

**GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE NEWTON Y SUS
APLICACIONES**

JUNETH ANDREA TERÁN TARAPUES

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO**

2018

**GENERALIZACIÓN DEL MÉTODO DE NEWTON Y SUS
APLICACIONES**

JUNETH ANDREA TERÁN TARAPUES

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Asesora

Catalina María Rúa Alvarez
Doctora en Matemática Aplicada

Co-asesor

Saulo Mosquera López
Magister en Matemáticas

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO**

2018

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva del autor.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Catalina María Rúa Alvarez

Directora de Tesis

Saulo Mosquera López

Co-Director de Tesis

Priscila Cardoso Calegari

Jurado

Oscar Fernando Soto Agreda

Jurado

San Juan de Pasto, 13 de marzo de 2018

Este trabajo está dedicado:

*A mis padres, Roberth Terán y Lucia Tarapues,
la vida no me alcanzará para agradecerles su apoyo incondicional.*

*A mi abuelo, Cornelio Terán,
hubieras sido el más orgulloso al verme cumplir esta meta.*

Andrea

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecerle a Dios por la oportunidad de estudiar y por haberme rodeado de tantas personas que siempre han creído en mi y que me han brindado su apoyo incondicional.

Agradezco a mis padres y mi hermana porque han sido mi fuerza y principal motivación durante estos cinco años de carrera universitaria, nada de lo que he logrado hubiese sido posible sin su amor y apoyo. A mi familia por sus buenos deseos y consejos en cada meta que me he propuesto.

Asimismo quiero agradecerle a mi asesora, Dra. Catalina Rua, por su dedicación, recomendaciones y en especial por su paciencia. Por mostrarme que todo cuanto me he propuesto es posible y por siempre tener para mi una mano amiga. Profe las palabras nunca serán suficientes para expresarle mi agradecimiento.

Gracias a los docentes y administrativos del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, en especial al Mg. Saulo Mosquera, al Dr. Andres Chaves, al Dr. John Castillo y a la Srta. Lucy Aguilera por toda su colaboración y aprecio.

A la Vicerrectoria de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales de la Universidad de Nariño por creer en este trabajo y apoyar la investigación estudiantil dentro de la Universidad. Gracias por todo su respaldo y acompañamiento.

Del mismo modo agradezco a todas las personas que conocí durante este tiempo por haberme permitido compartir con ustedes tantos momentos. A Viviana, Angie, Marisol, Jacki, Jhony y Daniel por ofrecerme su amistad y cariño.

A Juan Sebastian gracias por tu complicidad, comprensión y por tanta paciencia.

Finalmente a todos quienes han hecho parte de este sueño gracias totales.

Abue, esta va por ti.

Resumen

La modelación matemática y solución discreta de una gran variedad de aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia, presenta en muchos casos la necesidad de solución de sistemas de ecuaciones no lineales. Dado que en general no es posible encontrar la solución de una ecuación no lineal directamente por medio de fórmulas o procesos matemáticos fijos, se deben aplicar métodos numéricos que aproximen estos valores.

El método de Newton es un método iterativo para aproximar soluciones de ecuaciones no lineales e incluso sistemas de ecuaciones no lineales y ecuaciones de variable compleja. Este método es frecuentemente usado por investigadores de diferentes áreas debido a su versatilidad, simplicidad, velocidad de convergencia y variabilidad. El campo por estudiar sobre el método de Newton y sus aplicaciones es amplio y aunque es muy antiguo, aún tiene diferentes aspectos por ser investigados.

En este trabajo, se presenta la recopilación teórica y los resultados obtenidos durante la realización del proyecto de investigación estudiantil “Generalización del método de Newton y sus aplicaciones”. En el cual se estudió a partir del caso bidimensional la generalización a varias variables del método de Newton, lo que conllevó a realizar aproximaciones de raíces complejas que permitieron generar aplicaciones con fractales. También se muestra el algoritmo del método de Newton para solucionar sistemas no lineales de n ecuaciones con n incógnitas y las dificultades que este algoritmo tiene al llevarlo a la práctica. Diferentes resultados numéricos obtenidos a partir de implementaciones en lenguaje C y MATLAB, elaboradas durante el desarrollo del proyecto, se encuentran entre los resultados.

Palabras clave: Método de Newton, ecuaciones de variable compleja, sistemas de ecuaciones no lineales, problema de Cayley, fractales.

Abstract

Solution of nonlinear equations systems is needed for the mathematical modeling and discrete solution of a great variety of applications in different areas of science. Since in general to find the solution of a nonlinear equation with formulas or fixed mathematical processes is not possible and numerical methods that approximate these values could be applied.

Newton's method is an iterative method to approximate solutions of nonlinear equations, it can be extended to nonlinear equations systems and even complex variable equations. This method is frequently used by researchers of different areas due to its versatility, simplicity, speed of convergence and variability. The field to study about Newton's method and its applications is wide and there are still exist aspects for be investigated.

In this work, the theoretical compilation and the results obtained during the realization of the student research project "Generalization of Newton's method and its applications" are presented. In which the generalization to more variables of Newton's method was studied from the two-dimensional case, which led to realize complex root approximations that allowed generating applications with fractals. Also, the algorithm of Newton's method to solve nonlinear systems of n equations with n unknowns and the difficulty of this in practice is shown. The numerical results generated by implementation in C programming language and MATLAB are between the results.

Key words: Newton's method, complex variable equations, nonlinear systems equations, Cayley's problem, fractals.

Índice general

Lista de figuras	IX
Lista de tablas	X
Lista de algoritmos	XI
Notación	XII
Introducción	XIV
1. Aproximación de ecuaciones no lineales	1
1.1. Métodos iterativos.	1
1.2. Método del punto fijo.	4
1.3. Método de Newton real.	11
1.4. Método de Newton en el plano complejo.	19
2. Aproximación de sistemas de ecuaciones no lineales	25
2.1. Método de Newton para aproximación de sistemas 2×2	25
2.2. Método de Newton para aproximación de sistemas $n \times n$	32
2.3. Modificaciones al método de Newton generalizado.	36
2.3.1. Modificación con el método de Jacobi	37
2.3.2. Modificación con el método de Gauss Seidel	39
3. Resultados numéricos	40
3.1. Validación de implementaciones	40
3.1.1. Método de Newton y método del punto fijo	40
3.1.2. Método de Newton y raíces complejas	43
3.1.3. Método de Newton y la equivalencia topológica entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{C}	44
3.1.4. Método de Newton y los métodos de Newton modificados	47
3.2. Aplicación: El problema de Cayley	49
3.2.1. Conceptos básicos de dinámica compleja.	49
3.2.2. Antecedentes del problema de Cayley	51
3.2.3. Problema de Cayley en el plano complejo.	52
3.2.4. Problema de Cayley en el plano real.	54
3.2.5. Fractales.	56

Discusión	63
Recomendaciones	65
Conclusiones	66
Apéndice	71
A.1. Implementaciones en Dev C++ y MATLAB	71
A.1.1. Método del punto fijo.	71
A.1.2. Método de Newton para funciones de variable real.	72
A.1.3. Método de Newton para funciones de variable compleja.	74
A.1.4. Método de Newton para sistemas 2×2	75
A.1.5. Problema de Cayley.	77
A.2. Actividades generadas a partir del proyecto.	77
Referencias	80

Índice de figuras

1.1. Incisos a , b y c de la interpretación geométrica del método de Newton.	11
1.2. Interpretación geométrica del método de Newton.	12
2.1. Incisos a y b de la interpretación geométrica del método de Newton para sistemas 2×2	26
2.2. Interpretación geométrica del método de Newton para sistemas 2×2	27
2.3. Gráfico asociado al sistema no lineal 2×2	30
3.1. Cuencas de atracción del polinomio $f(z) = z^2 + 1$	51
3.2. Comportamiento atractor de la raíz real $x^* = 1$ para el problema de Cayley.	57
3.3. Subdivisión del plano complejo.	58
3.4. Cuencas de atracción de las tres raíces de $z^3 - 1 = 0$ para el problema de Cayley.	58
3.5. Conjunto de Julia para el problema de Cayley.	59
3.6. Cuencas de atracción de las raíces de $z^4 - 1 = 0$ para el problema de Cayley.	60
3.7. Cuencas de atracción de las raíces de $z^5 - 1 = 0$ para el problema de Cayley.	60
3.8. Cuencas de atracción de las raíces de $f(z) = me^z - 1 = 0$ para el problema de Cayley.	61

Índice de tablas

1.1. Iteración del método del punto fijo para g_1 con $x_0 = 6$	7
1.2. Iteración del método del punto fijo para g_2 con $x_0 = 6$	8
1.3. Iteración del método de Newton con diferentes x_0	17
1.4. Iteración del método de Newton con $z_0 = \frac{1}{2} + 2i$	21
1.5. Potencia de números complejos en el método de Newton.	23
1.6. Fórmula D'Moivre en el método de Newton.	23
2.1. Iteración del método de Newton con $(x_0, y_0) = (2, 1)$	31
2.2. Iteración del método de Newton con $(x_0, y_0) = (2, -1)$	31
3.1. Iteración del método del punto fijo con $x_0 = 1.9$	42
3.2. Iteración del método del punto fijo con $x_0 = 1.9$	42
3.3. Iteración del método de Newton con $z_0 = i$	44
3.4. Iteración del método de Newton con $z_0 = -i$	44
3.5. Iteraciones del método de Newton complejo para ciertas aproximaciones iniciales.	44
3.6. Iteración del método de Newton para sistemas con $(x_0, y_0) = (0.2, -0.6)$	46
3.7. Iteración del método de Newton para sistemas con $(x_0, y_0) = (0.2, 0.6)$	46
3.8. Iteraciones del método de Newton complejo.	47
3.9. Iteraciones del método de Newton modificado con método de Jacobi.	48
3.10. Iteraciones del método de Newton modificado con método de Gauss-Seidel.	48
3.11. Comparación de aproximaciones obtenidas a partir de $\vec{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$	49
3.12. Aproximación a la raíz z_1^* del problema de Cayley con $z_0 = 0.88 + 0.88i$	52
3.13. Aproximación a la raíz z_2^* del problema de Cayley con $z_0 = 0.5 + 0.5i$	53
3.14. Aproximación a la raíz z_3^* del problema de Cayley con $z_0 = 0.5 - 0.5i$	53
3.15. Aproximación a la raíz \vec{x}_1^* del problema de Cayley con $(x_0, y_0) = (0.88, 0.88)$	55
3.16. Aproximación a la raíz \vec{x}_2^* del problema de Cayley con $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$	55
3.17. Aproximación a la raíz \vec{x}_3^* del problema de Cayley con $(x_0, y_0) = (0.5, -0.5)$	55

Índice de algoritmos

1.	Método del punto fijo.	4
2.	Método de Newton.	13
3.	Método de Newton para sistemas 2×2	29
4.	Método de Newton para sistemas $n \times n$	36

Notación

Métodos iterativos.

e_a	Error absoluto.
e_r	Error relativo.
e_i	Error en la i -ésima iteración.
K	Constante de error asintótico.
TOL	Tolerancia.
$ITMAX$	Número máximo de iteraciones.

Ecuaciones no lineales.

x^*	Raíz de una ecuación no lineal.
x_0	Aproximación inicial.
x_i	Aproximación en la i -ésima iteración.

Ecuaciones de variable compleja.

z^*	Raíz de una ecuación no lineal.
z_0	Aproximación inicial.
z_i	Aproximación en la i -ésima iteración.
f_r	Función real de una función compleja.
f_i	Función imaginaria de una función compleja.

Sistemas de ecuaciones no lineales.

\vec{x}^*	Solución del sistema no lineal.
$\vec{x}^{(0)}$	Aproximación inicial.
$\vec{x}^{(i)}$	Aproximación en la i -ésima iteración
JF	Matriz Jacobiana.
$\det(JF)$	Determinante de la matriz Jacobiana (Jacobino).
JF^{-1}	Matriz inversa de la matriz Jacobiana.
DJF	Matriz Diagonal de JF .
LJF	Matriz triangular inferior de JF .

Dinámica compleja.

$R(z)$	Función racional compleja.
λ	Multiplicador asociado a $R(z)$ para puntos fijos.
τ	Multiplicador asociado a $R(z)$ para puntos periódicos.
$orb_R^+(z_0)$	Órbitas de z_0 a través de $R(z)$.

$A(\bar{z})$	Cuenca de atracción de \bar{z} .
$J(f)$	Conjunto de Julia de la función f .
$cl(B)$	Clausura del conjunto B .
N_f	Función de iteración del método de Newton.
N_{fz}	Función de iteración del método de Newton complejo.

Introducción

Una gran variedad de aplicaciones en diferentes áreas de la ciencia, exigen en su modelación matemática la necesidad de solución de ecuaciones no lineales para la obtención de un resultado específico. Debido a que encontrar la solución exacta de este tipo de ecuaciones no suele ser fácil, se debe recurrir a usar métodos numéricos que aproximen el valor de la solución deseada.

Dentro de los métodos numéricos para aproximar soluciones de ecuaciones no lineales, como se puede ver en [7, 12] y [18], se encuentran el método de bisección, el método del punto fijo, el método de Newton y el método de la secante. El método de Newton destaca, de entre los demás métodos mencionados, por su facilidad de manejo, variabilidad y por contar con convergencia cuadrática, lo que permite obtener una aproximación con la precisión deseada usando menos pasos al compararse con otros métodos. Para aproximar una raíz de una función no lineal a través del método de Newton, partiendo de una aproximación inicial, se construye una sucesión de aproximaciones, mediante un algoritmo que implica conocer el valor de la derivada de la función no lineal y bajo ciertas condiciones que hacen que dicha sucesión converja a la solución. En la práctica la necesidad del cálculo de la derivada es una de las desventajas que tiene este método, por lo cual se procede realizando aproximaciones de ella, de donde se derivan otros métodos como el método de la secante.

El método de Newton aparece por primera vez en 1669 en una carta de Newton a Barrow y Collins, denominada *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* y la primera versión donde se menciona el método es en 1685, en el *Algebra* de Wallis. De ahí en adelante se adelantaron varios trabajos con respecto a la convergencia y escogencia de una aproximación inicial como los de Fourier, quien fue el primero en analizar la velocidad de convergencia del método de Newton; y los de Cauchy, quien buscó características de convergencia global para el método y consiguió garantizar la convergencia del método con condiciones sobre la aproximación inicial y la derivada de la función, como se puede ver en [10] y [14].

La variabilidad del método de Newton radica en que se puede extender para aproximar la solución de ecuaciones no lineales de variable compleja y también para aproximar la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. Los pioneros en estos trabajos fueron Schoroder y Cayley en 1870 y 1879 respectivamente, quienes desarrollaron un problema conocido como *el problema de Cayley* que implica el estudio de la dinámica del método de Newton para aproximar soluciones de ecuaciones de variable compleja, ver [16]. En 1916 Fine y Bennet, ambos profesores de la universidad de Princeton, publicaron cada uno artículos que relacionaban el método de Newton con sistemas de ecuaciones no lineales, dando paso al estudio del método de Newton para sistemas al incluir el uso de conceptos como derivadas parciales, matriz jacobiana, matriz inversa, entre otros. Ver [13, 15] y [14].

Una de las dificultades de la generalización del método de Newton a sistemas de ecuaciones no lineales es el cálculo de la inversa de la matriz jacobiana. En vista de esto, en la actualidad se han desarrollado modificaciones de este método, donde en algunas de ellas se usan métodos de aproximación para el cálculo de inversas de matrices y en otras, se hacen aproximaciones a la matriz jacobiana. Aunque al realizarse estas modificaciones al método de Newton se puede perder la convergencia cuadrática, en la actualidad son muy usadas y se resaltan el método de Newton modificado con Jacobi y con Gauss Seidel, además de los métodos Cuasi-Newton. Sobre variaciones a este método, se puede ampliar en [2, 5] y [15].

El desarrollo de esta tesis resulta a partir de la aprobación del proyecto de investigación “Generalización del método de Newton y sus aplicaciones” en la “Convocatoria de Investigación Estudiantil y el Concurso de Trabajos de Grado” del año 2015, financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones, Postgrados y Relaciones Internacionales. Aprobado mediante Acuerdo No. 071 del 8 de abril de 2016, para el cual se concedió prórroga con Resolución No. 1487 del 25 de julio de 2017 y finalizó mediante Acuerdo No. 03 del 31 de enero de 2018. En dicho proyecto de investigación se presentó un informe final que contenía marco referencial, resultados numéricos y aplicaciones, y resultados con respecto a la participación en eventos y a la publicación de artículos, ver Apéndice A.2.

En este trabajo, inicialmente se hace un estudio teórico del método de Newton para aproximar la solución de ecuaciones no lineales. A partir de este se desarrolla la implementación del método de Newton y se aplica para aproximar la solución de ecuaciones de variable compleja, al trabajar de forma independiente la parte real de la imaginaria. Gracias a la equivalencia topológica del plano real con el plano complejo, se considera el desarrollo del problema de Cayley en el plano real y para ello se estudia el método de Newton para aproximar la solución de un sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas, con lo cual se generan figuras fractales. Seguidamente, se presenta la generalización del método de Newton para sistemas de n ecuaciones no lineales con n incógnitas, donde se resaltan las dificultades que tiene esta generalización en la práctica y algunas de las modificaciones que se realizan en la literatura al método de Newton para superar estas dificultades.

En el desarrollo de este trabajo, también se muestran resultados numéricos de la aplicación del método de Newton tanto para aproximar soluciones reales y complejas de ecuaciones no lineales, como para aproximar soluciones de sistemas de ecuaciones no lineales con los cuales se verifica la eficiencia, convergencia y variabilidad del método, e incluso se muestran comparaciones sobre el número de iteraciones, orden de convergencia, variación de condiciones iniciales y aproximaciones a partir de el método de Newton modificado con los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel. Además, en el apéndice A.1, se incluyen algunas de las implementaciones realizadas usando lenguaje C y MATLAB.

Con el fin de lograr los objetivos propuestos, este trabajo está organizado en tres capítulos de la siguiente manera. En el Capítulo 1 se describen características de los métodos iterativos y se describen dos de ellos el método del punto fijo y el método de Newton, donde para este último se exhibe su extensión para funciones de variable compleja. Luego en el Capítulo 2, se hace una introducción a la generalización del método de Newton para sistemas no lineales $n \times n$ partiendo del caso bidimensional y se presentan dos modificaciones de esta generalización: el método de Jacobi y el método de Gauss-Seidel. Luego, en el Capítulo 3, se muestran algunos resultados se trabajan

algunos problemas que verifican las propiedades numéricas del método de Newton, el problema de Cayley en el plano complejo y en el plano real, y su aplicación al campo de los fractales. Finalmente, se incluyen secciones en referencia a los requerimientos de conclusión del proyecto de investigación estudiantil, como son discusión, recomendaciones y conclusiones.

Capítulo 1

Aproximación de ecuaciones no lineales

Para encontrar de manera exacta una raíz de una función lineal o cuadrática se procede a utilizar ciertas estrategias aritméticas como despejar, factorizar o incluso el uso de la fórmula cuadrática. Sin embargo, determinar la raíz de otras funciones no lineales no tienen un proceso analítico tan directo e incluso podría no tenerlo, por lo cual es conveniente aproximar estas raíces mediante el uso de métodos numéricos. Entre los métodos numéricos más conocidos para aproximar raíces de ecuaciones no lineales están el método de bisección, el método del punto fijo, el método de Newton, el método de la secante, entre otros que se pueden ver en [2, 7, 12] y [9].

A continuación se presentan algunas propiedades de los métodos iterativos, los cuales son métodos numéricos que dependen de iteraciones o repeticiones de procesos, para aproximar la solución de un problema específico. También se estudia la aproximación a la raíz de una ecuación no lineal a través del método del punto fijo y del método de Newton, y como estos dos se relacionan por medio de propiedades teóricas y teoremas. Además, en este capítulo, también se incluyen conceptos básicos como el de error numérico, los criterios de parada, el orden de convergencia, entre otros. Los teoremas y definiciones que se muestran fueron tomados de [2, 7, 9, 14] y [18].

1.1. Métodos iterativos.

Para aproximar las raíces de una función real no lineal $f(x)$, es decir, para determinar un valor $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $f(x^*) = 0$, se puede recurrir al uso de métodos numéricos. Debido a esto, es importante caracterizarlos en general antes de describir por separado los métodos de interés.

Los métodos numéricos que se presentan en este capítulo dependen de repeticiones o pasos sucesivos,

conocidos como iteraciones, que aproximan un problema de interés partiendo de una condición inicial. Como se puede ver en [2] y [9], estos tienen la siguiente forma:

1. Se escoge una aproximación inicial x_0 (o un intervalo $[a, b]$).
2. Se calculan aproximaciones sucesivas x_k , que usualmente dependen de la aproximación inmediatamente anterior.
3. Cuando se cumpla con una o varias condiciones deseadas, se elige un x_k como aproximación de la raíz x^* .

El valor x_k que se obtiene al seguir el proceso descrito en los tres pasos anteriores es una aproximación de la raíz x^* en la k -ésima iteración y la diferencia entre la solución exacta y la aproximación se denomina *error numérico*. El error numérico se puede generar por la aproximación teórica del método, por la cantidad de iteraciones que se decide realizar del método a través de un criterio de parada o por la precisión finita de las computadoras. Las siguientes definiciones indican dos formas diferentes de calcular este error, las cuales se usan según el interés de precisión deseado.

Definición 1.1. Si x es una aproximación para un valor x^* , se define el *error absoluto* como el valor absoluto de la diferencia entre la aproximación y el valor exacto esperado. Es decir que el error absoluto, denotado por e_a está dado por

$$e_a = |x - x^*|.$$

Definición 1.2. Si x es un aproximación para un valor x^* , se define el *error relativo* como el cociente entre el error absoluto y el valor absoluto del valor exacto esperado. Es decir que el error relativo, denotado por e_r está dado por

$$e_r = \frac{|x - x^*|}{|x^*|}.$$

Se denotará con e_i al error producido en la iteración i , es así como $e_i = |x_i - x^*|$. Sin embargo en la aproximación de raíces, el cálculo de este error y los descritos en las definiciones 1.1 y 1.2, implica conocer el valor exacto de la raíz x^* el cual en la práctica normalmente es desconocido y por esta razón, es necesario hacer una aproximación del error. Debido a que se espera que al aumentar las iteraciones la aproximación sea cada vez más precisa, en este trabajo la aproximación de este error se hace tomando como el valor exacto x^* a la aproximación en la mayor iteración con la que se cuenta. De donde una aproximación para el error absoluto en la i -ésima iteración está dada por

$$e_i \approx |x_i - x_{i+1}|, \quad (1.1.1)$$

donde x_i es la aproximación de x^* en la iteración i .

Al momento de implementar un método iterativo es importante definir criterios de parada para evitar caer en ciclos o bucles infinitos. Un criterio de parada muy usual es fijar la precisión del error en cada iteración de forma que no sea mayor a una tolerancia, TOL , la cual debe ser tan cercana a cero como se desee, teniendo en cuenta que usualmente el cero computacional en precisión doble es del orden de 10^{-16} .

Se espera que sin importar el valor inicial dado, el error de un método iterativo convergente disminuya con el aumento de iteraciones. Sin embargo, esta condición no se cumple siempre por lo cual se hace necesario estudiar las condiciones que garantizan la convergencia de cada método y controlar el número máximo de iteraciones, $ITMAX$. Incluso adicional a esto, algunos autores también verifican entre cada par de iteraciones que las aproximaciones no estén aumentando significativamente, pues si esto sucede se concluye divergencia. En este trabajo se usa como criterio de parada la verificación de la precisión deseada, al comparar el error absoluto por iteración en (1.1.1) con la tolerancia TOL , y además se verifica que no se exceda el número máximo de iteraciones $ITMAX$.

Definición 1.3. Un método iterativo se dice que es *localmente convergente*, si la convergencia se garantiza para aproximaciones iniciales lo suficientemente cercanas al valor de la raíz exacta x^* .

La Definición 1.3 implica que un método iterativo es localmente convergente, si existe un $\delta > 0$ tal que la convergencia únicamente se garantiza para cualquier valor inicial x_0 en el intervalo $(x^* - \delta, x^* + \delta)$. En la práctica la convergencia local no es muy conveniente, dado que no se tienen condiciones sobre el valor δ y tomar un valor x_0 cercano a x^* , sería una aproximación de la raíz.

La siguiente definición permite conocer la rapidez con la cual un método iterativo converge, es decir, que tan rápido disminuye el error a medida que aumentan las iteraciones.

Definición 1.4. Supongamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ y que $x_k \neq x^*$ para todo k . Se dice que la sucesión $\{x_k\}$ converge a x^* con *orden de convergencia* q si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^q} = K, \quad (1.1.2)$$

para alguna constante positiva K denominada *constante de error asintótica*.

Observación 1.1. Cuando en la Ecuación (1.1.2) $q = 1$, se dice que la sucesión $\{x_k\}$ converge *linealmente* y cuando $q = 2$, la sucesión $\{x_k\}$ converge *cuadráticamente*. Una sucesión con alto orden de convergencia aproxima el valor de x^* en menos iteraciones que una con orden menor.

Observación 1.2. La definición de orden de convergencia también se presenta usando el error absoluto e_k , de donde la Ecuación (1.1.2) es equivalente a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}}{(e_k)^q} = K. \quad (1.1.3)$$

A continuación se presentan dos métodos iterativos para aproximar raíces de ecuaciones no lineales: el método del punto fijo y el método de Newton. En primer lugar se introduce el método del punto fijo como base para deducir el método de Newton.

1.2. Método del punto fijo.

El método del punto fijo para aproximar las raíces de una ecuación no lineal $f(x) = 0$ considera, en primer lugar la definición de punto fijo por ello es necesario presentar primero esta definición. Los fundamentos teóricos que garantizan las condiciones para su convergencia se pueden encontrar en diversos textos de análisis numérico tales como [2, 9] y [18]. En esta sección se describe el método y sus propiedades.

Definición 1.5. Una función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un *punto fijo* en un intervalo $[a, b]$ si existe por lo menos un $x \in [a, b]$ tal que $g(x) = x$.

Así como es importante determinar las raíces de una función no lineal, también es importante determinar los valores $x \in [a, b]$ que son puntos fijos de una función g en dicho intervalo. Para aproximar el punto fijo se escoge una aproximación inicial x_0 y se genera una sucesión $\{x_k\}$ a partir de la iteración

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad (1.2.1)$$

que se conoce como la *iteración del método de punto fijo*.

Teniendo en cuenta la Ecuación (1.2.1) se organiza el algoritmo del método del punto fijo, dado en el Algoritmo 1.

Entrada: x_0 ; TOL ; $ITMAX$.

Salida: Solución aproximada x_i o mensaje de error.

Inicio

| $i = 0$

| **Hacer**

| | $x_{i+1} = g(x_i)$

| | $i = i + 1$

| **Mientras** $|x_i - x_{i-1}| > TOL$ e $i \leq ITMAX$;

| **Si** $i > ITMAX$ **entonces**

| | Salida: "El método fracasó"

| **Si no**

| | Salida: x_i

| **Fin**

Fin

Algoritmo 1: Método del punto fijo.

Como se mencionó en la sección anterior, al momento de implementar un método iterativo se deben definir criterios de parada para evitar caer en ciclos infinitos. En el Algoritmo 1 la iteración se lleva a cabo siempre que por iteración el error no haya alcanzado la precisión deseada TOL y no se sobrepase el número máximo de iteraciones $ITMAX$.

Para relacionar el problema de aproximar una raíz de una función f con el problema de determinar un punto fijo de una función g se considera la ecuación

$$x = x - \alpha f(x), \quad (1.2.2)$$

donde α puede ser un valor real o bien una función que dependa de x . Al tomar $g(x) = x - \alpha f(x)$, se observa que al sustituir la raíz x^* de f en la función $g(x)$, se obtiene

$$g(x^*) = x^* - f(x^*) = x^* - 0 = x^*,$$

es decir que x^* también es un punto fijo de g . De lo anterior, resolver el problema del punto fijo (1.2.2), dado por $x = g(x)$, es equivalente a determinar la raíz de la ecuación no lineal $f(x) = 0$.

Para el método del punto fijo es importante asegurar que el punto fijo existe y es único. El siguiente teorema da condiciones suficientes (pero no necesarias) para la existencia y unicidad del punto fijo en un intervalo y además da condiciones para garantizar la convergencia del método del punto fijo.

Teorema 1.1. *Sea $g \in C[a, b]$, es decir, g es continua en $[a, b]$.*

- a) *Si $g(x) \in [a, b]$ para todo $x \in [a, b]$, entonces g tiene un punto fijo x^* en $[a, b]$.*
- b) *Si $g'(x)$ está definida en (a, b) y existe una constante positiva $k < 1$ tal que*

$$|g'(x)| \leq k \quad \text{para todo } x \in (a, b),$$

entonces el punto fijo x^ es único.*

- c) *Si se cumplen las condiciones de los incisos a y b, entonces para cualquier $x_0 \in [a, b]$ la sucesión definida por $x_{k+1} = g(x_k)$ para $k \geq 0$ converge al único punto fijo x^* .*

Para probar la existencia del punto fijo en el intervalo $[a, b]$ se utiliza el teorema del valor intermedio, la unicidad se demuestra considerando el contrareciproco del inciso b y para la parte c se procede por inducción probando que la iteración del método del punto fijo converge en el intervalo. De forma intuitiva en este teorema la continuidad y el hecho de que el rango de g esté en $[a, b]$ obliga a que la función g , debe cruzar por lo menos una vez a la recta $y = x$ y por tal motivo existe al menos un punto fijo. La demostración de este teorema se puede ver en [2].

La importancia de este teorema radica en que garantiza que el método del punto fijo, bajo ciertas condiciones sobre un intervalo donde g y g' están definidas, converge hacia un punto fijo que es único en dicho intervalo, sin depender de la escogencia de x_0 . Sin embargo, hay puntos fijos que son únicos, para los cuales el método del punto fijo converge y que no cumplen con las condiciones del Teorema 1.1, tal y como se puede ver en [2]. La dificultad al usar el método del punto fijo para aproximar raíces, radica en definir una función g que cumpla las condiciones del Teorema 1.1, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1. Aproximar a través del método del punto fijo el valor de la raíz $x^* \in [5, 7]$ de la función $f(x) = x^2 - 5x - 8$.

La función $f(x)$ tiene dos raíces una $x^* \in [5, 7]$ y otra x^{**} por fuera de dicho intervalo, donde x^* y x^{**} están dadas por

$$x^* = \frac{5 + \sqrt{57}}{2} = 6.274917218 \quad \text{y} \quad x^{**} = \frac{5 - \sqrt{57}}{2} = -1.274917218. \quad (1.2.3)$$

Para aproximar el valor de x^* a través del método del punto fijo se debe expresar la función $f(x)$ de la forma $x = g(x)$, de este modo x^* sería también un punto fijo de $g(x)$. Existen varias formas para hacerlo, pero la convergencia del método del punto fijo no se garantiza para todas las funciones g que se obtengan.

Si se despeja x de la ecuación $x^2 - 5x - 8$ de la siguiente forma

$$x = \frac{x^2 - 8}{5},$$

se obtiene

$$g_1(x) = \frac{x^2 - 8}{5}. \quad (1.2.4)$$

De donde analizando esta función g_1 se tiene que:

- El mínimo valor sucede en $x = 5$ y $g_1(5) = \frac{17}{5} = 3.4$, así $3.4 \leq g_1(x)$ para $x \in [5, 7]$.
- El máximo valor ocurre en $x = 7$ y $g_1(7) = \frac{41}{5} = 8.2$, de donde $g_1(x) \leq 8.2$ para $x \in [5, 7]$.

Por tanto $g_1(x) \notin [5, 7]$ para todo $x \in [5, 7]$, por lo cual el Teorema 1.1-a no garantiza la existencia de por lo menos un punto fijo. Por otro lado, dado que

$$|g_1'(x)| = \left| \frac{2x}{5} \right| > 1 \quad \text{para todo } x \in [5, 7],$$

del Teorema 1.1-b tampoco se puede concluir que si existiera el punto fijo es único. De donde finalmente, no se puede concluir que el método del punto fijo (1.2.4) es convergente, aunque si se observan las iteraciones resultantes en la Tabla 1.1, a partir de $x_0 = 6 \in [5, 7]$, se concluye

i	x_i	$g_1(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $	$f(x_i)$
0	6.000000×10^0	5.600000×10^0	—	-2.000000×10^0
1	5.600000×10^0	4.672000×10^0	4.00000×10^{-1}	-4.640000×10^0
2	4.672000×10^0	2.765517×10^0	9.28000×10^{-1}	-9.532416×10^0
3	2.765517×10^0	-7.038337×10^{-2}	1.90648×10^0	-1.417950×10^{-1}
4	-7.038337×10^{-2}	-1.599009×10^0	2.83590×10^0	-7.643129×10^0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
17	-1.275024×10^0	-1.274863×10^0	3.16933×10^{-4}	8.080949×10^{-4}
18	-1.274863×10^0	-1.274945×10^0	1.61619×10^{-4}	-4.121101×10^{-4}
19	-1.274945×10^0	-1.274903×10^0	8.24220×10^{-5}	2.101603×10^{-4}

Tabla 1.1: Iteración del método del punto fijo para g_1 con $x_0 = 6$.

convergencia a un punto fijo fuera del intervalo $[5, 7]$.

Con una tolerancia de 10^{-4} y $x_0 = 6$, la iteración del punto fijo (1.2.4) converge en 19 iteraciones a $x_{19} = -1.274945$. Es decir, se tiene convergencia a la raíz x^{**} de $f(x)$ con una exactitud de cuatro cifras decimales. Además, al sustituir este valor en la función f se tiene que aproxima a la raíz pues $f(x_{19}) = 2.101603 \times 10^{-4}$.

Aunque la convergencia obtenida no era la esperada, se resalta que se puede encontrar otra función g_2 con un punto fijo en $[5, 7]$ para el cual si se cumplen las condiciones del Teorema 1.1 y por lo tanto se garantiza que la iteración del punto fijo (1.2.4) converge a x^* para cualquier $x_0 \in [5, 7]$. Esta función se obtiene al despejar x de $f(x)$ de la siguiente forma

$$x = \sqrt{5x + 8} = g_2(x)$$

Ahora analizando la función g_2 se tiene:

- El mínimo valor sucede en $x = 5$ y $g_2(5) = \sqrt{33} = 5.74$, así $5.74 \leq g_2(x)$ para $x \in [5, 7]$.
- El máximo valor ocurre en $x = 7$ y $g_2(7) = \sqrt{43} = 6.55$, de donde $g_2(x) \leq 6.55$ para $x \in [5, 7]$.

Por lo anterior se concluye que $g_2(x) \in [5, 7]$ para todo $x \in [5, 7]$ y además

$$|g_2'(x)| = \left| \frac{5}{2\sqrt{5x+8}} \right| \leq 1, \quad \text{para todo } x \in [5, 7].$$

Entonces por el Teorema 1.1 se garantiza la convergencia del método del punto fijo para g_2 a la raíz x^* a partir de cualquier $x_0 \in [5, 7]$. La Tabla 1.2 muestra los resultados de la iteración del método del punto fijo con $x_0 = 6$ y $TOL = 10^{-4}$. De los resultados en esta tabla, se concluye que la aproximación se obtuvo en solo 10 iteraciones y que $x_{10} = 6.274889$ efectivamente se aproxima al punto fijo x^* en (1.2.3). Al comparar x_{10} con x^* se observa que la aproximación obtenida es exacta hasta la cuarta cifra decimal. Si se quisiera una aproximación con mayor exactitud se debería fijar una tolerancia menor, pero esto implicaría que aumente el número de iteraciones para el método del

i	x_i	$g_2(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $	$f(x_i)$
0	6.000000	6.164414	0.00000×10^0	-2.000000×10^0
1	6.164414	6.230736	1.64414×10^{-1}	-8.220700×10^{-1}
2	6.230736	6.257290	6.63219×10^{-2}	-3.316095×10^{-1}
3	6.257290	6.267890	2.65542×10^{-2}	-1.327710×10^{-1}
4	6.267890	6.272117	1.06003×10^{-2}	-5.300163×10^{-2}
5	6.272117	6.273801	4.22660×10^{-3}	-2.113301×10^{-2}
6	6.273801	6.274473	1.68445×10^{-3}	-8.422267×10^{-3}
7	6.274473	6.274740	6.71189×10^{-4}	-3.355946×10^{-3}
8	6.274740	6.274847	2.67423×10^{-4}	-1.337114×10^{-3}
9	6.274847	6.274889	1.06546×10^{-4}	-5.327324×10^{-4}
10	6.274889	6.274906	4.24497×10^{-5}	-2.122484×10^{-4}

Tabla 1.2: Iteración del método del punto fijo para g_2 con $x_0 = 6$.

punto fijo. Además tanto en la Tabla 1.1 como en la Tabla 1.2, se puede notar que en la columna 5 la función f tiende a cero a medida que la iteración del método del punto fijo converge a un punto fijo, por tanto las aproximaciones obtenidas son raíces de f para la tolerancia fijada. Los resultados numéricos en este ejemplo se obtuvieron con la implementación realizada en lenguaje C (A.1.1) del método del punto fijo, dada en el Apéndice A.1.

□

Al observar en la Tabla 1.2 que en la columna 4 los valores del error disminuyen por cada iteración hasta lograr la tolerancia pedida, sería importante conocer como disminuye el error por cada iteración. El siguiente teorema presenta las condiciones con las que se concluye que el método del punto fijo converge linealmente, lo que implica que el error debe disminuir por iteración en una razón con límite a 2.

Teorema 1.2. *Sea $g \in C[a, b]$ tal que $g(x) \in [a, b]$ para toda $x \in [a, b]$, g' continua en (a, b) y supongamos que existe una constante positiva $k < 1$ tal que*

$$|g'(x)| \leq k, \quad \text{para todo } x \in (a, b).$$

Si $g'(x^) \neq 0$, entonces para cualquier $x_0 \in [a, b]$ la sucesión*

$$x_{k+1} = g(x_k), \quad \text{para } k \geq 0,$$

converge linealmente al punto fijo $x^ \in [a, b]$.*

Demostración. Supongamos que x^* es un punto fijo de g . Por el Teorema 1.1-c se tiene que $x_{k+1} = g(x_k)$ converge a x^* . Como g' está definida en (a, b) se puede aplicar el teorema del valor medio a g para un ε_k entre x_k y x^* , tal que

$$g'(\varepsilon_k) = \frac{g(x_k) - g(x^*)}{x_k - x^*},$$

de donde por hipótesis se tiene

$$g'(\varepsilon_k) = \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*}. \quad (1.2.5)$$

Puesto que la sucesión $\{x_k\}$ converge a x^* entonces la sucesión $\{\varepsilon_k\}$ también convergerá a x^* y como g' es continua en (a, b) se concluye que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g'(\varepsilon_k) = g'(x^*).$$

De la expresión anterior y de la Ecuación (1.2.5) se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g'(\varepsilon_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k - x^*} = g'(x^*) \text{ y } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = |g'(x^*)|.$$

Finalmente por la Definición 1.4 la iteración del punto fijo tiene convergencia lineal con $K = |g'(x^*)|$ siempre que $g'(x^*) \neq 0$.

■

En el Teorema 1.2 se garantiza que el método del punto fijo converge linealmente a un punto fijo x^* . En el siguiente teorema se muestra como se puede obtener una iteración del método del punto fijo con orden de convergencia mayor.

Teorema 1.3. *Sea x^* un punto fijo de g tal que $x^* \in [a, b]$. Si $g \in C^p[a, b]$, es decir g es continuamente diferenciable p veces en $[a, b]$, y además*

$$g'(x^*) = g''(x^*) = \dots = g^{(p-1)}(x^*) = 0, \quad \text{pero } g^{(p)} \neq 0.$$

Entonces existe un $\delta > 0$ tal que para cualquier $x_0 \in [x^ - \delta, x^* + \delta]$ la iteración del método del punto fijo converge a x^* con orden de convergencia p .*

Demostración. Por la Definición 1.4 de orden de convergencia, se debe mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|(x_k - x^*)^p|} = K, \quad \text{con } K \text{ una constante positiva.}$$

Al considerar validas las hipótesis del teorema y sustituir la derivadas nulas en la expansión de Taylor alrededor de x^* se tiene

$$\begin{aligned} g(x_k) &= g(x^*) + (x_k - x^*)g'(x^*) + \dots + \frac{(x_k - x^*)^{p-1}}{(p-1)!}g^{(p-1)}(x^*) + \frac{(x_k - x^*)^p}{p!}g^{(p)}(\varepsilon_k) \\ &= g(x^*) + \frac{(x_k - x^*)^p}{p!}g^{(p)}(\varepsilon_k), \end{aligned}$$

donde ε_k está entre x_k y x^* .

Ahora, como $g(x_k) = x_{k+1}$ y $g(x^*) = x^*$, al sustituir en la expresión anterior, se obtiene

$$x_{k+1} = x^* + \frac{(x_k - x^*)^p}{p!}g^{(p)}(\varepsilon_k),$$

de donde

$$\frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^p} = \frac{1}{p!} g^{(p)}(\varepsilon_k). \quad (1.2.6)$$

Luego como x_k converge a x^* , se tiene que ε_k también converge a x^* . Además, como $g^{(p)}$ es continua, de la Ecuación (1.2.6) se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_{k+1} - x^*}{(x_k - x^*)^p} = \frac{1}{p!} g^{(p)}(x^*) \neq 0.$$

Finalmente, tomando $K = \frac{1}{p!} g^{(p)}(x^*)$ por la Definición 1.4 la iteración del punto fijo tiene orden de convergencia p . ■

Observación 1.3. A partir del Teorema 1.3 se puede encontrar una función de iteración g del método del punto fijo que converja cuadráticamente al punto fijo y a la raíz de f , como sigue. Sea $g \in C^2[a, b]$, es decir continuamente diferenciable dos veces en $[a, b]$, y $x^* \in [a, b]$ un punto fijo de g y una raíz de la función f . Además sea $g'(x^*) = 0$ y $g''(x^*) \neq 0$. Se considera la función

$$g(x) = x - \varphi(x) f(x), \quad (1.2.7)$$

donde $\varphi(x)$ es una función arbitraria y al comparar con la relación (1.2.2) $\alpha = \varphi(x)$. De donde como x^* es un punto fijo de g entonces

$$x^* = x^* - \varphi(x^*) f(x^*),$$

de donde como $f(x^*) = 0$ la función $\varphi(x^*) \neq 0$. Lo cual verifica para esta función g algunas de las hipótesis del Teorema 1.3. Veamos ahora derivando que $g'(x^*) = 0$ así

$$\begin{aligned} g'(x^*) &= 1 - \varphi'(x^*) f(x^*) - \varphi(x^*) f'(x^*) \\ &= 1 - \varphi'(x^*) \cdot 0 - \varphi(x^*) f'(x^*) \\ &= 1 - \varphi(x^*) f'(x^*). \end{aligned}$$

Luego como $g'(x^*) = 0$, se tiene que

$$\varphi(x^*) = \frac{1}{f'(x^*)}, \quad \text{con } f'(x^*) \neq 0. \quad (1.2.8)$$

Por tanto al reemplazar (1.2.8) en la expresión (1.2.7) se obtiene.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Además se concluye que $g''(x^*) \neq 0$, pues

$$g''(x^*) = \frac{(f'(x^*))^2 - f(x^*) f''(x^*)}{(f'(x^*))^2} = 1.$$

Finalmente por el Teorema 1.3 la sucesión generada por

$$x_{k+1} = g(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1.2.9)$$

converge cuadráticamente a x^* para una aproximación inicial x_0 lo suficientemente cercana x^* . La expresión mostrada en (1.2.9) se conoce como la forma iterativa del método de Newton el cuál se estudiará con más detalle en la siguiente sección.

1.3. Método de Newton real.

El método de Newton es un método iterativo fácil de emplear para la mayor parte de personas que necesiten aproximar el valor de las raíces de una ecuación no lineal, basta con tener en cuenta conceptos de cálculo diferencial. Además es versátil puesto que desde su función de iteración se puede conseguir funciones de iteración para aproximar la solución de funciones de variable compleja y de sistemas de ecuaciones no lineales.

Nota: Los gráficos que se relacionan en este trabajo son de propiedad de los autores.

La forma iterativa del método de Newton, mostrada en (1.2.9), se puede deducir también a través del análisis de su interpretación geométrica. En la cual el método de Newton resulta de la linealización de una función $y = f(x)$ es decir se reemplaza f por una función lineal, como se describe a seguir:

- Se considera una aproximación inicial (x_0, y_0) .
- Se traza la tangente a f , t_1 , que pase por (x_0, y_0) . Aquí se tiene en cuenta la relación de la derivada de la función f con la pendiente de la recta tangente a la curva de f en un punto.
- Con x_1 se denota al punto de corte de la tangente t_1 con el eje x . Ver Figura 1.1.

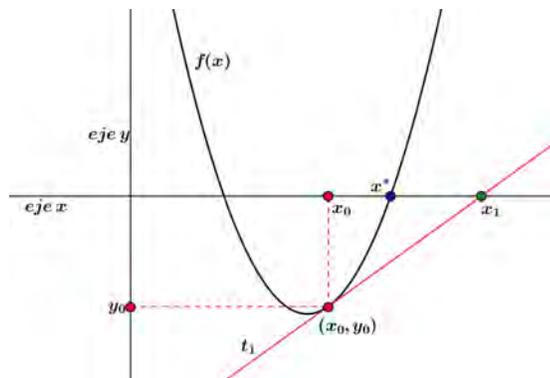


Figura 1.1: Incisos a, b y c de la interpretación geométrica del método de Newton.

- d. Se encuentra la imagen de x_1 bajo f , $y_1 = f(x_1)$, y se traza la recta tangente a f , t_2 , que pasa por el punto (x_1, y_1) .
- e. Ahora se denota x_2 al punto de corte de la tangente t_2 con el eje x , como se muestra en la Figura 1.2. Además, se resalta que los pasos d y e , son análogos a los pasos b y c , de donde la aproximación de la raíz x^* se obtiene al repetir este proceso las veces que sea necesario.

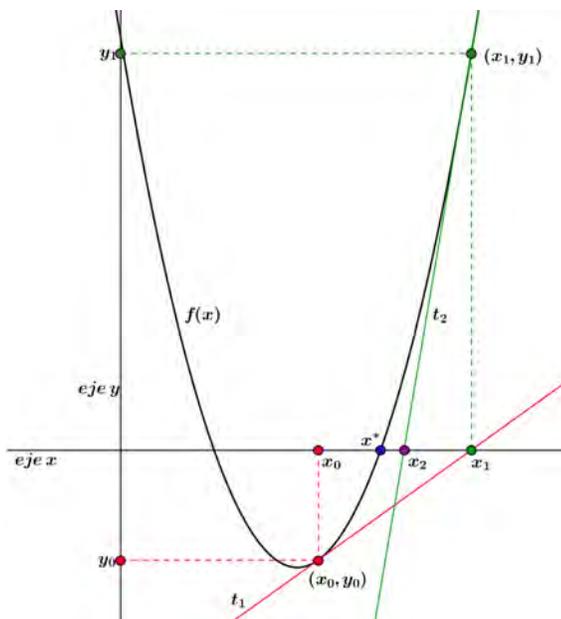


Figura 1.2: Interpretación geométrica del método de Newton.

A continuación se expresa matemáticamente la interpretación geométrica del método de Newton presentada. Puesto que la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto $(x_0, f(x_0))$ está dada por

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Suponiendo que $f'(x_0) \neq 0$, el punto de intersección de la recta tangente y el eje x es

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

De donde, al repetir el proceso para x_1 , se tiene la ecuación de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en un punto $(x_1, f(x_1))$ dada por

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1).$$

Nuevamente al suponer $f'(x_1) \neq 0$, la intersección de esta recta con el eje x se da para

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Continuando este proceso de forma repetitiva, se concluye que

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

es la iteración del método de Newton mostrada en (1.2.9) y se cumple siempre que f sea diferenciable en \mathbb{R} y $f'(x_k) \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por otro lado, el método de Newton también se puede obtener como una mejora en el orden de convergencia del método del punto fijo, tal y como se mostró en la Observación 1.3. Incluso, el método de Newton también se deduce a partir de expansiones de series de Taylor, como se indica en [7] y [15], y en esta deducción se observa claramente el error de truncamiento.

Teniendo en cuenta la iteración del método de Newton (1.2.9), se presenta para esta el Algoritmo 2, con el cual partiendo de un valor inicial x_0 se obtiene una aproximación de la raíz x^* de una función diferenciable f .

Entrada: x_0 ; TOL ; $ITMAX$.

Salida: Solución aproximada x_i o mensaje de error.

Inicio

| $i = 0$

| **Hacer**

| $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$

| $i = i + 1$

| **Mientras** $|x_i - x_{i-1}| > TOL$ e $i \leq ITMAX$;

| **Si** $i > ITMAX$ **entonces**

| | Salida: “El método fracasó”

| **Sino**

| | Salida: x_i

| **Fin**

Fin

Algoritmo 2: Método de Newton.

Observación 1.4. El criterio de parada $|x_i - x_{i-1}| > TOL$ e $i \leq ITMAX$ se considera de aquí en adelante para los ejemplos realizados, a no ser de que por interés numérico se diga lo contrario.

Observación 1.5. El Algoritmo 2, parte de la iteración del método de Newton (1.2.9) pero en este no se tiene en cuenta condiciones de convergencia que se verán más adelante. Incluso en el Algoritmo 2, no se hace la comparación necesaria de que $f'(x_{i-1}) \neq 0$ en cada iteración.

A continuación se presenta una cota para el error del método de Newton.

Teorema 1.4. Sean x^* una raíz exacta y x_k una aproximación de la ecuación $f(x) = 0$ tal que ambas están en el mismo intervalo $[a, b]$. Si $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces

$$|x_k - x^*| \leq \frac{|f(x_k)|}{m_1}.$$

Demostración. Supongamos que $|f'(x)| \geq m_1 > 0$ en un intervalo $[a, b]$ tal que $x^*, x_k \in [a, b]$. Por el teorema del valor medio existe un c tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_k) - f(x^*)}{x_k - x^*},$$

de donde

$$f'(c)(x_k - x^*) = f(x_k) - f(x^*) \quad (1.3.1)$$

con c un valor entre x_k y x^* .

Como $c \in (a, b)$ por hipótesis $|f'(c)| \geq m_1$. Luego multiplicando esta desigualdad por $|x_k - x^*|$ y reemplazando lo obtenido en (1.3.1) resulta

$$|f(x_k) - f(x^*)| \geq m_1 |x_k - x^*|.$$

De donde como x^* es una raíz exacta de f se tiene

$$|f(x_k)| \geq m_1 |x_k - x^*|,$$

que era lo que se quería probar. ■

La siguiente cota del error comprueba que el método de Newton tiene convergencia cuadrática, tal como se mostró en la deducción (1.2.9). Sin embargo se resalta que en los teoremas 1.4 y 1.5, se asume que se cumple la convergencia del método. Para la demostración ver [9].

Teorema 1.5. Si el método de Newton converge a la raíz x^* de f en $[a, b]$ y si en este intervalo $|f'(x)| \geq m > 0$ y $|f''(x)| < M$, entonces para k suficientemente grande

$$|x_k - x^*| \leq \frac{M}{2m} (x_k - x_{k-1})^2 \leq |x_k - x_{k-1}|.$$

Al igual que para el método del punto fijo, es importante garantizar la convergencia de la sucesión generada a través de la iteración del método de Newton. El siguiente teorema de convergencia del método de Newton muestra la importancia de la elección de x_0 . Ver su demostración en [2].

Teorema 1.6. Sea $f \in C^2[a, b]$. Si $x^* \in [a, b]$ es raíz de f y $f'(x^*) \neq 0$, entonces existe $\delta > 0$ tal que el método de Newton genera una sucesión $\{x_k\}$ que converge a x^* para cualquier aproximación inicial $x_0 \in [x^* - \delta, x^* + \delta]$.

Así la convergencia del método de Newton es *local*, es decir tal como lo muestra la Definición 1.3, la convergencia se garantiza para un x_0 que esté *suficientemente cercano* a x^* . Sin embargo existen teoremas que dan criterios para la convergencia global del método de Newton, al imponer condiciones sobre la función f . Algunos de estos teoremas se enuncian a continuación.

Teorema 1.7. *Supongamos que el intervalo $[a, b]$ es lo suficientemente pequeño de tal manera que se cumplan las siguientes tres condiciones:*

- a) f tiene una única raíz x^* en $[a, b]$.
- b) $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- c) f' y f'' son no nulas y conservan el signo en $[a, b]$.

Luego si $x_0 \in [a, b]$ y $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$, la iteración del método de Newton (1.2.9) converge a x^* .

Demostración. Como por la parte b de la hipótesis, $f(a)$ y $f(b)$ deben tener signo contrarios, sin pérdida de generalidad se puede suponer que $f(a) < 0$, y además que $f(b) > 0$ y que $f'(x) > 0$ y $f''(x) > 0$ en $[a, b]$, de donde $f(x_0) > 0$ y $x_0 > x^*$. Se mostrará para todo $k \in \mathbb{N}$ que $x_k > x^*$ y que $f(x_k) > 0$.

Por el teorema de Taylor alrededor de x_k , se tiene

$$f(x^*) = f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) + \frac{(x^* - x_k)^2}{2}f''(\varepsilon_k),$$

con ε_k entre x_k y x^* . Por la parte a de la hipótesis $f(x^*) = 0$ y como $f''(x) > 0$ entonces

$$f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) < 0,$$

de donde

$$f(x_k) + x^*f'(x_k) < x_k f'(x_k).$$

De este modo

$$x^* < \frac{x_k f'(x_k) - f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1},$$

luego $x_k > x^*$ para $k \in \mathbb{N}$.

Además, por los signos de f y f' se deduce que $x_k > x_{k+1}$ para $k \in \mathbb{N}$ por lo que la sucesión $\{x_k\}$ está acotada (por x^*) y es decreciente, y por lo tanto converge.

Queda mostrar que el límite de la sucesión generada debe ser x^* . Supongamos que fuera otro valor $\bar{x} \in [a, b]$, entonces el límite de la sucesión x_{k+1} generada por el método de Newton es

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \right).$$

De aquí, como el valor del límite es \bar{x} , se tiene

$$\bar{x} = \bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}.$$

De donde como $f'(\bar{x}) \neq 0$ se deduce que $f(\bar{x}) = 0$ y así \bar{x} también es una raíz de f . Pero por la parte *a* del Teorema, puesto que el cero es único en $[a, b]$ se tiene que $\bar{x} = x^*$.

■

En el mismo sentido del teorema anterior, el siguiente teorema garantiza la convergencia del método de Newton para cualquier valor inicial en el intervalo $[a, b]$, siempre que la función f cumpla ciertas condiciones. Este teorema se conoce como *condiciones de Fourier* y su demostración se puede ver en [14].

Teorema 1.8. *Supongamos que $x^* \in [a, b]$ es una raíz de $f \in C^2[a, b]$ y que $f'(x) \cdot f''(x) \neq 0$, para todo $x \in [a, b]$. Entonces, si*

$$\left| \frac{f(a)}{f'(a)} \right| < b - a \quad \text{y} \quad \left| \frac{f(b)}{f'(b)} \right| < b - a$$

el método de Newton converge para cualquier $x_0 \in [a, b]$.

Del teorema 1.7 se concluye que la convergencia se puede garantizar cuando la función tiene segunda derivada que no cambia de signo en la región de iteración. El intervalo $[a, b]$ tiene al menos un punto de corte con el eje x , dada la condición $f(a) \cdot f(b) < 0$, esto garantiza que en el intervalo hay una raíz de f .

Ejemplo 1.2. Usando el método de Newton aproximar la raíz de la función $f(x) = x^3 + x + 1$ en el intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$.

Dado que $f(-1) \cdot f(-\frac{1}{2}) < 0$ y la función es continua, existe por lo menos una raíz x^* de la función f en el intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$. Esta raíz es única y está dada a través del método de Cardano por

$$x^* = \frac{-3\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{(-27 + \sqrt{837})^2}}{3\sqrt[3]{-54 + \sqrt{837}}} = -6.82327803 \times 10^{-1}. \quad (1.3.2)$$

La función $f \in C^2[-1, -\frac{1}{2}]$ es creciente, dado que su derivada siempre es positiva.

Además como

$$\left| \frac{f(-1)}{f'(-1)} \right| = \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \left| \frac{f(-\frac{1}{2})}{f'(-\frac{1}{2})} \right| = \frac{3}{14} \quad \text{son menores que} \quad \frac{1}{2},$$

donde $\frac{1}{2}$ es la diferencia entre los extremos del intervalo $[-1, -\frac{1}{2}]$, por el Teorema 1.8 el método de Newton converge para cualquier $x_0 \in [-1, -\frac{1}{2}]$.

En la Tabla 1.3, se presentan las iteraciones del método de Newton con $TOL = 10^{-7}$, diferentes valores iniciales y con función de iteración

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 + x_k + 1}{3x_k^2 + 1} = \frac{2x_k^3 - 1}{3x_k^2 + 1}. \quad (1.3.3)$$

Se puede observar en la Tabla 1.3 que a medida que la aproximación inicial x_0 esté “más cercana” a la raíz x^* el método de Newton converge en menos iteraciones. Por ejemplo, para $x_0 = -0.7$ se tiene $x_3 = -6.82327824 \times 10^{-1}$ en 3 iteraciones, la cual cuenta con 8 cifras decimales de exactitud y esto permite verificar la convergencia local del método de Newton.

x_0	#Iter. (i)	x_i	$ x_i - x^* $
-1	5	$-6.82327806 \times 10^{-1}$	5.86382×10^{-9}
-0.9	4	$-6.82327795 \times 10^{-1}$	4.96005×10^{-9}
-0.8	4	$-6.82327791 \times 10^{-1}$	1.26587×10^{-8}
-0.7	3	$-6.82327824 \times 10^{-1}$	2.00555×10^{-8}
-0.6	4	$-6.82327811 \times 10^{-1}$	6.82803×10^{-9}
-0.5	5	$-6.82327791 \times 10^{-1}$	1.24483×10^{-8}

Tabla 1.3: Iteración del método de Newton con diferentes x_0 .

□

Las raíces de una función pueden ser simples o múltiples y esto depende del valor de su multiplicidad como se muestra en la siguiente definición.

Definición 1.6. Una raíz x^* de una función real f es una *raíz de multiplicidad m* si para $x \neq x^*$, se puede escribir $f(x) = (x - x^*)^m q(x)$, donde $\lim_{x \rightarrow x^*} q(x) \neq 0$.

En particular una raíz simple tiene multiplicidad $m = 1$ y en el teorema a seguir se muestra una manera de identificar las raíces simples de una función.

Teorema 1.9. $f \in C^1[a, b]$, es decir continuamente diferenciable en $[a, b]$, tiene una raíz simple x^* en (a, b) si y solo si $f(x^*) = 0$, pero $f'(x^*) \neq 0$.

A partir de la Definición 1.6, el próximo teorema es una generalización del Teorema 1.9 para identificar raíces múltiples de una función.

Teorema 1.10. La función $f \in C^m[a, b]$ tiene un cero de multiplicidad m x^* en (a, b) si y solo si

$$0 = f(x^*) = f'(x^*) = f''(x^*) = \dots = f^{(m-1)}(x^*), \quad \text{pero } f^{(m)}(x^*) \neq 0.$$

Las demostraciones de los teoremas 1.9 y 1.10 se pueden revisar en [2].

Cuando en las aproximaciones obtenidas con el método de Newton los errores son pequeños, cada error es proporcional al cuadrado del error previo, lo cual ocasiona que la convergencia sea más rápida al compararse con un método de convergencia lineal. Sin embargo, la convergencia cuadrática se puede perder con raíces múltiples, motivo por el cual se decide el estudio de teoremas que relacionan raíces múltiples con el método de Newton. Los siguientes teoremas son tomados de [9].

Teorema 1.11. *Supongamos que el método de Newton converge a una raíz simple x^* de f . Si f' y f'' existen y son continuas en los alrededores de x^* y $f''(x^*) \neq 0$, entonces el orden de convergencia del método de Newton es como mínimo dos.*

Demostración. Sea x^* una raíz simple de f y supongamos que la iteración del método de Newton converge a x^* , se usará el polinomio de Taylor para f alrededor de x_k , dado por

$$f(x^*) = f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) + \frac{(x^* - x_k)^2}{2}f''(\varepsilon_k), \quad (1.3.4)$$

donde ε_k está entre x_k y x^* y donde $f(x^*) = 0$.

Como la iteración del método es convergente, entonces x_k tiende a x^* y por lo tanto ε_k también tiende a x^* . Además, por hipótesis $f'(x_k) \neq 0$ entonces se puede suponer que los x_k ya están en una vecindad alrededor de x^* en la que $f'(x_k) \neq 0$ y de aquí se sigue que

$$f(x_k) + (x^* - x_k)f'(x_k) + \frac{(x^* - x_k)^2}{2}f''(\varepsilon_k) = 0.$$

Luego dividiendo la anterior ecuación por $f'(x_k)$, se obtiene

$$x_{k+1} - x^* = \frac{(x^* - x_k)^2}{2} \frac{f''(\varepsilon_k)}{f'(x_k)}. \quad (1.3.5)$$

Como $f'(x^*) \neq 0$ y al aplicar límite a la expresión anterior

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{|f''(\varepsilon_k)|}{|f'(x_k)|} = \frac{1}{2} \frac{|f''(x^*)|}{|f'(x^*)|} = K.$$

Finalmente, por la Definición 1.4 el orden de convergencia del método de Newton es 2 siempre que $f'(x^*) \neq 0$ y $f''(x^*) \neq 0$. ■

En particular para la multiplicidad 2 la convergencia del método de Newton es lineal. De acuerdo al Teorema 1.10, sea x^* una raíz de multiplicidad $m = 2$ de f entonces $f'(x^*) = 0$ y $f''(x^*) \neq 0$. Además, tomando valor absoluto en la Ecuación (1.3.5), se tiene

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{(x_k - x^*)^2}{2} \frac{|f''(\varepsilon_k)|}{|f'(x_k)|}. \quad (1.3.6)$$

Por el teorema del valor medio para derivadas se tiene para η entre x^* y x_k que

$$f''(\eta) = \frac{f'(x^*) - f'(x_k)}{x^* - x_k},$$

de donde

$$f'(x_k) = f'(x^*) + (x_k - x^*) f''(\eta).$$

Dado que $f'(x^*) = 0$, por ser x^* una raíz de multiplicidad 2, se sigue que

$$f'(x_k) = (x_k - x^*) f''(\eta).$$

Al reemplazar el valor obtenido para $f'(x_k)$ en (1.3.6), se obtiene

$$|x_{k+1} - x^*| = \frac{1}{2} |(x_k - x^*)| \frac{|f''(\varepsilon_k)|}{|f''(\eta)|}.$$

Con esto y por como se definió ε_k y η , se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{|f''(\varepsilon_k)|}{|f''(\eta)|} = \frac{1}{2} \frac{|f''(x^*)|}{|f''(x^*)|} = \frac{1}{2},$$

de donde se concluye por la Definición 1.4, que la convergencia es lineal para $K = \frac{1}{2}$.

Observación 1.6. Existen alternativas para recuperar la convergencia cuadrática del método de Newton para raíces múltiples. Por ejemplo, si la multiplicidad m de una raíz es conocida, entonces

$$x_{k+1} = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \quad (1.3.7)$$

converge al menos cuadráticamente. Otras modificaciones se pueden revisar en [14]. En las implementaciones realizadas en este trabajo, no se tuvo en cuenta modificaciones al método de Newton por raíces múltiples.

El método de Newton se puede extender para aproximar la solución de ecuaciones no lineales de variable compleja y esto se muestra en el siguiente apartado.

1.4. Método de Newton en el plano complejo.

El método de Newton se puede aplicar para aproximar soluciones de funciones de variable compleja, para ello se utiliza una función de iteración que es similar a la dada en (1.2.9).

Como se puede ver en [14], dada una función diferenciable $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ y una aproximación inicial $z_0 \in \mathbb{C}$, para obtener una aproximación a la solución de $f(z) = 0$ la iteración del método de Newton es

$$z_{k+1} = z_k - \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, \quad (1.4.1)$$

donde $f'(z_k) \neq 0$ para $k \in \mathbb{N}$.

Una de las desventajas de utilizar la función de iteración (1.4.1), es que no todas las funciones de variable compleja son diferenciables en \mathbb{C} . El siguiente teorema garantiza la diferenciable de una función $f(z)$ en \mathbb{C} y su demostración se puede revisar en [11].

Teorema 1.12. *Sea K una región en \mathbb{C} , $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ una función de variable compleja tal que*

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

y $z_0 = x_0 + iy_0$ un punto en K . Si $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ existen, son continuas y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en (x_0, y_0) , dadas por

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0),$$

entonces f es diferenciable en z_0 y

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) - i \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Las funciones que llaman la atención a este trabajo son las funciones polinómicas puesto que cumplen con el Teorema 1.12 y por tanto se les puede aplicar la iteración del método de Newton.

Se muestra a continuación el desarrollo de la iteración del método de Newton para funciones polinómicas de variable compleja del tipo $f(z) = z^m \pm 1$ con $m \in \mathbb{Z}$ y cuya derivada es $f'(z) = mz^{m-1}$. Es interesante estudiar este problema en los complejos, dado que la ecuación $x^m \pm 1 = 0$, con $m \in \mathbb{N}$ y $m > 1$, siempre tiene por lo menos un par de soluciones conjugadas complejas.

Por ejemplo, para el caso $m = 2$, es decir para la función $f(z) = z^2 + 1$ con derivada $f'(z) = 2z$, la iteración del método de Newton de acuerdo a (1.4.1) es

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^2 + 1}{2z_k} = \frac{z_k^2 - 1}{2z_k}. \quad (1.4.2)$$

Sea $z_0 = a_0 + b_0i$ con $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$, luego la primera iteración del método de Newton con (1.4.2) quedaría

$$z_1 = \frac{z_0^2 - 1}{2z_0}, \quad (1.4.3)$$

en donde

$$z_0^2 = (a_0 + b_0i)^2 = a_0^2 + 2a_0b_0i - b_0^2. \quad (1.4.4)$$

Se reemplaza el resultado obtenido en (1.4.4) en la expresión (1.4.3) y se obtiene

$$z_1 = \frac{(a_0^2 + 2a_0b_0i - b_0^2) - 1}{2(a_0 + b_0i)}.$$

Luego realizando la división entre números complejos, se tiene que

$$z_1 = \frac{a_0^3 + (b_0^2 - 1) a_0}{2(a_0^2 + b_0^2)} + \frac{(a_0^2 - 1) b_0 - b_0^3}{2(a_0^2 + b_0^2)} i.$$

Al expresar a z_1 separando la parte real de la imaginaria, es decir $z_1 = a_1 + b_1 i$, se concluye que

$$a_1 = \operatorname{Re}(z_1) = \frac{a_0^3 + (b_0^2 - 1) a_0}{2(a_0^2 + b_0^2)} \quad \text{y} \quad b_1 = \operatorname{Im}(z_1) = \frac{(a_0^2 - 1) b_0 - b_0^3}{2(a_0^2 + b_0^2)}.$$

Para obtener la segunda iteración del método de Newton se toma como aproximación inicial z_1 en (1.4.2), de donde

$$z_2 = \frac{z_1^2 - 1}{2z_1} = \frac{a_1^3 + (b_1^2 - 1) a_1}{2(a_1^2 + b_1^2)} + \frac{(a_1^2 - 1) b_1 - b_1^3}{2(a_1^2 + b_1^2)} i.$$

Continuando inductivamente, de esta forma se concluye que

$$z_{k+1} = \frac{z_k^2 - 1}{2z_k} = \frac{a_k^3 + (b_k^2 - 1) a_k}{2(a_k^2 + b_k^2)} + \frac{(a_k^2 - 1) b_k - b_k^3}{2(a_k^2 + b_k^2)} i.$$

De lo anterior, se tiene que para cada k , la aproximación resultante de la iteración del método de Newton (1.4.2) es $z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1} i$, donde

$$a_{k+1} = \operatorname{Re}(z_{k+1}) = \frac{a_k^3 + (b_k^2 - 1) a_k}{2(a_k^2 + b_k^2)} \quad \text{y} \quad b_{k+1} = \operatorname{Im}(z_{k+1}) = \frac{(a_k^2 - 1) b_k - b_k^3}{2(a_k^2 + b_k^2)},$$

se pueden calcular cada uno de forma independiente en cada iteración.

En la Tabla 1.4 se muestran los resultados de la iteración del método de Newton para $z^2 + 1 = 0$ con aproximación inicial $z_0 = \frac{1}{2} + 2i$ y $TOL = 10^{-7}$. Donde en 6 iteraciones se obtiene la aproximación $z_6 = 7.651951 \times 10^{-29} + i$ de la raíz $z_1^* = i$ de $z^2 + 1 = 0$. La aproximación de la parte real de z_i , tiende a cero en cada iteración, teniendo en cuenta el cero de máquina.

i	$\operatorname{Re}(z_i)$	$\operatorname{Im}(z_i)$	$ z_i - z^* $
0	$5.00000000 \times 10^{-1}$	2.00000000×10^0	1.11803×10^0
1	$1.91176471 \times 10^{-1}$	1.23529412×10^0	3.03169×10^{-1}
2	$3.44117647 \times 10^{-2}$	1.01294118×10^0	3.67647×10^{-2}
3	$4.56161831 \times 10^{-4}$	$9.99513644 \times 10^{-1}$	6.66803×10^{-4}
4	$-2.21971628 \times 10^{-7}$	1.00000001×10^0	2.22421×10^{-7}
5	$-3.13759263 \times 10^{-15}$	1.00000000×10^0	2.46256×10^{-14}

Tabla 1.4: Iteración del método de Newton con $z_0 = \frac{1}{2} + 2i$.

De lo anterior, queda el interrogante sobre como se podría obtener la raíz conjugada $z_2^* = -i$ de $z^2 + 1 = 0$, a partir de la iteración del método de Newton. Donde si se toma como valor inicial, al conjugado del tomado en el caso anterior, es decir tomando $z_0 = \frac{1}{2} - 2i$ y nuevamente con $TOL = 10^{-7}$

se obtiene la aproximación a $z_2^* = -i$ en 5 iteraciones, dada por $z_5 = -3.13759263 \times 10^{-15} - i$. Estos resultados numéricos, se obtuvieron con la implementación en lenguaje C (A.1.3), que se muestra en el Apéndice A.1.

Observación 1.7. El error en este ejemplo se calculó usando el módulo de complejos en la diferencia de dos iteraciones consecutivas. Donde para $z = a + bi$, el *módulo* es un número real tal que $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Análogamente, si se desea resolver la ecuación $f(z) = z^3 - 1 = 0$ con derivada $f'(z) = 3z^2$, la iteración del método de Newton de acuerdo a (1.4.1) está dada por

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2} = \frac{2z_k^3 + 1}{3z_k^2},$$

de donde

$$z_{k+1} = a_{k+1} + b_{k+1}i,$$

con

$$a_{k+1} = \operatorname{Re}(z_{k+1}) = \frac{2a_k^5 + 10a_k^3b_k^2 - 6a_k^2b_k^2 + 2a_kb_k^4 + a_k^2 - b_k^2}{3\left((a_k^2 - b_k^2)^2 + 4a_k^2b_k^2\right)}$$

y

$$b_{k+1} = \operatorname{Im}(z_{k+1}) = \frac{2a_k^4b_k - 6a_k^2b_k^4 + 10a_k^2b_k^3 - 2a_kb_k + 2b_k^5}{3\left((a_k^2 - b_k^2)^2 + 4a_k^2b_k^2\right)}.$$

Usando en este caso, la implementación (A.1.3) del Apéndice A.1, con $m = 3$, $z_0 = -1 + \frac{1}{2}i$ y $TOL = 10^{-5}$, se obtuvo en 6 iteraciones la aproximación $z_6 = -5.000000 \times 10^{-1} + 8.660254 \times 10^{-1}i$ de la raíz $z_1^* = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Además, la aproximación de la raíz conjugada $z_2^* = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, partiendo de $z_0 = -1 - \frac{1}{2}i$ e igual tolerancia, se obtuvo en 6 iteraciones y fue $z_6 = -5.000000 \times 10^{-1} - 8.660254 \times 10^{-1}i$.

Continuando el proceso descrito anteriormente para $m > 3$, se podría intentar generalizar la iteración (1.4.2) para aproximar las raíces complejas de $z^m \pm 1 = 0$. Desafortunadamente este proceso se torna complejo al aumentar m , por la necesidad del desarrollo de potencias z^m . En la Tabla 1.5, se presentan la iteración del método de Newton y las potencias a expandir por el triángulo de Pascal. A continuación se introduce la Fórmula de D'Moivre, tomada de [11], para solventar la dificultad que se presenta en el desarrollo de las potencias z^m .

Definición 1.7. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ es su *forma polar* y m un número entero entonces

$$z^m = r^m (\cos m\theta + i \sin m\theta), \quad (1.4.5)$$

es la *Fórmula de D'Moivre*. Donde $r = |z|$ y θ es el *argumento principal* de z , tal que $-\pi < \theta \leq \pi$.

Ecuación	Iteración de Newton	Potencia
$z^2 - 1 = 0$	$z_{k+1} = \frac{z_k^2 + 1}{2z_k}$	$z_k^2 = a^2 + 2abi - b^2$
$z^3 - 1 = 0$	$z_{k+1} = \frac{2z_k^3 + 1}{3z_k^2}$	$z_k^3 = a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i$
$z^4 - 1 = 0$	$z_{k+1} = \frac{3z_k^4 + 1}{4z_k^3}$	$z_k^4 = a^4 + 4a^3bi - 6a^2b^2 - 4ab^3i + b^4$
$z^5 - 1 = 0$	$z_{k+1} = \frac{4z_k^5 + 1}{5z_k^4}$	$z_k^5 = (a + bi)^5$
\vdots	\vdots	\vdots
$z^m - 1 = 0$	$z_{k+1} = \frac{(m-1)z_k^m + 1}{mz_k^{m-1}}$	$z_k^m = (a + bi)^m$

Tabla 1.5: Potencia de números complejos en el método de Newton.

En la Tabla 1.6 se encuentra el desarrollo de las potencias z^m con $m \in \mathbb{N}$, a través de la fórmula dada en (1.4.5) para la iteración del método de Newton respectiva.

Ecuación	Iteración de Newton	Formula de D'Moivre
$z^2 - 1 = 0$	$z_{k+1} = \frac{z_k^2 + 1}{2z_k}$	$z_k^2 = z_k ^2 (\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$
$z^3 - 1 = 0$	$z_{k+1} = \frac{2z_k^3 + 1}{3z_k^2}$	$z_k^3 = z_k ^3 (\cos 3\theta + i \sin 3\theta)$
$z^4 - 1 = 0$	$z_{k+1} = \frac{3z_k^4 + 1}{4z_k^3}$	$z_k^4 = z_k ^4 (\cos 4\theta + i \sin 4\theta)$
$z^5 - 1 = 0$	$z_{k+1} = \frac{4z_k^5 + 1}{5z_k^4}$	$z_k^5 = z_k ^5 (\cos 5\theta + i \sin 5\theta)$
\vdots	\vdots	\vdots
$z^m - 1 = 0$	$z_{k+1} = \frac{(m-1)z_k^m + 1}{mz_k^{m-1}}$	$z_k^m = z_k ^m (\cos m\theta + i \sin m\theta)$

Tabla 1.6: Fórmula D'Moivre en el método de Newton.

Utilizando la fórmula (1.4.5) y considerando $z_0 = -1 + \frac{1}{2}i$ en su forma polar $z_0 = \frac{\sqrt{5}}{2} (\cos \theta + i \sin \theta)$ para $\theta = \arctan -\frac{1}{2}$, con 7 iteraciones en el método de Newton (1.4.1) se obtuvo la aproximación $z_7 = -5.000000 \times 10^{-1} + 8.660254 \times 10^{-1}i$, de la raíz $z^* = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ de la ecuación compleja $z^3 - 1 = 0$. Cabe resaltar que en este caso se obtuvo la aproximación z_7 en un número mayor de iteraciones que en el caso de iterar el método de Newton sin la fórmula (1.4.5), a pesar de ello no hay mayor diferencia con la aproximación que se presentó anteriormente. Por otro lado, cuando se implementa el algoritmo de la iteración (1.4.1), este proceso es fácil de extender e interpretar.

Además de aproximar raíces de una ecuación no lineal de variable compleja a través del método de Newton complejo se puede aproximar dichos valores a través de la generalización del método de Newton a sistemas no lineales 2×2 . Esto debido a que como espacio métrico \mathbb{C} es idéntico a \mathbb{R}^2 con la distancia euclídea, entonces la topología usual de \mathbb{C} es la topología usual de \mathbb{R}^2 , es decir el plano complejo es equivalente topológicamente con el plano real. Teniendo en cuenta esto las ecuaciones

de variable compleja se pueden escribir como un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, esta extensión de la iteración del método de Newton se estudia con detalle en el Capítulo 2.

Capítulo 2

Aproximación de sistemas de ecuaciones no lineales

Así como se puede obtener de manera exacta la solución de una ecuación lineal a través de ciertos métodos, también se puede proceder mediante métodos directos para obtener la solución de un sistema de ecuaciones lineales, ver [1, 2] y [6]. Sin embargo, obtener la solución de sistemas de ecuaciones no lineales es un trabajo complicado que no tiene un proceso fijo para determinar la solución, por lo cual se han desarrollado métodos iterativos que permiten obtener buenas aproximaciones de las soluciones buscadas.

En el Capítulo 1 se mostró la aplicación del método de Newton para la aproximación de las raíces de una ecuación no lineal y sus características de convergencia, lo que lo convierte en una buena herramienta en varios problemas de las diferentes áreas de la ciencia. Debido a esto es importante estudiar la generalización de esta iteración para la aproximación de la solución de sistemas de ecuaciones no lineales. En este capítulo se presenta la generalización del método de Newton para aproximar la solución de sistemas de n ecuaciones no lineales con n incógnitas e incluso, se muestra detalles a tener en cuenta a la hora de llevarlo a la práctica. En adelante, para simplificar, estos se denotarán *sistemas $n \times n$* .

Inicialmente se presenta la deducción del método de Newton para aproximar la solución de sistemas de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas, como una introducción al caso más general.

2.1. Método de Newton para aproximación de sistemas 2×2 .

En este apartado se busca resolver el problema de aproximar una raíz para una función $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Es decir, se quiere determinar un punto $\vec{x} = (x, y)$, con $x, y \in \mathbb{R}$, tal que para una función F deter-

minada por dos funciones diferenciables $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, se cumple que $F(\vec{x}) = \vec{0}$ o equivalentemente

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.1)$$

Encontrar la solución de un sistema de ecuaciones no lineales es encontrar los valores donde las funciones que conforman dicho sistema se intersectan. A continuación se presenta la interpretación geométrica del método de Newton para aproximar la solución (x^*, y^*) del sistema 2×2 dado en (2.1.1), de la siguiente manera:

- Se elige una aproximación inicial (x_0, y_0) para la solución (x^*, y^*) de F .
- Se evalúan las funciones f y g en (x_0, y_0) como se ilustra en la Figura 2.1, y se obtienen los siguientes puntos $f(x_0, y) = (x_0, f(x_0))$, $g(x_0, y) = (x_0, g(x_0))$, $f(x, y_0) = (f(y_0), y_0)$ y $g(x, y_0) = (g(y_0), y_0)$.

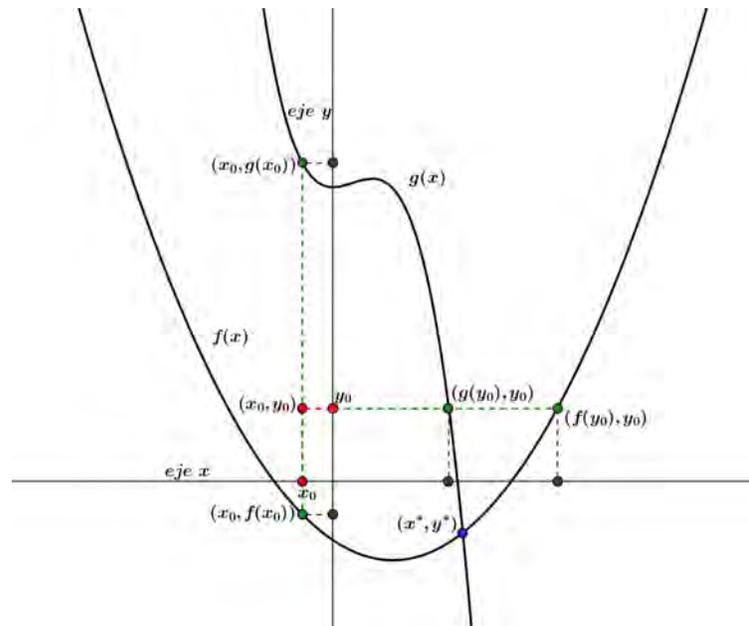


Figura 2.1: Incisos a y b de la interpretación geométrica del método de Newton para sistemas 2×2 .

- Se traza una recta secante, s_1 , que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(f(y_0), y_0)$ y otra secante s_2 que une los puntos $(x_0, g(x_0))$ y $(g(y_0), y_0)$.
- Se traza una recta tangente a f , t_1 , que además sea paralela a la secante s_1 y otra tangente a g , t_2 , que sea paralela a la secante s_2 .
- El punto de intersección de las tangentes t_1 y t_2 , constituye una nueva aproximación (x_1, y_1) para (x^*, y^*) . Ver Figura 2.2.

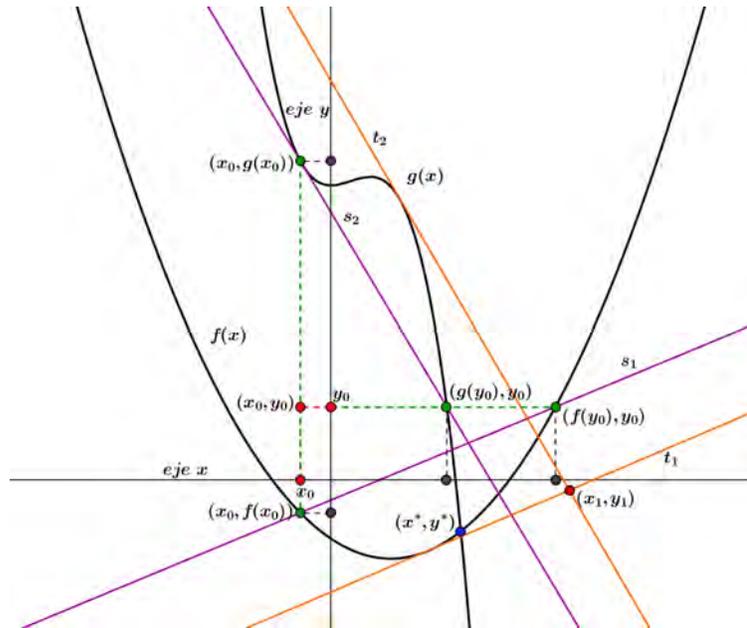


Figura 2.2: Interpretación geométrica del método de Newton para sistemas 2×2 .

f. Se repite el proceso las veces que sea necesario.

Al igual que la interpretación geométrica del método de Newton para ecuaciones no lineales vista en el Capítulo 1, a través de la interpretación geométrica del método de Newton para sistemas 2×2 se aproxima el valor de la intersección entre las dos funciones del sistema, es decir la solución.

Siguiendo los pasos arriba descritos, de igual forma a lo realizado en la Sección 1.3, se puede deducir la formulación matemática que en este caso se realizará con expansiones de Taylor. Se sigue la generalización del método de Newton para sistemas 2×2 a través de expansiones de series de Taylor en varias variables, que se encuentra en [2] y [13].

Sea $\vec{x}^{(0)} = (x_0, y_0)$ una aproximación para la solución $\vec{x}^* = (x^*, y^*)$ del sistema (2.1.1), tal que la norma euclidiana de la diferencia entre \vec{x}^* y $\vec{x}^{(0)}$ es cercana a 0. Se considera el primer polinomio de Taylor en varias variables, para la función vectorial $F(x, y)$, alrededor de $\vec{x}^{(0)}$. Donde para la función componente f se tiene

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}^{(0)}) + \nabla f(\vec{x}^{(0)}) (\vec{x} - \vec{x}^{(0)}) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}^{(0)}) H(\vec{\varepsilon}) (\vec{x} - \vec{x}^{(0)})^t, \quad (2.1.2)$$

donde $\vec{\varepsilon}$ se encuentra en el interior de una bola abierta con centro en \vec{x}^* y radio $\vec{x}^{(0)}$. Además

$$\nabla f(\vec{x}^{(0)}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}^{(0)}), \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}^{(0)}) \right)$$

es el gradiente de f en $\vec{x}^{(0)}$ y $H(\vec{x})$ es la matriz Hessiana, dada por

$$H(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(\vec{x})}{\partial y^2} \end{bmatrix}.$$

Al reemplazar \vec{x} por \vec{x}^* en (2.1.2) y operar el gradiente, se tiene

$$f(\vec{x}^*) = f(\vec{x}^{(0)}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\vec{x}^{(0)})(x^* - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}^{(0)})(y^* - y_0) + \frac{1}{2}(\vec{x}^* - \vec{x}^{(0)})^t H(\vec{\varepsilon})(\vec{x}^* - \vec{x}^{(0)}).$$

Donde al despreciar $(\vec{x}^* - \vec{x}^{(0)})^t H(\vec{\varepsilon})(\vec{x}^* - \vec{x}^{(0)})$, al asumir $\vec{x}^{(0)}$ cercano a \vec{x}^* , resulta

$$f(x^*, y^*) = f(\vec{x}^*) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x^* - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y^* - y_0). \quad (2.1.3)$$

Análogamente, se concluye que

$$g(x^*, y^*) \approx g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x^* - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y^* - y_0). \quad (2.1.4)$$

Finalmente, como $F(x^*, y^*) = \vec{0}$ se sigue que

$$f(x^*, y^*) = 0 \quad \text{y} \quad g(x^*, y^*) = 0. \quad (2.1.5)$$

Reemplazando (2.1.5) en las ecuaciones (2.1.3) y (2.1.4), resulta

$$\begin{aligned} 0 &\approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x^* - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y^* - y_0), \\ 0 &\approx g(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)(x^* - x_0) + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)(y^* - y_0). \end{aligned}$$

Lo que en forma matricial se puede ver como

$$\begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* - x_0 \\ y^* - y_0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.6)$$

Donde

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

es la *matriz jacobiana* asociada a (2.1.1) en el punto (x_0, y_0) y se denota con $JF(x_0, y_0)$, por lo cual (2.1.6) es equivalente a

$$\begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix} + JF(x_0, y_0) \begin{bmatrix} x^* - x_0 \\ y^* - y_0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.8)$$

Finalmente se despeja (x^*, y^*) de (2.1.8) y se obtiene

$$\begin{bmatrix} x^* \\ y^* \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} - [JF(x_0, y_0)]^{-1} \begin{bmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{bmatrix}, \quad (2.1.9)$$

donde $[JF(x_0, y_0)]^{-1}$ es la *inversa* de la matriz jacobiana $JF(x_0, y_0)$.

Por consiguiente la iteración del método de Newton para sistemas 2×2 , está dada por

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - [JF(x_k, y_k)]^{-1} F(x_k, y_k), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.1.10)$$

Observación 2.1. Aunque se pueden usar diferentes normas vectoriales para el cálculo del error entre vectores $\vec{x}^{(i)}$ y \vec{x}^* , ver en [1] y [6], en este trabajo se usa la norma euclidiana. Es decir que

$$e_i = \|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^*\| = \sqrt{(x_i - x^*)^2 + (y_i - y^*)^2}.$$

Teniendo en cuenta la iteración del método de Newton en (2.1.10) se presenta el Algoritmo 3 con el que se puede aproximar la solución del sistema (2.1.1), dada una aproximación inicial $\vec{x}^{(0)}$.

Entrada: $\vec{x}^{(0)} = (x_0, y_0)$; TOL ; $ITMAX$.

Salida: Solución aproximada $\vec{x}^{(i)} = (x_i, y_i)$ o mensaje de error.

Inicio

| $i = 0$

| **Hacer**

| $\vec{x}^{(i+1)} = \vec{x}^{(i)} - [JF(\vec{x}^{(i)})]^{-1} F(\vec{x}^{(i)})$

| $i = i + 1$

| **Mientras** $\|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(i-1)}\| > TOL$ e $i \leq ITMAX$;

| **Si** $i > ITMAX$ **entonces**

| | Salida: “El método fracasó”

| **Sino**

| | Salida: $\vec{x}^{(i)}$

| **Fin**

Fin

Algoritmo 3: Método de Newton para sistemas 2×2 .

Debido a que la inversa de una matriz 2×2 se puede determinar por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \quad (2.1.11)$$

Al aplicar (2.1.11) en la iteración (2.1.10), se obtiene

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} - \frac{1}{\det JF(x_k, y_k)} \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y}(x_k, y_k) & -\frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) \\ -\frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k) & \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(x_k, y_k) \\ g(x_k, y_k) \end{bmatrix},$$

de donde se concluye que la forma explícita de la función de iteración de cada componente del

método de Newton, dada una aproximación inicial $\vec{x}^{(0)}$, dada por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{\det JF(x_k, y_k)} \left(f(x_k, y_k) \frac{\partial g}{\partial y}(x_k, y_k) - g(x_k, y_k) \frac{\partial f}{\partial y}(x_k, y_k) \right), \\ y_{k+1} &= y_k - \frac{1}{\det JF(x_k, y_k)} \left(g(x_k, y_k) \frac{\partial f}{\partial x}(x_k, y_k) - f(x_k, y_k) \frac{\partial g}{\partial x}(x_k, y_k) \right). \end{aligned} \quad (2.1.12)$$

En el siguiente ejemplo se muestra la aplicación del método de Newton a un sistema 2×2 .

Ejemplo 2.1. Usar el método de Newton para encontrar una solución del sistema

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} 6x^3 + xy - 3y^3 - 4 \\ x^2 - 18xy^2 + 16y^3 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1.13)$$

Las funciones del sistema en (2.1.13) tiene tres puntos de intersección, como se puede ver en la Figura 2.3. También se puede notar que una de las soluciones de F es $\vec{x}^* = (1, 1)$.

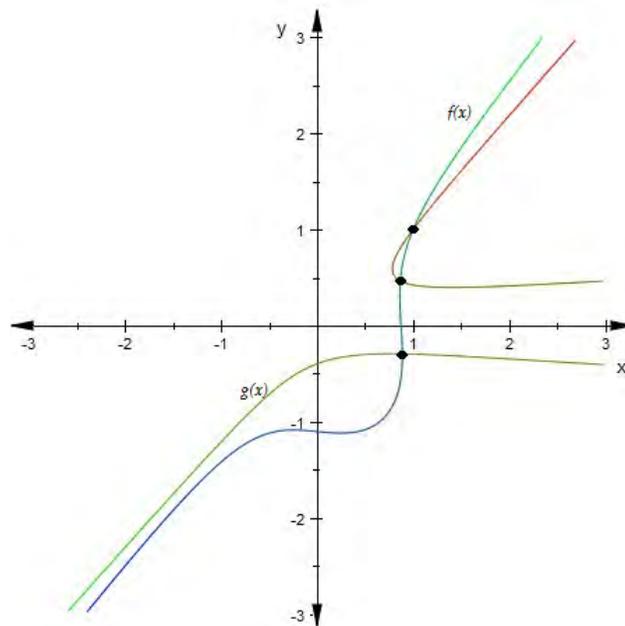


Figura 2.3: Gráfico asociado al sistema no lineal 2×2 .

Para aproximar el valor de \vec{x}^* a través de la iteración del método de Newton de acuerdo a (2.1.12), inicialmente se debe conocer la matriz jacobiana asociada al sistema F que está dada por

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} 18x^2 + y & x - 9y^2 \\ 2x - 18y^2 & -36xy + 48y^2 \end{bmatrix},$$

para la cual

$$\det(JF(x, y)) = -648x^3y + 864x^2y^2 + 48y^3 - 2x^2 - 162y^2.$$

Se itera el método de Newton con la implementación (A.1.4), para $\vec{x}^{(0)} = (2, 2)$ y $TOL = 10^{-4}$. Se obtuvo en 4 iteraciones la aproximación $\vec{x}^{(4)} = (1.000034, 1.000022)$ de la solución \vec{x}^* .

En las tablas 2.1 y 2.2 se itera el método de Newton, con $TOL = 10^{-4}$, para aproximar las otras dos soluciones del sistema en (2.1.13), de las cuales no se conoce su valor exacto, aunque se estiman de la Figura 2.3.

i	x_i	y_i	$\ \vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(i-1)}\ $
0	2.000000×10^0	1.000000×10^0	—
1	1.385405×10^0	7.335135×10^{-1}	6.69882×10^{-1}
2	1.035278×10^0	5.696648×10^{-1}	3.86569×10^{-1}
3	8.917050×10^{-1}	4.854231×10^{-1}	1.66463×10^{-1}
4	8.666166×10^{-1}	4.631443×10^{-1}	3.35526×10^{-2}
5	8.659393×10^{-1}	4.621688×10^{-1}	1.18760×10^{-3}
6	8.659389×10^{-1}	4.621679×10^{-1}	9.26519×10^{-7}

Tabla 2.1: Iteración del método de Newton con $(x_0, y_0) = (2, 1)$.

i	x_i	y_i	$\ \vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(i-1)}\ $
0	2.000000×10^0	-1.000000×10^0	—
1	1.397886×10^0	-6.785799×10^{-1}	6.82533×10^{-1}
2	1.055674×10^0	-4.696598×10^{-1}	4.00945×10^{-1}
3	9.147667×10^{-1}	-3.475421×10^{-1}	1.86461×10^{-1}
4	8.880776×10^{-1}	-3.003060×10^{-1}	5.42546×10^{-2}
5	8.868189×10^{-1}	-2.940995×10^{-1}	6.33287×10^{-3}
6	8.868094×10^{-1}	-2.940071×10^{-1}	9.29000×10^{-5}

Tabla 2.2: Iteración del método de Newton con $(x_0, y_0) = (2, -1)$.

En la Tabla 2.1 se obtuvo la aproximación $\vec{x}^{(6)} = (8.659389 \times 10^{-1}, 4.621679 \times 10^{-1})$ y en la Tabla 2.2 se obtuvo la aproximación $\vec{x}^{(6)} = (8.868094 \times 10^{-1}, -2.940071 \times 10^{-1})$. Teniendo en cuenta que se consiguió una aproximación correcta de la raíz \vec{x}^* a través del método de Newton, se considera que las aproximaciones obtenidas son confiables.

□

En el ejemplo anterior se mostró como con la iteración del método de Newton dada en (2.1.12) se logró aproximar las soluciones de un sistema 2×2 , dicha iteración se pudo obtener porque para matrices 2×2 se conoce la forma general de su inversa, en realidad la iteración en (2.1.10) se puede extender para aproximar la solución de sistemas $n \times n$. En la siguiente sección se presenta la generalización del método de Newton para sistemas $n \times n$ y un teorema de convergencia de este método.

2.2. Método de Newton para aproximación de sistemas $n \times n$.

De forma similar a la realizada anteriormente en la deducción del método de Newton para aproximar la solución de ecuaciones no lineales y de sistemas 2×2 , se puede obtener a partir de expansiones de series de Taylor para varias variables la función de iteración del método de Newton que aproxime la solución de sistemas $n \times n$. A continuación se presenta la generalización del método de Newton para funciones en \mathbb{R}^n , de acuerdo a lo expuesto en [2, 5, 10, 13, 15] y [20].

Sea $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función definida y diferenciable en el conjunto abierto U tal que $F(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))^t$, donde $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, con $i = 1, 2, \dots, n$, es una función diferenciable, el vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y t es la transpuesta del vector. Luego la solución de un sistema de ecuaciones no lineales

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

es un vector $\vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ para el cual $f_i(\vec{x}^*) = \vec{0}$ para todo $i = 1, \dots, n$. En adelante los sistemas de n ecuaciones no lineales con n incógnitas se denominan *sistemas $n \times n$* y el vector \vec{x}^* se llama *solución del sistema*.

Para encontrar un $\vec{x}^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $F(\vec{x}^*) = \vec{0}$, partiendo de una aproximación inicial $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$, la iteración del método de Newton está dada por

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - [JF(\vec{x}^{(k)})]^{-1} F(\vec{x}^{(k)}), \quad (2.2.1)$$

donde $[JF(\vec{x})]^{-1}$ es la inversa de la matriz jacobiana

$$JF(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{bmatrix}. \quad (2.2.2)$$

Para $n = 1$, $[JF(\vec{x})]^{-1} = \frac{1}{f_1'(\vec{x})}$ y la iteración (2.2.1) es equivalente a la iteración (1.2.9) del método de Newton en los reales. Además para $n = 2$, la iteración (2.2.1), es equivalente a la iteración (2.1.10) del método de Newton en sistemas 2×2 .

Observación 2.2. Algunas de las operaciones que se deben realizar en la iteración del método de Newton para aproximar sistemas $n \times n$ (2.2.1), son el cálculo de inversas de matrices, el producto

matriz por vector, resta de vectores e incluso el cálculo de derivadas parciales, las cuales pueden ser estudiadas en [1, 6] y [13].

Observación 2.3. Se adopta la notación $\vec{x}^{(i)}$ con $i \in \mathbb{N}$ y $\vec{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$, para representar el vector aproximación en la i -ésima iteración del método de Newton (2.2.1). De este modo, no se confunda con la notación x_i que representa la componente i -ésima del vector \vec{x} .

Como se expuso para el método del punto fijo y el método de Newton en el Capítulo 1, es importante garantizar la convergencia de los métodos iterativos. En este sentido, para el método de Newton en sistemas $n \times n$ se tiene el siguiente teorema de convergencia.

Teorema 2.1. Sea $D \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y $F : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F \in C^1(D)$. Suponga que existen constantes positivas α, β y γ tales que $h = \frac{\alpha\beta\gamma}{2} < 1$ y

- a. $\|JF(\vec{x}) - JF(\vec{y})\| \leq \alpha \|\vec{x} - \vec{y}\|$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in D$.
- b. $[JF(\vec{x})]^{-1}$ existe y satisface $\|[JF(\vec{x})]^{-1}\| \leq \beta$ para todo $\vec{x} \in D$.
- c. $\left\| [JF(\vec{x}^{(0)})]^{-1} F(\vec{x}^{(0)}) \right\| \leq \gamma$.

Entonces

1. $\|F(\vec{x}) - F(\vec{y}) - JF(\vec{y})(\vec{x} - \vec{y})\| \leq \frac{\alpha}{2} \|\vec{x} - \vec{y}\|^2$ para todo $\vec{x}, \vec{y} \in D$.
2. Para la sucesión $\{\vec{x}^{(k+1)}\}$, dada en (2.2.1), se verifica que $\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)}\| \leq \frac{\alpha\beta}{2} \|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)}\|^2$.
3. Existe el límite \vec{x}^* de la sucesión $\{\vec{x}^{(k+1)}\}$ que es una solución del sistema $F(\vec{x}) = \vec{0}$ en D y se verifica que $\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^*\| \leq \frac{h^{2^k - 1}}{1 - h^{2^k}} \gamma$.

El Teorema 2.1 muestra que bajo las hipótesis dadas, el método de Newton converge cuadráticamente y su demostración se puede revisar en [5].

Observación 2.4. Para aproximar la solución del sistema $F(\vec{x}) = \vec{0}$, donde $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, se puede usar el Algoritmo 3 del método de Newton para sistemas 2×2 , solo que considerando que $\vec{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ y $\vec{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^n$. Nuevamente se usa la norma euclidiana para el cálculo del error entre vectores $\vec{x}^{(i)}$ y \vec{x}^* . Por lo tanto

$$e_i = \|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^*\| = \sqrt{(x_1^{(i)} - x_1^*)^2 + (x_2^{(i)} - x_2^*)^2 + \dots + (x_n^{(i)} - x_n^*)^2}.$$

Acercas de normas vectoriales se puede ampliar en [1] y [6].

En el siguiente ejemplo se usa el método de Newton (2.2.1) para aproximar la solución de un sistema 3×3 .

Ejemplo 2.2. Aproximar a través del método de Newton, la raíz $\vec{x}^* = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{\pi}{6}\right) \approx (0.5, 0, -0.5235988)$ del siguiente sistema 3×3

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3x - \cos(yz) - \frac{1}{2} \\ x^2 - 81\left(y + \frac{1}{10}\right)^2 + \sin(z) + \frac{93}{50} \\ 20z + e^{-xy} + \frac{10\pi-3}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.2.3)$$

La matriz jacobiana asociada a (2.2.3) es

$$JF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3 & z \sin(yz) & y \sin(yz) \\ 2x & -162\left(y + \frac{1}{10}\right) & \cos(z) \\ -e^{-xy}y & -e^{-xy}x & 20 \end{bmatrix}$$

y su determinante $\det(JF(x, y, z))$, está dado por

$$e^{-xy} \left(x \cos(z) - 2x^2 - 162y^2 \left(y + \frac{1}{10} \right) \sin(yz) \right) + z \sin(yz) (\cos(z) - 2x) - 9720 \left(y + \frac{1}{10} \right).$$

Se considera la aproximación inicial $\vec{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$ y se itera el método de Newton dado en (2.2.1), donde para la primera iteración se tiene

$$\vec{x}^{(1)} = \vec{x}^{(0)} - [JF(\vec{x}^{(0)})]^{-1} F(\vec{x}^{(0)}), \quad (2.2.4)$$

con

$$JF(\vec{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{81}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}.$$

Como el $\det(JF(\vec{x}^{(0)})) \neq 0$, $JF(\vec{x}^{(0)})$ es invertible. Luego la matriz inversa de JF en $\vec{x}^{(0)}$, obtenida a través de eliminación Gaussiana, es

$$[JF(\vec{x}^{(0)})]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{5}{81} & \frac{1}{324} \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{bmatrix}.$$

Finalmente se reemplaza este resultado en la Ecuación (2.2.4) y se obtiene

$$\vec{x}^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{63 - 10\pi}{972}, -\frac{\pi}{6} \right) \approx (0.5, 0.03249390, -0.5235988).$$

La segunda iteración de (2.2.1) es

$$\vec{x}^{(2)} = \vec{x}^{(1)} - [JF(\vec{x}^{(1)})]^{-1} F(\vec{x}^{(1)}), \quad (2.2.5)$$

para la que se tiene

$$JF(\vec{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} 3 & -\frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{10\pi^2-63\pi}{5832}\right) & \left(\frac{63-10\pi}{972}\right) \sin\left(\frac{10\pi^2-63\pi}{5832}\right) \\ 1 & \frac{801-50\pi}{30} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{10\pi-63}{972e^{\frac{63-10\pi}{1944}}} & -\frac{1}{2e^{\frac{63-10\pi}{1944}}} & 20 \end{bmatrix}.$$

Dado que $\det(JF(\vec{x}^{(1)})) \neq 0$, se concluye que $JF(\vec{x}^{(1)})$ es invertible. Pero en este caso calcular $[JF(\vec{x}^{(1)})]^{-1}$ resulta más complicado y por tanto se recurre al uso del software MATLAB, de donde se obtuvo

$$[JF(\vec{x}^{(1)})]^{-1} = \begin{bmatrix} 3.333341 \times 10^{-1} & -2.408525 \times 10^{-6} & 2.651080 \times 10^{-7} \\ -1.553599 \times 10^{-2} & 4.654353 \times 10^{-2} & -2.015402 \times 10^{-3} \\ 1.506983 \times 10^{-4} & 1.144832 \times 10^{-3} & 4.995043 \times 10^{-2} \end{bmatrix}.$$

Se reemplazan los valores obtenidos en la Ecuación (2.2.5) y se obtiene

$$\vec{x}^{(2)} = (4.999568 \times 10^{-1}, -6.536697 \times 10^{-2}, -5.252002 \times 10^{-1}).$$

Se itera el método de Newton con tolerancia $TOL = 10^{-4}$ usando MATLAB y se obtiene en 4 iteraciones la aproximación $\vec{x}^{(4)} = (4.999234 \times 10^{-1}, 4.101933 \times 10^{-2}, -5.225839 \times 10^{-1})$ de \vec{x}^* . En la práctica obtener los valores de $[JF(\vec{x}^{(i)})]^{-1}$ en cada iteración, no es un trabajo sencillo y conlleva a realizar demasiados cálculos. □

Como se observó en el Ejemplo 2.2, para $k > 2$ y $k \in \mathbb{N}$, una de las dificultades de la iteración (2.2.1) del método de Newton para sistemas $n \times n$ es el cálculo por iteración de la inversa de la matriz jacobiana $[JF(\vec{x}^{(i)})]^{-1}$. En la práctica, el cálculo de la inversa de una matriz se cambia por la solución de un sistema lineal de la forma

$$A\vec{x} = \vec{b}, \tag{2.2.6}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz invertible, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ es el vector solución y $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ es el vector resultante del producto entre la matriz A y el vector \vec{x} . Note que la solución del sistema lineal (2.2.6) es

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b},$$

por tal motivo calcular la inversa de la matriz A , equivale a solucionar el sistema lineal.

La iteración (2.2.1) se transforma en un sistema lineal, tomando

$$\vec{y}^{(k)} = [JF(\vec{x}^{(k)})]^{-1} F(\vec{x}^{(k)}),$$

de donde el vector $\vec{y}^{(k)}$ se obtiene solucionando el sistema

$$JF(\vec{x}^{(k)})\vec{y}^{(k)} = F(\vec{x}^{(k)}).$$

Luego la iteración del método de Newton para sistemas $n \times n$, a partir de una aproximación inicial $\vec{x}^{(0)}$, está dada por

$$\begin{cases} JF(\vec{x}^{(k)})\vec{y}^{(k)} = F(\vec{x}^{(k)}), \\ \vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \vec{y}^{(k)}, k \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (2.2.7)$$

El Algoritmo 4, presenta la iteración del método de Newton para sistemas $n \times n$, dada una aproximación inicial $\vec{x}^{(0)}$.

Entrada: $\vec{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$; *TOL*; *ITMAX*.

Salida: Solución aproximada $\vec{x}^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ o mensaje de error.

Inicio

| $i = 0$

| **Hacer**

| | $JF(\vec{x}^{(i)})\vec{y}^{(i)} = F(\vec{x}^{(i)})$ //Solución del sistema

| | $\vec{x}^{(i+1)} = \vec{x}^{(i)} - \vec{y}^{(i)}$

| | $i = i + 1$

| **Mientras** $\|\vec{x}^{(i)} - \vec{x}^{(i-1)}\| > TOL$ e $i \leq ITMAX$;

| **Si** $i > ITMAX$ **entonces**

| | Salida: "El método fracasó"

| **Sino**

| | Salida: $\vec{x}^{(i)}$

| **Fin**

Fin

Algoritmo 4: Método de Newton para sistemas $n \times n$.

Como se mencionó, en el caso de sistemas $n \times n$ el procedimiento de iteración del método de Newton se complica debido a que en cada iteración se debe calcular e invertir la matriz jacobiana. En vista de esta dificultad se han desarrollado modificaciones del método de Newton generalizado para aproximar el valor de la inversa de la matriz jacobiana. En la siguiente sección se presentan algunas alternativas del método de Newton modificado.

2.3. Modificaciones al método de Newton generalizado.

En la implementación del cálculo de la matriz jacobiana y su inversa se deben realizar diferentes aproximaciones con el fin de obtener un método general incluso si esta se conoce de forma exacta, el cálculo de su inversa es un problema que se resuelve a partir de diferentes métodos del álgebra

lineal numérica. Es así como a partir de los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel se puede obtener una aproximación de la inversa de la matriz Jacobiana, como se puede ver en [1, 2, 3, 5] y [18].

Se presentan a seguir modificaciones del método de Newton a partir de la aproximación de la inversa de la matriz jacobiana.

2.3.1. Modificación con el método de Jacobi

El método de Jacobi, es un método iterativo para aproximar una solución del sistema

$$A\vec{x} = \vec{b}, \quad (2.3.1)$$

para el que A , \vec{x} y \vec{b} se definen como en (2.2.6). Este método y otros métodos iterativos como el de Gauss-Seidel, resultan de descomponer la matriz A de la forma

$$A = M - N, \quad (2.3.2)$$

donde M es una matriz arbitraria no singular y N es la matriz que resulta de la diferencia $M - A$.

El método de Jacobi considera $M = D$ y $N = -(L + U)$, donde D es la matriz diagonal principal de A , es decir $D = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$; L es la matriz triangular inferior de A tal que $l_{ij} = a_{ij}$ para todo $i > j$ y $l_{ij} = 0$ para todo $i \leq j$ y U es la matriz triangular superior de A donde $u_{ij} = a_{ij}$ para todo $i < j$ y $u_{ij} = 0$ para todo $i \geq j$. Luego la matriz A se descompone de la siguiente forma

$$A = M - N = D + (L + U),$$

de donde al sustituir la matriz A en (2.3.1), se tiene

$$[D + (L + U)]\vec{x} = \vec{b}.$$

De aquí se obtiene

$$\vec{x} = -D^{-1}(L + U)\vec{x} + D^{-1}\vec{b},$$

lo que en forma iterativa sería

$$\vec{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L + U)\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}. \quad (2.3.3)$$

Como $-(L + U) = D - A$, se reduce la forma iterativa en (2.3.3) a

$$\vec{x}^{(k+1)} = [I - D^{-1}A]\vec{x}^{(k)} + D^{-1}\vec{b}, \quad (2.3.4)$$

que es la *iteración del método de Jacobi* e I es la matriz identidad.

Si ahora consideramos la iteración del método de Newton generalizado considerado en (2.2.7), es decir

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \left[JF \left(\vec{x}^{(k)} \right) \right]^{-1} F \left(\vec{x}^{(k)} \right),$$

en el cual multiplicando por $JF \left(\vec{x}^{(k)} \right)$ se obtiene

$$JF \left(\vec{x}^{(k)} \right) \vec{x}^{(k+1)} = JF \left(\vec{x}^{(k)} \right) \vec{x}^{(k)} - F \left(\vec{x}^{(k)} \right), \quad (2.3.5)$$

el cual es un sistema lineal en la forma (2.3.1) con $A = JF \left(\vec{x}^{(k)} \right)$ y $\vec{b} = JF \left(\vec{x}^{(k)} \right) \vec{x}^{(k)} - F \left(\vec{x}^{(k)} \right)$. Se aplica la forma iterativa de Jacobi (2.3.4) para (2.3.5) y se obtiene

$$\vec{x}^{(k+1)} = \left[I - \left[DJF \left(\vec{x}^{(k)} \right) \right]^{-1} JF \left(\vec{x}^{(k)} \right) \right] \vec{x}^{(k)} + \left[DJF \left(\vec{x}^{(k)} \right) \right]^{-1} \left[JF \left(\vec{x}^{(k)} \right) \vec{x}^{(k)} - F \left(\vec{x}^{(k)} \right) \right],$$

de donde

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \left[DJF \left(\vec{x}^{(k)} \right) \right]^{-1} F \left(\vec{x}^{(k)} \right) \quad (2.3.6)$$

es la *iteración del método de Newton modificado con método de Jacobi*, donde $DJF \left(\vec{x}^{(k)} \right)$ está formada por la diagonal principal de la matriz jacobiana $JF \left(\vec{x}^{(k)} \right)$ que tiene la siguiente forma

$$DJF \left(\vec{x}^{(k)} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \left(\vec{x}^{(k)} \right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \left(\vec{x}^{(k)} \right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \left(\vec{x}^{(k)} \right) \end{bmatrix}.$$

La idea general de esta modificación es sustituir en cada iteración de (2.2.1) la matriz jacobiana $JF \left(\vec{x}^{(k)} \right)$ por la matriz diagonal $DJF \left(\vec{x}^{(k)} \right)$. Se resalta que en este caso ya no se calcula la inversa de una matriz, puesto que para matrices diagonales se conoce la forma general de su inversa, sino que se calcula una matriz que solo contiene las derivadas parciales de la diagonal principal de $JF \left(\vec{x}^{(k)} \right)$.

El siguiente teorema garantiza la convergencia del método de Jacobi y su demostración se puede ver en [1] y [3].

Teorema 2.2. *Si A es una matriz estrictamente diagonal dominante, entonces la iteración del método de Jacobi converge para cualquier valor inicial.*

Del Teorema (2.2), se concluye que en la iteración (2.3.6), la matriz $JF \left(\vec{x}^{(k)} \right)$ debe ser estrictamente diagonal dominante. Por lo cual $JF \left(\vec{x}^{(k)} \right)$, debe satisfacer que

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \left(\vec{x}^{(k)} \right) \right| > \sum_{j=1, j \neq i}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \left(\vec{x}^{(k)} \right) \right|, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n.$$

2.3.2. Modificación con el método de Gauss Seidel

Al igual que con el método de Jacobi, en este caso se busca resolver el sistema (2.3.1), pero usando el método de Gauss-Seidel. En este método se utiliza la descomposición de la matriz A de la forma (2.3.2), donde $M = D + L$ y $N = -U$ y se obtiene la forma iterativa

$$\vec{x}^{(k+1)} = -[D + L]^{-1} U \vec{x}^{(k)} + [D + L]^{-1} \vec{b},$$

donde como $-U = D + L - A$ se tiene que

$$\vec{x}^{(k+1)} = \left(I - [D + L]^{-1} A \right) \vec{x}^{(k)} + [D + L]^{-1} \vec{b}, \quad (2.3.7)$$

que es la *iteración del método de Gauss-Seidel*.

Al aplicar la iteración (2.3.7) en (2.2.1), se obtiene la siguiente *iteración para el método de Newton modificado con el método de Gauss-Seidel*

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \left[DJF \left(\vec{x}^{(k)} \right) + LJF \left(\vec{x}^{(k)} \right) \right]^{-1} F \left(\vec{x}^{(k)} \right),$$

donde DJF es la diagonal principal de la matriz jacobiana JF y LJF es la matriz triangular inferior de JF y $DJ \left(\vec{x}^{(k)} \right) + LJ \left(\vec{x}^{(k)} \right)$ tiene la siguiente forma

$$DJ \left(\vec{x}^{(k)} \right) + LJ \left(\vec{x}^{(k)} \right) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \left(\vec{x}^{(k)} \right) & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \left(\vec{x}^{(k)} \right) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \left(\vec{x}^{(k)} \right) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} \left(\vec{x}^{(k)} \right) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} \left(\vec{x}^{(k)} \right) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \left(\vec{x}^{(k)} \right) \end{bmatrix}.$$

Observación 2.5. Así como para el método de Jacobi, el método de Gauss-Seidel también converge si A es una matriz estrictamente diagonal dominante. Este resultado se puede ampliar en [1] y [3]. Además, en este caso calcular la inversa de la matriz $DJ \left(\vec{x}^{(k)} \right) + LJ \left(\vec{x}^{(k)} \right)$ se puede hacer mediante eliminación Gaussiana, puesto que se trata de una matriz triangular inferior.

Existen otros métodos para aproximar la matriz jacobiana de la iteración del método de Newton en (2.2.1), estos métodos se conocen como métodos cuasi-Newton entre los que se encuentra el método de Broyden. A cerca de dichos métodos se puede ampliar en [2] y [15].

En el siguiente capítulo, a través de soluciones numéricas, se muestra la relación entre el método de Newton para sistemas 2×2 y la iteración del método para funciones de variable compleja, estudiada en el Capítulo 1; se presenta la aplicación del método de Newton modificado con método de Jacobi y método de Gauss-Seidel aplicada al Ejemplo 2.2 y se muestran fractales obtenidos con la aplicación del método de Newton al problema de Cayley.

Capítulo 3

Resultados numéricos

En este capítulo se presentan diferentes soluciones numéricas con el objetivo de verificar los resultados teóricos presentados en los capítulos 1 y 2, al aplicarse las implementaciones obtenidas en problemas de aproximación de la solución de ecuaciones no lineales y de sistemas de ecuaciones no lineales. Además se estudia el problema de Cayley, a través de la extensión del método de Newton para funciones de variable compleja y de su generalización para sistemas 2×2 .

3.1. Validación de implementaciones

Se ha implementado el método de Newton en lenguaje *C*, mediante el software Dev C++ y las modificaciones del método de Newton generalizado en MATLAB, como se puede revisar en el Apéndice A.1. Los problemas que se presentan en los siguientes apartados tienen como fin verificar las implementaciones realizadas y analizar ciertas propiedades, y las relaciones existentes entre los métodos de Newton real, complejo y para sistemas $n \times n$.

3.1.1. Método de Newton y método del punto fijo

Como se mencionó en el Capítulo 1 el método de Newton cuenta con convergencia cuadrática mientras el método del punto fijo cuenta con convergencia lineal. En el siguiente problema se verifica el orden de convergencia de los métodos, utilizando la expresión (1.1.2) y se hace una comparación entre las aproximaciones obtenidas con los dos métodos.

Problema 3.1. Aproximar a través del método del punto fijo y el método de Newton el valor de la raíz $x^* \in [\frac{1}{2}, 2]$ de la función $f(x) = x^4 + 2x^2 - x - 3$.

La función $f(x)$ tiene una única raíz $x^* \in [\frac{1}{2}, 2]$, de la que no se conoce su valor exacto. Para aproximar el valor de esta raíz a través del método del punto fijo, se debe escribir $f(x)$ en la forma

$x = g(x)$ y garantizar que se cumpla el Teorema 1.1. Consideremos $g_1(x) = x^4 + 2x^2 - 3$, que está definida en $[\frac{1}{2}, 2]$, pero como

$$g_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-39}{16} = -2.4375 \quad \text{y} \quad g_1(2) = 21,$$

entonces $g_1(x) \notin [\frac{1}{2}, 2]$ para todo $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ y además como

$$|g_1'(x)| = |4(x^3 + x)| \quad \text{no es menor que 1 para todo } x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right],$$

se concluye del Teorema 1.1 que no se puede garantizar convergencia del método del punto fijo para g_1 a x^* , para cualquier $x_0 \in [\frac{1}{2}, 2]$. Lo que se puede observar al iterar $x_{i+1} = g_1(x_i)$ a partir de $x_0 = 1.9$ con tolerancia 10^{-2} .

- Primera iteración: $x_1 = g_1(1.9) = 17.2521$. El error sería

$$e_1 = |17.2521 - 1.9| = 15.3521 > 10^{-2}.$$

- Segunda iteración: $x_2 = g_1(17.2521) = 89178.8360$. En este caso, el error sería

$$e_2 = |89178.8360 - 17.2521| = 89161.5839 > 10^{-2}.$$

En las iteraciones anteriores se puede observar como el error crece a medida que las iteraciones aumentan y no se tiene convergencia. Ahora, si consideramos $g_2(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x^2+2}}$, que también está definida en $[\frac{1}{2}, 2]$ y como en este caso

$$g_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{14}}{3} = 1.25 \quad \text{y} \quad g_2(2) = \sqrt{\frac{5}{6}} = 0.91,$$

entonces debido a que en el intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$ la función g_2 es decreciente, se tiene que $g_2(x) \in [\frac{1}{2}, 2]$ para todo $x \in [\frac{1}{2}, 2]$. Además

$$|g_2'(x)| = \left| \frac{-x^2 - 6x + 2}{2(x^2 + 2)^2 \sqrt{\frac{x+3}{x^2+2}}} \right| \leq 1 \quad \text{para todo } x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right].$$

Luego del Teorema 1.1 se garantiza la convergencia del método del punto fijo para g_2 a la raíz x^* , a partir de cualquier $x_0 \in [\frac{1}{2}, 2]$. La Tabla 1.2 muestra los resultados de la iteración del método del punto fijo con $TOL = 10^{-4}$ y $x_0 = 1.9$, donde se pudo observar que la aproximación obtenida es $x_8 = 1.124135$ en 8 iteraciones. Como en este caso no se conoce el valor exacto de x^* , se resalta la importancia de utilizar la aproximación del error por iteración, $e_i = |x_{i+1} - x_i|$.

Además en la Tabla 3.2 cabe resaltar los resultados de las columnas 5 y 6, en las que se verificó el orden de convergencia del método del punto fijo de acuerdo a la expresión vista en (1.1.2). En la

i	x_i	$g(x_i)$	$ x_i - x_{i-1} $	$\frac{ x_i - x_{i-1} }{ x_{i-1} - x_{i-2} }$	$\frac{ x_i - x_{i-1} }{ x_{i-1} - x_{i-2} ^2}$
0	1.900000×10^0	9.345803×10^{-1}	—	—	—
1	9.345803×10^{-1}	1.170168×10^0	9.65420×10^{-1}	—	—
2	1.170168×10^0	1.112519×10^0	2.35587×10^{-1}	2.44026×10^{-1}	2.52767×10^{-1}
3	1.112519×10^0	1.127031×10^0	5.76488×10^{-2}	2.44702×10^{-1}	1.03869×10^{-1}
4	1.127031×10^0	1.123393×10^0	1.45118×10^{-2}	2.51728×10^{-1}	4.36658×10^0
5	1.123393×10^0	1.124306×10^0	3.63750×10^{-3}	2.50658×10^{-1}	1.72726×10^{-1}
6	1.124306×10^0	1.124077×10^0	9.12876×10^{-4}	2.50963×10^{-1}	6.89931×10^{-1}
7	1.124077×10^0	1.124135×10^0	2.29030×10^{-4}	2.50888×10^{-1}	2.74833×10^{-2}
8	1.124135×10^0	1.124120×10^0	5.74653×10^{-5}	2.50907×10^{-1}	1.09552×10^{-3}

Tabla 3.1: Iteración del método del punto fijo con $x_0 = 1.9$.

columna 5 se verifica convergencia lineal del método del punto fijo puesto que los valores obtenidos tienden a $K = 0.25$. Mientras en la columna 6, se muestra que no se tiene convergencia cuadrática. Por otro lado, para el método de Newton, se verifican las condiciones del Teorema 1.8. La función $f(x) = x^4 + 2x^3 - x - 3$ es tal que $f \in C^2[\frac{1}{2}, 2]$ es decreciente, en dicho intervalo. Además f tiene una única raíz $x^* \in [\frac{1}{2}, 2]$ y como

$$\left| \frac{f(\frac{1}{2})}{f'(\frac{1}{2})} \right| = -\frac{51}{16} \text{ y } \left| \frac{f(2)}{f'(2)} \right| = \frac{27}{55} \text{ son menores que } \frac{3}{2},$$

donde $\frac{3}{2}$ es la diferencia entre los extremos del intervalo $[\frac{1}{2}, 2]$, se sigue por el Teorema 1.8 que el método de Newton converge para cualquier $x_0 \in [\frac{1}{2}, 2]$. Nuevamente, se considera $x_0 = 1.9$ y se itera el método de Newton con $TOL = 10^{-4}$, de donde se obtiene la Tabla 3.2 y la aproximación $x_5 = 1.124123$ en 5 iteraciones.

i	x_i	$ x_i - x_{i-1} $	$\frac{ x_i - x_{i-1} }{ x_{i-1} - x_{i-2} }$	$\frac{ x_i - x_{i-1} }{ x_{i-1} - x_{i-2} ^2}$	$\frac{ x_i - x_{i-1} }{ x_{i-1} - x_{i-2} ^3}$
0	1.900000	—	—	—	—
1	1.448945	4.51055×10^{-1}	—	—	—
2	1.203857	2.45088×10^{-1}	5.43367×10^{-1}	1.20466×10^0	2.67076×10^0
3	1.130200	7.36571×10^{-2}	3.00533×10^{-1}	1.22623×10^0	5.00320×10^0
4	1.124161	6.03871×10^{-3}	8.19841×10^{-2}	1.11305×10^0	1.51112×10^{-1}
5	1.124123	3.83281×10^{-5}	6.34706×10^{-3}	1.05106×10^0	1.74054×10^{-2}

Tabla 3.2: Iteración del método del punto fijo con $x_0 = 1.9$.

En la Tabla 3.2 también se ha verificado la convergencia cuadrática del método de Newton en las columnas 4, 5 y 6. En la columna 4 se muestra que al verificar convergencia lineal del método no se puede concluir que los valores obtenidos tiendan a algún valor K . Asimismo, en la columna 6 se pretende verificar orden de convergencia 3, pero los valores obtenidos son oscilantes. En la columna 5, por otro lado, se observa que los valores obtenidos tienden a 1, lo que verifica la convergencia

cuadrática del método de Newton.

Finalmente al evaluar la función f en las dos aproximaciones obtenidas, se tiene para el método del punto fijo $f(x_8) = 1,057945 \times 10^{-4}$ y para el método de Newton $f(x_5) = -5,478248113 \times 10^{-7}$, lo que muestra que la aproximación obtenida con el método de Newton está mas cercana de la raíz x^* . \square

3.1.2. Método de Newton y raíces complejas

En el Ejemplo 1.2, se aproximó a través del método de Newton la raíz real de $x^3 + x + 1 = 0$. Sin embargo, esta función tiene tres raíces una real y dos complejas. Así, e interés del siguiente problema es aproximar las tres raíces, aplicando la iteración del método de Newton (1.4.1) y la fórmula de D'Moivre, a la ecuación equivalente $z^3 + z + 1 = 0$, con $z \in \mathbb{C}$.

Problema 3.2. Aproximar a través del método de Newton el valor de las raíces de $f(z) = z^3 + z + 1$.

Las raíces exactas de $f(z)$ son

$$z_1^* = \frac{-3\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{(\sqrt{837} - 27)^2}}{3\sqrt[3]{\sqrt{837} - 54}} = -6.82327803 \times 10^{-1},$$

$$z_2^* = \frac{6\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}(\sqrt{837} - 27)^{\frac{2}{3}}}{12(\sqrt{837} - 27)^{\frac{1}{3}}} + \frac{6\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}(\sqrt{837} - 27)^{\frac{2}{3}}}{12(\sqrt{837} - 27)^{\frac{1}{3}}}\sqrt{3}i = 3.4116390 \times 10^{-1} + 1.1615414i \quad y$$

$$z_3^* = \frac{6\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}(\sqrt{837} - 27)^{\frac{2}{3}}}{12(\sqrt{837} - 27)^{\frac{1}{3}}} - \frac{6\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}(\sqrt{837} - 27)^{\frac{2}{3}}}{12(\sqrt{837} - 27)^{\frac{1}{3}}}\sqrt{3}i = 3.4116390 \times 10^{-1} - 1.1615414i.$$

Para la función $f(z) = z^3 + z + 1$, la función de iteración del método de Newton es

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 + z_k + 1}{3z_k^2 + 1} = \frac{2z_k^3 - 1}{3z_k^2 + 1}.$$

Se itera el método de Newton con tolerancia $TOL = 10^{-7}$ y $z_0 = i$. En la Tabla 3.3 se obtiene la aproximación $z_5 = 3.41163902 \times 10^{-1} + 1.16154140i$ para la raíz z_2^* , la cual tiene 9 cifras decimales de exactitud con respecto a la raíz.

Como se mencionó para $z^2 + 1 = 0$ en la Sección 1.4, las raíces conjugadas se pueden aproximar a partir de aproximaciones iniciales conjugadas, por tanto la raíz conjugada z_3^* se aproxima a partir de la aproximación inicial $z_0 = -i$, se itera el método de Newton y se obtiene la Tabla 3.4 donde como se esperaba, la aproximación obtenida es $z_5 = 3.41163902 \times 10^{-1} + 1.16154140i$ que tiene 9 cifras decimales de exactitud con respecto a z_3^* .

De estos resultados se puede notar que al tener raíces conjugadas z_1 y z_2 basta con iterar el método de Newton para alguna de ellas, puesto que la aproximación que se obtendrá para la otra será conjugada

i	$Re(z_i)$	$Im(z_i)$	$ z_i - z^* $
0	0.00000000×10^0	1.00000000×10^0	1.00000×10^0
1	$5.00000000 \times 10^{-1}$	1.00000000×10^0	2.26549×10^{-1}
2	$3.01775148 \times 10^{-1}$	1.12426036×10^0	5.42342×10^{-2}
3	$3.44177930 \times 10^{-1}$	1.16265701×10^0	3.21387×10^{-3}
4	$3.41173384 \times 10^{-1}$	1.16153714×10^0	1.03953×10^{-5}
5	$3.41163902 \times 10^{-1}$	1.16154140×10^0	1.87361×10^{-9}

Tabla 3.3: Iteración del método de Newton con $z_0 = i$.

i	$Re(z_i)$	$Im(z_i)$	$ z_i - z^* $
0	0.00000000×10^0	-1.00000000×10^0	1.00000×10^0
1	$5.00000000 \times 10^{-1}$	-1.00000000×10^0	2.26549×10^{-1}
2	$3.01775148 \times 10^{-1}$	-1.12426036×10^0	5.42342×10^{-2}
3	$3.44177930 \times 10^{-1}$	-1.16265701×10^0	3.21387×10^{-3}
4	$3.41173384 \times 10^{-1}$	-1.16153714×10^0	1.03953×10^{-5}
5	$3.41163902 \times 10^{-1}$	-1.16154140×10^0	1.87361×10^{-9}

Tabla 3.4: Iteración del método de Newton con $z_0 = -i$.

a la ya encontrada.

Ahora, para obtener una aproximación de la raíz z_1^* en el Ejemplo 1.2, se obtuvo la Tabla 1.3 donde se mostró la convergencia del método de Newton a la raíz real desde ciertas aproximaciones iniciales reales. En realidad el método de Newton en el plano complejo converge desde una aproximación inicial real o bien desde una aproximación inicial compleja y esto se debe a que $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. En la Tabla 3.5 se puede observar como desde ciertas aproximaciones iniciales complejas, el método de Newton complejo converge a la raíz real z_1^* .

z_0	# Ite.(i)	$Re(z_i)$	$Im(z_i)$	$ z_i - z^* $
$-0.5i$	9	$-6.82327804 \times 10^{-1}$	$1.24570332 \times 10^{-14}$	8.28021×10^{-10}
$-0.4i$	7	$-6.82327804 \times 10^{-1}$	$-8.57090675 \times 10^{-15}$	8.28167×10^{-10}
$-0.2i$	6	$-6.82327804 \times 10^{-1}$	$-1.31636148 \times 10^{-16}$	8.28020×10^{-10}
$-0.1i$	9	$-6.82327804 \times 10^{-1}$	$-2.23764140 \times 10^{-20}$	8.28019×10^{-10}

Tabla 3.5: Iteraciones del método de Newton complejo para ciertas aproximaciones iniciales.

□

3.1.3. Método de Newton y la equivalencia topológica entre \mathbb{R}^2 y \mathbb{C}

Como se mencionó en el Capítulo 1, existe una equivalencia topológica de \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 . Debido a esto, dada una función $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ de variable compleja z , con $z = x + yi$, donde $x, y \in \mathbb{R}$, la función f se puede descomponer en dos funciones f_r y f_i , que corresponden a la parte real e imaginaria respectivamente, donde $f(z) = f_r(x, y) + f_i(x, y)i$. Así resolver el problema $f(z) = 0$, es equivalente

a resolver el sistema

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} f_r(x, y) \\ f_i(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.1.1)$$

De donde en este caso, se tiene un sistema 2×2 y para su aproximación se aplica la iteración (2.1.12) al sistema $F(x, y)$ equivalente y se resuelve el problema $F(x, y) = \vec{0}$. El siguiente problema ilustra lo anterior.

Problema 3.3. Aproximar a través del método de Newton la soluciones de $f(z) = z^4 - 1$.

Las soluciones exactas de $f(z)$ son

$$z_1^* = 1, \quad z_2^* = -1, \quad z_3^* = i \quad y \quad z_4^* = -i. \quad (3.1.2)$$

En primer lugar se deduce el sistema 2×2 equivalente a $f(z)$.

Sea $z = x + yi$, con $x, y \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} z^4 - 1 &= (x + iy)^4 - 1 \\ &= (x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 1) + (4x^3y - 4xy^3)i, \end{aligned}$$

de donde $f_r(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 1$ y $f_i(x, y) = 4x^3y - 4xy^3$. Por tanto, el sistema asociado es

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^4 - 6x^2y^2 + y^4 - 1 \\ 4x^3y - 4xy^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.1.3)$$

para el que las soluciones exactas son

$$\vec{x}_1^* = (1, 0), \quad \vec{x}_2^* = (-1, 0), \quad \vec{x}_3^* = (0, 1) \quad y \quad \vec{x}_4^* = (0, -1).$$

Nótese que estas soluciones son equivalentes a las raíces mostradas en (3.1.2).

Para el sistema (3.1.3) la matriz jacobiana es como sigue

$$JF(x, y) = \begin{bmatrix} 4x^3 - 12xy^2 & -12x^2y - 4y^3 \\ 12x^2y - 4y^3 & 4x^3 - 12xy^2 \end{bmatrix}, \quad (3.1.4)$$

de donde $\det(JF(x, y)) = 16x^6 + 144x^2y^4 + 88x^4y^2 - 16y^6$.

Al iterar el método de Newton en (2.1.12) se obtiene la Tabla 3.6 con tolerancia $TOL = 10^{-7}$ y $\vec{x}^{(0)} = (0.2, -0.6)$ donde se aproxima el valor de la solución \vec{x}_4^* con el valor

$$(x_{10}, y_{10}) = (3.44984999 \times 10^{-13}, -1.00000000),$$

que es equivalente a la raíz $z_4^* = -i$.

i	x_i	y_i	$\ \vec{x}_{(i)} - \vec{x}^*\ $
1	$-6.62499906 \times 10^{-1}$	-1.01249995×10^0	6.62618×10^{-1}
2	$-3.57724263 \times 10^{-1}$	$-7.35857663 \times 10^{-1}$	4.44677×10^{-1}
3	$1.77776264 \times 10^{-1}$	$-6.48518914 \times 10^{-1}$	3.93882×10^{-1}
4	$-4.57992319 \times 10^{-1}$	-1.05764118×10^0	4.61605×10^{-1}
5	$-1.89814810 \times 10^{-1}$	$-8.48430329 \times 10^{-1}$	2.42905×10^{-1}
6	$9.09773214 \times 10^{-2}$	$-9.36789353 \times 10^{-1}$	1.10781×10^{-1}
7	$-1.76344604 \times 10^{-2}$	$-9.89880498 \times 10^{-1}$	2.033171×10^{-2}
8	$5.34615599 \times 10^{-4}$	$-9.99665825 \times 10^{-1}$	6.30465×10^{-4}
9	$-5.36088318 \times 10^{-7}$	$-9.9999767 \times 10^{-1}$	5.84666×10^{-7}
10	$3.44984999 \times 10^{-13}$	-1.00000000×10^0	5.08796×10^{-9}

Tabla 3.6: Iteración del método de Newton para sistemas con $(x_0, y_0) = (0.2, -0.6)$.

i	x_i	y_i	$\ \vec{x}_{(i)} - \vec{x}^*\ $
1	$-6.62499906 \times 10^{-1}$	1.01249995×10^0	6.62618×10^{-1}
2	$-3.57724263 \times 10^{-1}$	$7.35857663 \times 10^{-1}$	4.44677×10^{-1}
3	$1.77776264 \times 10^{-1}$	$6.48518914 \times 10^{-1}$	3.93882×10^{-1}
4	$-4.57992319 \times 10^{-1}$	1.05764118×10^0	4.61605×10^{-1}
5	$-1.89814810 \times 10^{-1}$	$8.48430329 \times 10^{-1}$	2.42905×10^{-1}
6	$9.09773214 \times 10^{-2}$	$9.36789353 \times 10^{-1}$	1.10781×10^{-1}
7	$-1.76344604 \times 10^{-2}$	$9.89880498 \times 10^{-1}$	2.033171×10^{-2}
8	$5.34615599 \times 10^{-4}$	$9.99665825 \times 10^{-1}$	6.30465×10^{-4}
9	$-5.36088318 \times 10^{-7}$	9.9999767×10^{-1}	5.84666×10^{-7}
10	$3.44984999 \times 10^{-13}$	1.00000000×10^0	5.08796×10^{-9}

Tabla 3.7: Iteración del método de Newton para sistemas con $(x_0, y_0) = (0.2, 0.6)$.

Como las soluciones complejas equivalentes a \vec{x}_3^* y \vec{x}_4^* son conjugadas, se deduce que el método de Newton debe converger \vec{x}_3^* a partir de una aproximación inicial conjugada a la tomada en la Tabla 3.6. Este hecho se puede verificar en la Tabla 3.7, donde se obtuvo la solución

$$(x_{10}, y_{10}) = (3.44984999 \times 10^{-13}, 1.00000000),$$

que es equivalente a la raíz $z_3^* = i$.

Por otro lado a partir de las aproximaciones iniciales $(-0.6, 0.2)$ y $(0.6, 0.2)$ se obtuvieron las aproximaciones $(x_{10}, y_{10}) = (-1.00000000, 5.05600128 \times 10^{-13})$ y

$$(x_{10}, y_{10}) = (1.00000000, 5.05600128 \times 10^{-13})$$

para las raíces \vec{x}_1^* y \vec{x}_2^* respectivamente. En este caso se puede observar como el método de Newton converge a las 4 soluciones del sistema F y por consiguiente, se determinaron las cuatro raíces complejas.

□

En el Problema 3.3, una ecuación de variable compleja se pudo resolver satisfactoriamente a través de la generalización del método de Newton a sistemas de ecuaciones no lineales. Lo que permite contar con dos formas de aproximar las soluciones de una ecuación de variable compleja a través del método de Newton.

En la Tabla 3.8 se muestran los resultados de iterar el método de Newton en (1.4.1) para aproximar las 4 raíces (3.1.2) de $z^4 - 1 = 0$, con $TOL = 10^{-7}$ y ciertas aproximaciones iniciales. Se puede observar como estos resultados obtenidos a partir del método de Newton complejo se obtuvieron en el mismo número de iteraciones que los obtenidos con el método de Newton para sistemas 2×2 . Además, las aproximaciones obtenidas para \bar{x}_1^* , \bar{x}_2^* , \bar{x}_3^* y \bar{x}_4^* , tienen mayor decimales de exactitud que las obtenidas en la Tabla 3.8. Esto se debe a que las operaciones que se realizan en cada caso son diferentes.

z_0	#Ite.(i)	$Re(z_i)$	$Im(z_i)$	$ z_i - z^* $
$-0.6 + 0.2i$	10	$-9.99999991 \times 10^{-1}$	$-1.04115189 \times 10^{-10}$	8.98666×10^{-9}
$0.6 + 0.2i$	10	1.00000000×10^0	$4.21038131 \times 10^{-13}$	5.33832×10^{-13}
$0.2 - 0.6i$	10	$-5.97563450 \times 10^{-11}$	$-9.99999991 \times 10^{-1}$	8.703570×10^{-9}
$0.2 + 0.6i$	10	$-5.97563450 \times 10^{-11}$	$9.99999991 \times 10^{-1}$	8.703570×10^{-9}

Tabla 3.8: Iteraciones del método de Newton complejo.

3.1.4. Método de Newton y los métodos de Newton modificados

En el Ejemplo 2.2 se realizaron algunas iteraciones del método de Newton generalizado donde se notó como el proceso de iteración se torna complicado. En el siguiente problema se muestra la aplicación del método de Newton modificado con método de Jacobi y de Gauss-Seidel para el Ejemplo 2.2. Además, se comparan las aproximaciones obtenidas.

Problema 3.4. Aproximar la raíz $\bar{x}^* = (\frac{1}{2}, 0, -\frac{\pi}{6})$ del sistema no lineal mostrado en (2.2.3) a través del método de Newton modificado con el método de Jacobi y con el método de Gauss-Seidel.

En primer lugar, la matriz Jacobiana asociada al sistema F es

$$JF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3 & z \sin(yz) & y \sin(yz) \\ 2x & -162(y + \frac{1}{10}) & \cos(z) \\ -e^{-xy}y & -e^{-xy}x & 20 \end{bmatrix}.$$

Para el método con Jacobi la matriz $DJF(x, y, z)$ asociada a la matriz $JF(x, y, z)$ es

$$DJF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -162(y + \frac{1}{10}) & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}. \quad (3.1.5)$$

Para el método con Gauss-Seidel la matriz $DJF(x, y, z)$ es la que se mostró en (3.1.5) y la matriz $LJF(x, y, z)$ asociada a la matriz $JF(x, y, z)$ es como sigue

$$LJF(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2x & 0 & 0 \\ -e^{-xy}y & -e^{-xy}x & 0 \end{bmatrix}.$$

Al iterar estos métodos se obtienen la siguientes tablas con tolerancia $TOL = 10^{-4}$.

i	x_i	y_i	z_i
1	5.0000000×10^{-1}	6.4814814×10^{-2}	$-5.2359878 \times 10^{-1}$
2	4.9980807×10^{-1}	4.2707033×10^{-2}	$-5.2200438 \times 10^{-1}$
3	4.9991717×10^{-1}	4.1046038×10^{-2}	$-5.2254282 \times 10^{-1}$
4	4.9992333×10^{-1}	4.1020618×10^{-2}	$-5.2258325 \times 10^{-1}$

Tabla 3.9: Iteraciones del método de Newton modificado con método de Jacobi.

i	x_i	y_i	z_i
1	5.0000000×10^{-1}	6.4814815×10^{-2}	$-5.2359878 \times 10^{-1}$
2	4.9980807×10^{-1}	4.2699844×10^{-2}	$-5.2254023 \times 10^{-1}$
3	4.9991703×10^{-1}	4.1030587×10^{-2}	$-5.2258360 \times 10^{-1}$
4	4.9992338×10^{-1}	4.1019341×10^{-2}	$-5.2258389 \times 10^{-1}$

Tabla 3.10: Iteraciones del método de Newton modificado con método de Gauss-Seidel.

En la Tabla 3.9 se obtuvo la aproximación

$$\vec{x}^{(4)} = (4.9992333 \times 10^{-1}, 4.1020618 \times 10^{-2}, -5.2258325 \times 10^{-1})$$

con error $\|\vec{x}^{(4)} - \vec{x}^*\| = 4.10333 \times 10^{-1}$, mientras en la Tabla 3.10 se obtuvo la aproximación

$$\vec{x}^{(4)} = (4.9992338 \times 10^{-1}, 4.1019341 \times 10^{-2}, -5.2258389 \times 10^{-1})$$

con error $\|\vec{x}^{(4)} - \vec{x}^*\| = 4.10319 \times 10^{-1}$. Al comparar estos resultados con los obtenidos en el Ejemplo 2.2, se puede notar como las aproximaciones obtenidas con la generalización del método de Newton son más exactas en comparación con las obtenidas a través de las modificaciones con Jacobi y Gauss-Seidel.

□

En la siguiente tabla se comparan las aproximaciones obtenidas con los tres métodos. Además, se reporta el error al comparar cada aproximación con el valor de la raíz exacta \vec{x}^* . Cabe resaltar que los errores reportados al compararse con los valores exactos de \vec{x}^* dan valores muy grandes y esto se debe a que la aproximación para la segunda componente de \vec{x}^* aun no es muy exacta.

Método	#Ite.(i)	x_i	y_i	z_i	$\ \vec{x}^{(i)} - \vec{x}^*\ $
<i>Jacobi</i>	4	4.9992333×10^{-1}	4.1020618×10^{-2}	$-5.2258325 \times 10^{-1}$	4.10333×10^{-2}
<i>Gauss – Seidel</i>	4	4.9992338×10^{-1}	4.1019341×10^{-2}	$-5.2258389 \times 10^{-1}$	4.10320×10^{-2}
<i>Newton $n \times n$</i>	4	4.9992342×10^{-1}	4.1019331×10^{-2}	$-5.2258389 \times 10^{-1}$	4.10320×10^{-2}

Tabla 3.11: Comparación de aproximaciones obtenidas a partir de $\vec{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$.

3.2. Aplicación: El problema de Cayley

Para estudiar este problema primero se definirán ciertos conceptos importantes de dinámica compleja, tomados de [4, 14, 16] y [17].

3.2.1. Conceptos básicos de dinámica compleja.

Definición 3.1. Una función racional $R : \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$, donde $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, es una función de la forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

donde P y Q son polinomios sin factores comunes.

El grado de la función R es $\text{grado}(R) = \max\{\text{grado}(P), \text{grado}(Q)\}$ y el estudio de la dinámica de la función R trata de analizar el comportamiento de las *órbitas* de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ como sigue

$$\text{orb}_R^+(z_0) = \{z_0, z_1 = R(z_0), z_2 = R(z_1) = R^2(z_0), \dots, z_k = R^n(z_0), \dots\}. \quad (3.2.1)$$

La ecuación (3.2.1) hace referencia al proceso de iterar una función racional, característico de los métodos iterativos. Precisamente la *órbita* de un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ se define como la sucesiva aplicación de la función R sobre dicho punto y $R^n(z_0)$ es la aplicación de la función R durante n iteraciones.

Los *puntos fijos* de una función de variable compleja, al igual que los puntos fijos de una función de variable real, son las soluciones de la ecuación $f(z) = z$. En el caso de las funciones racionales el infinito, ∞ , también es considerado como un punto fijo de $R(z)$ si y solo si $\text{grado}(P) > \text{grado}(Q)$ y los demás puntos fijos de R son las soluciones de $P(z) - z(Q(z)) = 0$, basta con notar que si z es punto fijo de R se tiene

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},$$

de donde

$$z(Q(z)) - P(z) = 0.$$

Sea z un punto fijo de una función $R(z)$ con *multiplicador* asociado $\lambda = R'(z)$, se puede clasificar los puntos fijos de una función de variable compleja como sigue:

- a) z es un punto fijo *superatractor* si $\lambda = 0$.

- b) z es un punto fijo *atractor* si $0 < |\lambda| < 1$.
- c) z es un punto fijo *indiferente* si $|\lambda| = 1$.
- d) z es un punto fijo *repulsor* si $|\lambda| > 1$.

Generalmente, los puntos fijos de una función de iteración coinciden con las raíces del polinomio $f(z)$ sobre la que se aplica, sin embargo cuando esto no sucede a estos puntos fijos se les denomina *extraños*.

Los *puntos periódicos* se definen de forma similar a los puntos fijos, entonces los puntos periódicos de periodo t se definen como $R^t(z^*) = z^*$ donde $R^{t_1}(z^*) \neq z^*$ para todo $t_1 < t$. Sea z^* un punto periódico de periodo t , el *multiplicador* se define ahora como $\tau = \left| (R^t)'(z^*) \right|$ que da lugar a una órbita periódica de periodo t y se clasifican en:

- a) z^* es un punto periódico *superatractor* si $\tau = 0$.
- b) z^* es un punto periódico *atractor* si $\tau < 1$.
- c) z^* es un punto periódico *parabólico* si $\tau = 1$.
- d) z^* es un punto periódico *repulsor* si $\tau > 1$.

Para determinar el estado final de la órbita de cualquier punto de plano complejo tras la sucesiva aplicación de la función R se define cuenca de atracción.

Definición 3.2. La *cuenca de atracción* de un punto fijo atractor $\bar{z} \in \mathbb{C}$ se define como el conjunto de preimágenes de cualquier orden que cumplen

$$A(\bar{z}) = \{z_0 \in \mathbb{C} : R^n(z_0) \rightarrow \bar{z}, n \rightarrow \infty\}.$$

Una cuenca de atracción se dice que es *inmediata* de un punto fijo superatractor z^* si es una componente conexa de la cuenca que contiene a z^* , es decir al momento de graficar las zonas de coloración compacta dentro de la cuenca de atracción del punto fijo superatractor se denominan *inmediatas*. Para poder definir determinados comportamientos, se define que dos cuencas de atracción inmediatas, A_1 y A_2 , están *inmersas* si es posible encontrar dos puntos de A_1 tales que la línea que los une atraviesa A_2 .

Relacionados con las cuencas de atracción aparecen los conjuntos de Julia y Fatou.

Definición 3.3. El *conjunto de Julia* para polinomios se define como

$$J(f) = cl \{z \in \mathbb{C} : z \text{ es un punto periódico repelente}\},$$

donde $cl(B)$ es la clausura del conjunto B .

En otras palabras, el conjunto de Julia comprende todos los puntos que son repelidos y establece la clausura, o frontera, entre las cuencas de atracción. El conjunto complemento del conjunto de Julia se define como *conjunto de Fatou*, este conjunto contiene los puntos $z \in \mathbb{C}$ cuya órbita tiende a un punto fijo atractor. Gráficamente, el conjunto de Julia muestra una dinámica caótica mientras que el conjunto de Fatou muestra una dinámica relajada o compacta.

A continuación se enuncia el problema de Cayley.

3.2.2. Antecedentes del problema de Cayley

En [16] y [14] se enuncia el problema de Cayley como sigue “... the problem is to determine the regions of the plane, such that P (initial point) being taken at pleasure anywhere within one region we arrive ultimately at the point A (a root of the polynomial)...”

En otras palabras, el problema que Cayley plantea es: tome un polinomio cualquiera $p(z)$ con raíces a_1, \dots, a_k , si a cada punto del plano le aplicamos el método de Newton obtenemos una sucesión de aproximaciones que en caso de converger lo hace a una de las a_k raíces, con $k = 1, 2, \dots, n$. Al denotar $A(a_k)$ a la cuenca de atracción de la raíz a_k , se tiene que la cuenca de atracción para el problema de Cayley es

$$A(a_k) = \{z_0 \in \mathbb{C} : z_k \rightarrow a_k\}.$$

En este caso $A(a_k)$ es el subconjunto del plano complejo formado por todos los puntos cuya iterada a través del método de Newton converge a la raíz a_k .

Cayley empezó a resolver su problema en 1879 a partir de los polinomios cuadráticos complejos de la forma $p(z) = az^2 + bz + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tomando como ejemplo a $p(z) = z^2 + 1$ cuyas raíces son i y $-i$, Cayley demostró que la mediatriz del segmento que une las dos raíces divide al plano en dos semiplanos tal que cada semiplano contiene una de las raíces y es una cuenca de atracción para esa raíz, como se muestra en la Figura 3.1.

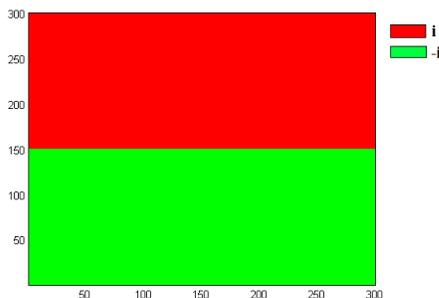


Figura 3.1: Cuencas de atracción del polinomio $f(z) = z^2 + 1$.

En la que se ha pintado de color rojo la cuenca de atracción para la raíz i y de color verde la cuenca de atracción para la raíz $-i$. Cayley intentó extender esta idea para los polinomios cúbicos complejos de la forma $p(z) = z^3 \pm 1$, pero el comportamiento de las cuencas de atracción para sus tres raíces no era tan inmediato como para el caso de la Figura 3.1.

En los siguiente apartados se realiza el estudio del problema de Cayley .

3.2.3. Problema de Cayley en el plano complejo.

Como se definió en el Capítulo 1, la función de iteración del método de Newton para $f(z) = z^3 - 1$ está dada por

$$z_{k+1} = z_k - \frac{z_k^3 - 1}{3z_k^2} = \frac{2z_k^3 + 1}{3z_k^2}. \quad (3.2.2)$$

Se itera la función dada por la expresión (3.2.2) para obtener aproximaciones de sus tres raíces:

- $z_1^* = 1 + 0i = 1$.
- $z_2^* = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
- $z_3^* = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Las tablas 3.12, 3.13 y 3.14 muestran las iteraciones del método de Newton con tolerancia $TOL = 10^{-11}$ y sus respectivas aproximaciones iniciales.

i	$Re(z_i)$	$Im(z_i)$	$ z_i - z_{i-1} $
0	5.866667×10^{-1}	3.714463×10^{-1}	5.870872×10^{-1}
1	6.867859×10^{-1}	-3.772995×10^{-1}	7.554099×10^{-1}
2	7.490080×10^{-1}	2.066484×10^{-1}	5.872536×10^{-1}
3	9.733641×10^{-1}	-1.453482×10^{-1}	4.174174×10^{-1}
4	9.780484×10^{-1}	3.640819×10^{-3}	1.490626×10^{-1}
5	1.000482×10^0	-1.670545×10^{-4}	2.275433×10^{-2}
6	1.000000×10^0	-1.608537×10^{-7}	5.097755×10^{-4}
7	1.000000×10^0	$-6.569641 \times 10^{-14}$	2.599545×10^{-7}
8	1.000000×10^0	$-2.103629 \times 10^{-27}$	6.761368×10^{-14}

Tabla 3.12: Aproximación a la raíz z_1^* del problema de Cayley con $z_0 = 0.88 + 0.88i$.

Las aproximaciones iniciales elegidas para las Tablas 3.12, 3.13 y 3.14 son “cercanas”, por el eje real o bien por el eje imaginario, a la raíz que se quiere aproximar, en seguida se muestran los resultados obtenidos:

- En la Tabla 3.12 se obtuvo la aproximación $z = 1.000000 - 2.103629 \times 10^{-27}i$ para la raíz z_1^* , a partir de $z_0 = 0.88 + 0.88i$ que se acerca por el eje real a dicha raíz.

i	$Re(z_i)$	$Im(z_i)$	$ z_i - z_{i-1} $
0	3.333333×10^{-1}	-3.333333×10^{-1}	8.498366×10^{-1}
1	2.222222×10^{-1}	1.277778×10^0	1.614938×10^0
2	-3.838161×10^{-2}	7.849484×10^{-1}	5.574901×10^{-1}
3	-5.627218×10^{-1}	5.759533×10^{-1}	5.644569×10^{-1}
4	-3.870941×10^{-1}	8.979334×10^{-1}	3.667646×10^{-1}
5	-4.974191×10^{-1}	8.520995×10^{-1}	1.194670×10^{-1}
6	-4.999668×10^{-1}	8.662269×10^{-1}	1.435528×10^{-2}
7	-5.000000×10^{-1}	8.660254×10^{-1}	2.041874×10^{-4}
8	-5.000000×10^{-1}	8.660254×10^{-1}	4.169688×10^{-8}
9	-5.000000×10^{-1}	8.660254×10^{-1}	1.650465×10^{-15}

Tabla 3.13: Aproximación a la raíz z_2^* del problema de Cayley con $z_0 = 0.5 + 0.5i$.

i	$Re(z_i)$	$Im(z_i)$	$ z_i - z_{i-1} $
0	3.333333×10^{-1}	3.333333×10^{-1}	8.498366×10^{-1}
1	2.222222×10^{-1}	-1.277778×10^0	1.614938×10^0
2	-3.838161×10^{-2}	-7.849484×10^{-1}	5.574901×10^{-1}
3	-5.627218×10^{-1}	-5.759533×10^{-1}	5.644569×10^{-1}
4	-3.870941×10^{-1}	-8.979334×10^{-1}	3.667646×10^{-1}
5	-4.974191×10^{-1}	-8.520995×10^{-1}	1.194670×10^{-1}
6	-4.999668×10^{-1}	-8.662269×10^{-1}	1.435528×10^{-2}
7	-5.000000×10^{-1}	-8.660254×10^{-1}	2.041874×10^{-4}
8	-5.000000×10^{-1}	-8.660254×10^{-1}	4.169688×10^{-8}
9	-5.000000×10^{-1}	-8.660254×10^{-1}	1.650465×10^{-15}

Tabla 3.14: Aproximación a la raíz z_3^* del problema de Cayley con $z_0 = 0.5 - 0.5i$.

- En la Tabla 3.13 se obtuvo la aproximación $z = -5.000000 \times 10^{-1} + 8.660254 \times 10^{-1}i$ para la raíz z_2^* , a partir de $z_0 = 0.5 + 0.5i$ que se acerca a dicha raíz por una paralela al eje imaginario.
- En la Tabla 3.14 se obtuvo la aproximación $z = -5.000000 \times 10^{-1} - 8.660254 \times 10^{-1}i$ para la raíz z_3^* , a partir de $z_0 = 0.5 - 0.5i$ que al igual también se acerca a la raíz exacta aproximada por una paralela al eje imaginario.

Además, cabe resaltar que como las raíces z_2^* y z_3^* son conjugadas se pudo obtener la Tabla 3.14 a partir de una aproximación inicial conjugada a la tomada en la Tabla 3.13 y que estas dos tablas solo difieren en el signo del valor de la componente imaginaria, basta con observar la columna 2 en los dos casos.

Nota: Los resultados mostrados se pueden revisar con detalle en [23].

3.2.4. Problema de Cayley en el plano real.

El polinomio complejo $p(z) = z^3 - 1 = 0$, para $z = x + iy$ se puede escribir como un sistema 2×2 de la siguiente forma

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} x^3 - 3xy^2 - 1 \\ 3x^2y - y^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (3.2.3)$$

donde f_r es la parte real de $f(z)$ y f_i es la parte imaginaria de $f(z)$.

Se considera el sistema de ecuaciones de (3.2.3) para el que la función de iteración del método de Newton es

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{\det JF(x_k, y_k)} \left[(x_k^3 - 3x_k y_k^2) (3x_k^2 - 3y_k^2) - (3x_k^2 y_k - y_k^3) (-6x_k y_k) \right],$$

$$y_{k+1} = y_k - \frac{1}{\det JF(x_k, y_k)} \left[(3x_k^2 y_k - y_k^3) (3x_k^2 - 3y_k^2) - (x_k^3 - 3x_k y_k^2) (6x_k y_k) \right].$$

La matriz jacobiana asociada al sistema F es

$$JF(x_k, y_k) = \begin{bmatrix} 3x_k^2 - 3y_k^2 & -6x_k y_k \\ 6x_k y_k & 3x_k^2 - 3y_k^2 \end{bmatrix},$$

además su determinante es como sigue

$$\begin{aligned} \det JF(x_k, y_k) &= (3x_k^2 - 3y_k^2) (3x_k^2 - 3y_k^2) - (6x_k y_k) (-6x_k y_k) \\ &= (3x_k^2 - 3y_k^2)^2 + (6x_k y_k)^2. \end{aligned}$$

Por tanto la función de iteración del método de Newton quedaría

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k^3 - 3x_k y_k^2)(3x_k^2 - 3y_k^2) + (3x_k^2 y_k - y_k^3)(6x_k y_k)}{(3x_k^2 - 3y_k^2)^2 + (6x_k y_k)^2}$$

$$y_{k+1} = y_k - \frac{(3x_k^2 y_k - y_k^3)(3x_k^2 - 3y_k^2) - (x_k^3 - 3x_k y_k^2)(6x_k y_k)}{(3x_k^2 - 3y_k^2)^2 + (6x_k y_k)^2}. \quad (3.2.4)$$

A continuación se itera el método de Newton para obtener las tres soluciones del sistema de ecuaciones (3.2.3):

- $\vec{x}_1^* = (1, 0)$.
- $\vec{x}_2^* = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-0.5, 0.866025)$.
- $\vec{x}_3^* = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (-0.5, -0.866025)$.

Las tablas 3.15, 3.16 y 3.17 contienen iteraciones del método de Newton para el sistema de ecuaciones (3.2.3), con tolerancia $TOL = 10^{-7}$.

Para las tablas 3.15, 3.16 y 3.17 se ha considerado aproximaciones iniciales similares a las tomadas para las tablas 3.12, 3.13 y 3.14 esto es:

i	x_i	y_i	$\ \bar{x}^{(i)} - \bar{x}^{(i-1)}\ $
0	5.866667×10^{-1}	3.714463×10^{-1}	5.870871×10^{-1}
1	6.867858×10^{-1}	-3.772995×10^{-1}	7.554099×10^{-1}
2	7.490080×10^{-1}	2.066485×10^{-1}	5.872537×10^{-1}
3	9.733641×10^{-1}	-1.453483×10^{-1}	4.174176×10^{-1}
4	9.780484×10^{-1}	3.640857×10^{-3}	1.490628×10^{-1}
5	1.000482×10^0	-1.670562×10^{-4}	2.275433×10^{-2}
6	1.000000×10^0	-1.608481×10^{-7}	5.097361×10^{-4}
7	1.000000×10^0	$-6.671433 \times 10^{-14}$	2.876030×10^{-7}
8	1.000000×10^0	5.292839×10^{-21}	6.671433×10^{-14}

Tabla 3.15: Aproximación a la raíz \bar{x}_1^* del problema de Cayley con $(x_0, y_0) = (0.88, 0.88)$.

i	x_i	y_i	$\ \bar{x}^{(i)} - \bar{x}^{(i-1)}\ $
0	3.333333×10^{-1}	-3.333333×10^{-1}	8.498366×10^{-1}
1	2.222222×10^{-1}	1.277778×10^0	1.614938×10^0
2	-3.838164×10^{-2}	7.849483×10^{-1}	5.574901×10^{-1}
3	-5.627219×10^{-1}	5.759533×10^{-1}	5.644570×10^{-1}
4	-3.870940×10^{-1}	8.979334×10^{-1}	3.667647×10^{-1}
5	-4.974191×10^{-1}	8.520995×10^{-1}	1.194670×10^{-1}
6	-4.999667×10^{-1}	8.662269×10^{-1}	1.435530×10^{-2}
7	-5.000000×10^{-1}	8.660254×10^{-1}	2.042019×10^{-4}
8	-5.000000×10^{-1}	8.660254×10^{-1}	5.319353×10^{-8}

Tabla 3.16: Aproximación a la raíz \bar{x}_2^* del problema de Cayley con $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$.

i	x_i	y_i	$\ \bar{x}^{(i)} - \bar{x}^{(i-1)}\ $
0	3.333333×10^{-1}	3.333333×10^{-1}	8.498366×10^{-1}
1	2.222222×10^{-1}	-1.277778×10^0	1.614938×10^0
2	-3.838164×10^{-2}	-7.849483×10^{-1}	5.574901×10^{-1}
3	-5.627219×10^{-1}	-5.759533×10^{-1}	5.644570×10^{-1}
4	-3.870940×10^{-1}	-8.979334×10^{-1}	3.667647×10^{-1}
5	-4.974191×10^{-1}	-8.520995×10^{-1}	1.194670×10^{-1}
6	-4.999667×10^{-1}	-8.662269×10^{-1}	1.435530×10^{-2}
7	-5.000000×10^{-1}	-8.660254×10^{-1}	2.042019×10^{-4}
8	-5.000000×10^{-1}	-8.660254×10^{-1}	5.319353×10^{-8}

Tabla 3.17: Aproximación a la raíz \bar{x}_3^* del problema de Cayley con $(x_0, y_0) = (0.5, -0.5)$.

- $z_0 = 0.88 + 0.88i$ para la Tabla 3.12 y $(x_0, y_0) = (0.88, 0.88)$ para la Tabla 3.15.
- $z_0 = 0.5 + 0.5i$ para la Tabla 3.13 y $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$ para la Tabla 3.16.
- $z_0 = 0.5 - 0.5i$ para la Tabla 3.14 y $(x_0, y_0) = (0.5, -0.5)$ para la Tabla 3.17.

Los resultados obtenidos son similares a los obtenidos con las tablas 3.12, 3.13 y 3.14 pero con una

tolerancia $TOL = 10^{-7}$, esto se debe a que para tolerancias menores que 10^{-7} se necesitan más de 100 iteraciones e incluso en algunos casos el método de Newton no converge como se esperaría. En seguida se reportan los resultados obtenidos:

- En la Tabla 3.15 se obtuvo la aproximación $\vec{x} = (1.000000, 5.292839 \times 10^{-21})$ para la raíz \vec{x}_1^* , a partir de $(x_0, y_0) = (0.88, 0.88)$.
- En la Tabla 3.16 se obtuvo la aproximación $\vec{x} = (-5.000000 \times 10^{-1}, 8.660254 \times 10^{-1})$ para la raíz \vec{x}_2^* , a partir de $(x_0, y_0) = (0.5, 0.5)$.
- En la Tabla 3.17 se obtuvo la aproximación $\vec{x} = (-5.000000 \times 10^{-1}, -8.660254 \times 10^{-1})$ para la raíz \vec{x}_3^* , a partir de $(x_0, y_0) = (0.5, -0.5)$.

Cabe resaltar que al considerar la iteración del método de Newton para sistemas 2×2 , las operaciones que se realizan al iterar son diferentes a las realizadas en el caso de la iteración del método de Newton complejo. Además el número de iteraciones en que se obtiene la aproximación y el error reportado difieren en cada caso.

Nota: Los resultados mostrados se pueden revisar con detalle en [22].

3.2.5. Fractales.

Ahora se estudia el comportamiento de las cuencas de atracción o también llamadas zonas de convergencia de las raíces de $f(z) = z^3 - 1$.

Análisis del comportamiento de la zona de convergencia para la raíces de $f(z) = z^3 - 1$.

Como la raíz $z_1 = 1$ es la única raíz real de $f(z)$, se considera la función de variable real $f(x) = x^3 - 1$ y su iteración del método de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^3 - 1}{3x_k^2}. \quad (3.2.5)$$

De la ecuación (3.2.5) se obtiene la función de iteración del método de Newton que corresponde a una función racional de variable real

$$N_f(x) = x - \frac{x^3 - 1}{3x^2}. \quad (3.2.6)$$

Además, $x_1 = 1$ es un punto fijo de N_f basta con ver que

$$N_f(1) = 1 - \frac{1 - 1}{9} = 1.$$

En [14] se afirma que si aplicamos el método de Newton a una ecuación no lineal $f(x) = 0$ resulta que las soluciones de f son puntos fijos de N_f y recíprocamente. Análogamente sucede con las

ecuaciones de variable compleja y sus funciones de iteración.

Teniendo en cuenta esto, se realiza un análisis gráfico de la órbita de la raíz $x^* = 1$ por la función de iteración N_f siguiendo los pasos enunciados en [14].

1. Representar en los mismos ejes coordenados la función $N_f(x)$ y la diagonal $y = x$.
2. Situar un punto x_0 y obtener su imagen $N_f(x_0) = y_0$.
3. Desplazarse horizontalmente desde $N_f(x_0) = y_0$ hasta cortar la diagonal $y = x$, el punto de corte se denota A .
4. Desplazarse verticalmente desde A hasta cortar la función N_f , el punto de corte se denota $N_f(N_f(x_0)) = y_1$.

En la Figura 3.2 se muestra el gráfico de análisis de órbita, siguiendo los pasos anteriores que se refieren a la iteración de N_f .

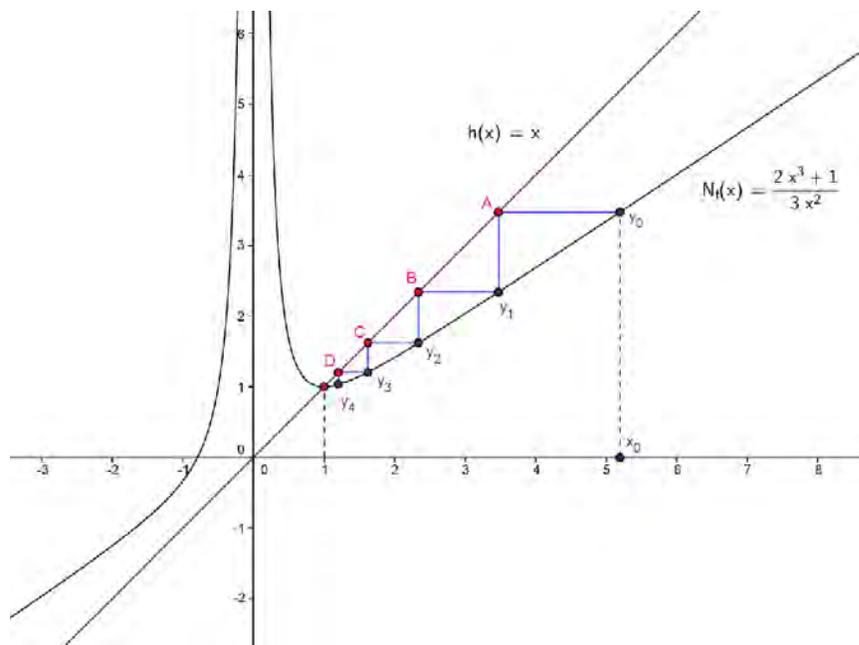


Figura 3.2: Comportamiento atractor de la raíz real $x^* = 1$ para el problema de Cayley.

La gráfica en forma de escalera desciende hasta el punto fijo $x^* = 1$ y el conjunto de preimágenes que se obtienen en el paso 4 es la cuenca de atracción o zona de convergencia para dicho punto fijo. La obtención de estos puntos se detiene cuando se ha alcanzado una tolerancia fija.

Ahora se realiza la simulación del problema de Cayley en el plano complejo considerando las tres raíces de $f(z) = z^3 - 1$, para ello se considera una subdivisión del plano complejo como se muestra en la Figura 3.3.

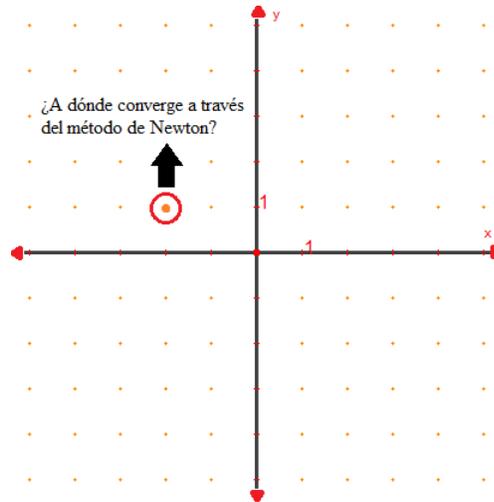


Figura 3.3: Subdivisión del plano complejo.

La idea a seguir es considerar cada punto de la subdivisión del plano como aproximación inicial para la iteración del método de Newton dada en (3.2.2), se le asigna a cada raíz un color y la aproximación inicial se pinta del mismo color de la raíz a la cual la iteración converge. Lo que no pudo ver Cayley, en su momento, fue que algunas de las sucesiones que se obtienen a través de la iteración del método de Newton tienen un comportamiento caótico al momento de converger a una de las raíces. La Figura 3.4 muestra el comportamiento de las iteraciones del método de Newton representados en el plano dinámico.

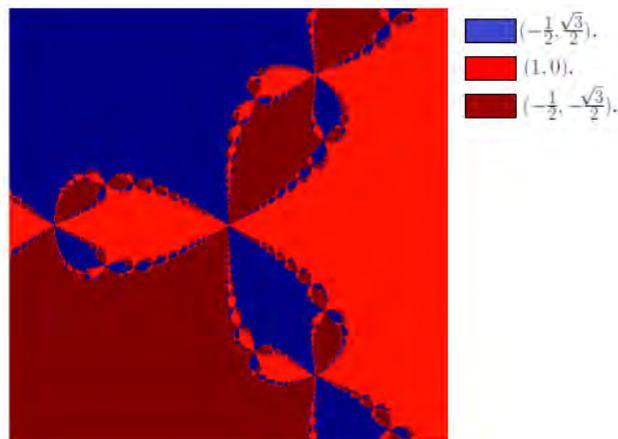


Figura 3.4: Cuencas de atracción de las tres raíces de $z^3 - 1 = 0$ para el problema de Cayley.

La Figura 3.4, se obtuvo con la implementación en MATLAB (A.1.5) del Apéndice A.1, en ella se muestran 3 secciones pintadas de colores diferentes cuya frontera presenta un comportamiento que genera un efecto de flor. Se representan con colores diferentes cada uno de los puntos fijos atractores, es decir las raíces de $f(z)$, y se pinta cada punto inicial con el color del punto fijo atractor al que converge. Los colores se asignan de la siguiente manera:

- Los puntos que generan, a través del método de Newton, sucesiones convergentes a la raíz $z_1^* = 1$ de $z^3 - 1 = 0$ se pintan de color rojo.
- Por otro lado los puntos que generan sucesiones convergentes a la raíz $z_2^* = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ de $z^3 - 1 = 0$ se pintan de color azul.
- Finalmente los puntos que generan sucesiones convergentes a la raíz $z_3^* = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ de $z^3 - 1 = 0$ se pintan de color vinotinto.

La función de iteración del método de Newton (3.2.2) es una función racional compleja

$$N_{fz} = \frac{2z^3 + 1}{3z^2}, \quad (3.2.7)$$

por tanto las 3 raíces de $f(z) = z^3 - 1$ son puntos fijos para N_{fz} y las 3 cuencas de atracción que se muestran en la Figura 3.4 son cuencas de atracción inmediatas correspondientes a dichos puntos fijos.

El comportamiento fractal se produce puesto que en dinámica compleja se encuentran puntos periódicos atractores y repulsores. La frontera de las zonas de coloración compacta, en la Figura 3.4, se encuentran puntos fijos periódicos repulsores y este conjunto es el conjunto de Julia. En la Figura 3.5 se muestra en rojo el conjunto de Julia asociado a N_{fz} .

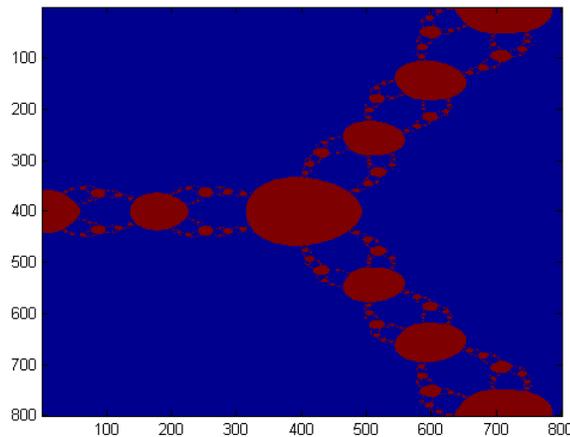


Figura 3.5: Conjunto de Julia para el problema de Cayley.

Además, en azul se muestra el conjunto complementario del conjunto de Julia que se denomina conjunto de Fatou. La implementación para este caso se hizo en MATLAB basado en los resultados de [8].

Se puede extender el problema de Cayley al estudio de las cuencas de atracción en el caso de los polinomios $f(z) = z^4 - 1$ y $f(z) = z^5 - 1$, que se muestran en las figuras 3.6 y 3.7 respectivamente.

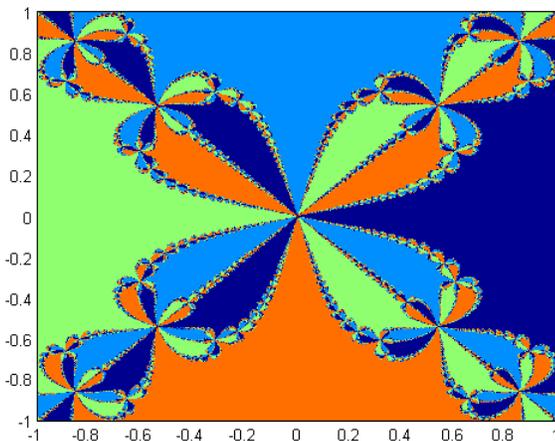


Figura 3.6: Cuencas de atracción de las raíces de $z^4 - 1 = 0$ para el problema de Cayley.

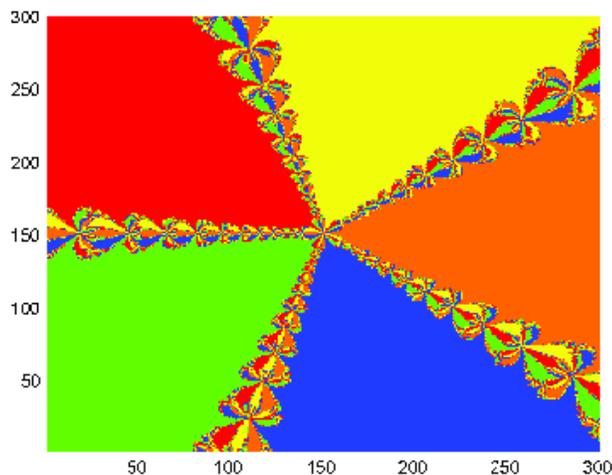


Figura 3.7: Cuencas de atracción de las raíces de $z^5 - 1 = 0$ para el problema de Cayley.

En la Figura 3.6 se observan cuatro cuencas de atracción, una para cada raíz de $z^4 - 1 = 0$, pintadas de colores diferentes. Nuevamente la frontera de dichas cuencas de atracción tiene comportamiento caótico y generan el efecto visual de flor. Esta frontera representa el conjunto de Julia asociado a la función de iteración del método de Newton para $z^4 - 1 = 0$. Lo mismo sucede en la Figura 3.7 pero en esta se nota cinco cuencas de atracción debido a las cinco raíces de $z^5 - 1 = 0$.

Para la Figura 3.6 su implementación se basa en los resultados de [19] y los colores se asignan de la siguiente manera:

- Los puntos que generan, a través del método de Newton, sucesiones convergentes a la raíz $z_1^* = 1$ de $z^4 - 1 = 0$ se pintan de color azul oscuro.
- Los puntos que generan sucesiones convergentes a la raíz $z_2^* = -1$ de $z^4 - 1 = 0$ se pintan de color verde.
- Por otro lado, los puntos que generan sucesiones convergentes a la raíz $z_3^* = i$ de $z^4 - 1 = 0$ se pintan de color azul.
- Finalmente, los puntos que generan sucesiones convergentes a la raíz $z_4^* = -i$ de $z^4 - 1 = 0$ se pintan de color naranja.

En el caso de la Figura 3.7 se asigna a la raíz $z_1^* = 1$ el color naranja y a los demás colores para cada una de las cuatro raíces complejas de $z^5 - 1 = 0$.

También se puede aplicar el problema de Cayley sobre otro tipo de funciones como las del tipo $me^z - 1 = 0$ con $m \in \mathbb{Z}$, en este caso se obtiene la Figura 3.8.

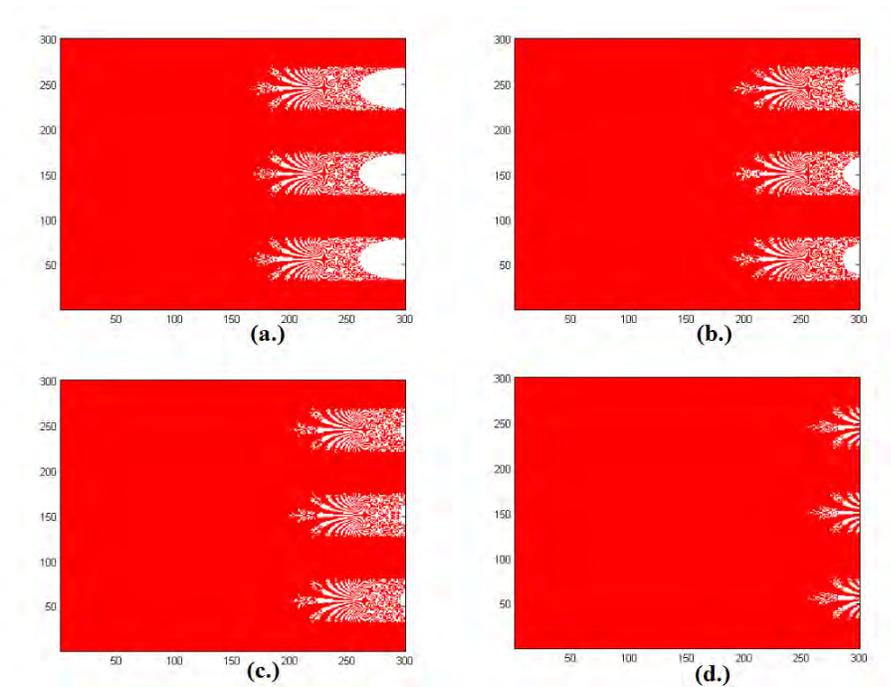


Figura 3.8: Cuencas de atracción de las raíces de $f(z) = me^z - 1 = 0$ para el problema de Cayley.

En la Figura 3.8 la parte (a.) representa $3e^z - 1 = 0$, la parte (b.) corresponde a $11e^z - 1 = 0$, la parte (c.) a $21e^z - 1 = 0$ y la parte (d.) representa $1000e^z - 1 = 0$. Como se puede observar para cada valor de m se nota una rama que se va perdiendo a medida que m empieza a aumentar su valor. El análisis de las de cuencas de atracción, de la Figura 3.8 y de los conjuntos de Julia y Fatou asociados a ellas no se realiza en este trabajo, pero se puede considerar como un trabajo a futuro para quien esté interesado en este campo.

Discusión

Este proyecto de investigación partió de la hipótesis de que la enseñanza del método de Newton solo se hace en cursos de análisis numérico y que debido a la importancia que tiene este método se debería hacer una investigación más profunda que incluya implementaciones y que sirva no solo a los estudiantes y docentes del programa de Licenciatura en matemáticas sino también a los estudiantes y docentes de otros programas.

Durante la revisión bibliográfica de ciertos textos y artículos de análisis numérico se notó que se dedica partes significativas de los textos al estudio del método de Newton y sus modificaciones e incluso revisando un libro de métodos numéricos para ingeniería el espacio dedicado al método de Newton de nuevo fue significativo, y esto da cuenta de la importancia que representa el estudio del método de Newton y el desarrollo de aplicaciones.

Fue muy llamativo observar, a medida que se cumplían las etapas de la metodología de este proyecto, como a través del Método de Newton se podían aproximar soluciones de ecuaciones de variable real y compleja y que al momento de comparar los resultados con los que se dan en la literatura, estos coincidían en gran parte.

Así mismo para el caso de sistemas 2×2 , la iteración del método de Newton se pudo escribir explícitamente facilitando de este modo su aplicación e implementación y en los ejemplos que se consideraron se obtuvo similitud de resultados con los de la literatura. Sin embargo, cuando se propuso un ejemplo para la aplicación del método de Newton a sistemas 3×3 , se percibió que los cálculos se complicaban.

Para el caso de sistemas de ecuaciones no lineales la iteración del método de Newton es $\vec{x}^{(n+1)} = \vec{x}^{(n)} - [JF(\vec{x}^{(n)})]^{-1} F(\vec{x}^{(n)})$ donde $JF(\vec{x}^{(n)})$ es la matriz Jacobiana en el punto $\vec{x}^{(n)}$ asociada al sistema. Es decir que para sistemas 3×3 , se genera una matriz Jacobiana 3×3 y la inversa de esa matriz queda definida como la multiplicación del determinante de la matriz Jacobiana en el punto $\vec{x}^{(n)}$ y la traspuesta de la matriz adjunta asociada a $JF(\vec{x}^{(n)})$, esto genera evidentemente más cálculos por hacer y en realidad estos cálculos se tornan difíciles a medida que la matriz Jacobiana aumenta su tamaño, es decir para sistemas 4×4 en adelante. Además se debe determinar primero si la matriz $JF(\vec{x}^{(n)})$ es invertible, esta es una gran desventaja del método de Newton en sistemas puesto que si la matriz resulta no ser invertible el método no puede funcionar para ese $\vec{x}^{(n)}$, en el caso real esto sucede cuando la derivada se anula.

Por lo anterior, se concluye que el método de Newton en sistemas $n \times n$ necesita de modificaciones

para ser más general, tal como sucede con el método de la secante en el caso real. Fue así como siguiendo con la revisión bibliográfica aparecen métodos iterativos que conservando la iteración del método de Newton aproximan el valor de la matriz Jacobiana reemplazandola por otra matriz que se garantiza sea invertible, estos métodos se conocen como métodos de Newton modificado.

Se introducen dos de estos métodos. El método de Jacobi que aproxima la inversa de la matriz Jacobiana aplicando un proceso iterativo a partir de una matriz que contiene la diagonal principal de dicha matriz. Por otro lado el método de Gauss Seidel parte de la aplicación a la matriz diagonal inferior que conserva los elementos de la matriz Jacobiana que están por debajo de la diagonal principal y la diagonal. Usando estos dos métodos en el cálculo de la inversa de la matriz Jacobiana se obtienen modificaciones del método de Newton, lo que le restablece al método la característica de versátil y potente.

Por otro lado, la aplicación del método de Newton al campo de los fractales que se estudió en este proyecto, brindó la oportunidad de estudiar conceptos de dinámica compleja como cuencas de atracción, funciones racionales complejas resultantes de funciones de iteración en variable compleja, puntos periódicos atractores y repulsores, el conjunto de Julia, el conjunto de Fatou, entre otros.

Para la generación de los fractales asociados al problema de Cayley se revisó varias programas de graficación como SCILAB, escogiendo finalmente MATLAB por el efecto visual que produce en sus gráficos y la facilidad para implementar funciones de variable compleja, (MATLAB incluye el paquete de operaciones con números complejos), lo que también fue productivo puesto que se estudió el funcionamiento de dicho programa.

La mayor parte de las implementaciones de este informe se hicieron en Dev C++, se encontró cierta dificultad para implementar funciones iterativas complejas ya que se necesitaba calcular potencias de números complejos y para ello se utilizó la fórmula D'Moivre que incluye la forma polar de un número complejo, es decir el complejo en términos de su radio y argumento. La dificultad radicó en que la tangente en Dev C++ solo está definida para los cuadrantes 1 y 4 del plano real y el argumento de un número complejo, que se define como la arcotangente de la parte imaginaria sobre la parte real del complejo, se debe encontrar en los cuadrantes 1 y 2 del plano real. Como solución se procedió a implementar la fórmula D'Moivre en Dev C++ completando el argumento en caso de que no se encuentre en el cuadrante 1 o 2 del plano real.

Finalmente, como se pudo observar en los resultados obtenidos, el estudio del método de Newton es un tema bien recibido por la comunidad científica, debido a los múltiples trabajos que se realizan en modelación matemática, como los del dengue. Esto hace que cada vez se busque nuevos métodos iterativos eficaces y potentes desde el punto de vista numérico y aunque el método de Newton es antiguo, lo que lo hace interesante es que para sus desventajas siempre se puede mejorar o modificar alguna parte de su iteración sin perder su idea principal.

Recomendaciones

Se recomienda continuar el estudio del método de Newton y sus componentes teóricos, puesto que al desarrollar este proyecto se notó el amplio campo de investigación que aún queda a disposición para ser investigado. Entre los temas que quedan a disposición están:

1. Método de Newton para aproximar raíces múltiples de una ecuación o de un sistema de ecuaciones.
2. Método de Broyden que es un método cuasi-Newton para la aproximación de la solución de sistemas $n \times n$.
3. Problema de Cayley para la ecuación $f(z) = me^z - 1 = 0$ con m un número entero, es decir, el estudio de las zonas de convergencia de $f(z)$ a través del método de Newton para $me^z - 1 = 0$.
4. Problema de Cayley para funciones de variable compleja que sean diferenciables en el plano complejo.
5. Conjunto de Julia y Fatou en funciones iterativas del método de Newton en variable real.

Además se recomienda tener en cuenta la recopilación teórica expuesta en los resultados de este informe como referencia para estudios posteriores del método de Newton.

Conclusiones

A partir de la recolección teórica, bibliográfica y los resultados numéricos obtenidos de las implementaciones realizadas a lo largo de este proyecto, se presentan las siguientes conclusiones:

- El método de Newton es un método iterativo potente, puesto que cuenta con diferentes teoremas que garantizan su convergencia tanto local como global. Es decir, el método converge desde una aproximación inicial cercana a la raíz que se desea aproximar o condicionando un intervalo del dominio de la función que contenga una solución.
- El método de Newton cumple con la definición de convergencia cuadrática para raíces simples y convergencia lineal para raíces múltiples. Lo que lo hace converger más rápido, para el caso de raíces simples, en comparación con otros métodos como el de punto fijo que cumple con la convergencia lineal.
- La interpretación geométrica del método de Newton para ecuaciones de variable real se pudo extender al caso de sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas satisfactoriamente. Pero este no es el caso de los sistemas de n ecuaciones con n incógnitas con $n > 2$.
- El método de Newton es variable, puesto que como para la aproximación de la solución de sistemas de más de dos ecuaciones con más de dos incógnitas se tiene la desventaja de que en cada iteración se debe calcular la matriz Jacobiana y su inversa, el método se puede modificar a métodos modificados de Newton o métodos cuasi-Newton que aproximan el valor de dicha matriz.
- Gracias a la equivalencia topológica del plano real con el plano complejo, existen dos formas a través del método de Newton para aproximar las soluciones de una ecuación no lineal de variable compleja y los resultados que se obtienen son similares para tolerancias diferentes.
- La iteración del método de Newton en variable compleja se puede ver como iteración en variable real aprovechando que los números complejos tienen dos componentes, real e imaginaria.
- La diferenciabilidad de las funciones como requisito para que el método de Newton se pueda aplicar, no es dificultad en el plano complejo pues en este informe solo se han considerado funciones polinómicas complejas.
- El problema de Cayley se puede abordar desde la iteración del método de Newton en variable compleja y también desde la iteración del método para sistemas de ecuaciones 2×2 ; los resultados obtenidos a partir de aproximaciones iniciales equivalentes son similares para tolerancias diferentes.

- Todas las funciones de iteración del método de Newton en sus diferentes versiones, propuestas en la recopilación teórica, convergieron a la raíz deseada satisfactoriamente; esto a partir de aproximaciones iniciales cercanas a la raíz, teniendo en cuenta la característica de convergencia local del método.
- El estudio de las zonas de convergencia de la iteración del método de Newton produce fractales no solo para las funciones polinómicas complejas sino también para funciones exponenciales complejas e incluso para funciones trigonométricas complejas.
- El método de Newton se constituye en uno de los métodos más utilizados por su amplia gama de adaptaciones en las cuales no se pierde la convergencia cuadrática que lo caracteriza.

Apéndice

A.1. Implementaciones en Dev C++ y MATLAB

A continuación se muestran algunos de las implementaciones que se hicieron durante el desarrollo del proyecto de investigación “Generalización de método de Newton y sus aplicaciones” y las demás se encuentran anexas.

A.1.1. Método del punto fijo.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

//Se define la función g, tal que x=g(x) si y solo si f(x)=0.
double g(double x){
    //return (x*x - 8.0) / 5.0;
    return sqrt(5.0*x+8.0);
}

//Se define la función f, tal que f(x)=0 si y solo si x=g(x).
double f(double x){
    return x*x - 5.0*x - 8.0;
}

main(){
    double x_0, x, error;
    double tol;
    int itmax, Num_iter, i = 0;
    tol = 1e-4; //Tolerancia TOL
    itmax = 100; //Número máximo de iteraciones

    //Se pide la aproximación inicial al usuario
```

```

printf("Ingrese el valor inicial de x_0: ");
scanf("%lf",&x_0);

x = x_0;
printf("n \tx_i \t\tg(xi)) \t\tERROR\t\tf(xi)\n");
printf("\%d \t\%.6e \t\%.6e \t\%.5e \t\%.6e\n",i,x,g(x),fabs(x - x_0),f(x));
do {
    i++;
    x_0=x;
    x = g(x_0); //Iteración del punto fijo
    error = fabs(x - x_0);
    printf("\%d \t\%.6e \t\%.6e \t\%.5e \t\%.6e\n",i,x,g(x),error,f(x));
} while ( error > tol && i < itmax );

//Datos de Salida
if (i>itmax){
    printf("no se encuentra solución en \%d iteraciones",itmax);
}
else{
    printf("La solución es \%.9lf \n",x);
    system("pause");
    return EXIT_SUCCESS;
}
return EXIT_SUCCESS;
}

```

A.1.2. Método de Newton para funciones de variable real.

```

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

//Se define la función con respecto a x
float funcion (float x)
{
    return x*x*x*x + 2.0*x*x - x - 3.0;
}

//Se define la derivada con respecto a x
float derivada (float x)
{

```

```
    return 4.0*x*x*x + 4.0*x - 1.0;
}

int main ()
{
    double x_0, x, error;
    float tol;
    int itmax, Num_iter, i = 0;
    tol= 1e-4; //Tolerancia TOL
    itmax=100; //Número máximo de iteraciones

    printf("Metodo de Newton\n");
    //Se pide la aproximación inicial al usuario
    printf("Ingrese el valor inicial de x_0: ");
    scanf("%lf",&x_0);

    x = x_0;
    printf("n \tx_i \t\t\tERROR\t\tf(xi)\n");
    printf("\%d \t\%.9e \t\%.5e \t\%.9e\n",i,x,fabs(x - x_0),funcion(x)) ;

    //Se inicia la iteración del método de Newton
    do
    {
        i++;
        x_0=x;
        x = x_0 - (funcion(x_0) / derivada(x_0)); //iteración del método de Newton para f
        error = fabs(x - x_0);
        printf("\%d \t\%.9e \t\%.5e \t\%.9e\n",i,x,error,funcion(x)) ;

    } while (i<itmax && (error > tol));

    //Datos de Salida
    if (i>itmax){
        printf("no se encuentra solución en \%d iteraciones",itmax);
    }
    else{
        printf("La solución es \%.9lf \n",x);
    }
    return EXIT_SUCCESS;
}
```

A.1.3. Método de Newton para funciones de variable compleja.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

int main (){
    double a, b, error, a1, a2, a3, b1, b2, b3;
    float tol, itmax;
    int i=1;
    tol= 10e-11;
    itmax=100;

    printf("METODO DE NEWTON PARA z^3+z+1=0");
    printf("\n Ingrese el valor inicial de z_0: ");
    printf("\n\n Ingrese el valor de la parte real de z_0: ");
    scanf("%lf",&a);
    printf("\n Ingrese el valor de la parte imaginaria de z_0: ");
    scanf("%lf",&b);

    //Iteración del método de Newton
    //z_(n+1)=(2z_n^3 - 1)/(3z_n^2 + 1)
    printf("n \t\tRe(z) \t\tIm(z) \t\tError\n",i,a3,b3,error);

    while (i<itmax){
        //2z_n^3 - 1
        a1 = 2*a*a*a - 6*a*b*b - 1;
        b1 = 6*a*a*b - 2*b*b*b;

        //3z_n^2 + 1
        a2 = 3*a*a - 3*b*b + 1;
        b2 = 6*a*b;

        //(2z_n^3 - 1)/(3z_n^2 + 1)
        a3 = (a1*a2 + b1*b2)/(a2*a2 + b2*b2);
        b3 = (a2*b1 - a1*b2)/(a2*a2 + b2*b2);

        //Cálculo del error
        error = sqrt((a3-a)*(a3-a) + (b3-b)*(b3-b));

        printf("%d \t\t%e \t\t%e \t\t%e\n",i,a3,b3,error);
    }
}
```

```
    if (error<tol){
        printf("\n\n La raíz obtenida es...");
        printf("\n Parte real: %e",a3);
        printf("\n Parte imaginaria: %e",b3);
        printf("\n el error es %e \n",error);
    }
    else{
        a = a3;
        b = b3;
        i++;
    }
}
if (i>itmax);{
    printf("no se encuentra solución en %lf iteraciones",itmax);
}
return EXIT_SUCCESS;
}
```

A.1.4. Método de Newton para sistemas 2×2 .

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/*Función 1 del sistema de ecuaciones*/
float funcion1 (float x, float y){
    return 6*x*x*x + x*y - 3*y*y*y - 4;
}
/*Derivadas parciales de la función 1*/
float parcial1x (float x, float y){
    return 18*x*x + y; //con respecto a x
}
float parcial1y (float x, float y){
    return x - 9*y*y; //con respecto a y
}

/*Función 2 del sistema de ecuaciones*/
float funcion2 (float x, float y){
    return x*x - 18*x*y*y + 16*y*y*y + 1;
}
/*Derivadas parciales de la función 2*/
```

```
float parcial2x (float x, float y){
    return 2*x - 18*y*y*; //con respecto a x
}
float parcial2y (float x, float y){
    return -36*x*y + 48*y*y; //con respecto a y
}

int main (){
    double x_0, y_0, error, tol, itmax, x, y, jac;
    x_0 = 2; //2 //2 /*Aproximaciones iniciales*/
    y_0 = 2; //1 //-1
    itmax = 100;
    tol = 1.0e-4;
    int i = 1;

    printf("MÉTODO DE NEWTON PARA SISTEMAS 2x2\n");
    printf("n \tx_i \t\ty_i \t\terror \n")

    while (i<itmax){
        //Jacobiano
        jac=(parcial1x(x_0,y_0)*parcial2y(x_0,y_0))-
            (parcial1y(x_0,y_0)*parcial2x(x_0,y_0));

        //Se encuentra el valor de x_n
        x = x_0-(((funcion1(x_0,y_0)*parcial2y(x_0,y_0))-
            (funcion2(x_0,y_0)*parcial1y(x_0,y_0)))/(jac));

        //Se encuentra el valor de y_n
        y = y_0-(((funcion2(x_0,y_0)*parcial1x(x_0,y_0))-
            (funcion1(x_0,y_0)*parcial2x(x_0,y_0)))/(jac));

        //Se calcula el error
        error=sqrt((fabs(x-x_0)*fabs(x-x_0))+(fabs(y-y_0)*fabs(y-y_0)));
        printf("%d \t\%e \t\%e \t\%e\n",i,x,y,error);
        if (error<tol){
            printf("La solucion para x es \%e \n",x);
            printf("La solucion para y es \%e \n",y);
            system("pause");
            return EXIT_SUCCESS;
        }
        else{
            x_0=x;

```

```

        y_0=y;
        i++;
    }
}
}

```

A.1.5. Problema de Cayley.

```

% PROBLEMA DE CAYLEY PARA Z^3-1=0
iteraciones=20;
n=10;
vx=0; % vector para los valores de x
vy=0; % vector para los valores de y
l=10;
x=linspace(vx-1,vx+1,n)
y=linspace(vy-1,vy+1,n);
[X,Y]=meshgrid(x,y);
Z=X +i*Y;
c=-0.5-i*0.8660254; % raíz de z^3-1 con la que se compara
for k=1:iteraciones;
    Z=2*Z/3 + 1/3*1./Z.^2; % iteracion del método de Newton para z^3-1=0
end
W=abs(Z-c); % criterio para elegir el color de la iteración
A=angle(Z); % (TETA)Argumento principal de z
colormap prism(256);
pcolor(W-A);
shading flat;

```

Esta implementación se obtuvo de los resultados mostrados en [21].

A.2. Actividades generadas a partir del proyecto.

1. Se publicó un artículo en el Volumen 13, No. 1, de la Revista Sigma del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño, denominado *fractales en la aplicación del método de Newton al plano complejo*.
2. Se envió un artículo a la Revista EIA de la Universidad EIA en Medellín, denominado *método de Newton para raíces complejas. Fractales en el problema de Cayley*, el cual se encuentra en revisión.
3. Participación en eventos.

- Actividad 1. VIII Congreso de Formación y Modelación en Ciencias Básicas que se llevó a cabo en la Universidad de Medellín, entre los días 3 y 5 de mayo de 2016. En este evento se presentó la ponencia *la aplicación del método de newton para funciones de variable compleja*.
 - Actividad 2. XIII Coloquio Regional de Matemáticas y III Simposio de Estadística que se llevó a cabo en la Universidad de Nariño, entre los días 18 y 20 de mayo de 2016. En este evento se presentó la ponencia *aproximación de raíces complejas con el método de newton*.
 - Actividad 3. Encuentro Regional de Matemáticas realizado en la Universidad Tecnológica de Pereira, entre el 19 y el 21 de octubre de 2016. En este evento se presentó la ponencia *Convergencia del método de Newton para raíces complejas. Una perspectiva a figuras fractales*.
 - Actividad 4. III Jornada de Actualización Científica en Química y I Simposio de Ciencias Exactas y Naturales que tuvo lugar en la Universidad de Nariño, entre los días 25 y 28 de octubre de 2016. En este evento se presentó el póster *fractales en la aplicación del método de newton al plano complejo*.
 - Actividad 5. II Jornada de Integración de Licenciatura en Matemáticas que tuvo lugar en la Universidad de Nariño, los días 10 y 11 de noviembre de 2016. En este evento se presentó la ponencia *Convergencia del método de Newton para raíces complejas. Una perspectiva a figuras fractales*.
 - Actividad 6. IX Congreso de Formación y Modelación en Ciencias Básicas y Encuentro Regional de Matemáticas 2017 que se llevó a cabo en la Universidad de Medellín, entre los días 3 y 5 de mayo de 2017. En este evento se presentó el póster *fractales en el problema de Cayley*.
 - Actividad 7. International Conference on Applied Mathematics and Informatics - ICAMI 2017 que se llevó a cabo en la Isla de San Andres, entre los días 26 de noviembre y 1 de diciembre de 2017. En este evento se presentó el póster *Newton's method for nonlinear equations systems: An application of fractals*.
4. Publicación de resúmenes de presentaciones en memorias de eventos.
- VIII Congreso de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, Medellín 2016.
 - XIII Coloquio Regional de Matemáticas y III Simposio de Estadística, San Juan de Pasto 2016.
 - III Jornada de Actualización Científica en Química y I Simposio de Ciencias Exactas y Naturales, San Juan de Pasto, 2016.

- IX Congreso de Formación y Modelación en Ciencias Básicas y Encuentro Regional de Matemáticas 2017, Medellín 2017. (Se puede ver en http://congformodel.udem.edu.co/index.php?option=com_content&view=article&id=147&lang=es).
- International Conference on Applied Mathematics and Informatics - ICAMI 2017, San Andres.

Referencias

- [1] Bolaños, C. (2016). *Análisis teórico y computacional sobre matrices esparzas* (Tesis de pregrado). Universidad de Nariño. Colombia.
- [2] Burden, R. y Faires, D. (2002). *Análisis numérico*, séptima edición. México: International Thomson Editores.
- [3] Burgos, D. (2016). *Métodos iterativos para sistemas de ecuaciones lineales* (Tesis de pregrado). Universidad del Bio-Bio. Chile.
- [4] Chicharro, F. (2017). *Análisis dinámico y aplicaciones de métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales* (Tesis doctoral). Universitat Politècnica de València. España.
- [5] Conde, C., y Schiavi, E. (2007). *Métodos numéricos de resolución de ecuaciones no lineales*. Universidad Politécnica de Madrid. España. Disponible en http://ocw.upm.es/matematica-aplicada/programacion-y-metodos-numericos/contenidos/TEMA_8/Apuntes/EcsNoLin.pdf
- [6] Grossman, S. (2004). *Algebra lineal*. McGraw-Hill.
- [7] Gutiérrez, J.; Olmos, M. y Casillas, J. (2010). *Análisis Numérico*. México: Interamericana Editores.
- [8] Llopis, J. (2012). Matesfacil [Online]. Disponible en <https://www.matesfacil.com/fractales/Julia/lleeno/conjunto-de-Julia-lleeno-imagenes-funcion-definicion-teorema-disco-fractal-iteraciones-ejemplos.html>
- [9] Mora, W. (2010). *Introducción a los métodos numéricos*. Costa Rica: Escuela de Matemática - Instituto Tecnológico de Costa Rica. Disponible en https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/WMora_MetodosNumericos/WMora-ITCR-MetodosNumericos.pdf
- [10] Moreira, F. (2006). *O método de Newton. Uma análise de convergência e semi-local- o teorema de Kantorovich* (Tesis de maestría). Universidade Federal de Goiás. Brasil.
- [11] Mosquera, S., y Soto, O. (2015). *Un primer curso sobre variable compleja*. Universidad de Nariño. Colombia. Disponible en <http://sired.udenar.edu.co/id/eprint/3719>
- [12] Nakamura, S. (1992). *Métodos numéricos aplicados con software*. México: Prentice Hall Hispanoamericana S.A.
- [13] Pita, C. (1995). *Cálculo Vectorial*. México: Escuela de Ingeniería - Universidad Panamericana.

- [14] Plaza, S. y Gutiérrez, J. (2013). *Dinámica del Método de Newton*. España: Universidad de la Rioja, servicio de publicaciones. Disponible en: Dialnet <https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=529750>
- [15] Remani, C. (2013). *Numerical methods for solving systems of nonlinear equations*. (Honour's seminar). Lakehead University. Canadá. Disponible en: <https://www.lakeheadu.ca/sites/default/files/uploads/77/docs/RemaniFinal.pdf>
- [16] Rubiano, G. (2007). *Método de Newton, Mathematica y Fractales: Historia de una Página*. Boletín de matemáticas, 14(1). Disponible en <http://www.bdigital.unal.edu.co/38088/1/40459-181969-1-PB.pdf>
- [17] Santamaria, P. (2009). *Creando fractales con el método de Newton*. Notas sobre Fortran [Documento PDF]. Disponible en: http://gcp.fcaglp.unlp.edu.ar/_media/integrantes:psantamaria:fortran:simul:fractal.pdf
- [18] Sauer, T. (2013). *Análisis Numérico*, segunda edición. México: Pearson Educación.
- [19] Stackoverflow em português [Online]. (2018). Disponible en <https://pt.stackoverflow.com/questions/101656/newton-fractal-ra%C3%ADzes-da-equa%C3%A7%C3%A3o-z4-1>
- [20] Stoer, J. y Bulirsch, R. (1993). *Introduction to numerical analysis*, segunda edición. New York: Springer-Verlag.
- [21] Strumia, A. (1998). Fractals with MATLAB [Online]. Disponible en <http://www.albertostrumia.it/sites/default/files/Fractals/FractalMatlab/Newton/Newt.m>
- [22] Terán, J. y Rua-Alvarez, C. (2017) *El Método de Newton para raíces complejas. Fractales en el problema de Cayley*. [Sometido].
- [23] Terán, J. y Rua-Alvarez, C. (2018) *Fractales en la aplicación del método de Newton al plano complejo*. Revista Sigma, 13(1). Disponible en <http://revistas.udenar.edu.co/index.php/rsigma/article/view/3724>