RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ESTRATEGIAS MATEMÁTICAS

NAZLY YURANI CABEZAS QUIÑONES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2017

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIANTE ESTRATEGIAS MATEMÁTICAS

NAZLY YURANI CABEZAS QUIÑONES

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciada en Matemáticas

Asesor
John Hermes Castillo Gómez
Doctor en Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2017

San Juan de Pasto, Febrero 9 de 2017

Nota de Aceptación

John Hermes Castillo Gómez
Presidente de Tesis

Gabriel Dario Uribe Guerra
Jurado

Omar Andrés Lasso Solis
Jurado

NOTA DE RESPONSABILIDAD

Las ideas y conclusiones aportadas en este Trabajo de Grado son Responsabilidad de los autores.
Artículo 1 del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966, emanado por el Honorable Concejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Este trabajo está dedicado a:
Mi madre Nubia Quiñones Guerrero como reconocimiento a su labor, sacrificio y valiosos consejos.
Nazly

Resumen

La resolución de problemas ofrece un espacio a partir del cual se puede apreciar otra faceta de las matemáticas, que se puede considerar como llamativa, innovadora e inclusive puede ser considerada divertida, y que al mismo tiempo le ofrece a sus practicantes situaciones retadoras en las cuales poner a prueba su ingenio y curiosidad, y especialmente una oportunidad para mejorar constantemente. El presente trabajo busca presentar un camino a seguir para aquellas personas que se interesan en la resolución de problemas matemáticos.

En este trabajo presentaremos algunas de las muchas estrategias que existen para la solución de problemas, ¡claro está! todas con el mismo objetivo, dar al lector las herramientas que necesitará para resolver problemas matemáticos, tarea que aunque algunas veces no llegue a feliz término, si deberá dejar la inquietud en el lector para seguirlo intentando. Aquí se estudiarán las siguientes estrategias: *Dividir el problema en casos, buscar un patrón de comportamiento, explotar la simetría y el principio del palomar*. Cada estrategia va acompañada de cuatro problemas los cuales se van desarrollando mediante preguntas orientadoras, simulando una conversación entre el docente y los alumnos; todo esto, con el fin de guiar a los estudiantes y ayudarles a resolver el problema. Estas preguntas le pueden ayudar a los estudiantes a pasar por cada uno de los cuatro pasos que sugiere George Pólya y que deben darse en la resolución de todo problema: *comprender el problema, concebir un plan, ejecutar el plan y examinar la solución obtenida*. Es necesario aclarar, que las conversaciones maestro-alumno aquí desarrolladas son presentadas a manera de ilustración, ya que no son producto de un desarrollo de clase real.

Adicionalmente, al final de cada capítulo se deja un listado de problemas propuestos; esto con el objetivo de que el lector tenga una oportunidad de poner en práctica las estrategias estudiadas. Muchos de los problemas resueltos y propuestos, fueron tomados de diversas fuentes, pero en especial resaltamos que algunos provienen de olimpiadas matemáticas como: Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico, Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad Industrial de Santander, Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad de Nariño, Canguro Matemático Mexicano y de los exámenes de ingreso a la Universidad del Cauca.

En este trabajo, el criterio utilizado para escoger un problema determinado, bien sea en los resueltos o en los propuestos, fue el de que este permitiera ejemplificar la estrategia estudiada, más allá de tener en cuenta su nivel de exigencia y tal vez sin considerar a que público está dirigido. Sin embargo, la mayoría de problemas vienen acompañados del evento del cual fue tomado, esto con dos objetivos: indicarle al lector el nivel del problema y mostrarle donde se puede encontrar más material para seguir capacitándose.

Abstract

This dissertation aims to show a methodology for those who are interested in problem solving. By studying problem solving strategies, we perceive another facet of mathematics, actually one that could be considered appealing, innovative or even fun compared with the traditional one; this approach invites us to face challenging situations and to constantly enhance our mathematical skills.

Therefore, in this work we present some of the many strategies of problem-solving that exist; of course, all with the same goal, to facilitate the solution of a problem, reducing and sometimes eliminating procedures or calculations. Here, we study the following strategies: *divide into cases, find a pattern, symmetry and the pigeonhole principle*. Each strategy is accompanied by four problems which are developed by guiding questions, simulating a conversation between teacher and students; all this in order to guide students and help them to solve a problem, these questions could help the students to follow and to practice each of the four steps proposed by George Polya: *understand the problem, devise a plan, carrying out the plan and looking back*.

In this work, the criterion used to choose a problem, either solved or proposed, was principally that the problem gives us an opportunity to present the studied strategy, without considering its level or difficulty and even more without thinking about the audience. Nevertheless, several of the problems here presented include an small reference to the event where they were taken, with the purpose of offers an opportunity to find more information about problem-solving.

Índice general

Introducción

En la sociedad actual hay tantos temas de los cuales se podría hablar, quizás la pobreza, el desempleo o si nos vamos al medio ambiente, la gran contaminación que crece diariamente; eso por citar algunos de los muchos problemas que padece la sociedad en general, algunos de estos tendrán solución y otros no serán posibles resolverlos. Al igual que en la vida, en las matemáticas encontramos una sorprendente cantidad de problemas, algunos con mayor complejidad que otros, claro esto depende de la persona que quiera resolverlos.

De ahí surge la pregunta ¿Qué es un problema? Un problema en matemáticas, según Cai y Lester [?] es considerado como una tarea que tiene el potencial para proporcionar los retos intelectuales que pueden mejorar el desarrollo matemático de los estudiantes. Es decir; son actividades que no sabemos a simple vista como resolver, pero que al enfrentarse a ellos el estudiante mejora su entendimiento de la matemática. Por tal motivo, estos problemas, requieren de análisis cuidadosos que en la mayoría de los casos conducen a la solución.

Dicho esto, es muy importante que los maestros en sus clases trabajen con problemas matemáticos para explicar un determinado tema, que son los que les permitirán interiorizar realmente los conceptos; por el contrario algunas actividades no son lo suficientemente problemáticas para los estudiantes y por lo tanto solo deben considerarse como ejercicios, con los cuales se pueden entrenar los métodos aprendidos sobre un tema determinado.

Pero ¿cómo saber qué es un problema y qué es un ejercicio? O dicho de otra forma ¿cuál es la diferencia entre problema y ejercicio? De acuerdo con Zeitz [?] un ejercicio es una pregunta que la persona sabe inmediatamente cómo resolver, si lo resuelve de manera correcta o no, depende de la habilidad que el individuo tenga y de las técnicas específicas que haya aplicado. En contraste, un problema exige mucho más, se encuentra y pone en juego la reflexión y el ingenio antes del enfoque correcto. Así por ejemplo, se podría entender por ejercicio el siguiente.

Ejercicio 1. Calcule 5436^3 sin calculadora.

Observe que no hay ninguna duda de que procedimiento seguir, simplemente multiplicar con cuidado. Por otro lado, la siguiente pregunta es más sutil y podría ser considerada un problema para algunas personas.

Ejercicio 2. Escriba

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$

como una fracción en su mínima expresión.

A primera vista, es otro ejercicio tedioso, que consiste en sumar todos los 99 términos con cuidado, y esperar obtener la respuesta correcta en base de mucha paciencia. Sin embargo, si analizamos detenidamente los primeros términos, descubrimos que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

lo que conduce a la conjetura de que para todos los enteros positivos n,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Así que ahora nos enfrentamos a otro problema: ¿ésta conjetura es verdadera? y si es así, ¿cómo probamos su veracidad? Si tenemos experiencia en este tipo de asuntos, esto sigue siendo un simple ejercicio de inducción matemática. Pero si no somos experimentados, es un problema, no es un ejercicio. Para solucionarlo, tenemos que pasar algún tiempo, probando diferentes enfoques.

Por lo tanto para que un problema logre nuestro objetivo es necesario que sea un problema que valga la pena, es decir que dé a los estudiantes la oportunidad de consolidar y ampliar lo que saben y estimulen el aprendizaje de las matemáticas. Entonces, ¿cómo es un problema que valga la pena? o ¿qué características debe tener un problema interesante? Según G. Lappan y E. Phillips[?] un problema debe dirigir a los estudiantes a investigar ideas matemáticas importantes y maneras de pensamiento encaminadas a alcanzar las metas de aprendizaje, además de satisfacer algunos de los siguientes criterios.

1. El problema involucra matemática útil e importante.
2. El problema requiere un pensamiento de más alto nivel y el uso de estrategias de resolución de problemas.
3. El problema contribuye al desarrollo conceptual de los estudiantes.
4. El problema crea una oportunidad para que el profesor evalúe lo que sus estudiantes están aprendiendo y descubra donde están experimentando dificultades.
5. El problema puede ser abordado por los estudiantes en varias formas utilizando diferentes estrategias de solución.
6. El problema tiene varias soluciones o permite diferentes decisiones o posiciones que deben tomarse y defenderse.
7. El problema fomenta la participación del estudiante y el discurso.
8. El problema se conecta a otras ideas matemáticas importantes.
9. El problema promueve el uso hábil de las matemáticas.
10. El problema ofrece la oportunidad de practicar habilidades importantes.

Según Lappan y Phillips [**?**] no es razonable esperar que todos los problemas que elige un maestro deban satisfacer todos los diez criterios; es mejor que el problema aplicado por el profesor tenga los criterios que el maestro desee transmitir a sus estudiantes. Claro está que esto dependerá de los objetivos que el maestro tenga para su clase. En esta dirección, el Ejercicio **??** pone en juego los criterios 1, 2, 3, 4 y 10. Sin embargo, Lappan y Phillips [**?**] afirman que los primeros cuatro criterios deberían ser considerados esenciales en la selección de todos los problemas, y que el valor real de estos criterios es que proporcionan a los maestros pautas para tomar decisiones sobre cómo lograr que la resolución de problemas sea un aspecto central de su enseñanza.

La resolución de problemas juega un papel importante en las matemáticas y debe tener un papel destacado en la educación matemática de estudiantes de cualquier nivel educativo. Sin embargo, saber cómo incorporar la resolución de problemas de manera significativa en el currículo de matemáticas, no es necesariamente una tarea fácil. El término "resolución de problemas" se refiere a las tareas matemáticas que tienen el potencial para proporcionar desafíos intelectuales con el fin de mejorar la comprensión y el desarrollo matemático de los estudiantes. Afortunadamente, una cantidad considerable de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de resolución de problemas matemáticos se ha llevado a cabo durante las últimas cuatro décadas, ver [**?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**, **?**].

Es tan importante el papel que desempeña la resolución de problemas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que es el primero de los cinco procesos generales que se contemplaron en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas [**?**], debido a que involucra todos los demás procesos con distinta intensidad en sus diferentes momentos; más aún, podría convertirse en el principal eje organizador del currículo de matemáticas, porque las situaciones problemas proporcionan el contexto inmediato en donde el quehacer matemático cobra sentido, en la medida en que las situaciones que se aborden estén ligadas a experiencias cotidianas y, por ende, sean más significativas para los alumnos. Las situaciones problemas permiten desarrollar una actitud mental perseverante e inquisitiva, desplegar una serie de estrategias para resolverlos, encontrar resultados, verificar e interpretar lo razonable de ellos, modificar condiciones y originar otros problemas.

Debido a la importancia que tiene la resolución de problemas para el desarrollo intelectual del estudiante, este trabajo no solo presentará algunas estrategias que ayuden a solucionar problemas, si no que también implementará el método de Pólya en cada una de las estrategias estudiadas, mostrando el destacado papel que cumplen las preguntas orientadoras a la hora de plantear un problema, ya que muestra un camino para que el estudiante entienda el problema, cree su propio plan, ejecute su plan y revise la solución obtenida. Por supuesto, se espera que estas preguntas orientadoras conduzcan a la solución del problema, aunque el objetivo final será despertar interés por el estudio de las matemáticas. Las conversaciones aquí desarrolladas son presentadas a manera de ilustración, no son producto de un desarrollo de clase real.

Muchos de los problemas aquí propuestos, algunos son tomados de diferentes evaluaciones que se desarrollan actualmente. Algunos provienen de olimpiadas matemáticas y otros del examen de admisión a la Universidad del Cauca; por esta razón para ubicar al lector, cuando un problema halla sido tomado de una evaluación en particular se seguirá el siguiente procedimiento: aparecerán las siglas que simplifican la olimpiada de donde fue tomado el problema, el nivel, el número del problema y el año en que se realizó. Así por ejemplo, las siglas (ORM-UIS, N. Me, PROB. 5, 2010) representan la Olimpiada Regional de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander, Nivel Medio, el problema 5 del año 2010.

Sigla	**Nombre**	**Web**
UDC	Universidad del Cauca	`http://unicauca.edu.co`
CMM	Canguro Matemático Mexicano	`http://ichi.fismat.umich.mx/omm/eventos/canguro.html`
ORM-UDENAR	Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad de Nariño	`http://orm.udenar.edu.co`
OMPR	Olimpiadas Matemáticas de Puerto Rico	`http://ompr.pr/`
ORM-UIS	Olimpiadas Regionales de Matemáticas Universidad Industrial de Santander	`http://matematicas.uis.edu.co/olimpiadas`

En este trabajo se presentan cuatro estrategias, que son: *dividir el problema en casos, buscar un patrón de comportamiento, buscar la simetría y el principio del palomar;* una estrategia por cada capítulo, respectivamente; en cada capítulo se desarrollan 4 problemas y se dejan 15 propuestos, cada uno de los problemas es desarrollado mediante preguntas orientadoras, las cuales buscan que el estudiante pase por las cuatro fases (comprender el problema, diseñar un plan, ejecución del plan y revisar la solución obtenida) que según George Pólya son indispensable en la resolución de todo problema. Para que se dé esta última fase, al final de cada problema aparecen unas preguntas que llevan al estudiante a revisar la solución obtenida.

Capítulo 1

Dividir el problema en casos

1.1. Introducción

¿Alguna vez haz tenido un problema tan grande que no sabes como resolver? A la mayoría nos ha pasado. Para resolverlo hemos dedicado un tiempo considerable pensando en el camino más rápido y efectivo; aún así, cada persona enfrenta sus problemas de manera diferente aunque los caminos de solución que tomen pueden coincidir; esa forma de enfrentarlos dependerá en gran medida de la actitud que tenga ante la vida; entonces, cabe preguntarnos ¿será que las soluciones a los problemas dependen exclusivamente del camino que elijamos? la respuesta es no, aunque mucho tiene que ver el camino que elijamos para resolver los problemas; también influye de forma significativa la manera de ver las cosas. Y qué bueno que sea así pues, a diferencia de las circunstancias, sobre las que no tenemos ningún control, todos podemos controlar nuestra actitud ante la vida.

La clave para enfrentarse a problemas está en la actitud. Puede ser la diferencia entre alcanzar una meta o rendirse; también determinará si un problema grave saca a relucir lo mejor o lo peor de uno. Para que se dé lo primero, debemos conocer nuestras limitaciones y proponer soluciones a partir de ahí. Por ejemplo, una persona de pocos recursos, que adquiere un préstamo, debe tener claro que para resolver este problema deberá hacerlo por partes, que por su limitación económica no podrá cubrir su deuda de contado; así el camino a elegir debería ser el pagar por cuotas. Del mismo modo, en las matemáticas nos enfrentamos con problemas "grandes" y aunque quisiéramos resolverlos inmediatamente, no es posible; el camino más viable y a veces el único es por medio de casos.

1.2. Dividir el problema en casos

Definición 1.1. Cuando se habla de dividir el problema en casos, se refiere a dividir el problema en subproblemas, cada uno de los cuales se pueden manejar por separado y la solución del problema, será la unión de las soluciones de los subproblemas.

Ahora bien, esta estrategia se da especialmente cuando el problema tiene un cuantificador universal. Por ejemplo, para la prueba de una proposición de la forma "para todos los enteros ..." podría llevarse a cabo estudiando los casos para números pares e impares por separado.
A continuación, mediante la metodología de Pólya, se presentan algunos problemas que pueden ser resueltos por medio de esta estrategia.

Ejemplo 1.1. ([?], pág. 38) Una función real f, definida en los números racionales satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo racional x y y. Pruebe que $f(x) = xf(1)$ para todo racional x.

El diálogo entre el maestro y los alumnos puede empezar como sigue:

P. Leamos detenidamente el problema anterior
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Probar que $f(x) = xf(1)$ para todo racional x.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. La función satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo racional x y y.

P. ¿En qué conjunto está definida la función?
A. En los racionales.

P. ¿Qué forma tienen los racionales?
A. Los racionales son de la forma $\frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$.

P. ¿Podríamos trabajar en algún subconjunto de los racionales?
A. Sí, en los Naturales o en los Enteros.

P. Si la función real f estuviera definida en los enteros, ¿cómo se formularía el problema?
A. Una función real f, definida en los números enteros satisface $f(x+y) = f(x) + f(y)$ para todo entero x y y. Pruebe que $f(x) = xf(1)$ para todo entero x.

P. ¿Podríamos resolver ese caso?
A. Sí.

Esperamos que en este momento el estudiante haya comprendido el problema y tenga un plan, sin importar si lo aplica bien o no, por lo menos el sabe que hacer. Así, el alumno claramente trabajará cada caso.

Caso 1. Enteros positivos.

- Para $x = 1$, se cumple trivialmente puesto que $f(1) = 1f(1)$.
- Para $x = 2$, tenemos que $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$.
- Procedemos por inducción sobre n; es decir suponga que $f(n) = nf(1)$.
- Probemos que se cumple para $n+1$. Se tiene que $f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$.

De igual forma se prueba para los enteros no positivos.

Caso 2. Enteros no positivos.

Primero $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$ restando $f(0)$ a ambos lados tenemos $0 = f(0)$ que es lo mismo que $0f(1) = f(0)$. Además, $0 = f(0) = f(1 + (-1)) = f(1) + f(-1)$ restando a ambos lados $f(-1)$ tenemos que $f(-1) = -f(1)$
Así podemos deducir que para cualquier entero positivo n, $f(n) + f(-n) = f(n + (-n)) = f(0) = 0$, es decir que $f(-n) = -nf(1)$.

Hasta aquí, el estudiante ha demostrado una parte del problema, pero ahora ¿cómo hacer para que trabaje con los inversos de los enteros?
Bueno, es fácil ver que $f(1) = 1f(1)$ así que el número 1 podemos escribirlo de varias formas, como por ejemplo $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$. De ahí que el docente podría preguntar.

P. ¿De qué otra forma se puede expresar el 1?
A. El 1 se puede expresar como $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}, \ldots, \underbrace{\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n} + \ldots \dfrac{1}{n}}_{n-veces}$.

Si el estudiante puede hacer esa deducción, no tendrá problemas en trabajar el siguiente caso.

Caso 3. Inversos de los enteros no nulos.

- Para $x = \frac{1}{2}$ tenemos $f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 2f\left(\frac{1}{2}\right)$ dividiendo por 2, $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{f(1)}{2}$
- Para $x = \frac{1}{3}$ tenemos $f(1) = f\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) + f\left(\frac{1}{3}\right) = 3f\left(\frac{1}{3}\right)$ dividiendo por 3, $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{f(1)}{3}$

P. Si continuáramos este proceso ¿qué podríamos deducir?
A. Se podría deducir que para todo entero positivo $n, f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{f(1)}{n}$.

P. ¿Qué sucede si $x = -\frac{1}{n}$? o mejor dicho ¿qué podemos deducir si expresamos $0 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}$?
A. Si $x = -\frac{1}{n}$ entonces $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n}\right)\right) = f(0) = 0$, así $f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{f(1)}{n}$.

P. ¿Cuál era la incógnita que teníamos que resolver?
A. Probar que $f(x) = xf(1)$ para todo racional x.

P. Entonces, si probamos que la ecuación la satisfacen los enteros positivos, los no positivos y los inversos de los enteros ¿qué caso nos faltaría por analizar?
A. Nos faltaría estudiar racionales de la forma $\frac{m}{n}/m, n \in \mathbb{Z} y m \neq 1$.

Caso 4. Todos los racionales de la forma $\frac{m}{n}$ tales que $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ y $m \neq 1$

Sea n un entero; entonces $f\left(\frac{2}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) = 2f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right) f(1)$. De la misma forma se procede si $\frac{m}{n}$ es un número racional, con m un entero positivo y n un entero, entonces:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{m-veces}\right) = \underbrace{f\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{1}{n}\right)}_{m-veces} = mf\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1).$$

De esta forma queda resuelto el problema.

Pero el objetivo no es solo resolver el problema, sino que también, cada persona debe estar seguro de cada paso hecho en la solución; este proceso se conoce como *mirada retrospectiva.* En este paso, se invita al lector a pensar en las preguntas que se plantean a continuación. Estas preguntas ayudan a verificar si el proceso de solución está bien ejecutado y además si es posible podría dar idea de una nueva forma de solución y muy seguramente lo invite a plantear nuevos problemas, este último objetivo se podría alcanzar si el lector se plantea sus propias preguntas e intenta resolverlas.

Mirada retrospectiva. Para el ejemplo anterior podríamos hacer las siguientes preguntas: ¿será necesario demostrar el primer caso por inducción sobre n?, ¿se podría quitar alguno de los casos considerados?, ¿por qué considerar el caso de inversos de los enteros?, ¿se podría haber resuelto el problema considerando un solo caso?, ¿podría dar ejemplos de funciones que cumplan las condiciones del problema?, en cada uno de los ejemplos que usted pudo dar ¿cuánto vale $f(1)$? y ¿podría establecerse una propiedad similar si se pide que $f(x+y) = f(x) - f(y)$ o $f(x-y) = f(x) + f(y)$, o $f(x-y) = f(x) - f(y)$?

Con el ejemplo anterior podríamos pensar que la estrategia de dividir el problema en casos se aplicaría únicamente a problemas que tengan un cuantificador universal “para todos los ...” sin embargo, cabe recalcar que no es así y que se puede aplicar a otros problemas. Por ejemplo.

Ejemplo 1.2. (OMPR, N.El[1], PROB.2, 2003 – 2004) Con los dígitos $1, 2, 3$ y 4 se quieren formar números de 4 dígitos distintos. Si el 3 debe ocupar el lugar de las centenas o el lugar de las decenas, ¿cuántos números distintos se pueden formar?

Para que el estudiante comprenda el problema es necesario que tenga claro las definiciones de decenas y centenas; para ayudarle con esta definición, la siguiente gráfica nos muestra la posición en la que está la U (Unidad), D (Decenas), C (Centenas) y UM (Unidades de Mil). Por ejemplo el número 8364 tiene 4U, 6D, 3C y 8UM.

8	3	6	4
UM	C	D	U

Figura 1.1: Decenas y Centenas

Como un padre amoroso cuida de sus hijos y trata de guiarlos por el camino más seguros que el conoce, aconsejándolos una y otra vez para que no se desvíen del mismo; así mismo ante un problema el maestro trata de conducir a sus estudiantes por la senda más segura y efectiva que conoce, pero no puede obligarlos a seguirla, todo lo contrario el objetivo es despertar su creatividad y su ingenio para construir otras formas de resolver el problema, permitiéndoles por si solos descubrir la solución y experimentar el encanto del triunfo; de ahí que las siguientes preguntas pueden servir de guía para solucionar el problema planteado o para despertar en los estudiantes nuevas ideas de resolverlo, que sería lo ideal.

P. Leamos detenidamente el problema anterior.
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Cuántos números distintos se pueden armar con los dígitos $1, 2, 3$ y 4.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Con los dígitos $1, 2, 3$ y 4 se quieren formar números de 4 dígitos distintos y además el 3 debe ocupar el lugar de las centenas o el lugar de las decenas.

P. ¿De cuántos dígitos deben estar formados los números?
A. De cuatro dígitos.

[1] En esta olimpiada los niveles se clasifican de la siguiente manera,los estudiantes de $3er$ a $5to$ grado tomarán el examen de nivel elemental (N.El). Los estudiantes de $6to$ a $8vo$ grado tomarán el examen de nivel intermedio (N.In); y los de $9no$ al $11mo$ grado, el examen de nivel superior (N.Su)

P. ¿En cuantas posiciones puede estar el 3?
A. Son dos las posiciones.

P. ¿Se pueden repetir los dígitos?
A. No, tienen que ser dígitos distintos.

P. ¿Cuántos casos se deberían considerar?
A. Dos.

Aquí el estudiante ya debe tener claro que camino seguir y tal vez no sea necesario hacer más preguntas orientadoras, porque ya pueden saber la respuesta; pero si no es así, podríamos plantear otras preguntas, que despejen las dudas que quedan y permitirles a los estudiantes llegar a la solución. Hay 2 casos por considerar: si el 3 está en las centenas o el 3 está en las decenas.

Caso 1. Si el 3 está en las centenas.

P. Si el 3 está en las centenas ¿cuántos dígitos restantes para ocupar las otras casillas quedan?
A. Quedan 3 dígitos restantes.

P. Si en la casilla de los miles fijamos un número de los tres que estaban disponibles ¿cuántos dígitos restantes quedan?
A. Quedan 2 dígitos.

P. Si en la casilla de las decenas fijamos un número de los dos que estaban disponibles. ¿Cuántos dígitos restantes quedan?
A. Queda solo uno.

P. ¿Qué se puede concluir?
A. La cantidad de números que se pueden construir será: $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Es claro que para el caso 2 procedemos de la misma forma que el caso 1.

Caso 2. Si el 3 está en las decenas.

Realizando las mismas preguntas que en el caso anterior concluimos que la cantidad de números que se pueden construir será:

$$3 \times 2 \times 1 = 6.$$

La cantidad total de números que se pueden formar será la suma de las cantidades en los dos casos; es decir:

$$6 + 6 = 12.$$

Aquí ya hemos encontrado la solución, sin embargo aún no está totalmente resulto el problema, nos queda por hacer el último paso y quizás el que siempre olvidamos considerar; *revisar la solución obtenida*, este paso nos permite verificar cada uno de los procedimientos efectuados en el desarrollo del problema.

Mirada retrospectiva. El docente podría preguntar al estudiante ¿será que los casos aquí considerados son los únicos por tomar en este problema?, ¿el problema cambia si en lugar de usar el 3 se pide usar otro número? y ¿si fuera posible usar cualquier dígito? estas preguntas ayudan al estudiante a evaluar su procedimiento.

Aunque en la mayoría de los problemas es necesario tener unos conocimientos previos que son los que permiten que el estudiante llegar a la solución; hay problemas que para resolverlos se necesita más de ingenio y habilidad, que de conocimientos matemáticos.
Veamos un ejemplo.

Ejemplo 1.3. (OMPR, N.In, PROB.27, 2007 – 2008) En una isla hay solo dos tipos de gente: los que siempre dicen la verdad y los que siempre mienten. Tres habitantes de la isla están hablando.

- Andrea dice: Bárbara siempre dice la verdad.
- Bárbara dice: Andrea y Carlos siempre dicen la verdad.
- Carlos dice: Andrea miente.

¿Quién dice la verdad?

Como es lógico debemos comprender el problema, así que para ello debemos preguntarnos una y otra vez.

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Quién dice la verdad.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. En una isla hay solo dos tipos de gente: los que siempre dicen la verdad y los que siempre mienten, y las afirmaciones que hacen cada uno de ellos.

Para resolver este problema es claro que hay que considerar varios casos. Estudiemos cada uno de los posibles casos y descartemos uno por uno hasta llegar a la respuesta.

P. ¿Cuáles serían los primeros casos a considerar?
A. Cuando los tres digan la verdad o cuando los tres mientan.

Caso 1. Los tres dicen la verdad.

Como solo uno de los casos que se van a considerar va hacer verdadero entonces lo que pretendemos es contradecir alguna afirmación.

P. ¿Qué afirma Carlos?
A. Carlos dice que Andrea miente.

P. ¿Qué implica esa información?
A. Implicaría que uno de los tres mienten, lo cual contradice la suposición inicial de que todos dicen la verdad.

Así que descartamos esta posibilidad.

Caso 2. Los tres mienten.

Vamos a utilizar el mismo procedimiento que para el caso anterior.

P. ¿Qué afirma Carlos?
A. Dice que Andrea miente.

P. Por hipótesis, ¿Qué sabemos de Carlos?
A. Sabemos que Carlos miente.

P. ¿Qué implica esa información?
A. Que Andrea dice la verdad.

Lo cual contradice el hecho de que los tres mienten. Así que descartamos esta posibilidad.

Caso 3. Andrea y Bárbara dicen la verdad y Carlos miente.

P. ¿Qué afirma Carlos?
A. Carlos dice que Andrea miente.

P. ¿Qué sabemos de Carlos por hipótesis?
A. Sabemos que Carlos miente.

P. ¿Qué implica esa información?
A. Que Andrea dice la verdad.

P. ¿Qué afirma Andrea?
A. Andrea dice que Bárbara siempre dice la verdad.

P. ¿Qué dice Bárbara?

A. Bárbara dice que Andrea y Carlos siempre dicen la verdad.

P. ¿Qué implica esa información?
A. Implica que Carlos dice la verdad, lo cual contradice el hecho de que Carlos miente.

Así que descartamos esta posibilidad.

Caso 4. Andrea miente y Bárbara y Carlos dicen la verdad.

P. ¿Qué afirma Carlos?
A. Carlos dice que Andrea miente.

P. ¿Qué sabemos de Andrea por hipótesis?
A. Sabemos que Andrea miente.

P. ¿Qué afirma Andrea?
A. Andrea dice que Bárbara siempre dice la verdad.

P. ¿Qué implica esa afirmación?
A. Implica que Bárbara miente. Lo cual contradice el hecho de que Carlos dice la verdad.

Así que descartamos esta posibilidad.

Caso 5. Andrea y Carlos dicen la verdad y Barbara miente.

P. ¿Qué afirma Carlos?
A. Carlos dice Andrea miente.

P. ¿Qué implica esa afirmación?
A. Implica que Andrea miente. Lo cual contradice el hecho de que Andrea dice la verdad.

Así que descartamos esta posibilidad.

Caso 6. Andrea dice la verdad y Bárbara y Carlos mienten.

P. ¿Qué afirma Carlos?
A. Carlos dice que Andrea miente.

P. ¿Qué sabemos de Carlos por hipótesis?
A. Sabemos que Carlos miente.

P. ¿Qué implica esa información?
A. Que Andrea dice la verdad.

P. ¿Qué afirma Andrea?
A. Andrea dice que Bárbara siempre dice la verdad.

P. ¿Qué implica esa afirmación?
A. Contradice el hecho de que Bárbara miente.

Así que descartamos esta posibilidad.

Caso 7. Carlos dice la verdad y Andrea y Bárbara mienten.

P. ¿Qué afirma Carlos?
A. Carlos dice que Andrea miente.

P. ¿Qué sabemos de Carlos por hipótesis?
A. Sabemos que Carlos dice la verdad.

P. ¿Qué implica esa información?
A. Que Andrea miente.

P. ¿Qué afirma Andrea?
A. Andrea dice que Bárbara siempre dice la verdad.

P. ¿Qué implica esa información?
A. Implica que Bárbara miente.

P. ¿Qué dice Bárbara?
A. Que Andrea y Carlos siempre dicen la verdad.

P. ¿Qué implica esa información?
A. Implica que Carlos miente o que Andrea miente, pero como por hipótesis sabemos que Carlos dice la verdad entonces Andrea miente.

Dado que en el desarrollo de toda la hipótesis no se llegó a ninguna contradicción entonces, este es el caso correcto.
Por tanto Carlos dice la verdad, pero Andrea y Bárbara mienten.

Mirada retrospectiva. En todo problema debemos evaluar el proceso realizado, para ello el docente podría preguntar ¿por qué considerar todos esos casos?, ¿para resolver el problema era necesario saber quién miente y quién dice la verdad?, ¿por qué considerar los dos primeros casos, si en la isla hay gente que dice la verdad y gente que miente?

Podemos aplicar la estrategia para problemas algebraicos como el siguiente.

Ejemplo 1.4. (OMPR, N.In, PROB.7, $2002 - 2003$) Ivón pensó en un número entero que, posteriormente, Vladimir multiplicó por 3 o por 4. Eric le sumó 1 o 3 al resultado de Vladimir, y después Yassiel dividió el resultado de Eric entre 4 o 5 y obtuvo 4. ¿Cuál es el número que pensó Ivón?

Este problema al igual que los otros lo resolveremos simulando la conversación maestro - alumno.

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Encontrar el número que pensó Ivón.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Sabemos que Vladimir lo multiplicó por 3 o por 4, Eric le sumó 1 o 3 al resultado de Vladimir, y después Yassiel dividió el resultado de Eric entre 4 o 5 y obtuvo 4.

Con la información anterior el estudiante sabe que debe considerar algunos casos para resolver el problema, sin embargo si no es así podemos ayudarlo un poco preguntando.

P. ¿Por cuántos números puede multiplicar Vladimir?
A. Vladimir puede multiplicar por dos números; por 3 o por 4.

Caso 1. Vladimir Multiplica por 3.

Entonces el número ahora sería $3x$.

P. ¿Por cuántos números puede sumar Eric?

A. Eric puede sumarle dos números; 1 o 3.

Es decir que dentro de este caso, hay otros casos por considerar.

- Eric le suma 1.
  Entonces el número ahora sería $3x + 1$.

  P. ¿Por cuántos números puede dividir Yassiel?
  A. Yassiel puede dividir entre dos números; 4 o 5.

  - Yassiel lo divide entre 4.
    Entonces sería $\frac{3x+1}{4} = 4$ es decir $x = \frac{15}{3} = 5$.
  - Yassiel lo divide entre 5.
    Entonces sería $\frac{3x+1}{5} = 4$ es decir $x = \frac{19}{3} \notin \mathbb{Z}$.

  En esta fase el estudiante debe saber que es lo que se está haciendo y por ende ya es capaz de continuar solo; es decir sin la intervención del docente.

- Eric le suma 3.
  Entonces el número ahora sería $3x + 3$, pero Yassiel puede dividir este número entre 4 o 5.
  - Yassiel lo divide entre 4.
    Entonces sería $\frac{3x+3}{4} = 4$ es decir $x = \frac{13}{3} \notin \mathbb{Z}$.
  - Yassiel lo divide entre 5.
    Entonces sería $\frac{3x+3}{5} = 4$ es decir $x = \frac{17}{3} \notin \mathbb{Z}$.

Caso 2. Vladimir Multiplica por 4.

Entonces el número ahora sería $4x$, pero Eric le puede sumar 1 o 3 a este número.

- Eric le suma 1.
  Entonces el número ahora sería $4x + 1$, pero Yassiel puede dividir este número entre 4 o 5.
  - Yassiel lo divide entre 4.
    Entonces sería $\frac{4x+1}{4} = 4$ es decir $x = \frac{15}{4} \notin \mathbb{Z}$.
  - Yassiel lo divide entre 5.
    Entonces sería $\frac{4x+1}{5} = 4$ es decir $x = \frac{19}{4} \notin \mathbb{Z}$.
- Eric le suma 3.
  Entonces el número ahora sería $4x + 3$, pero Yassiel puede dividir este número entre 4 o 5.
  - Yassiel lo divide entre 4.
    Entonces sería $\frac{4x+3}{4} = 4$ es decir $x = \frac{13}{4} \notin \mathbb{Z}$.
  - Yassiel lo divide entre 5.
    Entonces sería $\frac{4x+3}{5} = 4$ es decir $x = \frac{17}{4} \notin \mathbb{Z}$.

Por lo tanto el número que pensó Ivón fue $x = \frac{15}{3} = 5$. Este proceso permite ver que el número $x = 5$ es la única solución al problema.

Mirada retrospectiva. Para esta fase el docente podría preguntar ¿sería necesario considerar todos esos casos?, ¿podría existir otra manera de resolver el problema?, si cada uno tuviera tres opciones de números para multiplicar, sumar o dividir, ¿cuántos casos habría que considerar para resolver el problema?; preguntas de este tipo podrían ayudarles a los alumnos a revisar el proceso realizado.

1.3. Problemas propuestos

1. (OMPR, N.In, PROB.13, $2010-2011$) ¿Cuántas veces hay que escribir el dígito 2 para marcar las páginas de un libro que tiene 2016 páginas?

2. ([**?**], pág. 40) Una función de valor real f, definida en los números racionales positivos, satisface $f(x+y) = f(x) f(y)$ para todos los números racionales positivos x e y. Probar que $f(x) = [f(1)]^x$ para todo racional positivo x.

3. ([**?**], pág. 53) Sea $f(x)$ un polinomio de grado n con coeficientes reales y tal que $f(x) \geq 0$ para todo x en los reales. Pruebe que $f(x) + f'(x) + \cdots + f^n(x) \geq 0$ para todo real x. ($f^k(x)$, representa la k-ésima derivada de $f(x)$.)

4. (UDC, J. 2, V. 1[2], PROB.46, $2012-2$) En un torneo de fútbol entre cuatro equipos A, B, C, y D, en el cual jugaban todos entre sí, la puntuación fue la siguiente: A cuatro puntos; B cuatro puntos, C tres puntos y D un punto. En este torneo el equipo ganador conseguía en cada partido dos puntos, el que empataba un punto y los que perdían ninguno. Se sabe además que cada equipo metió solo un gol. ¿Cuál fue el resultado del partido entre A y B?

5. Ignacio, Diego, Santiago, Eduardo y Ana van al cine y encuentran 5 sillas consecutivas libres. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse si Ana y Eduardo quieren estar juntos, Ana siempre a la izquierda de Eduardo?

6. (OMPR, N.In, PROB.14, $2002-2003$) Julio, Uroyoán y Nilsa tienen edades diferentes. Si la suma de sus edades es tres veces la edad de Nilsa, entonces: Julio debe ser el menor, Nilsa puede ser la menor, La edad de Nilsa está entre las de Uroyoán y Julio, Uroyoán debe ser el menor.

7. (OMPR, N.In, PROB.39, $2001-2004$) En la fiesta de Halloween cada varón le dio la mano a todos los invitados excepto a su pareja y ningún apretón de manos se llevó a cabo entre mujeres. Si 13 parejas asistieron a la fiesta, ¿cuántos apretones de manos se dieron entre estas 26 personas?

8. (OMPR, N.In, PROB.11, $2008-2009$) Andrea, Carla, Julieta, Paola y María compraron boletos de tren para un viaje. Los números de los asientos eran $7, 8, 9, 10$ y 11. Los asientos impares están del lado de las ventanas. Andrea y Carla ocuparon asientos del lado de las ventanas. ¿De cuántas maneras distintas pudieron sentarse las cinco muchachas?

9. (OMPR, N.Su, PROB.3, $2008-2009$) Cada tercer día Luis dice la verdad y los demás días miente. Hoy Luis ha dicho exactamente 4 de los siguientes enunciados. ¿Cuál es el enunciado que no dijo hoy?

[2]En esta prueba los exámenes se clasifican de la siguiente manera, Jornada (J.2 o 1) y versión (V.1 o 2

a. Tengo la misma cantidad de amigas que de amigos.

b. Soy amigo de una cantidad prima de personas.

c. Mi nombre es Luis.

d. Siempre digo la verdad.

e. Soy amigo de tres personas más altas que yo.

10. Tres amigos viven en la misma calle. Uno de ellos es médico, otro es ingeniero y el otro es músico. Sus apellidos son Sáez, Ríos y Ford. El médico no tiene ningún hermano ni hermana y es el más joven de los tres. Ford es más viejo que el ingeniero y está casado con la hermana de Sáez. ¿Cuáles son los apellidos, en orden, del médico, el ingeniero y el músico?

11. Los dígitos del 1 al 9 se deben colocar en los cuadros de la figura de forma que en cada cuadro superior quede la suma de las cantidades escritas en los dos cuadros debajo de él. Si ya se ubicaron los dígitos 2 y 7, el número que queda en la casilla marcada con el símbolo ? es:

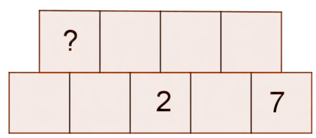

Figura 1.2: Arreglo de números.

12. En una cárcel hay 32 presos repartidos en ocho celdas de planta cuadrada. En cada celda de las esquinas hay un preso y en cada una de las centrales hay siete presos.

1	7	1
7		7
1	7	1

El carcelero cuenta cada noche los presos que hay en cada hilera y se asegura de que sean nueve. Una vez hecho esto se retira a su oficina. Cierto día se fugan cuatro internos. Cuando el carcelero hace su recuento nocturno no se percata de nada, pues los presos siguen sumando nueve por hilera.

- ¿Qué hicieron los presos para burlar al carcelero?
- ¿Cómo se situaron en las celdas?

Tres días más tarde se fugan otros cuatro presos. Esta vez tampoco el carcelero se dio cuenta de nada al contar.

- ¿Cómo volvieron a burlar al carcelero?

Una semana después, el carcelero realizó su habitual recuento, le salieron las cuentas y volvió tranquilo a su oficina. A la mañana siguiente una inspección del alcalde descubrió que sólo quedaban 20 presos.

- ¿Qué hicieron los reclusos para burlar por tercera vez al ingenuo carcelero?
- ¿Hubiera sido posible una cuarta fuga?

13. (ORM-UDENAR, N. 2, PROB.11, 2016) Colombia, Ecuador, Venezuela y Perú disputaron un campeonato de fútbol en el que cada equipo jugó una vez con cada uno de sus seis rivales. En el torneo a cada equipo ganador de un partido se le otorgaban 3 puntos y 0 puntos al perdedor. Además, si el partido terminaba empatado se otorgaba 1 punto a cada equipo. La siguiente tabla muestra la puntuación al final del torneo. ¿Cuántos partidos terminaron empatados?

Equipo	Puntos
Colombia	5
Ecuador	3
Perú	3
Venezuela	2

14. (UDC, NI, PROB.45, $2012-2$) La profesora pide a sus cinco alumnas: Isabel, Juana, Luisa, María y Nathalia que hagan una fila y que hagan una fila y que cada una de ellas le dé la mano a las compañeras que están a su lado de la fila. Isabel le da la mano solo a una de ellas y Juana también le da la mano solo a una de sus compañeras. Luisa, María y Nathalia le dan la mano, cada una, a dos de sus compañeras. Si se sabe que Isabel le dio la mano a Nathalia, entonces de las siguientes afirmaciones de la única que se tiene certeza es:

   a. Juana le dio la mano a María.
   b. María le dio la mano a Nathalia.
   c. Luisa le dio la mano a María.
   d. Juana le dio la mano a Luisa.

15. (UDC, NI, PROB.48, $2014-1$) A dos parejas de novios formados por Ana, Bruno, Carlos y Diana les gusta diferentes deportes: natación, fútbol, tenis y patinaje, no necesariamente en ese orden. Se sabe que a la novia de Carlos le gusta la natación. A Bruno no le gusta el tenis pero acompaña a su novia a verlo. Si Carlos no conoce a Diana, entonces se puede afirmar con certeza que:

   a. A Carlos le gusta el patinaje.

b. A Bruno le gusta el fútbol.

c. A Bruno no le gusta el fútbol.

d. A Diana le gusta el tenis.

Capítulo 2

Buscar un patrón de comportamiento

2.1. Introducción

Cuando ciertas reacciones de una persona, se hacen muy frecuentes en determinados ambientes o situaciones, constituyen lo que llamamos un ***Patrón de Comportamiento***. Un patrón de comportamiento es una forma constante que tiene una persona, de pensar, sentir, reaccionar físicamente y actuar en determinada situación. Nuestros patrones de comportamiento se originan de la cosas que copiamos o aprendemos de todo lo que nos rodea y de nuestras experiencias. Todos estos patrones son creados con el fin de facilitar el modo de vivir; de igual manera en las matemáticas para solucionar un determinado problema, podemos encontrar, reconocer o inclusive en algunos casos construir patrones de comportamientos que nos permitan facilitar o generalizar el problema para construir un camino, que posiblemente podría llevarnos a la solución.

2.2. Buscar un patrón

Definición 2.1. Esta estrategia consiste en buscar en el planteamiento de un problema, una serie de eventos que se repitan, a partir de los cuales se puedan identificar características comunes que ayuden a la solución del problema. Lo que permitirá ver el problema de una forma diferente y que posiblemente pueda llevar a dar una idea de su solución.

Con la idea de ejemplificar esta estrategia, presentamos los siguientes problemas.

Ejemplo 2.1. (OMPR, N.In, PROB.8, $2006-2007$) ¿Cuánto es
$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)$?

Para solucionar este problema lo haremos del mismo modo como en los casos anteriores, simulando una conversación entre el maestro y el alumno.

P. Leamos detenidamente el problema anterior.

A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Encontrar el resultado del producto dado.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. La expresión $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)$.

P. Para encontrar el resultado de un producto de 3 términos abc ¿Cómo procedemos?
A. Encontramos primero el resultado de ab y ese resultado lo multiplicamos por c.

P. Entonces ¿que es lo primero que deberíamos hacer para encontrar el resultado del producto de los 10 términos?
A. Multiplicar dos términos y a ese resultado irle multiplicando los demás términos de uno en uno.

P. ¿Cómo hacemos esto entonces?
A. Multiplicando los dos primeros términos.

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)=1.$$

Con los tres primeros

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)=1\cdot\left(1+\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{4}.$$

Con los cuatro primeros

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)=\frac{5}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)=1.$$

Con los cinco primeros

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)=1\cdot\left(1+\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{6}.$$

P. Si analizamos detenidamente los resultados obtenidos ¿podríamos deducir algo?
A. Cuando el número de términos asociados es par, el producto es 1 y si es impar entonces el producto es el último número.

Si el estudiante logra hacer esa deducción habrá encontrado la solución del problema, porque ahora lo único a analizar es, si el número de términos dado es par o impar.
Luego como el número de términos dados es par entonces el resultado es 1.

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1+\frac{1}{10}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)=1.$$

Pero el maestro podría aprovechar el problema y pedir a los estudiantes generalizarlo.
Si el estudiante ya ha hecho un análisis exhaustivo del problema, podría contestar inmediatamente, pero si no es así el maestro podría preguntar.

P. ¿Cómo sabemos que el número de términos es par?
A. Contando.

P. Si el problema tiene muchos términos ¿cómo saber si ese número de términos es par o impar?
A. ...

Si observamos detenidamente los casos desarrollados anteriormente, podemos concluir que cuando el número de términos es par, entonces el último número es impar, es decir, el último número tiene la forma $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ donde n es impar.
Cuando el número de términos es impar, entonces el último número es par, es decir, el último número tiene la forma $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ donde n es par.
Si el estudiante ha hecho este análisis, ya sabe cómo proceder para encontrar la solución del problema propuesto.
De ahí que la generalización del problema sería.

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1+\frac{(-1)^i}{i}\right)=\begin{cases}1, \text{ si } n \text{ es par,}\\ \dfrac{n+1}{n}, \text{ si } n \text{ es impar.}\end{cases}$$

Mirada retrospectiva. Aquí no solo hemos encontrado la solución si no que además hemos encontrado una generalización; de ahí que podríamos aprovechar para preguntarnos ¿por qué multiplicar los primeros términos y no hacer de una vez la multiplicación pedida?, ¿qué función tenía en el problema que los signos fueran intercalados para cada término? y ¿podemos demostrar la generalidad que encontramos?

El ejemplo anterior podría llevar a pensar, que la estrategia de dividir el problema en casos vista en el primer capítulo funciona solamente con problemas de ese tipo, sin embargo vamos a ver que esta estrategia sirve para resolver problemas con otras características, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.2. Un hotel tiene infinitas puertas todas cerradas, un cliente gracioso se levanta por la noche y las abre todas. Un segundo cliente cierra las pares. Un tercer cliente modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra y si está cerrada la abre. El cuarto lo mismo de cuatro en cuatro y así sucesivamente [1]. ¿Qué puertas están abiertas y qué puertas están cerradas por la mañana?

[1] Tomado de Algunos temas de Olimpiadas matemáticas. Arturo Portnoy.

En problemas de este tipo el principal objetivo es observar mediante algunos casos particulares que está pasando con las puertas, eso ayudará en gran medida a ejecutar la primera fase de resolución (*comprender el problema*). Para esto formularemos algunas preguntas que podrían ayudarle al estudiante a resolver el problema.

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Mirar qué puertas están abiertas y cuáles están cerradas.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. En un hotel que tiene infinitas puertas, hay un cliente que las abre todas, otro que cierra las pares, otro que modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra y si está cerrada la abre; otro hace lo mismo pero de cuatro en cuatro y así sucesivamente.

P. Si el hotel tuviera solo 10 puertas ¿cómo estarían las puertas en la mañana?
A. Para ilustrar mejor esta situación lo podemos hacer por medio de una tabla; los símbolos $\circ$ y $\bullet$ significan abierto y cerrado, respectivamente.

Clientes	**N° de la habitación**									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●
3	○	●	●	●	○	○	○	●	●	●
4	○	●	●	○	○	○	○	○	●	●
5	○	●	●	○	●	○	○	○	●	○
6	○	●	●	○	●	●	○	○	●	○
7	○	●	●	○	●	●	●	○	●	○
8	○	●	●	○	●	●	●	●	●	○
9	○	●	●	○	●	●	●	●	○	○
10	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●

Tabla 2.1: Ejemplo de un hotel con 10 habitaciones.

P. ¿Cuántas puertas abiertas y cuántas cerradas habrían?
A. Abiertas 3 y cerradas 7.

P. ¿Qué puertas estarían abiertas?
A. Las puertas que estarían abiertas son 1, 4 y 9.

P. ¿Por qué estaría abierta la puerta 4?
A. La puerta 4, estaría abierta porque el cliente 1 la abre, el cliente 2 la cierra y el cliente 4 la abre, y ningún otro cliente la modificará nuevamente.

P. ¿Cuántas veces fue modificada la puerta 4?
A. Tres veces.

P. ¿Por qué estaría abierta la puerta 9?
A. La puerta 9, estaría abierta porque el cliente 1 la abre, el cliente 3 la cierra y el cliente 9 la abre, y nadie más la modifica.

P. ¿Cuáles son los divisores de 4?
A. Los números 1, 2, 4 son los divisores de 4.

P. ¿Cuántos divisores tiene el 4?
A. Tiene 3 divisores.

P. ¿Cuántos divisores tiene el 9?
A. Los divisores de 9 son: $1, 3, 9$. Es decir, tiene 3 divisores.

P. ¿Existe alguna relación entre las puertas abiertas 1, 4 y 9?
A. Todas las puertas tienen un número impar de divisores.

Si el estudiante lográ hacer ese análisis ya tiene una idea clara de lo que se quiere hacer; así para ayudarle vamos hacer una tabla más grande, que le permita corroborar o refutar la idea que se tiene. Esta situación se presenta en la Tabla **??**.

P. ¿Qué puertas están abiertas ahora?
A. Las puertas que están abiertas son 1, 4, 9, 16.

P. ¿Cuántos divisores tiene el número 16?
A. Los divisores de 16 son: 1, 2, 4, 8 y 16. Es decir, tiene 5 divisores.

P. ¿Podríamos conjeturar que puertas van a estar abiertas?
A. Sí. Podríamos deducir que van a estar abiertas todas las puertas que tengan un número impar de divisores.

P. ¿Qué podemos decir de las puertas cerradas?
A. Si las puertas que tienen un número impar de divisores están abiertas, entonces las puertas que tienen un número par de divisores están cerradas.

P. ¿Qué números tienen solo dos divisores?
A. Los números primos, solo tienen el divisor 1 y a ellos mismos.

P. ¿Qué puertas tenemos seguro que están cerradas?
A. Las puertas que tienen un número primo 1, 3, 5, 7, 11, . . . ,

Clientes	**N° de la habitación**																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○
2	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○	●	○
3	○	●	●	●	○	○	○	●	●	●	○	○	○	●	●	●	○	○	○
4	○	●	●	○	○	○	○	○	●	●	○	●	○	●	●	○	○	○	○
5	○	●	●	○	●	○	○	○	●	○	○	●	○	●	○	○	○	○	○
6	○	●	●	○	●	●	○	○	●	○	○	○	○	●	○	○	○	●	○
7	○	●	●	○	●	●	●	○	●	○	○	○	○	○	○	○	○	●	○
8	○	●	●	○	●	●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	●	○	●	○
9	○	●	●	○	●	●	●	●	○	○	○	○	○	○	○	●	○	○	○
10	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●	○	○	○	○	○	●	○	○	○
11	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●	●	○	○	○	○	●	○	○	○
12	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●	●	●	○	○	○	●	○	○	○
13	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●	●	●	●	○	○	●	○	○	○
14	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	○	●	○	○	○
15	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	●	○	○	○
16	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	○	○	○	○
17	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	○	●	○	○
18	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	○	●	●	○
19	○	●	●	○	●	●	●	●	○	●	●	●	●	●	●	○	●	●	●

Tabla 2.2: Ejemplo de un hotel con 19 habitaciones.

P. Según el ejemplo de la Tabla **??** ¿cuáles puertas están cerradas?
A. Las puertas que están cerradas son 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18 y 19.

Para comprobar o refutar lo que se dedujo anteriormente, vamos a escoger dos números al azar de la lista anterior, y mirar que relación tienen sus divisores.

P. ¿Cuántos divisores tiene el número 10?
A. Los divisores de 10 son: 1, 2, 5 y 10. Es decir, tiene 4 divisores.

P. ¿Cuántos divisores tiene el número 14?
A. Los divisores de 12 son: 1, 2, 3, 4, 6 y 12. Es decir, tiene 6 divisores.

Por lo tanto se podría concluir que las puertas van a estar abiertas o cerradas, si tienen un número impar o par de divisores, respectivamente. Como el número de puertas es infinito entonces habrán infinitas puertas abiertas e infinitas puertas cerradas.

Mirada retrospectiva. En ese orden de ideas podemos plantear los siguientes interrogantes; si el hotel tuviera un número finito de puertas ¿se resolvería de la misma forma?, ¿el número de puertas cerradas es mayor que el número de puertas abiertas? y ¿qué pasaría si la condición inicial cambiara, y el primer cliente las cerrara todas en vez de abrirlas; y así sucesivamente?

Algunos problemas de secuencias gráficas se pueden resolver buscando un patrón de comportamiento y expresándolo en términos numéricos, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3. (OMPR, N.El, PROB.6, $2011-2012$) ¿Qué figura le corresponde a la posición 2019?

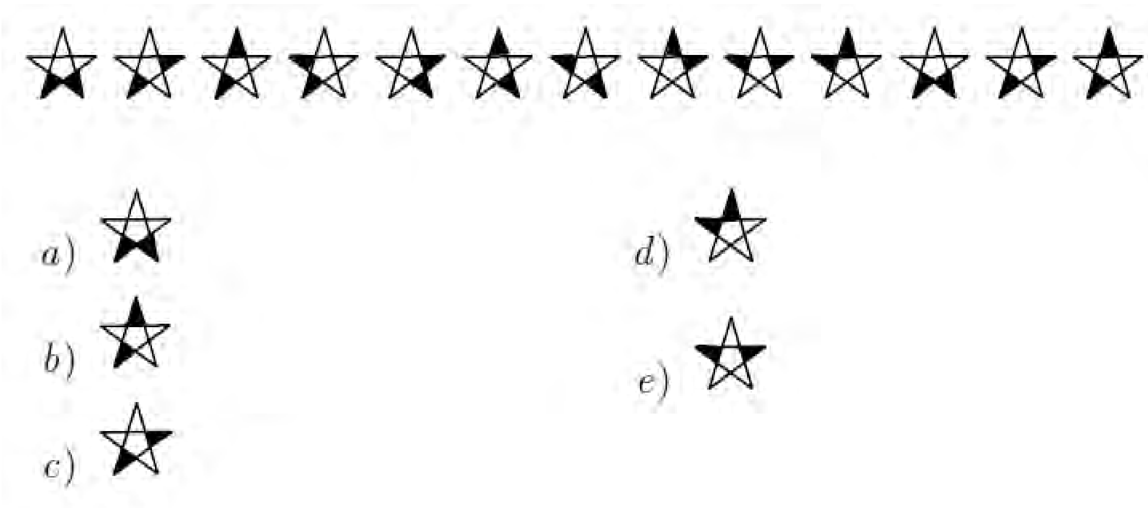

Figura 2.1: Estrellas.

Es claro que lo primero será mirar como se comporta la secuencia, es decir, en que posición se empieza a repetir el patrón. Para ello simularemos el diálogo maestro-alumno.

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Encontrar la figura que va en la posición 2019.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. La secuencia dada en la figura.

P. ¿Cómo funciona la secuencia?
A. Es una estrella que tiene dos de sus partes sombreadas y que van cambiado según la posición de la estrella.

P. ¿En que posición se empieza a repetir la secuencia?
A. Después de la posición 10 se empieza a repetir la secuencia.

P. Osea que en la posición 20 ¿qué figura va?
A. En la posición 20 va la misma figura que está en la posición 10.

P. ¿Será entonces que en todos los múltiplos de diez va la misma gráfica?

A. Sí.

P. Entonces ¿que figura va en la posición 2000?

A. Como la posición 2000 es múltiplo de 10 entonces la figura es la misma en ambas posiciones.

Aquí ya es claro que el estudiante sabe bien que hacer, por lo cual ya solo quedaría por preguntarle el resultado final.

P. ¿Qué figura le corresponde a la posición 2019?

A. Dado que el 2019 dividido entre 10, deja un residuo de 9 entonces la figura que va es la misma que está en esa posición. Es decir la respuesta es la e).

Mirada retrospectiva. Aquí hemos resuelto el problema pero ¿?, ¿se podría construir más estrellas para mirar más claro el patrón?, ¿cómo está cambiando la parte sombreada de una estrella a otra?, ¿se podría utilizar otra figura en lugar de la estrella para proponer un problema similar?

Ejemplo 2.4. (OMPR, N.In, PROB.6, $2007-2008$) ¿Cuál es el último dígito de la siguiente suma $11^{2007}+14^{2008}+16^{2009}$?

Para ayudar al estudiante el docente una vez más puede hacer uso de algunas preguntas como las siguientes.

P. ¿Cuál es la incógnita?

A. Encontrar una suma dada.

P. ¿Cuáles son los datos?

A. La suma $11^{2007}+14^{2008}+16^{2009}$.

P. ¿Cuál es el último dígito de la suma de $11+14+16$?

A. Dado que $11+14+16=41$ entonces el último dígito es 1.

P. ¿Cómo encontramos el dígito anterior?

A. Sumando $1+4+6$.

P. ¿Qué hacer para encontrar el último dígito de 11^{2007}?

A. ...

P. ¿Se puede buscar algún patrón?

A. Sí.

P. ¿Cuál es el último dígito de 11^2?

A. Dado que $11^2=121$, entonces el último dígito es 1.

P. ¿Cuál es el último dígito de 11^3?

A. Dado que $11^3 = 1331$, entonces el último dígito es 1.

En este momento el estudiante ya puede continuar solo, pues sabe que está buscando un patrón.

$$11^4 = 14641,$$
$$11^5 = 161051,$$
$$11^6 = 1771561,$$

y así el último dígito de 11^{2007} será 1.
Debe ser claro para el estudiante de que el siguiente paso es encontrar el último dígito de 14^{2008}; pero si no es así, el docente puede preguntarle.

P. ¿Cuál es el siguiente término de la suma?
A. El término que le sigue a 11^{2007} es 14^{2008}.

P. ¿Cuál es el procedimiento a seguir?
A. El procedimiento debe ser igual al anterior.

P. ¿Cuál es el último dígito de 14^2?
A. Dado que $14^2 = 196$, entonces el último dígito es 6.

$$14^3 = 2744,$$
$$14^4 = 38416,$$
$$14^5 = 537824,$$
$$14^6 = 7529536.$$

Aquí podemos notar que son dos los posibles valores para el último dígito de 14^{2008}.

P. ¿Para qué valores de n el número 14^n termina en 4?
A. El último dígito es 4 en $14^1, 14^3, 14^5$.

P. ¿Qué relación tienen sus exponentes?
A. Todos lo exponentes son impares.

P. ¿Para qué valores de n el número 14^n termina en 6?
A. El último dígito es 6 en $14^2, 14^4, 14^6$.

P. ¿Qué relación tienen sus exponentes?
A. Todos lo exponentes son pares.

P. ¿Qué característica tiene el número 2008?

A. Una de las características que tiene el número 2008 es que es par.

P. ¿Cuál es el último dígito de 14^{2008}?
A. Dado que 2008 es par, entonces 14^{2008} termina en 6.

Así el último dígito de 14^{2008} es 6. En este punto, el profesor puede invitar a sus alumnos a encontrar que el último dígito de 16^{2009} es 6.
De ahí, como ya hemos encontrado los últimos dígitos de los términos de la suma $11^{2007} + 14^{2008} + 16^{2009}$ entonces ahora solo queda sumar esos dígitos. Así la solución está dada por la suma $1+6+6 = 13$.
Por lo tanto, el último dígito es 3.

Mirada retrospectiva. Para revisar la solución podríamos preguntarnos ¿por qué encontrar los últimos dígitos de cada término por separado?, ¿habrá otra forma de resolver este problema?, ¿funcionaría la misma estrategia si le cambiáramos los números de la base? y ¿qué tienen de especial las potencias de 11 y 16?

2.3. Problemas propuestos

1. ¿Cuál es el último dígito del número que se obtiene cuando se realiza la multiplicación $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdots 2}_{2016-\text{veces}}$?

2. ([**?**], pag.8) Determine el número de coeficientes binomiales impares en la expansión de $(x+y)^{100}$.

3. (OMPR, N.In, PROB.13, $2010-2011$) ¿Cuántas veces hay que escribir el dígito 2 para marcar las páginas de un libro que tiene 2016 páginas?

4. Observa la secuencia $1, 3, 7, 15, 31, 63, \ldots$ ¿Qué número va en la posición 2016?

5. La siguiente gráfica muestra las rectas que se pueden trazar en puntos no colineales. ¿Cuántas líneas se pueden trazar entre 100 puntos no colineales?

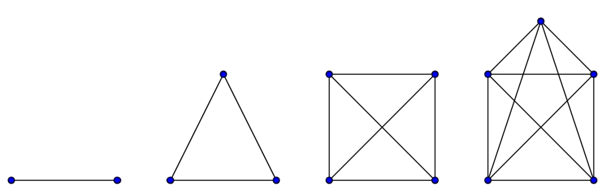

Figura 2.2: Líneas entre puntos no colineales.

6. Calculemos la suma de los dígitos del número del 19^{100}. Luego encontramos la suma de los dígitos del resultado y así sucesivamente hasta encontrar un solo dígito. ¿Qué dígito es ese?

7. Juan empezó a comer duces este lunes y cada día siguiente se come uno más que el día anterior ¿cuántos dulces se habrá comido en 4 meses? Nota: (se supone que el mes tiene 30 días)

8. (OMPR, N.El, PROB.10, 2006−2007) ¿Cuál es el último dígito (el de las unidades) del número $4^{100} = \underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdots 4}_{100-veces}$

9. ([?], pag.8) Si $\langle a_n \rangle$ es una secuencia tal que para $n \geq 1$, $(2 - a_n)\, a_{n+1} = 1$, ¿qué pasa con a_n cuando n tiende hacia el infinito?

10. Considere la siguiente sucesión de figuras de puntos.

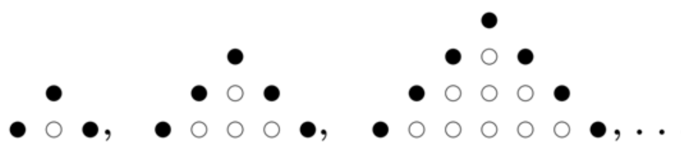

Figura 2.3: Sucesión de puntos.

¿Cuántos círculos negros tendrá la figura 2016 en la sucesión?

11. (OMPR, N.El, PROB.4, 2010 − 2011) Considere las siguientes flechas y números.

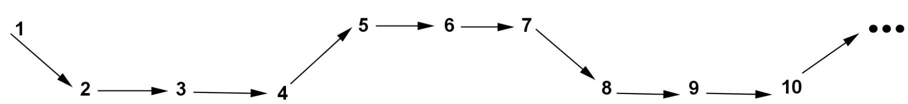

Figura 2.4: Flechas y números.

Si se continúa con ese patrón, ¿cómo sería el arreglo de flechas desde 2011 hasta el 2014?

12. (OMPR, N.In, PROB.6, 2006 − 2007) ¿Cuál es la suma de los dígitos del número $5^{2007} \cdot 2^{2003}$?

13. (OMPR, N.In, PROB.15, 2013 − 2014) Comenzando una lista con tres números, el procedimiento "cambiasuma" crea una nueva lista remplazando cada número por la suma de los otros dos. Por ejemplo, de $\{3; 4; 6\}$ "cambiasuma" nos da $\{10; 9; 7\}$ y un nuevo "cambiasuma" nos da $\{16; 17; 19\}$. Si comenzamos con la lista $\{20; 1; 3\}$, ¿cuál es la máxima diferencia entre dos números de la lista después de 2013 "cambiasuma" consecutivos?

14. (ORM-UIS, N.Ba, PROB.5, 2009) ¿Cuántos enteros hay entre 2008^2 y 2009^2 (sin incluir estos dos números)?

15. Un hotel tiene 2016 puertas todas cerradas, un cliente gracioso se levanta por la noche y las abre todas. Un segundo cliente cierra las pares. Un tercer cliente modifica las que son múltiplo de tres, si está abierta la cierra y si está cerrada la abre. El cuarto lo mismo de cuatro en cuatro y así sucesivamente. ¿Cuántas puertas están abiertas por la mañana?

Capítulo 3

Buscar la simetría

3.1. Introducción

En la naturaleza encontramos algunos seres vivos que poseen simetría, como por ejemplo las mariposas y otros que son asimétricos como son las amebas; las primeras tienen alas con simetría axial bilateral, en la que el eje es el cuerpo del insecto y las otras por su parte no tienen forma definida, por lo cual no se les puede encontrar un eje de simetría. De esta manera para estudiar las alas de las mariposas bastaría solo con observar las propiedades de una sola; sin embargo no sucede igual con la ameba, esta debe ser analizada en su totalidad; del mismo modo las personas también tenemos un tipo de simetría, las dos mitades de la cara son casi idénticas, las manos que a simple vista parecen iguales en realidad son simétricas, etc. A nivel de percepción, esta forma ordenada y correspondiente constituye, un factor estético de armonía. Así mismo en las matemáticas encontramos una cantidad considerable de problemas que poseen simetría e incluso en algunos casos se les puede imponer dicha característica; para simplificar su proceso de solución.

3.2. Simetría

Definición 3.1. Es la correspondencia exacta en tamaño, forma y posición de las partes de un todo; es decir, es la disposición de las diferentes partes de un sujeto de una forma ordenada y correspondiente. Por tanto, un objeto es simétrico si hay una o más acciones no triviales que dejan el objeto sin cambios. En donde las acciones que se hacen se llaman simetrías del objeto.

Para trabajar con simetría es necesario tener en cuenta dos aspectos:

- Ver la simetría en lugares inimaginables, es decir buscar simetría en cualquier tipo de problemas.
- Buscar la armonía, y la belleza, siempre que se investigue un problema.

3.2.1. Simetría geométrica

Cuando hablamos de objetos físicos o elementos geométricos el concepto de simetría está asociado a transformaciones geométricas que son: rotaciones, reflexiones o traslaciones [**?**].

Ejemplo 3.1. (OMPR, NII, PROB.21, 2007 – 2008) Un cuadrado está inscrito en un círculo que se inscribe en otro cuadrado. Encuentre la relación de las áreas de los dos cuadrados.

P. Leamos detenidamente el problema anterior
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Encontrar la relación de las áreas de los dos cuadrados.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Un cuadrado está inscrito en un círculo que se inscribe en otro cuadrado.

P. ¿Qué podríamos decir del cuadrado?¿Qué propiedades tiene que pudiéramos utilizar?.
A. En un cuadrado todos sus lados miden lo mismo.

P. ¿Cuántas figuras tiene el problema?
A. Tres.

P. ¿Podría hacer una figura que represente la situación del problema?
A. Sí.

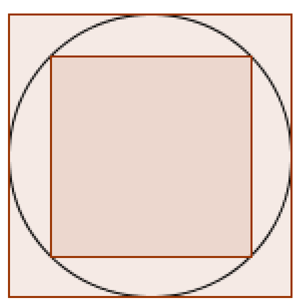

Figura 3.1: Representación gráfica Ejemplo **??**.

P. ¿Hay puntos en donde se corten por lo menos dos figuras?
A. Sí.

P. ¿Cuántos son?
A. Son 8.

P. Observe uno de estos puntos. ¿Podríamos hacer un movimiento para que este punto pase a ser común a las tres figuras?

A. Sí.

P. ¿Qué movimiento podríamos hacer?

A. Una rotación.

P. ¿Qué paso con los demás puntos?

A. Ahora también hacen parte de la intersección de las tres figuras.

P. ¿Podríamos unir los puntos de intersección por medio de rectas?

A. Sí.

P. ¿Qué sucedió con el cuadrado inscrito en el círculo?

A. Se dividió en cuatro triángulos pequeños.

P. ¿Y con el cuadrado más grande?

A. Se dividió en cuatro cuadrados más pequeños.

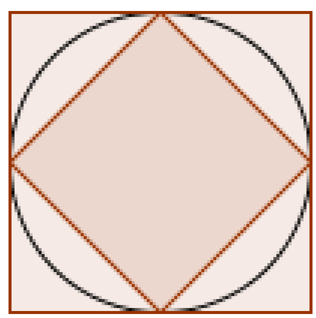

Figura 3.2: Rotación de la figura anterior.

P. ¿Qué podríamos decir de esos cuadrados?

A. Son iguales.

P. ¿Serán los cuadrados pequeños simétricos?

A. Sí.

P. ¿Podría minimizar la tarea el hecho de que los cuadrados sean simétricos?

A. Sí.

P. ¿Cuál es la ventaja de que los cuatro cuadrados sean iguales o simétricos?

A. De que todos cumplen las mismas propiedades.

P. ¿Qué podríamos decir de los lados del cuadrado pequeño?
A. Coinciden con las diagonales de los cuatro cuadrados más pequeños que se formaron.

P. ¿Qué propiedades tiene una diagonal de un cuadrado?
A. Que divide al cuadrado en dos triángulos iguales.

P. Entonces ¿qué podemos decir del triángulo?
A. El triángulo es la mitad del cuadrado más pequeño que se había formado.

P. Por tanto ¿que relación tienen las áreas de los dos cuadrados originales?
A. El área del cuadrado pequeño es la mitad del área del cuadrado grande.

Así queda resuelto el problema planteado.

Mirada retrospectiva. Podríamos preguntarnos ¿podría resolverse algebraicamente?, ¿cuáles son las propiedades que debe cumplir una figura que esté inscrita en otra? y Si invirtiéramos los término, donde va el cuadrado ponemos un círculo y viceversa, ¿qué relación existiría entre las áreas de los círculos?

Pero no siempre los problemas tienen simetría, hay algunos casos en los que podemos imponer la simetría para simplificar el proceso de resolución.

Ejemplo 3.2. Un pueblo A está a 3 kilómetros al norte de un arroyo que corre de este a oeste. El pueblo B se encuentra a 15 kilómetros al norte del arroyo. Además entre los puntos de intersección de las rectas perpendiculares al rio que pasan por los pueblos A y B hay 24 kilómetros de distancia.Un trabajador diariamente va de A hasta B, pero primero pasa por el rio a pescar. Si se quiere construir un puente en el rio para los pescadores, ¿en dónde debería ubicarse el puente para que el pescador haga el menor recorrido posible?

P. Leamos detenidamente el problema anterior
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Construir un puente en el rio para los pescadores, tal que el pescador haga el menor recorrido posible.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Un pueblo A está a 3 kilómetros al norte de un arroyo. El pueblo B se encuentra a 15 kilómetros al norte del arroyo. Además entre los puntos de intersección de las rectas perpendiculares al rio que pasan por los pueblos A y B hay 24 kilómetros de distancia. Y que un trabajador diariamente va de A hasta B, pero primero pasa por el rio a pescar.

P. ¿Podría hacer una figura que represente la situación del problema?

A. Sí.

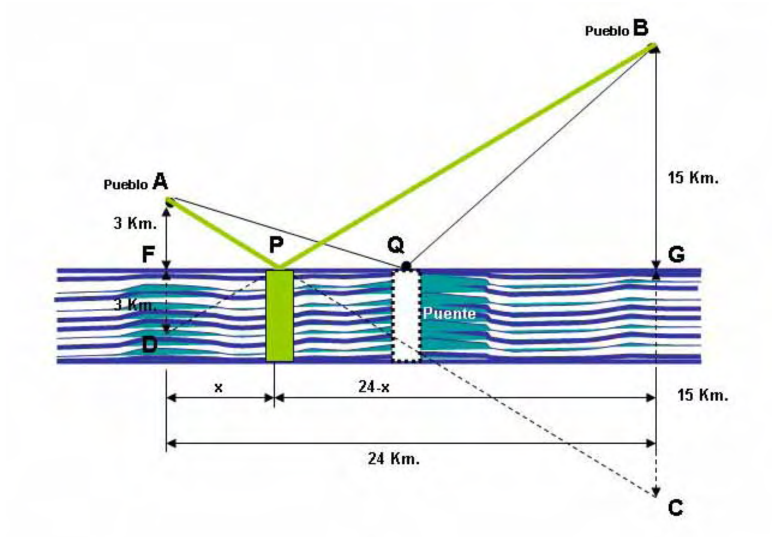

Figura 3.3: Imagen de la ubicación de los pueblos y del rio.

P. ¿Qué es lo primero que se nos puede ocurrir hacer?

A. Ubicar una ruta cualquiera.

P. ¿Qué sucede si traza una ruta cualquiera?

A. Podríamos empezar a moverla y observar en donde la distancia es mínima.

P. ¿Sería ese el mejor camino? y ¿por qué?

A. No, por que tendría que trazar infinitas rutas y mirar cual tiene la menor distancia.

P. ¿Cuál es el la distancia más corta entre dos puntos?

A. Una recta.

P. ¿De qué forma se podrían ver alineados los pueblos A, B y el rio?

A. ...

P. ¿Qué pasaría si los pueblos estuvieran de lados opuestos con respecto al rio?¿Cómo se encontraría la ruta con la mínima distancia?

A. Trazando una recta.

P. ¿Qué movimiento se podría hacer para ver los pueblos de lados opuestos?

A. Moviendo un pueblo al otro lado del rio.

P. Suponiendo que pudieran moverse los pueblos, de tal forma que estén de lados opuestos. ¿A qué distancia del rio deberían de estar ubicados

A. A la misma distancia que estaban del rio solo que del otro lado.

P. ¿De qué forma se los podrían mover para que estén de lados opuestos?
A. Podría moverse el A al otro lado y dejar quieto el B o viceversa.

P. ¿Qué se puede decir de ellos con respectos a los pueblos A y B?
A. Los nuevos puntos son simétricos con respecto a A y B.

P. ¿Qué sucede si trazamos la recta que pasa por el punto B y su simétrico?
A. El segmento encontrado tendrá la mínima distancia.

P. ¿Qué se puede decir del punto de intersección de del rio y la recta que pasa por B?.
A. Que es el punto que se buscaba, en donde se debe construir el puente.

P. ¿Cómo se encuentra el valor de la distancia buscada?
A. Aplicando el teorema de Pitágoras.

Como se forma el triángulo rectángulo que tiene la base igual a 24 y una altura de 18 entonces se encuentra la hipotenusa. Así

$$x^2 = 18^2 + 24^2 = 324 + 576 = 900$$

es decir que

$$x = \sqrt{900} = 30.$$

Por tanto la ruta que tiene la mínima distancia el de $30km$ en donde se bebe construir el puente.

Mirada retrospectiva. Podríamos preguntarnos ¿podría resolverse de otra manera?, si cambian las posiciones de los pueblos, ¿cambiaría la manera de solución?, si el pescador hiciera un recorrido cerrado, que del punto A pasara al B, del B pasara al rio y del rio pasara al punto A, ¿qué se haría para encontrar la mínima distancia de ese recorrido?

A continuación plantearemos otro ejemplo que deja ver una ves más que la simetría se puede aplicar no a todo problema pero si a problemas de tipo diversos

Ejemplo 3.3. (UDC, J. 1, V. 1, PROB.23, 2010 − 2) ¿Cuál es el área del rectángulo si el área del cuadrado es 1?

Para resolver este problema lo haremos de la misma forma que en los ejemplos anteriores.

P. Leamos detenidamente el problema anterior.
A. ...

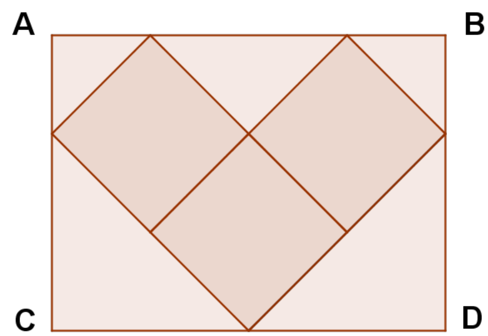

Figura 3.4: Cuadrados inscritos en un rectángulo

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Encontrar el área del rectángulo dado.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. El rectángulo y el área del cuadrado.

P. ¿Qué es lo primero que se nos ocurriría hacer?
A. Encontrar la medida de los lados del rectángulo para aplicar la fórmula del área de un rectángulo.

P. En este caso ¿será más fácil y rápido encontrar los lados del rectángulo?
A. Parece que no. Para hacerlo deberíamos calcular los lados de dos triángulos rectángulos.

P. ¿Cómo deberíamos proceder entonces?
A. ...

P. Sabemos que debemos utilizar la información dada; entonces ¿Conocemos del área del cuadrado?
A. Sí. Sabemos que el área del cuadrado es 1.

P. ¿Cómo utilizar esa información?
A. ...

Recordemos que la estrategia de simetría geométrica está relacionada con rotaciones, reflexiones y traslaciones. De ahí que el profesor podría orientar a sus estudiantes preguntando:

P. ¿Podemos rotar las figuras que no conocemos el área, de tal manera que podamos formar cuadrados?
A. Sí.

Aquí el estudiante ya ha identificado el plan, por ende sabe que camino seguir. Dicho esto, ahora el resultado correcto del problema depende de la capacidad que él tenga para hacer rotaciones y traslaciones mentales de figuras.
Por lo tanto, si observamos detenidamente la figura podemos ver que si rotamos 180° a la derecha e izquierda, los triángulos de las esquinas de la parte superior del rectángulo de izquierda a derecha respectivamente, forman otro cuadrado;

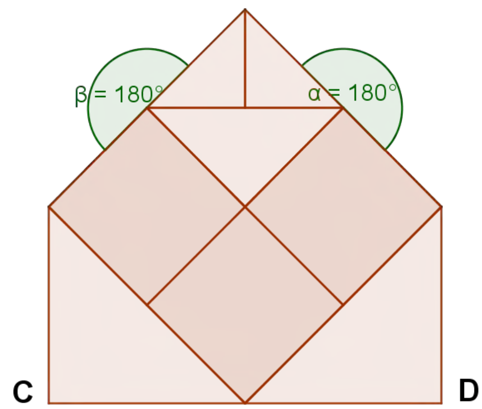

Figura 3.5: Cuadrados inscritos en rectángulo rotado1

y los triángulos que están en las esquinas de la parte inferior del rectángulo, cada uno forman otro cuadrado: Así, hemos construido 3 cuadrados más de área 1, luego el área del rectángulo es 6.

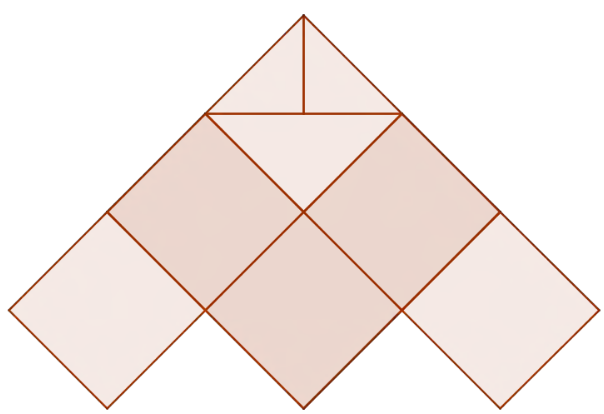

Figura 3.6:

Es claro que para resolver este problema no tuvimos que hacer ningún cálculo, solo bastó con aplicar bien la estrategia.

Mirada retrospectiva. Podríamos preguntarnos ¿podría resolverse de manera algebraica?, si el área del cuadrado fuera 3, ¿cuánto sería el área del rectángulo?, si la cambian las figuras, ¿cambia el proceso de resolución?

3.2.2. Simetría algebraica

Aun que podría pensarse que la simetría es aplicable solo a problemas geométricos, en este apartado veremos algunos casos de simetría, que han sido utilizados para resolver problemas algebraicos.

La herramienta de emparejamiento de Gauss

La siguiente anécdota tiene muchas variantes. Elegimos una de las más sencillas. Cuando Gauss tenía 10 años, su profesor castigó a su clase con una suma aparentemente tediosa:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$

Mientras que los otros estudiantes suman poco a poco los números, Carl descubrió un atajo e inmediatamente llegó a la respuesta de 5050. Él fue el único estudiante que encontró la suma correcta. Su visión fue notar que 1 podría ser emparejado con $100, 2$ con $99, 3$ con 98, etc; para producir 50 sumas idénticas de 101. Por lo tanto la respuesta es

$$101 \cdot 50 = 5050$$

Otra forma, más formal de hacer esto es escribir la suma en cuestión en dos ocasiones, primero hacia adelante y luego hacia atrás:

$$S = 1 + 2 + \cdots + 99 + 100$$
$$S = 100 + 99 + \cdots + 2 + 1$$

Por lo tanto sumando, tenemos:

$$2S = \underbrace{101 + 101 + \cdots + 101}_{n-veces}$$

Es decir,

$$S = \frac{101 \cdot 100}{2}$$

Este es un muy buen truco que sirve para simplificar las cosas.

Simetría en polinomios y desigualdades

Cuando se nos pide resolver ecuaciones de segundo grado no tenemos ningún inconveniente, porque solo aplicamos la fórmula cuadrática y se tiene inmediatamente la solución, si el problema es de grado 3 se nos dificulta un poco por los cálculos pero aún así podemos resolverlo; sin embargo, cuando la ecuación es de grado 4 o más, ahí si tenemos bastante dificultad.
Problemas de álgebra con muchas variables o de alto grado son a menudo intratables, amenos que exista alguna simetría. El siguiente ejercicio muestra como la simetría podría ayudar a resolver fácilmente un problema que a simple vista parece intratable.

Ejemplo 3.4. Encuentre las soluciones reales de la ecuación.

$$72x^4 + 48x^3 + 80x^2 + 24x + 18 = 0.$$

Al igual que en los ejercicios anteriores lo vamos a resolver como lo debería hacer un profesor en su clase

P. Leamos detenidamente el problema anterior.
A. ...

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Encontrar los x que cumplan la condición.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. La expresión dada $72x^4 + 48x^3 + 80x^2 + 24x + 18 = 0$.

P. ¿Cuál es la principal dificultad de la ecuación?.
A. Que es de grado 4.

P. ¿De qué grado podrían resolver una ecuación sin problema?
A. De grado 1 y de grado 2.

P. ¿Podríamos factorizar $2x^2$ en la ecuación para que nos quede una nueva ecuación de grado 2?
A. Sí.

P. ¿Cómo quedaría?
A. $2x^2\left(36x^2 + 24x + 40 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = 0$.

P. ¿Podemos suponer que $2x^2 \neq 0$?, ¿por qué?
A. Sí, porque $x \neq 0$.

P. ¿Cómo queda la ecuación por resolver?
A. $36x^2 + 24x + 40 + \frac{12}{x} + \frac{9}{x^2}$.

P. ¿Cómo podemos reorganizar la ecuación?
A. $36x^2 + \frac{9}{x^2} + 24x + \frac{12}{x} + 40 = 0$.

P. ¿Podemos factorizar la ecuación?
A. Sí. Quedaría $9\left(4x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 12\left(2x + \frac{1}{x}\right) + 40 = 0$.

P. Si hacemos $t = 2x + \frac{1}{x}$, ¿cómo encontramos $4x^2 + \frac{1}{x^2}$?
A. Elevando al cuadrado t, así $t^2 = \left(2x + \frac{1}{x}\right)^2$.

Es decir

$$t^2 = 4x^2 + 2 \cdot 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4x^2 + 2 \cdot 2 + \frac{1}{x^2}.$$

Por tanto despejando se tiene que

$$t^2 - 4 = 4x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

P. ¿Qué se debe hacer con esas nuevas expresiones?
A. Reemplazarlas en la ecuación inicial.

P. ¿De qué grado es la nueva ecuación?
A. De grado 2.

Reemplazando t y t^2 en la ecuación $9\left(4x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 12\left(2x + \frac{1}{x}\right) + 40 = 0$. Se tiene

$$9\left(t^2 - 4\right) + 12t + 40 = 0$$

$$9t^2 - 36 + 12t + 40 = 0$$

$$9t^2 + 12t + 4 = 0$$

P. ¿Cómo resolvemos la nueva ecuación?
A. Aplicando la fórmula cuadrática.

Aplicando la fórmula cuadrática

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4\,(9)\,(4)}}{2\,(9)}.$$

Tenemos que

$$t = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 144}}{18} = \frac{-12}{18} = \frac{-2}{3}.$$

Cómo la ecuación original estaba en términos de x entonces debemos multiplicar a ambos lados por x la expresión

$$\begin{aligned} t &= 2x + \frac{1}{x} \\ tx &= 2x^2 + x\frac{1}{x} \\ 2x^2 - tx + 1 &= 0 \end{aligned}$$

y luego reemplazar el valor de t en

$$x = \frac{t \pm \sqrt{(-t)^2 - 4\,(2)}}{2\,(2)}$$

Dado que $t = \frac{-2}{3}$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} x &= \frac{\frac{-2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\,(2)}}{2\,(2)} \\ &= \frac{\frac{-2}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right) - 8}}{4} \\ &= \frac{\frac{-2}{3} \pm \frac{2\sqrt{-17}}{3}}{4} \\ &= -\frac{1}{6} \pm \frac{\sqrt{-17}}{6}. \end{aligned}$$

Dado que $\sqrt{-17} \in \mathbb{C}$ entonces la ecuación original no tiene soluciones reales.

Este ejemplo permite evidenciar que la simetría puede aplicarse a problemas de diferentes tipos y reducir su complejidad de una forma sorprendente; por tanto no hay que limitar las posibilidades, para resolver un problema hay que mirarlo de todos los ángulos y tratar de encontrar un camino que lleve a su solución.

Mirada retrospectiva. Podríamos preguntarnos ¿podría resolverse de otra manera?, si cambian los valores de los coeficientes, ¿cambiaría la manera de solución?, si el problema dijera que encontrara todas las soluciones a la ecuación dada, ¿qué debería responder?, y si el grado del polinomio fuera mayor, ¿se podría aplicar la estrategia?, ¿se puede aplicar la estrategia en toda ecuación?

Veamos otro ejemplo, en donde se evidencie que esta estrategia también puede ser utilizada en problemas de lógica.

Ejemplo 3.5. Dos jugadores colocan dominós (1×2) en un tablero (10×10) de manera que ninguna pieza colocada se encime en otra ni salga del tablero. El jugador que no pueda colocar una pieza pierde. ¿Existe una estrategia ganadora para algún jugador?[1]

[1] Tomado de Algunos temas de Olimpiadas matemáticas. Arturo Portnoy.

Este tipo de problemas son llamativos a los estudiantes, puesto que pueden jugar una y otra vez hasta que deduzcan la solución.

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Descubrir si hay alguna forma de ganar siempre.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Dos jugadores, un tablero de tamaño 10×10, piezas de dominós y algunas condiciones de juego.

P. ¿Qué es lo primero que se debe hacer?
A. Jugar.

P. ¿Puede el primer jugador controlar los movimientos del segundo?
A. No. Cada jugador es libre de poner las fichas donde quiera.

P. La ubicación de las fichas, ¿tienen una posición específica?
A. No. las fichas se pueden ubicar tanto horizontal, como verticalmente.

P. ¿Pueden quedar espacios vacíos?
A. Sí.

Para ayudarle un poco al estudiante podemos hacer un ejemplo. En la siguiente figura se presenta una partida imaginaria entre dos jugadores, en la cual el Jugador 1 juega con fichas azules y el Jugador 2 juega con fichas rojas. Esta situación se presenta en la Figura **??**

En este ejemplo observamos que pudo haber ganado cualquier jugador, puesto que hay el mismo número de fichas azules y rojas; es decir que el ganador fue el que comenzó de primero. Sin embargo lo que debemos encontrar es una manera que nos garantice siempre la victoria. Recordemos que la mayoría de los juegos tienen una estrategia, la cual se basa en controlar los movimientos de uno y no los del otro.

P. ¿Existirá alguna forma de ganar siempre?
A. ...

P. ¿Puede un jugador controlar sus propios movimientos?
A. Sí.

P. ¿De qué deberían depender esos movimientos?
A. Deberían depender de los movimientos del otro.

P. ¿Podría decir que el jugador que quiere ganar debe imitar los movimientos del otro?
A. Sí.

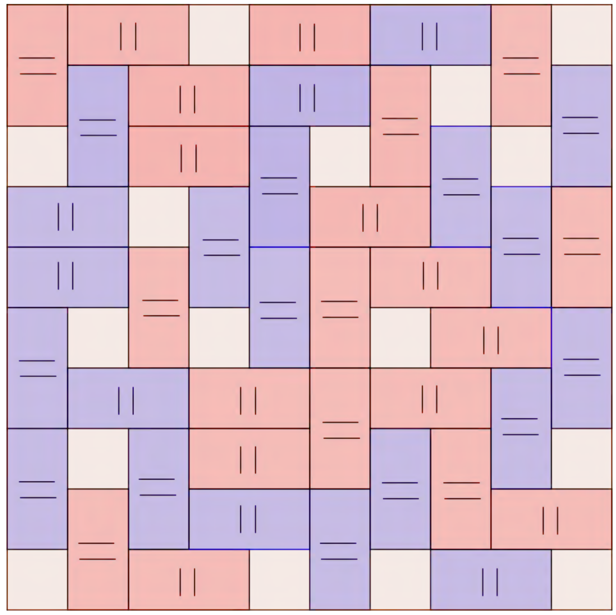

Figura 3.7: Juego de dominós.

P. ¿En qué posición debe salir el jugador que quiere imitar?
A. De segundo.

P. ¿Bastará solo con imitar los movimientos?
A. No.

P. Si el segundo jugador quiere hacer corresponder a cada ficha del primero una de sus fichas, ¿qué debe hacer?
A. ...

P. ¿Qué estrategia hace una correspondencia exacta en tamaño, forma y posición de las partes de un todo?
A. La simetría.

P. ¿Cuál sería el eje de simetría?
A. El punto centro del cuadrado.

Aquí ya hemos encontrado la respuesta, la estrategia ganadora la tiene el segundo jugador; siempre y cuando ubique sus fichas simétricas a las fichas del primero con respecto al punto centro del tablero, pero surge la pregunta ¿por qué el segundo jugador tiene la estrategia ganadora?, la respuesta está en que siempre que el primer jugador tenga donde ubicar su ficha, entonces el segundo también lo tendrá.

Mirada retrospectiva. Podríamos preguntarnos ¿podría resolverse de otra manera?, si el tablero tuviera una dimensión impar, ¿cambiaría la manera de solución?, si fueran tres jugadores en vez de dos, ¿funcionaría la estrategia?, ¿qué característica debe tener el problema para que se pueda aplicar la estrategia? y si el tablero fuera redondo ¿qué forma deberían tener las fichas para que funciones la estrategia?

3.2.3. Problemas propuestos

1. ([**?**], pag.71) Dado un punto (a, b), con $0 \leq b \leq a$, determinar el perímetro mínimo de un triángulo con un vértice en (a, b), uno de los ejes x, y uno en la recta $y = x$. Usted puede asumir que existe un triángulo de perímetro mínimo.

2. ([**?**], pag.72) Considere el siguiente juego de dos jugadores. Cada jugador toma turnos colocando un centavo en la superficie de una mesa rectangular. Un centavo no puede tocar a otro que esté sobre la mesa. La tabla comienza sin centavos. El último jugador que hace un movimiento legal gana. ¿El primer jugador tiene una estrategia ganadora?

3. (ORM-UIS, N.Me, PROB.2, 2011) En la siguiente figura, el triángulo ABC es equilátero, D, E, y F son los puntos medios de AC, BC, y AB respectivamente y G, I, y H son los puntos medios de DF, DE, y FE, respectivamente. Si la medida del segmento GH es $4 * (3)^{\frac{1}{4}}$ cm, el área del triángulo ABC es

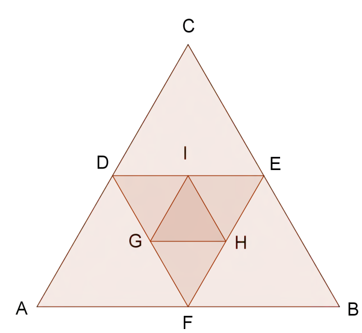

Figura 3.8: Triángulos.

4. Dos jugadores ponen, uno después del otro, monedas en una mesa circular. Las monedas no pueden estar amontonadas una encima de la otra. Pierde el que ya no puede poner moneda. ¿Existe alguna estrategia ganadora para algún jugador?

5. ([**?**], pag.71) Encuentra la longitud de la ruta más corta desde el punto $(3, 5)$ hasta el punto $(8, 2)$ que toca el eje x y también toca el eje y.

6. ¿Qué se puede decir sobre el producto de cuatro términos consecutivos de una progresión aritmética arbitraria, por ejemplo, $3 \cdot 8 \cdot 13 \cdot 18$?

7. ([**?**], pag.35) Expandir el producto $\left(x^2y + y^2z + z^2x\right)\left(xy^2 + yz^2 + zx^2\right)$.

8. (OMPR, N.In, PROB.2, $2010-2011$) Dos vértices de un triángulo ABC son los puntos medios de los lados de un rectángulo, como se muestra en la figura. Si el área del rectángulo es $1cm^2$, ¿cuál es el área del triángulo?

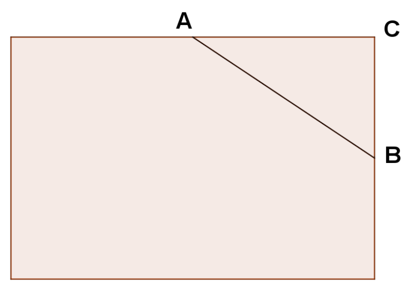

Figura 3.9: Rectángulo inscrito en un triángulo.

9. (ORM-UDENAR, N. 2, PROB.2, 2016) Calcule el área de la región sombreada, teniendo en cuenta que ABCD es un cuadrado de área $25cm^2$, y que se tienen dos semicircunferencias de diámetro el lado del cuadrado, como se muestra en la figura.

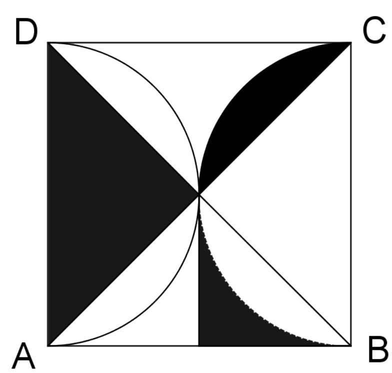

Figura 3.10: Cuadrado con área sombreada.

10. (UDC, J. 1, V. 1, PROB.23, $2010-2$) ¿Cuál es el área del rectángulo si el área del cuadrado es 1?

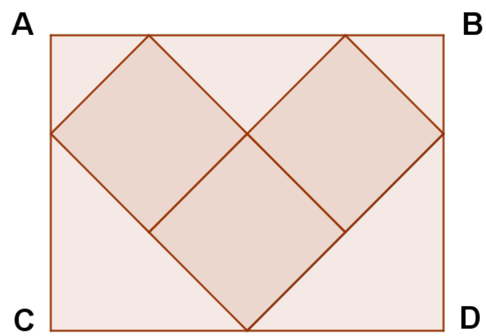

Figura 3.11: Cuadrados inscritos en un rectángulo.

11. ([?], pag.71) Encontrar (y demostrar) una bonita fórmula para el producto de los divisores de cualquier número entero. Por ejemplo, si $n = 12$, el producto de sus divisores es $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 12 = 1728$.

12. ([?], pag.71) ¿Cuántos subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, 4, \ldots, 30\}$ tienen la propiedad de que la suma de los elementos del subconjunto es mayor que 232?

13. ([?], pag.66) Sea $ABCDEF$ un hexágono convexo con $AB = BC = CD$ y $DE = EF = FA$, tal que $\angle BCD = \angle EFA = \frac{\pi}{3}$. Suponga que G y H son puntos en el interior del hexágono tal que $\angle AGB = \angle DHE = \frac{2\pi}{3}$. Pruebe que

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

14. Encuentre todas las soluciones reales de la ecuación [2]

$$x^2 - 5x + 2\sqrt{x^2 - 5x + 3}.$$

15. (OMPR, N.In, PROB.8, 2012) Unos armarios o casilleros están enumerados en fila del $1, 2, \ldots,$ 1000. En un principio todos los armarios están cerrados. Una persona va y abre cada dos vestidores comenzando por el armario 2. Por tanto los armarios $2, 4, 6, ..., 998, 100$ están abiertos. Otra persona va y cambia el estado de cada tercer casillero, es decir, cierra un armario si está abierto y lo abre si está cerrado. Comenzando con el armario 3. Luego otra persona va y cambia el estado de cada cuarto casillero, comenzando en el 4, etc. Este proceso continúa así hasta que ya no queda más taquillas por cambiar. ¿Qué taquillas estarán cerradas?

[2]Tomado XIII COLOQUIO REGIONAL DE MATEMÁTICAS y III SIMPOSIO DE ESTADÍSTICA. Gabriel Darío Uribe Guerra

Capítulo 4

Principio del palomar

4.1. Introducción

En matemáticas hay diferentes tipos de problemas. Aunque en la mayoría de ellos, se pide encontrar una solución (o soluciones), en otros se pide garantizar que dicha solución existe. A esta clase de problemas se le suele llamar *problemas de existencia*. En este capítulo se presenta una estrategia que es útil a la hora de enfrentarse a alguno problemas de este tipo.

4.2. Principio del palomar o de las casillas

Esta estrategia se basa en una idea sencilla, la cual afirma que al ubicar cierta cantidad de objetos en un cierto número de bloques,donde el número de objetos es mayor que el número de bloques, entonces al menos un bloque va a tener más de un elemento.
También se conoce el principio de las casillas o el principio de las cajas de Dirichlet. Esto último porque Se cree que la primera formalización de la idea que ha sido hecha por Peter Gustav Lejeune Dirichlet en 1834 bajo el nombre Schubfachprinzip ("principio cajón" o "principio de estantería"). Por otro lado existen diferentes formas de enunciarlo, las más tradicional se establece con la ayuda de palomas y palomares. Cada formulación se diferencia de la otras en su presentación y de los términos matemáticos usados en ella; aunque en el fondo llevan implícitamente la misma idea . Las versiones más conocidas y que se presentarán a continuación son las siguientes:

- Principio del palomar básico.
- Principio del palomar intermedio.
- Principio del palomar avanzado.

4.2.1. Principio del palomar básico

Definición 4.1. Si tenemos n palomares y en ellos duermen $n+1$ palomas, al menos hay un palomar en el que duerme más de una paloma.

En la definición anterior la expresión “al menos”, nos afirma dos cosas importantes:

1. Pueden existir más palomares con dos o más palomas.

2. No importa cual paloma sea, solo de que existe uno o más.

A simple vista esta estrategia parece ser muy simple y de fácil aplicación. Pero la verdad es que requiere de un análisis exhaustivo para identificar en un problema dado, primero si se puede aplicar, luego en que momento aplicarla y por último identificar las palomas y los palomares.

Ejemplo 4.1. Se meten en un saco 900 tarjetas numeradas del 100 al 999. ¿Cuál es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar del bolso, para asegurarnos que al menos en tres tarjetas la suma de los dígitos del número escrito es la misma?

Este problema lo desarrollaremos mediante preguntas orientadoras.

P. Leamos detenidamente el problema anterior
A. ...

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Un saco tiene 900 tarjetas numeradas del 100 al 999.

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. La menor cantidad de tarjetas que se deben sacar del bolso, para asegurarnos que al menos en tres tarjetas la suma de los dígitos del número escrito es la misma.

P. ¿Podría dar un ejemplo de tres números que cumplan con las condiciones?
A. Sí. Existe el $102, 120$ y 201 cuya suma es la misma.

P. ¿Para todos los números de la lista es posible encontrar al menos dos números más que tengan la misma suma de sus dígitos?
A. ...

P. ¿Qué números suman 1?
A. El número 100, la suma de sus dígitos es 1.

P. ¿Hay más números en donde la suma de sus dígitos sea 1?
A. No.

P. ¿Qué otro número a parte del 100 no cumple con las condiciones?

A. El número 999, la suma de sus dígitos es 27 y puesto que es el número más grande de la lista, entonces no hay otro que tenga la misma suma en sus dígitos.

P. ¿Cuántas sumas posibles de dígitos hay en la lista?

A. 25 por que se descarta el caso 1 y el 27.

P. ¿Es posible aplicar la estrategia del Principio del Palomar?

A. Sí.

P. ¿Quiénes serían las palomas y los palomares?

A. El conjunto más grande es el de las palomas, es decir el número de tarjetas que hay en la bolsa; y el conjunto más pequeño es el de los palomares, o sea el conjunto de las posibles sumas de dígitos.

P. ¿Qué puede pasar si se sacan del saco 25 tarjetas?

A. Puede pasar que entre esas tarjetas hayan 3 cuya suma de sus dígitos sean iguales; pero también puede que todas las sumas de dígitos sean diferentes.

P. Si en el primer intento todas las tarjetas que se sacan son diferentes entonces ¿Cuántas más se deben sacar para asegurar que al menos tres tarjetas tengan igual suma?

A. Se debería hacer entonces dos intentos más, ya que si en el segundo intento salen todas las tarjetas con sumas distintas, entonces en el tercer intento se puede garantizar que al menos tres números van a cumplir con la condición dada.

P. ¿Cuántas tarjetas hay que sacar como mínimo en el tercer intento para asegurar la condición?

A. Hay que sacar mínimo tres.

Por lo tanto, 53 es la menor cantidad de tarjetas que se deben sacar del bolso, para asegurarnos que al menos en tres tarjetas la suma de los dígitos del número escrito es la misma.

El ejemplo anterior era sencillo y por eso se aplicaba la definición trivial del principio del palomar, sin embargo hay otras versiones equivalentes de este principio que pueden utilizarse según la naturaleza.

Ejemplo 4.2. Un conjunto X de 100 elementos se divide en 14 bloques. Probar que hay 2 bloques con el mismo número de elementos.

P. ¿Cuál es la incógnita?

A. ¿Probar que hay dos bloques con el mismo número de elementos?

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Un conjunto X de 100 elementos se parte en 14 bloques.

P. ¿Podríamos aplicar el principio del palomar?
A. Sí.

P. ¿Quiénes son las palomas y palomares?
A. Las palomas son los 100 elementos del conjunto y los palomares los 14 bloques.

P. ¿Es posible resolver el problema por contradicción?
A. Sí.

P. ¿Para trabajar por contradicción que afirmación se debe negar?
A. Se niega la tesis y se supone cierta la hipótesis.

P. ¿De donde se debe partir para la demostración?
A. Suponer que no hay dos meses con el mismo número de elementos.

P. ¿Cuál es la cantidad mínima de elementos que puede tener un casillero?
A. 1.

P. Si el casillero uno tiene 1 elemento, ¿cuántos elementos como mínimo, debe tener el casillero dos?
A. El casillero dos puede tener 2 o más elementos.

Si el estudiante logra hacer ese análisis ya es posible que tenga un plan acerca de como resolver el problema, pues continuando con este análisis obtenemos.

$$\begin{gathered} \left|f^{-1}(y_1)\right| \geq 1 \\ \left|f^{-1}(y_2)\right| \geq 2 \\ \vdots \\ \left|f^{-1}(y_{14})\right| \geq 14 \end{gathered}$$

Por lo cual

$$100 = \sum_{i=1}^{14} \left|f^{-1}(y_i)\right| \geq \sum_{i=1}^{14} i = 1 + 2 + \cdots + 14 = 15 \cdot 7 = 105.$$

Lo cual es una contradicción ya que $100 < 105$ por tanto la afirmación inicial es verdadera.

Este problema nos permite dar inicio a la proposición siguiente.

Proposición 4.1. *Sean dos conjuntos X (con n elementos) e Y (con k elementos) y una función*

$$f : X \longrightarrow Y.$$

a) Si $n > k$, entonces hay al menos dos elementos de X, x_1 y x_2 ($x_1 \neq x_2$) tales que $f(x_1) = f(x_2)$.

b) O, en términos más generales, si $n > kr$, para cierto $r \geq 1$, hay al menos $r + 1$ elementos distintos de X, $x_1, x_2, \ldots, x_{r+1}$ tales que $f(x_1) = f(x_2) = \cdots = f(x_{r+1})$.

Demostración. Observe que el ítem a) en realidad es otra manera de establecer el principio del palomar, donde X es el conjunto de palomas y Y el conjunto de palomares. Así, a cada paloma $x \in X$, le asignamos por medio de la función f su palomar correspondiente, y en consecuencia dado que $n > k$ existen dos palomas a las que les asignamos el mismo palomar, y se tiene la conclusión deseada.

Por otro lado para demostrar el segundo ítem, sean $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$ y $f^{-1}(y_i) = \{x \in X : f(x) = y_i\}$ la pre-imagen de y_i bajo f.
Con $\left|f^{-1}(y_i)\right|$ se denota el número de elementos en la pre-imagen de y_i. La demostración de este punto la haremos por contradicción.
Como se debe probar que la pre-imagen de un elemento de Y contiene al menos $r + 1$ elementos, entonces supongamos lo contrario; es decir que no hay ninguna pre-imagen que tenga $r + 1$ o más elementos. Dicho de otra forma, para cualquier i se tiene que $\left|f^{-1}(y_I)\right| \leq r$, lo cual implicaría que $\left|f^{-1}(y_1)\right| + \left|f^{-1}(y_2)\right| + \cdots + \left|f^{-1}(y_k)\right| \leq kr$, es decir que $n \leq kr$ lo cual contradice la hipótesis inicial. Por lo tanto la formulación inicial es verdadera. □

4.2.2. Principio del palomar intermedio

Proposición 4.2. *Si se tienen n palomas y k palomares, entonces al menos uno de los palomares contiene al menos $\lceil n/k \rceil$ palomas.*

Esta proposición se puede demostrar de varias formas. Aquí presentamos una con el ánimo de mostrar una aplicación más de la Proposición **??**.

Demostración.
Sean X y Y los conjuntos de palomas y palomares, respectivamente; y considere f como la función que está definida por $f(x) = y$ siempre que a la paloma x le corresponda el palomar y. Por otra parte, por el Algoritmo de la División sabemos que $n = kr + s$, donde $0 \leq s \leq k - 1$. Vamos a considerar dos casos, como sigue.

Caso 1. Cuando $s = 0$.

Luego $n = kr > k(r-1)$, lo que por la segunda parte del teorema anterior lleva a que hay al menos $r = \frac{n}{k} = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ palomas que tienen la misma imagen; esto es les correspondió el mismo palomar.

Caso 2. Cuando $s \neq 0$.

Entonces tenemos que $n = kr + s > kr$, entonces nuevamente por el ítem b) del teorema anterior concluimos que hay al menos $r + 1 = \left\lceil r + \frac{s}{k} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ en el mismo palomar. □

Para entender mejor esta nueva formulación miremos como funciona con un ejemplo.

Ejemplo 4.3. En una tienda hay 50 canastas con manzanas. Cada canasta contiene a lo sumo 24 manzanas. Probar que hay por lo menos 3 canastas que contienen el mismo número de manzanas.

Para dar solución a este problema debemos identificar primero quiénes son las palomas y quiénes los palomares. Recordemos que las palomas son el conjunto más grande de elementos, que en nuestro caso serían las 50 canastas y los palomares el menor; es decir, las 24 cantidades de manzanas. Dado que una canasta podría tener cualquier número de manzanas no superior a 24, ese monto estaría dado por $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, 24\}$ que son todas las cantidades de manzanas que pueden tener las canastas. Así por la definición anterior se tiene que al menos una cierta cantidad de manzanas va a estar contenida en $\left\lceil \frac{50}{24} \right\rceil$ canastas. Por lo tanto; como $\left\lceil \frac{50}{24} \right\rceil = 3$, entonces hay por lo menos 3 canastas que contienen el mismo número de manzanas.

Una vez aclarado este principio el docente puede plantear el siguiente problema.

Ejemplo 4.4. Supongamos que tenemos 27 números impares positivos menores que 100. Demostrar que hay al menos dos de ellos cuya suma es 102.

Observemos que no es claro cuál es el conjunto de palomas y cuál el de palomares, por ello el docente puede guiar a los estudiantes formulando las siguientes preguntas.

P. ¿Cuál es la incógnita?
A. Demostrar que hay al menos dos números impares menores que 100 cuya suma es 102.

P. ¿Cuáles son los datos?
A. Supongamos que tenemos 27 números impares positivos menores que 100.

P. ¿Cuántos números impares positivos hay entre 1 y 10?
A. $1, 3, 5, 7, 9$ es decir hay 5 números impares.

P. ¿Cuántos números impares positivos hay entre 12 y 20?
A. $11, 13, 15, 17, 19$ es decir hay 5 números impares.

P. ¿Cuántos números impares positivos menores que 100 hay?
A. 50.

P. ¿Podemos escoger una pareja de impares que sumen 102?
A. Sí, por ejemplo está el 3 y el 99 que suman 102.

Si el estudiante dedujo solo el ejemplo anterior, entonces ya está listo para responder ¿Cuántas parejas de la lista se pueden armar que cumplan con la condición dada?
Es obvio que primero hay que sacar la lista de números impares menores que 100 y formar las parejas que cumplan la condición cuya suma sea 102. Así tendremos que

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25
	99	97	95	93	91	89	87	85	83	81	79	77
27	29	31	33	35	37	39	41	43	45	47	49	51
75	73	71	69	67	65	63	61	59	57	55	53	

Una vez que el estudiante haya organizado el número de parejas que satisfacen la condición, está en la capacidad de deducir cuáles son las palomas y cuales los palomares, en el problema dado.
Así Como, tenemos 27 palomas (números de impares positivos menores que 100) y solo 26 palomares (número de parejas que cumplen la condición), entonces podemos garantizar que al menos un casillero va a contener dos palomas; es decir que al menos dos números suman 102.

En el ejemplo anterior no era sencillo distinguir las palomas y los palomares, lo que nos permite dar paso al siguiente subtema.

4.2.3. Principio del palomar avanzado

Esta versión aunque no tiene una definición específica, puede considerarse como aquella donde se combina el principio del palomar básico con otras estrategias matemáticas, lo que la hace más especializada. Esta fusión de estrategias puede llevar a pensar que esta versión es la llamada a ayudar en los problemas más difíciles, aunque no necesariamente es así.

En este principio, ya sean las palomas y/o los palomares pueden estar lejos de ser evidentes.

Ejemplo 4.5. Supongamos que en una reunión hay n personas y nos preguntamos por el número de personas que conoce cada una. Suponemos que si una persona conoce a otra, ésta también conoce a la primera; y que nadie se conoce a sí mismo. Probar que hay al menos dos personas que tienen el mismo número de conocidos.

Se espera que el estudiante ya tenga una idea de como debe platearse el problema si se quiere utilizar la estrategia, así que no debe ser muy ingenuo esperar que el estudiante cree una aplicación que va de un conjunto (palomas) a otro conjunto (palomares). Pero, si no es así, el docente puede hacer la siguiente afirmación, a fin de brindarle una ayuda al estudiante.

Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ el conjunto de personas; cada una de ellas tendrá un cierto número de conocidos, y este número estará en el conjunto $Y = \{0, \ldots, n-1\}$. A partir de ahí podemos crear la aplicación

$$f : X \longrightarrow Y$$

$$x_j \longmapsto f(x_j) = \#\{\text{conocidos de } x_j\}$$

Aquí ya podemos proceder con las preguntas.

P. ¿Cuál es la incógnita?

A. Probar que en una reunión de n personas hay al menos dos personas que tienen el mismo número de conocidos.

P. ¿Cuáles son los datos?

A. En una reunión hay n personas y si una persona conoce a otra, ésta también conoce a la primera; y que nadie se conoce a sí mismo.

P. ¿Qué se puede decir de las palomas (X) y palomares (Y)?

A. El número de elementos de ambos conjuntos es el mismo.

P. ¿Podemos aplicar directamente el principio del palomar?

A. No, porque para aplicar el principio del Palomar es necesario que el conjunto de las palomas sea más grande que el de los palomares.

Como se mencionó anteriormente, hay problemas en matemáticas que para resolverlos es necesario utilizar más de una estrategia, como es el caso de este ejemplo; para solucionarlo vamos a utilizar la estrategia *Dividir el problemas en casos y de ahí el Principio del Palomar*.
Para dar una idea al estudiante podemos preguntarle.

P. ¿Será posible que haya una persona que no conozca a nadie?

A. Sí.

P. ¿Qué otra posibilidad puede existir?

A. Puede pasar que haya una persona que conozca a todas.

Con estas preguntas el docente ya ha ayudado bastante al estudiante, por que este ya sabe cuales son los casos a considerar.

Caso 1: Si hubiera una persona que no conozca a nadie.
Entonces significaría que para algún $x \in X$ se tiene que $f(x) = 0$, pero esto implicaría que f no

podría tomar el valor de $n-1$ porque no puede existir una persona que no conozca a nadie y otra que conozca a todas. De ahí que del conjunto Y solo se tiene en cuenta $n-1$ elementos. Aquí entra en juego nuevamente el docente preguntando.

P. ¿Será posible aplicar el Principio del Palomar?
A. Sí.

P. ¿Por qué?
A. Como se ha descartado el valor de $n-1$ entonces, el conjunto Y solo tiene $n-1$ elementos y el conjunto X tiene n elementos.

P. ¿Qué nos garantiza el Principio de Palomar?
A. Dado que el número de personas es mayor que el número de conocidos, entonces el principio nos garantiza que al menos dos personas tienen igual número de conocidos.

Caso 2: Si hubiera una persona que conociera a todos.
Entonces significaría que para algún $x \in X$ se tiene que $f(x) = n-1$, pero esto implicaría que f no podría tomar el valor de 0 por que no puede existir una persona que conozca a todas y otra que no conozca a nadie. De ahí que del conjunto Y solo se tiene en cuenta $n-1$ elementos. En este caso ya no es necesario preguntar al estudiante, pues ya este sabe que se procede de la misma manera que en el caso anterior: Por lo tanto, existen al menos dos personas que tiene igual número de conocidos.

Es claro que esta estrategia en muchas ocasiones necesita de otras para aplicarse y que no tiene límite de aplicación; es decir que se puede aplicar más de una vez en un mismo problema.

4.2.4. Problemas propuestos

1. Camilo tiene un número infinito de medias de color rojas, azules, amarillas, y negras en un cajón, ¿cuántas medias debe sacar Camilo del cajón para garantizar que tiene un par?

2. Dados 12 números enteros cualesquiera, probar que dos de ellos pueden escogerse de forma que su diferencia sea divisible por 11 [1].

3. Sean $a_1, a_2, \ldots, a_8$ números naturales diferentes, con $0 < a_i \leq 15$ y $i = 0, 1, 2, \ldots, 8$. Probar que al menos tres pares de ellos tienen la misma diferencia positiva[2].

4. Diez estudiantes participantes de las Olimpiada Regionales de Matemática de la Universidad de Nariño intentaron resolver un total de 35 problemas. Cada problema fue resuelto por un

[1]Tomado de http://socylem.es/sitio/estalmat/Materiales/6-PRINCIPIO-PALOMAR.pdf.
[2]Tomado de http://socylem.es/sitio/estalmat/Materiales/6-PRINCIPIO-PALOMAR.pdf.

estudiante únicamente. Hay al menos un estudiante que resuelve solamente un problema, al menos uno que resuelve sólo dos problemas, y al menos uno que resuelve exactamente tres problemas. Probar que hay, también, al menos un estudiante que ha resuelto al menos cinco problemas.

5. ¿Cuál es el mayor número de arañas que pueden amigablemente compartir la tela de araña dibujada a continuación? Una araña tolera a otra sólo a una distancia mayor de 1 metro moviéndose a lo largo de la tela [3].

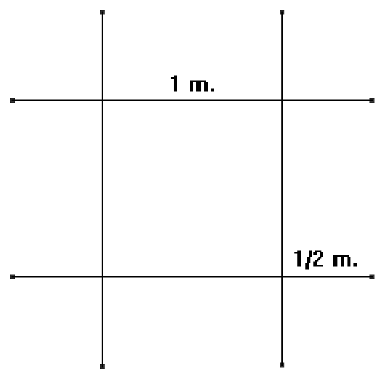

Figura 4.1: Telaraña.

6. Tenemos 51 fichas colocadas en un parqués cuadrado de un metro de lado. Probar que, sea cual sea la posición de dichas fichas, algún conjunto de tres de ellas puede ser cubierto por un cuadrado de lado $20cm$.

7. Las cifras $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ y 9 se dividen en tres grupos. Probar que el producto de los números en uno de dichos grupos, sean cual sean estos, siempre debe ser mayor de 71.

8. Si en una sala hay 13 o más personas, entonces existe al menos un par de personas cuyo cumpleaños es en el mismo mes.

9. En un juego de BINGO María tiene un cartón con los números del 1 al 9, si las bolas están numeradas del 1 al 20 y además para hacer bingo maría debe sacar cuatro de los números marcados en su cartón. ¿Cuántas bolas como mínimo debe sacar María de la bolsa para hacer bingo?

10. ([**?**], pag.85) Probar que entre cualquier $n + 1$ enteros positivos, tiene que haber dos cuya diferencia es un múltiplo de n

[3]Tomado de http://socylem.es/sitio/estalmat/Materiales/6-PRINCIPIO-PALOMAR.pdf.

11. Probar que existe una potencia de tres cuyas tres últimas cifras de su representación decimal son 001.

12. ([**?**], pag. 92) Demostrar que para cualquier entero positivo n, existe un múltiplo positivo de n que contiene sólo los dígitos 7 y O.

13. ([**?**], pag.118) Probar que entre seis personas hay un grupo de tres que o bien se conocen todas entre sí o bien no se conocen ninguna entre sí.

14. Probar que a partir de un conjunto de diez números distintos de dos dígitos (en el sistema decimal), es posible seleccionar dos subconjuntos disjuntos cuyos miembros tienen la misma suma [4]

15. Cada punto del plano es de color rojo o azul. Demostrar que sin importar cómo se realice la coloración, deben existir dos puntos, exactamente una milla de distancia, que son del mismo color.

[4] Tomado de http://socylem.es/sitio/estalmat/Materiales/6-PRINCIPIO-PALOMAR.pdf.

Consideraciones finales

- Este trabajo describe de manera detallada algunas estrategias que son de gran ayuda a la hora de resolver problemas matemáticos; además presenta y aplica una y otra vez la metodología de George Pólya (por medio de preguntas orientadoras), por lo que podría ser de gran ayuda tanto para docentes que buscan mejorar sus clases brindándoles a sus estudiantes herramientas para comprender los contenidos mediante la resolución de problemas, como para los estudiantes que buscan mejorar su aprendizaje en matemáticas y para cualquier persona interesada en resolver problemas matemáticos.

- El tratamiento cuidadoso de estas estrategias podría ayudar a las personas que trabajan con olimpiadas matemáticas, las preguntas sirven para guiar a los estudiantes y darle una idea de la solución, de ahí que este trabajo podría servir como preparación para eventos de este tipo y los problemas propuestos se convertirían en la mejor manera de practicar lo aprendido.

- Las estrategias aquí presentadas son sola algunas de las muchas que hay; por eso este trabajo podría servir de guía para los estudiantes que estén interesados en hacer su trabajo de grado en resolución de problemas mediante estrategias matemáticas.

- Una de las dificultades principales que se presentan en los estudiantes de básica primaria y media, es la resolución de problemas y esta dificultad se dá precisamente por que los maestros también la tienen. De ahí que este trabajo podría servir como guía de apoyo en las instituciones, con el fin de preparar a los docentes en la resolución de problemas mediante estrategias matemáticas y ellos a su vez puedan compartirlas a sus estudiantes.