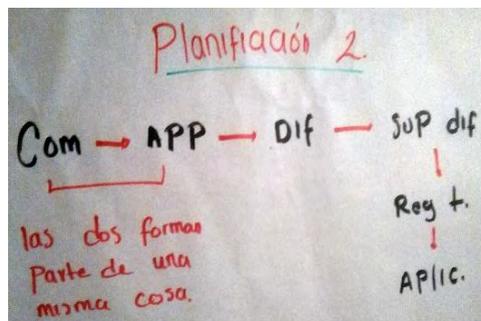


Ilustración 2. Pasos de planificación 2

Fuente. Este estudio

Si bien, los elementos de control considerados en cada una de las estrategias anteriormente reseñadas apoyaron y guiaron la consecución de los objetivos propuestos en los Momentos de planificación mencionados, así como la promoción de las estrategias planificativas asociadas, previo a su consideración e independientemente de la estrategia considerada, fueron objeto de inclusión tanto preguntas abiertas como interacciones bidireccionales. Pero, la mayoría de los estudiantes, no asignaron sentido a las actividades planteadas por el EF: manifestaron no comprender las consignas del educador, no aprovecharon el tiempo asignado y no recurrieron a las estrategias metacognitivas iniciales para construir el proceso de planificación.

Cuestión que llevó al EF a considerar nuevos elementos de control, es el caso de los reportados en párrafos anteriores. Estos fungieron como objetos de atención y comprensión para los estudiantes, suscitando el desarrollo de la actividades propuestas y promoviendo que el educador diera vida a estrategias específicas, pero, a la vez, hicieron inviable cualquier posibilidad para que la autonomía, en los procedimientos de los estudiantes, fuera un asunto de importancia; al contrario, se suscitaron comportamientos totalmente dependientes de las acciones del educador, privilegiándose el parafraseo, la repetición o el seguimiento “al pie de la letra” de las cuestiones o aserciones planteadas por el EF. En este sentido, fueron procedimientos generalizados y recurrentes en los estudiantes, el seguimiento, paso a paso, de las indicaciones del EF; en el profesor, las respuestas a las preguntas por él mismo planteadas, la organización y registro de la información pertinente e incluso, el establecimiento y registro de los procedimientos a seguir y las respectivas conclusiones. Lo anterior, se logra evidenciar en el siguiente extracto de uno de los registros de observación realizados en la investigación.

... Observen las fichas que les acabo de entregar [Tangram]. Reúnanse en parejas y utilícenlas para formar dos figuras distintas. Primero, pónganse de acuerdo en cuáles son los pasos que van a considerar y cómo van a explicar en la hoja que les acabo de entregar, el procedimiento que realizaron; tengan en cuenta ¿qué palabras van a utilizar? ¿Qué van a decir?, y ¿En qué orden lo van a hacer? Cuando hayan terminado, cada grupo le entregará la hoja a otro grupo, leerán el escrito del otro grupo y dirán ¿Qué piensan de él?, y explicaran ¿Qué no entienden y por qué? Luego, entre los dos grupos, van a buscar ¿Cuáles son las diferencias en la forma como resolvieron la tarea que les acabé de colocar, ¿Cuál de los dos procedimientos, es el mejor, y explicarán por qué?

[Los estudiantes se ubicaron en binas y procedieron, algunos, a jugar con las fichas del Tangram; otros, a conversar; algunos a armar figuras, pero utilizando una parte de las fichas, no todas; otros cuantos, alzaron la mano para preguntar al profesor qué debían hacer. Con el objetivo de que los estudiantes “entendieran qué había que hacer y lo hicieran”, el profesor, dirigiéndose al grueso de estudiantes mostró como realizar la actividad y escribió en el tablero, los pasos por él seguidos]

... ya vieron qué es lo que hay que hacer, ahora, dibujen en la hoja la figura que construí y escriban los pasos que coloqué en el tablero...Juan recuérdale a tus compañeros cuáles son los pasos que debemos hacer para construir figuras con las fichas del tangram. [el estudiante leyó los pasos escritos en el tablero] ... ¡Muy bien! ... ¿Pueden usar los pasos del tablero para construir más figuras? ...Siiiiii, ¿Cuántas? ¿Muchas, cierto?

Solo en las dos últimas estrategias del momento dos, el profesor logró suscitar, aunque parcialmente, el recurso de la autonomía, esto a través de intervenciones de los

estudiantes suscitadas por acción de las interacciones bidireccionales posibilitadas por el profesor, o al dar respuestas a las preguntas abiertas por él enunciadas, lo cual suscitó la presentación explicación o argumentación, por parte de los estudiantes, de sus procedimientos o respuestas (a otros estudiantes o al mismo profesor).

Así, los estudiantes comenzaron a fungir como actores dinámicos de su propio proceso de construcción de conocimiento, y por primera vez, asignaron por sí mismos, sentido al uso de gestos y de figuras; los primeros, al indicar las acciones que aplicaban o consideraban aplicar en las figuras en cuestión; los segundos, al realizar exploraciones heurísticas que suscitaban ideas para enfrentar la actividad propuesta.

Cuestiones como las anteriores son determinantes para la construcción del pensamiento autónomo, pues, los gestos tienen un impacto en el pensamiento mismo, ya que, “transmiten directamente imágenes mentales¹ a formas visibles, transmitiendo ideas que el lenguaje no siempre puede expresar” (Mcneill, 1992), En cuanto a las figuras, son soportes heurísticos que suscitan la conducta de abducción, es decir determinar de entrada la clase de hipótesis o alternativas que han de considerarse en la resolución de un problema o en la búsqueda de una demostración (Duval, 1999).

En la tabla 7 se caracterizan de forma sintética los Momentos de planificación reseñados previamente (primera columna). Se consideran las estrategias de planificación, así como su aporte en la consecución de los momentos (segunda columna), los elementos de control promovidos por el educador para suscitar las estrategias y el efecto que tuvieron al favorecer o no, el desarrollo de la autonomía (tercera columna). Considerando que los elementos de control adoptados no siempre suscitaban la inclusión de las estrategias de

¹ En palabras de Duval (1999), representaciones semióticas interiorizadas

planificación en juego, se diferenciaron los elementos de control que no suscitaron su inclusión (Obstáculo: Ob) de aquellos que sí les indujeron (Inductiva: In). Finalmente, en la cuarta columna se presenta el nivel de autonomía promovido de acuerdo al efecto de los elementos de control.

Tabla 7.

Momentos de planificación Inverso y Directo simple, elementos de control que les tipifican

Momento	Estrategia: aporte²	Control³	Nivel de Autonomía
Inv.	Orientación: “comprender la consigna de la tarea e identificar procedimientos pertinentes para su resolución”	Ob: PA, IBid.	Favorable
	Aplicación: “identificar cómo aplicar las reflexiones previamente consideradas”	In: PC, IUni, Ges, Fig.	Inviabile
	Retrospectiva: “detectar de forma a posteriori los pasos que implícitamente considerados, hicieron posible la resolución de la tarea”	Ob: PA, IBid. In: PC, IUni, Ges.	Favorable Inviabile
Ds	Orientación: “identificar similitudes y diferencias entre la Tarea 1 y la Tarea 2”	Ob: PA, IBid. Ges, Fig.	Favorable
		In: PC, IUni, Ges, Fig.	Inviabile
	Reflexión: “verificar la pertinencia de la	Ob: PA, IBid.	

² Las frases entre comillas presentes en las tablas 7, 8 y 9 corresponden al propósito de cada estrategia de regulación expresadas por el EF en las entrevistas realizadas.

³ Considerado las limitaciones de la tabla es necesario abreviar los términos correspondientes a los elementos de control, así: preguntas abiertas (PA), preguntas cerradas (PC), interacciones unidireccionales (IUni), interacciones bidireccionales (IBid), gestos (Gest), Figuras (Fig)

planificación 1 en el desarrollo de la Tarea 2” y “determinar si es necesario considerar pasos adicionales o ignorar algunos de los ya incluidos”		Favorable
	In: IUni, IBid.	Parcial
	Ob: PA.	
Aplicación: “utilizar, paso a paso, la planificación construida para resolver la Tarea 2”		Favorable
	In: PC, PA, IUni, Ges, Fig.	Parcial

Fuente. Este estudio

4.2.2 Momentos de planificación de Ejercitación y Directo justificativo

En relación a estos Momentos de planificación, al igual que los dos primeros (Inverso y Directo simple), consideraron tres estrategias de planificación: la Orientación y Aplicación, en ambos casos; el Obstáculo, en el Momento de planificación de Ejercitación y la Reflexión, en el Directo justificativo. A su vez, los elementos de control incluidos para promocionar las estrategias reseñadas, en el Momento de planificación de Ejercitación, lo fueron para la Orientación, las preguntas cerradas y abiertas, interacciones unidireccionales y gestos; para la Aplicación, las preguntas abiertas y gestos. Con respecto a la estrategia Obstáculo, son dos los elementos de control que le suscitaron: interacciones bidireccionales y figuras.

En el Momento de planificación Directo justificativo, por su parte, se contemplaron en las estrategias de Orientación y Aplicación, el uso recurrente de preguntas abiertas e interacciones unidireccionales, mientras que los gestos y las figuras, fueron exclusivas de la estrategia de Orientación. Por otra parte, para la estrategia de Reflexión en el Momento de planificación Directo justificativo, lo fueron: preguntas abiertas, interacciones unidireccionales y/o bidireccionales y gestos.

Igual que sucedió en los dos primeros Momentos de planificación (Inverso y Directo simple), en el de Ejercitación y Directo justificativo, la articulación entre las estrategias de planificación y elementos de control, soportaron el explicitación de un conjunto de pasos que 1) permitieron relacionar y aplicar los pasos de planificación previamente establecidos y 2) enfatizar en la necesidad del diseño de nuevos procesos de planificación según la naturaleza de la tarea propuesta. Su secuenciación, se presenta en la ilustración 3 y se designó con el nombre de planificación 3.



Ilustración 3. Pasos de planificación 3

Fuente. Este estudio

En efecto, los elementos de control como preguntas abiertas, cerradas y la articulación entre las interacciones unidireccionales y bidireccionales, fungieron como soporte para movilizar cada una de las estrategias de planificación reseñadas y alcanzar el objetivo en cada momento de planificación, asimismo, fueron objeto de reflexión por parte de los estudiantes, dando lugar al desarrollo de las tareas propuestas y en la mayoría de los casos promoviendo el desarrollo de la autonomía en los estudiantes. Solo en la estrategia obstáculo del momento de planificación de Ejercitación no hubo promoción de pensamiento autónomo, esta situación se justifica en el siguiente extracto de entrevista.

Los mismos pasos de planificación no sirven para todas las tareas. Para planificar cómo resolver nuevas tareas, debemos considerar modelos [de planificación] que hemos utilizado antes. No siempre basta con quitar pasos o inventarse otros, muchas veces será necesario encontrar obstáculos que no dejan planificar: qué tipo de obstáculo es y qué obstaculiza. De esta manera podremos buscar como eliminar el obstáculo..., son muchas las cosas que debemos hacer, por eso, creo que es la estrategia más difícil y no genera oportunidades para el desarrollo de la autonomía..., si tuve problemas con algunas de las otras estrategias, que no eran tan difíciles, entonces para que no me pase lo mismo, debo explicarla muy bien y mostrar cómo hacer. Si no lo hago, será difícil que los estudiantes la consideren”.

“ya entendieron [los estudiantes] que había obstáculos para planificar, que debían ubicarlos y decir en qué consisten y buscar como quitarlos, en esta ocasión les ayudé, pero, en el último Momento de planificación la idea era que ellos intentaran solitos aplicar lo aprendido, por eso no les ayudé mucho, los dejé a ellos.

En la tabla 8 se caracteriza sintéticamente lo expuesto en párrafos anteriores

Tabla 8.

Momentos de planificación de Ejercitación y Directo justificativo, elementos de control que les tipifican

Momento	Estrategia: aporte	Control	Nivel de Autonomía
	Orientación: “comprender qué pasos de las Planificación 2 pueden, o no, ser considerados para Planificar la resolución de la Tarea 3”	In: PC, PA, IUni, Ges.	Parcial
Ej.	Obstáculo: “identificar la dificultad que obstaculiza la planificación y establecer su naturaleza”	In: IUni, Fig.	Inviabile
	Aplicación: “Aplicar los pasos a seguir para resolver la Tarea 3”	In: PA, Ges.	Favorable
Dj	Orientación: “Identificar el rol de los pasos que conforman la Planificación 2 en la resolución de la Tarea	In: PA, IUni,	Parcial

4"	Ges, Fig.
Reflexión: "seleccionar o inhibir los pasos de la Planificación 2 que pueden, o no, ser considerados para planificar el desarrollo de la Tarea 4 (en caso de ser necesario, identificar la naturaleza de nuevos pasos) y establecer un orden de aplicación"	In: PA, IUni, IBi, Ges. Parcial
Aplicación: "Aplicar la planificación 3 para resolver la tarea 4)"	In: PA, IUni. Parcial

Fuente. Este estudio

4.2.3 *Momento de planificación de Coordinación*

Este es el último momento de planificación que el EF consideró en su modelo de enseñanza, aquí, a diferencia de los Momentos de planificación previos es el que mayor cantidad de estrategias considera. Son cinco las estrategias de planificación que le determinan: Orientación, Reflexión, Obstáculo, Regularización y Aplicación, siendo, la primera y la última común en todos los Momentos de planificación, el Obstáculo solo en el Momento de planificación de Ejercitación y la Reflexión en el Momento Directo justificativo. La Regularización, por su parte, es exclusiva de este último Momento de planificación.

Sobre los elementos de control que promocionaron la inclusión de las estrategias reseñadas en éste último Momento de planificación, y que fueron un soporte para el tránsito del pensamiento autónomo, fueron de uso recurrente en todas las estrategias de planificación las figuras. En la Orientación, Reflexión y Aplicación, preguntas abiertas e interacciones bidireccionales, y de las anteriores, en la Reflexión y Aplicación los gestos. El Obstáculo, fue determinado por preguntas cerradas, interacciones bidireccionales y gestos, y en la Regularización, preguntas abiertas y cerradas, interacciones unidireccionales y gestos.

Teniendo en cuenta lo anterior, los elementos de control privilegiados en este Momento de planificación aportan elementos para la generación del pensamiento autónomo, pues, los estudiantes por sí mismos inician la resolución de una problemática, exponen y enfatizan sus dificultades, aun las que explícitamente, y a través de la lengua natural, no logran evidenciar, planean los pasos a seguir, buscar alternativas en los momentos difíciles, etc. Lo anterior, se ejemplifica en el extracto de entrevista.

Ya tenemos unos pasos que nos ayudaran a resolver esta tarea [aludiendo a la tarea 4]. Individualmente, los van a utilizar para resolver la Tarea 5. Deben explicar por escrito ¿cómo los van a utilizar? ¿Por qué? ¿En qué orden lo harán?

¿Cómo te ayudan las fichas del tangram y las cintas que te entregué para solucionar la tarea? ¿En qué te sirven las figuras de la tarea 5? ¿Qué miraste en ellas? ¿Para qué te sirvió ver en ellas? ¿Qué información te aportó?, y ¿Cómo la utilizaste?”. Dentro de un rato, pasaré por el puesto de cada uno para revisar lo que han hecho

[Los estudiantes proceden de acuerdo a las indicaciones del profesor y este va de puesto en puesto y, si mediar intervención alguna, lee sus producciones]

“! Ya, todos terminaron, muy bien. Ahora, Marquitos [quien, en palabras del profesor, fue quien realizó la explicación más detallada] nos dirá cómo resolvió la tarea. A ver ¿qué palabras y expresiones utilizaste? ¿Cómo te diste cuenta cómo debías utilizar las cintas de colores? ¿Qué conclusión nos puedes decir? ¿Cómo comparaste el contorno de las figuras? ¿Cómo comparaste las superficies de las figuras?

[El estudiante procedió a leer su procedimiento y al mismo tiempo que respondían las cuestiones planteadas explicaba el porqué de su proceder, manipulaba las cintas de

colores, recorriendo el borde de cada figura. A través de gestos y explicitando en voz alta semejanzas entre los lados de las formas, señaló, reiterativamente, las partes del contorno de las figuras y las operaciones a aplicar sobre ellas, por unión de segmentos, estableció la forma de comparar los contornos de las figuras de la tarea, y a través de fraccionamientos y la aplicación de operaciones intraconfigurales de rotación y traslación, estableció la comparación entre las superficies de las figuras]

... Muy bien, ya todos entendimos como se hace la tarea 5.

En la tabla 9, se presenta de forma sintética lo expuesto en párrafos anteriores.

Tabla 9.

Momento de planificación de Coordinación, elementos de control que le tipifican

Momento	Estrategia: aporte	Control	Nivel de Autonomía
Co	Orientación: “Discriminar las diferencias y similitudes entre la tarea propuesta y las previamente desarrolladas”	In: PA, IBid, Fig.	Favorable
	Obstáculo: “establecer porqué (identificar las causas) los pasos de panificación considerados al planificar el desarrollo de tareas anteriores, por sí mismos, no posibilitan la planificación de la tarea en desarrollo”	In: PC, IBid, Ges, Fig.	Parcial
	Regularización: “Proponer posibles acciones que inhiban el obstáculo que impide la planificación de la tarea a desarrollar”	In: PA, PC, IUni, Ges, Fig.	Parcial
	Reflexión: “Determinar la pertinencia de las decisiones adoptadas en la estrategia anterior para la planificación del desarrollo de la tarea que se está realizando”	In: PA, IUni, IBid, Ges, Fig.	Parcial
	Aplicación: “Utilizar los pasos de planificación para desarrollar la tarea”	In: PA, IBid, Ges, Fig.	Favorable

Fuente. Este estudio

4.3 Contraste entre el análisis a priori y a posteriori

En este apartado, se da el alcance del último de los objetivos específicos, es decir, se establece el vínculo entre las oportunidades que brindan los elementos de control y estrategias de planificación en el desarrollo de la planificación de acciones visuales, y se determinan cuáles son los niveles de autonomía que promovió el EF de acuerdo a los elementos y/o estrategias de planificación movilizados. En los apartados previos, se expuso el modelo de enseñanza de la planificación que fue promovido por el EF y su caracterización en función de los descriptores presentados en el apartado de metodología.

Al establecer el contraste entre el análisis a priori y el a posteriori, se logra identificar dos aspectos a considerar, 1) el efecto de los elementos de control y estrategias de planificación en la planificación de acciones visuales y 2) el vínculo entre las estrategias y/o elementos de control con las posibilidades que brinda la planificación para el desarrollo del pensamiento autónomo.

4.3.1 Efecto de los elementos de control y estrategias de planificación en la planificación de acciones visuales.

La aplicación de los momentos para la enseñanza de la planificación, evidenció que los elementos de control considerados en el análisis a priori fueron limitados, y por si solos no permitieron el desarrollo de la planificación, en consecuencia, el EF se vio en la necesidad de incluir nuevos elementos de control, es el caso de las preguntas abiertas, interacciones bidireccionales y gestos, con los que logró asignar sentido a las actividades propuestas. Lo anterior, se ve evidenciado en los primeros momentos del modelo de enseñanza considerado (momento Inverso y Directo simple). Asimismo, con la intención de planificar introdujo un conjunto de estrategias de regulación, es el caso de las estrategias de Orientación y Aplicación que en el Momento de planificación Inverso, promocionaron la

consideración de acciones visuales (configuración de figuras), que se utilizaron (por el profesor) para suscitar el desarrollo de la tarea 1, la retrospectiva, por su parte, focalizó su atención en la discriminación de los pasos que previamente fueron considerados para lograr el desarrollo de la tarea.

En un sentido distinto, el Momento de planificación Directo simple, a través de la estrategia de Orientación se aludió a la diferenciación, en términos visuales entre las figuras consideradas en las tareas 1 y 2. En un caso, como figuras de partida, se tenían un grupo de figuras, las cuales al unirse debían formar otra, y en el otro caso, la actividad a realizar era la misma, pero la forma de la figura de llegada fue dada de inicio y en ella no se reflejaba fraccionamiento alguno que indicará como ubicar las figuras de partida. Tal discriminación fue utilizada por el profesor para evidenciar que sí la información visual expuesta en las figuras era distinta, entonces, el tipo de planificación a considerar, en las tareas donde ellas habían sido incluidas, también debía ser distinta. En este sentido, las estrategias de Reflexión propiciaron la necesidad de adaptar la planificación inicialmente considerada en la tarea 1 (Planificación 1), propiciando un nuevo tipo de planificación (planificación 2), acorde al desarrollo de la tarea 2. La estrategia de Aplicación, por su parte, indujo la inclusión de los pasos para desarrollar la tarea, estos fueron los que suscitaron la inclusión de nuevas acciones visuales, es el caso, de comparar figuras guiados por la forma de sus contornos e introducir fraccionamientos sobre la figura de llegada.

En los Momentos de planificación restantes, fue la planificación la que suscitó la inclusión de nuevas acciones visuales. En el Momento de Ejercitación la unión de figuras para formar otra cuyo contorno global (y la falta de un fraccionamiento) no dan pistas de cómo ubicarlas; en la momento 4, el paso de centrar la atención en la superficie de una

figura a hacerlo en sus lados y la aplicación de operaciones sobre las unidades 1D que constituyen las figuras consideradas (los lados): rotación, traslación y unión de segmentos; y en el Momento de planificación de Coordinación, la consideración compuesta de las acciones visuales anteriormente reseñadas. En dichos casos, todas las estrategias de planificación apoyaron el estudio de tales acciones visuales a partir de la reflexión sobre los tipos de planificación a considerar (Momento de planificación Directo justificativo) o a ejercitar (Momentos de planificación de Ejercitación y Coordinación).

Se evidencia, pues, que la propuesta de enseñanza aplicada suscitó oportunidades para que la planificación apoyará la inclusión y reflexión, de las tres acciones visuales consideradas en la investigación (las transformaciones visuales externas, a partir del segundo Momento de planificación).

En cuanto a los elementos de control que suscitaron la planificación de acciones visuales, en la mayoría de las estrategias consideradas, las estructuras de control contempladas de forma recurrente son las preguntas abiertas las que ofrecen sus apoyo al desarrollo de procesos visuales, sea acompañada de otras estructuras que no inducen autonomía, es el caso de interacciones bidireccionales (Momento de planificación Inverso y Directo simple), preguntas cerradas, interacciones unidireccionales (Orientación, Momento de planificación de Ejercitación); o de aquellas que si promocionan el pensamiento autónomo, es el caso de, gestos (Aplicación, Momento de Ejercitación), interacciones bidireccionales y figuras (Orientación, Momento de Coordinación), en estos casos, el poder de lo visual tomó sentido.

4.3.2 Vínculo entre las estrategias y/o elementos de control con las posibilidades que brinda la planificación para el desarrollo del pensamiento autónomo.

De acuerdo al efecto producido por los elementos de control y de las estrategias de planificación puestas en juego por el EF en cada momento de planificación se distinguen como se dijo en el apartado de metodología tres niveles de autonomía: favorable, inviable y parcial. En este sentido, aunque, los elementos de control contemplados fungieron como soporte para que las estrategias de planificación reseñadas en párrafos anteriores apoyaran la consecución del objetivo propuesto en cada uno de los Momentos de planificación, solo la Orientación y Aplicación hicieron de la autonomía algo favorable, en los demás casos, fue de forma parcial.

A pesar de que los elementos de control reseñados privilegiaron en los dos Momento de planificación iniciales (Inverso y Directo simple), y en la mayoría de las estrategias consideradas, un aprendizaje totalmente dependiente de las decisiones y acciones del educador, el objetivo en ambos casos fue alcanzado. Lo cual, parece ser fundamental para que en los Momentos de planificación restantes se promovieran dos cuestiones que pueden favorecer, aunque con ciertas limitaciones, el desarrollo del pensamiento autónomo. Ambas cuestiones asociadas a la inclusión de interacciones bidireccionales y preguntas abiertas, por un lado, fueron consideradas con mayor recurrencia acompañadas de preguntas cerradas y/o interacciones unidireccionales y, por otro lado, propiciaron oportunidades para asignar sentido a las actividades propuestas y no fue necesario, como sí sucedió en los Momentos de planificación iniciales, implementar nuevos elementos de control, tras fracasar la inclusión de los elementos considerados en una primera instancia. En cuanto a las estrategias de regulación, la situación reportada, fue diferente: Obstáculo y Aplicación

(Momento Ej), Orientación y Aplicación (Co), mientras que, en la primera de ellas, fue inviable la autonomía, en las otras, le favorecieron.

En este sentido, si se ignora el efecto de la estrategia de Obstáculo en el Momento de planificación de Ejercitación y teniendo en cuenta que a) en el primer Momento de planificación e inicio del segundo, los elementos de control al suscitar las estrategias en juego hicieron inviable la promoción de la autonomía, b) que, en el último Momento de planificación, al contrario, está el mayor número de estrategias que favorecieron la autonomía, y c) que en los Momentos de planificación restantes, el favorecimiento de la autonomía fue parcial; se podría afirmar que los elementos de control inicialmente incluidos, y que suscitaron un total fracaso en la consecución de los propósitos establecidos, comenzaron a asumirse de forma natural por los estudiantes. A través de ellos, fue posible un tránsito hacia el desarrollo de pensamiento autónomo.

En cuanto a las estrategias cuyo aporte al desarrollo de pensamiento autónomo fue Favorable en el penúltimo (Orientación) y último (Aplicación) de los Momentos de planificación, la situación varió de un caso a otro. Mientras que la Orientación evidenció una progresión en el nivel de autonomía promovido de un Momento de planificación a otro, la Aplicación, mostró una regresión en el Momento de planificación Directo justificativo (Tabla 8). Lo anterior podría explicarse, en el primer caso, por la recurrente consideración de la Orientación en todas los Momentos de planificación y el deseo del EF de delegar en los estudiantes en el último Momento de planificación, toda responsabilidad para la inclusión de las estrategias de planificación, lo cual se demuestra en la en la no consideración de preguntas cerradas e interacciones unidireccionales.

CONCLUSIONES

Este trabajo determina su importancia por los aportes novedosos dentro del campo de la educación matemática, pues, en él, se caracteriza cómo un educador matemático a través de los elementos de control suscita la inclusión de estrategias de planificación al desarrollar tareas donde la visualización desempeña un rol determinante, y en el proceso, genera oportunidades para el desarrollo del pensamiento autónomo.

Se asumió como marco conceptual la metacognición (Flavell, 1976), la visualización (Duval, 1999); (Marmolejo & Vega, 2012) y el pensamiento autónomo (Holec, 1981), en particular, lo referente a estrategias metacognitivas, ya que estas son las que soportan o promueven el desarrollo de procesos cognitivos (Osses & Jaramillo, 2008) y fungen como una de las principales actividades a ser consideradas en el trabajo del profesor (Gutiérrez & Salvador, 2006); Por tanto, es importante, establecer cómo se suscitan y se determinan cómo objeto de enseñanza a través del estudio de tópicos específicos, y en el proceso, apoye tanto el desarrollo de la autonomía en los procedimientos de los estudiantes como de la visualización.

Asimismo, durante el proceso de investigación suscitaron aspectos que determinan la importancia de considerar la autonomía, pues como lo evidencian las investigaciones realizadas por Holec (1981) la inclusión de estrategias metacognitivas favorece el aprendizaje autónomo. Pero, ¿basta con promocionar estrategias de planificación para promover oportunidades para el desarrollo del pensamiento autónomo? La investigación, aporta elementos que dan respuesta negativa a la cuestión planteada.

Los resultados muestran que promover procesos de enseñanza que induzcan la planificación en el desarrollo del pensamiento autónomo es un asunto arduo y complejo, lo cual se percibe en la diversidad de estrategias de planificación a considerar y los distintos efectos que suscitan, por ejemplo, la promoción por parte del profesor, de una misma estrategia, puede en unos casos favorecer y en otros inhibir las oportunidades que se ofrecen a un sujeto para que desarrolle pensamiento autónomo. Detrás de tal complejidad, está el tipo de elección que el profesor realiza para incentivar la consideración de una u otra estrategia de planificación.

En este sentido, de la elección que haga el educador de los elementos de control para promocionar la inclusión de las estrategias de planificación pueden promover e incluso obstaculizar el desarrollo de la visualización y la generación del pensamiento autónomo. Por tanto, es urgente que para inducir la enseñanza de la planificación en sus primeros momentos y articular su desarrollo a la generación de oportunidades para que promocionen tanto la visualización como la autonomía, los programas de formación docente deben brindar espacios de reflexión que propicien y caractericen su desarrollo.

De ignorarse el hecho de que la planificación es susceptible de enseñanza puede llevar a los educadores a no comprender su rol en el desarrollo de procesos cognitivos, mucho menos a considerar que esta varía de acuerdo a la naturaleza de la problemática planteada. Por tanto, en los procesos de enseñanza deben considerar o privilegiar elementos de control que induzcan la promoción de habilidades cognitivas, en este caso, el desarrollo de la visualización en la construcción de conocimiento matemático, sea desde perspectivas totalmente dependiente de sus propias acciones, decisiones y juicios, tal cual como sucedió en las primeras momento del modelo analizado.

En relación a lo anterior, es necesario que las líneas de investigación y que coinciden con este estudio, giren en torno a elementos que aún no han sido considerados: 1) teniendo en cuenta que la población seleccionada para esta investigación es un educador en formación, se podría replicar el estudio de caso bajo condiciones en las cuales la población seleccionada sean educadores en ejercicio y que no hayan reflexionado sobre las posibilidades que brinda la visualización en la resolución de tareas. 2) de acuerdo a los resultados del estudio, considerar tareas con poco contenido visual y que en el proceso se articulen a procesos cognitivos distintos, es el caso del razonamiento y la modelación, cuestiones determinantes para el estudio de las matemáticas, y posteriormente utilizar el instrumento de análisis que esta investigación asumió para determinar cuáles de las categorías de análisis brindan mayores potencialidades, para la inclusión de estrategias de planificación que propendan la generación de un pensamiento autónomo.

Desde un punto de vista totalmente distinto, y teniendo en cuenta, por un lado, que los resultados de la investigación evidenciaron un vínculo entre la planificación, el desarrollo de la autonomía y la visualización, y, por otro lado, que la visualización debe propiciarse como objeto de reflexión en el aula (Marmolejo & Vega , 2012) y la planificación es un soporte para el desarrollo procesos y actividades cognitivas (Schneider & Artelt, 2010), entonces es necesario considerar como cuestiones de investigación ¿cómo la sinergia planificación-autonomía-visualización puede ser favorecida? ¿Qué objetos matemáticos le suscitan? ¿Cuáles estrategias de planificación, así como estructuras de control, le benefician?

Finalmente, es de relevancia que se siga indagando sobre la generación de un aprendizaje autónomo y el desarrollo de la visualización desde la perspectiva de esta

investigación, pues, como se logró evidenciar, los elementos de control articuladas a las estrategias de planificación determinan el camino a seguir en los procedimientos de los estudiantes. En este sentido, cuestiones a ser consideradas serían ¿Cómo el educador, desde las primeras momentos de la enseñanza de la planificación, hace que sus estudiantes tomen conciencia y susciten la autonomía y el desarrollo de la visualización? ¿Al variar el contexto matemático cómo influyen los elementos de control en la inclusión de estrategias de planificación? ¿Al considerar un proceso metacognitivo diferente a la planificación, los elementos de control continúan promoviendo el desarrollo de la autonomía? ¿Las habilidades de planificación desarrolladas perduran de un ciclo de enseñanza a otro, o se mantienen al variar el contexto matemático? ¿La forma como los estudiantes responden a la propuesta de enseñanza citada, así como sus efectos, depende del ciclo de enseñanza y contexto matemático considerado?

BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Grupo editorial iberoamerica.
- Artzt, A., & Armour, E. (1992). Development of a Cognitive-Metacognitive Framework for Protocol Analysis of Mathematical Problem Solving in Small Groups. *Cognition and Instruction*, 137-175.
- Balacheff, N., & Gaudin, N. (2010). Modeling student conceptions. The case of function. *Issues in Mathematics Education*, 183-211.
- Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa*. Barcelona: Grupo editorial CEAC, SA.
- Chamorro, M. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la*. Madrid: Tesis Doctoral microfilmada. UNED.
- Cleary, T., & Zimmerman, B. (2004). Self-regulation empowerment program: A school-based program to enhance self-regulated and self-motivated cycles of student learning. *Psychology in the Schools*, 537-550.
- Duval, R. (1998). *Geometry from a cognitive point a view*. Estrasburgo: C. Mammana and V. Villani (eds.), Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, Kluwer Academic Publishers.

- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano : registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Santiago de Cali: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2003). Voir en mathématiques. *Matemática educativa. Aspectos de la investigación actual*, 41-76.
- Duval, R. (2004). *Cómo hacer que los estudiantes entren en las representaciones geométricas. Cuatro entradas y... una quinta*. Madrid: chamorro Ed.
- Escribano, A. (1995). Aprendizaje cooperativo y autónomo en la enseñanza universitaria. *Enseñanza*, 89-102.
- Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. *The nature of intelligence*, 231-235.
- Fraudental, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. *Educational Studies in Mathematics*, 223-228.
- Fresenborg, E., Kramer, S., Pundsack, F., Sjuts, J., & Sommer, N. (2010). The role of metacognitive monitoring in explaining differences in mathematics achievement. *ZDM Mathematics Education*, 231-244.
- García , A., & Santarelli, N. (2004). Los procesos metacognitivos en la resolución de problemas y su implementación en la práctica. *Educación Matemática*, 127-141.
- Garofalo, J., & Lester, F. (1985). Metacognition, Cognitive Monitoring, and Mathematical Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 163-176.

- Gutiérrez, R., & Salvador, F. (2006). El proceso de planificación en la expresión escrita de alumnos sordos. Estudio de casos en educación secundaria. *Revista de educación. Madrid*, 435-453.
- Holec, H. (1981). *Autonomy and Foreign Language Learning*. Oxford: Pergamon.
- Kamii, C., & López, P. (1982). La autonomía como objetivo de la educación: implicaciones de la teoría de Piaget. *Journal for the Study of Education and Development*, 3-32.
- Knowles, M. (1975). *Self-directed learning. A guide for learners and teachers*. New York: Association Press.
- Kramarski, B., Mevarech, Z., & Arami, M. (2002). The effects of metacognitive instruction on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 225-250.
- Lara , A. (2012). Desarrollo de habilidades de pensamiento y creatividad como potenciadores de aprendizaje . *Revista Unimar*, 85-96.
- Lester, F. (1994). Musings about mathematical problem-solving research. *Research in Mathematics Education*, 660-675.
- Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises. *Journal of Mathematical Behavior*, 405- 427.
- Lobato, C. (2006). *Estudio y trabajo autónomo del estudiante*. Alianza Universidad.
- López, E. (2006). El proceso de formación de las competencias creativas. Una necesidad para hacer. *Revista Iberoamericana de Educación* , 3-25.

- Marmolejo, G. (2014). *Desarrollo de la visualización a través del área de superficies planas. Análisis de libros de texto colombianos y españoles*. Salamanca: Tesis Doctoral.
- Marmolejo, G., & González, M. (2013). Visualización en el área de regiones poligonales. Una metodología de análisis de textos escolares. *Educación Matemática*, 61-102.
- Marmolejo, G., & González, M. (2015). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.*, 301 - 328.
- Marmolejo, G., & González, M. (2017). análisis metacognitivo de libros de texto colombianos y españoles. Función de control visual en el tratamiento del concepto de área de superficies planas. *no publicado*.
- Marmolejo, G., & Vega , M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. *Educación Matemática*, 7-32.
- Marmolejo, G., & Vega, M. (2012). La visualización en las figuras geométricas. Importancia y complejidad de su aprendizaje. *Educación Matemática*, 7-32.
- Marmolejo, G., Vega, M., & Galeano , E. (2017). Reconfigurando figuras bidimensionales. *No publicado*.
- Martínez, R. (2007). Concepción de aprendizaje y estrategias metacognitivas en estudiantes universitarios de psicología. *Anales de Psicología*, 7-16.
- Mcneill, D. (1992). *Hand and Mind: What gestures reveal about thought*. Chicago: Chicago University Press.

- Mevarech, Z., & Kramarski, B. (1997). Improve: A Multidimensional Method For Teaching Mathematics in Heterogeneous Classrooms. *American Educational Research Journal*, 365-394.
- Mevarech, Z., & Kramarski, B. (1997). Improve: A Multidimensional Method For Teaching Mathematics in Heterogeneous Classrooms. *American Educational Research Journal*, 365-394.
- Mevarech, Z., & Fridkin, S. (2006). The effects of IMPROVE on mathematical knowledge, mathematical reasoning and meta-cognition. *Metacognition and Learning*, 85-97.
- Mevarech, Z., Terkieltaub, S., Vinberger, T., & Nevet, V. (2010). The effects of meta-cognitive instruction on third and sixth graders solving word problems. *ZDM Mathematics Education*, 195-203.
- Meza, V. (2004). Characterizing practices associated with functions in middle school textbooks: An empirical approach. *Educational Studies in Mathematics*, 255-286.
- Monereo, C., & Castelló, M. (1997). *Las estrategias de aprendizaje. Cómo incorporarlas a la práctica educativa*. Barceona: Edebe.
- Osses, S., & Jaramillo, S. (2008). Metacognición: un camino para aprender a aprender. *Estudios Pedagógicos* , 187-197.
- Paz, H. (2011). ¿Cómo desarrollar la metacognición en la educación superior mediante la resolución de problemas? *Ingeniería e Investigación*, 213-223.
- Ramsden, P. (1994). Current Challenges to Quality in Higher Education. *Innovative Higher Education*, 177-187.

- Rico, L., Marín, A., Lupiñaes, J., & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 7-23.
- Rojas, T. (2006). Planificación cognitiva en la primera infancia: una revisión bibliográfica. *Acta Colombiana de Psicología*, 101-114.
- Salmerón, H., Gutiérrez, C., Salmerón, P., & Rodríguez, S. (2011). Metas de logro, estrategias de regulación y rendimiento académico en diferentes estudios universitarios. *Revista de Integración Educativa*, 467-486.
- Sánchez, J., Castaño, O., & Tamayo, O. (2015). La argumentación metacognitiva en el aula de ciencias. *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud*, 1153-1168.
- Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 149-161.
- Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition. *Cognitive Science and Mathematics Education*, 189-215.
- Schraw, G., & Moshman, D. (1995). Metacognitive Theories. *Educational Psychology review*, 351-371.
- Schraw, G., Crippen, K., & Hartley, K. (2006). Promoting Self-Regulation in Science Education. *Research in Science Education*, 111-139.
- Stillman, G., & Galbraith, P. (1998). Applying mathematics with real world connections: metacognitive characteristics of secondary students. *Educational Studies in Mathematics*, 157-194.

- Valdez, V., & Machorro, M. (2014). El desarrollo de aprendizaje autónomo a partir de la identificación de los estilos de aprendizaje. *Vida Científica Boletín de la Escuela Preparatoria No. 4*.
- Van der Stel, M. V. (2010). The increasing role of metacognitive skills in math: a cross-sectional study from a developmental perspective. *ZDM Mathematics Education*, 42: 219-229. doi:10.1007/s11858-009-0224-2.
- Van der Stel, M., Veenman, M., Deelen, K., & Haenen, J. (2010). The increasing role of metacognitive skills in math: a cross-sectional study from a developmental perspective. *ZDM Mathematics Education*, 219-229.
- Vermunt, J. (1995). Process oriented instruction in learning and thinking strategies . *European Journal of Psychology of Education*, 325-349.
- Vermunt, J. (2005). Relations between student learning patterns and personal and contextual factors and academic performance. *Higher Education*, 205-234.
- Villavicencio, L. (2004). El aprendizaje autónomo en la educación a distancia. *primer congreso virtual latinoamericano de educación a distancia*, 1-11.
- Wang, M., Haertel, G., & Walberg, H. (1993). Toward a knowledge base for school learning . *Review of Educational Research*, 249-294.
- Zimmerman, B. (1989). A Social Cognitive View of Self-Regulated Academic Learning. *Journal of Educational Psychology*, 329-339.

Zimmerman, B., & Martínez , M. (1986). Development of a structured interview for assessing student use of self regulated learning strategies. *American Educational Journal*, 614-628.