UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL CON ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO INTEGRANDO GEOGEBRA.

JHON ALEXANDER YAMUÉS CIFUENTES

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JUAN DE PASTO

2017

UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL CON ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO INTEGRANDO GEOGEBRA.

JHON ALEXANDER YAMUÉS CIFUENTES

Trabajo de Grado como requisito para optar el título de Licenciado en Matemáticas

Asesor:

OSCAR FERNANDO SOTO AGREDA
Magister en Modelos de Enseñanza Problémica

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

SAN JUAN DE PASTO

2017

Nota de Aceptación:

Fernando Soto Agreda

Firma de Asesor.

Libardo Jácome

Firma del Jurado.

Edinsson Fernández M.

Firma del Jurado.

San Juan de Pasto, 2 de Marzo de 2017

RESUMEN

En este trabajo de investigación se presenta el diseño, aplicación y evaluación de una secuencia de enseñanza integrando GeoGebra, diseñada con el objetivo de promover el aprendizaje del concepto de función exponencial en los estudiantes de grado noveno del colegio Liceo Integrado de Bachillerato de la Universidad de Nariño. Para el diseño de dicha secuencia se tomó como marco de referencia la *Teoría de los Registros de Representación Semiótica* planteada por R. Duval (1999) y la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) de Brousseau (2007), por lo cual se empleó como metodología la *micro-ingeniería didáctica* que proponen Artigue, Douady, Moreno, & Gomez (1995). Se llevó a cabo un análisis cognitivo sobre las concepciones de los estudiantes con respecto a los conceptos básicos que componen el objeto de estudio, juntos con sus habilidades para transitar dentro y entre los registros de representación; un análisis didáctico sobre la forma como se trata la función exponencial al interior de los planes de área locales y los Referentes de Calidad Educativa que rigen a nivel nacional; y un análisis histórico-epistemológico realizado a partir del estudio de algunos libros de texto empleados para la enseñanza de la función exponencial para identificar la forma en la que se aborda dicho concepto y la manera en la que éste evolucionó a través del tiempo hasta llegar a su definición más elaborada. El análisis anterior permitió el diseño de tres Situaciones Didácticas; en su desarrollo se muestra cómo el concepto de función exponencial puede interpretarse como un modelo matemático que involucra la variación y el cambio entre magnitudes a través de los registros de representación propuestos.

Palabras Claves: Función exponencial, GeoGebra, tratamiento, conversión, Teoría de las Situaciones Didácticas, micro-ingeniería didáctica, epistemológico, visualización, modelación, cognitivo, didáctico, devolución, factor de crecimiento, parámetro.

ABSTRACT

In this research the design, application and evaluation of a teaching sequence integrating GeoGebra, designed with the objective of promoting the learning of the concept of exponential function in the ninth grade students of the Liceo Integrado de Bachillerato de la Universidad de Nariño. For the design of this sequence, *the Theory of Registers of Semiotic Representation* proposed by R. Duval (1999) and *Theory of the Didactic Situations* (TSD) by Brousseau (2007) were used as a frame of reference.the methodology *didactic micro-engineering* proposed by Artigue, Douady, Moreno, & Gomez (1995). A cognitive analysis was carried out on students' conceptions regarding the basic concepts that make up the object of study, together with their abilities to transit within and between the registers of representation; A didactic analysis on how the exponential function is treated within the local area plans and the Referents of Educational Quality that govern at national level; And a historical-epistemological analysis made from the study of some textbooks used to teach the exponential function to identify the way in which this concept is approached and the way in which it evolved over time to reach Its most elaborate definition. The above analysis allowed the design of three Didactic Situations; In its development shows how the concept of exponential function can be interpreted as a mathematical model that involves the variation and the change between magnitudes through the proposed records of representation.

Keywords: Exponential function, GeoGebra, treatment, conversion, Theory of Didactic Situations, didactic micro-engineering, epistemological, visualization, modeling, cognitive, didactic, return, growth factor, parameter.

TABLA DE CONTENIDO

Lista de Tablas

Lista de Figuras

Lista de Anexos

INTRODUCCIÓN

Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) vienen ganando impacto en la sociedad, por lo tanto la integración de éstas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es de gran importancia y los profesores deben mantenerse en continua actualización de las herramientas didácticas disponibles, adaptándolas y construyendo propuestas de trabajo de acuerdo a sus necesidades formativas. En este sentido, se formulan actividades enmarcadas en el planteamiento y resolución de problemas haciendo énfasis en el uso de las tecnologías dentro del ambiente escolar, tales como software matemáticos e instrumentos tecnológicos para la enseñanza de las matemáticas, sustentados en el hecho de que los avances y el uso pertinente de dichos recursos en el aula de clase, permiten la creación de ambientes de aprendizaje en donde los estudiantes pueden recrear el conocimiento matemático, a diferencia del modelo de enseñanza tradicional en donde se muestra a las matemáticas como un conocimiento acabado e inmutable, reduciendo considerablemente las habilidades y competencias matemáticas que puedan surgir, reafirmándose la idea de que las TIC influyen directa o indirectamente en el ámbito educativo.

En el caso concreto para los grados de la educación media están los programas que favorecen la instrucción tanto para álgebra como geometría. El interés sobre esas áreas del conocimiento es significativo porque, como Hohenwarter & Jones (2007) describen, “los currículos matemáticos escolares en todo el mundo ofrecen posiciones destacadas tanto para geometría y álgebra, especialmente a nivel de escuela secundaria” (p. 126). De ahí que las tecnologías informáticas que se podrían usar en estos grados, deben fortalecer esas dos temáticas fundamentales. En este sentido, el software GeoGebra integra el trabajo en las áreas de geometría, álgebra, álgebra lineal, estadística, análisis matemático entre otros, en un ambiente dinámico llegando a ser considerado como una herramienta didáctica, puesto que es un elemento que al ser usado de manera eficaz dentro del aula de clase, provee de cierta ventaja al maestro para la presentación de una temática particular, y su vez le proporciona al estudiante otra forma de representación, visualización y organización de los conceptos y procedimientos abordados en su estudio.

De esta manera, la actividad matemática puede verse mejorada, si se integra GeoGebra dentro del ambiente escolar ya que favorece la motivación e interés de los estudiantes, facilita una enseñanza interactiva, participativa y colaborativa puesto que en respuesta a las acciones hechas por los estudiantes, suministra retroacciones, las cuales pasan a ser interpretadas para corregir los posibles errores, trabajando de forma autónoma y a su vez junto a un grupo de iguales que tienen un objetivo en común. Otra característica importante de GeoGebra, consiste en el tratamiento dinámico que hace a las representaciones de los conceptos matemáticos, ya que permite manipular de forma dinámica elementos de naturaleza geométrica y algebraica, favoreciendo de esta forma una mayor comprensión de la variación entre dichos elementos.

El concepto alrededor del cual se desarrolla la propuesta didáctica es el de la función exponencial. El interés por esta entidad matemática consiste en que es uno de los conceptos matemáticos que tienen un número considerable de aplicaciones para modelizar fenómenos de ciertas ciencias experimentales; hecho que evidentemente servirá para mostrar el vínculo existente entre las matemáticas y la realidad. En este sentido, el trabajo de investigación toma como referente metodológico la *micro-ingeniería didáctica* que servirá para guiar el diseño y ejecución de las situaciones didácticas concebidas a partir de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007), en las que se integró el software GeoGebra como instrumento para desarrollar las actividades por parte de los alumnos partícipes en esta investigación. Todo esto con el fin de propiciar un ambiente variacional encaminado a describir algunas de las características matemáticas inherentes a este concepto mediante la variación de sus parámetros.

El trabajo de campo de esta investigación se realizó en la Institución Liceo Integrado de Bachillerato de la Universidad de Nariño, que es de carácter oficial y ofrece los niveles de Preescolar, Educación Básica Primaria, Secundaria. La comunidad educativa está comprometida con el respeto y fortalecimiento de valores éticos, religiosos, espirituales, sociales, culturales, políticos y estéticos, apropiándose adecuadamente de contenidos relacionados con la ciencia y la tecnología que le puedan permitir al estudiante desempeñarse con efectividad, calidad y competitividad en la sociedad. Para la consecución del mismo, se elaboraron las tres situaciones didácticas que fueron utilizadas en la fase experimental, tratando de observar los acontecimientos durante las distintas fases que según la TSD componen las etapas del aprendizaje: acción, formulación, validación e institucionalización. Finalmente se analizaron los datos recolectados para proceder a hacer el análisis *a posteriori* con la respectiva evaluación de los resultados obtenidos y la validación, resultante de la confrontación de los análisis, el *a priori* y *a posteriori*

1. Antecedentes

De acuerdo a los intereses de este proyecto se han considerado como referentes los siguientes trabajos de investigación, por cuanto hacen alusión al mismo concepto matemático o ya sea porque emplean GeoGebra para la enseñanza de un concepto matemático afín.

- Coral. (2013). *Diseño de una propuesta metodológica para el empleo del software GeoGebra en la enseñanza de la función cuadrática con estudiantes de grado noveno del colegio Filipense de la ciudad de Ipiales* (tesis de pregrado). Universidad de Nariño, Pasto, Colombia.

En este trabajo de investigación se presenta una estrategia de enseñanza para la función cuadrática, fundamentada en el uso efectivo del software GeoGebra con los estudiantes de grado noveno del Colegio Filipense de la ciudad de Ipiales. Para el diseño de esta propuesta se tuvieron en cuenta aportes de la teoría del aprendizaje significativo de Ausubel e igualmente de la teoría de las representaciones de Duval, puesto que estos son necesarios en la construcción del conocimiento, como lo son también los pre-saberes de los alumnos, el empleo de medios tecnológicos y el trabajo cooperativo. El objetivo general de este trabajo de investigación como su nombre lo indica fue el de elaborar una propuesta de enseñanza para el empleo del software GeoGebra en la enseñanza de la función cuadrática con los estudiantes ya mencionados, para fortalecer las competencias en el área de matemáticas. Durante el trabajo de campo se realizaron cuatro secuencias didácticas, divididas en actividades de apertura, desarrollo y cierre; orientadas a capacitar a los estudiantes a identificar los conceptos básicos que conforman la función cuadrática, tales como el de función, variables, dependencia entre variables, entre otros. De igual manera se hizo uso de GeoGebra para: Analizar el comportamiento de la función cuadrática debido a la variación de sus parámetros; hacer un estudio cualitativo de este objeto matemático encontrando sus principales elementos y por último para aplicar los conocimientos adquiridos en la modelación de algunas situaciones de la vida real.

- Gonzales. (2011). *Una propuesta para la enseñanza de las funciones trigonométricas seno y coseno integrando GeoGebra* (tesis de pregrado). Universidad del Valle, Santiago de Cali, Colombia.

El trabajo de esta investigación consistió en realizar una propuesta para la enseñanza de las funciones trigonométricas seno y coseno empleando una metodología de estudio de casos. En esta investigación participaron 39 estudiantes de los grupos de grado décimo de la Escuela Normal Superior Farallones de Cali, en cuatro sesiones de 2 horas cada una, su compromiso y responsabilidad fue ajena a sus deberes académicos en el área de matemáticas, es decir; asistían voluntariamente a sesiones de trabajo externas a la jornada escolar. En dicha propuesta de enseñanza, se recalcó la importancia de la visualización como un proceso cognitivo inherente a la actividad matemática, y de igual manera se destacó el aspecto variacional de estas funciones para el análisis y resolución de las situaciones elaboradas. Se consideró como referente teórico la TSD y así mismo se seleccionó GeoGebra como medio para encontrar las respectivas soluciones a las situaciones planteadas. Una de las conclusiones fue comprobar que GeoGebra promovió y facilitó la visualización y comprensión de fenómenos de variación concernientes a estos objetos matemáticos, puesto que esto produjo progresivamente que los estudiantes identifiquen sus propiedades matemáticas inherentes.

- Trillos. (2008). *La función exponencial en el grado noveno* (tesis de pregrado). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

En este trabajo de investigación se promovió la comprensión del concepto de función exponencial en 15 de los estudiantes matriculados en el grado noveno del Instituto Técnico Superior Dámaso Zapata, implementando una metodología diferente y significativa basada en el manejo de algunas aplicaciones de este objeto matemático para modelar ciertos fenómenos de la vida real. El objetivo fundamental de esta investigación fue el de analizar la construcción del concepto de función exponencial por parte de estos estudiantes, rescatando algunos de los aspectos históricos y problemas que motivaron al surgimiento del mismo. Para esto se implementaron siete actividades encaminadas a que inicialmente los alumnos conozcan las bases teóricas que conforman este concepto matemático a través de su evolución histórica, con el fin de que puedan paulatinamente describir, caracterizar y aplicar los conocimientos adquiridos mediante el uso de este objeto matemático. Un resultado sobresaliente dentro de esta investigación fue que para los estudiantes resultó satisfactorio ver que lo aprendido, les iba a servir para aplicarlo ya sea un su vida o en la sociedad que los rodea, como también, evidenciar la importancia que tuvo para los alumnos extender los conceptos matemáticos a sus aplicaciones, en este caso con el propósito de resolver problemas.

- Pulido. (2012). *Propuesta de una unidad didáctica para la enseñanza del concepto de función exponencial mediante la implementación de algunas aplicaciones* (tesis maestría). Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, Colombia.

En este trabajo de investigación se presenta a la función exponencial como un modelo matemático que permite de alguna manera explicar el comportamiento de varios fenómenos o situaciones de nuestra realidad. Para tal propósito, se muestran elementos de carácter histórico-epistemológico que dan cuenta de diversos momentos y situaciones que han influido en la construcción de este concepto matemático. Posteriormente se presentan ciertas propiedades de la función exponencial, comenzando desde sus elementos básicos hasta los análisis que en la actualidad se realizan de forma minuciosa y especializada por la comunidad científica. Finalmente se proponen una serie de actividades encaminadas a propiciar la comprensión del concepto en general, por medio del reconocimiento y análisis de las herramientas que lo componen, su desarrollo histórico, su definición formal, sus propiedades y diversas aplicaciones presentadas con relación a su entorno.

- Londoño. (2006). *Una unidad didáctica para la enseñanza de la función exponencial en el grado noveno* (tesis de pregrado). Universidad de la Salle, Bogotá, Colombia.

En este trabajo de investigación se intentó dar a conocer los conceptos fundamentales de la función exponencial, posibilitando a los estudiantes de grado noveno, aprenderlos y aplicarlos de forma adecuada en la resolución de problema de carácter práctico. En cuanto a la realización, se consideró una metodología de tipo experimental en donde se trabajó con los alumnos de los cursos 901 y 902 con 35 y 33 alumnos respectivamente. En primer lugar se detectaron las habilidades y falencias con respecto a la comprensión de los conceptos básicos de la función exponencial. Posteriormente en el curso 901 se crearon dos grupos homogéneos de acuerdo a intereses de la investigación, a quienes se les aplicó una unidad didáctica que recopilaba algunos conceptos básicos y por ende necesarios para la el estudio de dicho concepto. Por otro lado, en el otro curso o grupo control, se empleó la metodología tradicional para la enseñanza de esta temática, es decir, explicación del concepto de función exponencial, su utilidad, propiedades, tabulación y representación en el plano cartesiano, seguida de la realización de ejercicios, ya sea en grupo e individualmente (dependiendo de los momentos de la organización didáctica), los cuales involucraban el reconocimiento, representación y significación de los conceptos y propiedades de la función exponencial. Posteriormente, se elaboró y aplicó en ambos grados una segunda prueba de verificación que involucró la comprensión del concepto y su aplicación. Una de las conclusiones fue que la puesta en práctica de la unidad didáctica llegó a constituirse para el grupo experimental en una herramienta útil, para la enseñanza y aprendizaje de la función exponencial, puesto que bajo esta metodología los estudiantes mejoraron su actitud y alcanzaron los logros propuestos en una mayor proporción que los del grupo control.

2. Justificación y Planteamiento del problema

Para nadie es un secreto que las matemáticas se han considerado de manera tradicional complicadas para la sociedad en general y aún más para los estudiantes, llegándose a sentir atemorizados e incapaces cuando se enfrentan a esta área del conocimiento, ya que la falta de motivación, de recursos, de estrategias didácticas del docente favorecen dicha caracterización como algo difícil, complicado y lo que es peor fuera de contexto. Por tal motivo es que la Educación Matemática en este país necesita cambios trascendentes en miras de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje, en donde se empleen metodologías activas, que favorezcan tanto la adquisición de conocimientos como el desarrollo del trabajo en equipo y las habilidades comunicativas, modernizando los ambientes en el aula de clase de tal manera que cada estudiante sepa responder de manera clara y apropiada a los retos y exigencias que le manifiesta la sociedad; es decir una educación capaz de responder a los tiempos actuales.

Por otro lado, la escuela al constituirse como institución social y educativa no puede ser ajena y dar la espalda a la cultura y tecnología de su época. Por tanto, se parte del supuesto de que el uso eficaz de los medios tecnológicos pueden aportan elementos que ayuden progresivamente a conseguir dicho propósito, ya que los estudiantes son usuarios habituales de las diversas tecnologías digitales (videojuegos, internet, televisión digital, móviles, cámaras, etc.), desempeñando un papel cada vez más importante en la vida los escolares. Sin embargo, integrar las TIC en el aula de clase, sin cambiar las prácticas educativas, es inmortalizar una práctica común a un mayor costo. Un verdadero cambio en la educación requiere que de manera conjunta surjan cambios pedagógicos y tecnológicos. De ahí que el foco de atención para la innovación pedagógica de la práctica docente debe ser tanto el planteamiento y método de enseñanza desarrollado por dichas tecnologías, como el proceso de aprendizaje que este método promueve en los estudiantes.

Según la ley N° 1341, de 2009, las TIC dentro de la legislación educativa, actual se presentan no como fin en sí mismo sino como una herramienta didáctica más integrada en el aula. Sin embargo, en la gran mayoría de los establecimientos educativos, las TIC son utilizadas únicamente como un medio novedoso al servicio de los métodos de enseñanza tradicionales, limitando de esta manera su potencial pedagógico. En consecuencia, no se trata únicamente de enseñar a utilizar ciertos instrumentos tecnológicos, sino que se deben emplear de tal manera que proporcionen nuevas y mejores metodologías educativas que posibiliten alcanzar los objetivos trazados. De esto se deduce, que el uso pertinente de las TIC depende en su gran mayoría de la correcta planeación del maestro, así como de sus intenciones metodológicas y didácticas, y no al contrario, pues dicho de otra manera, resulta muy difícil que los artefactos tecnológicos por sí solos contribuyan al mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Dentro de este trabajo se pretende generar espacios didácticos que favorezcan la calidad tanto de la enseñanza y el aprendizaje de la función exponencial, basándose en la integración del software GeoGebra en las prácticas educativas, puesto que se tiene la idea de que la integración pertinente de esta herramienta didáctica en el aula de matemáticas puede generar unas condiciones adecuadas para reforzar la dimensión social de la educación; debido a que posee una gran variedad de características y recursos, como por ejemplo, el hecho de ser un software libre y por otro, estar diseñado para interactuar dinámicamente en un ambiente que reúne la geometría, álgebra y análisis o calculo, otorgando la posibilidad de visualizar de forma sincrónica y simultánea sobre la vista gráfica, algebraica y en la hoja de cálculo. De igual forma, puede facilitar una enseñanza interactiva, participativa y colaborativa, en el momento en que los estudiantes realizan acciones sobre el programa, reciben las retroacciones que le suministra dicha herramienta y corrigen los errores de manera inmediata, trabajando junto a un grupo de iguales que tienen un objetivo en común.

La razón por la cual se escogió este concepto matemático, se debe a que en primer lugar es un tema muy poco trabajo en el grado noveno, a pesar de estar contemplado dentro del programa académico y en los Estándares Básicos de Competencias (2006) correspondientes a este grado y en segundo lugar a que se sabe del enorme potencial que tiene la función exponencial para modelizar diversos fenómenos de las ciencias experimentales (que incluyen crecimiento poblacional, desarrollo de poblaciones, decaimiento radiactivo, etc.). De esta manera, dichas características pueden ser aprovechadas por GeoGebra para diseñar dispositivos didácticos que permitan mejorar la enseñanza y aprendizaje de este objeto matemático, pues se sabe que las representaciones de un concepto matemático, solo constituyen una parte del mismo, por lo tanto, la manipulación coherente de ellas dentro de este nuevo contexto, es lo que permitirá su estudio.

Por otro lado, durante la revisión bibliográfica se hizo evidente la presencia de trabajos de investigación que presentan experiencias que intentan demostrar las bondades de la mediación de las TIC en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y que dichas experiencias carecen de orientación teórica definida que permita analizar lo que en realidad sucedió, y en consecuencia poder determinar qué aspectos de tales prácticas pueden ser aprovechados de mejor manera. Por tal motivo dentro de esta propuesta se toma como metodología de investigación la *micro-ingeniería didáctica*, referente que servirá para planear, introducir, y analizar los resultados de introducir secuencias didácticas enmarcadas en la TSD, pues se considera que estos referentes teóricos permiten identificar de manera clara el rol de GeoGebra en el aprendizaje de la función exponencial, describir de manera precisa el papel del profesor, y predecir el efecto que tendrán las actividades planteadas en el aprendizaje de los estudiantes.

Resulta evidente que el potencial pedagógico que ofrece GeoGebra, sólo puede hacerse evidente a partir de una rigurosa investigación, evaluación y disposición conveniente de sus opciones y elementos; de tal forma que se origine una lectura efectiva de los usos didácticos que aporten a modelos y estrategias de intervención educativa eficaces. Este tipo de análisis que se ocasiona al cambiar las estrategias didácticas al interactuar con una herramienta tan diferente, promueve una adecuada integración de dicho software en el aula de clase, de ahí que el propósito fundamental de esta investigación, consiste en caracterizar y diseñar secuencias didácticas enmarcadas en la TSD, que fomenten el estudio de la función exponencial integrando GeoGebra; de tal forma, que se propicie la utilización de modelos matemáticos en situaciones prácticas de dicho concepto y a su vez permitan investigar lo que sucede cuando se combinan este tipo de herramientas tecnológicas con las técnicas provenientes de la enseñanza tradicional.

3. Pregunta de Investigación

Por toda esta situación anteriormente planteada, el problema didáctico que se plantea se puede formular a través de la siguiente pregunta que guiará esta investigación:

¿Cómo diseñar procesos didácticos adecuados para abordar el concepto de función exponencial empleando GeoGebra, donde se elaboren cuestiones que sean generadoras de los contenidos matemáticos tratados y, en consecuencia, permitan articularlos y mostrar su funcionalidad?

4. Objetivos

4.1. Objetivo General

- Diseñar, aplicar y evaluar una secuencia de situaciones didácticas para la enseñanza de la función exponencial integrando GeoGebra, dirigida a estudiantes de grado noveno del colegio Liceo Integrado de Bachillerato de la Universidad de Nariño, utilizando como metodología de investigación una *micro-ingeniería didáctica*.

4.2. Objetivos Específicos

- Proponer una secuencia didáctica integrando GeoGebra, para la enseñanza de la función exponencial, mediante situaciones didácticas, enfocadas en el manejo dentro y entre los registros de representación característicos de este concepto matemático.

- Propiciar el desarrollo del pensamiento variacional y los procesos de visualización en los estudiantes objeto investigación, por medio de situaciones didácticas centradas en el estudio de la variación de los parámetros característicos de la función exponencial empelando GeoGebra y así ofrecer una experiencia de aula a la comunidad interesada en la integración de las TIC, en el ambiente escolar de matemáticas.

5. Marco Teórico

Este trabajo de investigación está orientado al estudio de fenómenos en el aula que surgen con el diseño, implementación y evaluación de secuencias de situaciones didácticas entorno a la función exponencial, integrando GeoGebra. Para tal efecto, en esta investigación se utilizará la *micro-ingeniería didáctica*, comprendiendo tres dimensiones básicas que sugiere la Escuela Francesa de la Didáctica de las Matemáticas y que son el soporte conceptual para el diseño de tales situaciones didácticas.

5.1. Teoría de las representaciones matemáticas

Indudablemente una característica inherente de la actividad matemática es sin duda, el empleo de diversos sistemas de representación además del lenguaje natural ya que estos son fundamentales para la comprensión y el razonamiento de las estudiantes. Sin embargo; las diversas experiencias en el ambiente escolar evidencian las dificultades que presentan los alumnos al confrontarse en otros contextos limitando su accionar, logrando avances poco significativos y restringiendo de esta manera la comprensión de los conceptos matemáticos.

> (…) se ha probado que cambiar la forma de una representación es, para muchos alumnos de los diferentes niveles de enseñanza, una operación difícil y en algunas ocasiones imposible. Todo sucede como si para la gran mayoría de los alumnos la compresión que logran de un contenido quedará limitada a la forma de representación utilizada. (Duval, 1999, pág. 28)

Es importante entonces desde el papel de investigador describir algunas de las características inherentes al empleo de diferentes tipos de representaciones de los conceptos matemáticos. Este mismo autor describe una importante característica de las representaciones de los objetos vinculadas a la aprehensión conceptual de los mismos: *"*si se llama semiosis a la aprehensión o la producción de una representación semiótica, y neosis a la aprehensión conceptual de un objeto, es necesario afirmar que la neosis es inseparable de la semiosis" (Duval, 1999, pág. 44).

Para comenzar, es importante definir lo que se entiende por registro; según Duval (1999):

> (…) los sistemas semióticos, en efecto, deben permitir cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a toda representación. En primer lugar, constituir una marca o un conjunto de marcas perceptibles que sean identificables como una representación de alguna cosa en un sistema determinado [Formación]. Luego, transformar las representaciones de acuerdo con las únicas reglas propias del sistema, de modo que se obtengan otras representaciones que pueden constituir una ganancia de conocimiento en comparación con las representaciones iniciales [Tratamiento]. Por último, convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado [Conversión]. No todos los sistemas semióticos permiten estas tres actividades cognitivas fundamentales, como por ejemplo, el lenguaje morse o la codificación de tránsito. Pero el lenguaje natural, las lenguas simbólicas, los gráficos, las figuras geométricas, etc. sí las permiten. Hablaremos entonces de registro de representación semiótica. (p 29)

En seguida, se presentan las definiciones mencionadas anteriormente como la formación, el tratamiento y la conversión que se presentan en las actividades cognitivas que expone este autor:

La formación permite expresar una representación mental o describir un objeto matemático, para esto se debe seleccionar un conjunto de características, en las cuales se determinan ciertas reglas de formación que permita el uso adecuado de los signos, es decir las determinaciones que constituyen lo que se requiere representar.

> Formar una representación semiótica es recurrir a un(os) signo(s) para actualizar o para sustituir la visión de un objeto. Excepto los casos de idiosincrasia, los signos utilizados pertenecen a un sistema semiótico ya constituido y ya utilizado por otros: la lengua materna, un código icónico de representación gráfica o artística, una lengua formal, etc. Los actos más elementales de formación son, según los registros la designación nominal de objetos, la reproducción de su contorno percibido, la codificación de relaciones o de algunas propiedades de un movimiento. (Duval, 1999, pág. 41)

En cuanto al *tratamiento* como otra actividad cognitiva, es:

> Una transformación de una representación (inicial) en otra representación (terminal), respecto a una cuestión, a un problema o una necesidad, que proporcionan el criterio de interrupción en la serie de las transformaciones efectuadas. Un tratamiento es una transformación de la representación al interior del registro de representación o de un sistema. (Duval, 1999, pág. 42)

Esto significa, que el *tratamiento* es una transformación interna que opera o se lleva a cabo dentro de un registro, es decir; la transformación de una representación en otra representación pero que sigue utilizando las características del mismo registro.

En relación a la *conversión*, este mismo autor la define de la siguiente forma:

> La *conversión* es la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información dada en un registro, en una representación de este mismo objeto, esta misma situación o de la misma información en otro registro. Las operaciones habitualmente designadas con los términos "traducción", "ilustración", "transposición", "interpretación", "codificación", etc., son operaciones que hacen corresponder una representación dada en un registro con otra representación en otro registro. La conversión es pues, una transformación externa relativa al registro de representación de partida. (Duval, 1999, pág. 44)

Esto quiere decir que la *conversión* es una actividad cognitiva que se realiza entre diferentes registros, es decir; es una transformación de una representación en otra, en donde el registro de partida es diferente al de llegada. Por ejemplo, cuando al resolver un determinado ejercicio se expresa en forma analítica una función y en el siguiente paso de la resolución, se realiza una tabla de valores otorgándole valores arbitrarios a la variable independiente para posteriormente evaluarlos en la expresión algebraica. Vale la pena esclarecer que en estos dos tipos de representaciones que pertenecen a registros diferentes está de referente el mismo objeto matemático.

Lo anterior conduce a pensar que estos cambios de registros son clave en los procesos de enseñanza y aprendizaje puesto que de lo contrario quedarían excluidas algunas de las propiedades relevantes de los conceptos matemáticos al limitar el uso de estas representaciones ya que: "convertir las representaciones producidas en un sistema de representaciones en otro sistema, de manera tal que éstas últimas permitan explicitar otras significaciones relativas a aquello que es representado" (Duval, 1999, pág. 29)

La *conversión* entre registros de representación semióticos no es de carácter espontáneo, a menos que se trate de representaciones congruentes entre el registro de partida y el de llegada. Cuando existe tal congruencia, la conversión puede ser realizada con facilidad, por ejemplo: Ante la pregunta sobre la monotonía de la función $f(x) = e^x$, dada su gráfica en el plano cartesiano, la mayoría de estudiantes tiene éxito al responder que se trata de una función creciente, pues aquí prevalece un fenómeno de congruencia entre la representación gráfica de la función dibujada y la percepción de la noción de crecimiento asociada con el hecho de que la gráfica sube para valores creciente de la variable independiente.

Pero en el caso de que no exista tal congruencia, la tarea se torna más complicada y no accesible para muchos estudiantes. Por ejemplo, si pensamos en la misma función $f(x) = e^x$ cuya representación gráfica es una curva creciente que corta al eje y en el punto $(0,1)$, y se solicita graficar la curva que representa a la función $f(x) = e^{x+1}$, muchos estudiantes fracasan debido que se trata de una curva que está trasladada a la izquierda de la dada y que corta al eje y en el punto $(0, e)$. Por lo general, los alumnos ven el signo más de la expresión y dibujan la gráfica a la derecha de la dada.

Por último, cabe mencionar las posibles conversiones entre los diversos tipos de representaciones que se han de realizar en el desarrollo de las situaciones didácticas. Janvier (1987) indica que no se ha integrado el concepto de función hasta que no se es capaz de pasar de una de las representaciones (descripción verbal, diagramas de Venn, tablas, gráficas, fórmulas) a todas las demás y señala incluso las habilidades que necesitan los alumnos para traducir entre varias representaciones mediante la siguiente tabla:

Tabla No.1.

Conversión entre sistemas de representación de Janvier (1987)

	Descripciones verbales	**Tablas de datos**	**Gráficas**	**Expresiones algebraicas**
Descripciones verbales		Medida	Croquis	Modelo
Tablas de datos	Lectura de relaciones numéricas		Dibujo	Ajuste Numérico
Gráficos cartesianos	Lectura de relaciones gráficas	Tabulación		Ajuste Gráfico
Expresiones algebraicas	Lectura de relaciones simbólicas	Tabulación	Croquis	

5.2. Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD).

La TSD se debe al trabajo realizado por el francés Guy Brousseau, quien a través de investigaciones desarrolladas sobre las interacciones presentadas entre los actores del sistema didáctico introdujo esta teoría que tuvo y sigue generando gran impactó en la comunidad de la Didáctica de las Matemáticas. El modelo propuesto por Brousseau es el de concebir tanto a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como un proceso fundamentado en la producción de los conocimientos matemáticos al interior de un entorno escolar. Dicha producción involucra por un lado establecer, transformar y reorganizar las relaciones existentes, y por otro implica validar los resultados obtenidos mediante la interpretación que hace de las retroacciones que suministra el medio.

En este trabajo de investigación se implementarán cuatro situaciones didácticas, diseñadas en el marco de la TSD. Para el desarrollo de cada una de ellas se empleará como ya se dijo el software de álgebra simbólica y geometría dinámica GeoGebra, este instrumento constituye el medio en el cual los alumnos podrán encontrar las respectivas soluciones mediante una secuencia de interacciones pertinentes. De acuerdo con esto, se busca que el alumno encuentre por sí mismo las soluciones aludiendo al aprendizaje por adaptación, concepto heredado de la teoría piagetiana del aprendizaje; dicho aprendizaje es producto de la interacción del individuo con el medio en que vive, sin la intervención del docente. Brousseau (2007) afirma al respecto:

> El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades y desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por medio de nuevas respuestas, que son la marca del aprendizaje. (p.30)

Es decir, en la TSD se plantea una situación con una intención a los alumnos, se les facilita el medio con el que ellos van a interactuar, posteriormente realizando las acciones pertinentes, los estudiantes encontrarán las respuestas esperadas adquiriendo de esta manera el conocimiento.

Para tal efecto, es menester caracterizar los elementos, relaciones y situaciones con el objetivo de anticipar las posibles acciones que efectuarán los estudiantes. En seguida se mostrarán algunos de los aspectos más importantes que conforman la TSD y que servirán para el desarrollo de la investigación.

Situación. Es el contexto donde los estudiantes solucionan todas las actividades planteadas por el docente y que tienen una intención establecida previamente.

Medio. Es el instrumento donde se contextualiza el conocimiento a enseñar puesto que está diseñado para que los estudiantes desarrollen una cierta familiaridad al nivel de poder manipularlo con toda seguridad y cuyas propiedades les parecen indiscutibles. En el presente trabajo de investigación para desarrollar las situaciones didácticas se utilizará la herramienta informática GeoGebra.

Situación Didáctica. Esta clase de situación comprende una serie de intervenciones por parte del docente sobre los estudiantes y el medio, encaminadas a hacer funcionar las situaciones a-didácticas y los conocimientos que ellas envuelven. Margolinas (2009), afirma el respecto:

> En cuanto a la situación didáctica, es una situación que se da generalmente en la clase, entre un profesor y uno o más alumnos, alrededor de un saber que se enseña. De otra parte, la situación didáctica sólo concierne al sistema didáctico en sentido estricto, y no al conjunto del sistema de enseñanza, aunque los fenómenos que se dan en la clase no son independientes de él; además en la situación didáctica, las intenciones de enseñar y

aprender son claras. Es así como la situación didáctica se rige por el contrato didáctico. (p. 35)

La intencionalidad de la situación didáctica es principalmente que los estudiantes desarrollen conocimiento mediante el desarrollo de la situación planteada por el maestro. Para tal fin, una vez establecido el contrato didáctico, los alumnos deben hacer un proceso análogo al que aconteció en la producción científica de los saberes en juego. Por su parte, el profesor debe ejercer la intervención, la acción y la vigilancia constante sobre el proceso de resolución. Bajo este criterio, la situación didáctica disiente de la situación a-didáctica y es mucho más amplia y compleja. A continuación se describen las principales actividades por parte del docente en el desarrollo de las actividades.

Devolución de una Situación a-didáctica. Es el proceso en el cual el profesor busca que el alumno se apropie, se comprometa, se responsabilice o haga suya una situación a-didáctica. Es vital que la situación "devuelta" a los estudiantes provoque en ellos un acercamiento al conocimiento matemático por medio sus constructos. Para esto, dentro de la situación didáctica en la cual están involucrados los estudiantes, el conocimiento matemático y el profesor, es responsabilidad de este último que esta se convierta en una situación a-didáctica. Es notorio, que la intencionalidad se conserva aún al cambiar a este tipo de situación; "Lo que caracteriza las fases a-didácticas no es el silencio del profesor, sino lo que él dice" (Margolinas, 2009, pág. 39).

El rol del profesor consiste entonces en ayudar a los alumnos a despojar la situación de todos los elementos didácticos para que puedan por sí solos re-construir los conocimientos matemáticos. Al respecto Brousseau (2007) enuncia: "El alumno sabe que el problema fue elegido para hacer que adquiera un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin tener presentes razones didácticas" (p.31).

Por último, es importante destacar que en esta fase el docente no se retira, no se convierte en un espectador al margen de la situación, todo lo contrario; él debe ser responsable en gran parte del compromiso constante de los estudiantes en una relación a-didáctica con la situación problema. Este tipo de intervenciones las realiza el maestro durante todo el tiempo de las actividades, como lo establece Margolinas (2009): "la devolución parece ser un proceso que dura todo el tiempo de la situación a-didáctica, y no solo una fase de establecimiento" (p.42).

Institucionalización. Este proceso surge de la necesidad de adjudicar a los nuevos conocimientos una ponderación adecuada. Aquí el docente presenta el saber cultural lo más vinculado posible con el trabajo anterior en clase. Durante esta etapa, se debe recapitular, sistematizar, ordenar y conectar lo que se promovió en la realización de las actividades para poder establecer las relaciones entre las producciones de los estudiantes y el saber cultural. De igual manera, los estudiantes deben ser capaces de distinguir de entre la diversidad de estrategias empleadas para desarrollar las situaciones a-didácticas aquellas que han sido posibles gracias al conocimiento adquirido. Es pertinente, pues, que el docente intervenga al final del desarrollo de las actividades para poder señalar cuáles de entre sus actividades tienen un interés científico objetivo; es decir, un estatuto cultural.

Situación a-didáctica. Este tipo de situación se encuentra inmersa en la situación didáctica. Aquí el profesor plantea a los alumnos un problema en contexto, estos por su propia cuenta, haciendo uso de los conocimientos previos e interactuando con el medio deben ser capaces de actuar, reflexionar y lograr solucionar las actividades propuestas sin la intervención directa del maestro.

La teoría distingue tres tipos de situaciones a-didáctica que son la de acción, formulación y de validación:

Situación de Acción. En esta fase, los estudiantes haciendo uso adecuado de los conocimientos previos deben realizar acciones adecuadas sobre el medio ya sea material o simbólico. No se trata pues, de una situación de manipulación deliberada o que tiene un orden establecido; una buena situación de acción, debe capacitar a los estudiantes a juzgar el resultado de sus acciones para posteriormente modificarlas, esto se realiza sin la intervención del docente y es posible gracias a las retroacciones que les suministra el medio, las cuales son interpretadas por los estudiantes como sanciones o refuerzos de su acción.

Situación de Formulación. En esta etapa es predominante el papel de la comunicación. Los estudiantes intercambian experiencias en la resolución de las actividades, para tal fin, es necesario que cada uno de los alumnos intervenga para exponer sus ideas a uno o a un grupo de compañeros con el objetivo de que sean analizadas; posteriormente le devuelven la información para que nuevamente se hagan las acciones pertinentes sobre el medio.

> La formulación de un conocimiento correspondería a una capacidad del sujeto para retomarlo (reconocerlo, identificarlo, descomponerlo y reconstruirlo en un sistema lingüístico). El medio que exigirá al sujeto usar una formulación debe entonces involucrar (ficticia o efectivamente) a otro sujeto, a quien el primero deberá comunicar una información. (Brousseau, 2007, pág. 25)

Situación de validación. Puesto que la validación experimental que ocurren en las fases precedentes es insuficiente, es necesario que el alumno argumente y en lo posible demuestre frente a otros estudiantes la validez de su modelo construido, esto se realiza mediante la prueba de la exactitud y pertinencia de las estrategias empleadas para llegar a la solución.

Por otro lado, cabe resaltar que esta concepción de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas genera rupturas dentro del contrato didáctico habitual, generando de esta manera una crisis que demanda la renegociación y búsqueda de un nuevo contrato en función de los conocimientos proyectados a fin de que los procesos de enseñanza y aprendizaje sean viables. Aquí las relaciones entre los actores del sistema didáctico representados por estudiante, profesor y saber se ponen en evidencia junto con ciertos compromisos recíprocos implícitos.

Por último, para explicar de forma más adecuada la relación entre situación didáctica y situación a-didáctica se presenta el siguiente diagrama tomado de Acosta (2010)

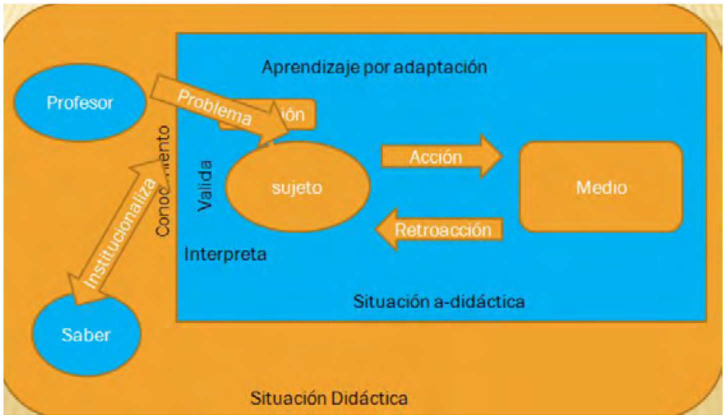


Figura 1. Relación entre situación didáctica y a-didáctica. Tomado de Acosta (2010).

En este diagrama, se puede apreciar que en realidad la situación a-didáctica hace parte de las situaciones didácticas ya que como se enuncia por Brousseau (2007): "un medio sin intenciones didácticas es incapaz de inducir en el alumno todos los conocimientos culturales que se desea que adquiera" (p. 31).

El funcionamiento del diagrama es el siguiente: El docente debe diseñar una situación a-didáctica con el fin de promover en el estudiante el aprendizaje por adaptación, para tal fin, debe preparar cuidadosamente las actividades y el medio que servirá de apoyo para resolver el problema. Por su lado, el estudiante genera una de serie de acciones sobre el medio que como respuesta dará las retroacciones, las que el alumno interpreta para validar sus estrategias. De la socialización de estas validaciones surgirá el conocimiento del estudiante, sin embargo este debe ser institucionalizado por el profesor para que sea considerado como saber cultural**.**

5.3. Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC)

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) subraya la importancia de involucrar las tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y destaca además el potencial de estas herramientas en lo relacionado con mejorar la comprensión de los alumnos, motivándolos e incrementando sus competencias en matemáticas.

> Es esencial que los profesores y los estudiantes tengan acceso regular a las tecnologías que apoyan y promueven el sentido matemático, el razonamiento, la resolución de problemas y la comunicación. Los maestros eficaces optimizan el potencial de la tecnología para desarrollar la comprensión de los estudiantes, estimular su interés, y aumentar su habilidad en matemáticas. Cuando los maestros usan la tecnología estratégicamente, pueden proporcionar un mayor acceso a las matemáticas para todos los estudiantes. (NCTM, 2011, pág. 1)

Por otro lado el gobierno nacional en el año 2009 estableció la Ley 1341 del 30 de julio, con la que se busca darle al país un marco normativo para el desarrollo de las TIC. En su artículo 2-Principios Orientadores, se considera que la investigación, el fomento, la promoción y el desarrollo de las TIC son una política de estado que involucra a todos los sectores y niveles de la administración pública y de la sociedad, contribuyendo entre otros al desarrollo educativo. De igual manera en el artículo 39-Articulacion del Plan de TIC, se establece como una función del Ministerio de TIC coordinar la articulación del plan de TIC, con el Plan de Educación y los demás planes sectoriales, para avanzar hacia los mismos objetivos, así como también se enuncian actividades encargadas al MEN en lo que corresponde a:

1. Fomentar el emprendimiento en TIC, desde los establecimientos educativos, con alto contenido en innovación

2. Poner en marcha un Sistema Nacional de alfabetización digital

3. Capacitar en TIC a docentes de todos los niveles

4. Incluir la cátedra de TIC en todo el sistema educativo, desde la infancia

5. Ejercer mayor control en los cafés Internet para seguridad de los niños. (MarcadorDePosición1pág. 20)

El propósito fundamental de la utilización de las TIC en la educación del país es con el objetivo de promover y fortalecer los procesos de pensamiento matemático, desarrollando aprendizaje de los conceptos matemáticos y promoviendo el uso y desarrollo de algunas competencias matemáticas básicas tales como: pensar y razonar, argumentar y justificar, comunicar, modelizar, plantear y resolver problemas, representar, utilizar lenguaje simbólico, etc.

5.4.1. GeoGebra.

GeoGebra es un software matemático de uso libre diseñado con fines educativos dirigido tanto para docentes y estudiantes; este programa fue creado por los esposos Markus y Judith Hohenwarter, y un equipo internacional dedicado a su desarrollo, quienes trabajaron con este software desde el año 2001 en la Universidad de Salzburgo y posteriormente en la Universidad de Atlantic, Florida, Estados Unidos. Este programa reúne en forma dinámica algunos elementos de aritmética, geometría, álgebra, cálculo y análisis, en un conjunto tan sencillo a nivel operativo como potente.

GeoGebra integra en su interfaz tanto el trabajo desde un punto de vista estrictamente geométrico en la ventana gráfica, como desde una perspectiva totalmente analítica en la ventana algebraica. Otra de las características que ofrece esta herramienta informática consiste en que una expresión analítica en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa. De esta manera se puede trabajar en una determinada ventana e interactuar entre ellas, trasladando la labor de una a otra en todo momento.

GeoGebra dentro de la comunidad de matemática educativa es considerado como un AGD, puesto que reúne las características esenciales para ser catalogado como tal. Kadunz (2002) describe tres características de este tipo de software:

- “modo de arrastre” como un modelo dinámico de la geometría euclidiana y de sus herramientas.

- “macros” para agrupar una secuencia de comandos o pasos de construcción dentro de una nueva herramienta o comando.

- “lugar de puntos” para mostrar la traza o lugar geométrico de uno o más puntos punto (o algún otro objeto) cuando se arrastra otro punto. (p.73)

De manera similar a los programas que se enfocan en permitir a los usuarios crear y modificar construcciones dinámicas de geometría euclidiana, se encuentra el tipo de software que permite emplear técnicas de álgebra, geometría analítica y cálculo mediante del manejo de expresiones simbólicas; estos son los denominados CAS, las funciones básicas de esta modalidad de software se orientan a salvar algunas brechas entre la geometría, álgebra y cálculo.

GeoGebra intenta unir estas dos modalidades de software ya mencionadas puesto que ofrece la posibilidad de trabajar la geometría y el álgebra simultáneamente mejorando la condición de considerar paquetes separados para cada área de trabajo. Estas representaciones de elementos geométricos y algebraicos están dinámicamente vinculadas, es decir, al modificar alguna de ellas, las otras son instantáneamente alteradas de forma “correspondiente”, en otras palabras; si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, el objeto B pasa a ajustarse y actualizarse para mantener las relaciones correspondientes con A. Gallego & Peña, (2012) señalan que las características que GeoGebra reúne produce que adquiera cierta ventaja frente a otros programas similares:

> (..) sus ventajas sobre Cabri y otro programas similares son que se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente. Permite manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como raíces o extremos. (p.110)

Otra importante herramienta de GeoGebra incorporada desde la versión 3.2 en adelante es sin duda la "Hoja de Cálculo" ya que permite el acomodo de datos ya sean numéricos o alfanuméricos en las celdas y la habilidad de trabajar con algunos de los elementos previamente creados, integrándolos de manera eficaz con las otras vistas del software: la algebraica y la gráfica. Aunque posiblemente la hojas de cálculo usuales resulten más eficaces que la de GeoGebra para hacer estrictamente cálculos numéricos y representaciones estadísticas sencillas, lo que fundamentalmente distingue a esta última es la integración con las otras vistas ya mencionadas, junto con la funcionalidad de trabajar desde la hoja de cálculo con elementos de diversa naturaleza manejados en GeoGebra, ofreciendo de esta manera un campo más extenso de posibilidades que conlleva por ende un significativo cambio conceptual respecto a las hojas de cálculo habituales.

6. METODOLOGÍA

Como metodología para esta investigación se empleará la *ingeniería didáctica*, más específicamente una *micro-ingeniería didáctica*; puesto que las investigaciones a este nivel tienen por objeto el estudio de un tema determinado, igualmente son locales y toman en cuenta principalmente la complejidad de los fenómenos emergentes en el aula, en este caso al desarrollar una secuencia de situaciones didácticas para la enseñanza de la función exponencial integrando GeoGebra.

En realidad en didáctica de las matemáticas el término ingeniería didáctica se emplea con una doble función: como metodología de investigación y como producciones de situaciones de enseñanza y aprendizaje, conforme mencionó Douady (1996):

> (…) el término ingeniería didáctica designa un conjunto de secuencias de clase concebidas, organizadas y articuladas en el tiempo de forma coherente por un profesor-ingeniero para efectuar un proyecto de aprendizaje de un contenido matemático dado para un grupo concreto de alumnos. A lo largo de los intercambios entre el profesor y los alumnos, el proyecto evoluciona bajo las reacciones de los alumnos en función de las decisiones y elecciones del profesor. Así, la ingeniería didáctica es, al mismo tiempo, un producto, resultante de un análisis *a priori*, y un proceso, resultante de una adaptación de la puesta en funcionamiento de un producto acorde con las condiciones dinámicas de una clase. (p.241)

De esta forma, la *micro-ingeniería* didáctica como metodología de investigación se caracteriza:

1. Por un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en el aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza.

2. Por el registro de los estudios de caso y por la validación que es esencialmente interna, basada en la confrontación entre el análisis *a priori* y *a posteriori*.

El proceso práctico de la *micro-ingeniería* didáctica consta de 4 fases, según Artigue et al. (1995)

- Análisis Preliminares
- Análisis *a priori* de las situaciones didácticas
- Experimentación
- Análisis *a posteriori* y de las situaciones didácticas y validación

6.1. Análisis Preliminares.

Esta fase hace referencia a las bases teóricas que se deben conocer y explicitar para el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución, el del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica y finalmente los objetivos de la investigación. Para realizar los análisis epistemológicos y didácticos, serán revisados programas, textos, libros de historia de las matemáticas y cuestionarios elaborados con el objeto de identificar las concepciones de los estudiantes con relación al tema de estudio y así llevar a cabo los refuerzos teóricos que fuesen necesarios.

6.2. Análisis *a priori* de las situaciones didácticas.

Esta etapa implica por una parte, la consideración de los análisis previos asociados al objeto de estudio y al problema de investigación que se plantea para concebir en cuanto a estructuración, la estrategia a diseñar, así como las variables involucradas y los medios o herramientas pertinentes a incorporar para el logro de los objetivos. Por otra parte, involucra el establecimiento de las reacciones, actitudes, habilidades y aptitudes que esperamos que los alumnos movilicen con motivo de su enfrentamiento a la estrategia didáctica, de manera general y particular.

La realización didáctica se refiere a la puesta en marcha del diseño de la estrategia didáctica, en esta se explicará las condiciones en las que se va a llevar a cabo la práctica: el lugar, el curso curricular, la población, la duración, los momentos, la organización, la dinámica que se va a seguir, entre otras.

6.3. Experimentación.

Es la fase de ejecución de lo planeado en la ingeniería con relación a los propósitos y objetivos de la investigación. Esa etapa se inicia en el momento en que se da el contacto investigador/profesor/observador con los estudiantes. Además, con el objetivo de establecer en el aula de clase un ambiente de aprendizaje renovado en contraste con el método de enseñanza tradicional, se agregará el software de álgebra simbólica y geometría dinámica GeoGebra. Para tal efecto, se dispondrá de sesiones de clase previas al trabajo de campo en las que se enseñe a los estudiantes sobre el manejo de esta herramienta informática.

6.4. Análisis *a posteriori* de las situaciones didácticas y validación.

En esta fase se analiza el conjunto de datos recogidos, junto con las observaciones realizadas durante las secuencias de enseñanza, como por ejemplo: las estrategias utilizadas por los estudiantes, los modelos usados, las inconsistencias o frecuencias de ciertas actitudes, las justificaciones, propuestas, entre otras. Estos datos se complementan con las producciones de los alumnos, obtenidas mediante el empleo de metodologías externas como cuestionarios, entrevistas individuales o en pequeños grupos, aplicadas durante el momento de enseñanza. La validación o refutación de las hipótesis se realiza mediante la confrontación de los análisis *a priori* y *a posteriori*.

Además con el objetivo identificar los avances de los estudiantes respecto a la comprensión del concepto objeto de estudio, se hará la confrontación entre los resultados obtenidos al aplicar el cuestionario diagnóstico y los obtenidos al aplicar la secuencia didáctica.

7. DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En esta sección se hacen explicitas las condiciones en las que se desarrolló el trabajo de campo, las situaciones didácticas, desde el diseño hasta la puesta en práctica. Cabe destacar que las respuestas de los estudiantes no han sido alteradas con el fin de tener una evidencia de las fortalezas y dificultades presentadas durante la resolución de las actividades, debido a las variadas interpretaciones que pueden surgir en virtud de los enunciados, por lo cual se escriben con letra cursiva y recuadros.

La población objeto de investigación la conforman los 15 estudiantes matriculados en el grado 9º del año lectivo 2016-2017 del colegio Liceo Integrado de Bachillerato de la Universidad de Nariño, matriculados en el año 2015-2016; la participación en este trabajo de investigación se realizó de forma voluntaria por medio del estímulo de una nota extra, por consiguiente la asistencia y el interés permanecieron mediados por dicha condición.

7.1 Análisis Preliminar

Esta sección hace referencia a los fundamentos teóricos y didácticos que se deben conocer y explicitar para el análisis de los fenómenos del aula en general. Dicho análisis, se realiza desde una perspectiva sistémica, es decir, haciendo consideraciones que toman en cuenta en todo momento a la institución (profesor), al estudiante y al saber matemático en juego, y las relaciones entre ellos. Aquí se incluye el análisis epistemológico de los contenidos contemplados en la enseñanza de la función exponencial, el análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos, el análisis de las concepciones de los estudiantes, y el análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva. Este último contemplado desde tres dimensiones: la dimensión epistemológica, relacionada con las características matemáticas de la función exponencial; la dimensión cognitiva, asociada a las características cognitivas de los estudiantes partícipes de la investigación; y la dimensión didáctica, asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

7.1.1 Análisis Epistemológico.

Puesto que el propósito de la secuencia didáctica es que los estudiantes construyan la noción de función exponencial, es indispensable que a través de ella emerjan algunas de sus principales características, tales como monotonía, inyectividad, continuidad en su dominio, rango, etc. De modo que permita a los estudiantes reconocerla y diferenciarla de otro tipo de funciones.

Revisión de Textos.

En este análisis se tendrá en cuenta la revisión de algunos libros de texto empleados para la enseñanza de la función exponencial dirigida a estudiantes de grado noveno, con la finalidad de conocer sobre las definiciones, el estudio de su representación gráfica, al igual que sus propiedades y el tipo de ejercicios presentados con relación a dicho objeto matemático. Estos textos son:

- Texto 1:

Chávez, H., Castañeda, N., Gómez, M., Joya, A., Chizner, J. y Gómez, M. (2010). *Hipertexto matemáticas 9*. Bogotá: Santillana.

- Texto 2:

Herrera, A., Salgado, D., Nivia, L., Acosta, M. y Orjuela, J. (2004). *Álgebra y geometría II.* Bogotá: Santillana.

- Texto 3:

Camargo, L., García, G., Samper, C., Leguizamón, C. y Serrano, C. (2001). *Nuevo alfa 9*. Bogotá: Norma.

- Texto 4:

Barnett, R. y Uribe, J. (1988). *Álgebra y geometría 2*. Bogotá: McGraw-Hill.

Después de la revisión de los cuatro libros de texto señalados, se presenta una tabla resumen que permitirá comparar la información encontrada de acuerdo cada uno de los cuatro aspectos antes mencionados (ver Anexo No. B).

A partir de revisión realizada a partir de los libros textos analizados se puede concluir:

- Con respecto a la definición de la función exponencial, todos los textos analizados a excepción del Texto 3 muestran a la expresión algebraica asociada a la función exponencial involucrando tan solo un parámetro (con su respectiva restricción), mientras que el Texto 3 la define utilizando dos parámetros en su expresión algebraica, (con las respectivas restricciones para el parámetro correspondiente al factor de crecimiento).

- Con relación a la representación gráfica de la función exponencial, todos los libros de texto consideran los casos en que el factor de crecimiento es mayor que uno y cuando éste se encuentra entre cero y uno. Esta clasificación permite analizar en qué casos la función admite valores crecientes, decrecientes, como también el análisis ciertos casos para los cuales dicha función adquiere valores "especiales".

- Con relación a las propiedades de dicho objeto matemático, todos los libros de texto caracterizan el crecimiento o decrecimiento de una función a partir del valor del factor de crecimiento, solo en dos libros se habla de la inyectividad de la función exponencial, como cuando se hace referencia a la existencia de asíntotas horizontales. Es importante señalar que en el Texto 3 existe una inconsistencia entre la definición y las propiedades que se derivan como consecuencia de ésta, esto se debe a que se relacionó un parámetro de más en su expresión algebraica y no se analizaron los casos cuando varía este parámetro adicional.

- Con relación al tipo de ejercicios propuestos, se notó excesivo uso de ejercicios rutinarios, como por ejemplo, evaluar funciones exponenciales con o sin ayuda de la calculadora, representar gráficamente dichas funciones, comparar funciones exponenciales dadas sus expresiones algebraicas o gráficas, entre otros. Todos a excepción del Texto 2 tienen información acerca de las aplicaciones de este concepto matemático para modelizar fenómenos de variación; entre las más usuales están el crecimiento poblacional, el crecimiento bacteriano y el interés compuesto.

Por último, en concordancia con el modelo de enseñanza tradicional que aún prima en muchas instituciones escolares colombianas, se pudo notar que los textos parten de la presentación formal de los conceptos matemáticos seguida de una ejemplificación y aplicación en ejercicios propuestos. Por ello se presupone una práctica docente, en las clases de matemáticas que, influenciada por los libros de texto, privilegia la actividad protagónica del docente en detrimento de la construcción social del conocimientos por parte de los estudiantes, haciendo énfasis en la mecanización de procedimientos, más que en la comprensión de conceptos.

7.1.2 Análisis de la enseñanza tradicional y sus efectos.

Si se analizan las características de la enseñanza de las matemáticas en el nivel de la educación media, se podrá evidenciar el empirismo con el cual los docentes elaboran sus prácticas educativas. La gran mayoría de ellos son profesionales de esta disciplina, sin embargo no fueron preparados para ejercer la docencia de la misma. Pues bien; aunque este hecho tiene ciertas ventajas, ocasiona que en el momento de enfrentar un grupo de estudiantes se reproduzcan los métodos de enseñanza (fundamentalmente expositivos), que sus profesores emplearon con ellos, sin percatarse de ello en la mayoría de los casos.

Dentro del método de enseñanza tradicional se presume que por exponer de forma magistral algún tema de interés para los estudiantes o por organizarlos mediante ciertas dinámicas grupales, ellos “aprenderán”. La verificación de dicho aprendizaje se realiza mediante exámenes en donde los estudiantes reproducen superficialmente las definiciones o conceptos matemáticos contemplados, además de ejecutar temporalmente operaciones automatizadas por la práctica cotidiana.

En el tipo de problemas trabajados dentro de este enfoque, se restringen habilidades de los estudiantes para proponer, argumentar, cuestionar, salvo para solicitar que sea repitan o se expliquen ciertas partes del procedimiento. Pareciera entonces que el propósito fuese que los alumnos desarrollen destrezas algorítmicas, aunque éstas carezcan de sentido y significado para la mayoría de ellos, y para lograrlas deban recurrir a la ejercitación y a la repetición continua.

De esta manera, la organización y planeación hecha no considera la posibilidad de promover en los alumnos la reflexión, la argumentación, la habilidad de proponer, discutir y validar sus propias ideas y las de los demás respecto al objeto de estudio. Así, la resolución de problemas que implique asociar algún algoritmo para luego desarrollarlo se realiza a través de una señal hecha por el maestro que indique el camino a seguir, es decir, los alumnos esperarán paciente o impacientemente a que el docente otorgue pistas o en su defecto diga cómo se resuelve la problemática. De esta forma, el tiempo dedicado a la resolución de problemas en contexto es mínimo comparado con el que se dedica a los procedimientos algebraicos y al desarrollo de destrezas algorítmicas y operativas, centrándose en el funcionamiento dentro de algún registro de representación de este objeto matemático, realizándose salvo algunos casos el tránsito de un registro a otro, como es el caso típico de pasar del registro algebraico al gráfico transitando primero por el registro numérico.

7.1.3. Análisis de las concepciones de los estudiantes, de las dificultades y obstáculos que determinan su evolución.

Para empezar es necesario describir la concepción de los estudiantes respecto a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Usualmente para los alumnos la metodología de enseñanza adecuada es aquella en la cual el papel del docente consiste en transmitir sus conocimientos. Por su parte, el papel de los estudiantes consiste entonces en poner atención a la exposición del profesor, para replicar las acciones lo más cercano posible a las del docente. Es el profesor entonces, quien debe escoger de qué manera se hacen las cosas, qué estrategias utilizar, cuáles algoritmos utilizar, entre otros.

Entre algunas dificultades determinadas por la experiencia en clase se encuentra el deficiente tratamiento en el registro gráfico y numérico, puesto que por un lado, la mayoría de los estudiantes grafican con dificultad patrones de comportamiento, y escasamente hacen interpretaciones de un modelo gráfico; y por otro lado, son desaprovechadas algunas habilidades como la agilidad mental, la estimación, aunado al escaso manejo de calculadoras y demás recursos didácticos disponibles. En particular, la actividad de graficación es realizada de forma aceptable para funciones polinómicas hasta de tercer grado, mientras que para otro tipo de funciones, como las trascendentes, menos simples que las polinómicas, presentan muchos inconvenientes.

En general, los alumnos no tienen la suficiente experiencia para articular los diversos registros de representación, particularmente del gráfico al algebraico, del gráfico, numérico y algebraico al verbal; tal vez la mejor conversión se presente del registro algebraico al registro numérico, utilizando como puente el registro numérico; esto evidencia el énfasis que se le da al trabajo en clase, dentro del cual se privilegiaba el funcionamiento dentro del cuadro algebraico, en una praxis algorítmica y en la evaluación de las competencias correspondientes. Esta modalidad de enseñanza sólo prepara a los alumnos con destrezas y algorítmicas, dejando de lado importantes habilidades cognitivas como lo son la interpretación, argumentación, deducción, validación, entre otras.

Por otro lado, para los estudiantes participes de la investigación resulta interesante y motivador la integración de GeoGebra en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos en juego; sin embargo, se está consciente que para que el desarrollo óptimo de las actividades los estudiantes deben alcanzar un alto grado de familiaridad con dicha herramienta tecnológica, ya que de esta forma tendrán más dominio sobre las acciones que realizan sobre el medio e interpretaran adecuadamente las retroacciones que éste les suministre.

7.1.4. Análisis del campo de restricciones donde se va a situar la realización didáctica efectiva

Este análisis está compuesto por tres dimensiones: la dimensión epistemológica, asociada a las características de la función exponencial, en donde también se explica el desarrollo histórico de este concepto matemático; la dimensión cognitiva, relacionada a las características cognitivas de los estudiantes objeto de investigación; y la dimensión didáctica, asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza.

7.1.4.1. Análisis Histórico Epistemológico.

De acuerdo con Morales (2011), los fundamentos teóricos de la función exponencial comenzaron a formarse hace mucho tiempo. Dicho concepto matemático aparece implícitamente en libro IX de los Elementos de Euclides en donde se encuentra una proposición equivalente a la regla $a^{m+n} = a^m * a^n$, con m y n enteros positivos. Además, refiere que en el siglo XVI Nicolás Oresme (1323-1382), vuelve a hallar esta propiedad considerando exponentes racionales, creando identidades como: $(a * b)^{1/n} = a^{1/n} * b^{1/n}$, con n en los naturales. Lastimosamente estas ideas eran muy avanzadas para la época y no fueron entendidas sino hasta cuando Nicolás Chuquet (1450-1500), las retoma un siglo después, introduciendo la noción de exponentes enteros no positivos. Por ejemplo, la noción de exponente cero era para señalar que se trata de una cantidad estricta (sin incógnita); es decir, no se interpretaba como la potencia cero de una cantidad continua, puesto que el exponente cero se empleaba para designar la ausencia de la cantidad. Dentro de esta notación, b^0 equivale a b, b^1 (Número lineal) indica bx, b^2 (Número superficial) significa bx^2.

Posteriormente, en su obra "Arithmetica Integra" (1544), publicada en Nuremberg el matemático alemán Miguel Stifel (1487-1567), establece por primera vez el cálculo con potencias de exponente racional arbitrario y en particular la regla de la multiplicación $a^{m+n} = a^m * a^n$, para m, n en los racionales. De igual forma, suministra de forma rudimentaria la primera tabla de logaritmos que contenía sólo los números enteros desde -3 hasta 6 y sus respectivas potencias de 2, Rondero, Criollo, Tarasenko, Pérez, & Acosta (2013) nos muestran un esquema de dicha tabla.

Tabla No. 2

Tabla de potencias con base 2. Tomado de Rondero et al. (2013, pág. 45)

3	2	1							
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$					8	2	4

Para el empleo de estas ideas y con el fin de reducir las operaciones a otra menos complejas, se vio la necesidad de usar este tipo de tablas, en donde se comparan las sucesión de las potencias con la de sus respectivos exponentes, es decir; para multiplicar entre si dos números cualesquiera de la segunda fila, debemos sumar los dos números correspondientes de la primera sucesión, situados encima de aquellos dos, luego debe buscarse en la misma fila de arriba dicha suma y el número de la sucesión inferior que le corresponda debajo será el producto deseado.

Por otro lado, el estudio de curvas promueve el paso al estudio de manera intuitiva de exponentes reales. Este tipo de análisis dio lugar también al descubrimiento de manera independiente de los logaritmos encabezado por Bürgi (1552-1632) y Napier (1550-1617). En Azcárate & Deulofeu (1996), se presenta una idea acerca del enfoque que le da cada uno de estos personajes: "el primero presenta a los logaritmos (1620) por medio de tablas que se obtienen comparando la progresión geométrica de las potencias de una cantidad (a, a^2, a^3,…) con la progresión geométrica de los exponentes (1,2,3,…)" (p. 47).

El enfoque de Napier sobre los logaritmos, difería notablemente, ya que no empleaba como en el caso anterior las sucesiones ya descritas si no que involucraba aspectos relativos al movimiento. Dentro de esta nueva perspectiva, es evidente por un lado un profundo sentido de la continuidad y por otro la estrecha relación que existía entre número y magnitud. Pues según estos mismos autores: "Napier entre 1614 y 1619 procede de una forma distinta, comparando dos movimientos, uno uniforme y otro tal que su velocidad se supone proporcional a su distancia a un punto fijado" (p. 47).

Hacia el año 1614 en Edimburgo, Napier publica su obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio*, o "*Descripción de la Maravillosa Regla de los Logaritmos"*, inicialmente escrito en latín pero enseguida traducido por Edward Wright, contenía la primera tabla de logaritmos y resultaba algo difíciles de interpretar puesto que no se tenía un referente teórico que explique su construcción. En consecuencia, en 1619, dos años después de su muerte, aparece el procedimiento empleado, bajo el nombre de "*Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio*", o sea, "Construcción de la Maravillosa Regla de los Logaritmos". Según Guzmán, (2007), en nuestra notación actual, los logaritmos de Napier serían los logaritmos de base $1/e$. El mayor inconveniente de los logaritmos de Napier fue que el $log1$ no era cero. El cambio a los logaritmos con la propiedad de que $log1 = 0$ surgió de las discusiones entre Briggs y Napier en la casa de este último. Briggs ya le había sugerido a Napier que dichas tablas debían ser elaboradas en base 10.

Por otro lado, los logaritmos de Henry Briggs (1561-1631) tienen su origen como ya se dijo, en una discusión entre él y Napier. Según Rondero et al. (2013):

> (…) Briggs, quien le sugiere elaborar una tabla de logaritmos con base 10 dado que el sistema empleado en los cálculos es decimal, y llegan a la conclusión, de que el logaritmo de 1 debía ser 0 y el logaritmo de 10 debía ser igual a 1, de esta forma, la tarea de construir a primera tabla de logaritmos en base 10 fue asumida por Briggs (1615). (p.173)

Para cumplir esta tediosa labor, Briggs emplea un método por naturaleza sencillo, pero coherente con lo que se buscaba. Orientó nuevamente su atención sobre la relaciones implícitas que existen entre la sucesión aritmética y geométrica, ya antes descritas. Por tal motivo, Briggs decide utilizar la media aritmética para aplicarla en la sucesión aritmética y análogamente, usar la media geométrica para el caso de la sucesión geométrica. De esta manera consiguió percatarse de una nueva relación entre la media aritmética y la media geométrica, que sería empleada por Briggs para llevar a cabo el cálculo de los logaritmos, puesto que dicho proceso le permitía reducir cada vez más la distancia entre valores del argumento de los logaritmos.

> De esta manera, Briggs nos deja entrever las relaciones implícitas que existen entre los cálculos numéricos de las progresiones aritmética y geométrica (logaritmo y exponencial), empleando la media aritmética y la media geométrica, que serán utilizados posteriormente como logaritmos en la solución de problemas aritméticos y geométricos. (Rondero, et al., 2013, pág. 177)

Este tipo de logaritmos actualmente con reconocidos como logaritmos de base vulgar, logaritmos comunes o simplemente como logaritmos de Briggs. De acuerdo a los mismos autores, Briggs publica en 1618 las tablas de logaritmos en base 10 de 1 a 20000 y de 90000 a 100000, bajo el nombre de "*Logarithmorum Chiliaes Prima",* posteriormente, fueron completadas de 1 a 100000 por Vlacq (1600-1667), y publicadas en 1631 en su obra "*Logarithmall Arithmetike"*.

Según Morales (2011), dentro de la matemática erudita de fines de siglo XVII el principal objeto de estudio era la curva. Este estudio se realizaba considerando a la curva en un sistema de referencia que involucraba distintas cantidades geométricas variables definidas con respecto a un punto variable sobre la curva. Entre dichas cantidades geométricas variables podemos nombrar: ordenada, abscisa, longitud de arco, radio, arco polar, normal, tangente, área entre curva y eje, etc. Las relaciones entre esas cantidades geométricas variables eran expresadas, si esto era posible, por medio de ecuaciones. Sin embargo, esto no siempre lo era, ya que justo antes del fin del siglo XVII no había fórmulas para relaciones transcendentes.

> Wallis (1665) en su obra Arithmetica Infinitorum, resolviendo el problema de las cuadraturas, le permite darle un significado al exponente cero, ya que $y = x^0$ debe tener una razón característica de 1, debe ser una línea horizontal. Y además afirma que el índice apropiado para $y = \sqrt[q]{x^p}$ debe ser $\frac{p}{q}$, y además introduce los exponentes negativos, definiendo al índice de $\frac{1}{x}$ como -1, el índice de $\frac{1}{x^2}$ como -2, etc. (Morales, 2011, pág. 124)

Como se resalta en este mismo artículo, aparecen dos causas para la ausencia de una fórmula para las funciones exponenciales: por un lado la ausencia del concepto de función y por otro, una teoría matemática que requería de dimensionalidad en sus interpretaciones. Sin embargo, no fue sino hasta la primera mitad del siglo XVIII, que el foco de atención cambia de la curva y de las relaciones entre las cantidades geométricas a las expresiones algebraicas que las relacionaban. Las expresiones analíticas que involucraban números y letras, más que los objetos geométricos de que se apoyaban, se convirtieron en el centro de atención.

Refiriéndose en particular al concepto de función, cabe destacar que hasta este momento, una función podía introducirse empleando una expresión verbal, una tabla, una gráfica e incluso como ya se mostró, una comparación de carácter cinemático. Pues bien, uno de los trabajos que influyó de forma considerable en lo referente a la noción de función, es *"La Géométrie*". Esta obra célebre, publicada hacia 1637 por René Descartes (1596-1650), marca el nacimiento y la expansión de la geometría analítica, ya que a partir de ese momento se permitía interpretar curvas y superficies por medio de ecuaciones. Azcárate & Deulofeu (1996) mencionan al respecto:

> Esta idea fundamental, afectará igualmente de forma decisiva a las funciones, ya que en este mismo trabajo aparece por vez primera el hecho de que una ecuación en x e y es una forma para expresar una dependencia entre dos cantidades variables, de manera que, a partir de ella, es posible calcular los valores de una variable que corresponden a determinados valores de la otra. (p.47)

De acuerdo con estos autores, Leibnitz (1646-1716) fue el primero en tratar de manera explícita el término de función, abordándolo desde aspectos de la geometría diferencial.

El termino función aparece por vez primera en una manuscrito de Leibnitz de 1673. Si bien inicialmente tiene un significado muy particular, pues se refiere a un problema de cálculo de ordenadas a partir de cierta propiedad de las tangentes, posteriormente en 1694 utiliza la palabra en un sentido más general, aunque todavía poco preciso, y referido como siempre a cuestiones de geometría diferencial. (Azcárate & Deulofeu, 1996, pág. 49)

Posteriormente, surge un notable cambio en la concepción función que resulta al dar un nuevo enfoque sobre la naturaleza de las variables. Dentro de esta nueva situación, el término variable se considera como un elemento genérico de un conjunto numérico cualquiera, y ya no bajo el contexto cinemático. Este crucial giro en el foco de atención, posibilitó la emergencia del concepto de función como fórmula que involucraba una variable (y no la cantidad geométrica).

(…) la primera definición explicita de función como una expresión analítica, en los términos que acabamos de expresar en la sección anterior, publicada en 1718, se debe a Jean Bernoulli, cuya notación no perduró, correspondiendo a Euler (1740) la notación $f(x)$ utilizada hasta nuestros días. La primera vez que aquel usa el término función (1698) aparece en la resolución de un problema planteado por su hermano Jacob. (Azcárate & Deulofeu, 1996, pág. 50)

Dentro de la concepción de función correspondiente a Jean Bernoulli (1667-1748) se percibe el deseo de expresar cantidades que dependen de una cierta variable, sin embargo; el estudio todavía estaba restringido a las expresiones analíticas.

En efecto, aunque para Leibnitz, y de modo más preciso para Jean Bernoulli, una función arbitraria de x es una cantidad formada de manera cualquiera a partir de x y de constantes, esta «manera cualquiera» se entiende como una expresión algebraica o trascendente. (Azcárate & Deulofeu, 1996, pág. 50)

Sin embargo, la anterior definición duro poco tiempo, correspondiéndole al matemático Leonard Euler (1707-1783), denotar el concepto de función matemática en un artículo llamado *"Additamentun"* (1740), mediante la expresión $f(x)$ que es utilizada hasta nuestros días, definida como "*función f aplicada sobre el argumento x*". De igual forma, en su obra "*Introductio in Analysis Infinitorum"* publicada en 1748 hace un análisis minucioso del concepto de función y de otros relacionados al mismo. Siguiendo a Morales (2011), Euler consideraba los términos variable y función respectivamente como:

Una cantidad indeterminada, o universal, que comprende en si misma a absolutamente todos los valores determinados... en consecuencia, una cantidad variable comprende en si misma absolutamente a todos los números, tanto positivos como negativos, tanto enteros como fraccionarios, tanto racionales como irracionales y trascendentales. Ni siquiera el cero o los números imaginarios quedan excluidos del significado de cantidad variable. (p.125)

(...) La función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier manera a partir de esa cantidad variable y de números o cantidades constantes. (p.125)

Esta definición de función dada por Euler aún era muy general e igualmente traía consigo ciertos inconvenientes, ya que el trabajo no se reducía simplemente a encontrar definiciones cada vez más generales, sino que estas debían caracterizarse en primer lugar por ser concretas, además de tener sentido en un determinado contexto y ser aplicables a todas las funciones conocidas hasta el momento, etc. Euler por consiguiente entra a definir lo que se entiende por expresión analítica y establecer sus operaciones. Azcárate y Deulofeu (1996) escriben al respecto:

> Posteriormente aborda el complejo problema de establecer que se entiende por expresión analítica, enumerando en primer lugar las operaciones algebraicas, luego las trascendentes, como la exponencial y la logarítmica, para ampliar el campo a una infinidad de otras funciones obtenidas del cálculo integral, incluyendo la integración de ecuaciones diferenciales, pero sin llegar a determinar claramente cuál es la amplitud del término. (p.50)

Según estos mismos autores, Lejeune Dirichlet (1805-1859), propuso hacia 1837 una definición de función sumamente amplia y general mediante los siguientes términos:

> Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que siempre que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable independiente de x. (p.52)

Posteriormente, la definición del concepto de función se generaliza aún más con la introducción de la teoría de conjuntos. Hasta la fecha, una función estaba definida sobre los puntos del continuo, o cuanto menos, en cada punto de un intervalo dado. Dentro de este nuevo contexto conjuntista, el concepto de función es concebido como una ley que hace corresponder “elementos” entre un par de conjuntos, cumpliendo ciertas características. Aquí se muestra una idea sobre el concepto de función desde este nuevo punto de vista:

> Así, decimos que dados dos conjuntos arbitrarios A y B, una función (o aplicación) de A en B es una ley que a cada elemento x de A le hace corresponder un solo elemento y de B; o si se prefiere, una función de A en B es un subconjunto F del producto cartesiano AxB tal que si (x, y) y (x, z) pertenecen a F entonces $y = z$. (Azcárate & Deulofeu, 1996, pág. 53)

No es difícil convencerse que dentro de esta apreciación tan generalizada del concepto de función se dejan de lado algunos de los aspectos claves que dieron paso a las definiciones clásicas del concepto de función, entre dichos aspectos podemos nombrar la idea de variación, continuidad, variable, dependencia, entre otros.

Por otro lado, es importante exhibir de manera clara y precisa la definición de la función exponencial que actualmente es reconocida y aceptada por la comunidad matemática, destacando de igual forma los aspectos más relevantes de dicho concepto, hasta llegar a establecer algunas de sus propiedades básicas. Esto servirá para dar una primera idea en lo relacionado al planteamiento de las actividades que se desarrollarán en el aula de clase.

Por lo general, los libros de texto muestran a la función exponencial como una función de la forma:

$$f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$$

En una función exponencial de este tipo, la variable independiente es el exponente de dicha función y, por su propia definición, se tiene que su dominio corresponde a todo el conjunto de los números reales. Aunque, en muchos casos, la variable independiente solo toma valores positivos cuando se modelan ciertos fenómenos del mundo real. Además, cabe resaltar que los valores de la función son siempre positivos para cualquier valor de x, es decir el rango de dicha función son los reales positivos.

En el caso de que $0 < a < 1$ entonces la función: $f(x) = a^x$ es decreciente, puesto que la base es una fracción positiva o decimal menor que 1. Luego si el exponente aumenta, entonces el valor de a^x disminuye. Ahora, si $a > 1$ entonces $f(x) = a^x$ es creciente, dado que la base es un número positivo mayor que 1. En consecuencia, si el exponente aumenta, el valor de la función también se incrementa.

En resumen, las características más importantes de las funciones exponenciales de la forma $\mathrm{y} = \mathrm{a}^{\mathrm{x}}$, con $\mathrm{a} > 0$, $\mathrm{a} \neq 1$, son:

- El dominio de la función lo constituye el conjunto de todos los reales.
- El rango de la función son todos los reales positivos.
- Al ser graficadas, en todos los casos las gráficas de la función pasan por el punto fijo (0,1)
- Si $\mathrm{a} > 1$, la función siempre es creciente, y análogamente si $0 < a < 1$, es decreciente.
- El eje x es una asíntota horizontal para la curva que describe la función exponencial en el plano. Es decir la función nunca se anula y por lo tanto no tiene ceros.
- Ya que la función es o bien creciente o decreciente, para $\mathrm{a} > 0$, $\mathrm{a} \neq 1$, entonces, $\mathrm{a}^{\mathrm{m}} = \mathrm{a}^{\mathrm{n}}$ si y solo si $\mathrm{m} = \mathrm{n}$ es decir, es inyectiva.

Cabe considerar en particular un tipo de función exponencial que se obtiene al reemplazar el valor de a por e, es decir una expresión del tipo $y = e^x$. El estudio de esta función fue abordado por Leonard Euler. Según Maor (2006), Euler en su obra "*Introductio in Analysis Infinitorum",* hace un estudio acerca del numero e y la función mencionada, evidenciando además la estrecha relación establecida entre la función logarítmica y la función exponencial:

> La Introductio llamó por primera vez la atención sobre el protagonismo del número e y de la función $y = e^x$ en el análisis. Como ya mencionamos, hasta la época de Euler la función exponencial era considerada solo como la función inversa de la función logarítmica. (p.156)

En esta misma obra, Euler logra definir la función exponencial y la incluye dentro de las llamadas funciones trascendentes. La define por medio de la siguiente expresión:

$$e^x = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

De acuerdo a este autor, aunque la idea que representa dicho número ya se conocía hacía más o menos un siglo, hasta ese momento no había sido representada con un símbolo en concreto, correspondiéndole a Euler designarlo por primera vez con la letra e. Esto lo hace en un escrito publicado alrededor de 1727, que trata sobre ciertos experimentos relacionados con disparos de cañones. Cuatro años más tarde, en una carta Euler utiliza de nuevo esta letra para según sus palabras, el número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a 1. Esta forma de designar a la base de los logaritmos neperianos apareció en forma impresa incluso en la *"Mechanica"* del propio Euler.

> En una carta escrita en 1731 el número e aparecía de nuevo en conexión con cierta ecuación diferencial; Euler lo definía como "el número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a 1". La aparición más temprana de e en una obra publicada fue en la Mechanica (1736) de Euler, en la cual sentó las bases de la mecánica analítica. (Maor, 2006, pág. 156)

7.1.4.2. Análisis Cognitivo.

En esta fase se consideran algunas de las características cognitivas de los estudiantes participantes en la investigación, puesto que esto es un elemento importante en el diseño de la secuencia didáctica. Pues bien, para esta etapa se analizaron los resultados obtenidos mediante la aplicación de un primer examen exploratorio denominado Cuestionario Diagnóstico (Ver Anexo No. C), con el que se pretendía por un lado identificar el grado de solvencia de los estudiantes para trabajar dentro de los registros de representación verbal, algebraico, gráfico y numérico, y por otro lado tenía por objeto determinar las habilidades para articular la información en dichos registros y de esta manera realizar la conversión de un registro a otro.

Las dificultades detectadas por medio de esta prueba diagnóstica, al interior de cada uno de los registros de representación se pueden resumir mediante la siguiente tabla:

Tabla No. 3.

Dificultades detectadas mediante la prueba diagnóstica al interior de cada uno de los registros de representación.

Registro	Dificultades
Algebraico	Se hizo evidente el predominio indiscutible del desarrollo de algoritmos de tipo algebraico para encontrar las raíces de las funciones o en su defecto detectar la existencia de las mismas. Se manifestó un deficiente tratamiento en el registro algebraico para determinar algunas características de las funciones estudiadas, tales como el dominio, rango, puntos de corte con respecto a los ejes coordenados, existencia de asíntotas, entre otros. Se detectó inconvenientes con el tratamiento en el registro algebraico ocasionadas por erróneas concepciones e inadecuadas técnicas en la resolución de ejercicios de carácter práctico. De igual manera, se detectó falencias para expresar un resultado preciso, lo que hace evidente la aplicación de algoritmos algebraicos carentes de sentido. Los estudiantes tuvieron dificultades para expresar algebraicamente las condiciones establecidas en las situaciones problema planteadas, lo que impidió considerablemente interpretar y abordar estas situaciones, permitiendo a los estudiantes navegar sin rumbo claro sobre un algoritmo establecido, buscando respuestas obviamente descontextualizadas y carentes de sentido, incluso matemáticamente.
Numérico	Se evidenció ciertas dificultades de tipo aritmético asociadas con la operatividad entre los elementos de este registro. Aunado a esto, se encuentra el deficiente manejo de herramientas auxiliares como la calculadora. En general se presentaron dificultades para determinar la validez de los resultados obtenidos mediante el análisis de casos particulares, lo que impidió notablemente validar las mismas mediante el proceso de sustitución. Se evidenció un deficiente tratamiento de la información proveniente de tablas, que aunado a la escasa búsqueda de regularidades en el comportamiento de las magnitudes involucradas impidió caracterizar el tipo de variación, restringiendo aún más la posibilidad de expresar dicha relación como un modelo funcional. Se consideró 2^x como una operación valida sólo para los enteros ya que interpretaron dicha expresión como multiplicar 2 por si mismo x veces. Cuando $x < 0$ hubo variedad de interpretaciones como: $2^{-3} = 0.002$, $2^{-3} = (-2)(-2)(-2)$, $2^{-3} = 1/2^3$. Cuando x no es entero, 2^x no es considerado como número puesto que carecen de un algoritmo para calcularlo y sólo pueden acceder a una aproximación por medio de la calculadora.

Gráfico	En general, se presentó una deficiente manipulación de la información contenida en una representación gráfica. Difícilmente los estudiantes podían graficar mediante patrones de comportamiento, y sobre todo manifestaron dificultades para interpretar un modelo gráfico. Se presentó una deficiente observación y capacidad de interpretación y análisis en la gráfica de algunas funciones polinómicas de primer, segundo y tercer grado, incluyendo la generación de las mismas. Se encontró dificultades en cuanto a la diversidad de representaciones gráficas que admiten ciertas situaciones problema, con lo que se restringió la interpretación dichas situaciones, que contribuyeran entre otras cosas a la obtención o al menos la estimación de la solución. Se manifestó uso excesivo del registro gráfico para identificar el dominio, rango, raíces, monotonía y asíntotas de ciertas funciones. Pareciera que dichas características estuvieran de alguna manera subordinadas a la gráfica de las mismas.

Ahora, con respecto a la articulación entre los diversos registros de representación, se pudo identificar ciertas dificultades relacionadas con la conversión de un registro a otro, ocasionado por la escasa interpretación de la información proveniente de un mismo registro, acompañado de la insuficiente relación entre los elementos pertenecientes a dichos registros. En especial, se identificaron serias deficiencias para efectuar la conversión del registro verbal al algebraico, como también del numérico al analítico e inclusive del verbal al gráfico, siendo este último una ayuda considerable para la comprensión de la problemática planteada. De igual manera, se detectó el predominio del registro algebraico e incluso fue el recurso mayormente empleado para abordar problemas contextualizados o no; sin embargo, aún aquí cometieron errores ocasionados por la deficiente interpretación de las condiciones del problema y por la errónea ejecución de operaciones un tanto automatizadas por la práctica cotidiana.

Respecto a las funciones en general, los estudiantes presentaron dificultades para realizar la conversión de un registro de representación a otro, en particular del gráfico al algebraico, del verbal al gráfico, del numérico al algebraico, entre otros. Poca atención se le otorgó a la relación existente entre el valor de los parámetros en la representaciones algebraicas de las funciones y las características visuales en sus representaciones gráficas en el plano cartesiano. Por ejemplo, se observó que los estudiantes tenían información acerca de los casos en que una parábola abre hacia arriba o hacia abajo, pero poco relacionaban las modificaciones en la gráfica de una función cuadrática al variar los parámetros en su expresión general. Tal vez la conversión en donde se tuvo mayor efectividad es la que se efectúa del registro algebraico al gráfico transitando primero por el registro numérico; puesto que este tipo de actividades son tratadas con mayor frecuencia dentro de sus contenidos académicos, sin embargo, aún aquí se encontraron dificultades con respecto a la evaluación de funciones para determinados valores del argumento, lo que obstruyó acceder a una información concreta y clara que propiciara contemplar las funciones desde diferentes perspectivas.

Por último, con relación a los interrogantes que se presentaron en contexto, se reflejaron serias falencias con respecto a la interpretación de los resultados; debido a que el éxito de esta actividad dependía del grado de coordinación entre las transformaciones llevadas a cabo dentro y entre los registros de representación; lo que evidencia que los estudiantes no supieron relacionar la información proveniente de las diversas representaciones, para dar sentido en términos contextuales a sus observaciones. Aunado a esto se encuentra el hecho de que los estudiantes no recurrieron a la verificación de los resultados obtenidos por otras vías de representación diferentes a las empleadas, puesto que de haberlo hecho se hubieran detectado las incompatibilidades existentes.

7.1.4.3. Análisis Didáctico.

Si vemos dentro del método de enseñanza tradicional podremos notar que dentro de esta modalidad de enseñanza-aprendizaje el docente adquiere el papel central; él "decide" qué hacer en el desarrollo de la clase, qué dinámica utilizar, qué tipo de estrategias emplear, qué resultados están bien o no; de esta manera, la validación de los resultados se hace por medio del criterio del docente, permitiendo que el profesor adquiera un papel preponderante debido al contrato didáctico establecido. Así mismo, está el supuesto de que una vez "aprendido" los métodos y procedimientos, se deben aplicar para resolver cierto tipo ejercicios, cuyo grado de dificultad va incrementándose a medida que los estudiantes adquieren más solvencia y destreza para resolver este tipo de ejercicios. Sin embargo, si las condiciones usuales no son similares, los estudiantes no serán capaces de adaptar las estrategias estudiadas ya sea para interpretar y aun más resolver una problemática.

Todo se dificulta aún más cuando los conceptos fundamentales a partir de los cuales se desea construir el objeto de estudio son malinterpretados o se restringe su estudio, como es el caso del concepto de función. Dentro de este enfoque, este concepto matemático es contemplado en muchas ocasiones desde un mismo registro, convirtiéndose en una situación desfavorable para los estudiantes. Ahora bien, en el caso de que se trabaje con más de un registro, lastimosamente no existe entre ellos una adecuada articulación que permita la construcción de significados; es decir, sólo se pretende que los estudiantes alcancen ciertas competencias en los diferentes registros, sin que se presente el tránsito de uno a otro, salvo en algunos casos como por ejemplo, pasar de la representación algebraica de una función a su representación gráfica, usando como puente el registro numérico.

Por otro lado, es importante la concepción del profesor sobre la manera en que se activa el pensamiento de los estudiantes. Creer que enfrentar a los estudiantes a ejercicios y problemas es suficiente para que estos adquieran responsabilidad en su aprendizaje y de esta forma logren activarse mentalmente, pudiera significar una concepción un tanto ingenua. Por el contrario, para que esto se dé se requiere que los estudiantes interactúen con los objetos de estudio y, como resultado de los conflictos entre lo que se conoce y sea desea conocer, se construya el conocimiento. Por esto, en esta investigación se pretende que los estudiantes tengan un alto grado de responsabilidad en su aprendizaje; es decir, que mediante convirtiéndose en los constructores de sus propios conocimientos, en donde interpreten, manipulen, reflexionen, conjeturen y validen sus resultados alrededor del objeto de estudio, constituyéndose en los actores principales en las sesiones de clase. Por ello, se considera de vital importancia que la aplicación de esta secuencia siga una dinámica en la que se permita a los estudiantes construir el concepto de función exponencial, visto como objeto de estudio y a la vez como herramienta para solucionar situaciones problema que así lo requieran; en donde no sea evidente la presencia de este concepto, pero que a la vez sea éste la clave para resolverlas.

Por último cabe analizar cómo la secuencia didáctica enmarcada en la TSD (Brousseau, 2007) y el uso GeoGebra como medio para el desarrollo de las actividades pueden influir tanto en planeación de las actividades por parte del docente y en el desempeño de los estudiantes en las mismas, puesto que la metodología usada puede generar rupturas dentro del contrato didáctico habitual y por otro lado el uso de GeoGebra introduce nuevas herramientas y posibilidades frente a las que se disponen en el método de enseñanza tradicional. Pues bien, dichas rupturas son ocasionadas por el diferente papel que adquiere tanto el profesor y el estudiante frente al saber que se quiere transmitir, debido a que en la enseñanza tradicional, el profesor explicita el conocimiento o los contenidos que se van a tratar al comienzo de la sesión, y posteriormente realiza ejercicios en los cuales muestra los métodos y procesos para obtener la solución; aquí la actividad central del estudiante consististe en imitar o reproducir de forma análoga las acciones del docente para tener éxito. En contraste, en la teoría de las TSD el conocimiento se explicita al culminar la sesión de clase, en primer lugar, el profesor plantea una situación a los estudiantes y les proporciona el medio para que ellos a partir de sus conocimientos previos y a las retroacciones que le suministre este artefacto logren resolverla; dichas retroacciones servirán de igual forma para que los alumnos puedan darse cuenta de la pertinencia y adecuación de sus acciones, y también para que validen o refuten los resultados de sus compañeros a la luz de la situación problema. Como es de esperar, en esta alternativa de enseñanza-aprendizaje los estudiantes se convierten en los constructores de sus conocimientos, siendo directamente los beneficiados y los actores principales de las clases.

Por otro lado, a nivel nacional la importancia de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se ha venido rescatando hace varios años, debido a las necesidades que demanda la sociedad, de tal manera que los conocimientos sean asequibles para la mayoría de la población. En vista de esto el Ministerio de Educación Nacional MEN (2006), ha formulado los Estándares Básicos de Competencias pertinentes para cada disciplina del saber. En especial, para el área de matemáticas, se ha clasificado el conocimiento en cinco tipos de pensamiento, a saber: El

Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos, el Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos, el Pensamiento Métrico y Sistemas de Medidas, el Pensamiento Aleatorio y Sistema de datos y por último el Pensamiento Variacional y Sistemas algebraicos o analíticos. Dentro de los intereses de esta investigación cabe considerar el Pensamiento Numérico y el Pensamiento Variacional, dado que el estudio concerniente a la función exponencial está contenido dentro de estos, sin debatir sobre la relevancia que tienen los cinco tipos de pensamientos mencionados.

A continuación se explicitará la relación entre el concepto objeto de estudio y los Referentes de Calidad Educativa que rigen a nivel nacional, es decir, los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (EBC) (2006), y los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA) (2015), en donde se establecen tanto los procesos matemáticos con sus respectivos pensamientos, al igual que la coherencia horizontal y vertical que entre estos últimos debe existir

Tabla No. 4

La función exponencial y su relación con los Referentes de Calidad: Estándares Básicos de Competencias (EBC) y Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)

Relación con los Estándares Básicos de Competencias (EBC)	
Coherencia Horizontal	
Pensamiento	**Estándar**
Numérico	• Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. • Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.
Variacional	• Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. • Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. • Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. • Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.
Coherencia Vertical	

Pensamiento	Grado	Estándar
Numérico	6º a 7º	• Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida. • Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones.
	8º a 9º	• Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. • Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos
Variacional	6º a 7º	• Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). • Reconozco el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación). • Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan
	De 8º a 9º	• Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. • Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

Relación con los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA)		
Grado	Número de DBA	Afirmación

8°	**1**	Comprende sin un lenguaje formal la noción de función como una regla f, que a cada valor x, le asigna un único valor $f(x)$ y reconoce que su gráfica está conformada por todos los puntos $(x, f\ (x))$. También comprende que una función sirve para modelar relaciones de dependencia entre dos magnitudes.
	18	Comprende que distintas representaciones de los mismos datos se prestan para diversas interpretaciones.
9°	**1**	Reconoce el significado de los exponentes racionales positivos y negativos y utiliza las leyes de los exponentes.
	2	Reconoce el significado del logaritmo de un número positivo en cualquier base y lo calcula sin calculadora en casos simples y con calculadora cuando es necesario, utilizando la relación con el logaritmo en base 10 (log) o el logaritmo en base e (ln).
	3	Identifica cuando una relación es una función, reconoce que una función se puede representar de diversas maneras y encuentra su dominio y su rango.
	7	Describe características de la relación entre dos variables a partir de una gráfica
	8	Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de funciones $g\ (x)\ =\ ax^n$ con n entero positivo o negativo.
	12	Conoce las propiedades y las representaciones gráficas de la familia de funciones exponenciales $h(x)\ =\ ka^x$ con $a\ > 0$ y distinto de 1, al igual que los cambios de los parámetros a y k producen en la forma de sus gráficas.

De igual manera resulta importante hacer una revisión del Plan de área de Matemáticas correspondiente al grado noveno contemplado en el plantel educativo en donde se realiza la investigación (ver Anexo No. C), con la finalidad de determinar cuáles de los estándares antes mencionados están presentes en la conformación de dicho Plan. De igual manera, cabe resaltar la intensidad horaria prevista para desarrollar el curso de matemáticas es de 4 horas semanales y que el año lectivo se encuentra dividido en cuatro periodos académicos.

Ahora con relación a los estándares mencionados como referentes para el desarrollo de esta investigación y los contemplados en dicho Plan de Área se pudo identificar una gran desconexión, puesto que ninguno de los estándares relacionados en este trabajo de investigación figuran en dicho Plan de Área; no obstante, de acuerdo a los ejes temáticos se evidencia que en el cuarto periodo académico se estudian ciertas temáticas relacionadas con la función exponencial como lo son: "Función exponencial", "Representación gráfica", "Problemas de aplicación" y "Ecuaciones exponenciales"

Por otro lado, es importante mencionar que entre las herramientas empleadas por parte del docente para lograr la adquisición de conocimientos por parte de los estudiantes, se hallan por ejemplo: uso de libro de guía, elementos de tipo geométrico, como escuadra, transportador entre otros; en ningún momento se hace relación con el apoyo de herramientas informáticas tales como videobeam, software, calculadoras, entre otros. De igual manera, dentro de las estrategias evaluativas se pueden mencionar el uso de talleres evaluativos, cuestionario tipo quiz, exámenes, como también notas extras como la participación y la asistencia.

7.2 Plan de actuación en el aula

Por medio de la siguiente tabla se realiza un contraste entre las actividades, el tiempo y las herramientas empleadas para registrar las observaciones antes y durante la implementación de las situaciones didácticas.

Tabla No. 5.

Plan de Actuación en el Aula. Estructura tomada de Plan de actuación en el aula de Camargo y Guzmán (2005).

Planificación		
Actividades	**Tiempo**	**Instrumentos**
Introducción: Explicación de forma general en qué consiste el trabajo de investigación, la metodología que se utilizará, los instrumentos que se usarán para desarrollar las actividades y para la recolección de información, como también el tipo de contrato didáctico que se empleará durante su implementación.	30 minutos	Registro de Sesión Fotografías
Introducción al manejo de GeoGebra: En esta etapa los estudiantes identificarán las herramientas del medio, de igual forma se explicarán sus funcionalidades con respecto a sus características de CAS y AGD, incluyendo el trabajo sobre las herramientas de Hoja de Cálculo. Para ejemplificar las situaciones se introducirán funciones lineales y cuadráticas, con lo que se hará un breve sondeo sobre las concepciones que tienen los estudiantes con respecto a dichos conceptos.	6 horas	Registro de Sesión Fotografías

Aplicación del examen diagnóstico: En esta parte se aplicará un cuestionario diagnóstico para obtener información acerca de las concepciones de los estudiantes con relación a los elementos que componen el objeto de estudio; además servirá para identificar determinar las representaciones iniciales que tienen los estudiantes con relación referidos al concepto de función en general y el grado de solvencia en cada uno de los registros de representación durante la resolución de ciertas situaciones de carácter práctico.	2 horas	Registro de Sesión Fotografías Producciones escritas de los estudiantes
Aplicación Situación Didáctica No. 1: Se propondrá una situación que lleve a los estudiantes a interpretarla partiendo de su descripción verbal. Para esto, el tratamiento de la información se hará desde los diversos registros de representación, hasta la obtención del modelo funcional que representa dicha situación. De esta manera, los estudiantes podrán identificar ciertos comportamientos y características generales con relación al objeto de estudio.	2 horas	Registro de Sesión Fotografías Grabación de video Producciones escritas de los estudiantes
Aplicación Situación Didáctica No. 2: Se propondrá una situación que lleve a los estudiantes a efectuar la conversión de forma directa del registro de representación algebraico al registro de representación gráfico. De esta forma los estudiantes podrán identificar los efectos que se originan en las gráficas de las funciones generadas a partir de la variación de sus parámetros en su forma general.	2 horas	Registro de Sesión Fotografías Grabación de video Producciones escritas de los estudiantes
Aplicación Situación Didáctica No. 3: Se propondrá una situación que lleve a los estudiantes a determinar ciertas características referentes a dicha situación a partir de su modelo funcional. Posteriormente, con base en la descripción verbal de cierta situación, se propondrán actividades dentro y entre los diversos registros de representación, hasta la obtención del modelo funcional que la representa.	2 horas	Registro de Sesión Fotografías Grabación de video Producciones escritas de los estudiantes

7.3 Instrumentos para la recolección información

Algunas de las herramientas que serán empleadas para la recolección de la información lo constituyen principalmente las producciones escritas de los alumnos, como también fotografías y videograbaciones como se describe a continuación.

- **Registro de la sesión:** Este servirá para tomar registro principalmente de las observaciones durante el trabajo de campo, estas anotaciones estarán relacionadas con la coordinación del tiempo, los sucesos de clase, los comportamientos de los alumnos durante la realización de las actividades propuestas e igualmente algunas apreciaciones del investigador posteriores a las sesiones de clase.

- **Fotografías:** Por medio de estas se registrarán las producciones y avances de los estudiantes al trabajar con GeoGebra.

- **Videograbaciones:** Estas servirán para tener un registro detallado de las expresiones verbales de los estudiantes, de sus actitudes frente a las retroacciones del medio y de sus producciones ya sea escritas o directamente sobre el medio.

- **Producciones escritas de los estudiantes:** Estas se utilizarán de igual forma para recoger información por escrito sobre el desempeño de los estudiantes al resolver las situaciones planteadas. Para conseguir dicho propósito se suministrará material en donde podrán consignar por escrito, el trabajo desarrollado, ya sea en el cuestionario diagnóstico o en el desarrollo de las situaciones planteadas.

7.4. Hipótesis de Trabajo

Mediante la implementación de esta secuencia de situaciones didácticas centradas en actividades dentro y entre los registros de representación, se podrá modelizar situaciones en contexto e identificar haciendo uso de la visualización ciertas tendencias o comportamientos en la representación gráfica de la función exponencial a causa de la variación de sus parámetros, lo que permitirá establecer algunas relaciones y propiedades generales referentes a este concepto matemático. Las situaciones didácticas deben tener las siguientes características:

- Suministrar información sobre las concepciones de los estudiantes y las competencias y habilidades para trabajar dentro de un mismo registro de representación y para transitar de uno a otro, así como las estrategias de solución o dificultades que presentan los estudiantes al resolver las problemáticas propuestas en cada situación.

- Estar inmersas en contextos de variación, en donde se requiera estudiar variaciones entre magnitudes cambiantes, para estudiar qué tipo de magnitudes están involucradas, cuáles cambian y de qué forma cambian, empleando los diversos registros de representación para su descripción y análisis.

7.5 Diseño y análisis *a priori* de las situaciones didácticas

7.5.1. Análisis *a priori* de la Situación Didáctica No. 1.

Variables micro-didácticas

- La cantidad de granos de trigo en un tiempo determinado.

- El contenido matemático implícito en cada registro de representación empleado.

- El tipo de variación (discreto o continuo) asociado a la variable dependiente e independiente.

- El valor concerniente al factor de crecimiento.

- La cantidad de granos de trigo entregados por la primera casilla.

Objetivos.

- Identificar cuando la información proveniente de una representación de tipo verbal, numérica, gráfica o algebraica de una situación particular corresponde a una variación de tipo exponencial.

- Efectuar lecturas pertinentes de la información en dichas representaciones, para realizar tratamientos adecuados en cada registro y/o llevar a cabo la conversión de un registro a otro.

- Dotar de significados en términos contextuales a la información proveniente de dichas representaciones.

- Promover la apropiación de técnicas matemáticas y computacionales para la construcción del modelo matemático correspondiente y su respectiva validación de acuerdo a las condiciones de la situación.

Saberes que se movilizan en la Situación Didáctica No. 1.

- Apropiación y desarrollo de habilidades relacionadas con la aplicación de algoritmos y procedimientos.

- Identificación de las magnitudes involucradas en el problema y del tipo de variación (discreto o continuo) asociado a las mismas.

- Análisis de la información presente en una representación de tipo verbal, numérica, gráfica o algebraica, concerniente a una variación de tipo exponencial.

- Utilización de GeoGebra para la representación de la relaciones entre dichas magnitudes.

- Coordinación de las representaciones de carácter de tipo numérico y gráfico para determinar el modelo funcional asociado a la situación.

Momentos de la realización didáctica.

El tiempo previsto para la realización de esta primera situación es de 2 horas. En primer lugar el estudiante deberá leer la información concerniente a dicha situación, a continuación tratará de establecer conjeturas e hipótesis para encontrar posibles soluciones y posteriormente trabajará con otros compañeros para discutir sobre la eficacia y pertenencia de éstas. Cabe mencionar que la validación de las respuestas de los estudiantes no se hace por medio del juicio del docente, si no a través del medio propuesto, el cual se encargará de dirigir y validar las soluciones alrededor de la problemática planteada. El profesor por su parte guiará por buen camino el desarrollo de las actividades para que se lleven a cabo los objetivos trazados y posteriormente intervendrá al finalizar la sesión de clase para institucionalizar los saberes puestos en acto, lo que corresponde a las fases de devolución e institucionalización propuestas en la TSD.

Como ya se mencionó toda situación didáctica contempla una situación a-didáctica, en donde se llevan a cabo las fases de acción, de formulación y de validación. Durante el desarrollo cada situación didáctica se inducirá a los estudiantes a que transiten por estas tres fases.

Fase de acción. Durante esta primera fase, la información inicial se presenta por medio de una descripción verbal de la situación a analizar, el estudiante, después de haber escuchado las orientaciones del profesor y haciendo uso de la información, deberá responder a ciertos interrogantes.

Para comenzar se pedirá a los alumnos leer la siguiente información

Leyenda del Ajedrez

El ajedrez es un juego que fue inventado en la India y que cuenta con muchos siglos de existencia, por eso no es de extrañar que a él estén ligada gran variedad de leyendas cuya veracidad es difícil comprobar debido a la vaguedad de los documentos antiguos. Para comprenderlas no hace falta saber jugar al ajedrez, basta simplemente saber que el tablero en donde se juega está dividido en 64 casillas negras y blancas, dispuestas alternativamente. Pues bien, cuenta la leyenda que en cierta época vivió y reinó en este lugar un rey llamado Sheram, dueño de la provincia de Taligana y mencionado por varios historiadores hindúes, como uno de los monarcas más generosos y ricos de su tiempo; poseedor de una singular aptitud militar que le permitió elaborar un plan de batalla y resultar victorioso al repeler al frente de un pequeño ejército, un insólito y brutal ataque en el que perdió la vida su hijo, el príncipe Adjamir. Toda esta situación dejó a su padre profundamente consternado, pues nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un día un tal Sessa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sessa le presentó un juego que según él conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo, dicho juego era el ajedrez. Después de explicarle las reglas y entregarle un tablero con sus piezas el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado… jugó y jugó y su pena desapareció en gran parte**.** Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sessa que como recompensa pidiera lo que deseara; a este ofrecimiento Sessa respondió diciendo:

"Deseo que ponga un grano de trigo en el primer cuadro de tablero, dos, en el segundo, cuatro en el tercero, y así sucesivamente, doblando el número de granos en cada cuadro, y que me entregue la cantidad de granos de trigo resultante".

El rey bastante sorprendido con tal petición, aceptó inmediatamente creyendo que era una recompensa insignificante en comparación con todas sus riquezas. Sheram ordenó a los más sabios del reino paraqué calcularan la cantidad exacta de granos de trigo que debían entregarse a

Sessa había. Cuál fue su sorpresa cuando éstos le comunicaron que no podía entregarse dicha cantidad de trigo.

Para hacerse a una idea de la inmensidad de esta cifra, calculemos aproximadamente la magnitud que debería tener el granero capaz de de almacenar semejante cantidad de trigo. Es sabido que un metro cubico de trigo contiene cerca de 15 millones de granos. En ese caso, la recompensa del inventor del ajedrez debería ocupar un volumen aproximado de 12.000.000.000.000 m^3, o lo que es lo mismo 12.000 km^3. Si el granero tuviera 4 metros de alto y 10 metros de ancho, su longitud debería ser de 300.000.000 de km, o sea el doble de la distancia que separa la tierra del sol. La producción actual de trigo del mundo entero durante doscientos años o el número de granos de arena en la playa de Copacabana, son otras medidas comparativas de dicha cifra.

Con base en la anterior información responda las siguientes preguntas:

1. Complete la Tabla No. 1 correspondiente a la cantidad de granos de trigo en las casillas señaladas.

Casilla	**Granos de trigo**
1	1
2	2
3	4
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Tabla No. 1

Se espera que los estudiantes una vez hayan comprendido la situación presentada en lenguaje natural puedan inferir la relación entre el cambio de las dos magnitudes involucradas, para así completar la tabla duplicando en sucesivas ocasiones desde la primera cantidad de granos correspondientes a la primera casilla. De igual manera, se espera que los estudiantes, una vez hayan completado la tabla, reconozcan la existencia de covariación entre las magnitudes aunque posiblemente no logren expresarla aún por medio de una expresión algebraica.

2. Utilice GeoGebra para representar en el plano cartesiano la información de la tabla del punto 1.

Se espera que los estudiantes representen la información en la tabla en el plano cartesiano, ya sea creando la lista de puntos o en su defecto introduciendo la información punto por punto en la barra de entrada. En esta representación gráfica les será muy útil puesto que identificarán de forma rápida una variación de tipo exponencial entre las magnitudes involucradas.

Fase de Formulación. Se organizará a los estudiantes en grupos de tres para que apoyados en los conocimientos adquiridos en la fase anterior y en las construcciones realizadas en GeoGebra resuelvan las preguntas señaladas, conjeturando, argumentando y justificando sus respuestas ante sus compañeros.

3. Encuentre una expresión matemática que te permita encontrar el total de granos de trigo correspondiente a una determinada casilla.

Se espera que los estudiantes después de una primera etapa de exploración determinen de forma errónea una expresión matemática de tipo exponencial de la forma $f(x) = 2^x$. Posteriormente el instructor motivará a los alumnos para que validen la expresión obtenida asignando valores, a la variable independiente. Una vez hayan comprobado las dificultades de esta primera aproximación algebraica, se espera que intenten adecuar los resultados obtenidos a las condiciones del problema, para así llegar a una expresión de la forma: $f(x) = \frac{2^x}{2} = 2^{x-1}$ para la cual se hará el mismo proceso de validación.

4. Resuelva la misma situación en el caso que Sessa hubiese pedido 10000 granos de trigo por la primera casilla y de ahí en adelante la mitad de granos correspondientes a la casilla inmediatamente anterior.

Se prevé que los estudiantes potencializaran sus técnicas mediante el uso de representaciones que permitirán una mejor interpretación y visualización de la problemática. De esta forma, los alumnos no tendrán dificultades para determinar la expresión pedida, dado que podrán relacionar con mucha eficiencia los resultados inmediatamente obtenidos con las modificaciones hechas en este inciso.

En particular, se espera que al variar la razón de incremento en la cantidad de granos de trigo, los estudiantes reconozcan esta situación un decrecimiento de tipo de exponencial, llegando a la conclusión que la base de dicha función es un número racional comprendido entre cero y uno. Posteriormente, asumirán a este valor como $\frac{1}{2}$, puesto que cada vez la cantidad de granos de trigo se va disminuyendo a la mitad. En lo referente a la cantidad de granos de trigo correspondiente a la primera casilla, se prevé que los estudiantes cometerán un error al adicionarle dicha cantidad inicial de granos a la expresión matemática hasta el momento obtenida, es decir si C_0 es la cantidad de granos que debió haberse entregado en la primera casilla entonces se tendría la expresión: $f(x) = 10000 + \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$, siendo la correcta $f(x) = 10000 * \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$

5. ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre las gráficas que encontraste en punto anterior y la gráfica de la situación inicial?

Se espera que los estudiantes al realizar las gráficas de las funciones solicitadas, encuentren similitudes y diferencias, verificando a través del seguimiento en la gráfica la pertinencia de las expresiones matemáticas obtenidas. De igual manera, se espera que los estudiantes identifiquen algunas de las características de las funciones representadas al comparar sus gráficas, como por ejemplo la monotonía, intercepto con el eje de ordenadas, entre otros.

6. ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones encontradas en la pregunta 4 y 5?

Se espera que los estudiantes apoyándose en la gráfica determinen con gran facilidad a cuál conjunto numérico pertenecen las magnitudes involucradas en esta situación. De esta manera el dominio y el rango de dichas funciones exponencial que modeliza esta situación se verán subordinados a la gráfica de la misma al no recurrir al tratamiento en el registro algebraico.

Fase de Validación. Dependiendo de la fase de la situación en la que se trabajó, se pedirá a los estudiantes que de forma individual o grupal expongan sus estrategias de solución, justificando la pertinencia de sus resultados, posteriormente los demás estudiantes deberán argumentar si están de acuerdo o no con dichas respuestas. Durante esta etapa, se originará una discusión en la cual los estudiantes defenderán su posición mediante pruebas y argumentos lógicos, de igual manera se podrá verificar en base a las condiciones del medio la pertinencia y validez de los resultados.

Fase de Institucionalización. Durante esta fase se dará un estado cultural al conocimiento matemático, es decir; el docente establecerá relaciones entre las producciones hechas por los estudiantes y el saber matemático en juego. Al finalizar la sesión de trabajo de esta primera situación se institucionalizará los saberes puestos en acto explicando:

- Función Exponencial: Forma general de la función exponencial: $f(x) = ka^{bx}$

- Identificación de la función exponencial a través de sus representaciones algebraica, numérica y gráfica.

- Análisis de algunas características y propiedades de la función exponencial tales como dominio, rango, monotonía, asíntotas, entre otros; a partir de la interpretación del valor de sus parámetros.

- Relación entre las características de la situación y el valor que adquiere cada uno de los parámetros en el modelo funcional de dicha situación.

7.5.2. Análisis *a priori* de la Situación Didáctica No. 2.

Variables micro- didácticas.

- El tipo de valor (entero o fraccionario) que adquieren cada uno de los parámetros en la expresión general de la función exponencial.

- El contenido matemático implícito en cada registro de representación empleado.

- Efectos en la representación gráfica de las funciones exponenciales ocasionada por la variación de sus parámetros.

- El tipo de variación (discreto o continuo) asociado a la variable dependiente e independiente.

Objetivos.

- Observar las tendencias y regularidades en el comportamiento de los datos numéricos para favorecer el estudio y la comprensión de los conceptos matemáticos abordados.

- Relacionar los elementos de una función exponencial en el registro gráfico y numérico para establecer algunas de sus principales características y propiedades.

- Utilizar GeoGebra para efectuar la conversión del sistema de representación algebraico al gráfico, visualizando los efectos en el comportamiento de la gráfica de la función del tipo $f(x) = ka^{bx}$ $(a > 0, a \neq 1)$, cuando varía uno de sus parámetros y permanece fijo el otro.

- Debatir, conjeturar y elaborar estrategias de solución para validarlas en un trabajo colaborativo.

Saberes que se movilizan en la Situación Didáctica No. 2.

- Identificación y distinción entre los elementos (variables y parámetros) de la función exponencial a través de su representación algebraica.

- Exploración de patrones y tendencias en el comportamiento de los datos en el registro gráfico y algebraico.

- Interpretación de las relaciones entre las transformaciones en las graficas de las funciones exponenciales y el valor de los parámetros en sus respectivas representaciones algebraicas.

- Discriminación e interpretación del comportamiento, aspecto y de algunas características principales de las funciones exponenciales a partir del valor de sus parámetros.

Momentos de la realización didáctica.

El tiempo establecido para la realización de la Situación Didáctica No. 2 es de dos horas. En primer lugar el estudiante deberá leer la información concerniente a dicha situación y a continuación actuará sobre el medio tratando de establecer conjeturas e hipótesis para encontrar posibles soluciones. Posteriormente trabajará con otro compañero para intercambiar información y comunicarse sus observaciones, ya sea para conjeturar, argumentar o justificar sus hipótesis. Cabe mencionar que la validación de las respuestas de los estudiantes no se hace por medio del juicio del docente, si no a través del medio propuesto, el cual se encargará de dirigir y validar las soluciones alrededor de la problemática planteada. Al finalizar la clase el docente socializará el conocimiento de manera formal, institucionalizando los saberes puestos en acto.

Fase de Acción: Durante esta primera fase el estudiante, después de haber escuchado las indicaciones del docente, empleará GeoGebra para dar solución a los siguientes interrogantes.

1. Con ayuda de GeoGebra construye y completa la Tabla No. 1 con los valores de las funciones exponenciales, dentro del intervalo indicado.

   Con ayuda de la herramienta hoja de cálculo se espera que los estudiantes puedan encontrar fácilmente los valores que toman las funciones exponenciales en el intervalo señalado. Para tal efecto, los estudiantes deben ingresar en la barra de entrada dichas funciones y posteriormente proceder incorporando la información en la hoja de cálculo, haciendo los respectivos cálculos y procedimientos.

2. Con relación a la tabla construida en el punto anterior contesta las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué puedes observar en los valores de las funciones a medida que la base va aumentando?

   Se prevé que los estudiantes interpreten la información en la tabla y observe que a medida que la base va incrementándose, los valores que toma dichas funciones también se van aumentando.

   b) ¿Qué puedes observar en los valores de las funciones a medida que la base va disminuyendo?

   Análogamente, se pronostica que al observar la información en la tabla, los estudiantes lleguen a la conclusión que a medida que la base va disminuyendo, los valores que toman dichas funciones también van decreciendo.

c) ¿Qué sucede con la función cuando la base es un valor que se encuentra entre cero y uno?

Se espera que a partir de la información en la tabla, los estudiantes infieran que cuando la base adquiere un valor entre cero y uno, las funciones toman valores cada vez más pequeños a medida que los valores del argumento crecen; es decir, se obtienen funciones decrecientes.

d) ¿Qué sucede con la función cuando la base es igual a 1?

Se prevé que los estudiantes construirán una tabla de valores y al graficarla en el plano cartesiano lleguen a la conclusión que se trata de una función de tipo constante o mejor dicho una función lineal.

e) ¿Existe algún punto de intersección de las funciones con respecto al eje de abscisas?

Gráficamente se espera que los estudiantes empleen la GeoGebra para detectar si las gráficas de dichas funciones cortan o no al eje x; para tal efecto, se prevé que inspeccionarán dichas gráficas, ampliando la vista y trasladando el plano cartesiano de tal forma que se faciliten sus observaciones.

Algebraicamente se prevé que los estudiantes asociarán los cortes de las gráficas con el eje x con la existencia raíces de las funciones tratadas, luego al tratar de asociar procesos algorítmicos llegarán a la conclusión que no existen valores del argumento para los cuales las funciones se anulen.

f) ¿Existe algún punto que sea común a todas las funciones? Identifícalo.

Mediante observaciones en las gráficas se espera que los estudiantes identifiquen el punto de intersección de las funciones señaladas. De igual forma para cerciorarse de sus resultados, se esperan que empleen la herramienta *Intersección*.

g) ¿Cuál es el dominio y el rango de estas funciones exponenciales?

Con relación al dominio, gráficamente se espera que los estudiantes al no encontrar asíntotas verticales lleguen a la conclusión de que no existen valores de x para los cuales las funciones no estén bien definidas, en otras palabras, concluirán que la variable independiente puede adquirir cualquier valor real. Algebraicamente se espera que los estudiantes busquen ciertos valores de la variable independiente para los cuales la función se indetermina. Concluyendo posteriormente que dichos valores no existen, es decir, que las funciones están definidas para todo valor real que pueda adquirir la variable independiente.

En cuanto al rango, mediante la observación en la gráfica los estudiantes podrán darse cuenta de que el eje x constituye una asíntota horizontal para las gráficas de las funciones señaladas, admitiendo posteriormente que los valores que adquieren dichas funciones son siempre mayores que cero.

Situación de Formulación. En esta fase de la situación se pedirá a los estudiantes organizarse en binas; igualmente se les solicitará emplear un lenguaje explicito en procura de facilitar la producción e intercambio óptimo de experiencias en la resolución del problema. De esta manera cada alumno después de haber interactuado con el medio podrá intercambiar información y comunicar sus observaciones a su compañero, ya sea para conjeturar, argumentar o justificar sus hipótesis. En la primera parte de esta fase se presentan las siguientes interrogantes

3. En el archivo: "Gráfica Dinámica Función Exponencial", encontrarán una construcción dinámica, donde podrán observar e identificar el comportamiento de la gráfica de la función exponencial al modificar el valor de los parámetros k, a y b, en la expresión $f(x) = ka^{bx}$. Con base en dicha construcción registren sus observaciones de acuerdo a la información requerida en la Tabla No. 2, **s**iguiendo las indicaciones para cada uno de los parámetros k, a y b.

Se espera que los estudiantes al cambiar el valor de los parámetros identifiquen regularidades y relaciones entre los valores que adquieren dichos parámetros y las características de las gráficas de las funciones obtenidas. Como es de esperar, los estudiantes modificarán los parámetros conforme a las condiciones establecidas en la tabla; de esta manera, se espera que los estudiantes reconozcan algunos invariantes como por ejemplo, que en general el eje de abscisas es una asíntota horizontal para las funciones obtenidas y también que el dominio de las funciones exponenciales de este tipo lo constituye todo el campo de los números reales. De igual manera, se espera que identifiquen en cada caso el crecimiento/decrecimiento, rango e intercepto con el eje y, puesto que estos varían de acuerdo a los valores que adquieran dichos parámetros.

4. En la anterior actividad se pudo observar los diversos comportamientos que puede tomar la gráfica de la función exponencial, al modificar los parámetros en su respectiva expresión algebraica. De acuerdo a esto relacionen los diversos casos tratados para dar respuesta a los siguientes interrogantes:

a) ¿Qué relación existe entre el valor del parámetro k y la grafica de las funciones exponenciales que se obtienen al modificar dicho valor?

Se prevé que los estudiantes identificarán la relación existente entre el valor del parámetro k y el punto de corte con el eje y, es decir, llegarán a la conclusión de que el valor de k corresponde a la ordenada del punto de corte con el eje y.

b) ¿Qué sucede con la gráfica de la función en el caso particular en que $a = 1$ con k y b arbitrarios?

Para resolver esta pregunta, se espera que algunos estudiantes empleen los conocimientos adquiridos en la situación anterior y deduzcan que en este caso resulta una función constante. Por otro lado, se espera que los alumnos al graficar la función obtenida para el caso particular en que $a = 1$ con k y b arbitrarios, concluyan que la gráfica corresponde a una función de tipo lineal, más específicamente, una recta horizontal con ecuación $y = k$.

c) ¿Qué sucede con la gráfica de la función cuando $b = 0$ y donde $a > 0$, $a \neq 1$ y k arbitrario?

Se prevé que los estudiantes emplearán la gráfica de la función para determinar lo que sucede con la función en el caso de que $b = 0$ con $a > 0$, $a \neq 1$ y k arbitrario. Análogamente al caso anterior, se espera que lo estudiantes concluyan que la gráfica corresponde a una recta horizontal con ecuación $y = k$.

d) ¿Cree usted que las gráficas de las funciones generadas al cambiar el valor de los parámetros, cortarán siempre al eje de ordenadas? Justifique sus respuestas.

Para resolver esta pregunta, se espera que los estudiantes empleen la construcción suministrada para buscar un determinado valor para los parámetros para los cuales la gráfica de la función generada no corte al eje de ordenadas. De esta manera, los estudiantes llegarán a la conclusión de que efectivamente las gráficas de las funciones generadas cortaran el eje de ordenadas.

Fase de Validación. Después de haber interactuado con GeoGebra y haber planteado conjeturas, hipótesis y estrategias para resolver la problemática, se pedirá a los estudiantes que a nivel grupal e intergrupal demuestren frente a las condiciones del problema, la adecuación y pertinencia de sus resultados y estrategias de solución. Con esto los estudiantes podrán debatir, reflexionar, argumentar y validar sus resultados y métodos, dado que cada uno estará en condiciones de tomar una posición frente a las declaraciones de sus compañeros, dentro de este proceso el medio tendrá un papel importante en la confrontación y validación de dichos resultados frente a la problemática planteada.

Fase de institucionalización. Al culminar la fase de formulación, se darán a conocer algunos conceptos claves referentes a la función exponencial explicando:

- Identificación y distinción entre variables y parámetros de la función exponencial a través de su representación algebraica.

- Análisis de la información proveniente de representaciones numéricas y gráficas para establecer similitudes y diferencias entre el comportamiento de las funciones exponenciales abordadas.

- Efectos sobre la función exponencial al modificar los parámetros k, a y b en su forma general $f(x) = ka^{bx}$.

- Análisis de casos en los cuales la función exponencial adquiere valores particulares.

- Dominio, rango, monotonía, asíntotas y puntos de corte con respecto a los ejes de coordenadas de las funciones exponenciales estudiadas.

7.5.3. Análisis *a priori* de la Situación Didáctica No. 3.

Variables micro-didácticas.

- El valor que adquiere cada uno de los parámetros en el modelo funcional dado por la expresión $f(x) = ka^{bx}$.
- Cantidad de bacterias en un momento determinado.
- Tiempo necesario para que haya una cierta cantidad de bacterias.
- La cantidad inicial de alcohol en la sangre.
- El valor de la variación porcentual de alcohol en la sangre.
- El tiempo requerido para que exista una cierta cantidad de alcohol en la sangre.
- El contenido matemático implícito en cada registro de representación empleado.
- El tipo de variación (discreto o continuo) asociado a la variable dependiente e independiente.

Objetivos.

- Identificar si la información contenida en una representación de tipo verbal, numérica, gráfica o algebraica de la situación, corresponde a una variación de tipo exponencial.
- Interpretar la información presente en dichas representaciones, para realizar tratamientos adecuados en cada registro y efectuar la conversión de un registro a otro.
- Usar procedimientos numéricos, gráficos y analíticos para predecir comportamientos entre las magnitudes, y verificar que tan razonable son estos con relación a las condiciones de la situación.

- Modelizar situaciones vinculadas con funciones exponenciales, haciendo uso de GeoGebra para representar dichas situaciones, explorar estrategias, formular conjeturas y controlar sus resultados.

Saberes que se movilizan en la Situación Didáctica No. 3.

- Utilización del modelo matemático dado para determinar el valor de una magnitud con respecto a otra, otorgando un significado contextual a los resultados obtenidos.

- Relación entre los elementos del registro de representación algebraico, numérico y gráfico para establecer una expresión algebraica que modelice la situación.

- Desarrollo de habilidades relacionadas con la aplicación de algoritmos y procedimientos y caracterización de la variación entre las magnitudes en sus diferentes contextos.

- Argumentación, reflexión, comprobación y validación, para que los estudiantes defiendan sus puntos de vista, consideren ideas y opiniones de los demás y elaboren conclusiones.

- Identificación y uso de algunas características y propiedades matemáticas de la función exponencial para ser aplicadas en una situación particular.

Momentos de la realización didáctica.

El tiempo previsto para la realización de la Situación Didáctica No. 3 es de dos horas. En primer lugar el estudiante deberá leer la información concerniente a dicha situación, a continuación actuará sobre el medio tratando de establecer conjeturas e hipótesis para encontrar posibles soluciones. Posteriormente comunicará sus observaciones a su compañero, con el objeto de intercambiar experiencias en el desarrollo de las actividades, ya sea para conjeturar, argumentar o justificar sus hipótesis. Cabe mencionar que la validación de las respuestas de los estudiantes no se hace por medio del juicio del docente, si no a través del medio propuesto, el cual se encargará de dirigir y validar las soluciones alrededor de la problemática planteada. Al finalizar la clase el docente socializará el conocimiento de manera formal, institucionalizando los saberes puestos en acto.

Fase de acción. Para comenzar esta primera fase se pedirá a los estudiantes leer la información presentada para responder de forma individual a ciertos interrogantes. Para tal efecto, el estudiante actuará sobre el medio poniendo en práctica los conocimientos adquiridos en las situaciones anteriores. Los estudiantes, después de haber escuchado las orientaciones del profesor y haciendo uso de la información, deberán responder a ciertos interrogantes.

Para comenzar se pedirá a los alumnos leer atentamente la siguiente información:

Las Bacterias

Lavarse adecuadamente las manos antes de preparar o ingerir los alimentos, cocinar bien los productos de origen animal y evitar los lácteos no pasteurizados son algunas medidas para minimizar el riesgo de transmisión de la Escherichiacoli (E. coli) que es una bacteria capaz de causar importantes alteraciones. La E. coli es una bacteria albergada normalmente en el intestino del ser humano y de otros animales. Entre la variedad de cepas de esta bacteria, la mayoría son inofensivos y en realidad representan una parte considerable del contenido intestinal de una persona sana. Pues bien, aunque no parece que su presencia tenga una función especialmente relevante, se ha descrito que la bacteria E. coli favorece la absorción de algunas vitaminas, especialmente la vitamina K. En un laboratorio se realizó un experimento con una población inicial de bacterias E. Coli para estudiar su crecimiento y se pudo comprobar que una temperatura de 37^0C, la cantidad de bacterias está dado por la expresión $y = 25 * \left(\frac{5}{2}\right)^t$, donde t está dado en horas. Según la anterior información responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántas bacterias había inicialmente?

Para darse cuenta de cuántas bacterias había inicialmente se prevé que los estudiantes reemplazarán el valor de $t = 0$ horas en la expresión algebraica dada, de esta manera llegarán a la conclusión de que inicialmente se contaba con 25 bacterias.

2. ¿Cuántas bacterias habrán cuando hayan transcurrido 7 horas y media desde que se inició la reproducción?

Para encontrar la cantidad de bacterias en este instante, se espera que los estudiantes empiecen a dar valores adecuados al tiempo para tener una idea sobre cómo realizar las operaciones en la evaluación de dichos valores. Posteriormente, al tener una idea clara, harán los respectivos cálculos y reemplazarán el valor de $t = 7{,}5$ horas en la expresión algebraica dada.

3. ¿Cuánto tiempo habrá transcurrido cuando la población de bacterias sea de 20000 bacterias?

Para determinar el tiempo necesario para que la cantidad de bacterias alcance un valor de 20000, se espera que los estudiantes intenten de forma intuitiva otorgarle valores a la variable independiente hasta conseguir que la cantidad de bacterias se acerque a la señalada; al darse cuenta que este proceso es dispendioso, intentarán resolverlo de forma más eficaz encontrando el punto de intersección de la recta y=20000 con la gráfica de la función que modeliza el crecimiento bacteriano. La primera componente de este punto corresponderá al tiempo buscado.

Fase de Formulación. Antes de empezar con esta fase, el docente solicitará a los estudiantes organizarse en parejas, sugiriendo emplear un lenguaje adecuado en procura de facilitar la producción e intercambio óptimo de experiencias en la resolución del problema. De esta manera cada alumno debe formular un mensaje a su compañero, quien a su vez debe interpretarlo y comprenderlo para tomar decisiones con base en las retroacciones que le suministra el medio. Así podrán intercambiar información y comunicar sus observaciones, ya sea para conjeturar, argumentar o justificar sus hipótesis.

En la primera parte de esta fase se presenta la siguiente información.

El Alcoholismo

Las bebidas alcohólicas contienen porcentajes variables de alcohol en peso, según indica su etiqueta: las cervezas, del 4% al 10%; los vinos, del 10% al 18%; los aperitivos y licores suaves, del 20% al 25%; y los licores fuertes, del 35% al 45% (es decir, 100 ml de whisky contienen aproximadamente 40 gramos de etanol). Una vez ingerido el alcohol pasa a la circulación sanguínea. Su absorción se realiza sobre todo a nivel del intestino delgado y es mayor cuando la persona está en ayunas.

El sábado pasado Juan volvía de una fiesta. En el camino fue interceptado por policías de tránsito quienes le hicieron una prueba de alcoholemia. La prueba dio como resultado 160 mg de etanol/ 100 ml de sangre. Si suponemos que cada hora se elimina un 30% de alcohol en sangre resuelve las siguientes preguntas:

4. ¿Cuántos mg de etanol/100 ml de sangre permanecerán en el organismo de Juan después de las 4 primeras horas de tomarse el examen de alcoholemia? Registre sus resultados en la Tabla No. 1, utilizando tres decimales.

Tiempo t (en horas)	Cantidad de mg de etanol/100 ml de sangre
0	160
1	
2	
3	
4	

Tabla No. 1

Dadas las condiciones del problema, se espera que los estudiantes calculen de forma directa el valor correspondiente al descenso de alcohol en la sangre, el proceso que se presume utilizarán consiste en extraer repetidamente el 30% al valor inmediatamente anterior. Igualmente se presume que surgirán dudas con relación al proceso a utilizar, el investigador intervendrá para corregir posibles errores, haciendo las aclaraciones respectivas mediante ejemplificaciones.

5. ¿Cuánto tardará en descender la cantidad de alcohol por debajo de los 20 mg de etanol/ 100 ml de sangre que es el límite permitido para conducir?

Para esta etapa se prevé los estudiantes estarán más familiarizados con el proceso a utilizar y estarán igualmente en condiciones de aplicarlo de manera rápida y eficaz en repetidas ocasiones hasta obtener una aproximación del tiempo necesario para que la cantidad de alcohol se encuentre por debajo de los 20 mg de etanol/ 100 ml de sangre que es el límite permitido para conducir.

6. Utilice GeoGebra para representar en el plano cartesiano la información de la tabla obtenida en el punto 4. Para esto, considere al tiempo como variable independiente y al nivel de alcohol en la sangre como variable dependiente.

Se espera que los estudiantes grafiquen la información de la tabla en GeoGebra ya sea directamente, ingresando punto por punto en la barra de entrada o bien por medio de la hoja de cálculo, en donde se debe llenar la información y crear la lista de puntos. Se espera que los alumnos puedan identificar que el tipo de variación asociado entre las magnitudes de la situación problema corresponde a un decrecimiento de tipo exponencial

7. Determine una expresión que te permita calcular la cantidad de mg de etanol/100 ml de sangre en el organismo después de t horas.

Se espera que los estudiantes reconozcan de forma directa la presencia de una expresión algebraica de tipo exponencial de la forma $f(t) = k * a^{bt}$ y encuentren los valores de a, b y k, a partir de la información obtenida de la tabla. Para tal efecto, se espera que utilicen el dato de la disminución porcentual constante por hora; es decir, ya que cada hora se reduce el 30% del alcohol en la sangre, lo que queda para la hora siguiente es el 70%, obteniendo de este modo una expresión del tipo $y = 1.60 * 0.7^{x}$.

8. Con ayuda de GeoGebra grafique la ecuación obtenida en el punto anterior y emplee la gráfica para determinar el valor exacto de horas necesarias para descender la cantidad de alcohol por debajo de los 20 mg de etanol/ 100 ml de sangre.

Se prevé que los estudiantes para determinar el tiempo necesario para que la cantidad de alcohol descienda hasta los 20 mg de etanol/ 100 ml de sangre. Graficarán en GeoGebra tanto la función que modeliza este descenso, como también la función $y = 20$ que modeliza el límite permitido de alcohol en la sangre. Posteriormente, hallarán el punto de intersección de ambas funciones, y concluirán que el valor pedido corresponde a la primera componente de dicho punto de intersección.

Fase de Validación. En esta etapa se les pedirá a cada grupo exponer ante sus compañeros los métodos y resultados obtenidos, acompañando cada afirmación con su respectiva justificación. Toda esta información será sometida a consideración por los demás alumnos, los cuales deben realizar acciones sobre el medio ya sea para refutar o validar las estrategias y resultados obtenidos, como también podrán analizar su adecuación y pertinencia.

Fase de Institucionalización. Al culminar la fase de formulación, se darán a conocer algunos conceptos claves referentes a la función exponencial explicando:

- Evaluación de los valores de una magnitud en el modelo funcional de una situación en particular, para establecer valores de otra magnitud.

- Uso de la gráfica del modelo funcional para identificar algunos elementos y características dentro de la situación problema.

- Articulación de las representaciones de tipo verbal, numérico y gráfico para establecer una expresión algebraica que modelice la situación planteada.

- Interpretación de cada parámetro y análisis de los resultados a la luz de la situación problema de donde surgió

- Importancia que tiene la función exponencial para modelizar ciertas situaciones de la realidad.

8. Análisis de los Resultados

En concordancia al esquema general de la metodología propuesta, una vez se realizan los análisis preliminares y la planeación de las situaciones didácticas, se procede a describir la secuencia observada durante la experimentación y se efectúa el análisis *a posteriori* para validar lo sucedido mediante la confrontación entre los comportamientos observados durante la realización de las actividades y lo previsto en el análisis *a priori* de las situaciones didácticas.

8.1 Experimentación

La secuencia de enseñanza elaborada fue puesta en práctica en el aula con 15 de los estudiantes del grado noveno del colegio Liceo Integrado de Bachillerato de la Universidad de Nariño, matriculados en el año 2015-2016; para el desarrollo de las actividades planteadas en cada situación, se solicitó a los estudiantes organizarse de acuerdo a su afinidad en grupos de 2 o 3 personas. Lo anterior se hizo en primer lugar para ahondar en el accionar de los estudiantes durante la resolución de las situaciones didácticas y en segundo lugar, para establecer un enfoque analítico, que permita describir de forma breve y precisa lo realizado durante la implementación de las situaciones didácticas.

Cabe mencionar que las tres etapas se desarrollaron en ocho sesiones de clase de dos horas cada una, con un porcentaje de asistencia del 74% (el porcentaje de faltas debido a que algunos estudiantes se encontraban inscritos a otros proyectos ligados a la Institución), la asistencia y el interés se vieron mediados por el estímulo de una nota extra. Respecto a las características de los estudiantes partícipes en esta investigación, se puede mencionar que eran jóvenes cuyo promedio de edad oscilaba entre los 15 y 16 años de edad; de igual manera, con relación a los conceptos previos que tenían sobre los fundamentos teóricos del objeto de estudio se encuentran los siguientes contenidos: el concepto de función y sus diferentes representaciones (numérica, gráfica y algebraica), la función lineal y la función cuadrática.

8.1.1. Balance entre la planificación y la acción.

En la siguiente tabla se muestra un contraste entre las actividades, el tiempo y los instrumentos empleados para la recolección de información durante la planificación e implementación de la secuencia de enseñanza.

Tabla No. 6.

Balance entre la planificación y la acción. Estructura tomada de Camargo y Guzmán (2005)

Esquema general de desarrollo de la experimentación				
Planificación		Implementación		Instrumentos
Actividades	Tiempo	Actividades	Tiempo	
Introducción	30 minutos	Introducción	30 minutos	Fotografías. Registro de clase.
Introducción al manejo de GeoGebra	6 horas	Introducción al manejo de GeoGebra	6 horas	Fotografías. Registro de clase. Grabación de video.
Aplicación del Cuestionario Diagnóstico.	2 horas	Aplicación del Cuestionario diagnóstico.	3 horas	Registro de clase. Producciones escritas de los estudiantes.
Aplicación Situación Didáctica No. 1	2 horas	Aplicación Situación Didáctica No. 1	3 horas	Fotografías. Registro de clase. Grabación de video. Producciones escritas de los estudiantes.
Aplicación Situación Didáctica No. 2	2 horas	Aplicación Situación Didáctica No. 2	3 horas	Fotografías. Registro de clase. Grabación de video. Producciones escritas de los estudiantes
Aplicación Situación Didáctica No. 3	2 horas	Aplicación Situación Didáctica No. 3	2 horas	Fotografías. Registro de clase. Grabación de video. Producciones escritas de los estudiantes

8.1.2. Descripción de las sesiones.

En el trabajo experimental de esta investigación que se realizó en este plantel educativo, las directivas facilitaron el uso del aula de informática durante (3 horas semanales) para la realización de la secuencia de enseñanza en horario contrario a la jornada escolar. El trabajo de campo se realizó en la mayoría de las veces con la supervisión del docente de área de matemáticas y junto al investigador. Para comenzar, se realizó una introducción el día 18 de junio de 2016, en donde se dio a entender a los alumnos en qué consistía el trabajo de investigación del que serían partícipes; de igual forma se explicó la metodología que sería empleada para la realización de dicha investigación, los recursos y herramientas que iban a disponer, junto con el tipo de contrato didáctico que se manejaría durante su implementación.

Por otro lado, dado que los alumnos carecían de experiencia en el manejo de GeoGebra, surgió la necesidad de realizar una inducción en el manejo de esta herramienta computacional entre los días 18, 25 y 2 de julio del presente año. Dentro de esta inducción se explicaron aspectos generales relativos a GeoGebra, se destacaron sus principales elementos con su respectiva funcionalidad, e igualmente se mostraron ciertas construcciones que permitían evidenciar la articulación entre las diversas vistas que ofrece este software, en particular se propusieron actividades para trabajar con funciones, con el propósito de explorar todas las posibles formas de representación haciendo uso de este software. Así, se generó una dinámica de trabajo favorable y en general se observó gran interés por parte de los estudiantes para resolver ciertas preguntas de carácter técnico y conceptual relacionadas con la función lineal y la función cuadrática. Cabe mencionar que hubo un receso de actividades académicas comprendido entre el 8 de julio de 2016 y el 8 de agosto del mismo año.

Aunque en la introducción efectuada antes de salir a vacaciones ya se había hablado de los aspectos generales de la investigación, pareció prudente volverlos a explicar debido al receso de las actividades escolares, posteriormente se procedió a implementar una prueba diagnóstica el día 13 de Agosto del presente año, con la finalidad de tener un primer acercamiento a las concepciones de los estudiantes con relación al objeto de estudio. Al comienzo se insistió en la necesidad de responder las preguntas de forma individual y se aclaró que no se trataba de una evaluación que sería calificada. Se solicitó igualmente que se dispusieran a trabajar cómodamente y dejaran sobre sus pupitres únicamente las herramientas de trabajo. Es de resaltar que a pesar de la advertencia de que el trabajo se debía hacer en forma individual, algunos estudiantes insistían permanentemente en mirar el trabajo desarrollado por los demás compañeros, en cambio otros alumnos se mostraban un poco inseguros y desconcentrados durante la realización de las actividades.

A continuación se resume en términos generales la metodología empleada durante la implementación de las tres situaciones didácticas, en donde se describe por cada fase los momentos de clase llevados a cabo.

Para dar inicio a la fase de acción se dieron algunas indicaciones previas a la realización de la situación; aquí se explicó a los estudiantes que el trabajo se debería hacer de forma individual y que para el desarrollo de las actividades tendrían a su disposición GeoGebra y material donde podrían registrar sus operaciones si así lo requirieran. Además se hizo hincapié en que el trabajo realizado sobre este software debía ser guardado con la finalidad de evitar la pérdida de información. Durante la realización de las actividades el papel del docente consistió en dirigir las acciones del estudiante mediante el cuestionamiento e intervenciones encaminadas a que los estudiantes interpretaran y comprobaran sus resultados a través de las retroacciones que le suministraba el medio.

En cuanto a la fase de formulación, para iniciar se solicitó a los estudiantes organizarse en grupos de dos o tres personas dependiendo de la situación didáctica que se trabajaba. Esto facilitó la observación de los procesos de aprendizaje e igualmente posibilitó una mejor expresión de las ideas, permitiendo el desarrollo de habilidades para la expresión oral, el cuestionamiento, la argumentación y la justificación, por lo cual se afinaron y evolucionaron sus propias concepciones. Para la resolución de las preguntas los estudiantes tuvieron que considerar la información obtenida en la fase anterior y las construcciones realizadas en GeoGebra. Dentro de esta fase los alumnos pudieron intercambiar experiencias en la resolución de las actividades, posibilitando la creación de conjeturas e hipótesis que después serían puestas a prueba en el transcurso de la siguiente fase.

Para comenzar la fase de validación, se solicitó a los estudiantes que de acuerdo a como se organizaron en los grupos de trabajo, expusieran frente a sus compañeros las estrategias empleadas, los procesos y los resultados encontrados en la resolución de las actividades. La labor del investigador consistió en dirigir la discusión, es decir; hacía la lectura de las preguntas orientadoras y le daba la palabra a los integrantes de los grupos de trabajo para que expusieran ante el resto de compañeros sus estrategias y resultados; para esto debían emplear el medio para justificar sus procedimientos y de igual forma para determinar la pertinencia y adecuación de sus resultados. De esta manera, los demás estudiantes argumentaban si estaban de acuerdo o no con dichas respuestas. Durante esta etapa, se originó una discusión en donde los estudiantes defendían su posición mediante pruebas y argumentos lógicos, empleando GeoGebra para verificación de sus hipótesis con relación a las condiciones del problema.

Ahora con respecto a la fase de institucionalización, al comenzar se hizo preguntas a toda la clase sobre las actividades desarrolladas en la respectiva situación, dentro de esta discusión generada se fomentó la participación de los estudiantes para que fuesen ellos quienes elaboraran algunas conclusiones relacionadas con las características y propiedades entre los conceptos contemplados. Posteriormente se procedió a explicar de forma general los saberes movilizados a través de la situación didáctica en cuestión, para lo cual se estableció relaciones entre dichos saberes matemáticos en cuestión y las producciones de los estudiantes. Dentro de esta etapa se pudieron resolver algunas dudas e inquietudes de los alumnos frente a las temáticas planteadas.

8.2 Análisis *a posteriori* y Validación

Esta fase se apoya en la información en los datos recolectados durante la experimentación y en lo establecido durante la planificación de las situaciones didácticas; es decir, se confrontarán las hipótesis concebidas en el análisis *a priori* y las observaciones de los comportamientos de los estudiantes durante aplicación de las situaciones didácticas, de donde se rescatan los detalles, comentarios, estrategias y reflexiones considerados importantes, aunque se está consciente que se han pasado por alto algunos de ellos**.**

8.2.1 Análisis *a posteriori* de la Situación Didáctica No. 1.

Antes de comenzar la fase de acción se dieron algunas indicaciones por parte del investigador en cuanto al tiempo y los recursos de los iban a disponer, al igual que los momentos o fases por los que transitarían durante la implementación de la situación didáctica. Posteriormente, se solicitó a los estudiantes organizarse de forma individual, y se entregó a cada uno la información referente a la situación a través de una descripción textual denominada "*Leyenda del Ajedrez*". Con base en dicha información se solicitó a los estudiantes responder las siguientes preguntas.

En la pregunta 1

1. Complete la Tabla No. 1 correspondiente a la cantidad de granos de trigo en las casillas señaladas.

Durante esta primera parte, el trabajo se desarrolló de forma lenta, pues había grandes dificultades de comprensión de lectura del enunciado, por lo que se tuvo que hacer un trabajo de orientación de forma general. Sin embargo, aún después de esto algunos estudiantes confundían los datos con los que se calculaba la cantidad de granos de trigo para una determinada casilla, por lo cual fue necesario insistirles que leyeran repetidamente la descripción verbal de la situación, haciendo especial énfasis en la oración: *"Deseo que ponga un grano de trigo en el primer cuadro de tablero, dos, en el segundo, cuatro en el tercero, y así sucesivamente, doblando el número de granos en cada cuadro, y que me entregue la cantidad de granos de trigo resultante".*

De esta manera se pudo hacer más evidente la relación entre las magnitudes involucradas, lo que ayudó a establecer algunas posibles relaciones entre ellas. Así, los estudiantes completaron la tabla duplicando en sucesivas ocasiones a partir de la cantidad de granos de trigo correspondientes a la casilla inmediatamente anterior. Algunos estudiantes emplearon la calculadora y otros simplemente usaron procedimientos aritméticos elaborados a lápiz y papel. Resultó interesante observar a estudiantes que consultaban continuamente al profesor, por lo cual se les indicó que las respuestas a sus inquietudes estaban presentes en la información de la situación. De esta forma se hizo evidente la dependencia de algunos alumnos con el profesor, puesto que en cada paso se pedía su aprobación, como también se notó cierto individualismo que con el tiempo fue disminuyendo.

En la pregunta 2

2. Utilice GeoGebra para representar en el plano cartesiano la información de la tabla del punto 1.

Para representar dicha información en el plano cartesiano, algunos estudiantes hicieron uso de la Hoja Cálculo y procedieron a crear la lista de puntos a partir de la tabla elaborada. Otros sin embargo, introdujeron la información en la barra de entrada escribiendo los puntos que habría que representar. En esta etapa, los estudiantes pudieron apreciar de mejor manera el tipo de variación entre las magnitudes involucradas, lo que facilitó su identificación.

Para dar comienzo a la fase de formulación, se solicitó a los estudiantes organizarse en grupos de tres personas, se recalcó en la importancia de explorar la problemática desde diversas representaciones, como también en emplear un lenguaje adecuado que permitiese conjeturar, argumentar y justificar eficientemente sus acciones para una mejor interpretación de la situación. En esta fase se pidió formular expresiones algebraicas que permitiesen encontrar el total de granos de trigo que debería entregarse por una determinada casilla, y a partir de ello establecer algunas diferencias y similitudes entre las funciones obtenidas. Dentro de esta etapa, se resolvieron los siguientes interrogantes

En la pregunta 3

3. Encuentra una expresión matemática que te permita encontrar el total de granos de trigo correspondiente a una determinada casilla.

Al interior de cada grupo se hizo evidente el liderazgo por parte de uno de los integrantes. Este liderazgo se daba en función de los conocimientos, reflexiones y destrezas que mostraban para hacer planteamientos, como también desarrollos algebraicos y gráficos. Aquí se mostró cierta incapacidad para formular el modelo funcional, ya que se optó por determinarlo directamente a partir del texto, a pesar de la sugerencia del investigador para que transitaran de un registro a otro. La mayoría de estudiantes se mostraron reticentes a analizar la información en otro registro y finalmente lo hicieron por insistencia del profesor. De esta manera, al considerar la información proveniente de los registros de representación numérico y gráfico, tales como tabla de valores y gráfica en el plano cartesiano respectivamente, pudieron interpretarla y suministrar una solución a la problemática. Para esto, algunos estudiantes identificaron a partir de la información obtenida las principales características de la función buscada, como por ejemplo el carácter creciente, junto al hecho de que el punto $(0,1)$ perteneciese a dicha función, entre otros. Estas consideraciones posibilitaron el reconocimiento e identificación de una variación de tipo exponencial asociado a la situación en cuestión.

Para encontrar dicha expresión matemática, un grupo de trabajo asoció el hecho de que por cada casilla debía duplicarse la cantidad de granos de trigo para deducir la expresión matemática dada por la ecuación $f(x) = 2^x$, sin embargo, al comprobar su validez dentro del contexto del problema se detectaron ciertas dificultades, puesto que para la casilla 1 se tendrían dos granos de trigo, lo que no concordaba con las condiciones de la situación. Después de darse cuenta de sus errores y al interactuar de nuevo con el medio, dedujeron otra expresión algebraica de la forma $f(x) = \frac{2^x}{2} = 2^{x-1}$, en donde x es un número natural comprendido en el intervalo $[1,64]$; claramente en esta nueva función se evade el inconveniente anteriormente mencionado.

En la pregunta 4

4. Resuelva la misma situación en el caso que Sessa hubiese pedido 10000 granos de trigo por la primera casilla y de ahí en adelante la mitad de granos correspondientes a la casilla inmediatamente anterior.

Para determinar la expresión pedida, los alumnos debían relacionar eficazmente los resultados inmediatamente obtenidos con las modificaciones hechas en este inciso. Los estudiantes potencializaron sus técnicas mediante el uso de representaciones que permitieron una mejor interpretación y visualización de la problemática.

Los alumnos en general no tuvieron dificultades para reconocer en la situación un decrecimiento de tipo exponencial. De ahí, dedujeron que el factor de crecimiento en este caso sería un valor en el intervalo (0,1), y análogamente como en el inciso anterior obtuvieron posteriormente una expresión matemática de la forma $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} = \frac{1}{2^{x-1}}$. Ahora, para establecer el valor correspondiente a la cantidad inicial de granos de trigo, algunos grupos de trabajo como el caso de Miguel y Laura intentaron de forma errónea adicionar dicha cantidad a la expresión matemática obtenida con anterioridad, es decir, $f(x) = 10000 + \left(\frac{1}{2^{x-1}}\right)$. En vista de esto, el investigador instó a los estudiantes que validaran estos resultados con relación a las condiciones del problema para que identificaran los errores cometidos y adecuaran sus estrategias de solución. Sin embargo solo el grupo conformado por Daniel y Oscar pudo determinar la expresión solicitada en este inciso, debido a que decidieron multiplicar la cantidad inicial de granos de trigo por la expresión inmediatamente obtenida. De esta manera, los estudiantes dedujeron que la expresión en este caso estaba dada por la expresión $f(x) = \frac{10000}{2^{x-1}}$.

En la pregunta 5

5. ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre las gráficas que encontraste en punto anterior y la gráfica de la situación inicial?

En este caso, para las actividades de tipo representativo se evidenciaron técnicas que permitieron visualizar una gráfica cartesiana, como es el caso de la localización de puntos en el plano y el uso de la tabla de valores. Entre las similitudes encontradas, algunos estudiantes concluyeron que las gráficas obtenidas en el punto 3 y en el punto 4 interceptaban al eje de ordenadas, como también dedujeron que el eje de abscisas constituía una asíntota horizontal para ambas gráficas. Entre las diferencias entre estas funciones, algunos estudiantes concluyeron:

Miguel y Laura: Mientras que la función del punto 3 es creciente, la función encontrada del punto 4 es decreciente.
Lamentablemente, solo un estudiante se atrevió a establecer similitudes y diferencias entre los conjuntos numéricos para los cuales estas funciones estaban definidas:

Daniel y Oscar: La función encontrada en el punto 3 toma valores en el conjunto de los números naturales, mientras que la función del punto 4 toma valores en los naturales y en los racionales, ya que solo se puede extraer la mitad un número limitado de veces para que el de valor la función siga siendo un número entero.

En la pregunta 7

6. ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones encontradas en las preguntas 3 y 4?

La mayoría de estudiantes tuvo inconvenientes ya que no tenían un referente teórico que les permitiera encontrar el dominio y el rango de las funciones señaladas. Por esto, el docente explicó en términos generales en qué consistían estos dos conceptos en cuestión. Una vez hecha esta aclaración, los estudiantes se apoyaron en la gráfica para determinar lo que se pedía. La mayoría de estudiantes llegaron a la conclusión de que la función del punto 3 tenía por dominio todo el conjunto de los reales, y en cuanto al rango concluyeron que consistía en el conjunto de los reales positivos. Con relación a la función del punto 4, la mayoría de alumnos llegaron a la conclusión que su dominio lo constituía todo conjunto de los números reales, mientras que el rango consistía en el conjunto de los reales positivos. Todo lo anterior se hizo a partir de estudiar el comportamiento de las funciones señaladas, sin embargo, se recalcó en la importancia de confrontar estas características con las condiciones de la situación, a partir de esto, los estudiantes se percataron de los posibles valores que podían ser otorgados a las magnitudes involucradas.

Por último, cabe mencionar que sólo un grupo de trabajo, conformado por Daniel y Oscar intentó resolver el problema por métodos algebraicos, sin embargo no tuvieron éxito puesto que no tenía las suficientes herramientas conceptuales que le permitieran conseguirlo.

En cuanto a la fase de validación, se solicitó a los estudiantes salir a exponer los métodos y estrategias empleadas durante la resolución de las actividades. De esta manera, se pudieron confrontar los resultados obtenidos, e igualmente establecer la adecuación y pertinencia de los mismos con relación a las condiciones de la situación. La plenaria resultó muy interesante puesto que dio lugar en algunos momentos específicos, a discusiones valiosas y al establecimiento de consensos. Dentro de esta etapa se evidenció la necesidad de emplear diferentes registros de representación para validar o refutar las respuestas suministradas por los compañeros; sin embargo, se notó que en general les costaba trabajo para plasmar por escrito sus resultados y no tenían mucho interés en ello, lo que les impidió elaborar un informe de forma adecuada que permitiera al resto de compañeros observar y analizar sus estrategias empleadas, y así tratar de convencer a sus compañeros de la decisión que el grupo de trabajo había adoptado con relación a la pregunta que se formulaba, por lo cual prefirieron en su gran mayoría, exponer los resultados de forma oral.

Ahora para la fase de institucionalización, el investigar inició indagando a los estudiantes abordando preguntas relacionadas con las actividades desarrolladas en la situación, fomentando de esta manera la participación de los estudiantes para que fuesen ellos quienes a partir de las actividades desarrolladas en la parte experimental elaboraran algunas conclusiones relacionadas con las características y propiedades entre los conceptos contemplados en esta última situación. Para esto, se centró en la identificación de las diversas formas de representar el cambio de una magnitud, haciendo énfasis en las conexiones entre una y otra. Aunque los estudiantes estaban dispuestos a responder los cuestionamientos que se les hacía, se pudo observar serias dificultades con el uso del lenguaje algebraico para denotar funciones y un nivel de conocimiento bajo acerca del tema. Posteriormente se procedió a explicar de forma general los saberes contemplados en la fase de planificación de la presente situación didáctica, para lo cual se estableció relaciones entre los saberes matemáticos implicados y las producciones de los estudiantes. Dentro de esta etapa se pudieron resolver algunas dudas e inquietudes de los alumnos frente a las temáticas planteadas.

8.2.2. Análisis *a posteriori* de la Situación Didáctica No. 2

Antes de dar inicio a la fase de acción se dieron algunas indicaciones por parte del investigador en cuanto al tiempo y los recursos de los iban a disponer para la realización de esta situación didáctica. De igual manera, se solicitó a los estudiantes organizarse de forma individual y se entregó a cada uno el cuestionario junto con una tabla donde debían registrar los resultados concernientes a la tercera pregunta de la esta situación. En esta fase las actividades estaban encaminadas a identificar algunas de las características de la función exponencial a partir de la información proveniente de representaciones de los diversos registros de representación, tales como el numérico, el gráfico y el analítico. En esta fase se solicitó a los estudiantes responder las siguientes preguntas

En la pregunta 1

1. Con ayuda de GeoGebra construye y completa la Tabla No. 1 con los valores de las funciones exponenciales, dentro del intervalo indicado.

En esta primera actividad se procedió a dirigir la elaboración de la tabla, debido a que el propósito no era precisamente el de evaluar las habilidades o competencias de los estudiantes sobre el medio para construir dicha tabla, sino tomar como referente la información contenida, para responder a ciertas preguntas y contribuir a establecer algunas características y relaciones entre los conceptos abordados. Donde evidentemente se encontraron dificultades fue en articular la información proveniente de dicha tabla, por lo cual el docente tuvo que intervenir para guiar las acciones de los estudiantes.

En la pregunta 2 se solicitó a los estudiantes contestar una serie de interrogantes con relación a la tabla elaborada en el punto anterior.

En la pregunta a) del punto 2

a) ¿Qué puedes observar en los valores de las funciones a medida que la base va aumentando?

La dependencia de los estudiantes hacia el profesor disminuyó, a pesar de que ahora la información que se suministraba era de tipo numérico. De igual manera se notó un buen ambiente de trabajo y por lo general no se escucharon comentarios ajenos a la resolución de las actividades. Para la resolución de esta pregunta, se informó a los estudiantes que deberían comparar los valores de las funciones con los de sus respectivos argumentos; sin embargo se presentaron ciertos inconvenientes para analizar la información en dicha tabla ocasionados en su gran mayoría por la falta de organización. Es de resaltar que algunos estudiantes tuvieron inconvenientes al considerar valores de tipo racional, puesto que carecían de algunas nociones fundamentales de relación de orden en este conjunto numérico, lo que al comienzo les impidió analizar correctamente al no establecer cuál de las fracciones era mayor o menor que otra. El docente intervino para corregir erróneas interpretaciones, motivando a los estudiantes para que comprobaran sus hipótesis.

En general, los estudiantes analizaron la información por fragmentos y lo que pudieron observar les dio pautas para generalizar y arrojar afirmaciones de forma errónea. Todo esto condujo a que el docente promoviera un espacio de reflexión, para que basándose en sus conocimientos previos interpretaran la información de la tabla a partir del análisis de los cuatro casos posibles que se originaban cuando se consideraba a la base como un número comprendido entre cero y uno, cuando era mayor que uno, junto con las dos posibilidades para los valores del argumento (positivos y negativos).

La conclusión que habría que llegar era que cuando la base era un número mayor que uno, a medida que ésta va aumentándose, los valores que toman las funciones para valores crecientes y positivos del argumento van creciendo cada vez más con respecto a las otras funciones, mientras que para valores negativos del argumento, los valores de las funciones van disminuyendo con mayor rapidez con respecto a las otras. Para el caso en que la base sea un número comprendido entre cero y uno, a medida que ésta va incrementándose, los valores que adquieren las funciones para valores positivos del argumento van incrementándose más rápido con respecto a las otras funciones, mientras que para valores negativos del argumento los valores de las funciones van disminuyendo con mayor celeridad con relación a las otras.

.

Lastimosamente, aunque ya se habían dado pistas acerca de la organización para analizar dicha información, la mayoría de estudiantes fracasaron, provocando en muchos casos incomodidades y distorsiones entre lo que se quería analizar, como en el siguiente ejemplo:

Laura: Cuando la base es cada vez mayor, los valores de las funciones se van incrementando cada vez más y cuando la base se hace más pequeña, los valores de las funciones se hacen más pequeños.

Como se puede notar, Laura no consideró en su respuesta los valores positivos o negativos del argumento, si fuese sido así, hubiera detectado sus inconsistencias.

En la pregunta b) del punto 2

b) ¿Qué puedes observar en los valores de las funciones a medida que la base va disminuyendo?

En esta actividad los estudiantes debían comparar los valores de las funciones con los de sus respectivos argumentos y observar que sucedía con dichos valores a medida que la base en las expresiones de dichas funciones iba disminuyendo. En general no se presentaron grandes dificultades al resolver esta pregunta dada la estrecha relación con la anterior pregunta anterior; esto ayudó no únicamente a comprender cómo se debería desarrollar el trabajo, sino que también dio pistas que contribuyeron al estudio y análisis de la información contenida en la tabla. Los_estudiantes tomaron como referencia lo elaborado anteriormente y de esta manera no tuvieron tantos inconvenientes para determinar cuál de las fracciones era mayor o menor que otra. De igual forma para analizar la información de la tabla lo hicieron acorde a los cuatro casos que se estudiaron en la pregunta inmediatamente anterior. En los momentos en que se pedía la intervención del docente se hizo para aclarar algunas dudas e inquietudes con respecto a la organización del trabajo. Durante el desarrollo de la actividad se notó un buen ambiente de trabajo y por lo general no se escucharon comentarios ajenos a la resolución de las actividades, entre una de las respuestas de los alumnos se puede mencionar. Algunos estudiantes como en el caso de Daniel, tuvieron éxito al formular expresiones del tipo; sin embargo, no lo hace con un lenguaje apropiado:

Daniel: Es que a medida que la base se hace más pequeña pero sigue siendo mayor que uno, se obtienen funciones crecientes pero con valores cada vez más pequeños. Mientras que cuando la base sea un número en el intervalo $(0,1)$, se obtienen funciones decrecientes pero con valores cada vez más grandes.

En la pregunta c) del punto 2

c) ¿Qué sucede con la función cuando la base es un valor que se encuentra entre cero y uno?

Al interpretar la información de la tabla construida, en general los estudiantes dedujeron de forma acertada que cuando la base adquiría valores en el intervalo $(0,1)$, las funciones tomaban valores cada vez más pequeños a medida que los valores del argumento crecían, obteniéndose de esta forma funciones decrecientes. Otros estudiantes incluso reconocieron que los valores que adquirían las funciones decrecían y se acercaban cada vez más a cero. En seguida se muestran las respuestas suministradas por un estudiante ante la esta pregunta:

Miguel: Si la base está entre cero y uno, la función toma valores cada vez más pequeños, que se aproximan a cero.

Ante la pregunta de si en algún momento la función adquiría el valor de cero, este mismo estudiante respondió:

Miguel: No se...debería ser cuando x toma un valor muy grande.

En esta respuesta, se percibe que aún no está familiarizado con las nociones de asíntota o de raíz de una función. Porque de lo contrario, habría deducido que no hay valores para el argumento en el que la función se anule.

En la pregunta d) del punto 2

d) ¿Qué sucede con la función cuando la base es igual a 1?

Durante la resolución de las actividades se evidenciaron ciertas dificultades debido a que los alumnos no asociaron de forma adecuada los valores que tomaba la función con el tipo de gráfica que la representaba. Dada esta condición, se recomendó a los estudiantes realizar la tabla de valores correspondiente para determinar lo que sucedería en este caso en particular. Una vez establecida dicha tabla, los estudiantes procedieron a representar la información en el plano cartesiano, con lo que pudieron deducir fácilmente que en este caso la función correspondía a una función del tipo lineal, entre algunas respuestas tenemos:

Daniel: Es una línea recta paralela al eje x.

Laura: Si la base es igual a 1 entonces se obtiene una recta que tiene por ecuación $y = 1$.

Como se puede observar las dos respuestas intentan caracterizar la función buscada, sólo que Laura lo hace con más precisión.

En la pregunta e) del punto 2

e) ¿Existe algún punto de intersección de las funciones con el eje de abscisas?

En términos generales, no fue difícil para los estudiantes detectar si habían o no puntos de intersección de las funciones con el eje de abscisas. Para esto, algunos estudiantes se apoyaron en las gráficas de las funciones e inspeccionaron ampliando la vista y trasladando el plano cartesiano para que se les facilitaran sus observaciones. Otros sin embargo, fueron más allá al utilizar el medio para encontrar directamente para cada función el punto de señalado, esto lo hicieron buscando el punto de intersección entre cada función y el eje de abscisas; al no encontrarlo los alumnos concluyeron que no existía dicho punto de intersección, tal como se muestra en la siguiente respuesta

Resulta importante considerar que los estudiantes no relacionaron los puntos de intersección ya mencionados con la existencia de raíces de las funciones tratadas; esto hubiese permitido observar la situación desde otros contextos, y posibilitar la utilización de herramientas diferentes a las usuales.

En la pregunta f) del punto 2

f) ¿Existe algún punto que sea común a todas las funciones? Identifícalo.

En general no se presentaron inconvenientes para dar respuesta a esta pregunta; los estudiantes intentaron determinar a través de la representación gráfica de las funciones, un punto que perteneciese a todas ellas. De esta manera, los alumnos llegaron a conclusión que el punto (0,1) era común a todas ellas. Posteriormente el docente instó a los alumnos para que comprobaran por escrito sus afirmaciones, otros en cambio justificaron sus afirmaciones haciendo alusión a algunas propiedades de la potenciación en los números reales tal como se evidencia en la siguiente respuesta de un estudiante:

Ángela: Si existe y es el punto (0,1), ya que todo número elevado a la cero da como resultado uno.

Como se puede dar cuenta en esta respuesta, aunque efectivamente el punto (0,1) es común a todas las funciones, no existe el suficiente rigor para enunciar la propiedad aplicada.

En la pregunta g) del punto 2

g) ¿Cuál es el dominio y el rango de estas funciones exponenciales?

Inicialmente, algunos estudiaron presentaron dificultades debido a que aún no tenían claridad sobre los conceptos de dominio y rango. En esta pregunta se observó predominancia del registro gráfico para poder determinar tanto el dominio como el rango de las funciones objeto de estudio. Los estudiantes pudieron constatar que el dominio de dichas funciones lo constituía el conjunto de los números reales, dada la ausencia de asíntotas verticales. De igual manera, para determinar el rango de estas funciones los estudiantes en su gran identificaron al eje de abscisas como una asíntota horizontal para las gráficas de las funciones señaladas y dedujeron de esta forma que el rango lo constituía el conjunto de los reales positivos.

Para dar inicio a la fase de formulación, se solicitó a los estudiantes organizarse en grupos de 2 personas, y se les entregó a cada pareja el archivo que contenía las actividades a desarrollar. Es importante tener en cuenta que el éxito en esta actividad, dependía en gran medida de la correcta interpretación de las relaciones entre cambio de los parámetros señalados y el comportamiento que adquiría la gráfica de las funciones exponenciales generadas. En seguida se resumen los comportamientos observados durante la resolución de las preguntas concernientes a esta fase.

En la pregunta 3

3. En el archivo: "Gráfica Dinámica Función Exponencial", encontrarán una construcción dinámica, donde podrán observar e identificar el comportamiento de la gráfica de la función exponencial al modificar el valor de los parámetros k, a y b, en la expresión $f(x) = ka^{bx}$. Con base en dicha construcción registren sus observaciones de acuerdo a la información requerida en la Tabla No. 2, **s**iguiendo las indicaciones para cada uno de los parámetros k, a y b.

El trabajo se centró en el desarrollo de la conversión del registro de representación algebraico al registro de representación gráfico, en otras palabras, los estudiantes debían identificar los efectos en el comportamiento de la gráfica de una función exponencial a causa de la variación de los parámetros en su expresión general. Durante la realización de las actividades los estudiantes otorgaron valores a los parámetros en la forma general conforme a las condiciones impuestas en cada caso, interpretaron la información suministrada en la gráfica de la función y posteriormente relacionaron la información proveniente de ambos registros de representación para establecer algunas características y comportamientos con relación al objeto de estudio.

Algunos estudiantes solicitaron ayuda del docente, sin embargo, éste les solicitó leer atentamente a las instrucciones de la actividad y a la construcción dinámica elaborada. La mayoría de estudiantes tuvieron éxito al describir las características comunes de las funciones exponenciales que se obtenían al variar los parámetros, como lo son el de dominio y el hecho de que el eje de abscisas era una asíntota horizontal para las funciones que se obtenían. De igual manera, identificaron eficazmente para cada situación en particular las características sometidas a variabilidad, como por ejemplo, la monotonía, el rango e intercepto con el eje de ordenadas, ya que estos oscilaban de acuerdo a los valores que adquirían dichos parámetros. Un ejemplo de esto lo tenemos en la respuesta suministrada por un estudiante

Oscar: Aunque el dominio y las asíntotas son iguales para todas las funciones, el rango, el intercepto y la monotonía son distintos.

En la pregunta 4 se solicitó a los estudiantes que resolvieran las siguientes preguntas tomando como referente la tabla elaborada en el punto anterior.

En la pregunta a) del punto 4

a) ¿Qué relación existe entre el valor del parámetro k y las gráficas de las funciones exponenciales que se obtienen al modificar dicho valor?

Al iniciar la actividad el investigador les indicó que sólo deberían variar el deslizador del parámetro k y observar que sucedía con las características de la gráfica de las funciones que se generaban. Una vez hecha esta aclaración los alumnos procedieron a trabajar sobre la construcción elaborada y a interpretar las retroacciones que les suministraba el medio. La mayoría de estudiantes no tuvo dificultades para identificar que efectivamente existía dicha relación entre estos dos elementos y consistía en que el valor del parámetro k correspondía a la ordenada del punto de corte de las gráficas con el eje de ordenadas en las gráficas de las funciones. No obstante hubo serios inconvenientes en el momento de expresar adecuadamente dicha relación, tal como se evidencia en la siguiente respuesta:

Miguel: Cuando se mueve k, la función cambia de lugar y corta al eje y en puntos distintos, tal como se mueve k.

Dentro de estas respuestas se puede observar una idea no tan sofisticada de la relación entre dichos elementos, lo con lo que se evidencia una falta de articulación entre el registro verbal y lo que se podía interpretar a partir de los demás registros de representación.

En la pregunta b) del punto 4

b) ¿Qué sucede con la gráfica de la función en el caso particular en que $a = 1$ con k y b arbitrarios?

Al realizar acciones sobre la construcción suministrada y establecer las condiciones señaladas, los estudiantes pudieron darse cuenta de que la función que se obtenía correspondía a una función de tipo lineal. Al variar los demás parámetros y al darse cuenta de que siempre se obtenía el mismo tipo de función, llegaron a la conclusión que bajo estas condiciones siempre se obtendría una función de tipo lineal, con la particularidad de que su representación gráfica en el plano cartesiano era una recta paralela al eje de abscisas. Como lo muestra la respuesta de un grupo de trabajo:

Miguel y Laura: Se obtiene una línea recta paralela al eje x que tiene por ecuación $y = k$, sin importar el valor que adquiera b.

Como se puede ver en esta respuesta, se han superado ciertos inconvenientes para relacionar un concepto a través de sus distintas representaciones

En la pregunta c) del punto 4

c) ¿Qué sucede con la gráfica de la función cuando $b = 0$ y donde $a > 0$, $a \neq 1$ y k arbitrario?

Los estudiantes acudieron a la representación dinámica elaborada para establecer las condiciones impuestas en este inciso para cada uno de los parámetros en cuestión. Después procedieron a variar los demás parámetros y percatarse a través de la representación gráfica en el plano cartesiano, el tipo de función que se obtenía. De forma análoga al caso anterior, los estudiantes, pudieron identificar que bajo las condiciones establecidas para cada uno de los parámetros, la función que se obtenía era una función de tipo lineal, ahora con mucha más precisión en el momento de expresar la respuesta al caracterizar dicha función mediante su expresión algebraica, puesto que en general, concluyeron que se trataba de una función que tiene por ecuación $y = k$.

En la pregunta d) del punto 4

d) ¿Cree usted que las gráficas de las funciones generadas al cambiar el valor de los parámetros, intersecaran siempre con el eje de ordenadas? Justifique sus respuestas.

Al emplear la construcción elaborada, algunos estudiantes intentaron resolver este problema tratando de buscar determinados valores para los parámetros, en los cuales la gráfica de la función no cortara al eje de ordenadas. De esta manera, los estudiantes llegaron a la conclusión de que efectivamente las gráficas de las funciones generadas cortarían siempre el eje de ordenadas. Aquí se observó en los estudiantes dificultades para comprobar sus hipótesis a través de argumentos lógicos que permitiesen llegar a una generalización, debido a que en la construcción suministrada los parámetros estaban definidos sobre intervalos pequeños y no permitían como es de esperar un análisis de tipo exhaustivo sobre el dominio de dichas funciones.

Otros estudiantes sin embargo, recurrieron al registro algebraico para poder comprobar la certeza de sus hipótesis. Usaron el hecho de que la primera componente de este punto de intersección con el eje de ordenadas siempre equivale a cero; posteriormente decidieron reemplazar dicho valor en la expresión general de la función exponencial y al realizar los respectivos cálculos, llegaron a la conclusión de que siempre va a ser posible encontrar un valor para la función cuando la variable independiente se anule; por consiguiente dedujeron que dicho punto siempre existirá.

Para comenzar la fase de validación**,** se concedió un espacio a los integrantes de cada grupo de trabajo, para que salieran a exponer los métodos y estrategias empleadas durante la resolución de las actividades. Para llevar a cabo esta actividad, se les exigió de igual manera, que justificaran adecuadamente las estrategias empleadas durante la resolución de las actividades, como también que argumentaran el cómo y el porqué de sus respuestas. De esta manera, se pudieron confrontar los resultados, con lo cual se creó un ambiente en donde los demás estudiantes podían validar o controvertir las respuestas de sus compañeros, argumentando sus ideas y utilizando el medio para justificar sus decisiones y observaciones. De forma análoga a la anterior situación, la tarea del investigador consistió en leer las preguntas, coordinar el debate y realizar la respectiva grabación de video. Esta fase resultó provechosa para los estudiantes puesto que a través del debate originado encontraron características, relaciones y demás propiedades entre los conceptos contemplados, haciendo uso de la información proveniente de los diversos registros de representación.

Para dar comienzo a la fase de institucionalización, se socializaron las experiencias obtenidas durante el desarrollo de las actividades, el investigador empezó preguntando a los estudiantes abordando cuestiones relacionadas con las actividades desarrolladas en la situación. De esta manera, se fomentó la participación de los estudiantes para que fuesen ellos quienes a partir de las actividades desarrolladas en la parte experimental elaboraran algunas conclusiones sobre los conceptos contemplados en esta situación. Posteriormente, se trabajó en el estudio de las funciones exponenciales a partir de la información contenida en sus diversas representaciones, con lo que se pretendía, entre otras cosas, establecer algunas características y propiedades de las funciones exponenciales. En particular, los estudiantes pudieron relacionar el valor de cada uno de los parámetros dentro de la expresión general de la función exponencial con algunas características de dicho concepto, tales como monotonía, existencia de asíntotas, puntos de corte con respecto a los ejes de coordenadas, dominio, rango, entre otros. Posteriormente se procedió a explicar de forma general los saberes contemplados en la fase de planificación de esta situación didáctica, para lo cual se estableció relaciones entre dichos saberes matemáticos implicados y las producciones de los estudiantes. Dentro de esta etapa se pudieron resolver algunas dudas e inquietudes de los alumnos frente a las temáticas planteadas.

8.2.3. Análisis *a posteriori* Situación Didáctica No. 3.

Antes de dar inicio al desarrollo de esta fase de acción, el investigador dio algunas indicaciones en cuanto al tiempo, normas y los recursos de los iban a disponer para la realización de esta situación didáctica, lo que fue acogido de buena manera por parte del estudiantado. Se aclaró a los estudiantes que esta primera fase de actividades se debía resolver de forma individual y se entregó a cada alumno una copia del cuestionario, como también hojas en blanco para que registraran los resultados con su respectiva justificación en caso de que se requiriera. En esta fase las actividades estaban encaminadas a determinar algunas de las características concernientes a cierta situación, a partir del modelo funcional que la representaba. Para esto, debían relacionar la información en las representaciones de los diversos registros de representación. En esta fase se solicitó a los estudiantes responder las siguientes preguntas

En la pregunta 1

1. ¿Cuántas bacterias había inicialmente?

En esta primera actividad se debía abordar una situación problema a partir del modelo funcional de tipo exponencial, tarea de tipo interpretativo y representativo. En general no hubo inconvenientes para encontrar lo que se pedía, dado que la mayoría de estudiantes después de haber identificado el tipo de magnitudes, utilizaron el hecho de que el valor inicial de bacterias estaba determinado en el momento en que el tiempo fuese 0 horas. Posteriormente los estudiantes reemplazaron dicho valor en el modelo funcional para encontrar el valor que se pedía. El investigador estuvo atento en guiar las acciones efectuadas por los estudiantes, ya sea haciendo preguntas orientadoras o aclaraciones sobre los conceptos abordados.

En la pregunta 2

2. ¿Cuántas bacterias habrán cuando hayan transcurrido 7 horas y media desde que se inició la reproducción?

Análogamente al caso anterior, los estudiantes decidieron reemplazar el valor de $t = 7{,}5$ horas en el modelo funcional. Sin embargo, durante el proceso algunos, como Daniel, cometieron ciertos errores de tipo aritmético, como representar inadecuadamente el valor del tiempo, realizar operaciones de forma errónea que impidió calcular el valor requerido, entre otros. De igual manera para corregir este tipo de inconvenientes el profesor instó a los estudiantes a emplear de forma adecuada la calculadora para determinar el valor pedido. Otros sin embargo, como en el caso de Ángela y Miguel se apoyaron en la gráfica de la función para estimar el valor buscado, como también para validar sus resultados. Esto sugiere la articulación entre dos representaciones de registros de representación diferentes, cuyo común denominador es el concepto de función exponencial.

En la pregunta 3

3. ¿Cuánto tiempo habrá transcurrido cuando la población de bacterias sea 20000 bacterias?

En un primer momento, la mayoría de estudiantes intentaron estimar el valor pedido otorgándole valores arbitrarios al tiempo, y reemplazando dichos valores en el modelo funcional hasta conseguir que la cantidad de bacterias fuese un número cercano al establecido en la consigna. Posteriormente para tener el valor exacto, algunos estudiantes como Miguel y Oscar decidieron expresar dicha condición en el modelo funcional y tratar de resolver la ecuación resultante; sin embargo, esto no se consiguió ya que estos estudiantes carecían de algunas herramientas conceptuales, lo que impidió resolver de forma algebraica lo que se pedía. Resulta interesante que ninguno de los estudiantes decidiera emplear la representación gráfica del modelo funcional, para a partir de ella determinar el tiempo buscado. Lo que demuestra que existe una clara predominancia del registro algebraico para resolver este tipo de problemáticas.

Para dar comienzo a la fase de formulación, se solicitó a los estudiantes organizarse en grupos de dos personas. De igual manera, se pidió resolver una serie de preguntas a partir de la información presentada en la situación. Para tal propósito, debían abordar la situación desde diferentes perspectivas mediante el empleo de los diversos registros de representación como el numérico y gráfico. Posteriormente se debía formular expresiones algebraicas que permitiesen encontrar el total de mg de alcohol que permanecerían en el organismo de una persona después de hacerse el examen de alcoholemia. Para esto, se recalcó en la importancia de explorar la problemática articulando la información proveniente de las diversas representaciones, como también en emplear un lenguaje adecuado que permitiese conjeturar, argumentar y justificar eficientemente sus acciones para una mejor interpretación de la situación. Dentro de esta etapa, se resolvieron los siguientes interrogantes

En la pregunta 4

4. ¿Cuántos mg de etanol/100 ml de sangre permanecerán en el organismo de Juan después de las 4 primeras horas de tomarse el examen de alcoholemia? Registre sus resultados en la Tabla No. 1, utilizando tres decimales.

Hubo inconvenientes por cuanto algunos estudiantes no recordaban el proceso mediante el cual se extraía un cierto valor expresado en porcentaje a otra cantidad dada.

Por tal razón, el investigador intervino para corregir malas concepciones y vigilar para que se realicen de forma adecuada dichos procesos, sin restarle autonomía a las acciones de los estudiantes. Una vez construida la tabla de valores, los estudiantes en s totalidad pudieron organizar y de esta manera sentar las bases para identificar las posibles relaciones, regularidades y patrones en el comportamiento de los datos.

En la pregunta 5

5. ¿Cuánto tardará en descender la cantidad de alcohol por debajo de los 20 mg de etanol/ 100 ml de sangre que es el límite permitido para conducir?

Para esta pregunta, los estudiantes ya se habían familiarizado con el proceso mediante el cual se debía extraer un cierto valor expresado en porcentaje a otra cantidad dada. Por tal razón no fue complejo para los alumnos aproximar el tiempo necesario para que la cantidad de alcohol en la sangre descendiera a esta alcanzar dicho límite, así que los estudiantes decidieron efectuar repetidamente el proceso efectuado en la pregunta anterior hasta conseguir que la cantidad de alcohol en la sangre adquiriera un valor por debajo de los 20 mg de alcohol /100 ml de sangre. **A**unque los valores registrados en la tabla estaban acorde a los que se pedía, hubieron diferencias al aproximar el tiempo, mostrando así sus dificultades para utilizar valores intermedios entre cada hora.

En la pregunta 6

6. Utilice GeoGebra para representar en el plano cartesiano la información de la tabla obtenida en el punto 4. Para esto, considere al tiempo como variable independiente y al nivel de alcohol en la sangre como variable dependiente.

En esta actividad, se pretendía que los estudiantes hicieran uso del registro de representación gráfico y así se dieran una primera idea del tipo de variación asociado a las dos magnitudes en cuestión. Para representar dicha información en el plano cartesiano, algunos estudiantes como en el caso de Laura hicieron uso de la Hoja Cálculo y procedieron a crear la respectiva Lista de Puntos a partir de la tabla elaborada. Otros sin embargo, como Miguel y Ángela introdujeron la información en la barra de entrada escribiendo las coordenadas del los puntos que había que representar. De esta manera, se dio paso para que los estudiantes pudieran apreciar de mejor manera el tipo de variación entre las magnitudes involucradas, lo que facilitó su identificación.

En la pregunta 7

7. Determine una expresión que te permita calcular la cantidad de mg de etanol/100 ml de sangre en el organismo después de t horas.

En esta actividad, la tarea consistió en construir el modelo funcional referente a dicha situación. Una vez los alumnos interpretaron la información proveniente de representaciones de tipo numérico y gráfico, pudieron reconocer e identificar el tipo de variación entre las magnitudes estudiadas. Por ejemplo, el grupo de Miguel y Daniel evidenció el carácter decreciente de la gráfica, como también algunas de las principales cualidades de la función buscada, como es el caso de pasar por el punto $(0{,}160)$, junto con ciertas características captadas mediante la representación gráfica, consideraciones que permitieron identificar una variación de tipo exponencial asociado a la situación en cuestión.

El grupo de Laura y Ángela relacionó las dos magnitudes involucradas y de est manera decidieron multiplicar por un valor constante k a la cantidad de alcohol en la sangre inmediatamente anterior y formaron una progresión para los valores que adquiría esta magnitud como se presenta en la siguiente tabla:

Tabla No. 7. Relación entre el tiempo y la cantidad de alcohol en la sangre

Tiempo (t en horas)	Cantidad de alcohol en la sangre/100mil de sangre
0	160
1	$160k$
2	$160k^2$
3	$160k^3$
.	.
.	.
.	.
n	$160k^n$

Posteriormente para encontrar el valor de k, estos estudiantes utilizaron el hecho de que en esta situación se observaba un decaimiento de tipo exponencial y asumieron en el caso particular de k, que debía adquirir un valor en el intervalo $(0{,}1)$. Después, dado que si se elimina un 30% de alcohol en el organismo, los alumnos dedujeron entonces que en él quedaba un 70% y por ello consideraron a k como 0,7. Finalmente obtuvieron la siguiente expresión: $C(t) = 160(0{,}7)^t$ (t en horas). Cabe mencionar que estos estudiantes, al considerar una progresión geométrica, están empleando como estrategia de solución una de las características fundamentales que dieron paso a la construcción de la función exponencial.

En la pregunta 8

8. Con ayuda de GeoGebra grafique la ecuación obtenida en el punto anterior y emplee la gráfica para determinar el valor exacto de horas necesarias para descender la cantidad de alcohol por debajo de los 20 mg de etanol/ 100 ml de sangre.

Durante esta etapa hubo serios inconvenientes para determinar el tiempo exacto para que la cantidad de alcohol descienda hasta los 20 mg de etanol/ 100 ml de sangre, ya que no disponían en su momento de las suficientes herramientas conceptuales para determinarlo a partir de procesos de tipo algebraico. Por ende, decidieron graficar en GeoGebra la expresión dada por el modelo funcional $y = 160 * 0.7^x$, como también la función $y = 20$ que modeliza el límite permitido de alcohol en la sangre. Posteriormente, hallaron el punto de intersección de ambas funciones, y concluyeron posteriormente que el valor pedido correspondía a la primera componente de dicho punto de intersección.

En cuanto a la fase de validación, inicialmente se solicitó a los integrantes de cada grupo de trabajo, salir a exponer las estrategias, procesos y resultados obtenidos durante la resolución de las actividades, argumentando el por qué de sus respuestas, con lo cual se confrontaron los resultados obtenidos, e igualmente se estableció la adecuación y pertinencia de los mismos con relación a las condiciones de la situación. La plenaria resultó muy interesante puesto que dio lugar en algunos momentos específicos, a discusiones valiosas y al establecimiento de consensos. De esta forma, se generó un ambiente en donde los demás estudiantes podían validar o controvertir las respuestas de sus compañeros, argumentando sus ideas y utilizando el medio para justificar sus decisiones. Sin embargo, se pudo notar en los estudiantes dificultades para plasmar por escrito sus resultados y poco interés en ello, lo que les impidió realizar adecuadamente un informe que permitiese al resto de compañeros observar y analizar sus acciones. El investigador realizó atenta lectura de las preguntas y de igual manera realizó la grabación en video del debate que se originó. Esta fase resultó provechosa para los estudiantes puesto que a través de dicho debate encontraron características, relaciones y demás propiedades relacionadas a las situaciones trabajadas, haciendo uso de la información proveniente de los diversos registros de representación.

En la fase de institucionalización, se organizó a los estudiantes en mesa redonda con el propósito de socializar las experiencias obtenidas durante el desarrollo de las actividades. El investigador empezó preguntando a los estudiantes sobre las actividades desarrolladas en la situación, con lo cual se buscaba fomentar la participación de los alumnos para que fuesen ellos quienes a partir de las actividades desarrolladas en la parte experimental elaboraran algunas conclusiones relacionadas con las características y propiedades entre los conceptos contemplados en esta situación. Para esto, se centró en la identificación de las diversas formas de representar el cambio de una magnitud, haciendo énfasis en las conexiones entre una y otra; posteriormente recalcó en la relación existente entre el valor de los parámetros en el modelo funcional y algunas características de las situaciones trabajadas. Después, se procedió a explicar de forma general los saberes contemplados en la fase de planificación de esta situación didáctica, para lo cual se estableció relaciones entre dichos saberes matemáticos implicados y las producciones de los estudiantes. Por último, se resolvieron algunas dudas e inquietudes de los alumnos frente a las temáticas planteadas, haciendo énfasis en la gran variedad de aplicaciones que tiene la función exponencial para modelizar algunas situaciones de la vida cotidiana.

.

8.2.4. *Consideraciones finales del análisis a posteriori.*

Estas consideraciones han sido elaboradas con relación a: El tratamiento del contenido de la función exponencial, la interacción didáctica, el diseño y desarrollo de las actividades planteadas, y por último la construcción del conocimiento en las sesiones de clase.

Con relación al tratamiento del contenido de la función exponencial.

En la Situación Didáctica No. 1, tal como se había contemplado en la fase de planificación, se pudo constatar en los estudiantes la movilización de ciertos saberes, resultado de sus experiencias vividas tanto en su escolaridad como en su cotidianidad. Por ejemplo, la mayoría de alumnos lograron identificar, sin mayor dificultad, las magnitudes número de casilla y cantidad de granos de trigo que estaban relacionadas en la situación. Una vez identificadas, los estudiantes intentaron representar la relación entre ellas utilizando el registro numérico. Para esto, decidieron basarse en la descripción verbal de la situación e hicieron los respectivos cálculos para determinar la cantidad de granos de trigo correspondientes a las primeras casillas. Posteriormente, los alumnos representaron los valores obtenidos en el plano cartesiano, y luego a partir de dicha gráfica, extrajeron de la información necesaria para obtener una idea global acerca de la covariación entre estas dos magnitudes.

En unos pocos alumnos se pudo determinar dificultades para extraer información de tipo numérico a partir de la gráfica, hubo igualmente ciertos inconvenientes cuando se pretendía leer valores diferentes a los marcados por la escala en los ejes coordenados, puesto que las dos magnitudes adquirían valores discretos, más específicamente, valores en el conjunto de los enteros positivos. Un estudiante realizó una observación con respecto a lo anterior por medio de la siguiente expresión: "…el número de las casillas y la cantidad de granos de trigo van tomando valores enteros mayores que cero" (Daniel).

Por otro lado, a pesar de haber estudiado funciones lineales y cuadráticas, la noción de función no fue abordada en forma explícita, como tampoco se realizó mención a dicho concepto espontáneamente. Para la mayoría de estudiantes, la función no era considerada como una herramienta matemática para hacer alusión a cierta relación; por ejemplo, mencionaron cosas como "los granos de trigo dependen del número de las casillas" (Miguel), donde se puede notar la identificación de la dependencia entre estas dos magnitudes**.** Como es de esperar, tuvieron dificultades al relacionar dicha dependencia con el concepto de función, y aún más, en el momento de encontrar la expresión matemática que modelizaba dicha situación; puesto que, a pesar de realizar un análisis correcto de la situación e identificar el cambio de las magnitudes a través de la información contenida en los demás registro de representación, no incorporan adecuadamente el lenguaje algebraico para expresar la variación de la magnitud dependiente en términos de la variación de la magnitud independiente.

Al enfrentarse a la Situación Didáctica No. 2, los estudiantes tuvieron que tomar como base no solamente los saberes previos a la implementación de la secuencia didáctica, sino también aquellos movilizados en la realización de la situación anterior. Se evidenció cierta evolución conceptual relacionada con la interpretación y articulación de la información proveniente de los diversos registros de representación; no obstante, durante el comienzo de las actividades se pudo notar resistencias por parte de los estudiantes para articular representaciones de un cierto registro a otro, incluso un estudiante manifestó explícitamente que los registros de representación numérico y gráfico más que ayudarle lo confundían. Esta actitud resulta comprensible, puesto que es uno de los efectos de la enseñanza tradicional, que da predominio el registro algebraico.

Esta situación exigía articular la información de los diferentes registros de representación para establecer posteriormente algunas características y propiedades referentes al objeto de estudio. En la primera parte, los estudiantes debían analizar ciertas funciones exponenciales, a partir de sus expresiones algebraicas. Para esto, emplearon el medio para tener una aproximación acerca del comportamiento de las funciones trabajadas, con lo cual pudieron interpretar la información proveniente de los diversos registros de representación. En la segunda parte, se debía analizar el comportamiento de la gráfica de una función a causa de la variación de los parámetros en su expresión general, para esto, los estudiantes tomaron como referencia la construcción dinámica previamente elaborada y relacionaron la información contenida en ambos registros de representación. Los alumnos manipularon uno a uno los parámetros dentro de la expresión general de la función exponencial, a partir de ahí y de acuerdo a las instrucciones de la situación fueron otorgándole valores a éstos haciendo uso de las herramientas de GeoGebra. Aunque en esta ocasión la conversión entre estos registros de representación se hacía de forma directa, algunos estudiantes vieron la necesidad de apoyarse en la gráfica de la función que se generaba para extraer información de tipo numérico.

La construcción diseñada ayudó a los estudiantes a interpretar y relacionar la información contenida en ambos registros, dado que vinculaba un alto margen de representaciones de tipo gráfico y algebraico. Cada grupo de trabajo registró conforme a su experiencia tanto los valores, como las características particulares que sobresalían de acuerdo a las instrucciones dadas para los parámetros. De igual manera, el dinamismo de la construcción permitió que tanto las gráficas de las funciones, al igual que sus respectivas expresiones algebraicas fueran diferentes, lo que trajo consigo que las respuestas registradas en la tabla también lo fueran, salvo algunas relaciones y características que no estaban sujetas a variabilidad como el dominio, existencia de asíntotas, entre otros. Las demás relaciones que existían en torno a los efectos en el comportamiento de la gráfica a causa de la variación de dichos parámetros, fueron abordadas mediante preguntas orientadoras ya que permitieron relacionar los casos y establecer conclusiones de tipo general.

En cuanto a la Situación Didáctica No. 3, el desconcierto demostrado por los estudiantes participes de la investigación, desapareció paulatinamente a medida que se avanzó en el desarrollo de las situaciones didácticas, incluso demostraron interés, curiosidad y afán, en resolver los interrogantes planteados. En la primera parte, los estudiantes analizaron una situación a partir del modelo funcional que la representaba; para tal propósito, emplearon el medio para obtener más información de tipo numérico y gráfico. En la segunda parte, los estudiantes analizaron una situación problema a partir de su descripción verbal; la mayoría de alumnos lograron identificar sin mayores inconvenientes, las magnitudes, como también la dependencia entre ellas. Una vez identificadas, los estudiantes intentaron representar la relación entre ellas utilizando el registro numérico. Para esto, decidieron basarse en la descripción verbal de la situación e hicieron los respectivos cálculos para determinar la cantidad de alcohol en la sangre presente en el organismo de una persona al cabo de las primeras horas posteriores al examen de alcoholemia. Después, los alumnos representaron los valores obtenidos en el plano cartesiano, y luego a partir de dicha gráfica, extrajeron de la información necesaria para obtener una idea global acerca de la covariación entre estas dos magnitudes.

Cabe mencionar, que para el desarrollo de la situación, los estudiantes tomaron como base sus conocimientos previos, como también los adquiridos en las situaciones anteriores. Hicieron mención con propiedad de elementos como relación, dependencia, función, entre otros. Desafortunadamente, a pesar de reconocer en la situación una variación de tipo exponencial, e inclusive de tener una idea acerca de la relación entre el comportamiento de una función exponencial y el valor de sus parámetros, surgieron ciertas dificultades en la mayoría de los casos para analizar e identificar adecuadamente el cambio entre las magnitudes a través de la información contenida en los demás registros de representación; en particular, no incorporaron adecuadamente el lenguaje algebraico para expresar la variación de la magnitud dependiente en términos de la variación de la magnitud independiente.

En general, se observó en los estudiantes cierta predilección por el desarrollo de procesos matemáticos de tipo simbólico y operacional que caracterizan la enseñanza en el salón de clases; esto lo que impide en general es identificar algunas características referentes a la situación, dado que existen otros registros de representación que si lo hacen con mayor eficacia. De esta manera, se dificulta en sí la comprensión de los conceptos matemáticos abordados, puesto que para los alumnos, interpretar y pensar fuera de un contexto e idea formada por el docente los incomoda, pues no tienen ninguna posible interpretación y visualización del concepto, llevándolos en la mayoría de los casos al error y en consecuencia a no lograr apropiarse de los saberes contemplados.

Con respecto a la interacción didáctica.

Con respecto a la gestión del trabajo en el aula, se puede afirmar que la organización prevista para el desarrollo de las actividades fue exitosa, inclusive cuando se presentaron inconvenientes relacionados con la inconsistente participación por parte de los estudiantes, junto con la realización de actividades académicas y culturales llevadas a cabo en la institución, que impidió la realización de las secuencias didácticas conforme a lo establecido en el cronograma. Dentro de los aspectos positivos referentes al trabajo desarrollado en las sesiones de clase, se pueden mencionar:

La secuencia de enseñanza elaborada logró que los alumnos partícipes del trabajo de investigación se sintieran motivados, puesto que despertó en estos estudiantes el interés por aprender nuevos conceptos, llegando a convertirse en un reto para afrontar y comprender lo que se les había explicado en el momento de la presentación de dicha investigación. El conocimiento fue emergiendo a medida que los estudiantes interactuaban con el medio, compartían sus hipótesis, estrategias y demás resultados en la puesta en común, y se institucionalizaba el conocimiento matemático en juego.

A pesar de que los estudiantes no estaban acostumbrados a emplear la metodología usada en esta investigación, se consiguió que la mayoría de alumnos se involucraran con el desarrollo de las actividades, y se dispusieran a analizar las situaciones propuestas, formular hipótesis y buscar estrategias para corroborarlas. De igual forma, se evidenció que los estudiantes se sentían sumamente motivados e interesados para presentar sus producciones de forma individual y grupal, como también para defender sus conclusiones ante el resto de sus compañeros. Se insistió en que se dirigieran a los demás de forma clara y precisa, empleando el medio para comprobar sus afirmaciones; en cuanto al resto de estudiantes se solicitó que prestaran atención a la exposición realizada por sus compañeros, como también, que solicitaran de forma adecuada el uso de la palabra ya sea para validar o controvertir las ideas planteadas. En general, las fases de institucionalización no resultaron tan exitosas, debido a que la mayoría de estudiantes se mostraron apáticos para sistematizar con cierto rigor matemático los conocimientos adquiridos durante las etapas anteriores.

Con respecto a la utilización de herramientas como GeoGebra, podemos mencionar que posibilitó un clima de trabajo académico que impactó y motivó a todos los estudiantes desde el comienzo, con el trabajo introductorio a dicho programa hasta implementación de las situaciones didácticas. Lo anterior, se debe en gran parte a la buena condición y disposición física del plantel educativo, en donde se pudo combinar elementos de la clase magistral tales como borrador y tablero, con dispositivos tecnológicos, como por ejemplo, computadores, videobeam y demás herramientas externas al plantel como calculadoras, tablets y cámaras para registrar fotos y videos. Dada la disponibilidad de suficientes computadores para cada uno de los estudiantes, se hizo factible que pudieran interactuar con el medio de forma individual y así tuvieran una idea acerca de sus herramientas y funcionalidades, lo que les ayudó significativamente durante la realización de las situaciones didácticas.

Como es natural, algunas decisiones acerca de la organización de los estudiantes durante ciertos momentos de las situaciones trajeron consigo ciertas ventajas y desventajas asociadas al trabajo en clase. Por ejemplo, unos grupos de trabajo quedaron conformados por estudiantes de buen nivel académico, consiguiendo de esta forma que se comprometieran con el desarrollo de las actividades; mientras que cuando quedaron conformados por estudiantes de un bajo nivel académico, el trabajo se vio opacado ya que los estudiantes no trabajaban a menos que estuviese el docente o el investigador supervisando su trabajo en clase. Cuando se trabajaron con grupos heterogéneos, es decir, estudiantes de buen nivel académico con otros alumnos de un desempeño bajo, se generó un desequilibrio en la forma de trabajo, puesto que algunos alumnos dentro del grupo trabajaban de forma autónoma y responsable y otros no se vinculaban a la labor de los demás .

Con respecto al diseño y desarrollo de las actividades planteadas.

La administración del tratamiento del contenido de dicho concepto matemático, estuvo condicionada por el diseño de las situaciones didácticas, al igual que la comprensión por parte de los estudiantes sobre las preguntas planteadas, las aclaraciones o sugerencias realizadas por el investigador, y las estrategias que ellos propusieron para obtener y validar los resultados frente a las condiciones de la situación.

Con relación a la Situación Didáctica No. 1, los estudiantes tuvieron inconvenientes ya que no estaban acostumbrados a abordar situaciones a partir de sus descripciones verbales; otros sin embargo, decidieron subrayar las partes del texto consideradas “importantes”, con lo cual no solo consiguieron ser más eficaces al momento de interpretar la información presentada en dicha situación, sino que también economizaron tiempo que resultó valioso para el desarrollo de las demás actividades. En general, no fue difícil para los estudiantes identificar el tipo de magnitudes que estaban involucradas y la relación que entre estas existía. A medida que los estudiantes avanzaban en la resolución de las preguntas orientadoras, accedían a más información sobre la situación, como es el caso de representar la dependencia entre estas dos magnitudes por medio de una tabla de valores y a través del plano cartesiano; lo que sirvió para que reconocieran una variación de tipo exponencial asociado a la situación en cuestión.

Una vez identificado el tipo de variación, se debía deducir el modelo funcional entre dichas magnitudes; al comienzo los estudiantes presentaron dificultades para representar algebraicamente esta relación, lo que resulta paradójico frente a lo contemplado en la fase de planificación, pues se presumía que ellos disponían de suficientes herramientas conceptuales relacionadas con el trabajo en el registro de representación algebraico. En la etapa de validación se dio espacio para que los alumnos pudieran confrontar tanto las estrategias como los resultados obtenidos; el ambiente generado favoreció la disposición de los estudiantes para debatir sobre la validez de las respuestas para cada pregunta. En el caso de encontrar alguna inconsistencia con las respuestas, los demás estudiantes estaban en condición de intervenir, para posteriormente con la guía del investigador llegar a un consenso general. Fue motivador para los alumnos usar GeoGebra para poner a prueba lo que hasta el momento habían realizado, ya que además de confrontar sus respuestas, pudieron comparar y escoger de entre todos los métodos de resolución empleados, cuál era el más adecuado.

Durante la fase de institucionalización, se pudo resolver algunas preguntas asociadas a la situación, los estudiantes se mostraron participativos y dispuestos elaborar algunas conclusiones relacionadas con las características y propiedades entre los conceptos contemplados. Posteriormente se procedió a explicar de forma general los saberes contemplados en la fase de planificación de la presente situación didáctica, para lo cual se estableció relaciones entre los saberes matemáticos implicados y las producciones de los estudiantes

En el caso de la Situación Didáctica No. 2, los estudiantes debían articular la información proveniente de los diversos registros de representación para establecer algunas características y propiedades relacionadas con el objeto de estudio. En la primera parte, los alumnos pudieron comparar el comportamiento de algunas funciones exponenciales, conociendo sus expresiones algebraicas y el valor que adquirían dichas funciones dentro de un intervalo dado. Aquí, los estudiantes se mostraron motivados para analizar toda la información e igualmente receptivos a las indicaciones y sugerencias realizadas por el investigador, con esto consiguieron un primer acercamiento a la relación existente entre la gráfica de una función exponencial y la expresión algebraica asociada a la misma. En la segunda parte, se suministró una construcción dinámica para que los alumnos pudieran analizar el comportamiento de la gráfica de una función exponencial, debido a la variación de los parámetros en su expresión general; en este caso la conversión entre ambos registros de representación se realizaba de forma directa. Durante esta parte, los estudiantes otorgaron valores a los parámetros en la forma general conforme a las condiciones impuestas en cada caso e interpretaron la información contenida en la gráfica de la función generada. Al relacionar la información proveniente de ambos registros de representación llegaron pudieron dar respuesta a las preguntas planteadas y establecer algunas conclusiones generales con relación al objeto de estudio.

Posteriormente se dio espacio para que los integrantes de cada grupo de trabajo presentaran ante el resto de sus compañeros tanto los resultados concernientes a las actividades planteadas, como las estrategias y procesos mediante las cuales los obtuvieron. Con esto no solo se pudo valorar las habilidades y destrezas de los alumnos para actuar sobre el medio y así verificar la pertinencia o adecuación de dichos resultados con relación a las condiciones impuestas en la situación, sino que también se pudo contrastar los diversos métodos de resolución e identificar cuál o cuáles de ellos eran más apropiados que los demás; el ambiente generado favoreció la disposición de los estudiantes para debatir sobre la certeza de las respuestas para cada pregunta. En el caso de encontrar alguna inconsistencia con las respuestas, los demás estudiantes estuvieron atentos en pedir la palabra y así realizar las observaciones correspondientes; se pudo notar cierto progreso para formular y argumentar sus decisiones como consecuencia del trabajo previo, facilitándose llegar a un consenso general mediada por la intervención oportuna del investigador.

En la fase de institucionalización, los estudiantes socializaron las experiencias obtenidas, mostrándose participativos en su gran mayoría para elaborar algunas conclusiones sobre los conceptos contemplados en esta situación. Se trabajó en el estudio de la función exponencial a partir de la información contenida en sus diversas representaciones, con lo que se pretendía, entre otras cosas, establecer algunas características y propiedades de dicho objeto matemático. En particular, los estudiantes pudieron relacionar el valor de cada uno de los parámetros dentro de la expresión general de la función exponencial con algunas características de dicho concepto, tales como monotonía, existencia de asíntotas, puntos de corte con respecto a los ejes de coordenadas, dominio, rango, entre otros. De igual forma, se pudieron resolver algunas dudas e inquietudes por parte de los estudiantes con respecto a los saberes movilizados en esta situación.

Para la Situación Didáctica No. 3, ya se habían superado algunas dificultades ligadas a la organización y análisis de la información expuesta inicialmente en la descripción verbal; el contexto de la situación permitió que los estudiantes se sintieran motivados e interesados en encontrar solución a las actividades planteadas. En la primera parte, los estudiantes estuvieron atentos en responder algunas preguntas a partir del modelo funcional asociado a ducha situación. Para esto, hicieron uso de GeoGebra para representar en el plano cartesiano la relación entre las dos magnitudes involucradas y en la mayoría de los casos extrajeron de forma eficaz información de tipo numérico a partir de la gráfica, lo que resultó valioso en el momento de resolver las actividades planteadas. En la segunda parte, se debía determinar el modelo funcional asociado a cierta situación problema, a partir de la descripción verbal de la misma. Las preguntas orientadoras exigían hacer uso de los diversos registros de representación, con lo cual, los estudiantes pudieron acceder paulatinamente a mayor información acerca de la situación. Al analizar la variación entre las dos magnitudes desde diferentes perspectivas, ya fuese mediante de una tabla de valores o a través del plano cartesiano, los alumnos pudieron identificar un decaimiento de tipo exponencial asociado a dicha variación. Contrariamente a lo que se presumía durante la fase de planificación, surgieron inconvenientes en su gran mayoría para realizar el tratamiento adecuado de la información contenida en el registro algebraico; lo que demuestra una vez más que aunque estos tópicos se trabajen durante sus actividades académicas, en general, no están acostumbrados a abordar situaciones problema que requieran la articulación de los diferentes registros de representación para su resolución.

Una vez desarrolladas las preguntas orientadoras, los estudiantes se mostraron atentos para confrontar tanto las estrategias como los resultados obtenidos durante la resolución de las actividades. La experiencia adquirida durante las anteriores situaciones favoreció la disposición de los estudiantes para debatir sobre la validez de las respuestas a cada pregunta; en el caso de encontrar alguna inconsistencia con las respuestas, los demás estudiantes estaban en condición de intervenir y de esta manera buscar un consenso general bajo la guía del investigador. Fue motivador para los alumnos usar GeoGebra para poner a prueba lo que hasta el momento habían realizado, ya que además de confrontar sus respuestas, pudieron comparar y escoger de entre todos los métodos de resolución empleados, cuál era el más adecuado. Se evidenció cierto progreso en los alumnos con respecto a sus actitudes y habilidades para argumentar y debatir en torno a las respuestas de los compañeros, el medio actuó como una herramienta para verificar la validez de las mismas, como también para determinar su adecuación con relación a las condiciones impuestas en la situación.

Con relación a la fase de la institucionalización, al comienzo se abordaron preguntas relacionadas con las actividades propuestas, posteriormente el investigador con ayuda de los estudiantes resolvieron algunas preguntas de la situación, no sólo para que los estudiantes detectaran en qué parte cometieron errores, sino también para que aquellos que si los resolvieron pudieran refinar sus técnicas y procesos. Se recalcó en la identificación de las diversas formas de representar el cambio de una magnitud, haciendo énfasis en las conexiones entre una y otra; como también en la relación existente entre el valor de los parámetros en el modelo funcional y algunas características de las situaciones trabajadas. En general, los estudiantes estaban interesados por aprender los saberes contemplados en la fase de planificación de esta situación, aunque hayan existido confusiones al momento de llegar a ciertas conclusiones generales, para lo cual se estableció relaciones entre dichos saberes matemáticos implicados y las producciones de los estudiantes. Por último, se resolvieron algunas dudas e inquietudes de los alumnos frente a las temáticas planteadas, haciendo énfasis en la gran variedad de aplicaciones que tiene la función exponencial para modelizar algunas situaciones de la vida cotidiana.

Con relación a la construcción del conocimiento en las sesiones de clase.

La metodología implementada durante las sesiones de clases permitió que los estudiantes construyeran al conocimiento matemático de forma análoga a la evolución de dicho concepto a través de la historia. Este proceso comenzó con la interpretación de las relaciones entre magnitudes variables vinculadas a un fenómeno físico, seguida de la identificación de valores particulares que cumplieran dichas relaciones y el posterior bosquejo mediante el uso del registro gráfico, hasta la obtención del modelo funcional asociado a la situación. De igual forma, se tuvieron a disposición las múltiples herramientas de GeoGebra para hacer más evidente la conexión entre las diversas representaciones de la función exponencial y así establecer algunas conclusiones generales con respecto al objeto de estudio. Además fue provechoso para la construcción del conocimiento haber abordado situaciones que requirieran de un análisis adecuado, junto al uso de habilidades como deducir, inducir, ejemplificar, interpretar, conjeturar, argumentar, comparar, validar, entre otros, de tal manera que se compararan sus estrategias, procedimientos y sus resultados obtenidos.

Es de destacar las posibilidades que brindó en esta experiencia el uso del programa computacional GeoGebra, puesto que los estudiantes pudieron abordar los contenidos haciendo uso de dicha herramienta tecnológica, lo que generó gran impacto en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de los saberes matemáticos en juego, ya que ofreció la posibilidad de vincular dinámicamente las representaciones asociadas a dichos saberes, brindándole suficientes herramientas a los estudiantes para que incrementaran la visualización sobre dichas representaciones, renovando en cierta forma las prácticas educativas.

9. Conclusiones y Recomendaciones

A través del contraste entre lo planificado en el análisis *a priori* y los comportamientos observados durante la etapa de experimentación, se pudieron determinar las conclusiones de esta investigación, las cuales están categorizadas, primero con respecto al diseño de la secuencia de enseñanza y la metodología adoptada para esta investigación, segundo con relación a la integración de GeoGebra como instrumento mediador entre el conocimiento matemático y los estudiantes, y por último se plantean algunas sugerencias para investigaciones futuras desde la corriente de la *micro-ingeniería didáctica*.

9.1. Con respecto al diseño de la secuencia de enseñanza y la metodología de investigación implementada

- La aplicación de la situaciones didácticas fundamentadas en la articulación entre los diversos registros de representación asociados a la función exponencial, mejoró significativamente el aprendizaje de dicho concepto matemático en los estudiantes que participaron en la investigación, puesto que permitió mejorar competencias y habilidades relacionadas con la conversión entre dichos registros, acortando la brecha entre la interpretación y la mecanización de conceptos algebraicos, en la medida en que son trabajados.

- De nada vale que se haga un gran esfuerzo para que los estudiantes se apropien de instrumentos de conocimiento si no se esfuerza también por el desarrollo de sus operaciones intelectuales, a partir de lo que ya conocen; por esto la metodología implementada permitió diagnosticar los conocimientos previos que tenían los estudiantes con relación a la función exponencial y a partir de esto elaborar espacios didácticos donde se rescataron ciertas habilidades comunicativas como justificar, argumentar, concluir y validar en un trabajo cooperativo. En particular, el análisis histórico epistemológico sobre este concepto matemático resultó fundamental para generar espacios didácticos adecuados alrededor de dicho concepto, pues fue un referente importante para crear vías de acceso a la conceptualización de dicho concepto por parte de los estudiantes.

- La metodología utilizada durante la implementación de la situaciones didácticas, dio paso para que los estudiantes adquirieran el papel central durante las sesiones de clase, lo que al comienzo provocó una desconexión entre el contrato didáctico establecido y el tipo de contrato empleado en el desarrollo de la investigación. De igual forma, para trabajos posteriores dentro del aula de clase, se considera importante que la aplicación de este tipo de trabajos esté incluida en un marco curricular, ya que de esta forma habrá mayor compromiso por parte de los estudiantes y se vincularán de mejor manera los conocimientos contemplados en clase.

9.2. Con relación a la integración de GeoGebra como instrumento mediador entre el conocimiento matemático y los estudiantes

- La integración de GeoGebra dentro de las prácticas educativas, promovió escenarios didácticos en donde se fomentó la participación activa de los estudiantes, al igual que el desarrollo de competencias y habilidades de tipo social y cognitivo, puesto que permitió visualizar los conceptos a través de los diferentes registros de representación, contribuyendo notablemente en la construcción de conocimientos matemáticos, operativos y estructurados en el aula de clase y generando procesos de significación bien fundamentados.

- El uso de GeoGebra permitió organizar y relacionar la información contenida en los diversos registros de representación, ya que promovió la visualización en fenómenos de variación, hasta la identificación de ciertas propiedades referentes al concepto matemático. En particular, se relacionó el valor de los parámetros en la expresión general de la función exponencial con algunas características visuales en su representación gráfica. Los deslizadores fueron un elemento dinamizador en la mayoría de las construcciones elaboradas con GeoGebra, al igual que el uso de las herramientas de estilo y de formato, casillas de verificación, entre otras.

- La experiencia arrojada por este trabajo de investigación demostró que el uso de GeoGebra aportó otro tipo de contribuciones al desarrollo de los objetivos trazados: fortaleció la confianza de los alumnos en su habilidades para pensar matemáticamente; incrementó el interés por el quehacer matemático promoviendo una actitud activa frente a los procesos de enseñanza y aprendizaje; benefició la construcción del conocimiento al rescatar su dimensión social y aportó de igual forma al desarrollo de la autonomía de los estudiantes ya que les otorgó posibilidades de autocontrol.

9.3. Sugerencias a futuras investigaciones haciendo uso de *la micro-ingeniería didáctica*

Por medio de este trabajo de investigación se ha podido tomar en cuenta, aspectos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje alrededor de la función exponencial; aspectos susceptibles a modificaciones parciales o totales. Es por este motivo, que se hacen las siguientes recomendaciones para investigaciones futuras.

- ¿Cómo determinar eficazmente en qué medida las actividades propuestas en la secuencia de enseñanza, mejoran la comprensión del tema desarrollado, permitiendo verificar de alguna manera la cantidad de estudiantes que tienen un avance significativo en la comprensión de la función exponencial, sus propiedades y sus aplicaciones en otras ramas del saber?

- ¿Cómo diseñar secuencias de enseñanza que permitan por un lado identificar algunas propiedades y características asociadas a la función exponencial, cuando éstas surgen a partir de la composición con funciones básicas, y por otro lado que proporcionen herramientas útiles para la detección de dificultades de aprendizaje?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. *ASOCOLME. Memoria 11° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander.

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gomez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas.* Madrid, España: Editorial Síntesis, S.A. .

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas.* Buenos Aires, Argentina: Libros de zorzal.

Congreso de Colombia. (30 de Julio de 2009). *Por el cual se definen principios y conceptos sobre la sociedad de la información y organización de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones -TIC-, se crea la Agencia Nacional de espectro y se dictan otras disposiciones.* Obtenido de www.mintic.gov.co/portal/604/w3-article-3707.html

Coral, F. (2013). *Diseño de una propuesta metodológica para el empleo del software GeoGebra en la enseñanza de la función cuadrática con estudiantes de grado noveno del colegio Filipense de la ciudad de Ipiales.* Pasto, Colombia: Universidad de Nariño.

Douady, R. (1996). *La ingeniería didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento.* Cali, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Cali: Universidad del Valle.

Gallego, D., & Peña, A. (2012). *Las Tic en geometría. Una nueva forma de enseñar.* Bogotá, Colombia: Ediciones de la U.

Gonzales, H. (2011). *Una propuesta para la enseñanza de las funciones trignométricas seno y coseno integrando GeoGebra.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Guzmán, L. (2007). *Introducción histórica*. Obtenido de http://web.educastur.princast.es/ies/elpiles/ARCHIVOS/paginas/depar/matematicas/Napier%20y%Burgi_.htm

Hohwenwarter, M., & Jones, K. (2007). Ways of linking geometry and algebra: the case of GeoGebra. *British Society for Research into Learning Mathematics*, 126-134.

Janvier, C. (1987). *Translation processes in mathematics education.Problems of representation in teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kadunz, G. (2002). Macros and Modules in Geometry. *Zentralblatt fur Didaktik der Mathematik*, 55-83.

Londoño, L. (2006). *Una unidad didáctica para la enseñanza de la función exponencial en el grado noveno* . Bogotá, Colombia: Universidad de la Salle.

Maor, E. (2006). *e: historia de un número.* México, México: Editorial Libraria.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y de lo falso en la clase de matemáticas.* . Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

MEN. (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemátias, ciencias y ciudadanas.* Obtenido de http://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

MEN. (2015). *Derechos básicos de aprendizaje.* Obtenido de www.colombiaaprende.edu.co/html/micrositios/1752/articles-349446_genera_dba.pdf

Morales, A. (2011). Un breve estudio histórico y epistemológico de la función exponencial y análisis de algunos libros de texto. *Encuentro nacional de educación matemática y estadística.* , (págs. 50-62). Boyacá, Colombia.

NCTM. (2011). Technology in teaching and learning mathematics. *National council of teachers of mathematics,* 1-3.

Pulido, H. (2012). *Propuesta de una unidad didáctica para la enseñanza del concepto de función exponencial mediante la implementación de algunas aplicaciones.* Bogotá, Colombia: Universidad Nacional de Colombia.

Rondero, C., Criollo, A., Tarasenko, A., Pérez, M., & Acosta, J. (2013). *La formación de profesores en competencias matemáticas.* . México, México: Diaz de Santos.

Trillos, H. (2008). *La función exponencial en el grado noveno* . Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander.

ANEXO NO. A. CUESTIONARIO DIAGNÓSTICO

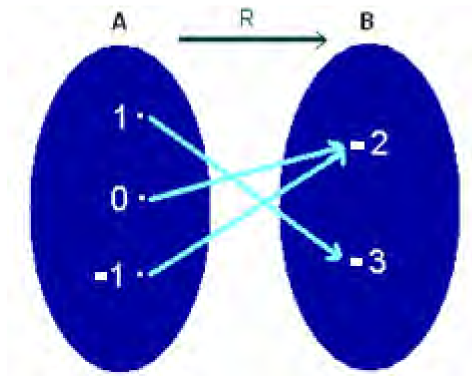
PREGUNTA TIPO I
Selección falso o verdadero

Escriba según su criterio personal, sobre la validez de las siguientes sentencias. Marque con una equis (X) para falso o verdadero en la casilla correspondiente

No. Pregunta	Pregunta	F	V
1.	La determinación por extensión del conjunto de los números enteros Z es: $Z = \{-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$		
2.	$(-3) * (-3) * (-3) * (-3) * (-3) = -3^5$		
3.	Si $x = 0$ en la expresión a^xentonces $a^x = 1$ para todo $a \in R - \{0\}$.		
4.	Si $x \in Z^-$, entonces $a^{-x} = 1/a^x,\ a \in R - \{0\}$.		
5.	La gráfica de cada función lineal de una sola variable es una recta		
6.	Si a está en el dominio de f, entonces $(a, f(a))$ es un punto de su gráfica.		
7.	Un modelo matemático nunca puede ser una función lineal.		
8.	Para hallar una función lineal, solo se necesita un punto y la pendiente		
9.	Cada recta tiene una pendiente		
10.	La gráfica de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c\ \ (a \neq 0)$ siempre es una parábola.		
11.	La recta $y = 0$ no tiene pendiente		
12.	La función $f(x) = 2^x$ es estrictamente decreciente en R.		
13.	La relación $g: Z+ \rightarrow Z$, que asocia a cada entero positivo su raíz cuadrada negativa, es una relación que es función.		
14.	Si A es el conjunto de los números primos y B es el conjunto de los números naturales mayores que 3, entonces la relación h : A → B, que asocia a cada número primo con su cuadrado, es una relación que es una función		
15.	El conjunto $\{ (x, y) \in R^2 /\ y^2 = x \}$ representa una relación que no es función.		
16.	El dominio de la función definida por $f(x) = \frac{1}{x}$ es el conjunto R de los número reales.		
17.	El rango de la función $f(x) = -x^2 + 1,\ x \in R$ es el conjunto R^+ de los números reales positivos.		

PREGUNTA TIPO II
Selección múltiple con única respuesta

Si se tiene el siguiente diagrama



Entonces

18. ¿Cuál de las siguientes opciones es correcta?

    a. $AUB = \{1,0,-1,2,-3\}$
    b. $A \cap B = \emptyset$
    c. $A - B = \emptyset$
    d. Ninguna de las anteriores

19. De la relación establecida entre los elementos de los conjuntos A y B se puede concluir que:

    a. No es una función porque los elementos 0 y -1 tienen la misma imagen.
    b. Si es una función porque a cada elemento de A le corresponde un único elemento de B.
    c. No es una función porque -2 tiene pre imágenes diferentes.
    d. Ninguna de las anteriores

20. Si (0,2) es una pareja ordenada, entonces se cumple que:

    a. El primer elemento pertenece al conjunto B y el segundo al conjunto A.
    b. A es el primer conjunto y B es el segundo conjunto
    c. 0 pertenece al conjunto de partida y 2 al conjunto de llegada.

d. $(0,2) = (2,0)$

21. De la expresión $y = 10 - 5x$, es correcto afirmar que

a. Es una recta cuya pendiente es -10 y corta al eje y en el punto -5.
b. Es una recta que pasa por el punto $(2,0)$.
c. Corresponde a una función lineal que es paralela a la recta $y = 5x$
d. Es una recta cuya pendiente es -5 y corta al eje y en el punto -10.

22. De la función $f(x) = -x^2 + 2x - 10$ **NO** es correcto afirmar que:

a. Su gráfica corresponde a una parábola que abre hacia abajo y tiene por vértice el punto $V = (1, -9)$.
b. Es una parábola que abre hacia arriba y tiene por vértice el punto $V = (1, -9)$
c. Su gráfica es una curva cóncava hacia abajo y que tiene un mínimo en el punto $M = (1, -9)$.
d. Su grafica corresponde a una parábola que abre hacia abajo y cuya directriz es la recta $x = 1$.

23. De la función $f(x) = -9x^2 + 12x - 4$ se puede afirmar que:

a. Tiene una raíz real de multiplicidad 2
b. Tiene dos raíces reales diferentes.
c. No tiene raíces reales
d. Ninguna de las anteriores

24. De la función $f(x) = +\sqrt{x^2 - 9}$ se puede afirmar que:

a. No está definida para ningún valor real.
b. Su dominio y rango son respectivamente $(-3,3)$ y $(0, +\infty)$.
c. 25 no pertenece al dominio de la función.
d. Su dominio y rango son respectivamente $[-3,3]$ y $(0, +\infty)$.

PREGUNTA TIPO III
Completar

1. La pendiente entre $A = (12,8)$ y $B = (5,6)$ es $m =$_______ya que __________________ ________________________________

2. La expresión $-4x + 2y = -10$ es una recta cuya pendiente es _____e intercepto es ___

3. Si en un rectángulo la altura equivale a 3 veces la longitud de la base, y si se incrementan la base en 3 cm y la altura en 5 cm el área es de 319 cm^2. Las dimensiones de dicho rectángulo son ______________________________________

4. Al simplificar la expresión $\frac{3^4 * (2 * 3^2 * 5^3)^3 * 2^5}{3^2 * (5^4 * 2^3)^2 * 3^7}$ se obtiene _________________

5. La ecuación de la recta que tiene por pendiente 3 y pasa por el punto (5,-3) es _________ _____________ ya que ____ ____

6. Las soluciones del sistema $\begin{cases} 3x - 5y = 2 \\ 4x + 2y = 9 \end{cases}$ son $x =$____, $y =$_____

7. ______ es posible encontrar algún valor de x para el cual $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ resulte negativa ya que ____

8. Al desarrollar $(3x - 2w)^2$ se obtiene ______________________________________

9. Si $f(x) = -3x^2 + 12x - 4$ entonces $f(0)$=______, $f(4)$=______, $f(-2)$=_____, $\frac{4f(0) - 3f(-2)}{f(4)} =$ _____

10. ______ es posible encontrar algún valor de x para el cual $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ adquiera un valor mayor que 40 ya que ____

11. En la expresión $a^b = c$, a recibe el nombre de __________, b se denomina ___________ y c se llama _______________

12. Las raíces de la función $f(x) = 3x^2 + 10x - 3$ son $x_1 =$ ______ y $x_2 =$ ______

13. Si la suma de dos números consecutivos es 151. Entonces el número mayor es ________ y el menor es _______

14. Si se tiene la función $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{x-2}}$ entonces su dominio es ____________________y su rango es __________________

15. La función $f(x) = -3x^2 - 12x - 4$ corresponde a una ______________________que abre hacia __________y su vértice coincide con el punto _______________

16. Si la suma de dos números es 60 y 1/9 de su diferencia equivale a 4. Entonces los números buscados son $x =$________e $y =$ ______

ANEXO No. B. REVISIÓN LIBROS DE TEXTO

Aspecto	**Texto 1**	**Texto 2**	**Texto 3**	**Texto 4**
Definición	Una función exponencial es una función de la forma $f(x) = a^x$, donde a es un número real positivo diferente de 1 y x es una variable	Se llama función exponencial a la función de la forma $y = a^x$, en donde $a \in R^+$, $a \neq 1$ y x es una variable.	Una función f definida por la ecuación $f(x) = ab^x$, con $a \neq 0$, $b > 0$ y $b \neq 1$, es una función exponencial. En la ecuación $y = ab^x$, b es el factor de crecimiento	Función exponencial es aquella que se define por medio de una ecuación de esta forma: $f(x) = b^x$, $b > 0$, $b \neq 1$, donde b es una constante, llamada base, y el exponente es x, es una variable
Representación	Caso 1. $a > 1$ Caso 2. $0 < a < 1$	Caso 1. $a > 1$ Caso 2. $0 < a < 1$	Caso 1. b>1 Caso 2. b<1	Caso 1. $b > 1$ Caso 2. $b < 1$
Propiedades	El dominio es R. El rango es $(0, +\infty)$ Como $a^0 = 1$, la función siempre pasa por el punto $(0,1)$ Como $a^1 = a$, la función siempre pasa por el punto $(1, a)$ Si $a > 1$, la función es creciente. Si $0 < a < 1$, la función es decreciente. La función es asintótica al eje x.	Al ser graficadas, todas cortan al eje y en el punto $(0,1)$ Los valores de x son números reales y los valores de y son solamente números positivos. Si $a > 1$, la función es creciente. Si $0 < a < 1$, la función es decreciente. El eje x es una asíntota para la curva que describe la función exponencial en el plano. No tiene ceros. Es decir, no tiene cortes el eje x. Como la función es creciente o decreciente, para $a > 0$, $a \neq 1$, entonces, $a^m = b^n$ si y solo si $m = n$.	El dominio de $f(x) = ab^x$ es el conjunto de todos los números reales; el recorrido es e conjunto de todos los reales positivos. Si $b > 1$, entonces $f(x) = ab^x$ es creciente. Si $b < 1$, $f(x) = ab^x$ es decreciente Si $b = 1$ entonces $y = 1$ es una función constante**.**	El dominio de f, es R, el conjunto de los números reales. El rango de f es el conjunto de los números reales positivos. $b^m = b^n$ si y sólo si $m = n$.

Tipo Ejercicios	**Rutinarios** Evaluación de funciones exponenciales Comparación entre graficas de funciones exponenciales Dada una gráfica de una función exponencial, determinar la ecuación de dicha función. **Aplicaciones** Decaimiento exponencial Crecimiento poblacional Crecimiento bacteriano	**Rutinarios** Identificar funciones exponenciales a través de sus representaciones algebraica y gráfica. Evaluar funciones exponenciales con o sin ayuda de la calculadora. Representar gráficamente en el plano cartesiano funciones exponenciales básicas A partir de la gráfica de una función exponencial, definir la tabla de valores y la ecuación de la función que la representa. **No se encontraron aplicaciones**	**Rutinarios** Identificar funciones exponenciales a través de sus representaciones algebraica y gráfica Evaluar funciones exponenciales con o sin ayuda de la calculadora. Representar gráficamente en el plano cartesiano funciones exponenciales dentro de un intervalo dado. Identificar ciertos parámetros en el modelo funcional. **Aplicaciones** Crecimiento poblacional Interés compuesto Crecimiento bacteriano	**Rutinarios** Evaluar funciones exponenciales con o sin ayuda de la calculadora. Representar gráficamente en el plano cartesiano funciones exponenciales dentro de un intervalo dado. **Aplicaciones** Interés compuesto Ciencias de la tierra Crecimiento bacteriano Desintegración radiactiva Análisis de grupos pequeños en sociología.

ANEXO NO. C. REVISIÓN PLAN DE ÁREA DE MATEMÁTICAS

Objetivos de estudio del área:

- Desarrollar las capacidades para el desarrollo del pensamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, de medidas, algebraico y variacional, así como para su utilización en la interpretación y solución de problemas de la ciencia, la tecnología y la vida.
- Utilizar el conocimiento matemático para comprender, valorar y producir informaciones sobre hechos y situaciones de la vida cotidiana y reconocer su carácter instrumental para otros campos del conocimiento.
- Apreciar, conocer, valorar y adquirir seguridad en las propias habilidades matemáticas para afrontar situaciones diversas que permitan disfrutar de los aspectos creativos estéticos o utilitarios y confiar en sus posibilidades de uso.
- Utilizar de forma adecuada los medios tecnológicos tanto en el cálculo como en otros contenidos matemáticos, así como en la búsqueda, tratamiento y representación de informaciones diversas.

Ejes problema a los que responde el estudio del área: 1. *¿Resuelve el estudiante situaciones cotidianas utilizando propiedades y conceptos matemáticos de los números reales y del álgebra?* ***2.*** *¿Aplica el estudiante los conceptos de función y relación para analizar, comprender, modelar y predecir matemáticamente situaciones de su entorno?* ***3.*** *¿Aplica el estudiante de grado noveno, conceptos de geometría, áreas y volúmenes para resolver situaciones problema de su entorno?* ***4.*** *¿Resuelve el estudiante situaciones cotidianas utilizando propiedades y conceptos matemáticos de los números reales y del álgebra?*

Núcleos de Competencias a desarrollar: Numérico, espacial, aleatorio, métrico y variacional

GRADO	***PERIODO***	***ESTANDAR***	***EJES TEMÁTICOS***	***INDICADORES DE LOGRO***	***%***
NOVENO	***I***	***1.*** Utilizo Números reales en los diferentes contextos y representaciones geométricas en la solución de problemas matemáticos y de otras disciplinas. ***2.*** Determino el grado de un polinomio, identifica términos semejantes, coeficientes y desarrollo suma, resta, multiplicación, división y factorización	***1.*** Números reales, propiedades, operaciones, representación, orden, intervalos, ecuaciones y desigualdades**.** ***2.*** Problemas de aplicación ***3.*** Expresiones algebraicas, grado, Polinomios. Adición y sustracción, multiplicación, división aplicación en diferentes contextos. ***4.*** Productos y cocientes notables,	***1.*** Reconoce y construye expresiones algebraicas, utiliza los números reales, polinomios y su factorización para resolver y formular problemas aplicando sus propiedades y aplicaciones. ***2.*** Utiliza las diferentes propiedades de potenciación y radicación en la solución de problemas. ***3.*** Reconoce los números complejos y utiliza sus propiedades	25 25

		de polinomios.	Factorización. Factor común, trinomios cuadráticos, aplicaciones de la factorización. Expresiones racionales. **5**. Números complejos	en diferentes contextos para la solución de problemas. ***4.*** Es responsable en la Puntualidad, orden y pulcritud en sus apuntes, tareas y en la entrega de trabajos, participación activa en clase, actitud positiva, interés, disposición y respeto por su trabajo y el de los demás.	25 25
	II	***1.*** Analizo e identifico características de las ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones para resolver problemas de la matemática y en otras disciplinas. ***2.*** Represento las funciones matemáticas en el plano cartesiano y determino su ecuación y modelo matemática. ***3.*** Aplico los teoremas y propiedades de la circunferencia para determinar relaciones entre secciones y segmentos de rectas secantes y tangentes.	*1.* Funciones: concepto de función, elementos de una función, representaciones de una función. *2.* Función lineal *3.* Ecuación de la recta *4.* Ecuación general de la recta. *5.* Posición relativa de dos rectas en el plano. *6.* Sistemas de ecuaciones lineales. *7.* Métodos de solución de sistemas 2 x 2 *8.* Método grafico *9.* Método de sustitución *10.* Método de igualación *11.* Método de reducción *12.* Método de determinantes. *13.* Problemas de aplicación. *14.* Métodos de solución de sistemas 3 x 3 *15.* Elementos de la circunferencia. *16.* Posiciones relativas entre una recta y	***1.*** Analiza el comportamiento de una función lineal, a partir de su representación grafica y su ecuación y utiliza el concepto de función lineal en la interpretación, la formulación y solución de problemas. ***2.*** Formula y resuelve problemas en los que intervienen sistemas de ecuaciones lineales. 3. Realiza correctamente operaciones aritméticas determinadas por las relaciones entre las longitudes de los segmentos en una circunferencia. ***4.*** Es responsable en la Puntualidad, orden y pulcritud en sus apuntes, tareas y en la entrega de trabajos, participación activa en clase, actitud positiva, interés, disposición y respeto por su trabajo y	17 17 17 17

			una circunferencia. ***17.*** Ángulos de una circunferencia.	el de los demás.	16 16
	III	1. Analizo e identifico características de las ecuaciones lineales, cuadráticas. ***2.*** Generalizo procedimientos de cálculo para encontrar áreas y volúmenes de regiones planas y el volumen de sólidos. ***3.*** Interpreto y utilizo conceptos de media, mediana y moda y explicito sus diferencias en distribuciones de distinta dispersión y asimetría.	1. Función cuadrática 2. Representación grafica de una función cuadrática. 3. Ecuación cuadrática 4. Solución de ecuaciones cuadráticas 5. Naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática. 6. Problemas de aplicación. 7. Cuerpos geométricos 8. Poliedros 9. Prisma 10. Pirámide 11 .Cuerpos redondos 12. Cilindro 13. Cono 14. Esfera 15. Medidas de tendencia central en datos no agrupados 16. Medidas de tendencia central en datos agrupados. 17Diagrama de barras y circular.	***1.*** Analiza el comportamiento de una función cuadrática a partir de su representación gráfica y su ecuación y utiliza el concepto de función cuadrática en la interpretación, formulación y solución de problemas. 2. Determina áreas y volumen de cuerpos geométricos como y figuras geométricas como el cilindro, el cono y la esfera. 3. *Utiliza conceptos de media, mediana y moda en la interpretación de diferentes situaciones de la vida cotidiana.* *4. Es responsable en la Puntualidad, orden y pulcritud en sus apuntes, tareas y en la entrega de trabajos, participación activa en clase, actitud positiva, interés, disposición y respeto por su trabajo y el de los demás.*	25 25 25 25

			18Histograma y polígonos de frecuencias.		
	IV	1. Analizo e identifico características de las ecuaciones logarítmicas y exponenciales. 2. Reconozco y construyo sucesiones aritméticas y geométricas y determino sus propiedades. 3. Reconozco la aplicación de los teoremas de Pitágoras, Thales en la solución de problemas. 4. Deduzco las relaciones trigonométricas asociadas a un triángulo rectángulo. 5. Calculo probabilidad de eventos simples usando métodos diversos (listados, diagramas de árbol, técnicas de conteo).	***1.*** Función exponencial ***2.*** Representación gráfica. ***3.*** Problemas de aplicación ***4.*** Ecuaciones exponenciales ***5.*** Función logarítmica ***6.*** Representación gráfica ***7.*** Propiedades de los logaritmos ***8.*** Ecuaciones logarítmicas ***9.*** Sucesiones, series y progresiones 10. Semejanza. Teorema de Tales. Semejanza de triángulos. 11. Razones trigonométricas. 12. Historia de la probabilidad. 13. Experimento aleatorio, espacio muestral y evento. 14. Cálculo de probabilidades.	1. Analiza el comportamiento de las funciones exponencial y logarítmica a partir de su representación gráfica y su ecuación y utiliza el concepto de función en la interpretación, formulación y solución de problemas. 2. Realiza operaciones con sucesiones y series aritméticas y geométricas. 3. Determina cuando dos figuras geométricas son semejantes y utiliza los criterios de semejanza en la solución de problemas. 4. Determina las razones trigonométricas para diferentes valores de un Angulo. 5. Calcula la probabilidad de eventos simples usando diversos métodos. 6. Es responsable en la Puntualidad, orden y pulcritud en sus	17 17 17 17 16

				apuntes, tareas y en la entrega de trabajos, participación activa en clase, actitud positiva, interés, disposición y respeto por su trabajo y el de los demás.	16

ANEXO No. D. SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 1

Deducción del modelo funcional de una situación a partir de la descripción verbal de la misma, a través de la coordinación entre los registros de representación.

Leyenda del Ajedrez

El ajedrez es un juego que fue inventado en la India y que cuenta con muchos siglos de existencia, por eso no es de extrañar que a él estén ligada gran variedad de leyendas cuya veracidad es difícil comprobar debido a la vaguedad de los documentos antiguos. Para comprenderlas no hace falta saber jugar al ajedrez, basta simplemente saber que el tablero en donde se juega está dividido en 64 casillas negras y blancas, dispuestas alternativamente. Pues bien, cuenta la leyenda que en cierta época vivió y reinó en este lugar un rey llamado Sheram, dueño de la provincia de Taligana y mencionado por varios historiadores hindúes, como uno de los monarcas más generosos y ricos de su tiempo; poseedor de una singular aptitud militar que le permitió elaborar un plan de batalla y resultar victorioso al repeler al frente de un pequeño ejército, un insólito y brutal ataque en el que perdió la vida su hijo, el príncipe Adjamir. Toda esta situación dejó a su padre profundamente consternado, pues nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un día un tal Sessa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sessa le presentó un juego que según él conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo, dicho juego era el ajedrez. Después de explicarle las reglas y entregarle un tablero con sus piezas el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado… jugó y jugó y su pena desapareció en gran parte**.** Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sessa que como recompensa pidiera lo que deseara; a este ofrecimiento Sessa respondió diciendo:

"Deseo que ponga un grano de trigo en el primer cuadro de tablero, dos, en el segundo, cuatro en el tercero, y así sucesivamente, doblando el número de granos en cada cuadro, y que me entregue la cantidad de granos de trigo resultante".

El rey bastante sorprendido con tal petición, aceptó inmediatamente creyendo que era una recompensa insignificante en comparación con todas sus riquezas. Sheram ordenó a los más sabios del reino paraqué calcularan la cantidad exacta de granos de trigo que debían entregarse a Sessa había. Cuál fue su sorpresa cuando éstos le comunicaron que no podía entregarse dicha cantidad de trigo.

Para hacerse a una idea de la inmensidad de esta cifra, calculemos aproximadamente la magnitud que debería tener el granero capaz de de almacenar semejante cantidad de trigo. Es sabido que un metro cubico de trigo contiene cerca de 15 millones de granos. En ese caso, la recompensa del inventor del ajedrez debería ocupar un volumen aproximado de 12.000.000.000.000 m^3, o lo que es lo mismo 12.000 km^3. Si el granero tuviera 4 metros de alto y 10 metros de ancho, su longitud debería ser de 300.000.000 de km, o sea el doble de la distancia que separa la tierra del sol. La producción actual de trigo del mundo entero durante doscientos años o el número de granos de arena en la playa de Copacabana, son otras medidas comparativas de dicha cifra.

Con base en la anterior información responda las siguientes preguntas:

1. Complete la Tabla No. 1 correspondiente a la cantidad de granos de trigo en las casillas señaladas.

Casilla	Granos de trigo
1	1
2	2
3	4
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	

Tabla No. 2

2. Con ayuda de GeoGebra encuentre la totalidad de cifras correspondientes al número total de granos de trigo que el rey Sheram debió haber entregado a su súbdito.

3. Utilice GeoGebra para representar en el plano cartesiano la información de la tabla del punto 1.

4. Encuentre una expresión matemática que te permita encontrar el total de granos de trigo correspondiente a una determinada casilla.

5. Resuelva la misma situación en el caso que Sessa hubiese pedido 10000 granos de trigo por la primera casilla y de ahí en adelante la mitad de granos correspondientes a la casilla inmediatamente anterior.

6. ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre las gráficas que encontraste en punto anterior y la gráfica de la situación inicial?

7. ¿Cuál es el dominio y el rango de las funciones encontradas en la pregunta 4 y 5?

ANEXO No. E. SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 2.

Identificación de propiedades de la función exponencial mediante el análisis de la información proveniente de sus diversas representaciones.

1. Con ayuda de GeoGebra construye y completa la Tabla No. 1 (Ver al final de la situación) con los valores de las funciones exponenciales, dentro del intervalo indicado.

2. Con relación a la tabla construida en el punto anterior contesta las siguientes preguntas:

   a) ¿Qué puedes observar en los valores de las funciones a medida que la base va aumentando?

   b) ¿Qué puedes observar en los valores de las funciones a medida que la base va disminuyendo?

   c) ¿Qué sucede con la función cuando la base es un valor que se encuentra entre cero y uno?

   d) ¿Qué sucede con la función cuando la base es igual a 1?

   e) ¿Existe algún punto de intersección de las funciones con respecto al eje de abscisas?

   f) ¿Existe algún punto que sea común a todas las funciones? Identifícalo.

   g) ¿Cuál es el dominio y el rango de estas funciones exponenciales?

3. En el archivo: "Gráfica Dinámica Función Exponencial", encontrarán una construcción dinámica, donde podrán observar e identificar el comportamiento de la gráfica de la función exponencial al modificar el valor de los parámetros k, a y b, en la expresión $f(x) = ka^{bx}$. Con base en dicha construcción registren sus observaciones de acuerdo a la información requerida en la Tabla No. 2 (Ver al final de la situación), **s**iguiendo las indicaciones para cada uno de los parámetros k, a y b.

4. En la anterior actividad se pudo observar los diversos comportamientos que puede tomar la gráfica de la función exponencial, al modificar los parámetros en su respectiva expresión algebraica. De acuerdo a esto relacionen los diversos casos tratados para dar respuesta a los siguientes interrogantes:

   a) ¿Qué relación existe entre el valor del parámetro k y la grafica de las funciones exponenciales que se obtienen al modificar dicho valor?

   b) ¿Qué sucede con la gráfica de la función en el caso particular en que $a = 1$ con k y b arbitrarios?

   c) ¿Qué sucede con la gráfica de la función cuando $b = 0$ y donde $a > 0$, $a \neq 1$ y k arbitrario?

   d) ¿Cree usted que las gráficas de las funciones generadas al cambiar el valor de los parámetros, cortarán siempre al eje de ordenadas? Justifique sus respuestas.

Tablas:

x	3^x	4^x	5^x	10^x	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$	$\left(\frac{1}{4}\right)^x$	$\left(\frac{1}{5}\right)^x$	$\left(\frac{1}{10}\right)^x$
-8								
-7								
-6								
-5								
-4								
-3								
-2								
-1								
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								

Tabla No. 3

Valor	$0 < a < 1$		$a > 1$	
$k > 0$ y $b > 0$	Función particular	$f(x) =$	Función particular	$f(x) =$
	Creciente/Decreciente		Creciente/Decreciente	
	Dominio		Dominio	
	Rango		Rango	
	Asíntotas		Asíntotas	
	Intercepto con el eje y		Intercepto con el eje y	
$k > 0$ y $b < 0$	Función particular	$f(x) =$	Función particular	$f(x) =$
	Creciente/Decreciente		Creciente/Decreciente	
	Dominio		Dominio	
	Rango		Rango	
	Asíntotas		Asíntotas	
	Intercepto con el eje y		Intercepto con el eje y	
$k < 0$ y $b > 0$	Función particular	$f(x) =$	Función particular	$f(x) =$
	Creciente/Decreciente		Creciente/Decreciente	
	Dominio		Dominio	
	Rango		Rango	
	Asíntotas		Asíntotas	
	Intercepto con el eje y		Intercepto con el eje y	
$k < 0$ y $b < 0$	Función particular	$f(x) =$	Función particular	$f(x) =$
	Creciente/Decreciente		Creciente/Decreciente	
	Dominio		Dominio	
	Rango		Rango	
	Asíntotas		Asíntotas	
	Intercepto con el eje y		Intercepto con el eje y	

Tabla No. 4

ANEXO No. F. SITUACIÓN DIDÁCTICA No. 3.

Deducción de características referentes a ciertas situaciones a partir de las diferentes representaciones asociadas a dicha situación.

Lea con mucha atención la situación que se presenta mediante la siguiente información:

Las Bacterias

Lavarse adecuadamente las manos antes de preparar o ingerir los alimentos, cocinar bien los productos de origen animal y evitar los lácteos no pasteurizados son algunas medidas para minimizar el riesgo de transmisión de la Escherichiacoli (E. coli) que es una bacteria capaz de causar importantes alteraciones. La E. coli es una bacteria albergada normalmente en el intestino del ser humano y de otros animales. Entre la variedad de cepas de esta bacteria, la mayoría son inofensivos y en realidad representan una parte considerable del contenido intestinal de una persona sana. Pues bien, aunque no parece que su presencia tenga una función especialmente relevante, se ha descrito que la bacteria E. coli favorece la absorción de algunas vitaminas, especialmente la vitamina K. En un laboratorio se realizó un experimento con una población inicial de bacterias E. Coli para estudiar su crecimiento y se pudo comprobar que una temperatura de 37^0C, la cantidad de bacterias está dado por la expresión $y = 25 * (\frac{5^x}{2})$, donde t está dado en horas. Según la anterior información responda las siguientes preguntas:

1. Cuántas bacterias había inicialmente?
2. ¿Cuántas bacterias habrán cuando hayan transcurrido 7 horas y media desde que se inició la reproducción?
3. ¿Cuánto tiempo habrá transcurrido cuando la población de bacterias sea de 20000 bacterias?

Lea con mucha atención la siguiente información:

El Alcoholismo

Las bebidas alcohólicas contienen porcentajes variables de alcohol en peso, según indica su etiqueta: las cervezas, del 4% al 10%; los vinos, del 10% al 18%; los aperitivos y licores suaves, del 20% al 25%; y los licores fuertes, del 35% al 45% (es decir, 100 ml de whisky contienen aproximadamente 40 gramos de etanol). Una vez ingerido el alcohol pasa a la circulación sanguínea. Su absorción se realiza sobre todo a nivel del intestino delgado y es mayor cuando la persona está en ayunas.

El sábado pasado Juan volvía de una fiesta; en el camino fue interceptado por policías de tránsito quienes le hicieron una prueba de alcoholemia. La prueba dio como resultado 160 mg de etanol/ 100 ml de sangre. Si suponemos que cada hora se elimina un 30% de alcohol en sangre resuelve las siguientes preguntas:

4. ¿Cuántos mg de etanol/100 ml de sangre permanecerán en el organismo de Juan después de las 4 primeras horas de tomarse el examen de alcoholemia? Registre sus resultados en la Tabla No. 1, utilizando tres decimales.

5. ¿Cuánto tardará en descender la cantidad de alcohol por debajo de los 20 mg de etanol/ 100 ml de sangre que es el límite permitido para conducir?

6. Utilice GeoGebra para representar en el plano cartesiano la información de la tabla obtenida en el punto 4. Para esto, considere al tiempo como variable independiente y al nivel de alcohol en la sangre como variable dependiente.

7. Determine una expresión que te permita calcular la cantidad de mg de etanol/100 ml de sangre en el organismo después de t horas.

8. Con ayuda de GeoGebra grafique la ecuación obtenida en el punto anterior y emplee la gráfica para determinar el valor exacto de horas necesarias para descender la cantidad de alcohol por debajo de los 20 mg de etanol/ 100 ml de sangre.

ANEXO G.FOTOGRAFÍAS E ILUSTRACIONES

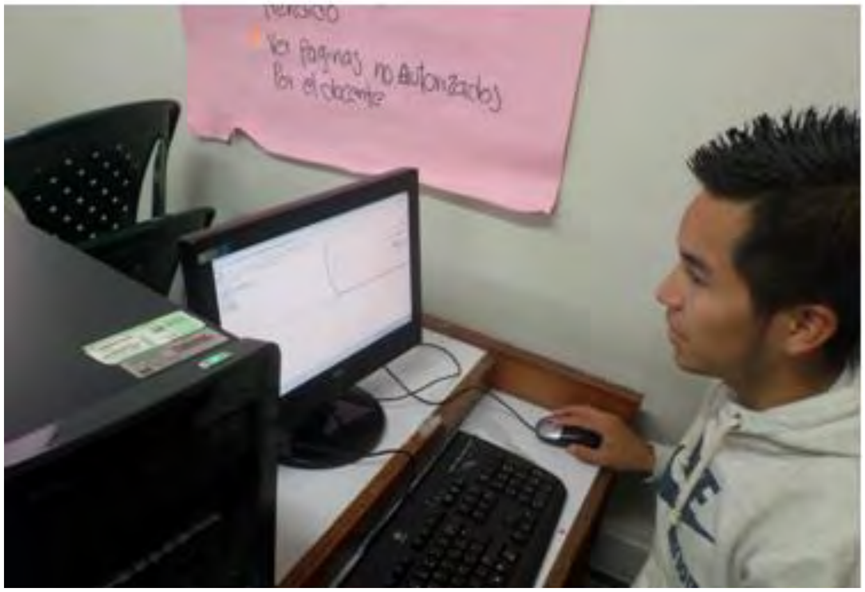
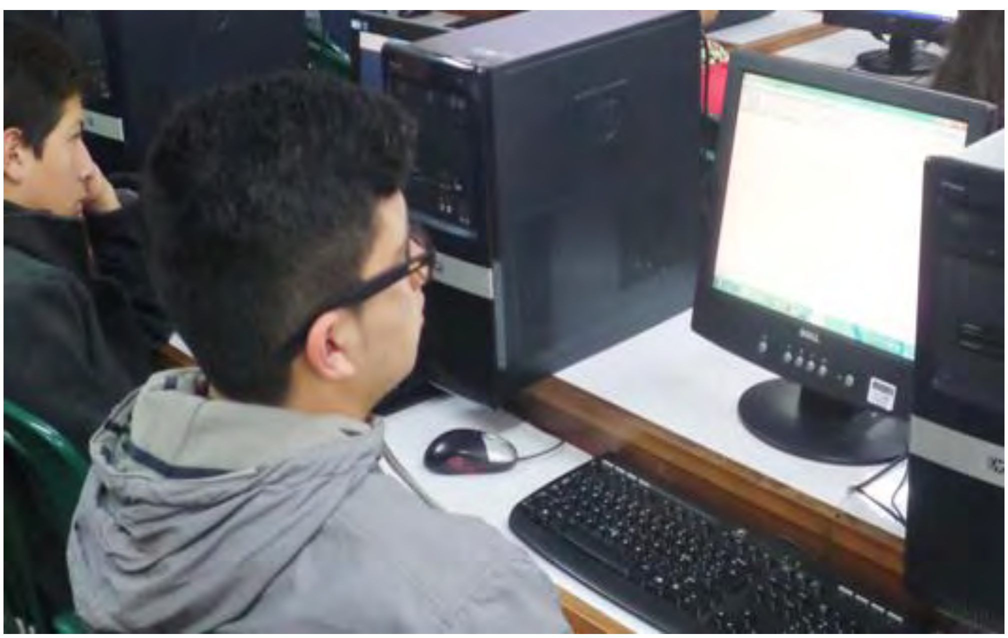


Figura No. 2. Miguel resolviendo la Situación Didáctica No. 2.



igura No. 3. Oscar y Daniel trabajando en la Situacion Didáctica No. 1

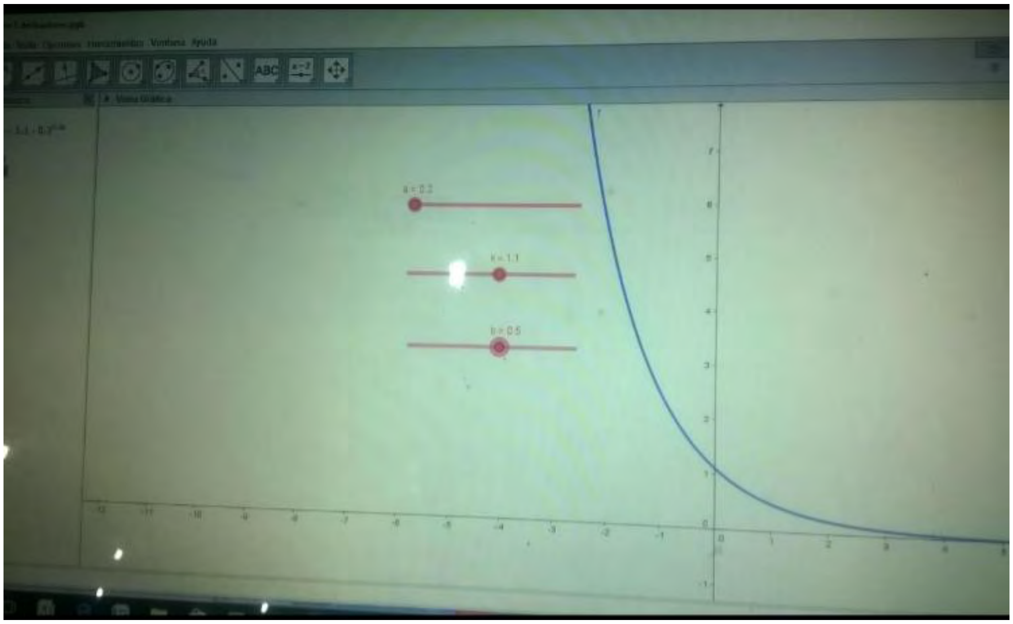


Figura No. 4. Construcción dinámica elaborada para la Situación Didáctica No.3.

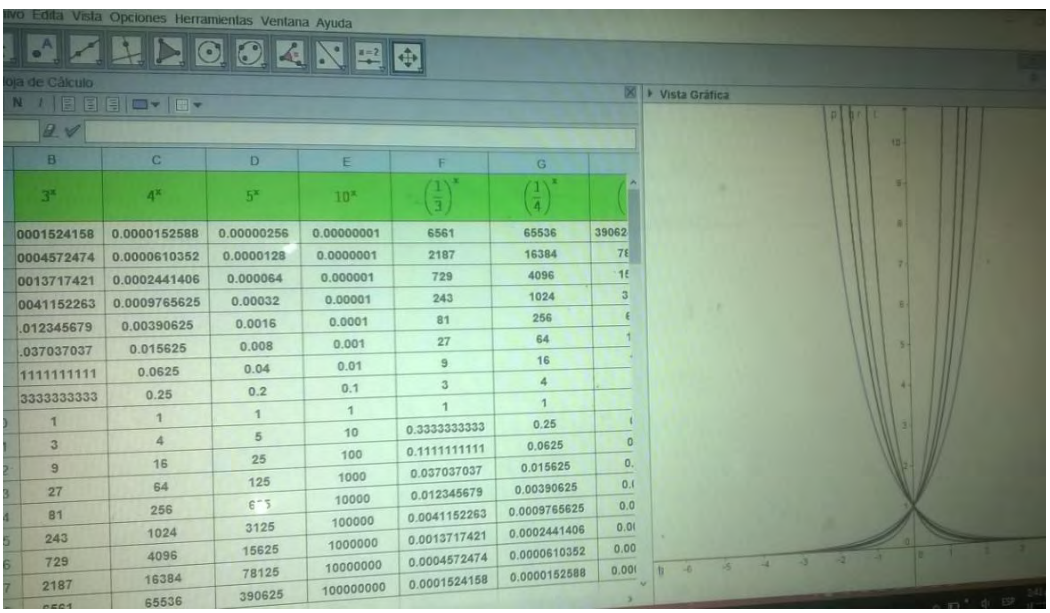


Figura No. 5. Relación entre los diferentes registros de la función exponencial en la Situación Didáctica No.2.