

LA ELIPSE Y LAS ESFERAS DE DANDELIN: UN ESTUDIO A TRAVÉS DE LA
TRANSICIÓN DE DOBLE VÍA ENTRE LA GEOMETRÍA PLANA Y LA
GEOMETRÍA ESPACIAL USANDO CABRI 3D

DAVID STIVEN CHAUCANES BOLAÑOS
JESSICA MARIBEL ENRÍQUEZ RIOBAMBA

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO

2017

LA ELIPSE Y LAS ESFERAS DE DANDELIN: UN ESTUDIO A TRAVÉS DE LA
TRANSICIÓN DE DOBLE VÍA ENTRE LA GEOMETRÍA PLANA Y LA
GEOMETRÍA ESPACIAL USANDO CABRI 3D

DAVID STIVEN CHAUCANES BOLAÑOS
JESSICA MARIBEL ENRÍQUEZ RIOBAMBA

Informe final presentado como requisito para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Director
EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA
Magíster en Educación Matemática

UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO

2017

Nota de Responsabilidad:

Las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo de grado son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1ro del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

NOTA DE ACEPTACIÓN:

Edinsson Fernández Mosquera
Director

Luis Albeiro Zabala
Jurado

Libardo Jácome
Jurado

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por permitirme tener tan buena experiencia dentro de la Universidad de Nariño, así como a los diferentes docentes que brindaron sus conocimientos y su contribución para seguir adelante día a día, en especial, al Magister Edinsson Fernandez por ser nuestro asesor y guiar el desarrollo del trabajo de grado presente.

A mis padres por su apoyo incondicional al cumplir los logros que me había propuesto y forjado como la persona que soy en la actualidad, muchas de mis metas se las debo a ustedes entre las que se incluye esta, debido a su constantemente motivación y confianza hacia mi.

Y gracias también a mis familiares, amigos y a las personas que aportaron parte de su tiempo, conocimiento y vivencias durante mi recorrido universitario, parte de este trabajo también es de ustedes.

David Stiven Chaucanes Bolaños

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por haberme dado salud, por haberme permitido llegar hasta este punto y así lograr mis objetivos, por fortalecer mi corazón e iluminar mi mente durante todo el período de estudio.

A mis padres por ser el pilar fundamental en todo lo que soy, por su incondicional apoyo mantenido a través del tiempo. A mis familiares y amigos, que me brindaron su apoyo, su amor y bondad, para lograr esta meta.

Gracias a las personas que, de una u otra manera, han sido claves en mi vida profesional y personal, en especial, aquellas personas que de forma directa o indirecta aportaron en el desarrollo de esta investigación.

Finalmente, gracias a los maestros, aquellos que marcaron mi camino universitario, en especial a mi asesor de trabajo de grado, el Mg. Edinsson Fernández por su esfuerzo y dedicación.

Jessica Maribel Enríquez Riobamba

RESUMEN

Este trabajo de investigación se realizó para promover el proceso cognitivo de visualización a través del concepto matemático: *Elipse*, vista como sección cónica, para lo cual se realizó una secuencia didáctica donde se integró el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Cabri 3D y el *Teorema de Dandelin* desde un enfoque tanto bidimensional como tridimensional, el cual se desarrolló mediante el concepto de *transición de doble vía*.

Esta investigación se fundamentó mediante la metodología de la micro-ingeniería didáctica debido a que permite diseñar y controlar secuencias didácticas mediante un análisis preliminar con respecto a lo histórico, cognitivo y didáctico, alrededor del concepto matemático a enseñar. La secuencia didáctica se diseñó con el propósito de orientar paso a paso las propiedades internas que posee el *Teorema de Dandelin*, para que a través de estas propiedades se promueva el proceso cognitivo de visualización en docentes en formación al momento de realizar la transición de doble vía entre la geometría plana y la geometría espacial.

La experimentación se realizó por docentes en formación que forman parte del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, Colombia, obteniendo datos para realizar un análisis. La síntesis de los datos recolectados evidenció que la secuencia didáctica permitió a los participantes reconocer la propiedad intrínseca de la sección cónica: *Elipse*, mediante las situaciones didácticas que permitieron promover el proceso cognitivo de visualización a través de la integración del AGD Cabri 3D y el *Teorema de Dandelin*.

PALABRAS CLAVES: visualización, transición de doble vía, sección cónica: *Elipse*, *Teorema de Dandelin*, geometría plana, geometría espacial, ambiente de geometría dinámica Cabri 3d, teoría de las situaciones didácticas, micro-ingeniería didáctica.

ABSTRACT

This research was made to promote the cognitive process of visualization through the mathematical concept Ellipse, seen as conic section, for which a teaching sequence was made where is integrated the dynamic geometry environment (DGE) Cabri 3D joined with Dandelin's Theorem from both two-dimensional and three-dimensional perspective, which was developed using the concept of *two-way transition*.

This research was based on the teaching micro-engineering methodology because it allows design and manage teaching sequences through a preliminary analysis with respect to the historical, cognitive and learning, about mathematical concept to teach. The teaching sequence was designed as the oriented step by step Dandelin's Theorem internal properties, that through these properties cognitive process of visualization is promoted to pre-service teachers when they do the two-way transition between plane geometry and solid geometry.

The experiment was performed by pre-service teachers as part of the program of Mathematics of the University of Nariño, Colombia, obtaining data for analysis. The synthesis of the data collected showed that the teaching sequence allowed the participants to recognize the intrinsic property of the conic section: Ellipse, through didactic situations that promoted the cognitive process of visualization through the integration AGD Cabri 3D and Dandelin's Theorem.

KEYWORDS: visualization, two-way transition, conic section: Ellipse, Dandelin's theorem, plane geometry, solid geometry, dynamic geometry environment Cabri 3D, theory of didactic situations, teaching micro-engineering.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN.....	viii
INTRODUCCIÓN	16
CAPITULO 1	20
ASPECTOS GENERALES	20
1.1. Antecedentes	22
1.2. Justificación y Planteamiento del Problema.....	27
1.3. Objetivos	30
1.3.1. Objetivo General:.....	30
1.3.2. Objetivos Específicos:	30
CAPITULO 2	31
ANÁLISIS PRELIMINARES	31
2.1. Dimensión Histórica-Epistemológica.....	31
2.2. Dimensión Cognitiva.....	42
2.3. Dimensión Didáctica	54
CAPITULO 3	59
METODOLOGÍA	59
CAPITULO 4	65
DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y ANÁLISIS <i>A PRIORI</i>	65
4.1. Análisis de la Situación didáctica N° 1	66
4.2. Análisis de la Situación didáctica N° 2	112
CAPITULO 5	137
EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS <i>A POSTERIORI</i>	137
5.1. Caracterización de la población y descripción de la experimentación.....	137
5.2. Análisis <i>A Posteriori</i>	139
5.2.1. Situación didáctica N° 1	140
5.2.2. Situación didáctica N° 2	158
CAPITULO 6	173
CONCLUSIONES	173
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	180
ANEXOS	186

LISTA DE ESQUEMAS

Esquema 1: Concepto de transición de doble vía desarrollado en esta investigación.....	22
Esquema 2: Triangulo didáctico.....	56
Esquema 3: Aprendizaje por adaptación.....	57

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Progresión geométrica del volumen de un cubo de arista a	33
Figura 2: Hipérbola equilátera y parábolas obtenidas por Menecmo	34
Figura 3: Secciones cónicas según Menecmo	35
Figura 4: Secciones cónicas según Apolonio.....	36
Figura 5: Ilustración de las propiedades cónicas según Hamilton	38
Figura 6: Ilustración a la conjetura de Hamilton.....	39
Figura 7: <i>Esferas de Dandelin</i>	41
Figura 8: Categorías de visualización planteadas por Gonzato, Godino y Neto.....	46
Figura 9: Construcción de un punto.....	48
Figura 10: Punto coplanario	49
Figura 11: Perspectivas de un supuesto cono.....	49
Figura 12: Punto en el espacio	50
Figura 13: Perspectiva de un cubo: Natural, Caballera e isométrica respectivamente	50
Figura 14: Interpretación de los cuatro puntos del cubo	51
Figura 15: Interpretación de los cuatro puntos limitados a la geometría plana	51
Figura 16: Interpretación de los cuatro puntos desde una perspectiva tridimensional	52
Figura 17: Ubicación exacta de los cuatro puntos sobre el cubo	52
Figura 18: Construcción de las caras de un cubo.....	53
Figura 19: Prueba de arrastre a la construcción de un cubo.....	53
Figura 20: Ilustración de la fase 2	128
Figura 21: Transición de las <i>esferas de Dandelin</i> a la geometría plana.....	129
Figura 22: Respuesta a la incógnita mediante el teorema 5.19.	131
Figura 23: Respuesta a la incógnita mediante el teorema 4.14.	132
Figura 24: Respuesta a la incógnita mediante el postulado L.A.L.....	133
Figura 25: Ilustración auxiliar para la demostración del <i>Teorema de Dandelin</i>	134
Figura 26: Construcción del cono circular recto	141
Figura 27: Cono Aplanado	142
Figura 28: Cono circular no recto.	142
Figura 29: Construcción de la Elipse.	143

Figura 30: Elipse generado por medio de un plano bisector aleatorio.....	143
Figura 31: Elipse generada por un plano que pasa por una recta y un punto.....	144
Figura 32: Construcción de la circunferencia.	144
Figura 33: Respuesta de Palacios al interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°1.	145
Figura 34: Respuesta de Villota al interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°1.	146
Figura 35: Construcción de Zambrano de la fase 2.2 de la situación didáctica N°1	149
Figura 36: Construcción de González de la fase 2.2 de la situación didáctica N°1..	150
Figura 37: Respuesta de González al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.....	151
Figura 38: Respuesta de Villota al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.....	151
Figura 39: Respuesta de Acosta al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.....	151
Figura 40: Respuesta de Palacios al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.....	152
Figura 41: Respuesta de Morales al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.....	152
Figura 42: Respuesta de Zambrano al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.....	153
Figura 43: Respuesta de Palacios al segundo interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.....	154
Figura 44: Respuesta de Zambrano al segundo interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.....	154
Figura 45: Construcción y respuesta de Palacios de la fase 3 de la situación didáctica N°1.	155
Figura 46: Construcción y respuesta de Palacios de la fase 3 de la situación didáctica N°1.	157
Figura 47: Construcción y respuesta de Palacios de la fase 3 de la situación didáctica N°1.	158

Figura 48: <i>Teorema de Dandelin</i> presentado a los docentes en formación.	159
Figura 49: Construcción robusta estandarizada de la Elipse.....	160
Figura 50: Plano bisector erróneo para tratar de realizar las <i>Esferas de Dandelin</i> ..	162
Figura 51: Transición de Palacios para desarrollar la fase 1 de la situación didáctica N°2	162
Figura 52: Construcción de las <i>esferas de Dandelin</i> realizada por un participante..	163
Figura 53: Respuesta de Villota al primer interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°2.....	164
Figura 54: Respuesta de Morales al primer interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°2.....	164
Figura 55: Respuesta de González al segundo interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°2.....	165
Figura 56: Respuesta de Acosta al segundo interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°2.....	165
Figura 57: Localización de un foco al realizar las <i>Esferas de Dandelin</i>	166
Figura 58: Respuesta de Morales al interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°2.	167
Figura 59: Ilustración auxiliar para la demostración del <i>Teorema de Dandelin</i>	169
Figura 60: Respuesta de Palacios al interrogante de la fase 3 de la situación didáctica N°2.	170
Figura 61: Respuesta de Morales al interrogante de la fase 3 de la situación didáctica N°2.	171
Figura 62: Respuesta de Villota al interrogante de la fase 3 de la situación didáctica N°2.	172

LISTA DE TABLAS

Tabla 1: Parámetros que definen las cónicas	38
Tabla 2: Acciones y retroacciones en los AGD según Acosta.....	62
Tabla 3: Rejilla de análisis de la Situación Didáctica N°1.	63
Tabla 4: Rejilla de análisis de la Situación Didáctica N°2.	64
Tabla 5: Construcción del Cono circular recto	67
Tabla 6: Construcción del cono circular recto como sólido de revolución.....	69
Tabla 7: Construcción del cono circular recto según Menecmo	71
Tabla 8: Construcción del cono circular no recto	73
Tabla 9: Construcción del "Cono aplanado"	74
Tabla 10: Construcción de la sección cónica: Elipse, mediante el corte de un plano que contiene un punto sobre el cono y dos puntos sobre el plano base.	76
Tabla 11: Construcción de la sección cónica: Elipse, mediante el corte de un plano que contiene dos puntos sobre el cono y un punto sobre el plano base.	78
Tabla 12: Construcción de la sección cónica: Elipse, mediante el corte de un plano que contiene tres puntos sobre el cono.....	80
Tabla 13: Construcción de la sección cónica: Elipse, como corte de un plano perpendicular a la generatriz.	82
Tabla 14: Construcción errónea del plano que secciona al cono.	84
Tabla 15: Construcción de la sección cónica: Circunferencia.	86
Tabla 16: Construcción de una circunferencia como corte de un plano que pasa por los puntos medios de tres segmentos congruentes de la generatriz.	89
Tabla 17: Construcción de una circunferencia como corte de una esfera que secciona al cono.	91
Tabla 18: Construcción de una circunferencia como corte de un cubo que secciona al cono.	93
Tabla 19: Construcción de una circunferencia tangente.	96
Tabla 20: Construcción de una circunferencia tangente mediante la localización del incentro.....	98

Tabla 21: Interacción con el AGD Cabri 3D para tratar de construir una circunferencia tangente.	102
Tabla 22: Proyecciones tridimensionales de una circunferencia tangente a dos semirrectas.....	104
Tabla 23: Construcción robusta de la sección cónica: Elipse, con el plano oblicuo al eje y que corta a todos los elementos del cono.	109
Tabla 24: Construcción de las <i>esferas de Dandelin</i>	114
Tabla 25: Construcción de una esfera que es únicamente tangente al cono.	118
Tabla 26: Construcción de una esfera que es tangente al cono y al plano base.....	120
Tabla 27: Posibles construcciones para la localización de los focos y las circunferencias tangentes.	124
Tabla 28: Construcciones auxiliares del <i>Teorema de Dandelin</i>	126
Tabla 29: Demostración del <i>Teorema de Dandelin</i>	135
Tabla 30: Docentes en formación que desarrollaron la secuencia didáctica.....	138
Tabla 31: Ejecución de la Situación Didáctica N°1.....	139
Tabla 32: Ejecución de la Situación Didáctica N°2.....	140
Tabla 33: Herramientas empleadas para intentar solucionar la actividad.....	147
Tabla 34: Errores cometidos por parte de los docentes en formación al realizar las <i>Esferas de Dandelin</i>	160

LISTA DE ANEXOS

Anexo A: Registro fotográfico de la Situación Didáctica N°1.....	178
Anexo B: Registro fotográfico de la Situación Didáctica N°2.....	179
Anexo C: Actividades de construcción de la Situación Didáctica N°1.....	180
Anexo D: Respuesta a los interrogantes de la hoja del estudiante de la Situación Didáctica N°1 por parte de los docentes en formación.....	182
Anexo E: Actividades de construcción de la Situación Didáctica N°2.....	190
Anexo F: Respuesta a los interrogantes de la hoja del estudiante de la Situación Didáctica N°2 por parte de los docentes en formación.....	192
Anexo G: Herramientas del AGD Cabri 3D empleadas en la secuencia didáctica.....	200
Anexo H: Propiedades, Definiciones y Teoremas.....	206

INTRODUCCIÓN

A través de los tiempos la geometría ha sido de gran utilidad a la hora de estudiar diferentes ámbitos académicos, tales como: el arte, la escultura, la arquitectura, la física, la matemática, etc., sin embargo, con la implementación de las matemáticas modernas se ha dejado de lado los aspectos intuitivos y especulativos, dando mayor importancia a aspectos analíticos y ocasionando obstáculos a la hora de formular hipótesis, característica ligada al proceso cognitivo de *visualización* la cual es importante a la hora de lograr una demostración de un concepto matemático.

Teniendo en cuenta la importancia de la geometría y la forma como es tratada en la actualidad, se han desplegado investigaciones que buscan analizar esta problemática, ya que la enseñanza de esta rama se ve agravada por una serie de problemas, en primera instancia es relegada a un segundo plano, además, según Galindo (1996) Galindo (1996): “la enseñanza de la geometría se ha desplazado a un segundo nivel debido a la poca intensidad horaria y a la fusión con la aritmética o el álgebra dentro del programa de matemática actual” (p.50), además comenta acerca de algunos obstáculos que tiene la enseñanza de la geometría:

Esta situación se ve agravada por varios hechos: la falta de un currículo coherente para la enseñanza de la geometría desde el preescolar hasta el último grado de la escolaridad, la falta de material didáctico para apoyar a los profesores en la enseñanza de la geometría y además la deficiente preparación del docente en esta área de la matemática. (p.50)

Lo anterior manifiesta problemáticas que respectan a la geometría plana, sin embargo, hay que tener en cuenta que la geometría espacial no es ajena a esta situación, donde prevalece un problema mayor debido a que se pretende representar objetos tridimensionales en el plano, generando dificultades al momento de *visualizar*, ya que se requiere un alto nivel de abstracción para poder representar estos objetos.

Así, en esta investigación se analizó el proceso cognitivo de *visualización* que se manifestó en la *transición de doble vía*¹ entre la *geometría espacial hacia y desde la geometría plana*, con respecto a la sección cónica: *Elipse*, realizando un estudio de esta a partir de la integración del *Teorema de Dandelin* y el AGD Cabri 3D. De acuerdo a esto, este trabajo está organizado de la siguiente manera:

En el capítulo uno, ASPECTOS GENERALES se aborda los antecedentes, la justificación, planteamiento del problema y los objetivos. En primera instancia, se hace un breve recorrido de investigaciones realizadas sobre el AGD Cabri 3D, Secciones Cónicas y las *Esferas de Dandelin*, por esta razón, se realizó una clasificación de estas, de la siguiente manera: AGD Cabri 3D, Secciones Cónicas: *Elipse* y la integración de las Secciones Cónicas con el AGD Cabri 3D, debido a que se requirió que la elipse se integrara con el AGD Cabri 3D para diseñar las situaciones didácticas aplicadas a los docentes en formación.

En cuanto a la Justificación, se manifiestan razones por las cuales esta investigación tiene importancia en el ámbito educativo con respecto a las secciones cónicas, debido a que estas tienen un alto contenido matemático, por esta razón, se diseñaron situaciones didácticas que integraron la *Elipse* con el AGD Cabri 3D por el auge de los ambientes tecnológicos, los cuales son más habituales a la época actual. Por otro lado, en la formulación del problema se presentan diversas referencias que permitieron determinar el problema del proceso cognitivo de *visualización* que ocurre en la *transición de doble vía* entre la *geometría tridimensional hacia y desde la geometría plana*, con respecto a la sección cónica: *Elipse*, realizando un estudio de ésta a partir de la integración del *Teorema de Dandelin* y el AGD Cabri 3D.

¹ Concepto que se explicará en el inicio del capítulo 1

Por ello, en los Objetivos se presentará lo que se realizó en el trabajo de grado mediante dos objetivos específicos que apoyaron el desarrollo del objetivo general, el cual dará respuesta a la pregunta de investigación.

En el capítulo dos, ANÁLISIS PRELIMINARES, se presentan los análisis preliminares basados en la *micro-ingeniería didáctica* que permitieron el diseño de las situaciones didácticas, dichos análisis están compuestos por tres dimensiones:

Dimensión Histórico-Epistemológica: la cual muestra el origen y desarrollo de las secciones cónicas, en particular se estudia el *Teorema de Dandelin* el cual es un tratamiento alternativo de las secciones cónicas.

Dimensión Cognitiva: analiza las características que surgen durante el proceso cognitivo de *visualización* en los AGD, además, de manifestar algunos obstáculos que ocurren al abordar la geometría plana y la geometría espacial.

Dimensión Didáctica: se fundamenta en la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) de Brousseau (2007) la cual tiene como objetivo lograr que el estudiante haga una construcción propia del saber matemático, en este caso, la sección cónica: *Elipse*. Asimismo, se muestra el estado actual del tratamiento de esta cónica en el campo de la enseñanza, con el fin de proponer una integración entre el *Teorema de Dandelin* y el AGD Cabri 3D.

En el capítulo tres, METODOLOGÍA, se aborda la ingeniería didáctica como metodología de investigación, en la cual se presenta una rejilla de análisis teniendo en cuenta los análisis preliminares, para que la estructura de las situaciones didácticas sea distribuida de manera coherente.

En el capítulo cuatro, DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y ANÁLISIS A *PRIORI*, se tuvo en cuenta aspectos que podrían surgir en el medio, los obstáculos que podían afectar al estudiante y los diferentes métodos de posible resolución por parte de ellos, además, se predicen que resultados o vías de resolución

pueden dar los docentes en formación a la hora de desarrollar las situaciones didácticas.

En el capítulo cinco, EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS *A POSTERIORI*, se analizó los datos recolectados para confrontarlos con los análisis *a priori*, mostrando las acciones que surgieron en el desarrollo de las actividades con la utilización del AGD Cabri 3D en los docentes en formación.

Finalmente, en las CONCLUSIONES. se presenta una síntesis a partir de las soluciones dadas a las situaciones didácticas, para mostrar una perspectiva sobre el proceso cognitivo de visualización manifestado por los docentes en formación con el fin de cumplir el objetivo de la investigación.

CAPITULO 1

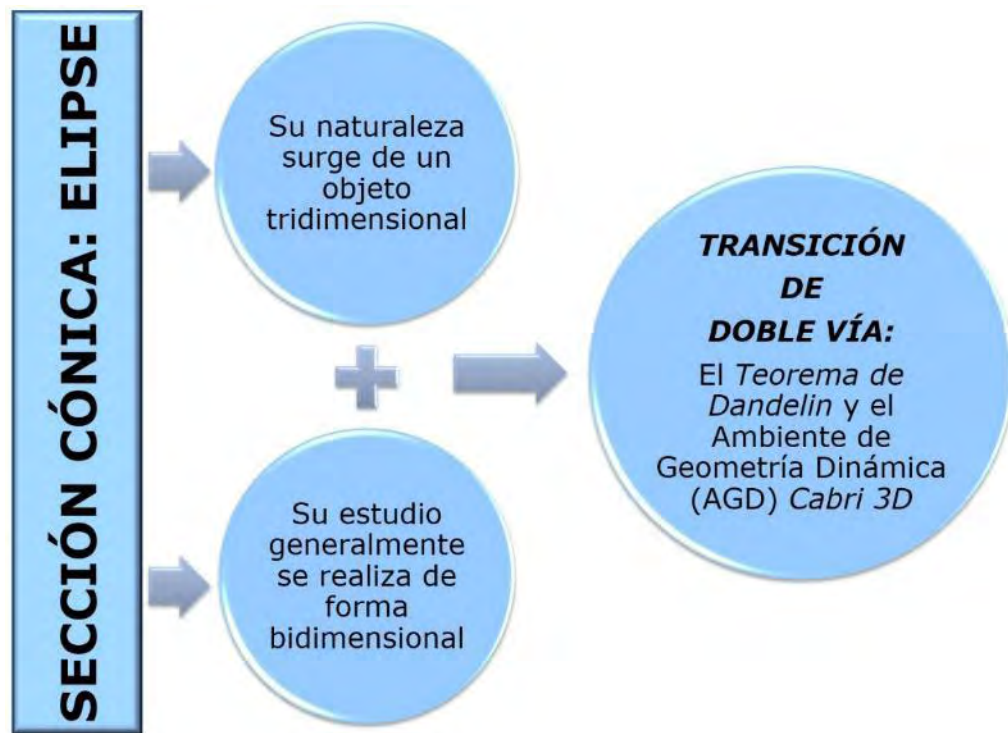
ASPECTOS GENERALES

Esta investigación abordó la problemática del proceso cognitivo de *visualización* en conjunto con el estudio de propiedades geométricas en torno a la sección cónica: *Elipse*, mediante una integración del *Teorema de Dandelin* y el AGD Cabri 3D. Para este propósito, se diseñaron situaciones didácticas distribuidas en dos sesiones a partir de la metodología denominada *micro-ingeniería didáctica*.

La micro-ingeniería didáctica propuesta por Artigue (1995), permitió diseñar y controlar las situaciones didácticas enfocadas en el proceso cognitivo de *visualización* a través de la *transición de doble vía entre la geometría espacial y la geometría plana* cuando se abordó la sección cónica: *Elipse*. La experimentación fue desarrollada con docentes en formación del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, la cual contó con la participación de seis (6) estudiantes.

La problemática de esta investigación se formuló porque generalmente el estudio de las secciones cónicas se limita a dos dimensiones, ocasionando escasez no solo en la parte tridimensional, sino también en investigaciones que tratan de complementar la geometría espacial con la geometría plana en lo que respecta a las secciones cónicas, en particular la sección cónica: *Elipse*.

A la luz de lo anterior, la elipse emerge de una naturaleza tridimensional porque se obtiene cortando un cono con un plano que no es paralelo a ninguna de sus generatrices, sin embargo, su estudio se hace de forma bidimensional en los ámbitos algebraicos, analíticos y geométricos, por lo tanto, se propone el concepto de *transición de doble vía* (Ver Esquema 1) para combinar estos dos aspectos, empezando desde una perspectiva tridimensional e ir alternando con la geometría plana con respecto a la sección cónica: *Elipse*, realizando un estudio de esta a partir de la integración del *Teorema de Dandelin* y el AGD Cabri 3D.



Esquema 1: Concepto de transición de doble vía desarrollado en esta investigación.

(Fuente de esta investigación)

1.1. Antecedentes

En lo que respecta a las secciones cónicas, Schumann, 2005 afirma que: la mayoría de las contribuciones hacia las secciones cónicas se han limitado a un tratamiento de dos dimensiones, que es una paradoja en vista de la naturaleza de la materia y de hecho de su propio nombre, de ahí que este autor promueve el uso de AGD para estudiarlas desde su naturaleza tridimensional sin dejar de lado sus propiedades geométricas que se estudian con la geometría plana.

Por ello, en esta investigación se realizó una integración entre el AGD Cabri 3D y el *Teorema de Dandelin* entorno a la sección cónica: *Elipse*, que permitió la transición de la geometría espacial y la geometría plana fomentando así la *visualización*, en consecuencia, se realizó una clasificación de los artículos que conforman el Estado del Arte de esta investigación de la siguiente manera:

- AGD Cabri 3D: en esta categoría se analizó las investigaciones con el propósito de analizar las características que tiene el AGD Cabri 3D al diseñar situaciones didácticas para generar una mejor visualización de objetos en tres dimensiones, de tal manera que el usuario pueda construir objetos geométricos, además de manipularlos directamente de manera que él se apropie del saber matemático.
- Secciones Cónicas (Elipse): con esta categoría se estudió algunos tratamientos que han surgido en el ámbito educativo sobre las secciones cónicas, en particular la sección cónica: *Elipse*, dando prioridad a tratamientos que involucren una transición de la geometría espacial con la geometría tridimensional como lo es el *Teorema de Dandelin*.
- La integración de las Secciones Cónicas con el AGD Cabri 3D: debido a que la utilización del AGD Cabri 3D permite realizar diferentes representaciones y manipulaciones, se analizó esta categoría con la intención de indagar que actividades se han realizado sobre las secciones cónicas en el AGD Cabri 3D para tener en cuenta cómo realizar situaciones didácticas y así evitar generar

concepciones erróneas por parte de los docentes en formación a la hora de desarrollar las actividades.

A continuación, se mostrará brevemente los documentos consultados de acuerdo con la anterior clasificación:

- Artículos relacionados con el AGD Cabri 3D:

Una de las investigaciones que se ha realizado entorno al uso adecuado del AGD Cabri 3D fue realizada por: Accascina & Rogora (2006) en *Using Cabri3D Diagrams for Teaching Geometry*, donde narran una experiencia alrededor del AGD Cabri 3D con profesores de nivel secundario, en la cual se observa cómo pueden surgir concepciones erróneas al interpretar lo mostrado en una pantalla con el AGD Cabri 3D, advirtiendo a los nuevos docentes sobre cómo integrar estas tecnologías en el aula de clase afirmando que no es una tarea sencilla, ya que requiere diseñar actividades que complementen la temática a desarrollar, dado que el uso inadecuado puede generar muchas más confusiones en los estudiantes tal como la dificultad de colocar puntos en el espacio en el AGD Cabri 3D. Además, resaltan que siendo Cabri 3D un AGD enfocado a la geometría espacial aún se están limitando a una representación de objetos de tres dimensiones en una pantalla de dos dimensiones.

Por otra parte, Camou (2012) en *La Geometría del Espacio: un fascinante mundo por descubrir*, resalta que la geometría del espacio es un rico mundo matemático que está ausente en la enseñanza, llevando consigo una problemática a la hora de representar objetos de tres dimensiones, por ello, este autor ha venido desarrollando un enfoque para poder abordar esta geometría denominado ingeniería iMAT (integrando Multirepresentación, Aproximaciones y Tecnología), que tiene por objetivo aprender geometría del espacio mediante una secuencia de representaciones de los objetos geométricos, es decir, partir de modelos físicos 3D, luego figuras en el AGD Cabri 3D y al final utilizar representaciones planas, dicha secuencia es: concretas, semi-concretas y semi-abstractas. Además, Camou afirma que el principal

obstáculo para el estudio de esta temática está vinculado con el problema de la representación, por ende, hay que tener en cuenta que las representaciones planas son muy complejas para lograr la comprensión de los objetos geométricos tridimensionales.

Sin embargo, Laborde & Laborde (2011) en *Interactivity in dynamic mathematics environments: what does that it mean?* mencionan una perspectiva doble acerca de la interacción, por un lado, el diseño de características de interacción en el ambiente dinámico y por el otro, actividades que hacen uso de estas características de interactividad, además hacen énfasis en que el desarrollo de un software educativo debe tener ciertas fidelidades con respecto al objeto representado y que no es una tarea que deba ser llevada al azar; con respecto a la geometría tridimensional, mencionan que existen ideas ingenuas de que al agregar una coordenada adicional ya se tiene un software tridimensional lo cual es erróneo porque el espacio es mucho más complejo. Por otra parte, vinculan la idea de ambiente dinámico con la noción de “*medio a-didáctico*” fundamentada en la TSD, en donde el conocimiento es construido por el estudiante como solución a un problema, dado que los ambientes dinámicos ofrecen información y medios de acción para el estudiante, proporcionando retroalimentación a sus acciones con las diferentes actividades diseñadas por el profesor.

Por último, hay que tener en cuenta que las construcciones se deben realizar de manera apropiada, ya que Laborde (2005) en su documento *Robust and soft constructions: two sides of the use of the use of dynamic geometry environments*, plantea un paradigma que surge al diseñar actividades en un AGD, este consta de actividades que involucran construcciones robustas y blandas, Laborde comenta que los docentes dan una mayor importancia a las construcciones robustas debido a que requieren un mayor conocimiento para realizarlas, esto implica que al completar la construcción está pasa la prueba del arrastre y conserva las propiedades geométricas deseadas, sin embargo, no está de acuerdo con esto debido a que manifiesta que las construcciones blandas, las cuales no tienen invariantes geométricas son también

valiosas debido a que permiten una mayor exploración e interacción para obtener conjeturas acerca de las actividades a realizar, por lo tanto recomienda que al diseñar actividades en un AGD se debe fomentar construcciones robustas y construcciones blandas que permitan al estudiante interactuar, conjeturar y comprobar su conjeturas.

- Artículos relacionados con Secciones Cónicas (Elipse):

Con respecto a esta categoría, la cual analiza diferentes tratamientos de las secciones cónicas (Elipse), tenemos la investigación de Bonilla & Parraguez (2013) denominada *La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento*, en la cual realizaron una investigación donde se planeó que los estudiantes desde diferentes modos de pensamiento comprendieran la elipse, es decir, de forma geométrica, aritmética y estructural, debido a que en la mayoría de instituciones educativas tratan a las secciones cónicas de forma analítica, por ende, muestran interés por la problemática de la enseñanza de las secciones cónicas en la secundaria. Para ello, proponen actividades que interrelacionan los tres modos de pensamiento y al finalizar su investigación ponen en evidencia que los estudiantes lograron una comprensión profunda del concepto de elipse. Además, este artículo no se mantiene apartado del plano tridimensional porque proponen diseñar situaciones problema en las cuales se integre el uso del AGD Cabri 3D y las *esferas de Dandelin* para abordar las secciones cónicas en el espacio.

De ahí que, Ruiz (1996) en *Las Esferas de Dandelin*, afirma que la enseñanza de las secciones cónicas se aborda a partir de la definición de lugar geométrico, sin embargo, esto no es suficiente para lograr la comprensión por parte de los estudiantes. Ruiz considera que las secciones cónicas pueden ser comprendidas fácilmente mediante representaciones gráficas y físicas de los cortes a un cono, por lo tanto, motiva a hacer uso del teorema que realizó el matemático francés Germinal Dandelin (1794 – 1847) denominado las *Esferas de Dandelin*, con el cual se analiza la naturaleza de las cónicas de una manera sencilla a partir de la inscripción de esferas en un cono; para lograr las deducciones del teorema, Dandelin se apoyó en la

igualdad de las tangentes a una esfera desde un punto exterior, con las cuales se pueden obtener los puntos notables que definen las propiedades geométricas de cada sección cónica.

Teniendo en cuenta las anteriores categorías se planteó la siguiente para integrar un tratamiento alternativo hacia las secciones cónicas como es el *Teorema de Dandelin* en el AGD Cabri 3D.

- Artículos relacionados con La integración de las Secciones Cónicas con el AGD Cabri 3D:

Se encontró un solo artículo que se enfoca en la integración del *Teorema de Dandelin* (tratamiento alternativo de las secciones cónicas) junto con Cabri 3D escrito por Schumann (2005) el cual es *Introduction to Conics with Cabri 3D*, este artículo menciona que los estudios de las secciones cónicas se han limitado a una perspectiva bidimensional debido a que no existían entornos apropiados para el tratamiento tridimensional de las cónicas, sin embargo, con el avance de los AGD, se logró ofrecer nuevas formas de tratar a las cónicas desde una perspectiva tridimensional, en particular apoya el uso del AGD Cabri 3D debido a la capacidad manipulable del software que cumple con muchos de los requisitos como herramienta de la geometría espacial. Por otra parte, menciona que las *Esferas de Dandelin* en el AGD Cabri 3D son una buena forma de abordar las secciones cónicas debido a que ofrece una mejor visualización para la interpretación de las propiedades geométricas y métricas de estas.

1.2. Justificación y Planteamiento del Problema

Con base en las investigaciones consultadas ((Accascina & Rogora, 2006); (Bonilla & Parraguez, 2013); (Camou, 2012); (Laborde C. , 2005); (Laborde & Laborde, 2011); (Ruiz, 1996); (Schumann, 2005)) se puede inferir que existe una problemática con respecto a la enseñanza de la geometría tridimensional y las secciones cónicas, además, se muestra el interés en resolver esto mediante ambientes informáticos, en este caso el AGD Cabri 3D, inclusive en los Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas (Ministerio de Educación Nacional, 2006) se invita al uso de estos AGD debido a que permiten representaciones y manipulaciones que son imposibles de realizar usando un ambiente tradicional como lo es el lápiz y papel.

Teniendo en cuenta las escasas investigaciones de las secciones cónicas con un tratamiento tridimensional y a la vez integrando el AGD Cabri 3D, esta investigación contribuye a la búsqueda de una solución para la problemática que existe en la enseñanza de las secciones cónicas: *Elipse* mediante un tratamiento de tres dimensiones.

Además, según Galindo (1996): “el profesor no propone actividades que le ayuden al estudiante a construir su propio saber geométrico, más bien, le presenta el saber como algo terminado, estático, con un enfoque axiomático” (p.49) dificultando así la manera en cómo aprenden los estudiantes la geometría.

Por otra parte, Accascina & Rogora (2006) declararon que la geometría en tres dimensiones en el ámbito universitario, tampoco se estudia, por lo cual se ve afectada la enseñanza de la misma por los futuros docentes, pues lo afirman de la siguiente manera:

Como consecuencia de la retirada de la geometría descriptiva del currículo universitario, la capacidad de los profesores para realizar diagramas

significativos que ilustren objetos 3D se ha ido deteriorando rápidamente, dando lugar a una restricción progresiva del conocimiento intuitivo de los estudiantes y una consecuente demanda más alta en sus habilidades de abstracción. (p.3)

Además, Bonilla & Parraguez (2013) manifiestan que: “Mayoritariamente se le solicita al aprendiz de este tópico, determinar la ecuación de la elipse, conociendo los elementos (...) Consideramos que este enfoque centrado en las ecuaciones cartesianas que definen la elipse, no es suficiente para lograr su comprensión” (p.1).

Teniendo en cuenta lo anterior, la intención de este trabajo de grado es incentivar un cambio en el estudio de la sección cónica: *Elipse, a través de la transición de doble vía entre la geometría plana y la geometría espacial*, integrando el *Teorema de Dandelin* y el AGD Cabri 3D como una alternativa de tratamiento de la *Elipse*, Ruiz (1996) menciona que existen diferentes tratamientos de las secciones cónicas para evitar su enseñanza tradicionalista mediante definiciones que tal vez no se logren interiorizar por parte de los estudiantes.

Por lo cual, para incentivar este cambio se empleó el AGD Cabri 3D porque es una herramienta informática para aprender y enseñar geometría tridimensional, debido a que ofrece al estudiante la representación de objetos en tres dimensiones de tal manera que él pueda construirlos y manipularlos directamente, además, con el *Teorema de Dandelin* se puede caracterizar de una manera sencilla y elegante las propiedades intrínsecas de las secciones cónicas desde su propia naturaleza tridimensional.

De lo anterior, surge la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo se manifiesta el proceso cognitivo de *visualización a través de la transición de doble vía entre la geometría espacial y la geometría plana* con docentes

en formación cuando abordan la sección cónica: *Elipse*, a partir del *Teorema de Dandelin* en el AGD Cabri 3D?

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General:

- Analizar el proceso cognitivo de *visualización* que se manifiesta *a través de la transición de doble vía entre la geometría espacial y la geometría plana* con docentes en formación del Programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, cuando estudian la sección cónica: *Elipse*, a partir del *Teorema de Dandelin* en el AGD Cabri 3D.

1.3.2. Objetivos Específicos:

- Diseñar Situaciones Didácticas a partir de la *Teoría de las Situaciones Didácticas*, acerca de la sección cónica: *Elipse*, que permitan la integración del *Teorema de Dandelin* y el AGD Cabri 3D.
- Examinar las situaciones didácticas desarrolladas por estudiantes que cursaron geometría analítica de nivel terciario a la luz de la Micro-Ingeniería Didáctica para describir la *transición de doble vía entre la geometría plana y la geometría espacial*.

CAPITULO 2

ANÁLISIS PRELIMINARES

Esta investigación se fundamentará en la micro-ingeniería didáctica, la cual se compone de los análisis preliminares, los cuales se presentan en tres dimensiones usuales en el campo de la Didáctica de las Matemáticas de la escuela francesa: la dimensión histórico-epistemológica asociada a las características del saber en juego, la dimensión cognitiva asociada a las características cognitivas de los estudiantes y la dimensión didáctica asociada a las características del funcionamiento del sistema de enseñanza (Artigue, 1995), que sirven como base para producir y controlar secuencias de aprendizaje mediante situaciones didácticas.

A continuación, se presentan las tres dimensiones y su contenido relacionado con este trabajo de investigación.

2.1. Dimensión Histórica-Epistemológica

Se realiza un recorrido histórico en torno a la definición de las secciones cónicas, debido a que la evolución histórica de la sección cónica: *Elipse* se desarrolla en conjunto con las otras secciones cónicas como: la parábola y la hipérbola². Teniendo en cuenta que fueron estudiadas por diferentes matemáticos a lo largo de la historia,

² No se menciona la sección cónica: circunferencia, debido a que es un caso particular de la sección cónica: *Elipse*

se desarrolló una síntesis que abarcó aspectos importantes hacia la evolución de estas. Para ello se tratará de dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿Cómo ha sido la evolución histórica de las secciones cónicas?

En la antigua Grecia se plantearon los tres problemas de construcción geométrica, los cuales son: la duplicación del cubo, la trisección del ángulo y la cuadratura del círculo, estos problemas de construcción geométrica debían ser resueltos utilizando regla y compás, únicos instrumentos aceptados en la Geometría Euclídea, aunque en la actualidad se ha demostrado que estos problemas son imposibles de resolver utilizando estos instrumentos. El intento de resolver uno de los tres problemas de construcción geométrica: la duplicación del cubo, guio a varios matemáticos de aquella época a experimentar diversas formas de solución, entre ellas, sin darse cuenta el descubrimiento de las secciones cónicas.

Menecmo (380 a.C. - 320 a.C.) discípulo de Platón, se le atribuye la entrada al estudio de las secciones cónicas: elipse, parábola e hipérbola, las cuales fueron conocidas como la Tríada de Menecmo. Él se ocupó del problema clásico de la duplicación del cubo sobre el que ya había avanzado Hipócrates en el siglo IV.

Hipócrates realizó el primer progreso real en el problema de la duplicación del cubo, dado que el volumen de un cubo aumenta en progresión geométrica cada vez que duplicamos el tamaño de la arista (Ver Figura 1).

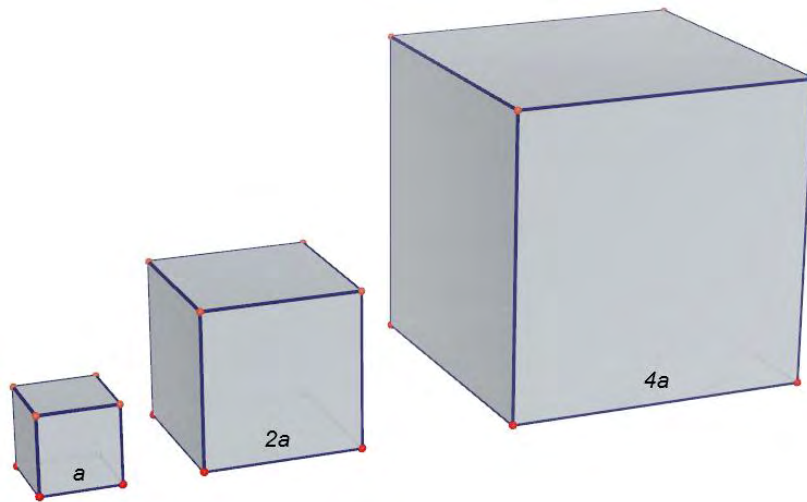


Figura 1: Progresión geométrica del volumen de un cubo de arista a

Entonces el valor de la arista para un volumen igual al doble del inicial, se debe de encontrar entre a y $2a$, el cual se fundamenta en la construcción de medias proporcionales entre dos segmentos de líneas dadas de longitud a y $2a$. Esto es lo que se llama reducción de Hipócrates, se trata en la simplificación del problema de la duplicación del cubo a una media proporcional.

Menecmo, teniendo en cuenta los aportes de Hipócrates y continuando con el intento de solución al problema de la duplicación del cubo llegó en primer lugar al descubrimiento de la elipse, sin embargo, lo que realmente buscaba era la parábola y la hipérbola, dando así lugar a la siguiente expresión que en la actualidad podría escribirse de la siguiente forma:

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{1}$$

Es decir, $x^2 = 2y$ e $y^2 = x$ o lo que es lo mismo $x^3 = 2y^3$. En otras palabras, el cubo de un lado x es de volumen doble que el de lado y . En general, es el problema de las dos medias proporcionales entre dos segmentos de recta denotados como a y $2a$, que consiste en hallar x e y , tales que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$, tiene por solución la

intersección de la curva $x^2 = ay$ con $xy = 2a^2$ de donde surge lo que ahora llamamos parábola o hipérbola equilátera (Ver Figura 2).

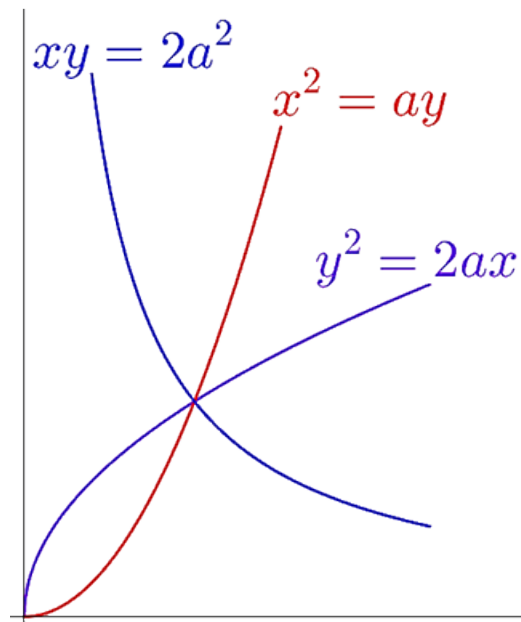


Figura 2: Hipérbola equilátera y parábolas obtenidas por Menecmo

Menecmo refiere estas curvas como secciones de un cono circular agudo³, recto⁴ u obtuso⁵, que son obtenidas por la intersección de un plano perpendicular a una generatriz⁶ del cono, en aquella época no eran conocidas por secciones cónicas sino como secciones planas de cono y eran definidas como la intersección de un cono con un plano, que dependiendo del ángulo del plano se obtenía la elipse, la parábola o la hipérbola, conocidas como oxitoma, ortotoma o amblitoma respectivamente (Ver Figura 3).

³ Según Menecmo, un cono circular agudo es un sólido geométrico generado por la revolución de un triángulo rectángulo al girar alrededor del cateto mayor

⁴ Según Menecmo, un cono circular recto es un sólido geométrico generado por la revolución de un triángulo rectángulo isósceles al girar alrededor de uno de sus catetos.

⁵ Según Menecmo, un cono circular obtuso es un sólido geométrico generado por la revolución de un triángulo rectángulo al girar alrededor del cateto menor.

⁶ La generatriz es la línea exterior de una superficie que al girar alrededor de un eje da lugar a un cuerpo de revolución como el cilindro o el cono.

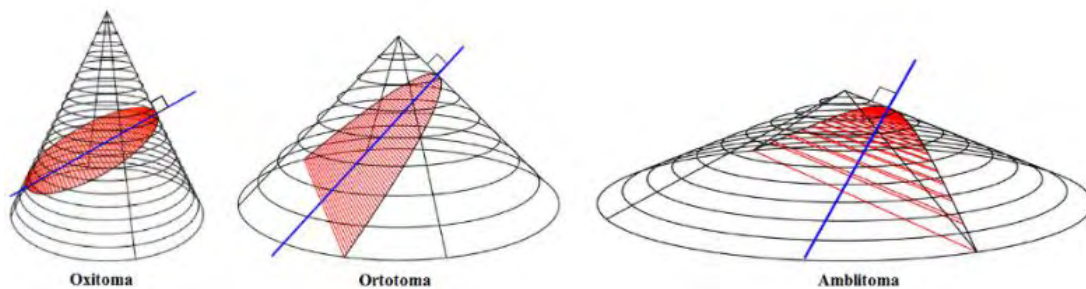


Figura 3: Secciones cónicas según Menecmo

Dos obras posteriores a Menecmo (perdidas a la fecha) dieron cuenta del rápido desarrollo de las cónicas. La primera de ellas de Aristeo, el libro de los *Lugares Sólidos* compuesto por cinco libros en el cual trabaja las cónicas como la intersección de planos con diferentes conos al igual que lo hizo su antecesor Menecmo. La segunda, de Euclides, en cuatro libros, cuyo contenido debió de ser en sus líneas fundamentales el que se encuentra en los cuatro primeros libros de *Las Cónicas* de Apolonio.

Apolonio de Perga (262 a.C. - 190 a.C.), conocido con el sobrenombre de “el gran geómetra” debido a que en sus investigaciones aparecen descubrimientos sobre ejes, centros, diámetros, asíntotas, focos, rectas máximas, mínimas, tangentes y normales, etc., fue quien consolidó y extendió los resultados sobre las secciones cónicas en su obra titulada *Las Cónicas*⁷ el cual fue un resumen y una organización de lo que se conocía a la fecha acerca de esta temática. Apolonio fue el primero en observar y demostrar que más allá de la construcción de las cónicas de Menecmo por medio de tres distintos tipos de conos (circular agudo, circular recto o circular obtuso) podían obtenerse como secciones de un mismo cono circular recto (e incluso de un cono circular no recto) sin más que variar la inclinación del plano que corta al cono, lo que vino a unificar su estudio (Ver Figura 4).

⁷ *Las Cónicas* de Apolonio, obra en la cual los primeros cuatro libros resultaron ser una introducción a los elementos de las cónicas a través de definiciones o proposiciones fundamentales por su generalidad o aplicación

- Las *Elipses* son las curvas que se obtiene cortando un cono con un plano que no es paralelo a ninguna de sus generatrices.
- Las *Parábolas* son las curvas que se obtienen al cortar un cono con un plano paralelo a una sola generatriz.
- Las *Hipérbolas* son las curvas que se obtiene al cortar un cono con un plano que es paralelo a dos de sus generatrices.

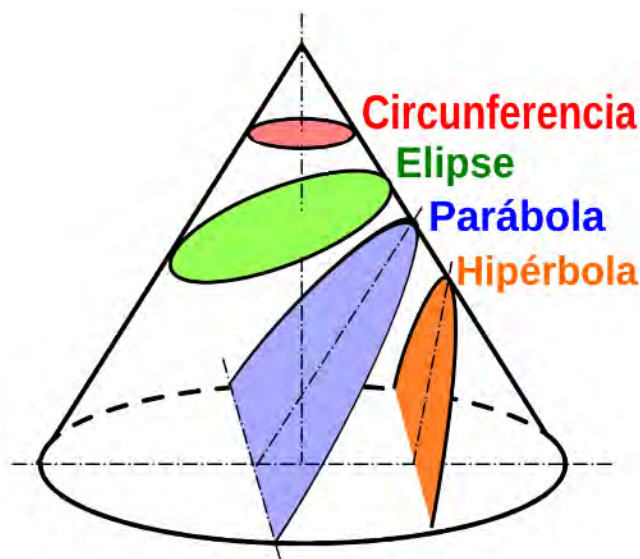


Figura 4: Secciones cónicas según Apolonio

Con Apolonio, se estableció los nombres de las secciones cónicas, los cuales procedían del lenguaje pitagórico de la solución de ecuaciones cuadráticas del método de aplicación de las áreas. *Elipse* significa deficiencia; *Hipérbola* significa exceso y por ultimo *Parábola* significa equiparación. Este cambio de nombre no fue casual, involucró un cambio conceptual porque las cónicas ya no serían descritas de manera constructiva sino por medio de relaciones de áreas y longitudes que daban en cada caso la propiedad característica de definición de la curva y expresaban las propiedades intrínsecas de cada sección cónica.

Pappus de Alejandría, (290 d.C. – 350 d.C.) en su obra principal, la *Colección Matemática*, compuesta por ocho libros, casi todos conservados (excepto el primero y parte del segundo), contiene una serie de problemas que introducen nociones geométricas importantes, como el foco de una parábola o la directriz de una cónica, así como lo menciona Boyer (1968):

Respecto de las cónicas se debe a Pappus la primera mención del foco de la parábola y de las directrices de las cónicas. Así como la definición de éstas mediante la razón constante entre las distancias a un punto fijo (foco) y una recta fija (directriz). (p. 140)

Por otra parte, en el libro VII de la *Colección Matemática* se presenta un problema que posteriormente se divulgó bajo el nombre de *Problema de Pappus*, en el cual, los lugares geométricos que resultan de la solución a este problema son secciones cónicas dando origen al desarrollo de la *Geometría Analítica* que posteriormente fue creada por Descartes.

René Descartes (1596-1650) filósofo y matemático, desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones, donde las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones de segundo grado en las variables x e y , llamado *Geometría Analítica*. Además, demostró que las secciones cónicas de Apolonio se encuentran contenidas en un único conjunto de ecuaciones cuadráticas expresadas mediante la siguiente ecuación:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

Ecuación general de segundo grado que dependiendo de los valores de los parámetros a, b y c permiten clasificar a cada una de las cónicas de la siguiente manera:

Tabla 1: Parámetros que definen las cónicas

$b^2 - ac < 0$	Elipse
$b^2 - ac = 0$	Parábola
$b^2 - ac > 0$	Hipérbola

Sin embargo, el resultado más sorprendente de la *Geometría Analítica* fue realizado por Jan de Witt, quien descubrió que todas las ecuaciones de segundo grado en dos variables representan secciones cónicas.

Por otra parte, según Taylor (1881) en su artículo mencionó que el trabajo de Hugh Hamilton de Dublin (1805 - 1856) titulado *De Sectionibus Conicis Tractatus Geometricus in quo ex natura ipsius Coni Sectionum Affectiones facillime deducuntur método nova*, probó algunas propiedades importantes de las secciones cónicas, donde tuvo en cuenta las siguientes:

Sea S un foco de la sección cónica y el segmento AE congruente al segmento AS (Ver Figura 5), entonces:

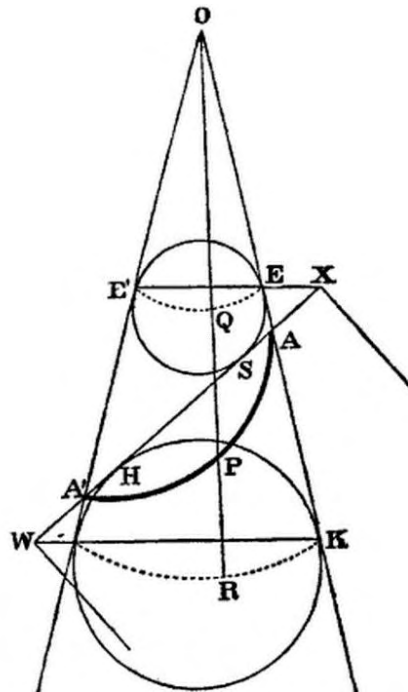


Figura 5: Ilustración de las propiedades cónicas según Hamilton

1. La directriz de S es determinada por la intersección del plano que contiene a la cónica con el plano de la sección circular⁸ EQE' .
2. El segmento SP para todo punto P de la cónica es congruente al segmento PQ seccionado de la misma sección circular desde el lado OP del cono.
3. Cuando la cónica es bifocal dos secciones circulares son determinadas, las cuales interceptan sobre cualquier lado del cono a una distancia QR igual al eje transversal⁹ (Ver Figura 6).

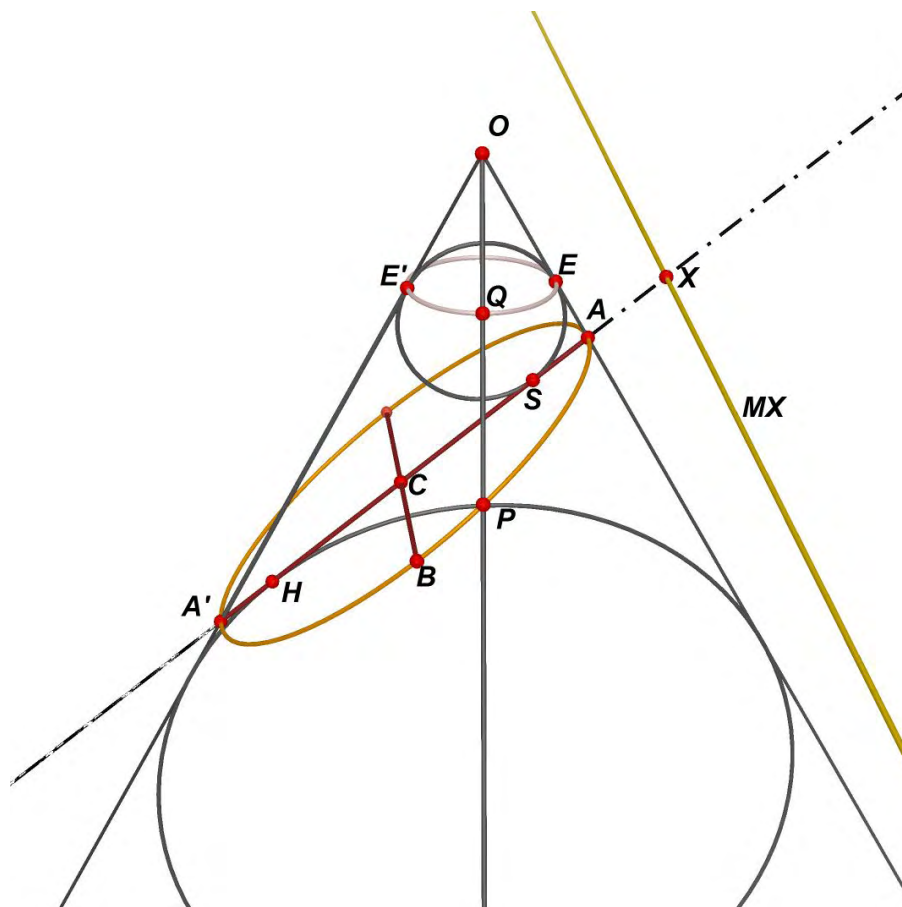


Figura 6: Ilustración a la conjetura de Hamilton

Teniendo establecido la congruencia de AS con AE y $A'S$ con AE' , al igual que la de OE con OE' , Hamilton demostró virtualmente que el foco S podría ser

⁸ Termina relativo a la circunferencia.

⁹ Termina relativo al eje mayor de la elipse.

determinado como el punto de contacto de AA' con la circunferencia inscrita o una de las circunferencias inscritas del triángulo OAA' , o en otras palabras el punto de contacto de la *esfera focal*¹⁰ con el plano que contiene a la cónica.

Sin embargo, no estableció su conclusión de esta forma, sino que conjeturó la determinación de S por la relación $AS \cdot A'S = CB^2$ y luego demostró que MX es la directriz al mostrar que $CS : CA = SA : AX$.

Teniendo en cuenta las investigaciones de Hamilton, según Taylor (1881), Quetelet (1796 - 1874) contribuyó con *Mémoire sur une nouvelle Théorie des Sections Coniques Considérées dans le Solide* (1820) para la *Nouveaux Mémoires de l' Académie Royale des Sciences et Belleslettres de Bruxelles* (1822), en el cual mostró que:

1. El foco de una sección está determinado por la relación $OA \pm OA' = SH$.
2. En una sección elíptica $OP - SP$ es constante y congruente a $OB - CA$.

Estos resultados, son virtualmente parecidos a los de Hamilton; pero Quetelet (a diferencia de Hamilton) no da una construcción para las directrices.

Según Taylor (1881), Germinal Dandelin, en *Mémoire sur quelques propriétés remarquables de la Focale Parabolique* (1822) comienza por inscribir las esferas focales y así determina los focos de las secciones. En 1825 demostró que siempre existen una o dos esferas interiores al cono que son simultáneamente tangentes al plano cortante y al cono, además que los puntos de tangencia de las esferas interiores del cono con el plano, es el foco(s) de la sección cónica (Ver Figura 7), dando así una prueba de las características geométricas intrínsecas de las secciones cónicas de una manera sencilla y elegante (Ibáñez, 2002).

¹⁰ Nombre provisional a las esferas, mientras Germinal Dandelin concretaba el teorema.

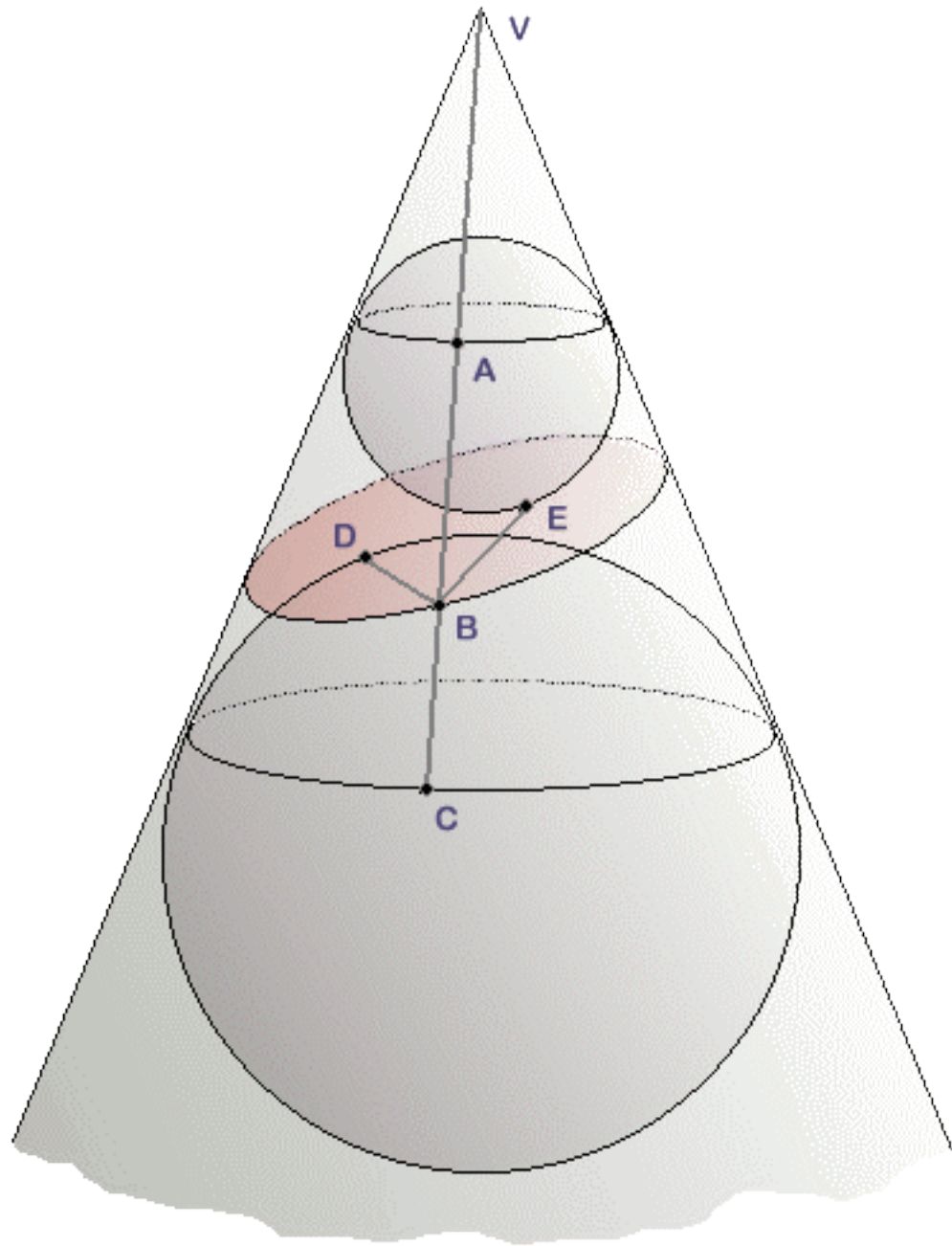


Figura 7: Esferas de Dandelin

2.2. Dimensión Cognitiva

En esta dimensión se exponen algunas características cognitivas que hacen referencia al aprendizaje o razonamiento, resultante de la adquisición de saberes matemáticos por parte de los estudiantes. En particular, se expresará como interviene el proceso cognitivo de *visualización* a la hora de integrar el concepto matemático de la sección cónica: *Elipse* con la geometría espacial, teniendo en cuenta las dificultades, obstáculos y errores que a veces cometen los estudiantes por falta de *visualización*. En gran parte esta problemática se debe a que el estudio se enfoca a un tratamiento bidimensional, donde las actividades se plantean o se limitan al uso del plano, ocasionando obstáculos que se ven reflejados a la hora de realizar una transición hacia el espacio.

Por ende, diferentes autores, manifiestan la problemática que existe en el estudio de la geometría, así Lappan y Winter (como se cita en el Ministerio de Educación Nacional, Matemáticas: Lineamientos Curriculares, 1998, p. 60) comentan que:

A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales. Nos valemos de libros bidimensionales para presentar las matemáticas a los niños, libros que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales.

Lo anterior conlleva a un obstáculo cognitivo, debido a que los estudiantes se han limitado a la utilización de representaciones de libros o figuras de lápiz y papel, por lo cual se manifiesta una dificultad al representar y reconocer objetos de tres dimensiones en el plano, generando una problemática al momento de la comprensión del concepto matemático porque se pueden desarrollar ideas erróneas sobre la temática que se está estudiando, así como lo enuncian Bonilla & Parraguez (2013):

“En el espacio, la mayoría comprende la elipse en un modo Sintético-Geométrico¹¹, pero presentan dificultades para relacionar los modos Sintético-Geométrico y Analítico-Estructural¹²” (p.623). Además, Ruiz (1996), manifiesta que, aunque las definiciones analíticas de las secciones cónicas pueden ser comprendidas, los estudiantes muestran dificultad al momento de observar de donde surgen las propiedades geométricas que las determinan, por lo cual, este autor promueve que las secciones cónicas se enseñen mediante los cortes respectivos a un cono, porque de esta manera será más fácil la comprensión de las propiedades intrínsecas de las secciones cónicas.

Por lo anterior, una gran dificultad que se observa es que al estudiante se lo limita a situaciones de dos dimensiones, de ahí que, salir de ese pensamiento será un obstáculo para él, debido a que requiere un mayor esfuerzo del proceso cognitivo de *visualización*, tema que ha sido abordado en diferentes investigaciones y estudios en el campo de la educación matemática y la psicología cognitiva, investigadores como Bishop (1996), Presmeg (2000), Duval (2002), Zimmerman & Cunningham (1991), Gonzato, Godino, & Neto (2011), entre otros, los cuales están interesados en comprender qué papel juega la *visualización* en el aprendizaje de las matemáticas.

Estos investigadores han planteado sus ideas acerca del proceso cognitivo de *visualización*, así Bishop (1996) establece una diferencia que se debe tener en cuenta en el término *visualización* donde la concibe como sustantivo, en la cual, se fija la mirada hacia el producto o hacia el objeto, es decir las imágenes visuales; o como verbo, en el cual la *visualización* se desarrolla como proceso, actividad o habilidad de cómo visualizar; implicando la habilidad de manipular mentalmente, es decir, rotar, deformar o invertir un objeto presentado de manera gráfica. Esta idea la comparte la investigadora Presmeg (2000) donde define a la *visualización* como un verbo, pero ella utiliza el término visualizar para referirse a los procesos que están involucrados

¹¹ Sintético-Geométrico: representación de la *Elipse* como sección cónica en el espacio/curva que la representa en el plano.

¹² Analítico-Estructural: representación de la *Elipse* como lugar geométrico.

cuando las personas transforman y relacionan las imágenes mentales visuales¹³. Sin embargo, Duval (2002) desde el punto de vista semiótico lo que interesa son los procesos visuales, los procesos de justificación y el razonamiento matemático, para él lo más importante en una actividad cognitiva es que los estudiantes deben ir desarrollando diversas formas de ver los objetos geométricos desde percepciones visuales simples hasta percepciones complejas, para que ellos exploten todo el potencial heurístico de la *visualización*, donde este potencial está desarrollado a partir del método heurístico, que se caracteriza:

“Como el método mediante el cual la actividad del profesor consiste en conducir al alumno a hallar por sí mismo el conocimiento que se desea que adquiera; el papel del maestro en este método es estimular al alumno al pensamiento reflexivo, guiarlo para que indague e investigue, para que llegue a conclusiones”. (Torres, 1986, p.115)

Tanto que Zimmerman & Cunningham (1991) en su libro denominaron a la *visualización* como el pensamiento visual¹⁴, sosteniendo que al mejorar la educación visual en matemáticas aumenta la intuición, proporcionando al sujeto una mayor capacidad de comprensión. Estos autores distinguen tres objetivos principales de aprendizaje asociados con la *visualización*: básicos¹⁵, funcionales¹⁶ y generales¹⁷; también reconocen que el pensamiento visual es una habilidad que se adquiere y una destreza que se va desarrollando, con el cual se pueden leer informaciones o predecir cuantos componentes tienen una gráfica compuesta. Además, afirman que la *visualización* da significado al saber matemático, debido a que permite conjeturar diferentes ideas para resolver problemas.

¹³ Hace referencia a las imágenes mentales que se exteriorizan a través de diferentes medios.

¹⁴ Describe los aspectos del pensamiento matemático que están basados o se pueden expresar en términos de imágenes mentales.

¹⁵ Aprender a interpretar representaciones.

¹⁶ Aprender a interpretar información de las representaciones y utilizarlas para resolver problemas.

¹⁷ Aprender a reconocer patrones.

Por otra parte, en la geometría espacial existe un problema debido a que se requiere representar objetos tridimensionales en el plano, generando dificultades al momento de *visualizar*. Así, en el campo de la geometría espacial Gonzato, Godino, & Neto (2011) destacan la importancia de empezar el estudio de la geometría por medio del espacio, ya que se desarrolla de forma más intuitiva y concreta que en el plano, con lo cual definen el proceso cognitivo de *visualización* como:

Visualizar un objeto tridimensional no incluye únicamente la habilidad de “ver” los objetos espaciales, sino también la habilidad de reflexionar sobre dichos objetos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura y la habilidad de examinar las posibles transformaciones del objeto (rotación, sección, desarrollos, ...). (p. 8).

Además, manifiestan que existe un problema en cuanto a las investigaciones que tienen como tema el proceso cognitivo de *visualización* donde su propósito es analizar los procedimientos desarrollados por niños y adolescentes en diferentes actividades, no obstante, en las investigaciones hacia los profesores solo se tiene en cuenta la resolución de actividades. Por lo tanto, se debería promover actividades de *visualización* en los docentes debido a que ellos son los que deben adecuar las actividades para sus estudiantes, de ahí que Gonzato, Godino, & Neto (2011) destacan cuatro categorías (Ver Figura 8) de actividades donde interviene la *visualización*:

- *Coordinar e integrar vistas de objetos*: describir y representar construcciones geométricas mediante diferentes perspectivas, por ejemplo, la perspectiva caballera natural o isométrica;
- *Rotar un objeto en el espacio*: rotar un objeto es equivalente a cambiar mentalmente de perspectiva, es decir, imaginarse en otra posición con respecto al objeto, además, hace referencia a sólidos de revolución

- *Plegar y desplegar desarrollos*: construir cuerpos geométricos a partir de desarrollos¹⁸, como por ejemplo: el desarrollo de un cubo.
- *Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional*: formar cuerpos geométricos a partir de otros por composición o descomposición.

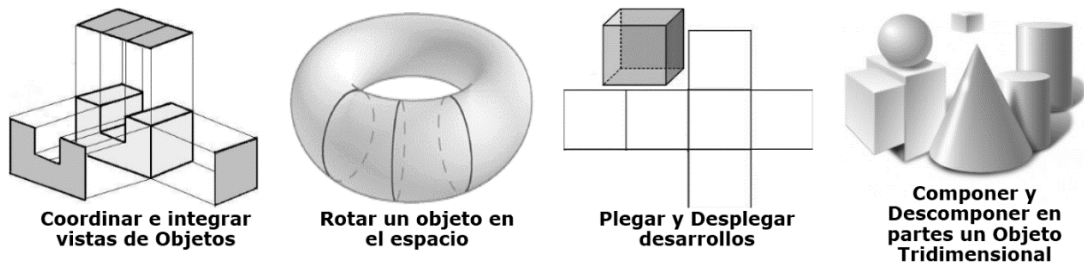


Figura 8: Categorías de visualización planteadas por Gonzato, Godino y Neto

Por esta razón, la importancia de la *visualización* radica en la formación de imágenes y objetos mentales para generar datos e informaciones visuales durante el aprendizaje de las matemáticas, donde la percepción y la observación intervienen en este proceso cognitivo para mejorar la adquisición del saber matemático, tal saber se recibe y se transmite mediante canales de información: el auditivo y el visual, y de una manera complementaria por el tacto, enunciados verbales, organizaciones visuales o gráficas; de ahí que, la *visualización* es importante a la hora de desarrollar razonamientos deductivos e inductivos en la resolución de problemas.

En la resolución de problemas se debe tener en cuenta el proceso de *visualización*, ya que juega un papel importante a la hora de crear representaciones mentales, dichas representaciones son posibles al interiorizar¹⁹ las representaciones externas²⁰. Existe una mejor capacidad cognitiva si se dan diferentes representaciones externas,

¹⁸ Es un plano que contiene las caras de un objeto tridimensional, de tal manera que al doblarse se obtenga el objeto tridimensional

¹⁹ Descubrir propiedades de las figuras y de las transformaciones, construir modelos, elaborar conclusiones para llegar a formular leyes generales y resolver problemas.

²⁰ Representaciones externas: son las representaciones que se pueden comunicar fácilmente a otras personas. Estas se hacen escribiendo en papel, dibujando, haciendo representaciones geométricas o ecuaciones.

permitiendo enriquecer el mundo de sus representaciones internas²¹. Así, el proceso cognitivo de *visualización* aparece de manera externa y/o interna siendo capaz de crear imágenes mentales sin necesidad de tener el objeto presente.

Además, Camou (2012) “considera que la geometría del espacio está ligada con el problema de la representación, porque las representaciones planas, son elementos muy abstractos para ser el comienzo del estudio; es complejo producirlas e interpretarlas y además permiten muy escasa experimentación” (p.3). Por lo cual, se propone la implementación de software geométricos teniendo en cuenta el auge de las TIC²², de ahí que los estudiantes tienen la posibilidad de aprender las matemáticas de formas más emocionantes y más efectivas que antes (Leung, 2013), debido a que realizar una construcción en el AGD es más precisa que la construida con lápiz y papel, y permite explorar de forma dinámica diferentes relaciones geométricas que tiene un concepto matemático.

Así mismo, González-López (2001) propone los Sistemas de Geometría Dinámica (SGD²³) debido a que no concibe a la geometría como un cuerpo codificado de saberes a transmitir sino como el resultado de una actividad de los sujetos sobre determinados elementos de su entorno, igualmente, quiere destacar la importancia que ofrece un SGD a los estudiantes ya que tiene la posibilidad de explorar, descubrir, reformular, conjeturar, validar o refutar, sistematizar sus acciones hacia la resolución de un problema. Por consiguiente, el papel del docente cambia debido a las condiciones didácticas que se ofrecen, logrando así un aprendizaje constructivista, tal como lo menciona González-López (2001):

En un SGD tales objetos son el resultado de una modelización computacional de determinados conceptos geométricos y las actividades a desarrollar están condicionadas por el tipo de comunicación que se establece con el sistema

²¹ Representaciones internas: son las imágenes que creamos en la mente para representar procesos u objetos matemáticos. Este tipo de representaciones son más difíciles de describir.

²² Tecnologías de la Información y la Comunicación.

²³ Término que trabaja González-López (2001) y que alude a los AGD

informático. La naturaleza del conocimiento matemático que se trabaja cambia respecto del contexto de lápiz y papel; ahora se centra en el estudio de las propiedades invariantes que posee una determinada construcción geométrica, propiedades que el usuario puede observar o predecir manipulando la construcción realizada. (p.279)

Sin embargo, aun cuando los AGD ofrecen grandes ventajas a la hora de estudiar objetos tridimensionales no están exentos de confusiones tanto técnicas como didácticas. Accascina & Rogora (2006), Laborde & Laborde (2011) y González-López (2001) mencionan que existen diversos fenómenos en el AGD Cabri 3D, tales como:

- *Colocar puntos en el espacio:*

Cuando se quiere construir un punto en el espacio y se mueve el cursor fuera del plano base el AGD Cabri 3D indica mediante un cuadro contextual “un nuevo punto (en el espacio)” dando a entender que se construirá un nuevo punto en el espacio (Ver Figura 9).



Figura 9: Construcción de un punto.

Sin embargo, se puede observar que dicho punto sigue siendo coplanario al plano base, es decir, se ubica en la extensión del plano (Ver Figura 10).



Figura 10: Punto coplanario

Este hecho puede ser un obstáculo debido a que puede generar construcciones erróneas, por ejemplo, la construcción de un cono sin tener en cuenta este hecho tendrá como resultado una figura en el plano (Ver Figura 11).

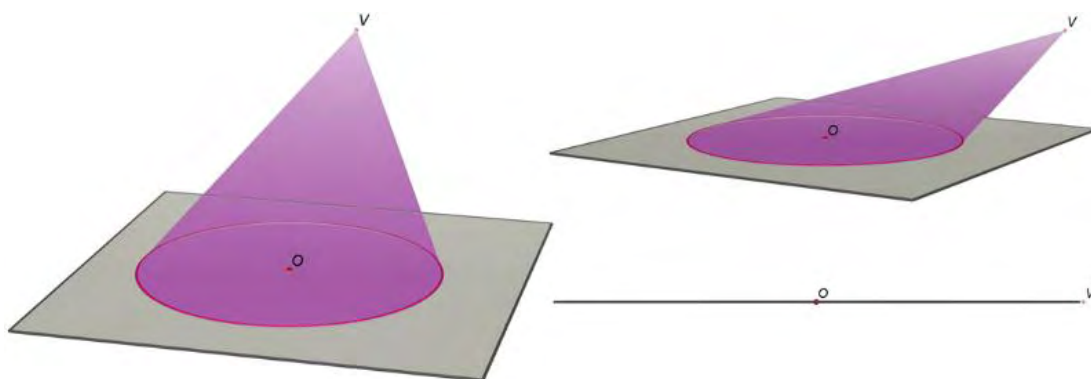


Figura 11: Perspectivas de un supuesto cono

De ahí que, para realizar la construcción de un punto en el espacio (arriba o abajo del plano base) se selecciona la herramienta Punto, se mantiene oprimida la tecla Shift, luego, se desplaza verticalmente el cursor, para elegir la altura deseada, obteniendo así un punto en el espacio (Ver figura 12).

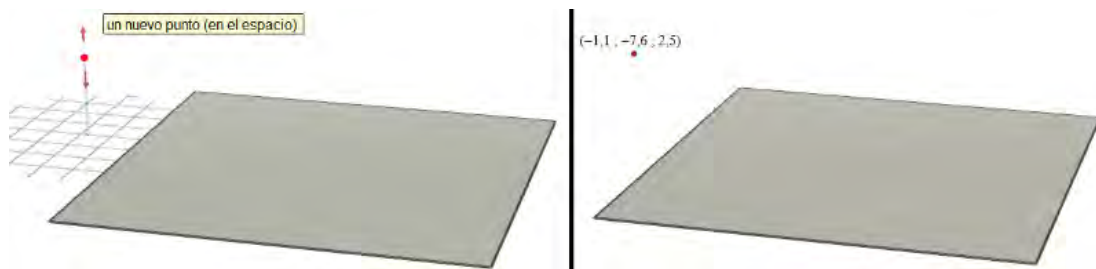


Figura 12: Punto en el espacio

- *Perspectiva de objetos tridimensionales:*

Existen diversas maneras de observar un objeto tridimensional en el plano, entre ellas, la vista caballera o isométrica, sin embargo, Cabri 3D utiliza predeterminadamente una vista natural haciendo posible observar los objetos de una manera más fiel a su representación real, para no generar obstáculos cognitivos a la hora de observar objetos tridimensionales en la pantalla.

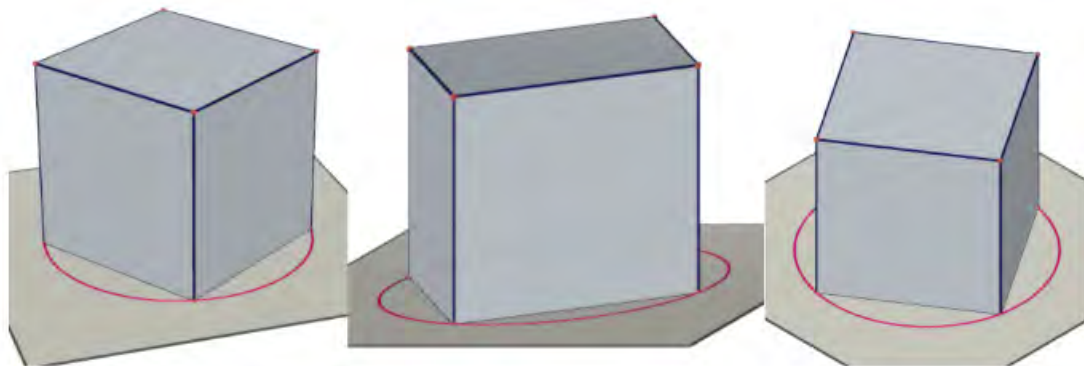


Figura 13: Perspectiva de un cubo: Natural, Caballera e isométrica respectivamente

- *Punto de vista desde el AGD Cabri 3D:*

El AGD Cabri 3D permite al usuario un mayor rango de visión al permitir rotar las construcciones realizadas, esto elimina un obstáculo que ocurre al construir figuras tridimensionales en el plano, donde se generan ambigüedades al momento de resolver

una situación, por ejemplo, si se plantea interpretar como están ubicados los puntos A, B, C y D sobre el siguiente cubo:

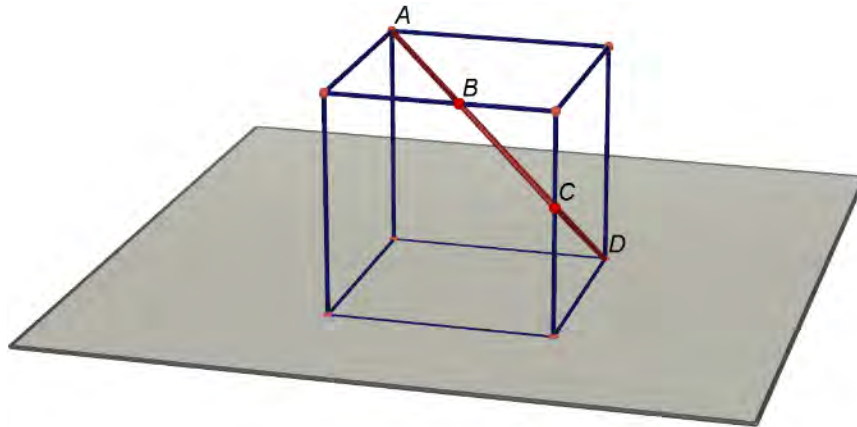


Figura 14: Interpretación de los cuatro puntos del cubo

El usuario al estar limitado a la geometría plana podría indicar que los cuatro puntos son colineales:

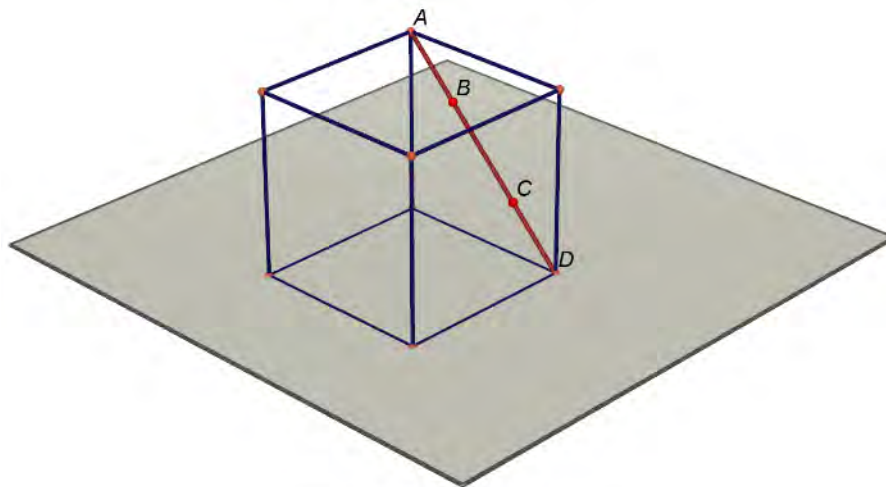


Figura 15: Interpretación de los cuatro puntos limitados a la geometría plana

Cabe resaltar que la anterior respuesta es correcta, sin embargo, otra solución a esta actividad sería la siguiente:

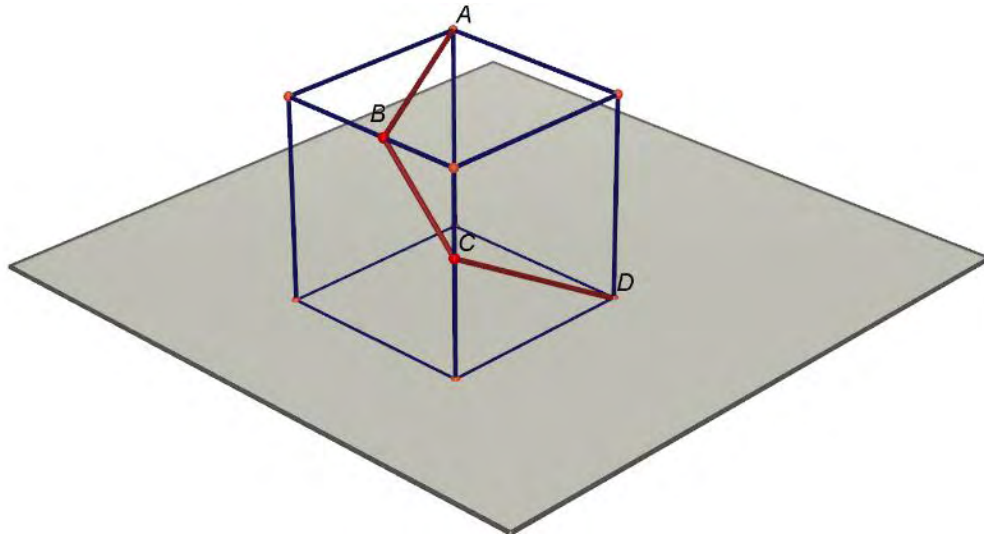


Figura 16: Interpretación de los cuatro puntos desde una perspectiva tridimensional

Así, Cabri 3D permite obtener una solución puntual a este problema debido a que permite la rotación del objeto, obteniendo la ubicación exacta de los cuatro puntos sobre el cubo (Ver Figura 17), acción que no se puede hacer en el ambiente de lápiz y papel.

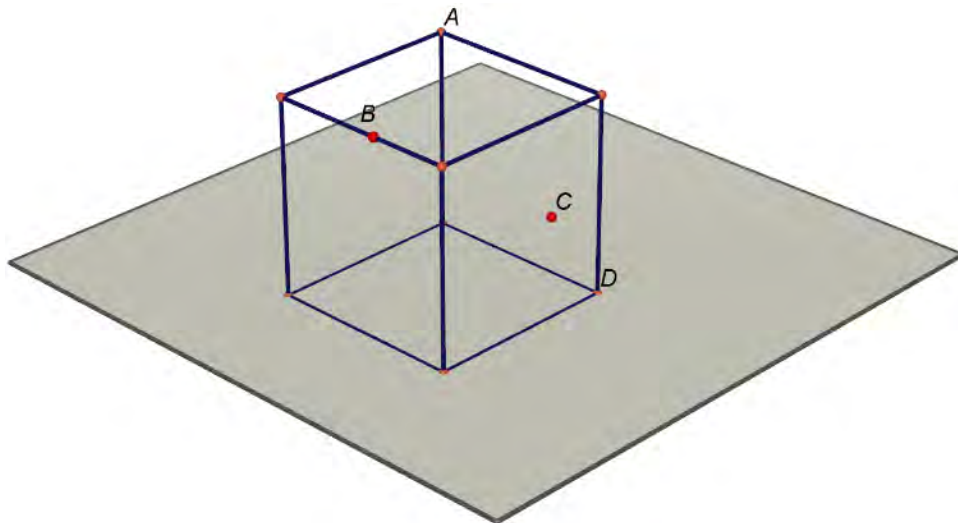


Figura 17: Ubicación exacta de los cuatro puntos sobre el cubo

- *Arrastre y manipulación en Cabri 3D:*

Dado el cambio tan significativo que se produce al usar los AGD con respecto al ambiente de lápiz y papel, el estudio se centra en las propiedades invariantes de una construcción geométrica característica denominada construcción robusta, donde al manipularla mediante el arrastre ofrece al usuario retroalimentación, permitiendo determinar si la construcción está realizada de forma adecuada al mantener las relaciones geométricas intrínsecas de las figuras o sólidos construidos, por ejemplo, si se desea construir un cubo sin utilizar la herramienta del AGD, se utiliza las diferentes herramientas que este ofrece, para la solución a esta actividad.

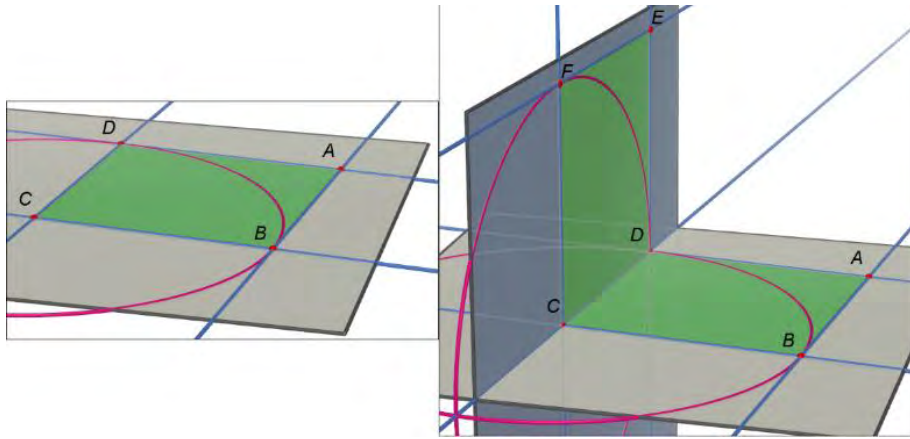


Figura 18: Construcción de las caras de un cubo.

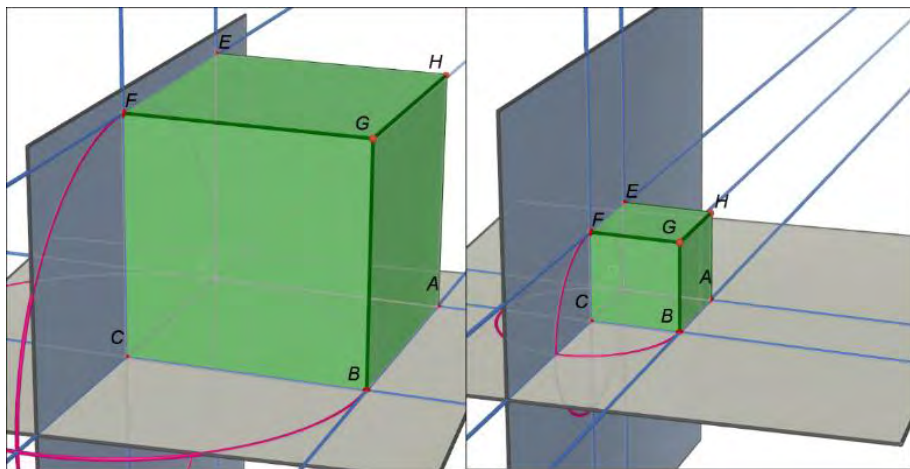


Figura 19: Prueba de arrastre a la construcción de un cubo.

2.3. Dimensión Didáctica

El objetivo de esta dimensión es mostrar el estado actual de la enseñanza de la sección cónica: *Elipse*, la intervención y gestión didáctica por parte del docente, donde se manifiesta la importancia de la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD) en la contribución de este proceso, la cual apoya al diseño de situaciones didácticas fundamentadas en la micro-ingeniería didáctica, que sirve para producir y controlar secuencias de aprendizaje, estas situaciones funcionan como un entorno que coopera a la comprensión del saber matemático a aprender, donde los efectos pedagógicos se manifestarán mediante el buen uso de las tecnologías actuales, en este caso integrando el AGD Cabri 3D.

En lo que respecta a la enseñanza de las secciones cónicas, estas se presentan mediante sus definiciones formales y aunque un estudiante puede comprender que estas se forman por el corte a un cono, le es difícil observar de donde surgen las propiedades geométricas que las determinan, de ahí radica el interés de utilizar herramientas didácticas que faciliten la apropiación de estas propiedades (Ruiz, 1996).

Además, Bonilla & Parraguez (2013) proponen lo siguiente:

Consideramos pertinente promover el tránsito entre los modos Sintético-Geométrico y Analítico-Estructural en el espacio, una vez comprendida la elipse en el plano, para ello proponemos, que los estudiantes puedan desarrollar tareas asociadas al *Teorema de Dandelin*, sobre las esferas inscritas en un cono.
(p.8)

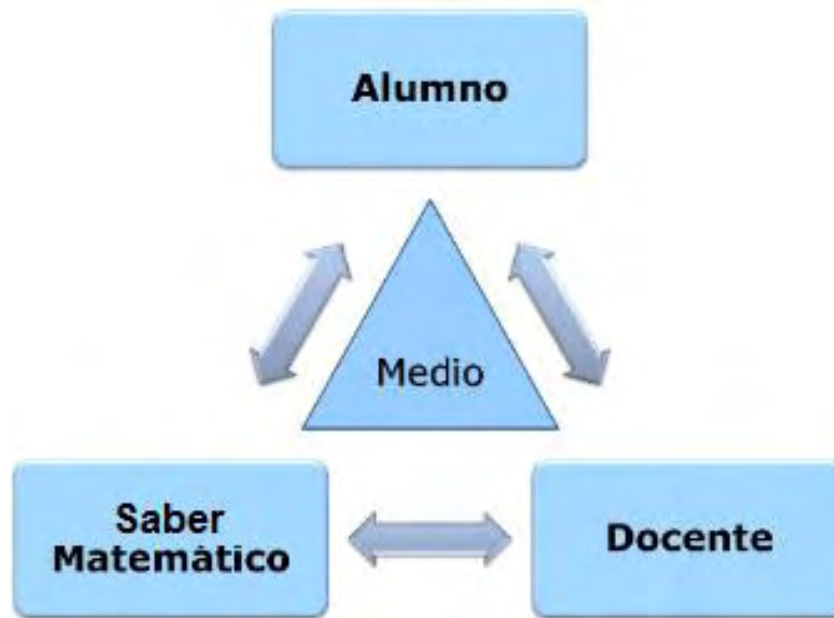
Por lo tanto, para realizar una propuesta diferente al estado actual del estudio de la sección cónica: *Elipse*, se realizarán situaciones didácticas que integren el *Teorema de Dandelin* con el AGD Cabri 3D, teniendo en cuenta la TSD desarrollada en la Didáctica de la Matemática de la Escuela Francesa por Brousseau (2007).

Así, Carabús & Pérez (2004) describen la función de la didáctica de las matemáticas como:

La finalidad de la didáctica de las matemáticas es el conocimiento de los fenómenos y procesos relativos a la enseñanza de la matemática para controlarlos y, a través de ese control, mejorar el aprendizaje de los alumnos mediante la metodología de investigación que se conoce con el nombre de ingeniería didáctica. (p.49)

Por lo tanto, con la perspectiva de la Escuela Francesa, Brousseau (2007) propone el estudio de las condiciones en las cuales se constituyen los saberes; el control de estas condiciones permitirá reproducir y optimizar los procesos de adquisición escolar de saberes de tal forma que se produzca una génesis artificial²⁴, para que lo anterior sea llevado adecuadamente, Brousseau postula la *Teoría de las Situaciones Didácticas* (TSD), teoría de enseñanza que busca la integración del Alumno-Saber Matemático-Docente (Ver Esquema 2) con el propósito de analizar qué relación tiene el medio con el saber en cuestión, de tal manera que se haga una construcción propia de los saberes matemáticos donde el rol de las situaciones didácticas (diseñadas por el docente) funcionan como un ambiente que coopera a la comprensión del saber matemático a aprender.

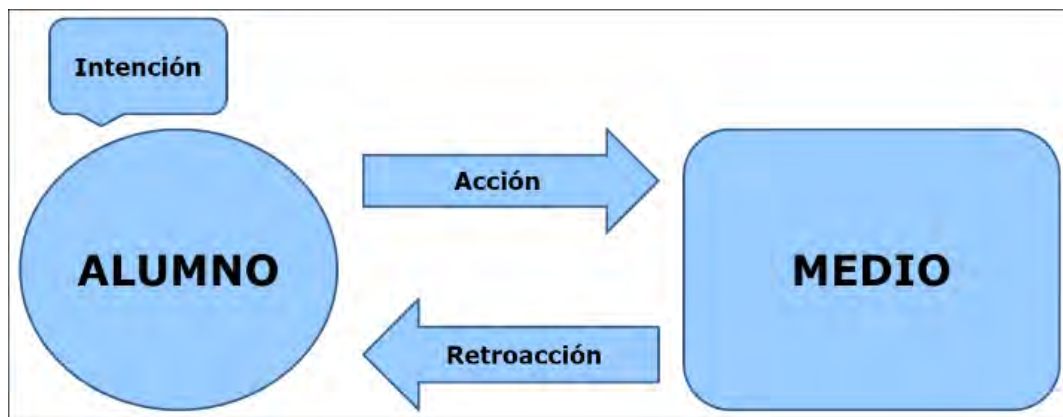
²⁴ Según Gálvez (1994) consiste en construir un proceso de aprendizaje en el que el saber no es ni directa ni indirectamente enseñado por el maestro, sino que debe aparecer progresivamente en el niño a partir de múltiples condicionantes estructurales.



Esquema 2: Triángulo didáctico

La TSD se basa en la tesis de Piaget la cual consiste en que el alumno construye el saber a partir de la adaptación con un medio, donde no interviene el docente, por lo tanto, propone situaciones didácticas y situaciones a-didácticas, donde la situación a-didáctica (Ver Esquema 3) se produce mediante un aprendizaje por adaptación entre el alumno y el medio, y la incluye dentro de una situación didáctica, la cual es definida por Brousseau (como se cita en *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, 1994, p. 40) como:

Un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución.



Esquema 3: Aprendizaje por adaptación

Además, para realizar el diseño de las situaciones didácticas, se deben crear experimentaciones, las cuales están definidas desde la metodología de la “*Ingeniería Didáctica*” que proviene de la TSD (Brousseau, 2007) y la teoría de la transposición didáctica²⁵ (Chevallard, 1991), que consideran las interacciones entre un saber matemático, el docente y los alumnos, con el objetivo de mejorar las maneras de apropiación de este saber por los alumnos. Así, Chamorro (2003) enuncia que:

El diseño de situaciones didácticas según las condiciones que han sido enunciadas y analizadas, y la organización de las mismas en una progresión articulada en el tiempo con vistas a enseñar un cierto concepto a una clase de alumnos de un determinado nivel, es el objeto de lo que se denomina ingeniería didáctica. (p.81)

Además, para facilitar el análisis de las situaciones didácticas, Brousseau propone la siguiente clasificación:

- *Situaciones de Acción*: el alumno genera una interacción sobre un medio material o simbólico, donde se requiere de los saberes implícitos y decisiones que tome el alumno para la resolución de un problema planteado.

²⁵ Según Chevallard (1991) permite modificar cualitativamente el saber académico, logrando contextualizar el saber, para hacerlo más comprensible para el alumno.

- *Situaciones de Formulación*: el objetivo es la comunicación de informaciones entre alumnos, donde el emisor debe modificar el lenguaje que utiliza habitualmente, precisándolo y adecuándolo para formular explícitamente un mensaje, el receptor debe comprender el mensaje y actuar sobre el medio, en base al saber contenido en el mensaje.
- *Situaciones de Validación*: el alumno trata de convencer a varios interlocutores sobre las afirmaciones propuestas, las cuales son sometidas a la consideración del grupo para aceptar la verdad o falsedad de las mismas.

De ahí que, el docente debe crear situaciones a-didácticas, para fomentar el aprendizaje por adaptación, donde el saber es construido por el estudiante como solución a un problema, donde el medio a-didáctico ofrece información y medios de acción para el estudiante, proporcionando retroalimentación a las acciones. Para realizar esto, el docente debe diseñar cuidadosamente las situaciones didácticas que planteará a sus alumnos (con la intención necesaria para el aprendizaje por adaptación), donde el medio juega un papel muy importante, ya que, según Acosta (2010):

El medio es aquello con lo que interactúa el alumno, sobre el cual puede realizar acciones y recibir retroacciones que le permitan la validación. Ese medio debe ser seleccionado o diseñado de manera cuidadosa para que los conocimientos producto del aprendizaje por adaptación sean lo más parecidos posible al saber que se quiere enseñar. (p.135)

CAPITULO 3

METODOLOGÍA

En este capítulo se aborda la importancia de la ingeniería didáctica como metodología de investigación debido a que permite diseñar y controlar secuencias de aprendizaje mediante situaciones didácticas, por otra parte, hay que tener en cuenta que existen dos tipos de ingeniería didáctica, las cuales Chamorro (2003) las describe como:

[...] micro y macro-ingenierías; el primer término hace referencia a estudios de tipo local, de amplitud limitada, en tanto que el segundo se refiere a procesos de varios años de duración, que pueden englobar varios conceptos relacionados entre sí, que se interesan por ejemplo por la articulación de distintos conocimientos o estrategias globales de aprendizaje. (p.82)

Teniendo en cuenta lo anterior, esta investigación se fundamentó en la *micro-ingeniería didáctica*, debido a que la muestra para la experimentación se realizó de manera local. Cabe resaltar que los fundamentos de la ingeniería didáctica se aplican tanto para la micro y macro-ingeniería didáctica.

Así, Artigue (1995) propone las cuatro fases temporales para la ingeniería didáctica:

1. *Análisis preliminares*: referente al marco teórico, compuesto por las dimensiones: histórico-epistemológica, cognitiva y didáctica, mencionadas anteriormente, el análisis de estas tres dimensiones permitió realizar el *diseño y análisis a priori de las situaciones didácticas*. (Capítulo 2)
2. *Diseño y análisis a priori de las situaciones didácticas*: planear y diseñar las situaciones didácticas, teniendo en cuenta, las posibles vías de resolución que el estudiante pueda manifestar. (Capítulo 4)
3. *Experimentación*: en esta fase se pondrá a prueba las situaciones didácticas diseñadas para los estudiantes y se observará las diferentes acciones y retroacciones que genera un medio. (Capítulo 5)
4. *Análisis a posteriori y evaluación*: analizar los datos recolectados y realizar una síntesis de las situaciones realizadas, confrontando los análisis *a priori* y los análisis *a posteriori*. (Capítulo 5)

Además, para el diseño de las situaciones didácticas se tuvieron en cuenta algunos obstáculos que puede tener el alumno, entre ellos la instrumentalización Rabardel & Béguin (2000) del medio AGD Cabri 3D, de tal manera que el estudiante pueda desarrollar las situaciones didácticas sin ningún problema de tipo instrumental, teniendo en cuenta este obstáculo, Del Castillo & Montiel (2009) plantean la relación entre el medio y el estudiante de la siguiente manera:

Una relación bilateral entre el artefacto y el usuario es establecida: mientras el conocimiento del estudiante dirige la manera en que el instrumento es usado y en cierto modo forma al instrumento (instrumentalización), las potencialidades y las restricciones del instrumento influyen en las estrategias de solución del problema por el estudiante y en las correspondientes concepciones emergentes (instrumentación). (p.463)

Así, en el planteamiento de las situaciones didácticas se abordó el obstáculo de la instrumentalización mediante el reconocimiento de las herramientas necesarias, fomentando la transición del estado de instrumentalización al de instrumentación,

para evitar que los docentes en formación se queden limitados en alguna actividad por la falta del manejo del AGD Cabri 3D y así puedan generar diferentes soluciones para la resolución de las situaciones. De hecho, una vez elaborada la figura, el estudiante puede reconocer mediante el AGD cuáles son las partes constitutivas que pueden ser arrastradas, es fundamental señalar que esto ocurre, sin alterar las relaciones estructurales entre las partes de la figura. Esta ventaja de incluir la visualización y hacerla operativa es un potencial didáctico del uso adecuado de los AGD que adquiere sentido para los estudiantes al responder a esa necesidad explicativa de los fenómenos observados.

Por lo tanto, pueden existir estrategias que desarrolla el alumno, provocando adaptaciones y aprendizajes, generando un cambio cognitivo en el alumno y así acercarse al saber matemático deseado. Estas estrategias son plasmadas en los análisis *a priori* de las situaciones didácticas diseñadas que permitieron controlar el proceso e incentivar otras vías de resolución geométrica durante la secuencia didáctica, de ahí que, se realizó una rejilla para el análisis del desarrollo de las situaciones didácticas y una previsión de las diferentes soluciones que podrán generar los estudiantes al momento de desarrollar las situaciones didácticas.

Por otra parte, se considera que los AGD son medios adecuados para el *aprendizaje por adaptación* de la geometría, debido a que tienen herramientas para realizar operaciones matemáticas, permiten conjeturar lo que ocurre con una situación y ofrecen la retroalimentación con la manipulación de figuras geométricas mediante el arrastre. Así, Acosta (2010) plantea cómo se realizan las acciones y retroacciones en un AGD, mediante la siguiente tabla:

Tabla 2: Acciones y retroacciones en los AGD según Acosta (2010)

TIPO DE ACCIÓN	TIPO DE RETROACCIÓN
Construir: consiste en seleccionar una herramienta de Cabri y utilizarla para obtener un dibujo.	Fenómeno estático: un dibujo estático que corresponde teóricamente a las herramientas utilizadas según la teoría
Ejemplo: Se selecciona la herramienta ‘segmento’ y se hacen dos clics en la pantalla: aparece un segmento. Se selecciona la herramienta ‘recta perpendicular’, se hace clic sobre el segmento y luego sobre un punto cualquiera de la pantalla: aparece una recta perpendicular al segmento.	
Arrastrar: consiste en agarrar un objeto con el ratón y desplazarlo	Fenómeno dinámico: los objetos en la pantalla se desplazan de manera que se conservan todas las propiedades declaradas explícitamente (al usar una herramienta de construcción) o aquellas que se deducen teóricamente de ellas.
Ejemplo: al arrastrar un extremo del segmento dibujado anteriormente, el segmento se moverá para seguir teniendo ese punto como extremo, y la recta también se moverá para conservar la perpendicularidad con respecto al segmento.	

Además, Zimmerman & Cunningham (1991) admiten que las TIC son una gran contribución a la educación matemática, ya que ayuda al estudiante en su proceso de comprensión de los conceptos matemáticos, estos software diseñados para el aprendizaje o enseñanza de la geometría son responsables de que los estudiantes experimenten y puedan crear o construir figuras con ciertas propiedades además de visualizarlas, permitiéndoles también la opción de transformar construcciones en tiempo real.

Teniendo en cuenta lo anterior, para realizar el análisis de la secuencia didáctica se tuvo en cuenta aspectos que podrían surgir en el medio, los obstáculos que podían afectar al estudiante y los diferentes métodos de posible resolución por parte de ellos.

Para esto, la secuencia didáctica se desarrolló en dos situaciones didácticas, distribuidas en 3 fases cada una para desarrollarlas de manera individual en un tiempo aproximado de 6 horas, donde cada situación didáctica está compuesta por una parte para trabajar en el AGD Cabri 3D y otra, para que el estudiante responda a una serie de preguntas con respecto a las construcciones realizadas.

Tabla 3: Rejilla de análisis de la Situación Didáctica N°1.

Fases	Aspectos a verificar a partir del desarrollo de la situación didáctica	Duración
FASE 1. Actividades de Construcción geométrica del cono y los cortes con un plano para generar elipses.	<ul style="list-style-type: none"> - Identificar a la Elipse como corte a un cono circular recto. - Realizar construcciones robustas. 	30 minutos
FASE 2. Transición de doble vía: Construcción del Plano Bisector.	<ul style="list-style-type: none"> - Construir el plano bisector para comprender su representación bidimensional y tridimensional. - Plantear el concepto de tangencia, para abordarla desde una perspectiva espacial. - Promover el proceso cognitivo de <i>visualización</i> a la hora de realizar una transición a la geometría espacial. 	1 hora y 30 minutos
FASE 3. Actividad de Construcción de la Elipse.	<ul style="list-style-type: none"> - Realizar una construcción robusta. 	1 hora

Tabla 4: Rejilla de análisis de la Situación Didáctica N°2.

Fases	Aspectos a verificar a partir del desarrollo de la situación didáctica	Duración
FASE 1. Actividades de Construcción de las <i>Esferas de Dandelin</i> para la Elipse.	- Construir las <i>esferas de Dandelin</i> utilizando la propiedad de tangencia en el espacio y el plano bisector.	1 hora y 30 minutos
FASE 2. Actividad de Construcción del <i>Teorema de Dandelin</i> .	- Identificar propiedades geométricas bidimensionales en el espacio.	45 minutos
FASE 3. Demostración del <i>Teorema de Dandelin</i> .	- Realizar una demostración euclidiana (doble columna) para el <i>Teorema de Dandelin</i> .	45 minutos

Para desarrollar las situaciones didácticas, se utilizó una aula dotada de computadores, los cuales contaron con el AGD Cabri 3D, se entregó las situaciones didácticas con su respectiva hoja del estudiante, además, se instaló el software CamStudio²⁶ de licencia libre, los cuales sirvieron para la recolección de datos del desarrollo de las actividades que los docentes en formación realizaron utilizando el AGD Cabri 3D para la solución de las mismas.

Además, mediante una presentación en PowerPoint se enunció brevemente el *Teorema de Dandelin* para que conocieran su relación con las secciones cónicas y lograran representarlo en el AGD Cabri 3D para la sección cónica: *Elipse* y de esta manera promueva el proceso cognitivo de *visualización* en los docentes en formación.

²⁶ CamStudio es un software que tiene la capacidad de grabar toda la actividad realizada sobre la pantalla, incluyendo el audio del computador.

CAPITULO 4

DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y ANÁLISIS *A PRIORI*

Un apartado fundamental en la micro-ingeniería didáctica son los análisis *a priori* debido a que en estos se pueden prever las posibles vías de resolución que los estudiantes de esta investigación puedan generar hacia las situaciones didácticas, donde Artigue (1995) plantea que:

Este análisis *a priori* se debe concebir como un análisis de control de significado. Esto quiere decir, de forma muy esquemática que, si la teoría constructivista sienta el principio de la participación del estudiante en la construcción de sus conocimientos a través de la interacción con un medio determinado, la teoría de las situaciones didácticas que sirven de referencia a la metodología de la ingeniería didáctica ha pretendido desde su origen, constituirse en una teoría de control de las relaciones entre el significado y las situaciones. (p. 44)

Así, el objetivo de los análisis *a priori* es controlar las acciones que se manifestaran en los estudiantes para determinar si la adquisición del saber se da de una manera adecuada, donde estos se enunciaran de forma hipotética y se comprobarán a la hora de realizar los análisis *a posteriori*.

4.1. Análisis de la Situación didáctica N° 1

Esta situación didáctica está compuesta por 4 hojas de papel, dos de estas pertenecen a actividades de construcción para realizarlas en el AGD Cabri 3D y las restantes comprenden un cuestionario acerca de las construcciones realizadas. Esta situación se realiza con el fin de introducir los elementos que sirven para la construcción de las *esferas de Dandelin*, es decir, el proceso de *instrumentalización* y mediante el saber de estos elementos cada estudiante llegue al proceso de *instrumentación* para lograr la construcción del *Teorema de Dandelin* para la sección cónica: *Elipse*.

La parte de las actividades de construcción para desarrollarlas en el AGD Cabri 3D está compuesta por tres fases, donde cada fase tiene preguntas y/o actividades que deben realizar en la hoja del estudiante, a continuación, se presentaran los análisis *a priori* de esta situación:

FASE 1. Actividades de Construcción geométrica del cono y los cortes con un plano para generar elipses.

Esta fase se centró en que los estudiantes realicen construcciones robustas que tendrán importancia a la hora de construir las *esferas de Dandelin*. Para esto los docentes en formación tuvieron que tener en cuenta conceptos básicos de la geometría para lograr desarrollar las actividades propuestas, además, esta actividad tuvo la intencionalidad didáctica de involucrar a los estudiantes con las herramientas básicas del AGD Cabri 3D para que logren la *instrumentación* necesaria para el desarrollo de las actividades posteriores.

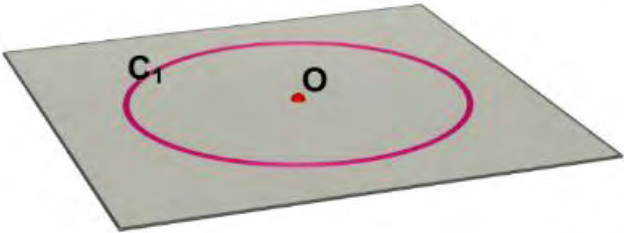
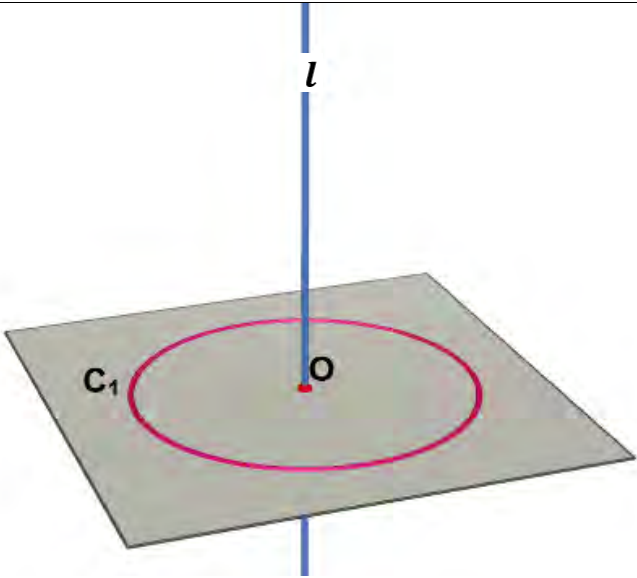
1.1. *Construir geoméricamente un cono circular recto con la herramienta “Cono”.*

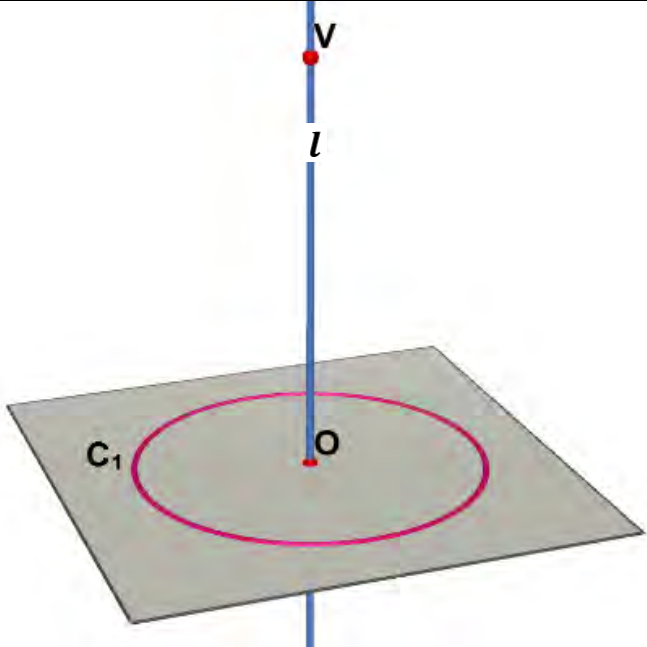
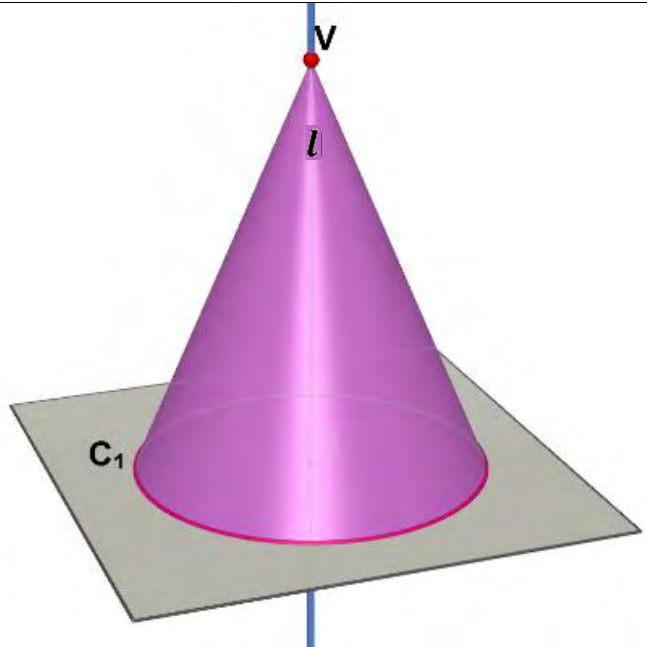
En esta actividad se pretendió que los estudiantes realizaran el cono circular recto, teniendo en cuenta la siguiente definición (Hemmerling, 2002):

Cono circular recto es aquel en el cual la recta que pasa por el vértice y el centro de la base es perpendicular a la base.

Por tanto, se espera que realicen la construcción propuesta en la Tabla 5, debido a que sigue de manera sencilla y fiel a la definición de cono circular recto:

*Tabla 5: Construcción del Cono circular recto
(Fuente de esta investigación)*

<p>1</p>	<p>Se construye una circunferencia con centro O y radio cualquiera sobre el plano base y se la denota como C_1.</p>	
<p>2</p>	<p>Se traza una recta perpendicular al plano base que pase por centro O y se la denota como l.</p>	

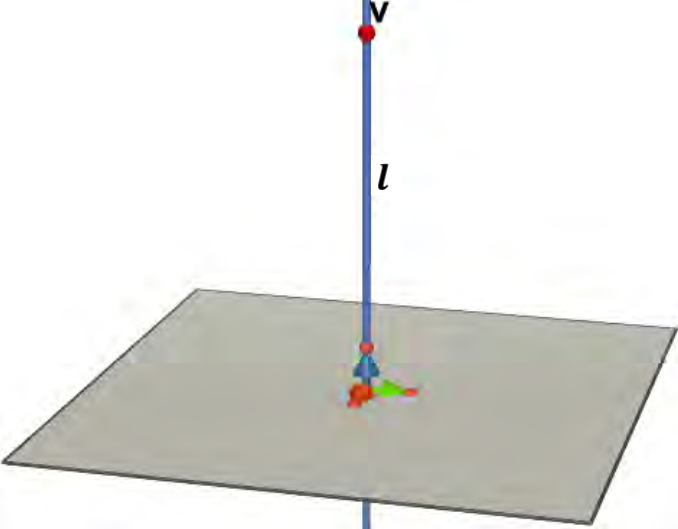
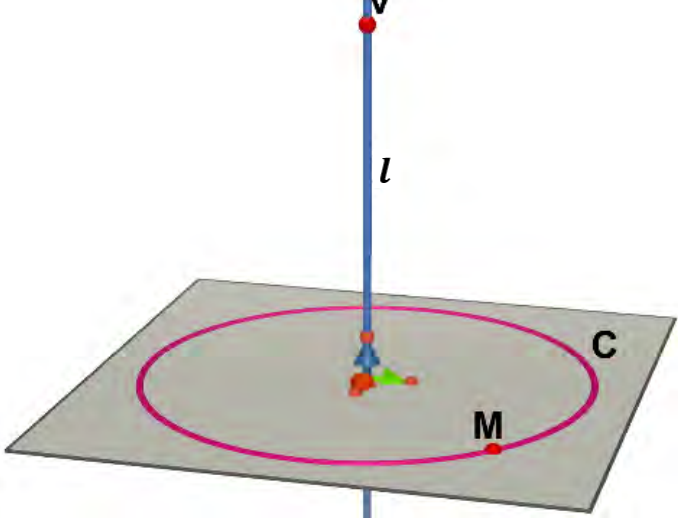
3	Se traza un punto V sobre la recta l .	
4	Con la herramienta <i>Cono</i> se selecciona el punto V y la circunferencia C_1 , obteniendo así el <i>Cono Circular Recto de una hoja</i> .	

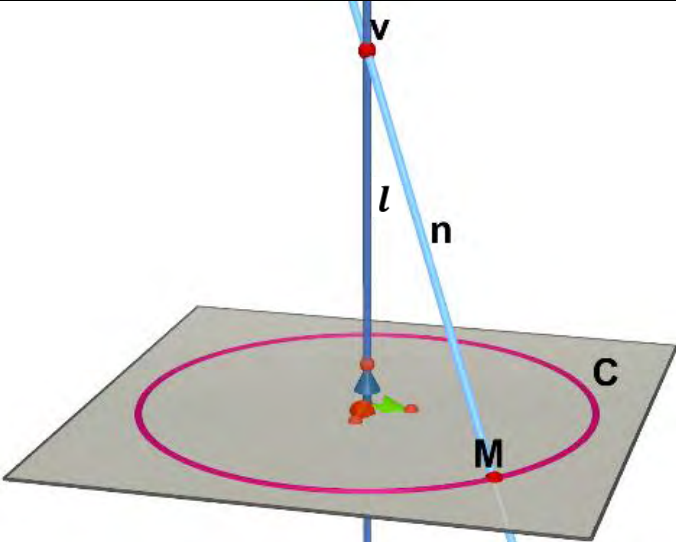
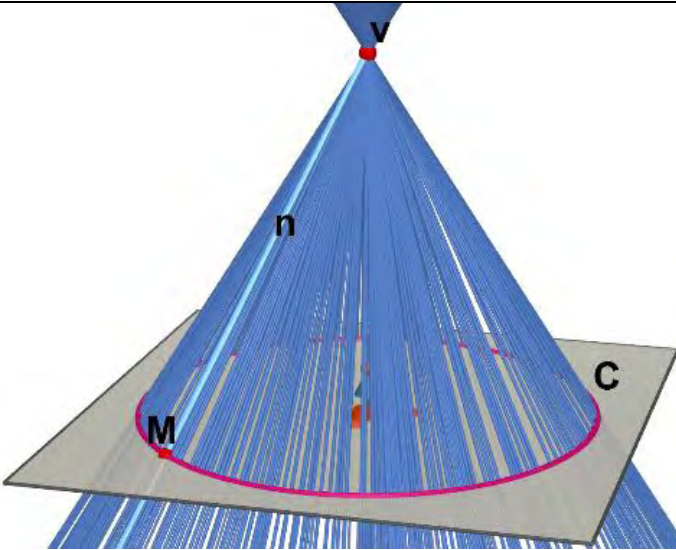
Aunque, los estudiantes podrían realizar las siguientes construcciones que también son correctas:

- Cono circular recto como *sólido* de revolución:

Esta construcción podría generarse debido a que los estudiantes tal vez visualicen al cono circular recto como lugar geométrico.

*Tabla 6: Construcción del cono circular recto como sólido de revolución
(Fuente de esta investigación)*

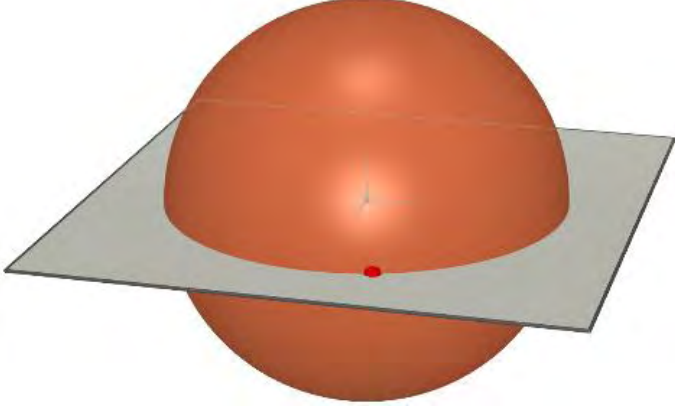
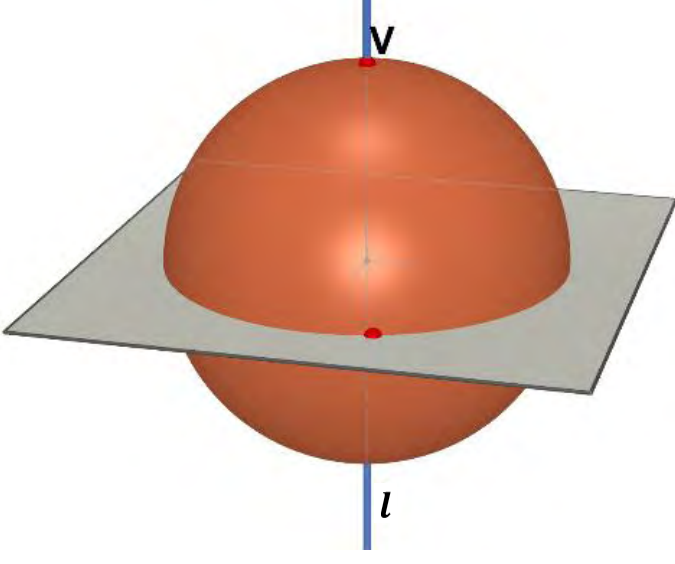
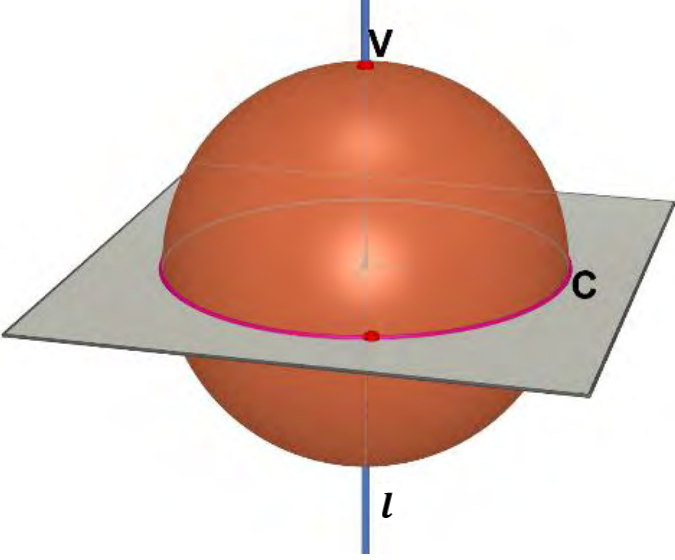
<p>1</p>	<p>Se crea una recta l a través del vector perpendicular al plano base, aparecerá un mensaje que dirá: “Una nueva recta (soporte)”, luego se crea un punto V sobre la recta l.</p>	
<p>2</p>	<p>Se crea una circunferencia C, donde el centro será el punto central de los vectores que Cabri 3D crea por defecto y como radio cualquier punto sobre el plano base, sobre esta se crea un punto M.</p>	

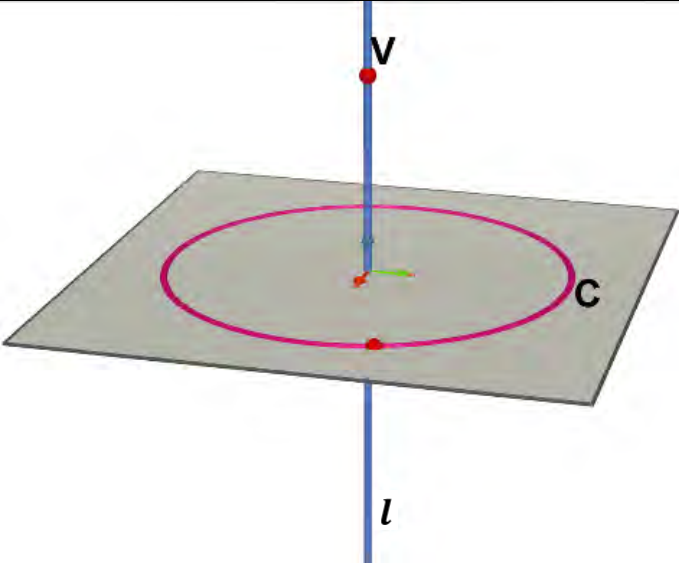
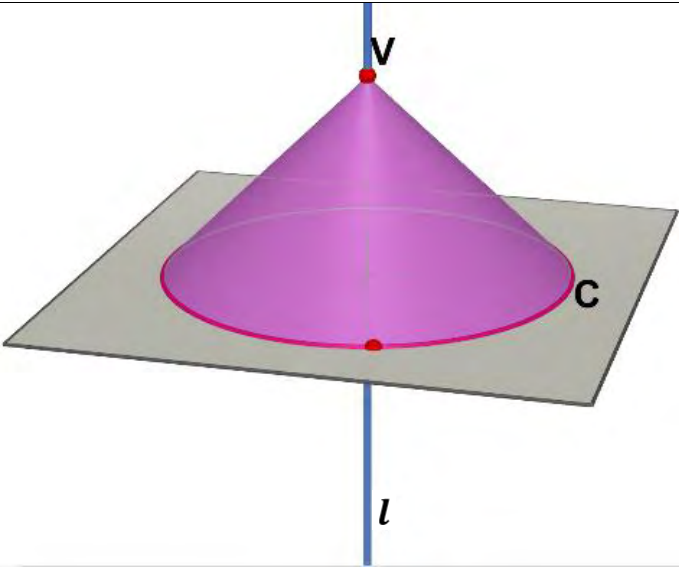
3	<p>Se traza la recta n que pasa por V y M, luego mediante la herramienta trayectoria, se selecciona la recta n</p>	 <p>The diagram shows a 3D coordinate system with a vertical axis. A point V (vertex) is located on the axis. A horizontal plane contains a circular base C. A point M is marked on the circumference of the base. A vertical line l passes through V and the center of the base. A line n is drawn from V through M. A small 3D model of a cone is visible at the base of the vertical axis.</p>
4	<p>Al arrastrar el punto M con la herramienta traza activada, se obtendrá el cono como sólido de revolución</p>	 <p>The diagram shows the same setup as in step 3, but now a solid blue cone is formed by rotating the line n around the vertical axis l. The base of the cone is the circular base C, and the vertex is V. The point M is still marked on the base. The label n is placed near the side of the cone.</p>

- *Cono circular recto según Menecmo:*

Se prevé esta construcción debido a que los estudiantes podrían desarrollar el concepto de cono circular recto de la misma manera que Menecmo pensó, la cual es una construcción particular para un cono circular recto.

Tabla 7: Construcción del cono circular recto según Menecmo

<p>1</p>	<p>Se crea un esfera donde el centro será el punto central de los vectores que Cabri 3D crea por defecto y como radio cualquier punto sobre el plano base.</p>	
<p>2</p>	<p>Se crea una recta l a través del vector perpendicular al plano base, aparecerá un mensaje que dirá: “Una nueva recta (soporte)” y se marca el punto de intersección de la esfera y la recta l, denotado con la letra V.</p>	
<p>3</p>	<p>Con la herramienta curva intersección se selecciona el plano base y la esfera, obteniendo así una circunferencia, la cual se denotara como C.</p>	

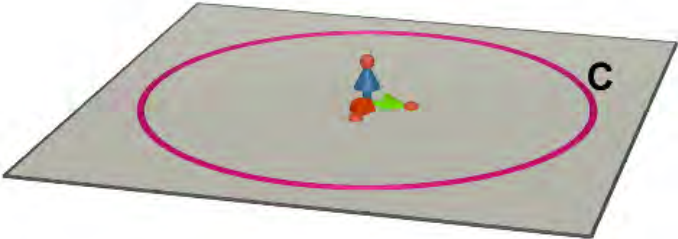
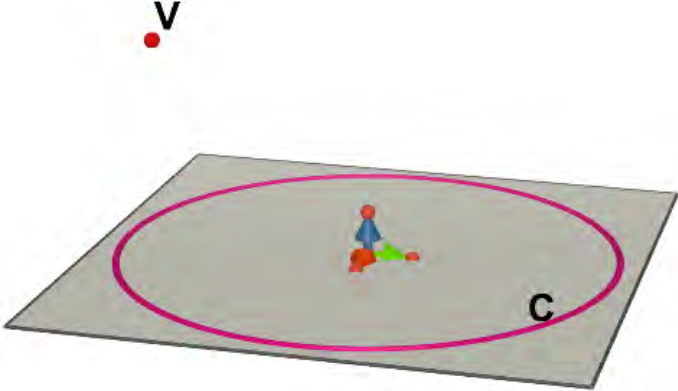
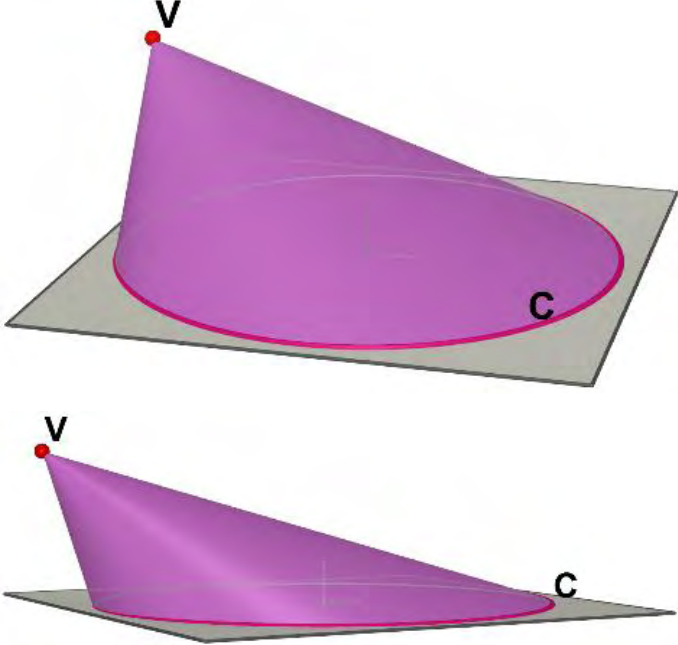
4	Se oculta la esfera.	
5	<p>Se construye un cono seleccionando el punto V y la circunferencia C.</p> <p>Este cono será circular rectángulo debido a que cumple con el segundo teorema de Tales. (ver Anexo H)</p>	

Sin embargo, las siguientes construcciones son alternativas en caso de que los docentes en formación no recuerden la definición de cono circular recto o por realizar de manera impulsiva la actividad cometan los siguientes errores:

- *Cono circular no recto:*

Se podría generar al crear el vértice de manera aleatoria sobre el espacio, con lo cual, se vería reflejado el olvido de la definición de cono circular recto.

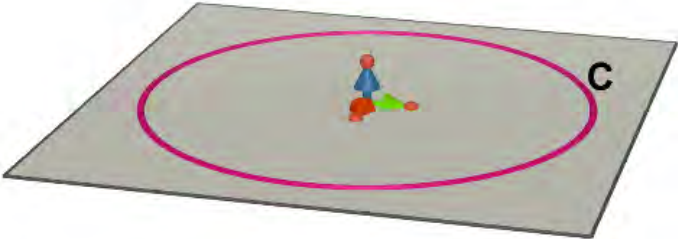
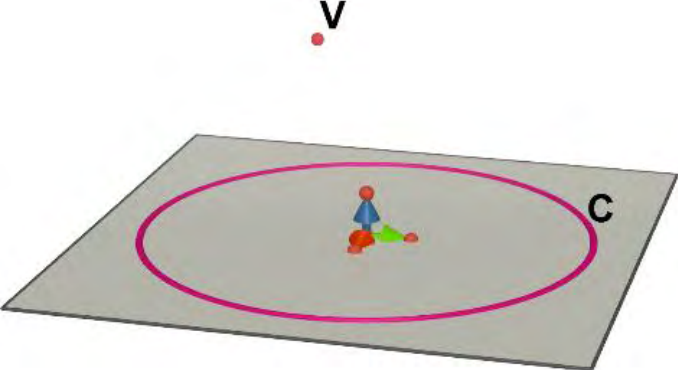
Tabla 8: Construcción del cono circular no recto

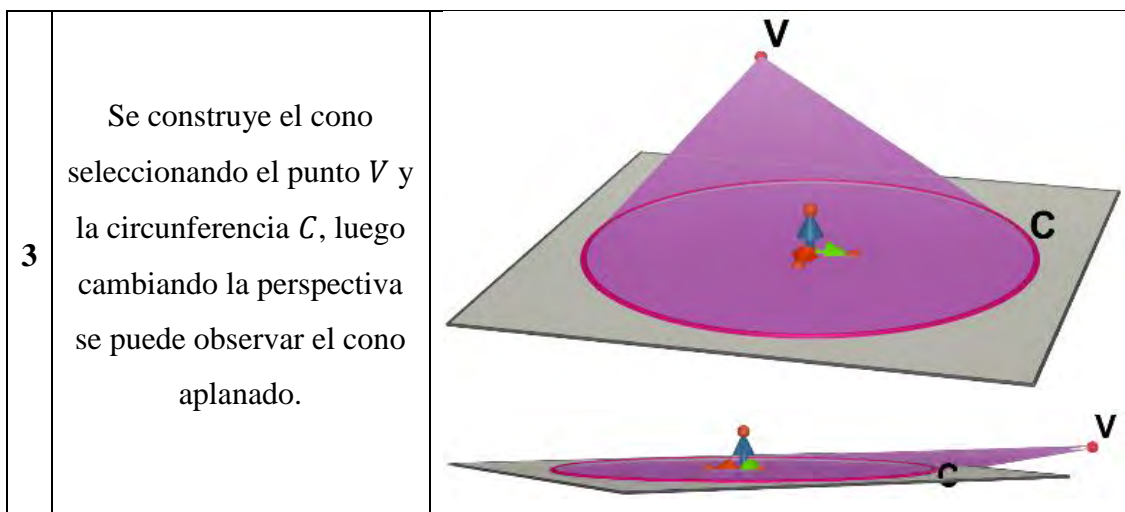
<p>1</p>	<p>Se crea una circunferencia C, donde el centro será el punto central de los vectores que Cabri 3D crea por defecto y como radio cualquier punto sobre el plano base.</p>	
<p>2</p>	<p>Se crea un punto V aleatorio sobre el espacio.</p>	
<p>3</p>	<p>Se construye el cono seleccionando el punto V y la circunferencia C, luego cambiando la perspectiva con el botón derecho del mouse se puede observar el cono circular no recto.</p>	

- *Cono aplanado:*

Sin mencionar el olvido de la definición de cono circular recto los estudiantes podrían pensar que al crear el vértice por fuera del plano base, este estaría en el espacio, sin embargo, el punto pertenecerá a la extensión del plano base, obteniendo una figura bidimensional.

Tabla 9: Construcción del "Cono aplanado"
(Fuente de esta investigación)

<p>1</p>	<p>Se crea una circunferencia C, donde el centro será el punto central de los vectores que Cabri 3D crea por defecto y como radio cualquier punto sobre el plano base.</p>	 <p>Diagrama 1: Se muestra un plano base gris con una circunferencia magenta C dibujada en su superficie. En el centro de la circunferencia hay un pequeño personaje humanoide con un sombrero azul y una túnica roja, rodeado por tres vectores de colores (verde, rojo, azul) que se extienden desde el centro hacia los bordes del plano.</p>
<p>2</p>	<p>Se crea un punto V aleatorio sobre la extensión del plano base.</p>	 <p>Diagrama 2: Se muestra el mismo plano base gris con la circunferencia magenta C y el personaje humanoide. Ahora, un punto rojo V está ubicado fuera de la circunferencia, en la extensión del plano base. El punto V está etiquetado con una 'V' negra.</p>



1.2. Construir geoméricamente la *Elipse* como corte de un cono.

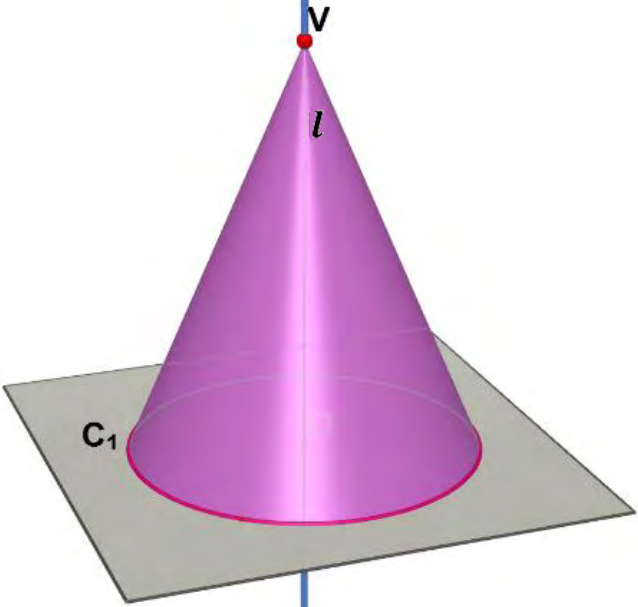
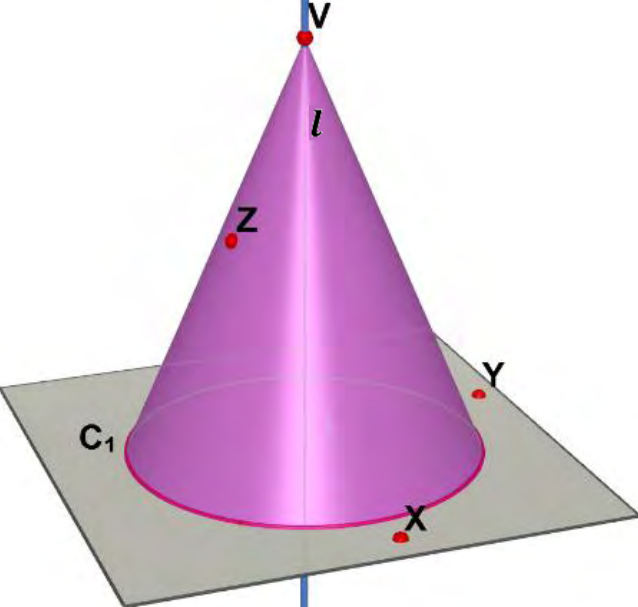
En esta actividad se pretende que mediante la interacción con las herramientas del AGD Cabri 3D los estudiantes visualicen a la sección cónica: *Elipse* como corte a un cono, sin embargo, se desea que realicen una construcción mediante el corte de un plano que secciona a un cono circular recto.

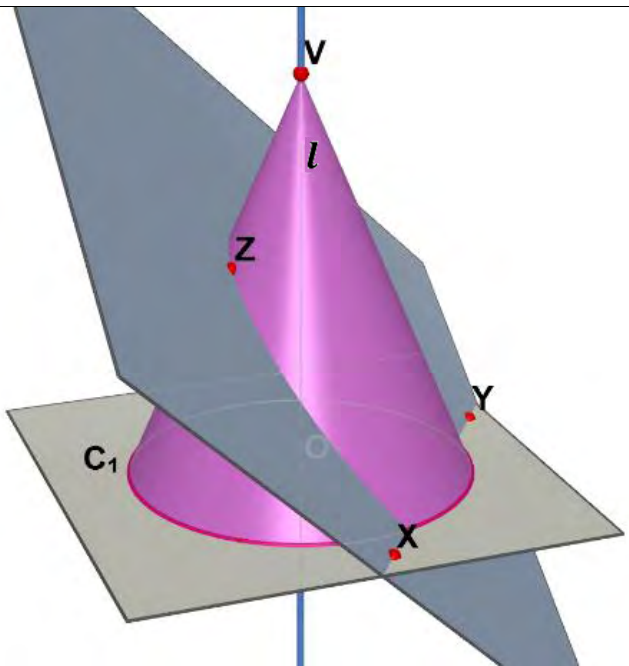
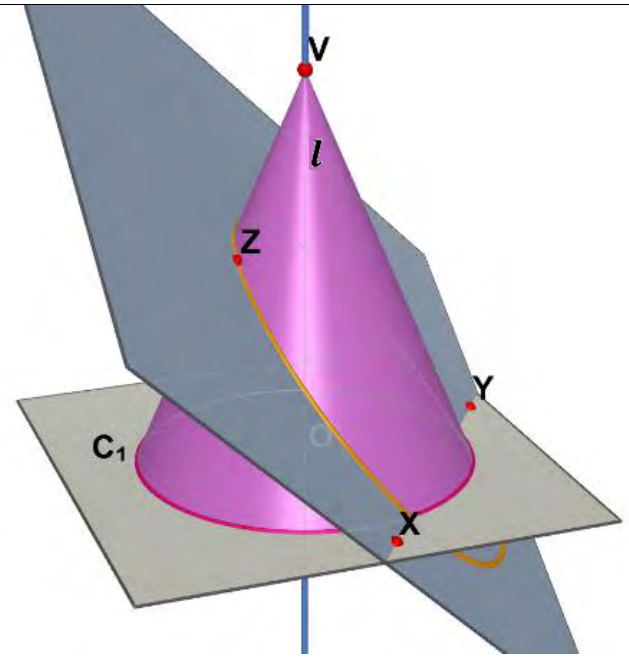
Se espera que realicen alguna de las siguientes construcciones porque generalmente la construcción de un plano mediante tres puntos es sencilla e intuitiva, además mediante el arrastre de alguno de los puntos se puede tener el control de la inclinación del plano para obtener la sección cónica: *Elipse*, como lo muestran las siguientes construcciones:

- Un punto sobre el cono y dos puntos sobre el plano base.

Tabla 10: Construcción de la sección cónica: Elipse, mediante el corte de un plano que contiene un punto sobre el cono y dos puntos sobre el plano base.

(Fuente de esta investigación)

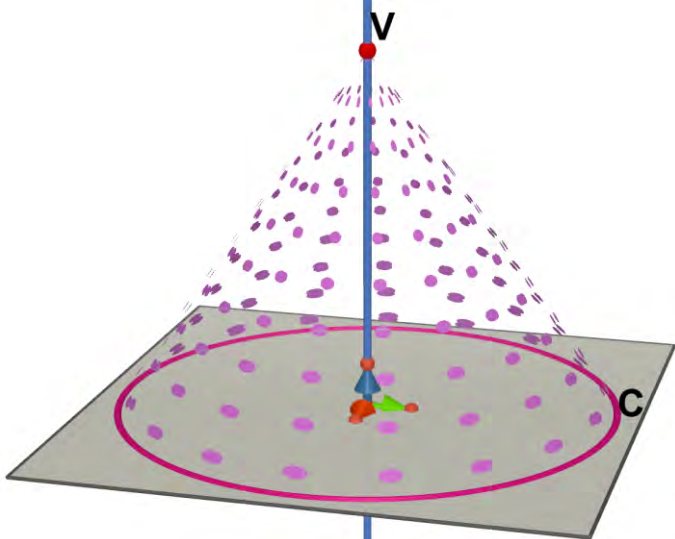
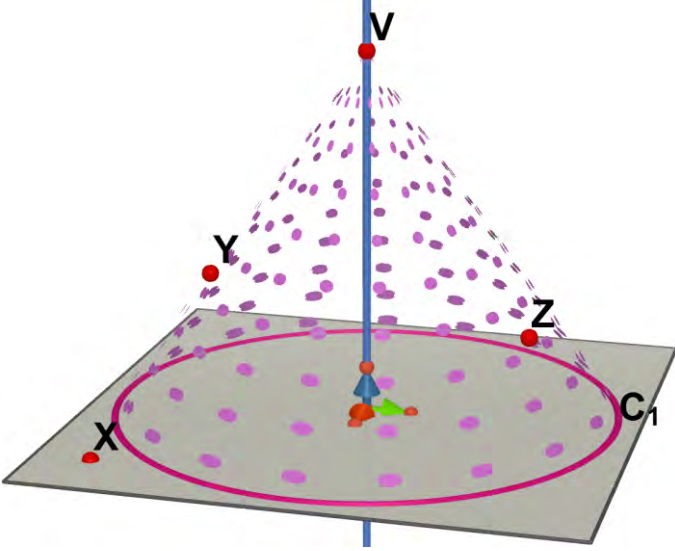
1	A partir del Cono circular recto de una hoja.	
2	Se traza tres puntos, los cuales dos de estos X, Y se encuentran en el plano base y el tercer punto sobre el cono circular recto denotado Z.	

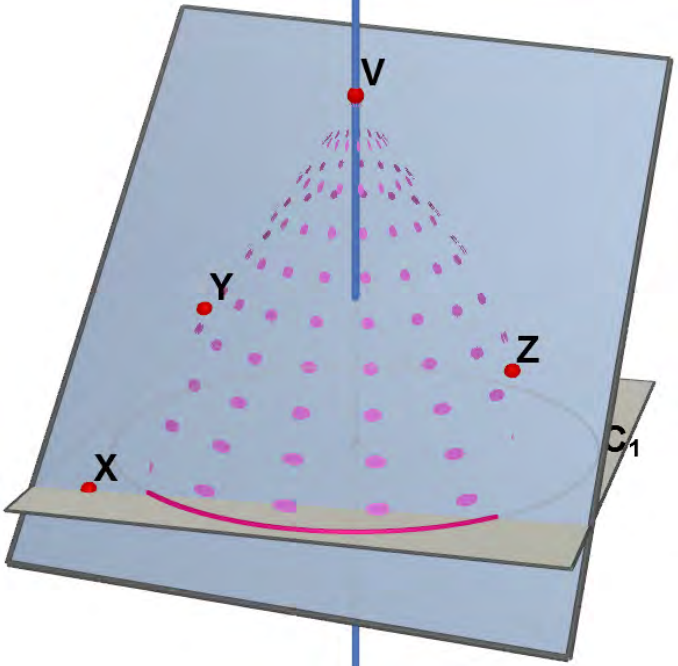
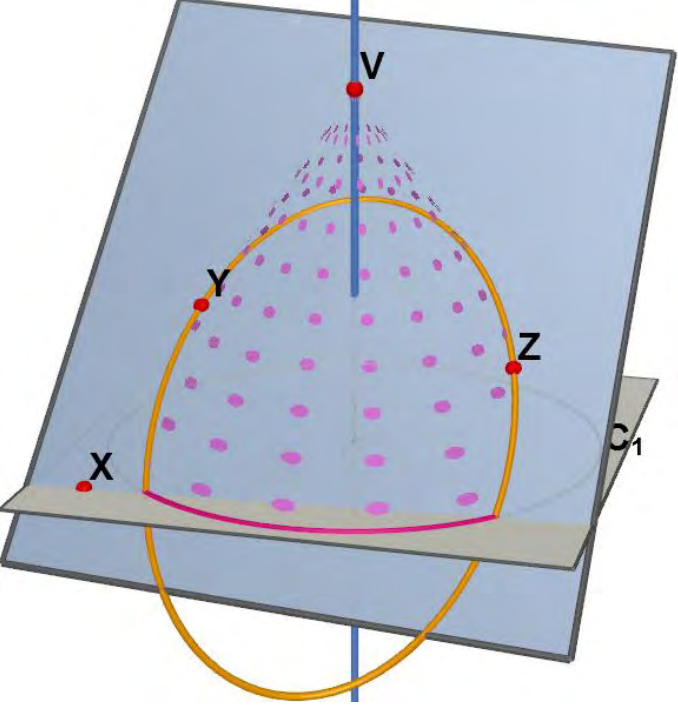
<p>3</p>	<p>Se construye un plano que contenga a los tres puntos X, Y y Z. El punto Z determina la inclinación del plano, por ende, la ubicación de este determina la sección cónica: Elipse.</p>	
<p>4</p>	<p>Con la herramienta <i>curva intersección</i> se selecciona el cono y el plano XYZ, para obtener la sección cónica: Elipse.</p>	

- *Dos puntos sobre el cono y un punto sobre el plano base.*

Tabla 11: Construcción de la sección cónica: Elipse, mediante el corte de un plano que contiene dos puntos sobre el cono y un punto sobre el plano base.

(Fuente de esta investigación)

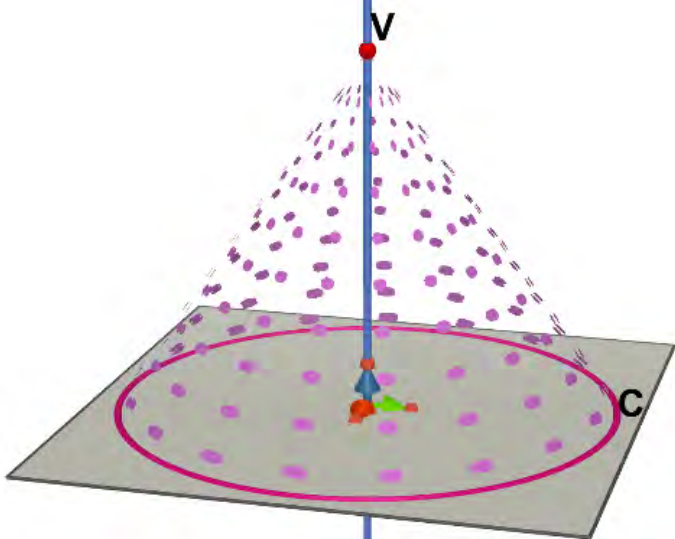
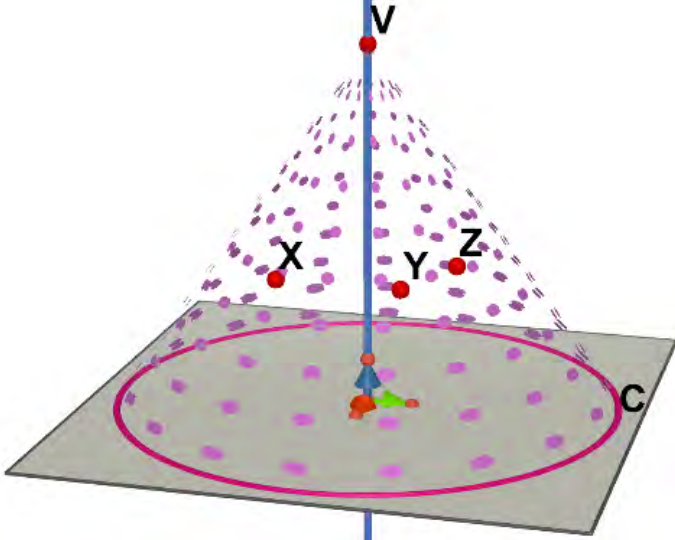
1	A partir del cono circular recto	
2	Se crea un punto X sobre el plano base y dos puntos Y y Z sobre el cono.	

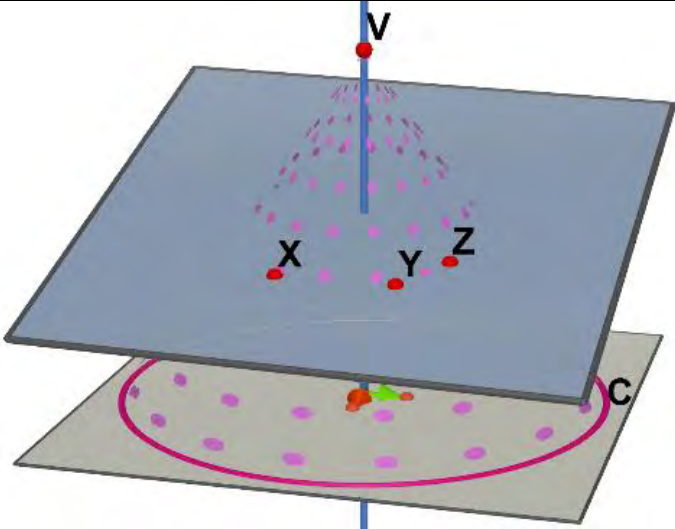
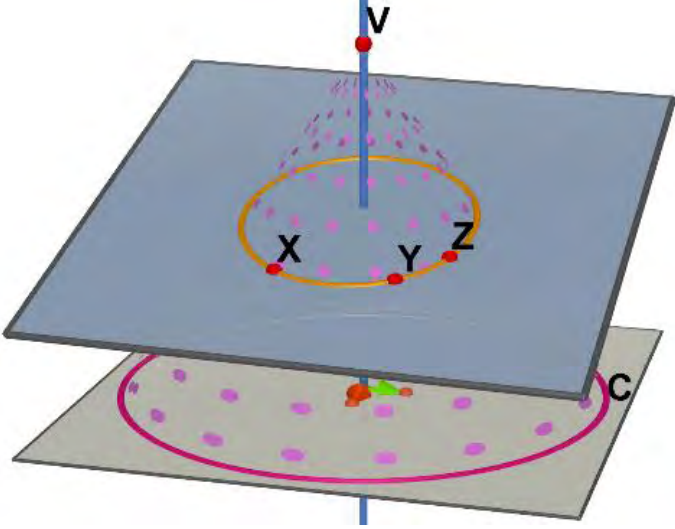
<p>3</p>	<p>Se construye un plano que pase por los punto X, Y y Z.</p>	
<p>4</p>	<p>Se marca la elipse con la herramienta curva intersección. En caso de no obtener una elipse se arrastra los puntos X, Y y Z para controlar la inclinación del plano</p>	

- *Tres puntos sobre el cono.*

Tabla 12: Construcción de la sección cónica: Elipse, mediante el corte de un plano que contiene tres puntos sobre el cono.

(Fuente de esta investigación)

1	A partir del cono circular recto	
2	Se crea tres puntos X, Y y Z sobre el cono.	

<p>3</p>	<p>Se construye un plano que pase por los punto X, Y y Z.</p>	
<p>4</p>	<p>Se marca la elipse con la herramienta curva intersección. En caso de no obtener una elipse se arrastra los puntos X, Y y Z para controlar la inclinación del plano</p>	

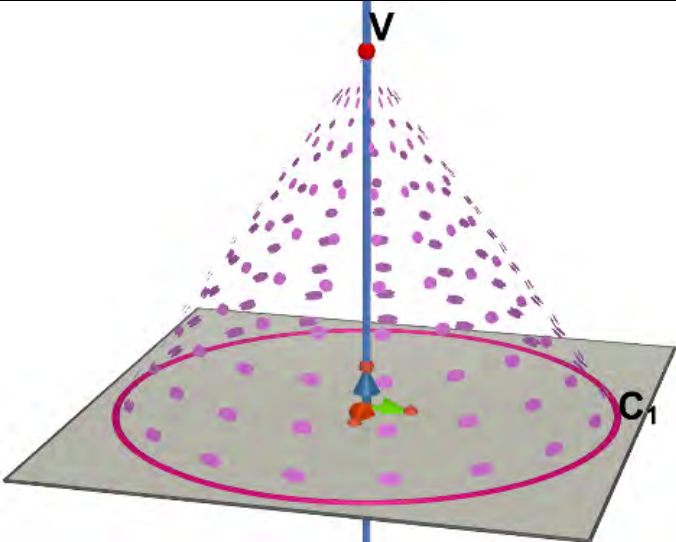
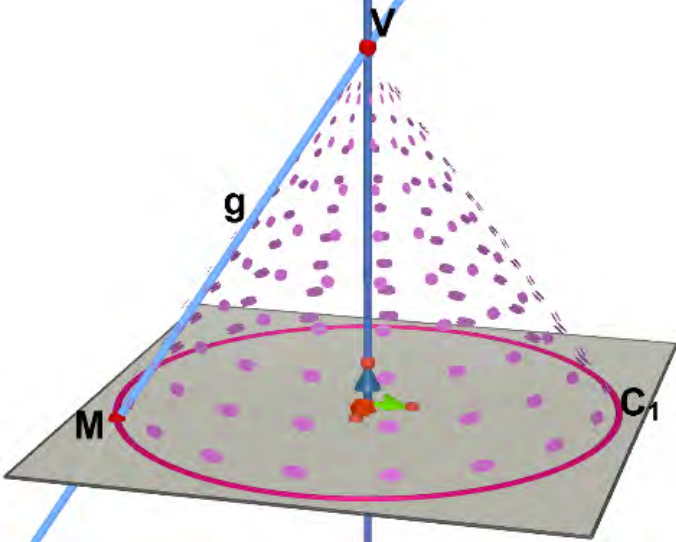
Además, se pueden dar diferentes construcciones más complejas, como, por ejemplo:

- *Elipse como corte de un plano perpendicular a la generatriz del cono:*

Construcción que podrían realizarla estudiantes que deseen obtener una construcción robusta de la elipse.

Tabla 13: Construcción de la sección cónica: Elipse, como corte de un plano perpendicular a la generatriz.

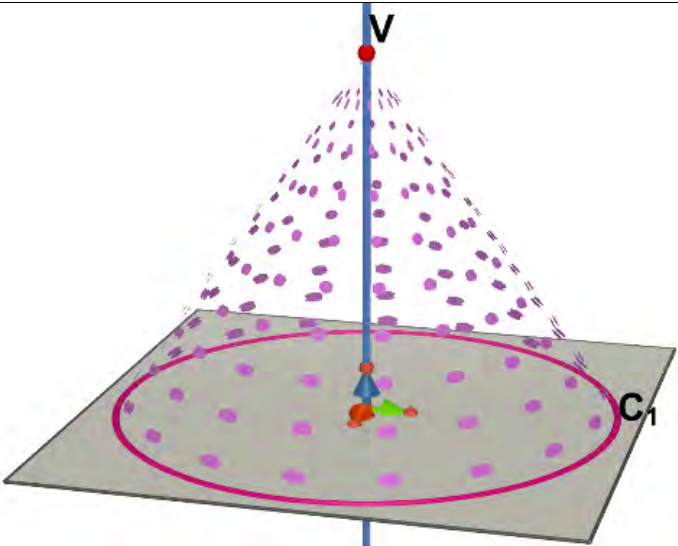
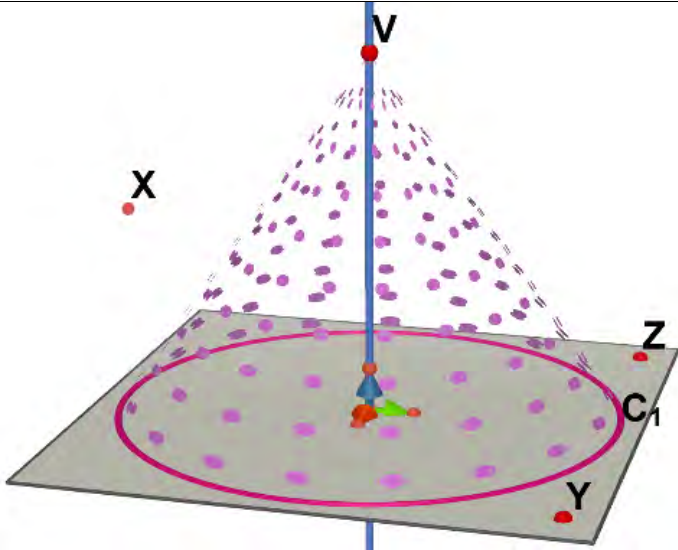
(Fuente de esta investigación)

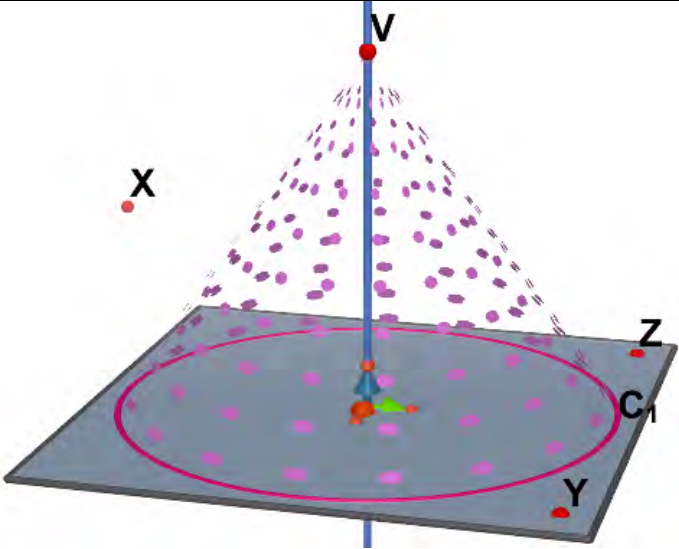
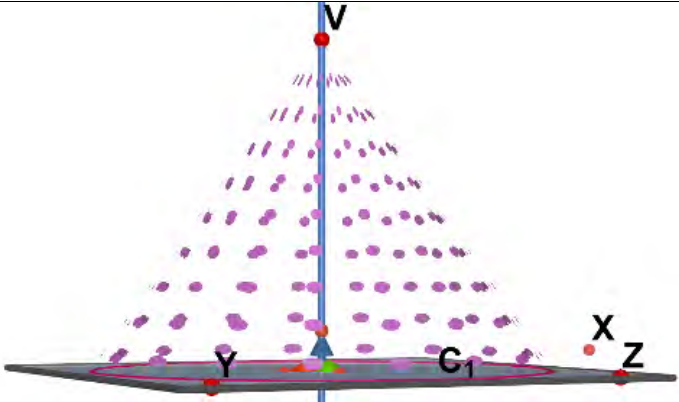
1	A partir del cono circular recto.	
2	Se crea un punto M sobre la circunferencia, luego se traza la recta g que pasa por M y V .	

<p>3</p>	<p>Se crea un punto X sobre la recta g y luego se construye un plano perpendicular a la recta g que pase por X.</p>	
<p>4</p>	<p>Se marca la elipse con la herramienta curva intersección.</p>	

Sin embargo, puede darse el caso de que erróneamente se repita el hecho de crear un punto por fuera del plano base y pensar que está en el espacio, surgiendo la siguiente construcción:

Tabla 14: Construcción errónea del plano que secciona al cono.

1	A partir del cono circular recto	 A 3D diagram of a right circular cone. The apex is labeled 'V' and is a red dot at the top. The base is a gray horizontal plane with a pink circular outline labeled 'C1'. The cone's surface is covered with purple dots. A blue vertical line represents the axis of the cone. A small 3D coordinate system with red, green, and blue axes is visible at the center of the base.
2	Se crea dos puntos Y y Z sobre el plano base y un punto X sobre la extensión del plano base	 The same 3D diagram of the cone as in step 1. In addition, there are three red dots: 'X' is located to the left of the base plane, 'Y' is on the base plane near the bottom right edge, and 'Z' is on the base plane near the top right edge. The labels 'C1' and 'V' are also present.

3	Se construye un plano que pase por los punto X , Y y Z .	
4	Este plano será el mismo plano base de ahí que se obtendrá una circunferencia	

1.3. Construir geoméricamente la Circunferencia como corte de un cono.

Se pretende que, a partir de la construcción anterior, descubran que es imposible obtener la circunferencia por medio de la manipulación del plano cortante, debido a que la circunferencia tiene una propiedad geométrica particular, como es descrita por Hemmerling (2002):

La curva formada por la intersección de un plano y una superficie cónica circular recta se llama sección cónica. Si el plano es perpendicular al eje, la cónica es un círculo.

Por lo tanto, los estudiantes deben establecer que es necesario realizar una construcción que mantenga dicha propiedad, es decir, realizar implícitamente una construcción robusta.

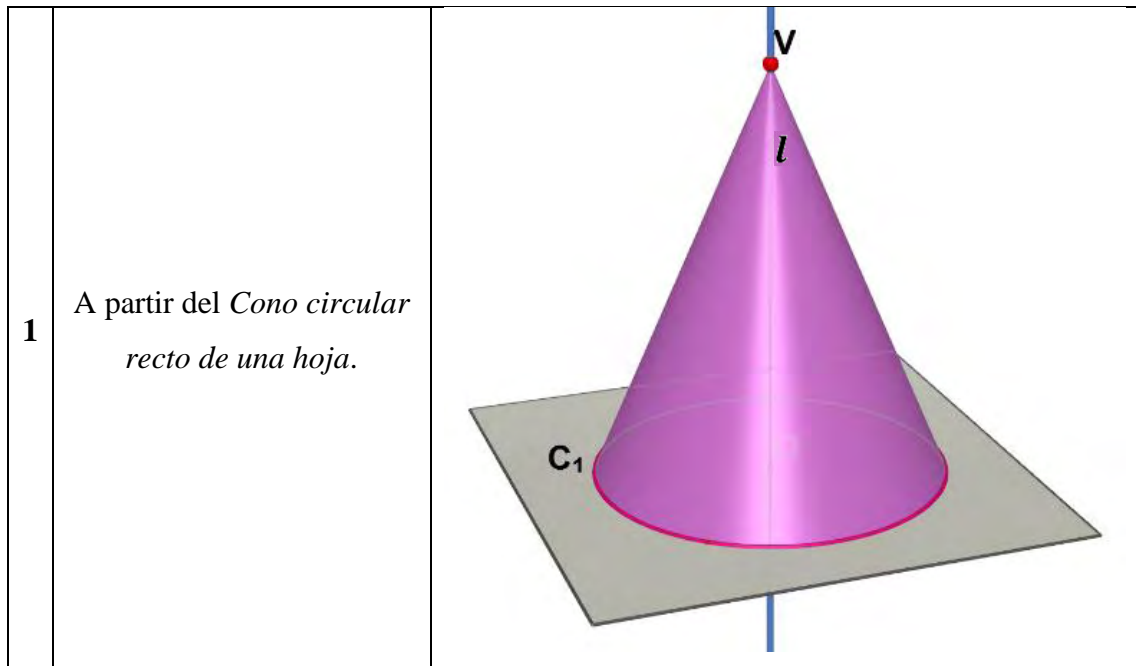
En consecuencia, se pueden generar las siguientes construcciones que solucionen la actividad de la circunferencia como corte a un cono:

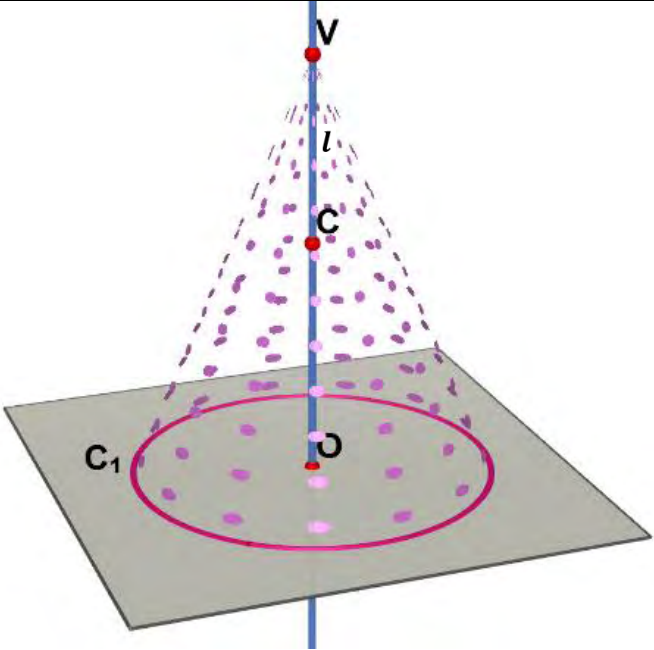
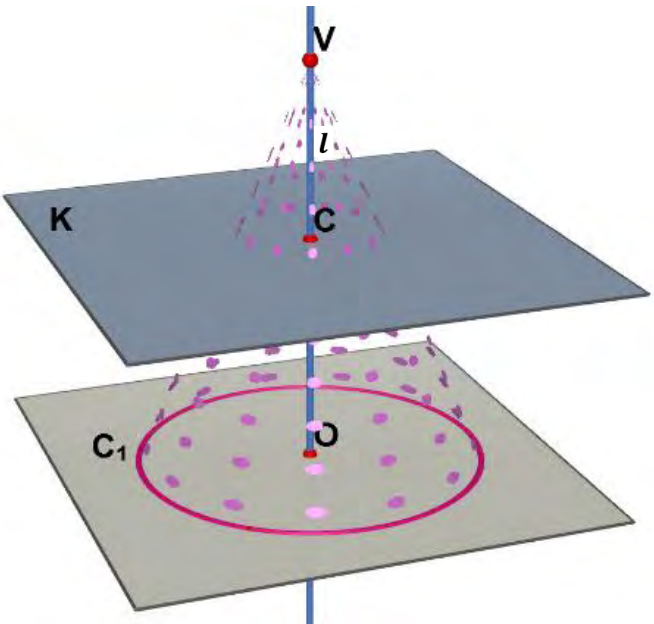
- *Circunferencia como corte de un plano perpendicular o paralelo que secciona al cono:*

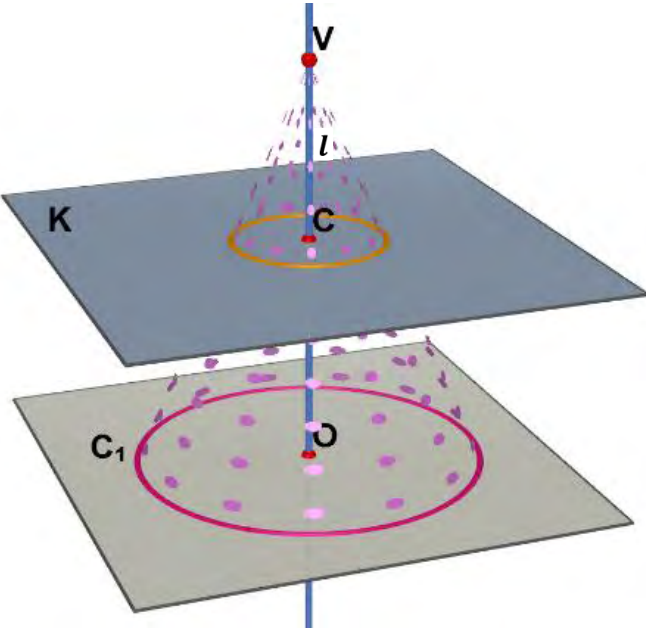
Se prevé esta alternativa debido a que es la más sencilla de visualizar y construir.

Tabla 15: Construcción de la sección cónica: Circunferencia.

(Fuente de esta investigación)



2	<p>Se traza un punto C sobre la recta l.</p>	
3	<p>Con la herramienta <i>Perpendicular</i> se traza un plano perpendicular a la recta l que pase por C</p> <p style="text-align: center;">O</p> <p>Con la herramienta <i>paralelo</i> se traza un plano paralelo al plano base que pase por C</p> <p>Al plano resultante se lo denota como K</p>	

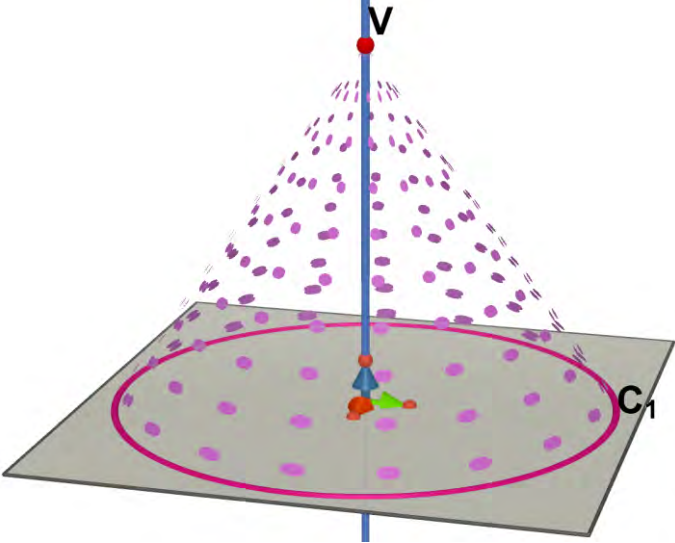
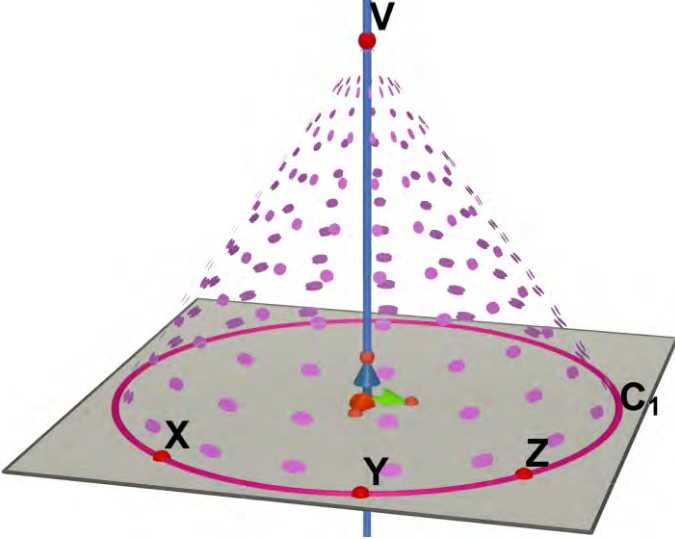
4	<p>Con la herramienta <i>Curva Intersección</i> se selecciona el plano K y el cono, obteniendo así la sección cónica <i>circunferencia</i>.</p> <p>Al arrastrar el punto C se obtiene a la circunvecina como una invariante geometría lo cual permite apreciar una construcción robusta.</p>	 <p>El diagrama ilustra un cono con vértice V y eje l. Un plano K intersecta al cono, formando una circunferencia con centro C. Al arrastrar el punto C, se muestra una nueva posición C_1 y una nueva circunferencia de intersección.</p>
---	--	--

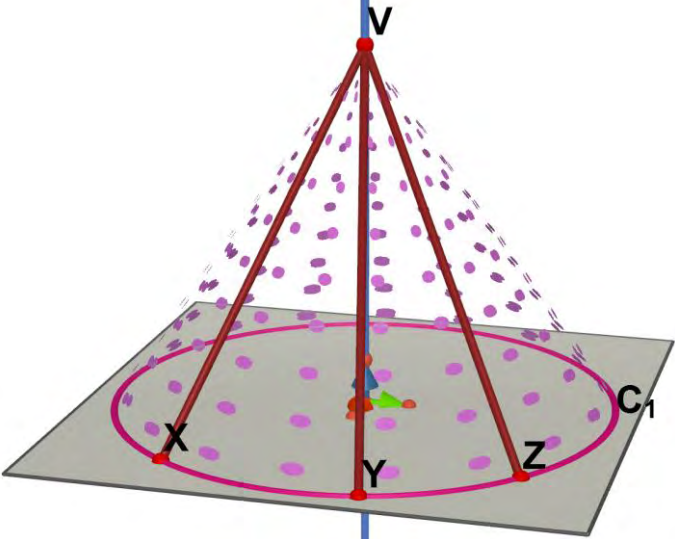
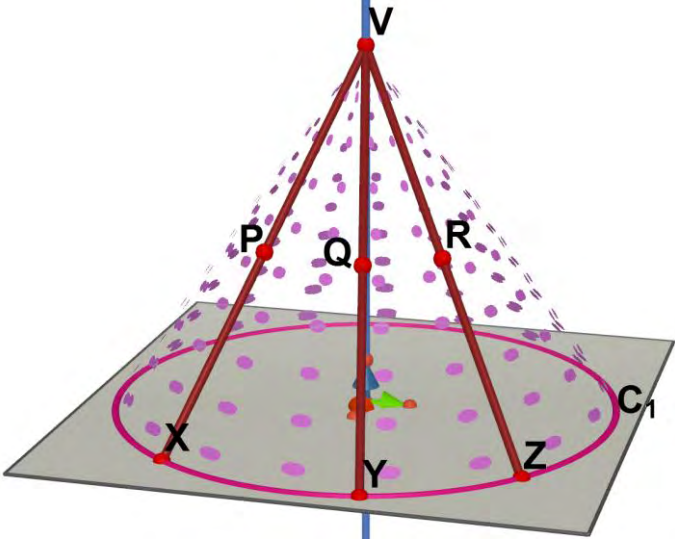
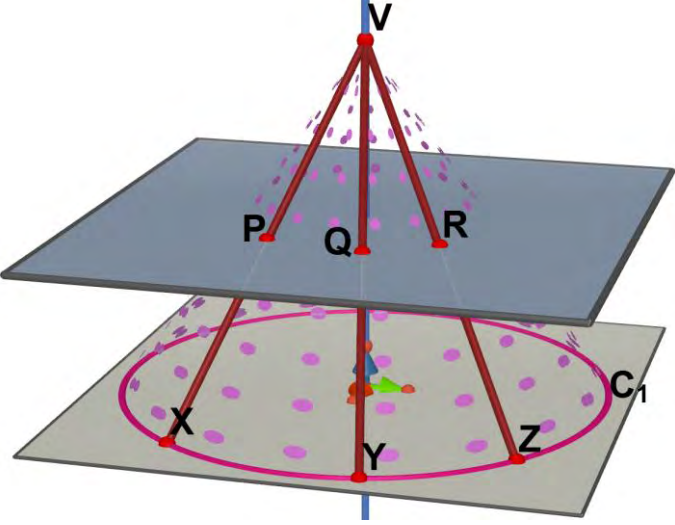
Debido a la facilidad con la cual se puede construir objetos geométricos en el AGD Cabri 3D, pueden surgir soluciones creativas por parte de los estudiantes al interactuar con las diversas herramientas que este posee, de ahí que, podrían generarse las siguientes construcciones:

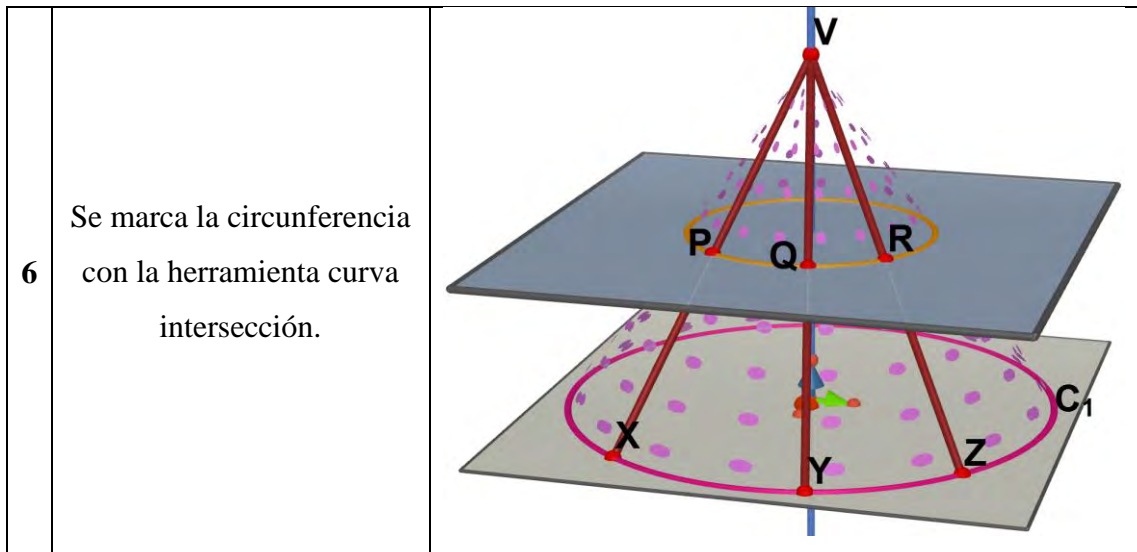
- *Circunferencia como corte de un plano que pasa por los puntos medios de tres segmentos congruentes de la generatriz:*

Tabla 16: Construcción de una circunferencia como corte de un plano que pasa por los puntos medios de tres segmentos congruentes de la generatriz.

(Fuente de esta investigación)

1	A partir del cono circular recto	
2	Se crea tres puntos X, Y y Z sobre la circunferencia C_1 .	

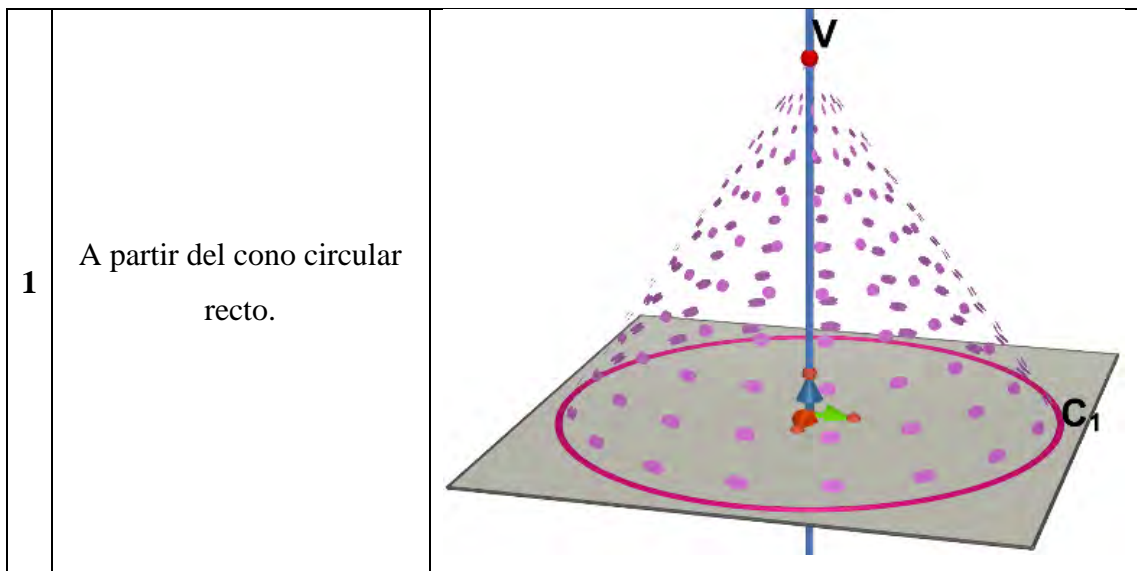
3	<p>Se trazan los segmentos VX, VY y VZ.</p>	
4	<p>Mediante la herramienta punto medio, se selecciona los segmentos VX, VY y VZ para obtener sus puntos medios y se los denota como P, Q y R respectivamente.</p>	
5	<p>Se construye el plano que pasa por los puntos P, Q y R.</p>	

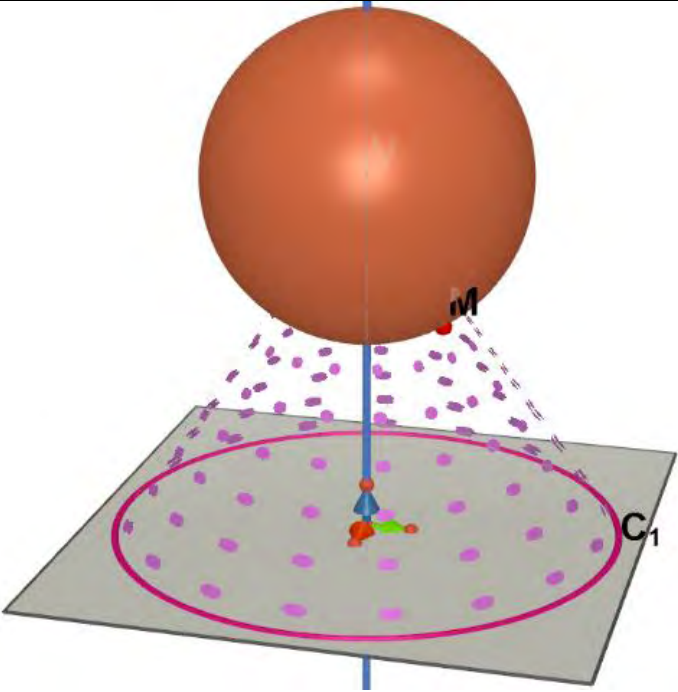
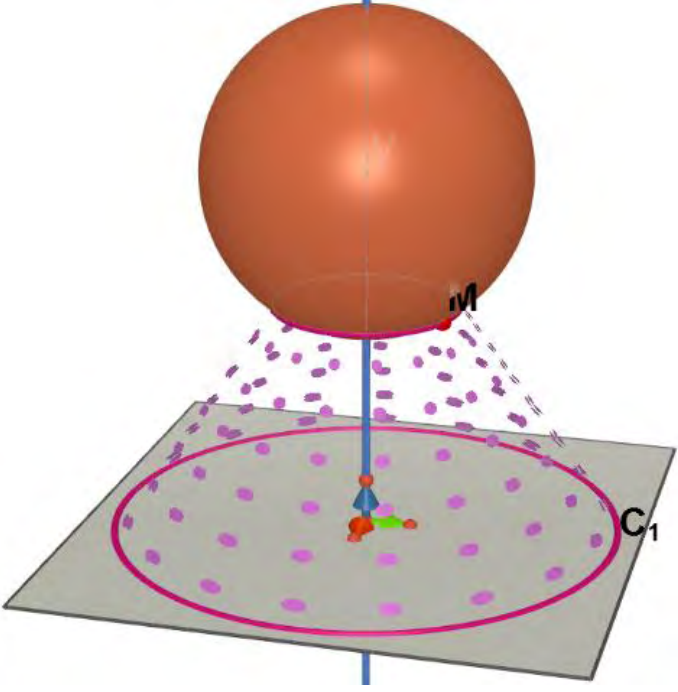


- *Circunferencia como corte de una esfera que secciona al cono.*

Tabla 17: Construcción de una circunferencia como corte de una esfera que secciona al cono.

(Fuente de esta investigación)

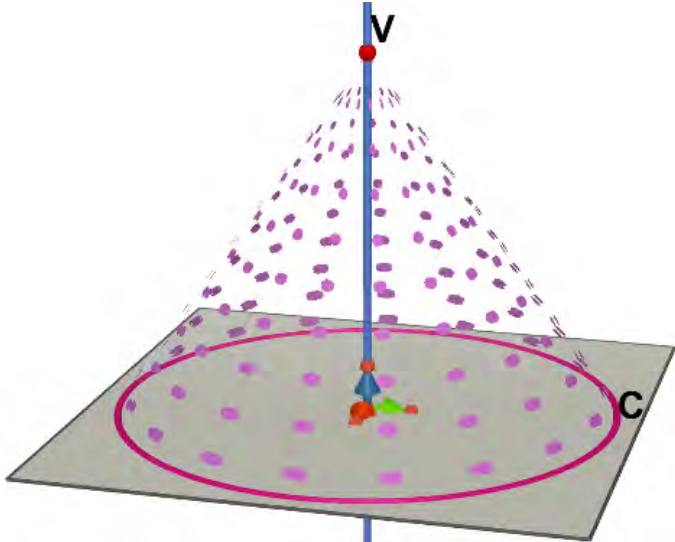
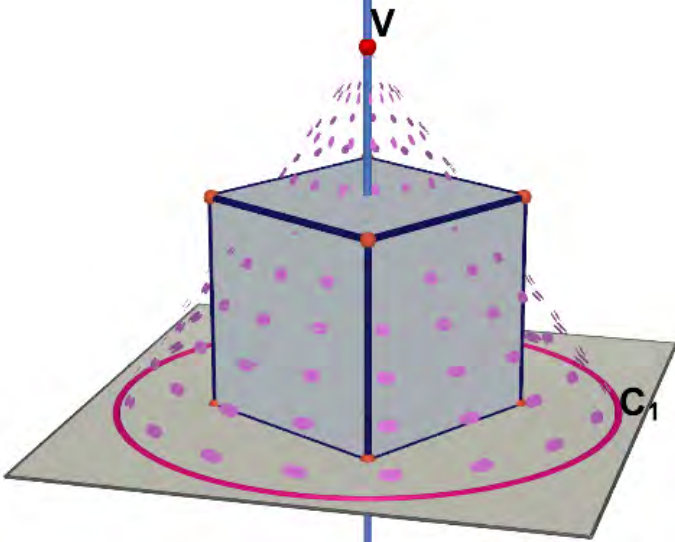


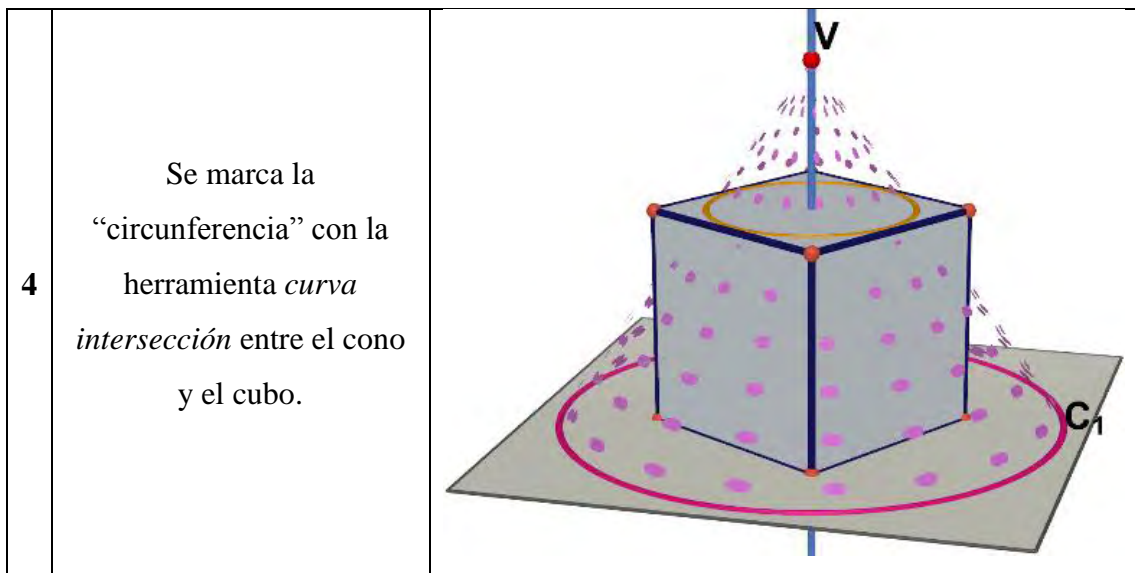
<p>2</p>	<p>Se construye una esfera, donde el centro será el punto V y como radio cualquier punto M sobre el cono.</p>	 <p>The diagram shows a 3D coordinate system with a vertical blue axis. A cone is represented by a grey base plane and a surface of purple dots. A sphere is shown above the cone, centered at point V (the origin). A point M is marked on the cone's surface. Dashed lines connect V to M and V to the center of the sphere. The intersection of the sphere and the cone is shown as a circle C1 on the base plane.</p>
<p>3</p>	<p>Se construye una circunferencia alrededor del eje del cono y como radio el punto M.</p> <p>Luego, la curva de intersección generada por esta esfera y el cono será una circunferencia.</p>	 <p>This diagram is identical to the one in step 2, showing the sphere and cone intersecting at a circle C1 on the base plane.</p>

- *Circunferencia como corte de un cubo que secciona al cono.*

Tabla 18: Construcción de una circunferencia como corte de un cubo que secciona al cono.

(Fuente de esta investigación)

<p>1</p>	<p>A partir del cono circular recto</p>	 <p>A 3D diagram showing a right circular cone. The vertex is labeled 'V' and is a red dot at the top of a vertical blue axis. The base is a gray horizontal plane with a pink circular outline labeled 'C'. Purple dots are scattered on the cone's surface and its base. Dashed lines represent the cone's profile.</p>
<p>2</p>	<p>Se crea un cubo sobre el plano base que tenga como centro el origen de los tres vectores que Cabri 3D crea por defecto.</p>	 <p>A 3D diagram showing a blue cube placed on the gray base plane of the cone. The vertex 'V' is at the top. A pink circle labeled 'C1' is drawn on the base plane, passing through the four corners of the cube's base. Purple dots are scattered on the cube's faces and the base plane. Dashed lines represent the cone's profile.</p>



En cuanto a la hoja del estudiante, se realizará la siguiente pregunta, planeada para que respondan de acuerdo a las construcciones que realizarán en el AGD Cabri 3D:

¿Por qué crees que es necesario realizar una construcción aparte para la Circunferencia, teniendo en cuenta que la circunferencia es un caso particular de la Elipse?

Esta pregunta se realiza con la intención de que los estudiantes identifiquen propiedades invariantes de los objetos geométricos, de tal manera que al realizar las construcciones sus propiedades se conserven, es decir, supere la *prueba del arrastre*, por lo tanto, se espera que en sus respuestas este presente la noción de construcción robusta, así podrían responder de la siguiente manera:

R/ Conseguir la precisión de la propiedad intrínseca de la sección cónica: *Circunferencia* mediante una manipulación aleatoria es imposible en Cabri 3D, en consecuencia, se debe realizar una construcción robusta que mantenga dicha propiedad.

Además, en conjunto con la respuesta anterior, los estudiantes teniendo en cuenta su propia construcción podrían describir el por qué su construcción genera una circunferencia, por ejemplo, para las construcciones previstas se podrían obtener las siguientes descripciones:

- La posición de un plano cortante para la construcción de la sección cónica: *Circunferencia* debe ser paralelo a la base del cono o perpendicular al eje del cono.
- Si se realiza por lo menos tres segmentos desde el vértice hasta la base del cono, se obtiene tres segmentos congruentes, debido a que todos los elementos del cono circular recto son congruentes, luego se trazan los puntos medios de cada segmento con los cuales se puede construir un plano, dicho plano corta de forma paralela al cono.
- Al realizar un corte al cono circular recto con una esfera que tiene como centro un punto sobre el eje del cono, dicho corte actuará como un plano paralelo a la base del cono o plano perpendicular al eje del cono, obteniendo así una circunferencia.
- Las caras opuestas del cubo son paralelas, por tanto, al realizar un cubo que seccione el cono con una cara sobre la base del cono, este cortara al cono de manera paralela a la base, obteniendo así una circunferencia.

FASE 2. Transición de doble vía: Construcción del Plano Bisector.

Se mostrará de manera breve la construcción del plano bisector para que observen su representación tanto bidimensional como tridimensional, para que luego, aborden la noción de tangencia desde una perspectiva espacial y así generar en los estudiantes la acción de *transición de doble vía*, que será fundamental para el desarrollo de las actividades propuestas en la situación didáctica N°2.

Posteriormente, se pretende que realicen las siguientes construcciones:

2.1. *Construya una circunferencia tangente cualquiera a las semirrectas m y n .*

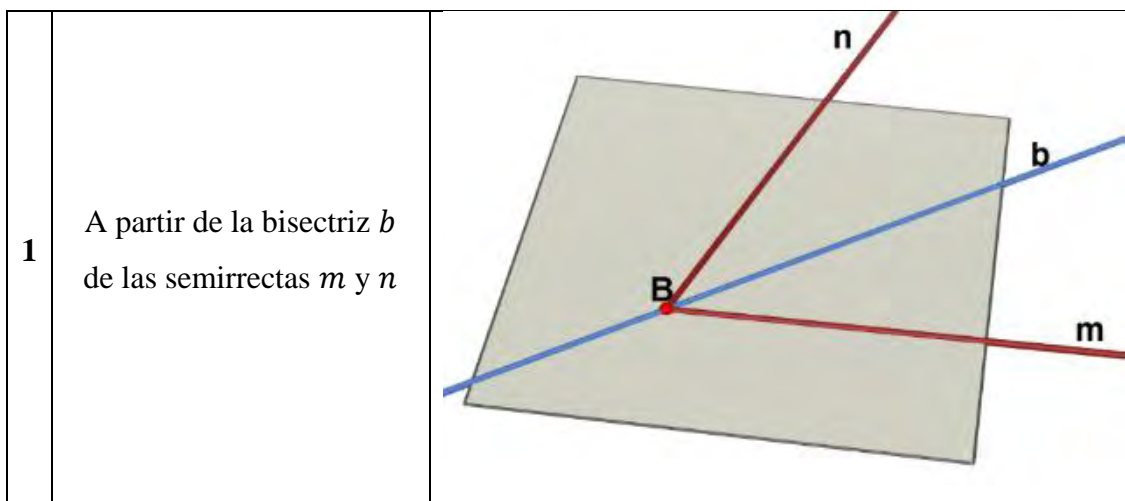
Se espera que los docentes en formación tengan en cuenta la definición de bisectriz para que puedan deducir que el centro de la circunferencia tangente se encuentra sobre esta, además, se pretende que los estudiantes recuerden el teorema descrito por Hemmerling (2002) de la siguiente manera:

Teorema 7.12: Si una recta, que se encuentra en el plano de un círculo²⁷, es perpendicular a un radio en su punto sobre el círculo, es tangente al círculo.

Por lo que se prevé que realice una construcción similar a la siguiente:

Tabla 19: Construcción de una circunferencia tangente.

(Fuente de esta investigación)

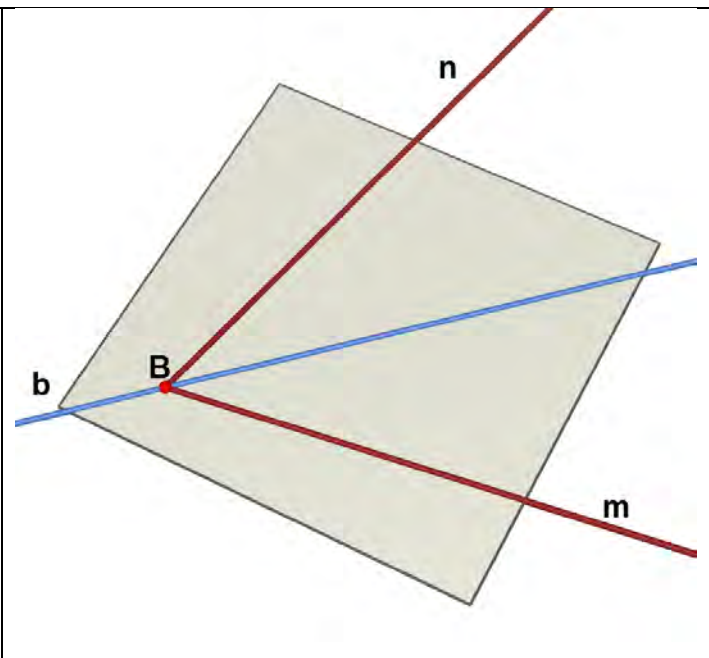
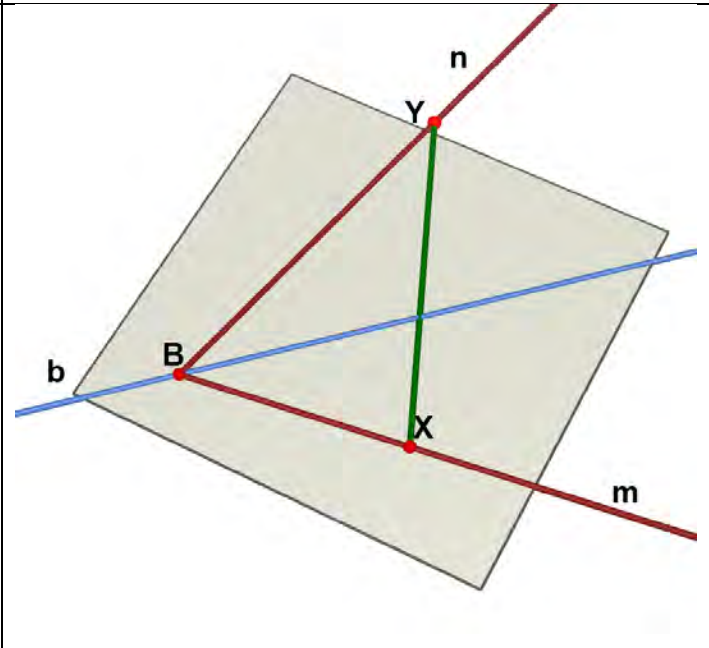


²⁷ En algunos textos se hace una distinción entre los términos círculo y circunferencia, en el libro Geometría Elemental se denomina *círculo* al conjunto de los puntos en un plano, cada uno de los cuales es equidistante de un punto dado del plano; y define concretamente *circunferencia* como la longitud del círculo.

2	<p>Se traza un punto R sobre la recta n, para luego trazar una recta perpendicular r a la recta n que pase por R, finalmente, se marca el punto de intersección entre r y b el cual será denotado como C.</p>	
3	<p>Se traza una circunferencia C_1 en el plano base con centro en C que pase por el punto R.</p>	

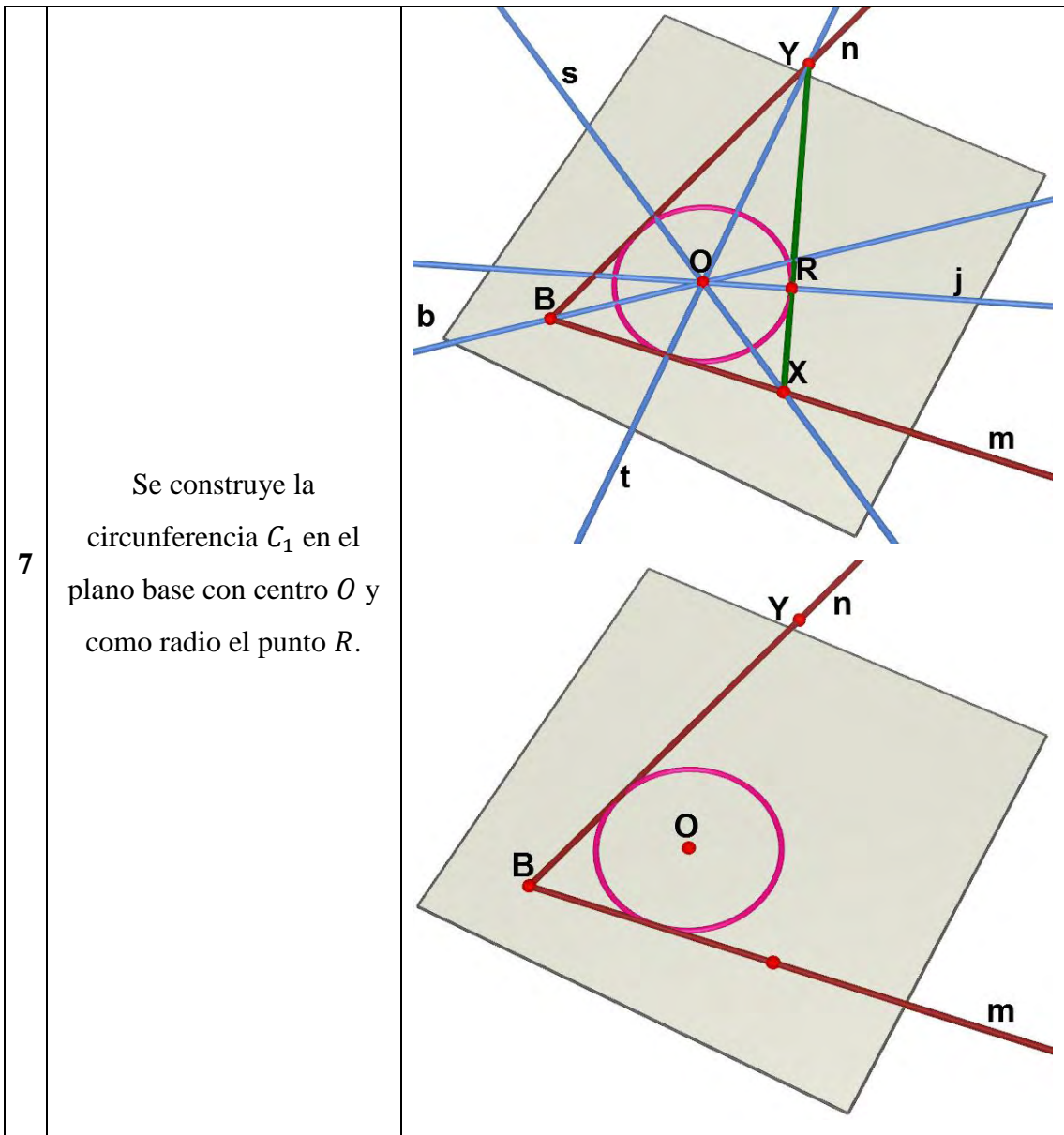
Por otra parte, los estudiantes pueden realizar una construcción más compleja asociando esta actividad con la inscripción de una circunferencia en un triángulo, es decir, una circunferencia tangente a los tres lados del triángulo, dicha construcción se puede obtener mediante la localización del incentro, por lo tanto, tendrían que formar un triángulo con las dos semirrectas y un segmento auxiliar, generando así la siguiente construcción:

Tabla 20: Construcción de una circunferencia tangente mediante la localización del incentro.

1	A partir de la construcción de la bisectriz	
2	Se crea dos puntos X y Y sobre m y n respectivamente, luego se traza el segmento XY.	

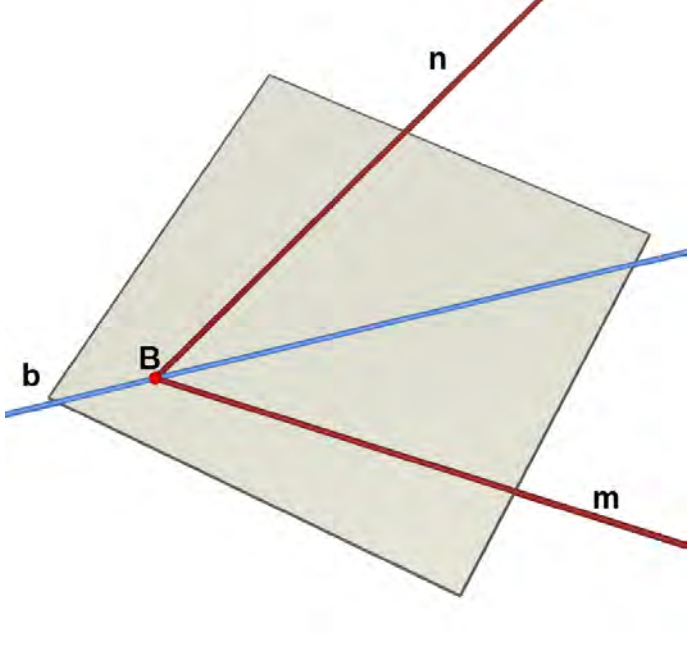
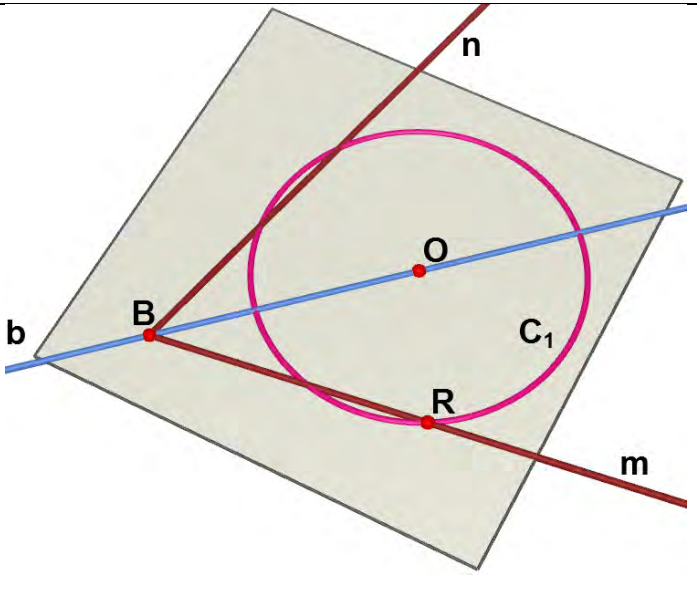
<p>3</p>	<p>Se construye los planos bisectores de los ángulos BYX y BXY, se los denotara K y Q respectivamente.</p>	
<p>4</p>	<p>Se marca las rectas de intersección de los planos Q y K con el plano base y se denota las rectas resultantes como s y t respectivamente</p>	

5	<p>Se marca el punto de intersección de s, t y b, denotado como O, dicho punto es el incentro del triángulo formado por los puntos BYX.</p>	<p>The diagram shows a shaded quadrilateral. Three blue lines, labeled s, t, and b, intersect at a central point O. A red line m and a blue line n are also shown. Points B, X, and Y are marked at the intersections of these lines, forming a triangle BYX. A green line segment XY is drawn.</p>
6	<p>Se crea una recta perpendicular j al segmento XY y que pase por el punto O, además, se marca el punto de intersección de la recta j con el segmento XY y se lo denota como R.</p>	<p>This diagram is identical to the one in step 5, but with an additional blue line j drawn perpendicular to the green segment XY at point R. The point R is the intersection of line j and segment XY.</p>



Sin embargo, puede ocurrir que los estudiantes no recuerden el *teorema 7.12* y recurran a realizar diversas construcciones que se aproximen a la circunferencia tangente, con lo cual podrían recordar las propiedades que enuncia este teorema.

Tabla 21: Interacción con el AGD Cabri 3D para tratar de construir una circunferencia tangente.

<p>1</p>	<p>A partir de la construcción de la bisectriz</p>	
<p>2</p>	<p>Se crea una circunferencia C_1 que tiene como centro un punto O sobre la bisectriz y como radio un punto R cualquiera sobre alguna de las dos semirrectas m o n</p>	

4	<p>Mediante el arrastre se intenta conseguir una ubicación para que la circunferencia C_1 sea tangente, la cual es una construcción blanda.</p>	
5	<p>Sin embargo al mover el punto O dejara de ser tangente debido a que la circunferencia no es invariante.</p>	

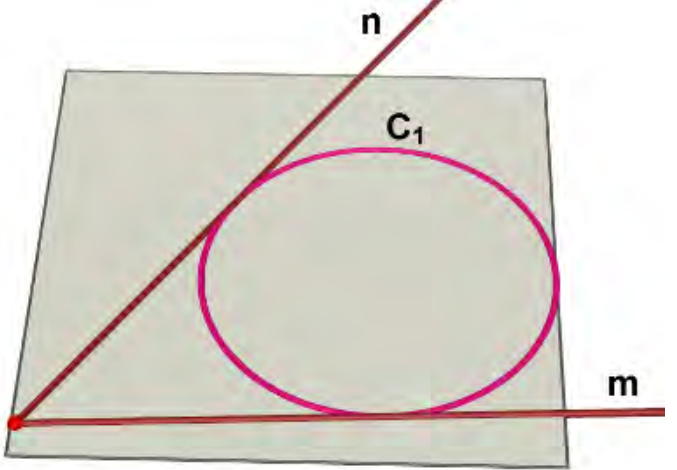
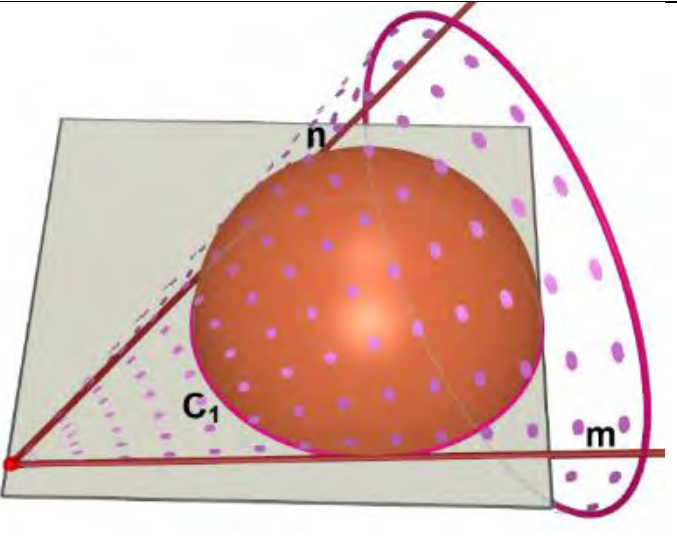
2.2. Construya una figura tridimensional de tal forma que al realizar un corte transversal se obtenga la figura anterior.

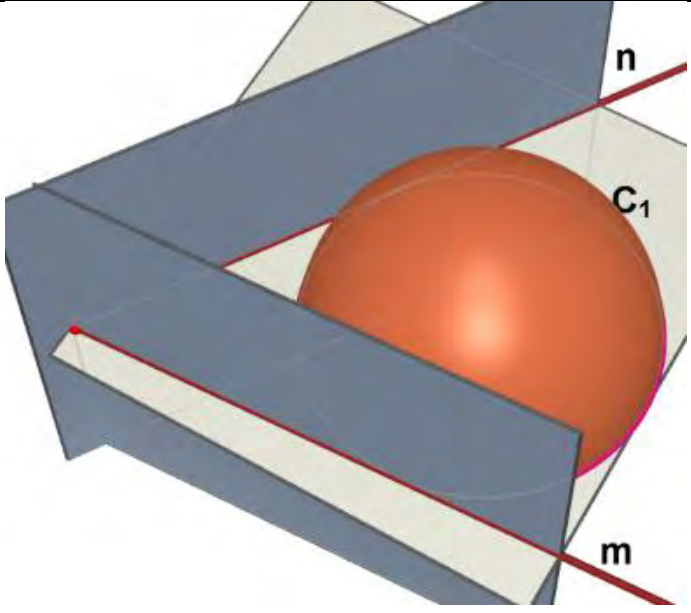
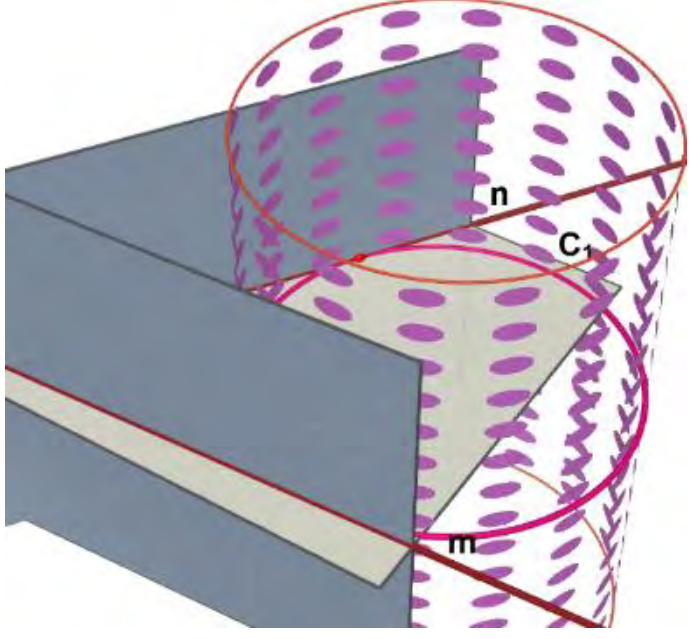
Esta actividad se plantea con la intención de promover el proceso cognitivo de visualización y realizar acciones sobre la *transición de doble vía*, es decir, que mediante la representación bidimensional puedan obtener figuras tridimensionales, las cuales se pueden crear o representar mediante el AGD Cabri 3D, de una manera más sencilla y experimental.

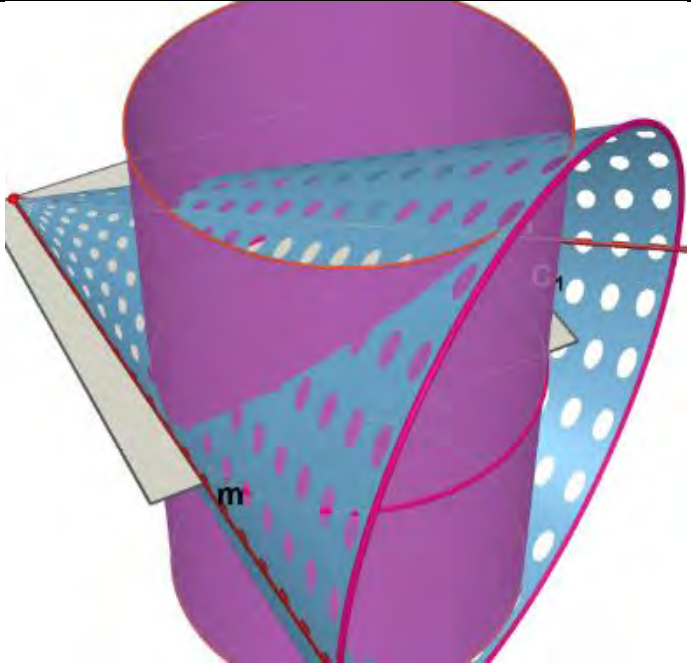
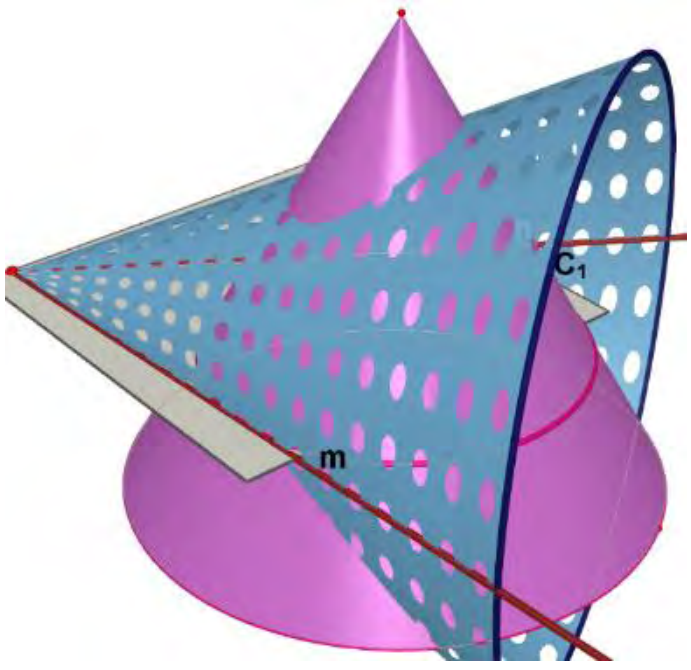
Así, se prevé que realicen las siguientes construcciones:

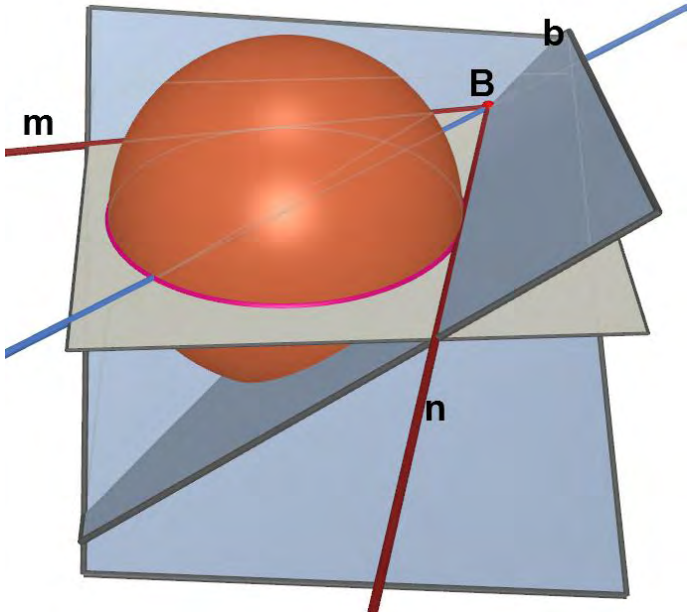
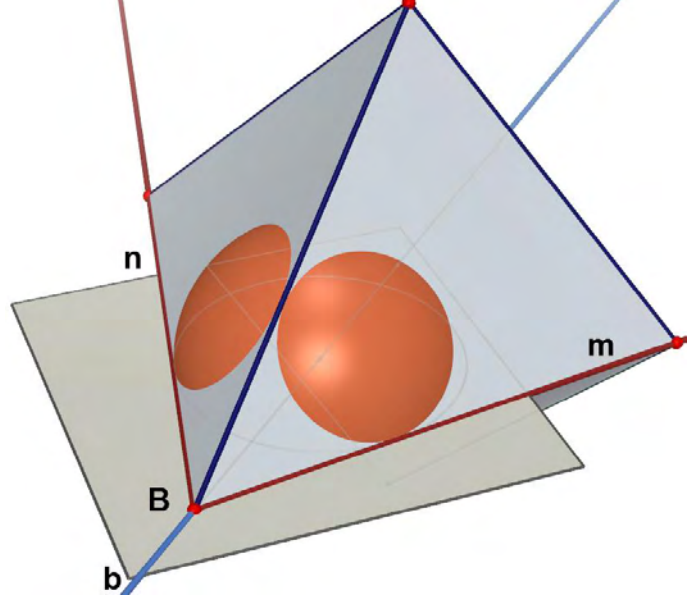
Tabla 22: Proyecciones tridimensionales de una circunferencia tangente a dos semirrectas.

(Fuente de esta investigación)

<p>1</p>	<p>A partir de la circunferencia tangente C_1 a las semirrectas m y n.</p>	
<p>2</p>	<p>Esfera tangente al interior de un cono.</p>	

<p>3</p>	<p>Dos planos tangentes a una esfera.</p>	
<p>4</p>	<p>Dos planos tangentes a un cilindro.</p>	

<p>5</p>	<p>La intersección de un cono con un cilindro.</p>	
<p>6</p>	<p>La intersección de dos conos.</p>	

7	Una esfera y la intersección de dos planos	
8	Una esfera y una pirámide	

En cuanto a la hoja del estudiante, se plantearán las siguientes preguntas:

¿Cómo realizaste la construcción de la circunferencia tangente? Descríbela

La intención de esta pregunta es que los estudiantes describan el proceso que realizaron para encontrar el radio de la circunferencia tangente, es decir, enunciar o

describir el teorema 7.12, será primordial al momento de determinar el radio de las esferas tangentes al cono y al plano, denominadas *esferas de Dandelin*.

R/: Algunas soluciones previstas para esta actividad se presentan en las construcciones de las tablas 19 y 20.

Además, en esta fase se plantea la siguiente pregunta para promover el proceso cognitivo de *visualización* a la hora de realizar una transición de la geometría plana a la geometría espacial. En este literal no será obligatorio que los docentes en formación construyan sus *imágenes mentales* sobre el AGD Cabri 3D, debido a que se puede generar un obstáculo a la hora de exteriorizarlo mediante este software.

¿Qué otras figuras tridimensionales puedes imaginar que resolverían la actividad? Descríbelas

Nota: no necesariamente debes realizarlas en Cabri 3D

R/: La Tabla 22 muestra múltiples soluciones a este literal.

Esta actividad se planteó con el propósito de realizar una construcción robusta de la sección cónica: *Elipse*, es decir, que únicamente genere elipses evitando generar las otras secciones cónicas, debido a que el concepto matemático a trabajar es la propiedad intrínseca de la *Elipse*.

Realiza una construcción robusta (es aquella que mantiene sus propiedades superando la prueba del arrastre) de la Elipse.

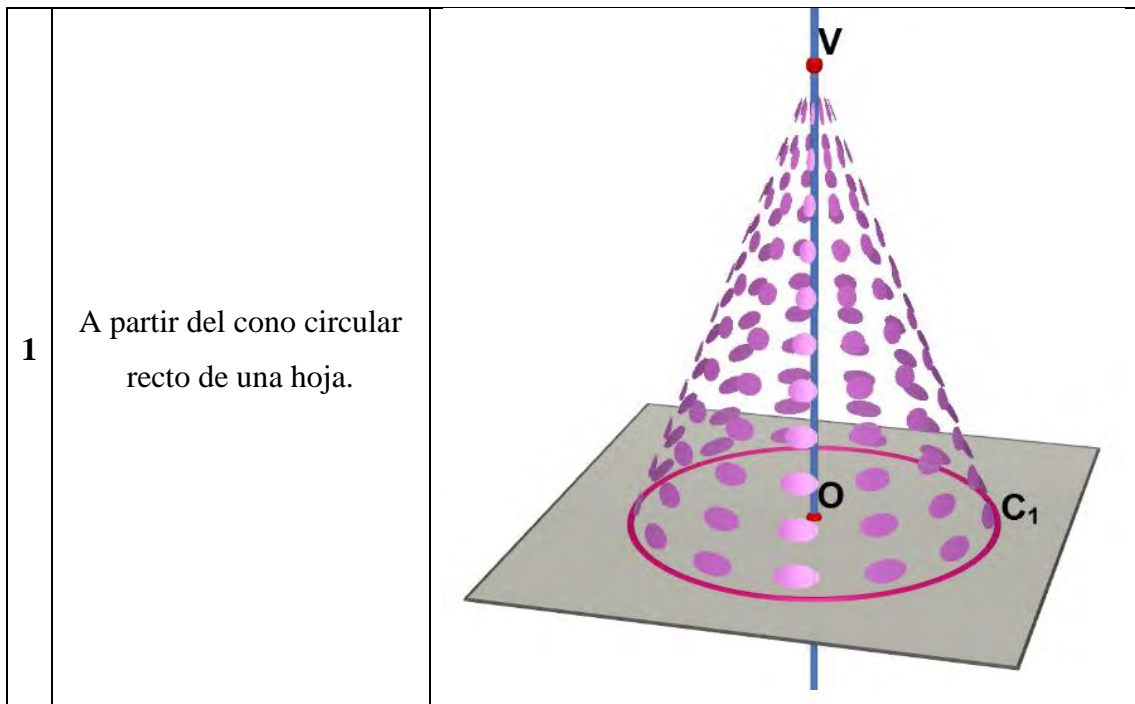
En esta actividad se prevé la solución que se propone en la Tabla 13 debido a que es la más sencilla.

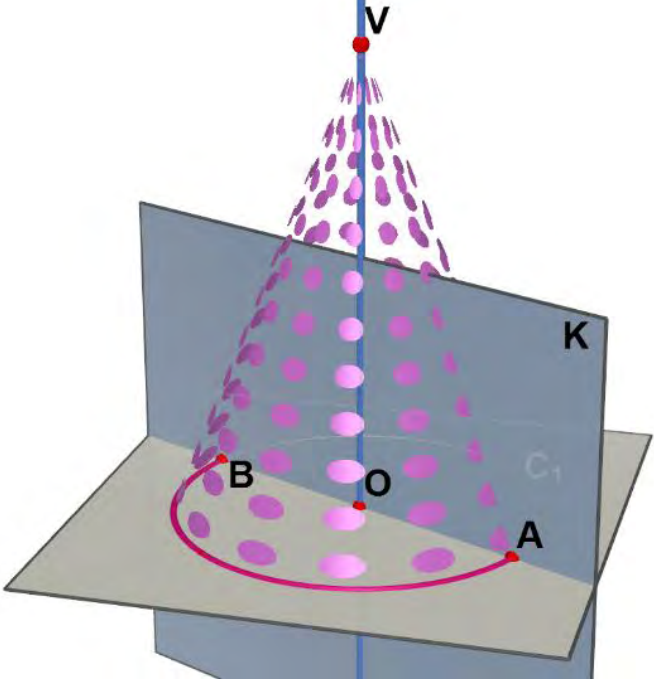
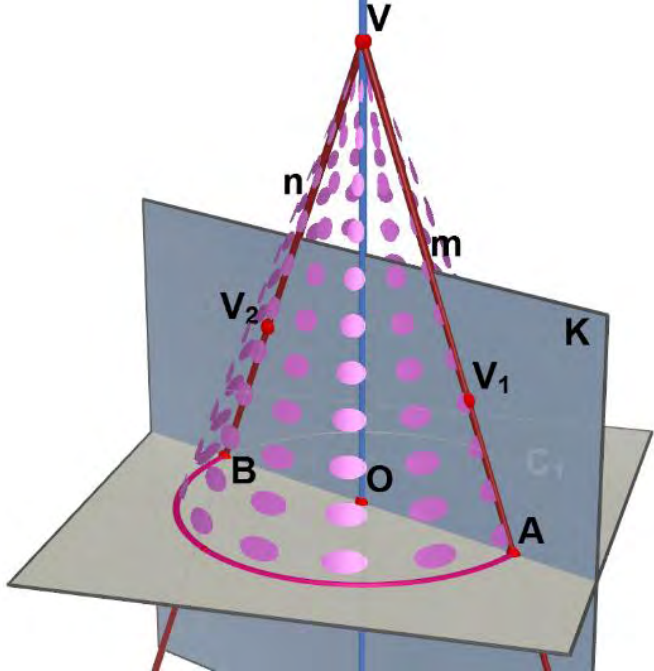
Por otra parte, se puede generar la siguiente construcción debido a que cumple con la propiedad que enuncia Hemmerling (2002):

La curva formada por la intersección y una superficie cónica circular recta se llama sección cónica. [...] Si el plano cortante es oblicuo al eje y corta todos los elementos, la cónica es una elipse.

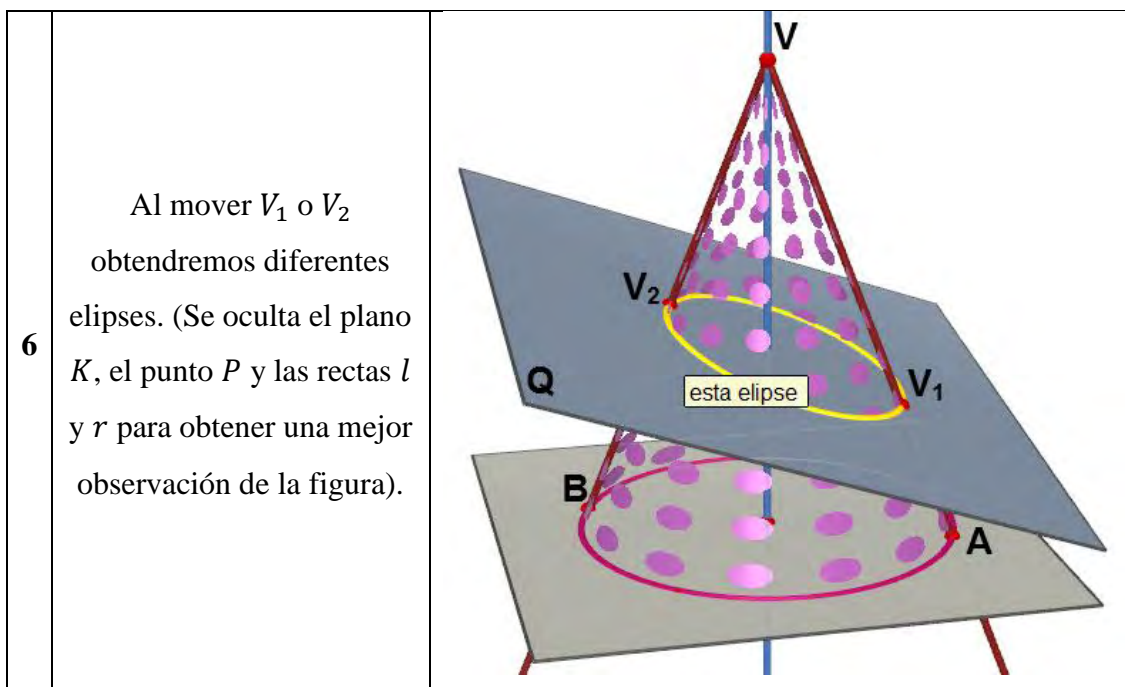
Tabla 23: Construcción robusta de la sección cónica: Elipse, con el plano oblicuo al eje y que corta a todos los elementos del cono.

(Fuente de esta investigación)



<p>2</p>	<p>Se traza un punto A sobre la circunferencia C_1, luego se construye un plano K que contenga al eje del cono y pase por A, Luego se marca el punto de intersección del plano K con la circunferencia C_1 y se lo denota como B.</p>	
<p>3</p>	<p>Se trazan las semirrectas m y n desde V que pasan por A y B respectivamente, luego se construyen dos puntos V_1 y V_2 sobre las semirrectas m y n respectivamente.</p>	

4	<p>Se traza la recta l que pasa por V_1 y V_2, luego se marca el punto de intersección de esta recta con el eje del cono y se lo denota como P, además, con la herramienta <i>perpendicular</i> se traza una recta perpendicular al plano K que pase por P.</p>	
5	<p>Se traza el plano Q que contiene a las rectas r y l, luego con la herramienta <i>curva intersección</i> seleccionamos el cono y el plano Q, obteniendo así la sección cónica: Elipse.</p>	



En cuanto a la hoja del estudiante, se plantea la siguiente actividad:

Describe el procedimiento que realizaste para la construcción robusta de la Elipse.

Nota: recuerda etiquetar los elementos geométricos

El propósito de esta actividad es que los estudiantes describan el procedimiento que realizaron para la construcción robusta de la elipse, donde se solicita etiquetar los elementos geométricos para facilitar el análisis *a posteriori* de esta actividad.

R/: El desarrollo de esta actividad se describe en las tablas 13 y 23.

4.2. Análisis de la Situación didáctica N° 2

A esta situación la componen 4 hojas de papel, dos de estas pertenecen a actividades de construcción para realizarlas en el AGD Cabri 3D y las restantes

comprenden un cuestionario acerca de las construcciones realizadas. En esta situación se abordará la construcción de las *esferas de Dandelin*, la cual, requiere una *transición de doble vía entre la geometría plana y la geometría espacial*, en conjunto con las actividades expuestas anteriormente, donde se realizará una estandarización de la construcción robusta de la elipse con la construcción de la Tabla 23, para facilitar a los estudiantes la construcción de las *esferas de Dandelin*. Por último, se solicitará realizar una demostración euclidiana con el fin de comprobar cómo se manifestó el proceso cognitivo de *visualización* a través de la *transición de doble vía entre la geometría espacial y la geometría plana* con los docentes en formación, después de abordar la sección cónica: *Elipse*, a partir de la integración del *Teorema de Dandelin* en el AGD Cabri 3D

La parte de construcción para desarrollar en el AGD Cabri 3D está compuesta por tres fases, donde cada fase tiene preguntas y/o actividades que deben realizar en la hoja del estudiante, a continuación, se presentaran los análisis *a priori* de esta situación:

FASE 1. Actividades de Construcción de las *Esferas de Dandelin* para la Elipse.

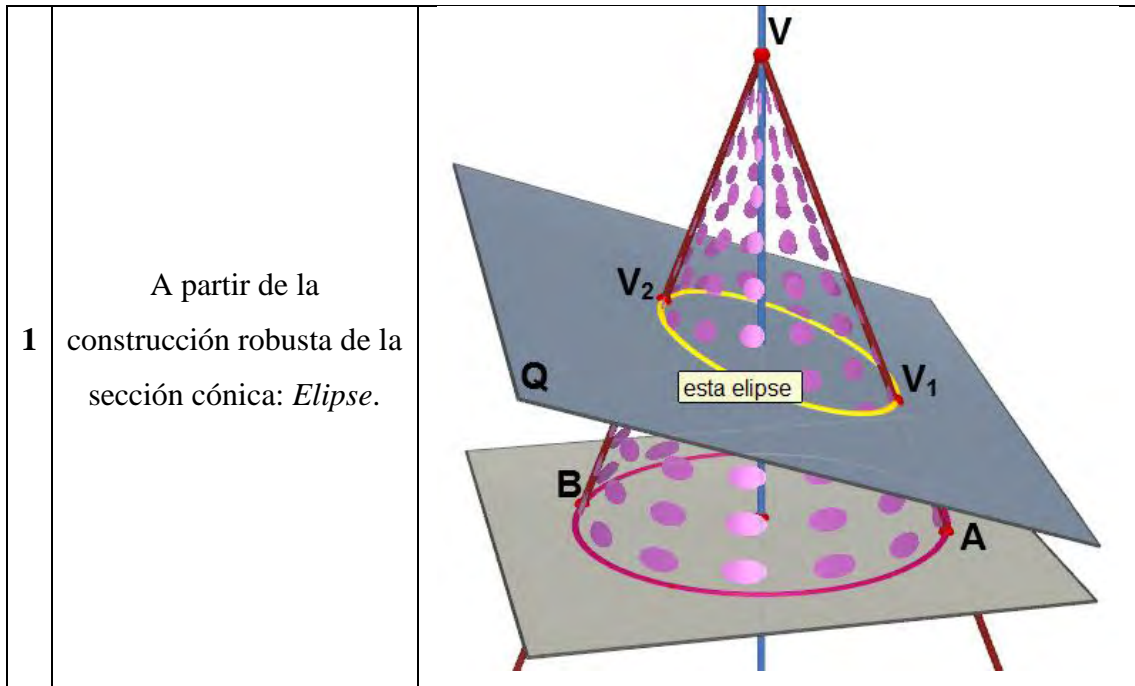
En esta fase se espera que los estudiantes realicen una transición hacia el espacio de la actividad propuesta en la fase 2 de la situación didáctica N°1, donde la circunferencia tangente y las dos semirrectas representan bidimensionalmente la esfera tangente, una generatriz del cono y el plano cortante respectivamente; en este caso el plano bisector será importante al momento de determinar los centros de las *esferas de Dandelin*, por consiguiente, se planteó la siguiente pregunta:

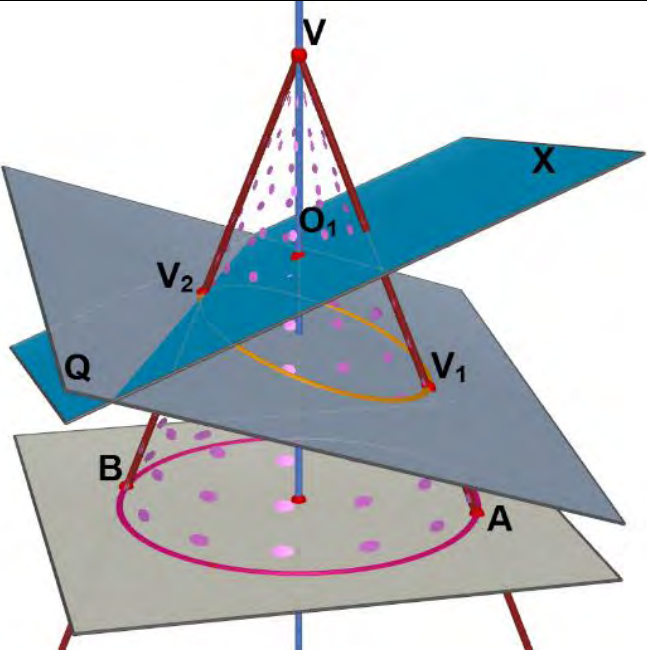
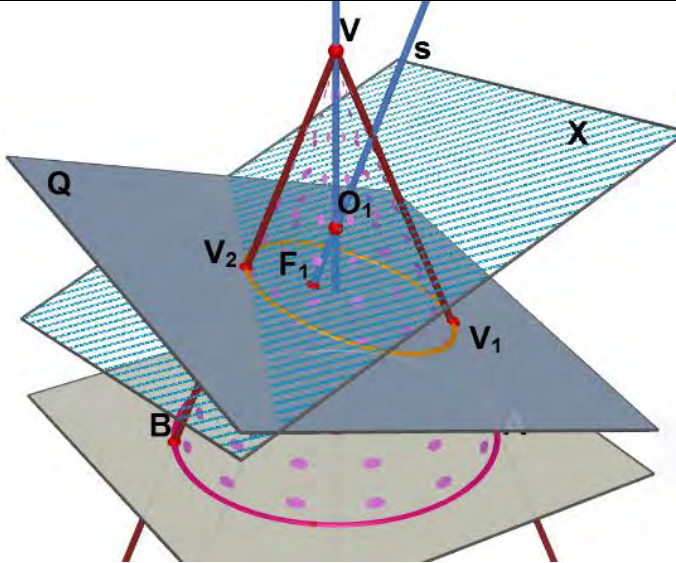
¿Cómo crees que se utiliza el plano bisector para realizar las Esferas de Dandelin a partir de la Elipse construida anteriormente?

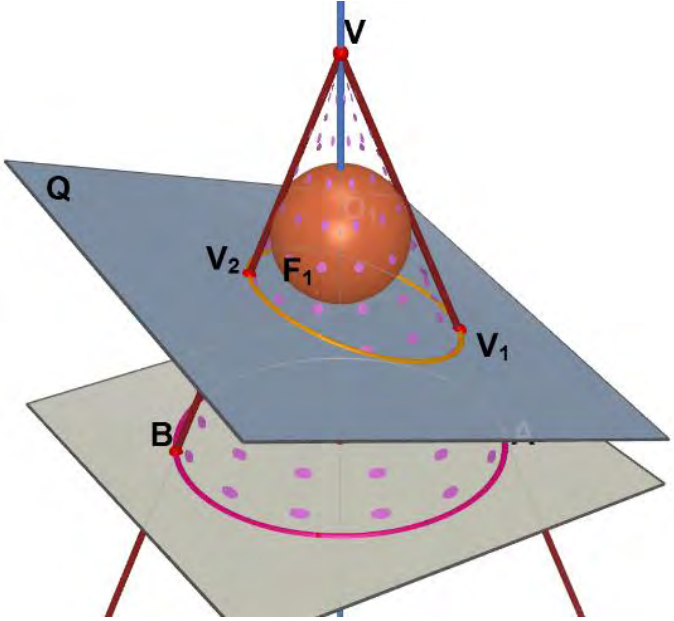
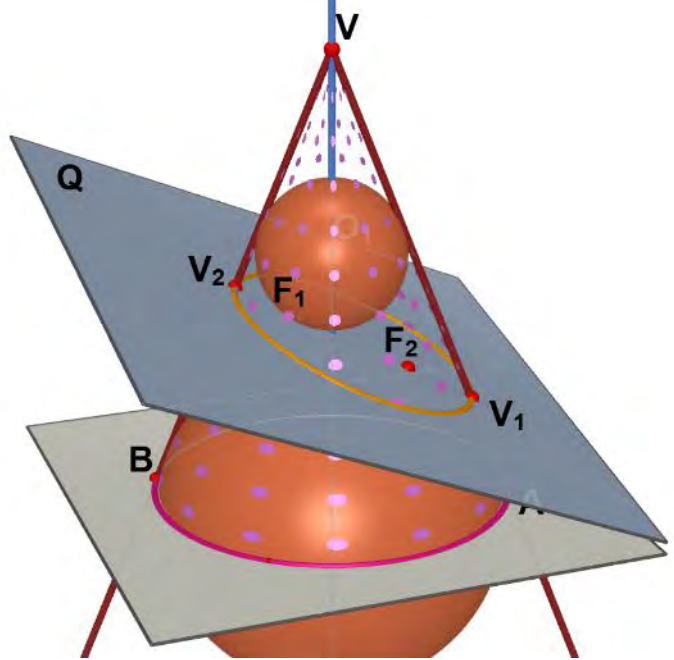
Nota: Siempre existen una o dos esferas interiores al cono que son simultáneamente tangentes al plano y al cono, cada una de estas tocan al plano de intersección en un foco de la sección cónica dichas esferas son denominadas Esferas de Dandelin.

Así, de acuerdo a las actividades que se plantearon en la anterior situación didáctica, se prevé que realicen una construcción similar a la siguiente:

*Tabla 24: Construcción de las esferas de Dandelin
(Fuente de esta investigación)*



<p>2</p>	<p>Se construye el plano bisector X definido por el ángulo diedro VV_2V_1, luego, se marca el punto de intersección del plano X con el eje del cono, denotado como O_1.</p>	
<p>3</p>	<p>Con la herramienta <i>perpendicular</i> se traza la recta perpendicular s al plano Q que pasa por O_1, luego se marca el punto de intersección del plano Q con la recta s, denotado como F_1.</p>	

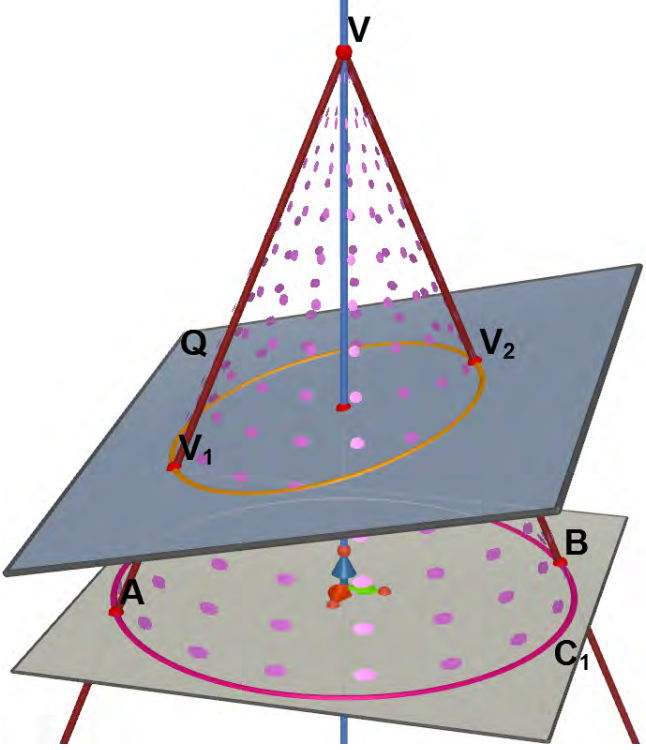
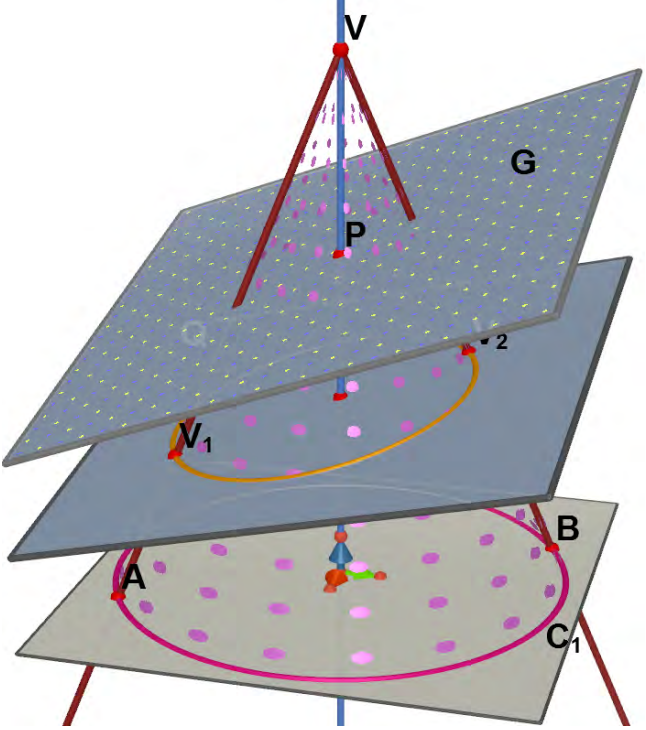
<p>4</p>	<p>Se traza la esfera con centro O_1 y radio F_1, esfera que es tangente tanto al cono como al plano cortante, definición que cumple el <i>Teorema de Dandelin</i>.</p> <p>Sin embargo, dado que una elipse tiene dos focos, falta la construcción de la esfera inferior.</p>	
<p>5</p>	<p>Para la esfera inferior se realiza los pasos anteriormente mencionados. Para ello se inicia con la construcción del plano bisector definido por el ángulo diedro V_2V_1A.</p>	

Además, la estandarización que se realizará para la sección cónica: *Elipse*, tiene la intención implícita de ubicar de una manera sencilla los planos bisectores, sin necesidad de realizar construcciones auxiliares que podrían retrasar el avance y/o crear confusiones hacia la construcción de las *esferas de Dandelin*. Sin embargo,

pueden construir planos bisectores aleatorios, es decir, que no bisequen al cono y al plano cortante, sino a otros elementos construidos, generando las siguientes construcciones:

- *Esfera tangente únicamente al cono.*

Tabla 25: Construcción de una esfera que es únicamente tangente al cono.

<p>1</p>	<p>A partir de la construcción robusta de la sección cónica: <i>Elipse</i>.</p>	
<p>2</p>	<p>Se crea un punto P por encima del plano cortante, luego se construye un plano perpendicular G a una generatriz del cono y que pase por P.</p>	

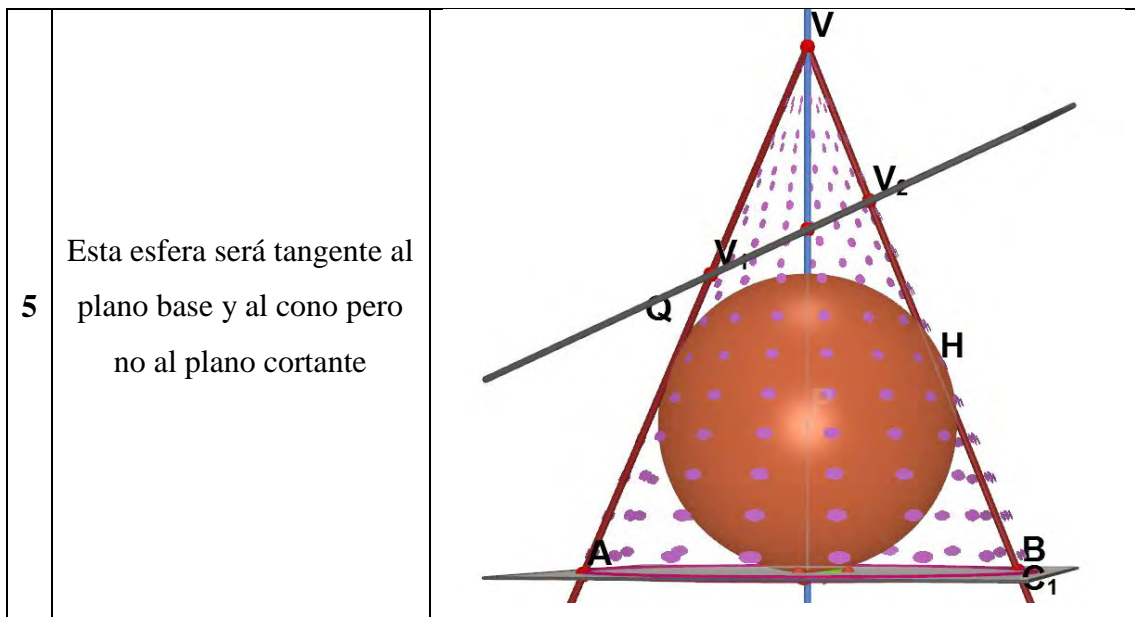
<p>3</p> <p>Se marca el punto de intersección del plano G con la generatriz anteriormente utilizada, se denota el punto como H, luego se construye una esfera con centro P y radio H</p>	
<p>4</p> <p>Esta esfera será tangente al cono pero no al plano cortante</p>	

- Esfera tangente al cono y a la base del cono.

Tabla 26: Construcción de una esfera que es tangente al cono y al plano base.

<p>1</p>	<p>A partir de la construcción robusta de la sección cónica: <i>Elipse</i>.</p>	
<p>2</p>	<p>Se construye el plano bisector G definido por los puntos V_2, B y A, luego, se marca el punto de intersección del plano G con el eje del cono, denotado como P</p>	

<p>3</p> <p>Con la herramienta <i>perpendicular</i> se traza un plano perpendicular J a la generatriz utilizada para generar el plano bisector y que pase por P. luego se marca el punto de intersección del plano J con la generatriz anterior.</p>	
<p>4</p> <p>Se construye una esfera con centro P y radio H</p>	



En cuanto a la hoja del estudiante, se pide respuestas a las siguientes preguntas:

¿Por qué crees que se utiliza el Plano Bisector para la construcción de las Esferas de Dandelin?

Esta pregunta se realiza con el fin de que los estudiantes expliquen como la propiedad de la bisectriz transita desde la geometría plana hacia la geometría espacial, por lo cual se espera que en sus respuestas se manifiesten ideas relacionadas con la siguiente:

R/: Se utiliza el plano bisector porque este proyecta la situación de la bisectriz debido a que el centro se encuentra en la bisectriz del ángulo formado por dos semirrectas, donde la generatriz del cono y el plano cortante, observados desde un punto de vista bidimensional representan las semirrectas tangentes a la circunferencia, que en este caso dicha circunferencia será la esfera de Dandelin.

Al completar la construcción de las Esferas de Dandelin ¿Qué objetos geométricos cumplen con la propiedad de tangencia?

Las diferentes actividades de tangencia siempre se desarrollan en la geometría plana, por lo tanto, esta pregunta tiene el objetivo de analizar si los estudiantes pueden comprender el concepto de tangencia desde la geometría espacial y así respondan de la siguiente manera:

R/: Los objetos geométricos que cumplen con la propiedad de tangencia son: el cono con las esferas y el plano cortante con las esferas.

Sin embargo, se pueden generar respuestas erróneas ya que pueden decir que los objetos geométricos son las circunferencias que se forman con la intersección de las esferas y el cono, o los puntos de contacto de las esferas con el plano cortante; esto puede suceder porque no comprenden la pregunta y responden con los objetos geométricos que se generan con los objetos tangentes o simplemente, pueden obviar la tangencia que existe entre el cono y las esferas, debido a que se genera una curva y generalmente la tangencia en la geometría plana representa un punto.

FASE 2. Actividad de Construcción del Teorema de Dandelin.

En esta fase, se realiza las construcciones auxiliares del *Teorema de Dandelin* para que el estudiante observe las propiedades que Dandelin utilizó para demostrar la propiedad intrínseca de la sección cónica: *Elipse*.

Construcciones auxiliares para la demostración del Teorema de Dandelin:

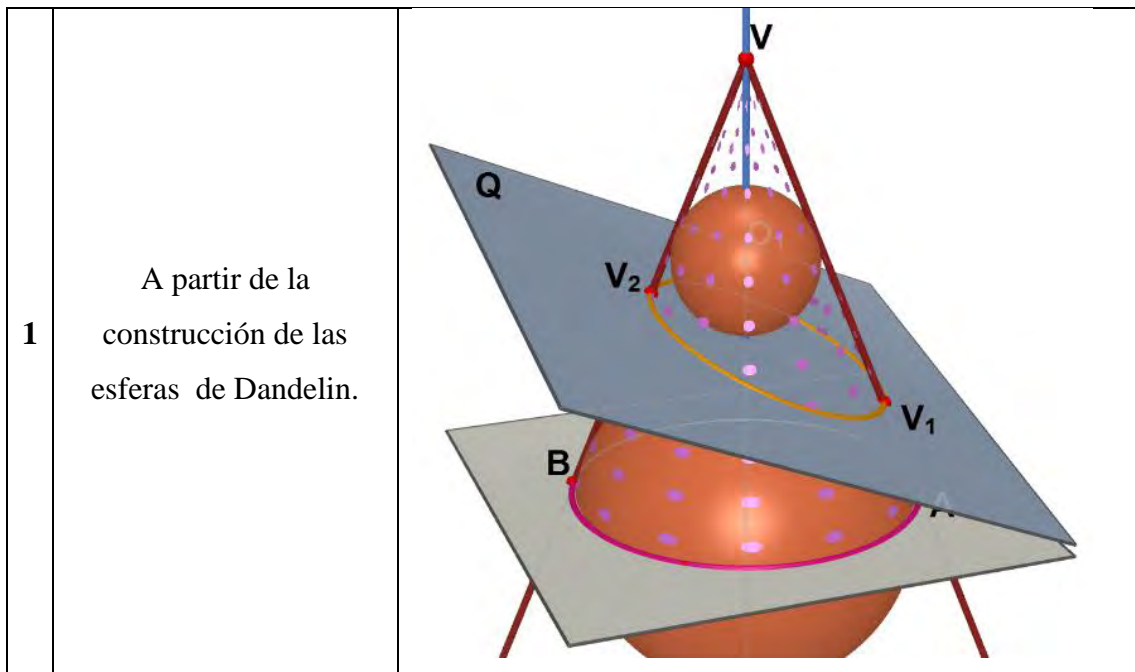
Se espera que los docentes en formación puedan ubicar los elementos que se generan a partir de la tangencia de las esferas con el plano cortante y las esferas con el cono, es decir, se prevé que los estudiantes utilicen el teorema 7.13 para la

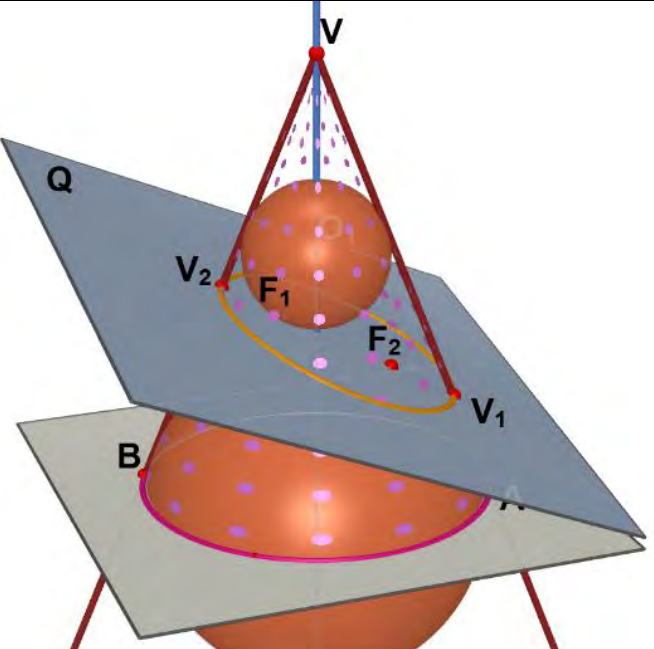
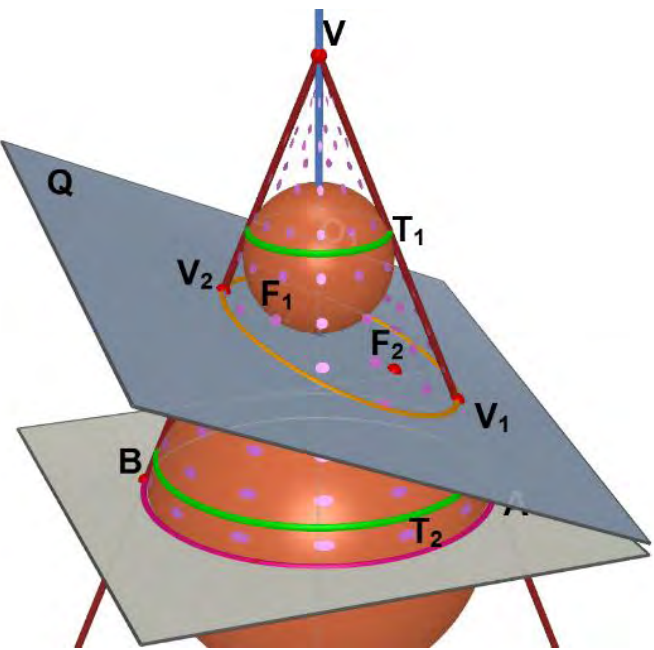
localización de los focos de la sección cónica: *Elipse*, además de localizar las circunferencias tangentes, utilizando la herramienta *circunferencia*.

Cabe mencionar que durante la construcción de las *esferas de Dandelin*, se pueden localizar los focos de la sección cónica: *Elipse* mediante el teorema 7.13, utilizando como radio una recta perpendicular al plano cortante, sin embargo, en caso de obtener el radio de la esfera a través de una generatriz, se presenta la siguiente construcción para localizarlos:

Tabla 27: Posibles construcciones para la localización de los focos y las circunferencias tangentes.

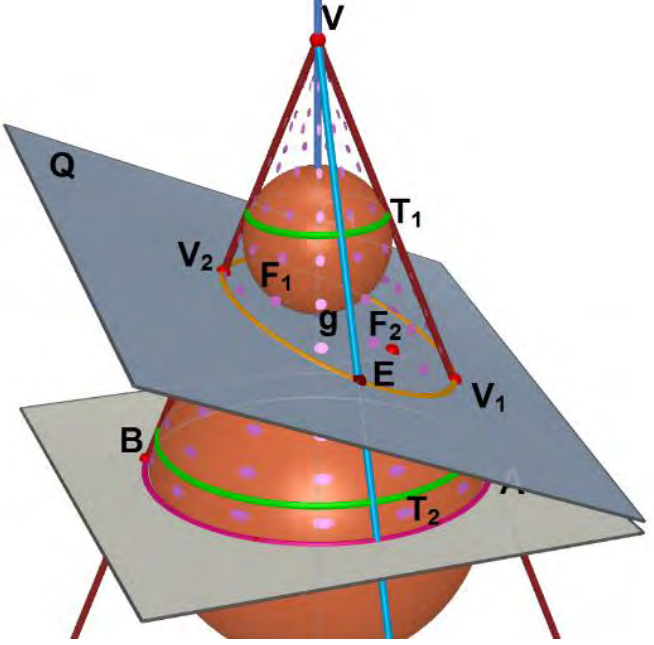
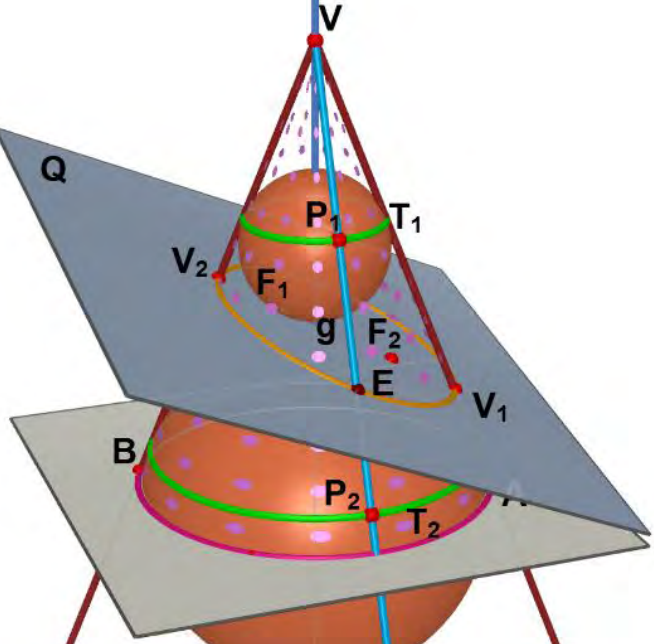
(Fuente de esta investigación)

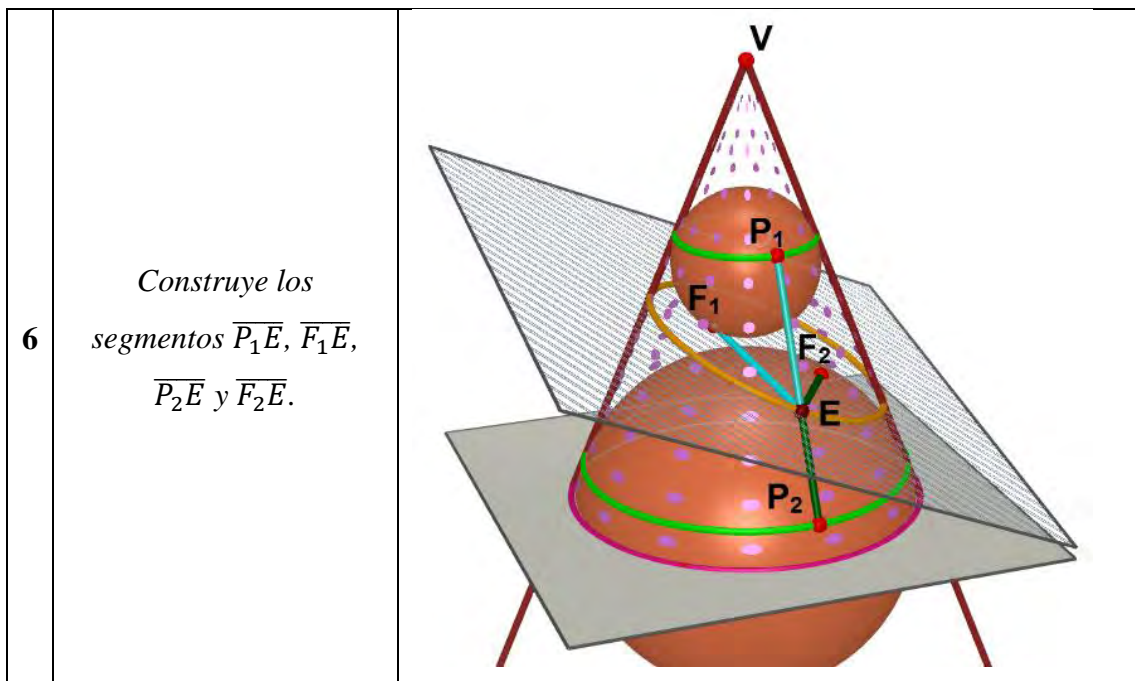


<p>2</p>	<p>Denota los puntos de tangencia de las esferas con el plano cortante como F_1 para la esfera superior y como F_2 para la esfera inferior.</p> <p>Para realizar F_1 y F_2, se trazan rectas perpendiculares al plano cortante que pasen por el centro de cada esfera.</p>	
<p>3</p>	<p>Traza las circunferencias que se forman por la intersección del cono con las esferas de Dandelin.</p> <p>Para trazar las circunferencias T_1 y T_2 que surgen a partir de la tangencia entre el cono y las esferas, se realizan mediante la construcción de una circunferencia centrada en el eje del cono y que pasa por el punto de intersección entre la esfera y una directriz del cono.</p>	

La localización de los focos y las circunferencias tangentes, serán primordiales al momento de realizar las construcciones auxiliares del *Teorema de Dandelin*,

Tabla 28: Construcciones auxiliares del Teorema de Dandelin
(Fuente de esta investigación)

<p>4</p>	<p>Crea un punto E sobre la <i>Elipse</i>, luego crea una <i>semirrecta g</i> desde el <i>vértice del cono</i> al punto E.</p>	
<p>5</p>	<p>Marca los puntos de intersección de la <i>recta g</i> con las <i>circunferencias tangentes</i> y etiquételos como P_1 y P_2.</p>	



Sin embargo, puede ocurrir que los estudiantes recurran a la herramienta *curva de intersección* para denotar los objetos geométricos que se generan con los objetos de tangencia, acción que no se puede realizar debido a que la herramienta “*curva intersección*” del AGD Cabri 3D solo funciona bajo ciertas combinaciones de figuras geométricas. Por lo tanto, se requiere construcciones auxiliares para la determinación de los elementos solicitados.

En cuanto a la hoja del estudiante, se pide respuesta a la siguiente pregunta:

En la Ilustración de la fase 2, E es un punto arbitrario de la elipse. Los segmentos $\overline{F_1E}$ y $\overline{P_1E}$ son congruentes, además, $\overline{F_2E}$ y $\overline{P_2E}$ también lo son. ¿Cuál es la razón geométrica para que suceda lo anterior?

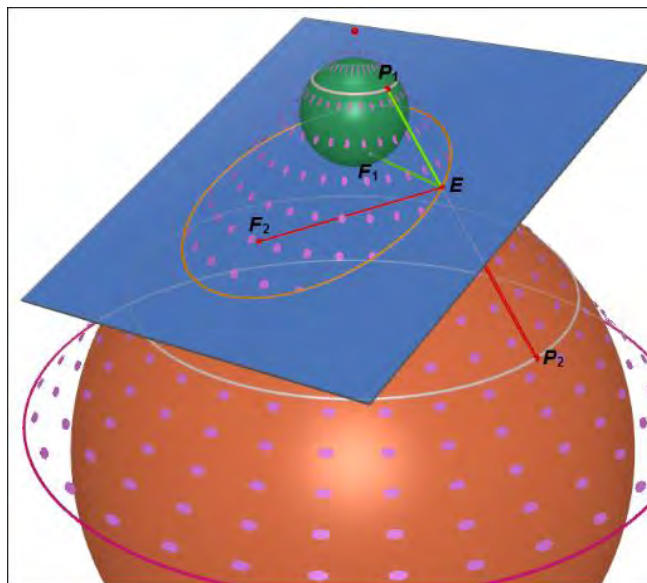


Figura 20: Ilustración de la fase 2

Esta actividad se plantea para que el estudiante realice una transición a la geometría plana y *visualice* circunferencias y segmentos que cumplan con el siguiente teorema (Hemmerling, 2002):

Teorema 7.13: Los segmentos tangentes desde un punto externo a un círculo son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que pasa por el punto y el centro del círculo.

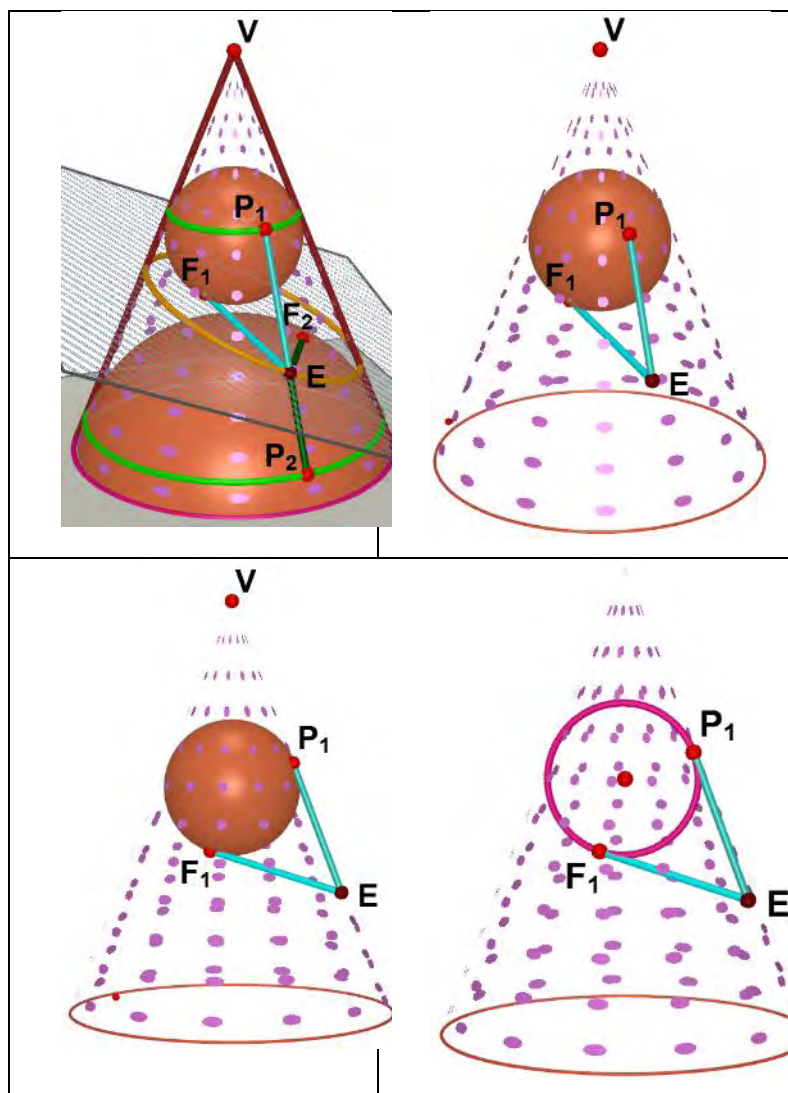


Figura 21: Transición de las esferas de Dandelin a la geometría plana
(Fuente de esta investigación)

Por lo que se prevé, que respondan de la siguiente manera:

R/: Realizando un corte transversal, se obtiene dos circunferencias, además, los segmentos $\overline{F_1E}$ y $\overline{P_1E}$, $\overline{F_2E}$ y $\overline{P_2E}$ pertenecen a rectas tangentes a unas circunferencias respectivamente, por lo tanto, se determina que $\overline{F_1E}$ y $\overline{P_1E}$ son segmentos congruentes, al igual que $\overline{F_2E}$ y $\overline{P_2E}$, por el teorema que enuncia: si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos tangentes a la circunferencia, se

determinan segmentos congruentes con las rectas tangentes que pasan por el punto exterior.

Además, pueden traer a colación el teorema (Hemmerling, 2002) que enuncia:

Teorema 5.19: Si dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa y uno de los ángulos agudos de uno respectivamente congruentes a la hipotenusa y uno de los ángulos agudos del otro, los triángulos son congruentes.

Y así, podrían responder de la siguiente manera:

R/ Por teorema tenemos que los radios $\overline{OP_1}$ y $\overline{OF_1}$ son perpendiculares a los segmentos tangentes $\overline{P_1E}$ y $\overline{F_1E}$ respectivamente, por tanto se tiene dos triángulos rectángulos ΔOP_1E y ΔOF_1E , además el plano bisector biseca el $\angle P_1EF_1$, por lo tanto $\angle P_1EO \cong \angle OF_1E$ y $\overline{OE} \cong \overline{OE}$, así por teorema de congruencia de triángulos rectángulos, tenemos que: $\Delta OP_1E \cong \Delta OF_1E$, es decir $\overline{P_1E} \cong \overline{F_1E}$. Lo mismo sucede con la segmentos $\overline{P_2E}$ y $\overline{F_2E}$.

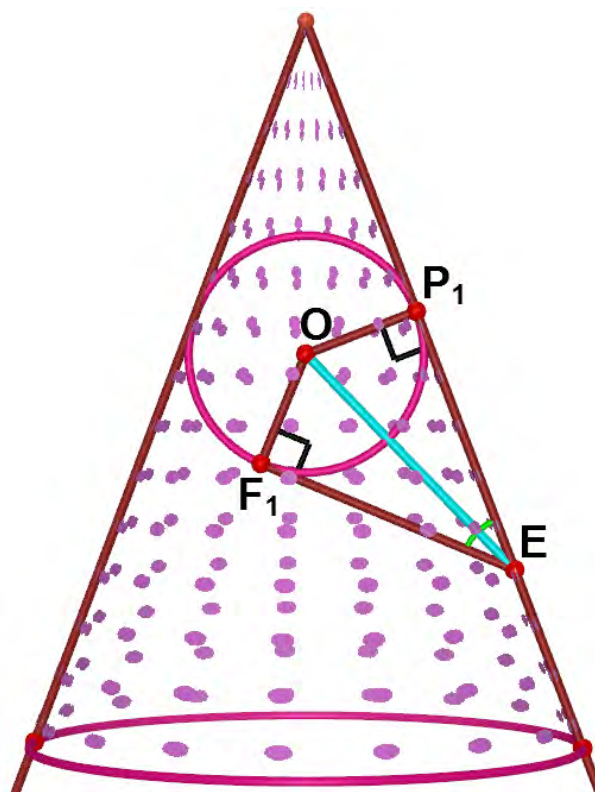


Figura 22: Respuesta a la incógnita mediante el teorema 5.19.

(Fuente de esta investigación)

De igual manera, existe la posibilidad de que los estudiantes resuelvan la incógnita mediante el teorema que es enunciado por Hemmerling (2002) de la siguiente manera:

Teorema 4.14: Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado incluido de uno congruentes a los dos ángulos y el lado incluido correspondiente del otro, los triángulos son congruentes.

Con lo cual, podría surgir la siguiente respuesta:

R/ Por teorema tenemos que los radios $\overline{OP_1}$ y $\overline{OF_1}$ son perpendiculares a los segmentos tangentes $\overline{P_1E}$ y $\overline{F_1E}$ respectivamente, por tanto se tiene dos triángulos rectángulos ΔOP_1E y ΔOF_1E , además el plano bisector biseca el $\angle P_1EF_1$, por lo tanto $\angle P_1EO \cong \angle OF_1E$ y $\overline{OE} \cong \overline{OE}$, dado que la suma de las medidas de los ángulos de un

triángulo es 180° se deduce que $\angle F_1OE \cong \angle P_1OE$, así por el teorema de congruencia de triángulos A.L.A. se tiene que: $\Delta OP_1E \cong \Delta OF_1E$, de ahí que $\overline{P_1E} \cong \overline{F_1E}$. Lo mismo sucede con la segmentos $\overline{P_2E}$ y $\overline{F_2E}$.

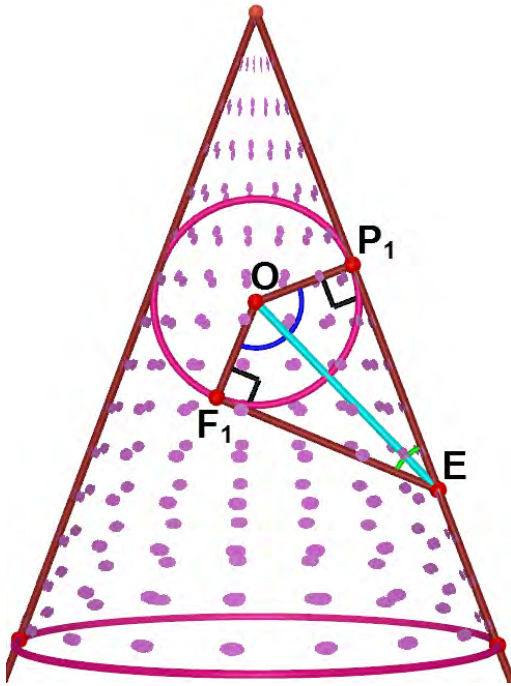


Figura 23: Respuesta a la incógnita mediante el teorema 4.14.

(Fuente de esta investigación)

Una respuesta similar a la anterior surgiría si se utiliza el postulado enunciado por Hemmerling (2002) de la siguiente manera:

Postulado 17 (el postulado L.A.L.): Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo que forman en uno son, respectivamente, congruentes a los dos lados y el ángulo que forman en el otro.

Con lo cual se podría obtener la siguiente respuesta:

R/ Por definición de circunferencia, se tiene que todos sus radios son congruentes, es decir, $\overline{OP_1} \cong \overline{OF_1}$, además, por teorema tenemos que los radios $\overline{OP_1}$ y $\overline{OF_1}$ son perpendiculares a los segmentos tangentes $\overline{P_1E}$ y $\overline{F_1E}$ respectivamente, por tanto se tiene dos triángulos rectángulos ΔOP_1E y ΔOF_1E , además el plano bisector biseca el

$\angle P_1EF_1$, por lo tanto $\angle P_1EO \cong \angle OEF_1$ y $\overline{OE} \cong \overline{OE}$, dado que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180° se deduce que $\angle F_1OE \cong \angle P_1OE$, así por el postulado de congruencia de triángulos L.A.L. se tiene que: $\triangle OP_1E \cong \triangle OF_1E$, de ahí que $\overline{P_1E} \cong \overline{F_1E}$. Lo mismo sucede con la segmentos $\overline{P_2E}$ y $\overline{F_2E}$.

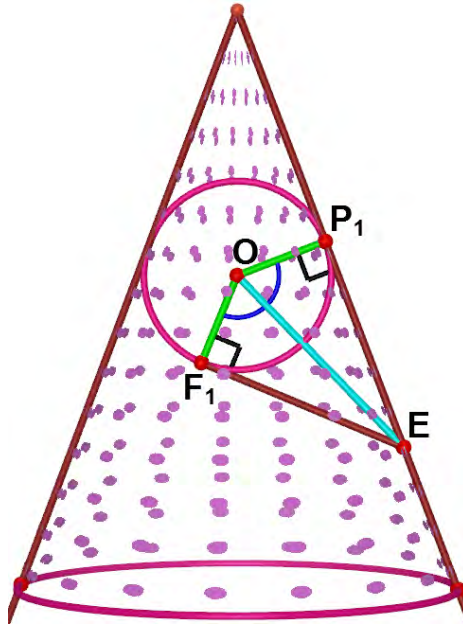


Figura 24: Respuesta a la incógnita mediante el postulado L.A.L.

(Fuente de esta investigación)

FASE 3. Demostración del Teorema de Dandelin.

En la ilustración, E es un punto arbitrario de la elipse. Los segmentos $\overline{F_1E}$ y $\overline{P_1E}$ son congruentes, además, $\overline{F_2E}$ y $\overline{P_2E}$ también lo son, ¿Por qué crees que sucede esto?

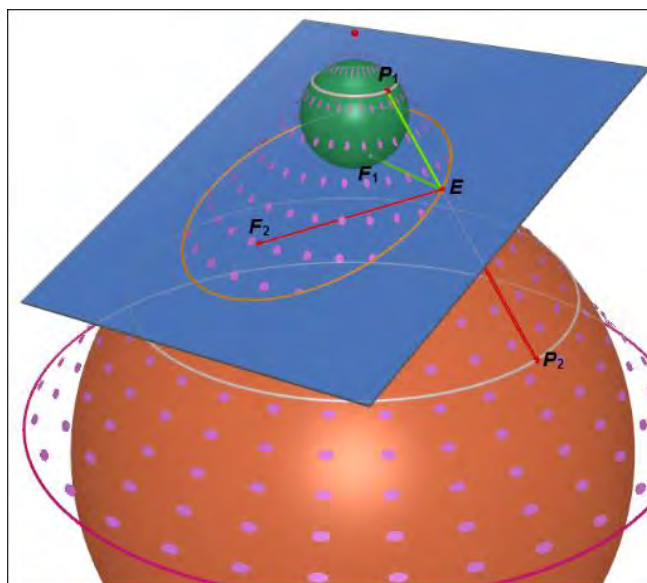


Figura 25: Ilustración auxiliar para la demostración del Teorema de Dandelin

Recuerda que: una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante.

Esta pregunta se volverá a plantear con la intención de que los estudiantes encuentren la importancia de esta propiedad y junto con la definición de Elipse como lugar geométrico (Lehmann, 2002) lleguen a la demostración del *Teorema de Dandelin*.

En cuanto a la hoja del estudiante, se solicitará escribir la demostración euclidiana del *Teorema de Dandelin*, para verificar si utilizaron las propiedades que se presentan en la secuencia didáctica.

Realiza una Demostración Euclidiana (Doble Columna) para el Teorema de Dandelin.

Para esta actividad se prevé que los docentes en formación respondan de la siguiente manera, debido a que en el curso de *Geometría Euclídea* que ofrece el

programa de la Licenciatura en Matemáticas se realizaba demostraciones a doble columna, donde se debía especificar que propiedades o teoremas se utilizaba para cada afirmación:

R/:

Hipótesis: F_1 y P_1 son puntos de tangencia de la esfera D_1
 F_2 y P_2 son puntos de tangencia de la esfera D_2

Conclusión: $\overline{F_1 E} + \overline{F_2 E} = K$

Tabla 29: Demostración del Teorema de Dandelin

	PROPOSICIONES	RAZONES
1	F_1 y P_1 son puntos de tangencia de la esfera D_1 F_2 y P_2 son puntos de tangencia de la esfera D_2	Hipótesis
2	$\overline{P_1 E} \cong \overline{F_1 E}$ $\overline{P_2 E} \cong \overline{F_2 E}$	Teorema 7.13
		Teorema 5.19
		Teorema 4.14
		Postulado L.A.L.
3	$m\overline{P_1 E} = m\overline{F_1 E}$ $m\overline{P_2 E} = m\overline{F_2 E}$	Definición de segmentos congruentes
4	$m\overline{P_1 E} + m\overline{P_2 E} = m\overline{F_1 E} + m\overline{F_2 E}$	Propiedad de la adición de los números reales
5	$m\overline{P_1 E} + m\overline{P_2 E} = m\overline{P_1 P_2}$	Definición de un punto entre otros dos
6	$m\overline{P_1 P_2} = K$ donde K es una constante	Definición de cono truncado
7	$m\overline{F_1 E} + m\overline{F_2 E} = K$ donde K es una	Propiedad de

	constante	sustitución (proposición 5 en 3)
--	-----------	-------------------------------------

De lo anterior, se concluye que Dandelin llegó a la definición de la sección cónica: *Elipse* como lugar geométrico, definición que Lehmann (2002) plantea de la siguiente manera:

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante.

La anterior definición en una hoja de papel no es intuitiva debido a que no se puede representar el movimiento de un punto, sin embargo, cobra sentido en el AGD Cabri 3D debido a que ofrece la capacidad de manipular de manera dinámica el punto *E*, que genera el lugar geométrico de la sección cónica: *Elipse*.

CAPITULO 5

EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS *A POSTERIORI*

En este apartado se mostrará lo relacionado con la experimentación de las situaciones didácticas desarrolladas por docentes en formación, se analizará los datos recolectados para confrontarlos con los análisis *a priori* y mediante esta confrontación realizar una síntesis que permita analizar cómo se manifestó el proceso cognitivo de *visualización a través de la transición de doble vía entre la geometría espacial y la geometría plana* cuando abordaron la sección cónica: *Elipse*, a partir del *Teorema de Dandelin* en el AGD Cabri 3D

5.1. Caracterización de la población y descripción de la experimentación

La experimentación de este trabajo de investigación se realizó con seis (6) estudiantes²⁸ del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño de la ciudad de San Juan de Pasto, Colombia. Docentes en formación que ya han aprobado los cursos de *Geometría Euclídea* y *Geometría Analítica* que ofrece el programa de la licenciatura, en el primer y segundo semestre respectivamente; los estudiantes que participaron en esta investigación cursaban diferentes semestres y sus edades oscilaban entre veinte (20) y veintitrés (23) años.

²⁸ Los apellidos de los estudiantes que participaron en esta investigación, fueron cambiados por apellidos ficticios, siguiendo los procedimientos éticos normales de una investigación educativa.

Tabla 30: Docentes en formación que desarrollaron la secuencia didáctica

	Apellidos	Semestre
1	Palacios	10
2	González	4
3	Villota	4
4	Morales	8
5	Acosta	10
6	Zambrano	10

Las situaciones didácticas fueron desarrolladas en horas de la mañana los días 24 y 25 de junio de 2015, en el aula de informática de la Universidad de Nariño, el cual contó con el AGD Cabri 3D y el programa CamStudio que fue instalado por parte de los investigadores. Es importante mencionar que los docentes en formación ya habían tenido experiencia en el uso del AGD Cabri 3D a través de los cursos de *TIC en Educación Matemática I* y *TIC en Educación Matemática II*, cursos que promueven la integración de las nuevas tecnologías en el aula de clase, lo que significa que los estudiantes estaban familiarizados con algunas herramientas del AGD.

Para desarrollar la secuencia didáctica se acordó con los participantes realizar las actividades de cada fase en el AGD Cabri 3D y sus respectivos interrogantes en la hoja del estudiante, el registro de la actividad se realizó mediante videos obtenidos con CamStudio, fotografías y las respuestas que se registraron en la hoja del estudiante por parte de los docentes en formación. De este registro, se especificarán las respuestas que no se tuvieron en cuenta en los análisis *a priori* y las respuestas que tengan similitudes se las generalizara mediante una única respuesta.

5.2. Análisis A Posteriori

En este análisis se examinarán las respuestas expresadas por parte de los docentes en formación confrontándolas con lo previsto en los análisis *a priori*, donde el desarrollo de la secuencia didáctica se realizó en su totalidad debido al interés por parte de los participantes de la experimentación y la culminación en el tiempo establecido, sin embargo, el único percance fue la ausencia de un estudiante en la situación didáctica N° 2.

Tabla 31: Ejecución de la Situación Didáctica N°1.

Fecha	Fases	Número de estudiantes	Duración a priori	Duración experimentación
24 de junio de 2015	FASE 1. Actividades de Construcción geométrica del cono y los cortes con un plano para generar elipses.	6	30 minutos	20 minutos
	FASE 2. Transición de doble vía: Construcción del Plano Bisector.	6	1 hora y 30 minutos	50 minutos
	FASE 3. Actividad de Construcción de la Elipse.	6	1 hora	45 minutos

Tabla 32: Ejecución de la Situación Didáctica N°2.

Fecha	Fases	Número de estudiantes	Duración <i>a priori</i>	Duración experimentación
25 de junio de 2015	FASE 1. Actividades de Construcción de las <i>Esferas de Dandelin</i> para la Elipse.	5	1 hora y 30 minutos	1 hora y 50 minutos
	FASE 2. Actividad de Construcción del <i>Teorema de Dandelin</i> .	5	45 minutos	45 minutos
	FASE 3. Demostración del <i>Teorema de Dandelin</i> .	5	45 minutos	20 Minutos

5.2.1. Situación didáctica N° 1

FASE 1. Actividades de Construcción geométrica del cono y los cortes con un plano para generar elipses.

Se observó que, aunque la mayoría de los docentes en formación activaron la opción *ayuda*, tenían la instrumentación necesaria para desarrollar las actividades propuestas, por lo tanto, estas se desarrollaron en un tiempo menor al previsto en los análisis *a priori* (Ver Tabla 31).

En esta fase los estudiantes debían realizar las siguientes construcciones:

- *Construir geoméricamente un cono circular recto con la herramienta “Cono”:*

Con respecto a esta actividad, se observó que la mayoría de los estudiantes tenían claro el concepto de cono circular recto. Se piensa que pudo ser causa de haber cursado los cursos Geometría Euclídea y Geometría Analítica, de ahí que no tuvieron

dificultades al momento de realizar la construcción, además, todos los estudiantes realizaron finalmente una construcción propuesta en los análisis *a priori*, la alternativa de la Tabla 5, se cree que esta construcción se realizó debido a que es la más sencilla, porque emplea herramientas básicas del AGD Cabri 3D.

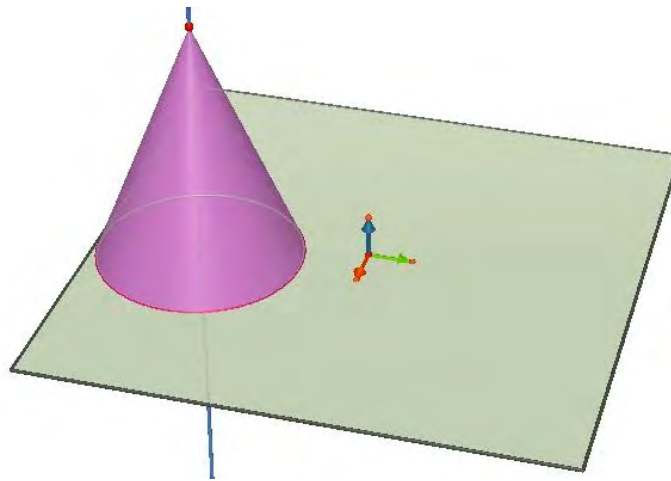


Figura 26: Construcción del cono circular recto

Sin embargo, Palacios y Morales antes de realizar la construcción correcta, cometieron los errores que se habían previsto en los análisis *a priori*, construyeron el “cono aplanado”, esto ocurrió debido a que colocaron un punto arbitrario en la extensión del plano y no recordaban aún el concepto de cono circular recto, el cual dice que la base del cono es una circunferencia y el punto vértice debe pertenecer a la recta perpendicular al centro de la circunferencia (Ver Figura 28), en un segundo intento, Morales construyó un cono circular no recto, este error pudo haber sucedido debido a que se dejó llevar por la figura, la cual desde su perspectiva se asemejaba a un cono circular recto, sin embargo al cambiar la perspectiva del cono se hacía notar que no era un cono circular recto, dado que no cumplía con la definición. (Ver figura 27).

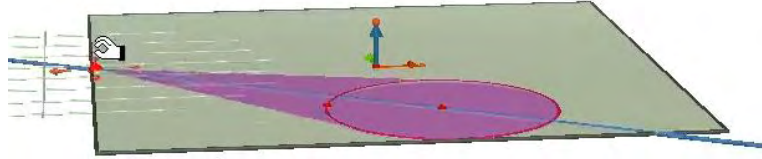


Figura 27: Cono Aplanado

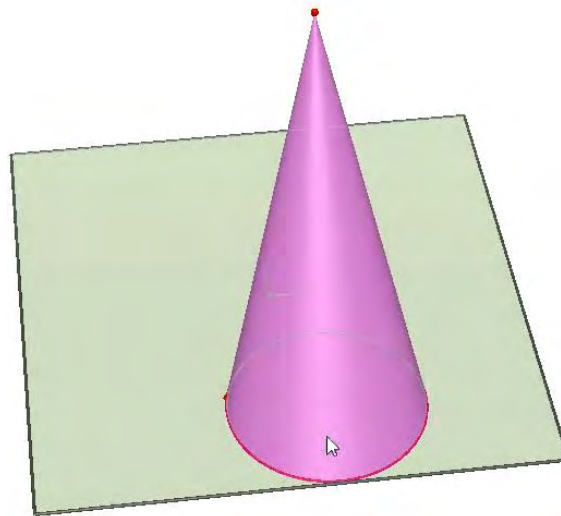


Figura 28: Cono circular no recto.

- *Construir geoméricamente la elipse como corte de un cono:*

En esta actividad, la mayoría de los participantes realizaron la construcción de la Tabla 10. Se previó esta construcción de la elipse, debido a que manteniendo fijos los puntos sobre el plano base, el punto que vive en el cono determina la inclinación del plano y además siempre cortara al cono para formar secciones cónicas señaladas como Elipses, sin realizar construcciones auxiliares.

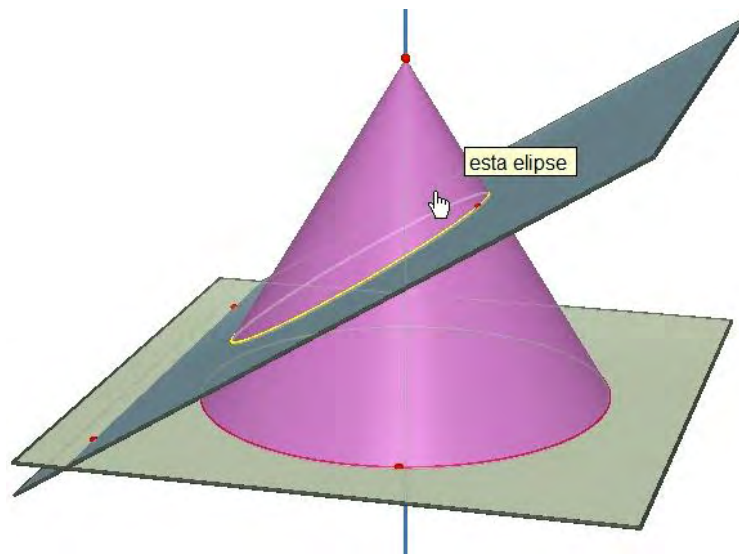


Figura 29: Construcción de la Elipse.

Sin embargo, surgieron construcciones correctas no previstas, Zambrano empleó la herramienta *plano bisector* sobre tres puntos aleatorios en el espacio de tal forma que seccionara al cono; y Morales realizó un plano sobre una recta que pasa por el eje del cono y un punto sobre la circunferencia (base del cono). Se cree que estas alternativas se dieron debido a que se solicitó una elipse cualquiera sin restringir el uso de las herramientas que tiene el AGD Cabri 3D, lo cual permitió que los estudiantes experimentaran con estas herramientas.

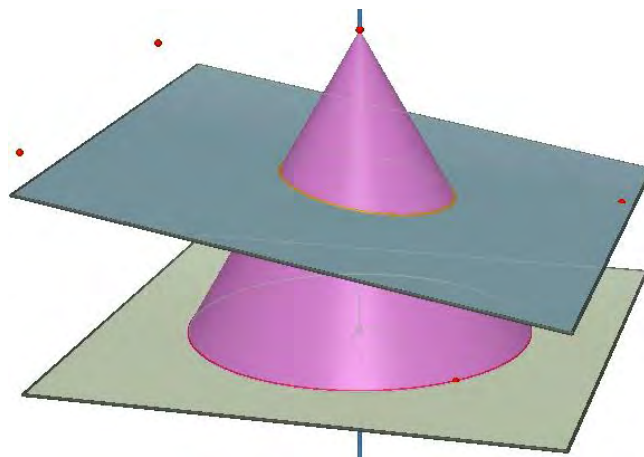


Figura 30: Elipse generado por medio de un plano bisector aleatorio

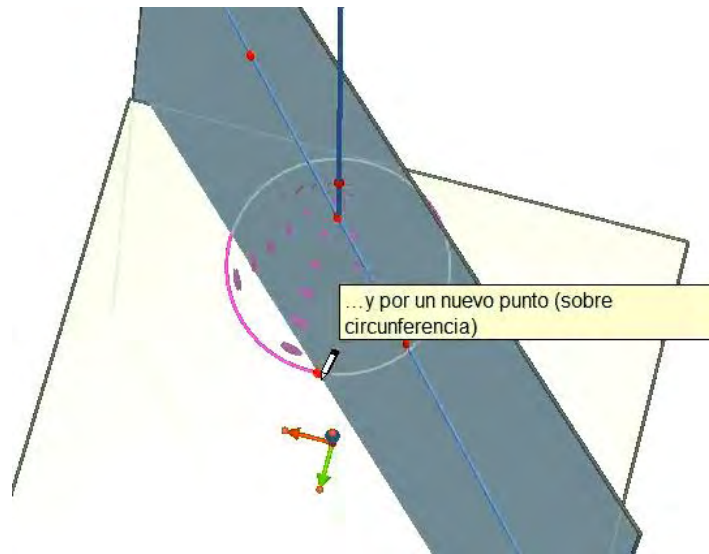


Figura 31: Elipse generada por un plano que pasa por una recta y un punto

- *Construir geoméricamente la Circunferencia como corte de un cono:*

En esta actividad, todas las construcciones realizadas por los estudiantes emplearon los conceptos de perpendicularidad y paralelismo, propuestas en los análisis *a priori*. Sin embargo, algunos estudiantes antes de lograr una construcción correcta intentaron ajustar la inclinación del plano para obtener la circunferencia, al no tener éxito mediante esta manipulación se vieron forzados a realizar una construcción que mantenga las propiedades del plano cortante para generar una circunferencia.

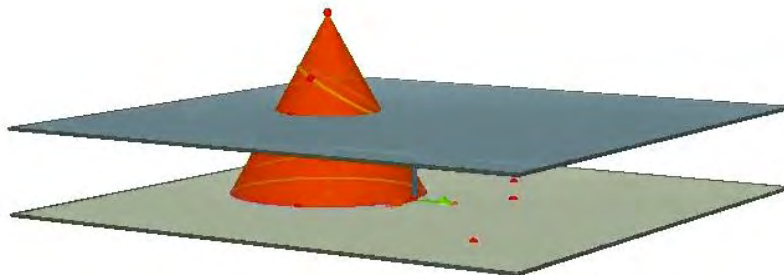


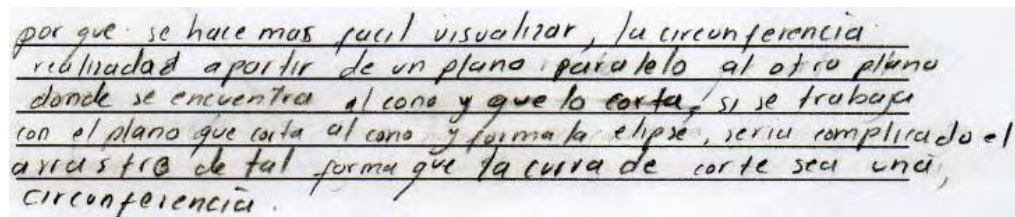
Figura 32: Construcción de la circunferencia.

Finalmente, al analizar las construcciones, se pudo observar que los estudiantes comprenden la propiedad que determina la construcción de la circunferencia, obteniendo implícitamente una construcción robusta.

Por otra parte, el interrogante que se planteó en la hoja del estudiante para esta fase fue:

¿Por qué crees que es necesario realizar una construcción aparte para la Circunferencia, teniendo en cuenta que la circunferencia es un caso particular de la Elipse?

La mayoría de las respuestas expresadas en este interrogante hicieron alusión a la noción de precisión y llegaron a la conclusión de que es imposible obtener la circunferencia mediante la manipulación del plano mediante el arrastre. Curiosamente en ninguna de las respuestas se mencionó de manera explícita el concepto de construcción robusta, sin embargo, todos hicieron alusión a esta.



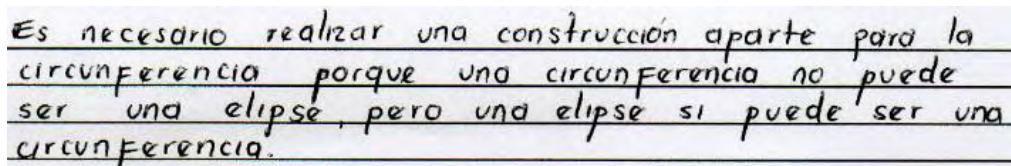
por que se hace mas facil visualizar, la circunferencia realizada a partir de un plano paralelo al otro plano donde se encuentra al cono y que lo corta, si se trabaja con el plano que corta al cono y forma la elipse, sería complicado el arrastre de tal forma que la curva de corte sea una circunferencia.

Figura 33: Respuesta de Palacios al interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°1.

Transcripción de la respuesta expresada por Palacios (Figura 33):

Porque se hace más fácil visualizar, la circunferencia realizada a partir de un plano paralelo al otro plano donde se encuentra el cono que lo corta, si se trabaja con el plano que corta al cono y forma la elipse, sería complicado el arrastre de tal forma que la curva de corte sea una circunferencia.

Por otra parte, la respuesta de Villota expresa una concepción diferente, dado que su respuesta no expresó en ningún sentido el concepto de *construcción robusta*, además, no consideró las construcciones que realizó para responder a esta pregunta, con lo cual no logró visualizar que una circunferencia es una elipse la cual tiene sus dos focos en el mismo lugar, además, este hecho expresa que la definición de circunferencia limita a los estudiantes a pensar que existe un único foco para esta sección cónica.



Es necesario realizar una construcción aparte para la circunferencia porque una circunferencia no puede ser una elipse, pero una elipse si puede ser una circunferencia.

Figura 34: Respuesta de Villota al interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°1.

FASE 2. Transición de doble vía: construcción del Plano Bisector.

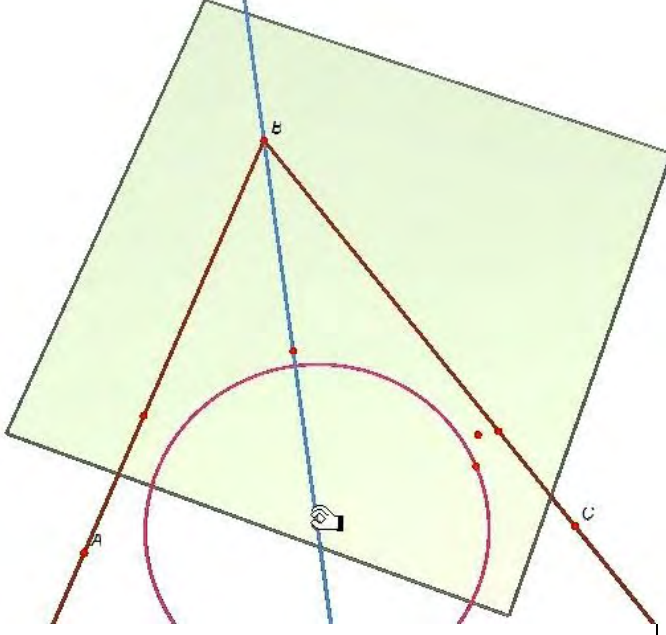
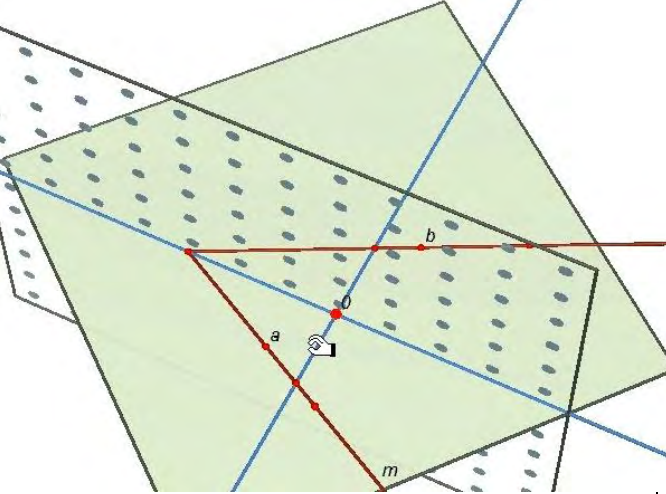
Se abordó el plano bisector mediante el desarrollo de un instructivo que se encontraba en la situación didáctica, además, de ser presentado y desarrollado por parte de los investigadores, ya que comúnmente el plano bisector es un término tridimensional que no se trabaja, además es un concepto de gran relevancia porque extiende la definición de bisectriz hacia el espacio, el cual representa un papel fundamental en la construcción de las *esferas de Dandelin*. A partir de la construcción del plano bisector, se solicitó a los estudiantes realizar un par de construcciones:

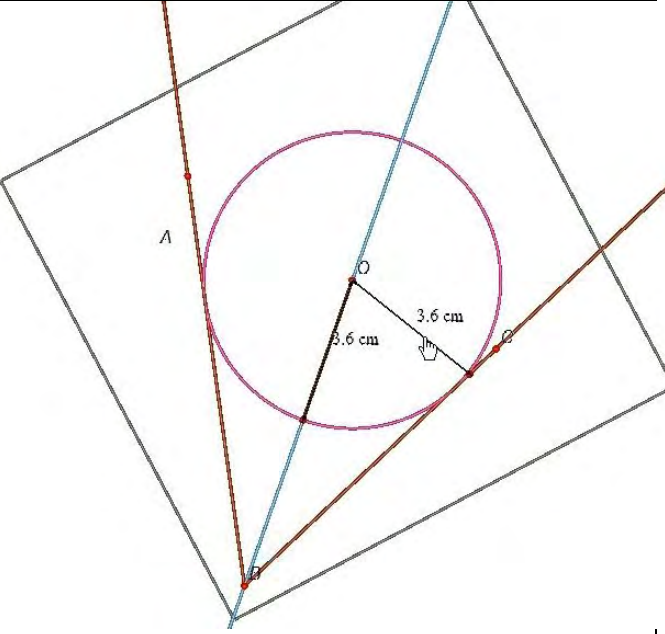
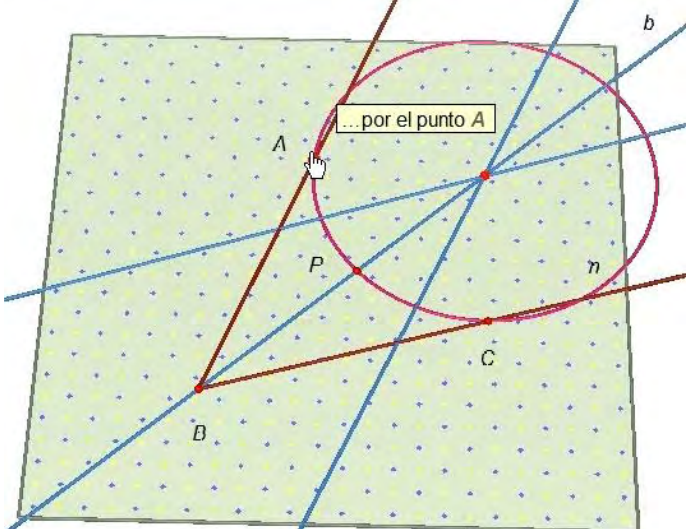
Una circunferencia tangente cualquiera a las semirrectas m y n .

Se observó que Palacios y Zambrano recordaron inmediatamente el teorema 7.12 y realizaron la construcción de la Tabla 19, mencionada en los análisis *a priori*, sin embargo, mientras los demás participantes recordaban el teorema, utilizaron

diferentes procesos (Tabla 33) para llegar a la construcción correcta, donde la retroalimentación ofrecida por el AGD Cabri 3D desempeñó un papel importante porque permitió que los docentes en formación interactuaran mediante el arrastre, tal como fue previsto en los análisis *a priori*, además, de emplear diversas herramientas.

Tabla 33: Herramientas empleadas para intentar solucionar la actividad

<p><i>Arrastre:</i> González, Villota y Acosta, crearon una circunferencia con centro un punto de la bisectriz e intentaron obtener una supuesta circunferencia tangente mediante el arrastre.</p>	 <p>Diagrama que muestra un triángulo con vértices A, B y C. Una línea azul representa la bisectriz del ángulo B. Una circunferencia roja está centrada en un punto de la bisectriz. Una línea roja curva, que parece ser una circunferencia, está siendo arrastrada por un cursor (mano) para intentar ser tangente a los lados AB y BC.</p>
<p><i>Recta perpendicular a la bisectriz:</i> Acosta, González y Villota realizaron rectas perpendiculares a la bisectriz, se cree que estos estudiantes tenían la idea de que el teorema está relacionado con una recta perpendicular.</p>	 <p>Diagrama que muestra un triángulo con una bisectriz azul. Una línea roja, etiquetada como 'a', es perpendicular a la bisectriz en un punto 'O'. Otra línea roja, etiquetada como 'b', es perpendicular a la bisectriz en otro punto. Una línea roja etiquetada como 'm' también está presente. Una línea azul etiquetada como 'm' parece ser la bisectriz. Una línea roja etiquetada como 'm' parece ser una línea que conecta los puntos de intersección de las rectas perpendiculares con los lados del triángulo.</p>

<p><i>Medida:</i> González empleó la herramienta <i>medir</i>, se cree que utilizó esta herramienta para deducir si existe alguna relación métrica para la construcción de la circunferencia tangente.</p>	
<p><i>Mediatrices:</i> Morales empleó la herramienta <i>Plano mediador</i> para construir mediatrices, obteniendo una circunferencia que pasa los puntos <i>A</i>, <i>P</i> y <i>C</i> que no necesariamente es tangente a las semirrectas <i>m</i> y <i>n</i>.</p>	<p>9</p> 

A pesar, de que Morales, Villota, Acosta y González utilizaron diversas herramientas para llegar a la construcción, al final, lograron deducir el teorema 7.12 obteniendo así, la construcción de la Tabla 19 al igual que Zambrano y Palacios.

Acosta después de ubicar una supuesta circunferencia tangente, dedujo las propiedades que esta tienen con las semirrectas, por otra parte, González y Villota

también intentaron deducir la propiedad de tangencia, sin embargo, no lo lograron, de ahí que, continuaran explorando alternativas.

Construya una figura tridimensional de tal forma que al realizar un corte transversal se obtenga la figura anterior.

Como se mencionó en los análisis *a priori*, esta actividad tuvo la intención de promover el proceso cognitivo de *visualización*, el cual se produjo de manera óptima ya que todos los participantes de la experimentación visualizaron la esfera tangente a un cono que será primordial para resolver la situación didáctica N°2.

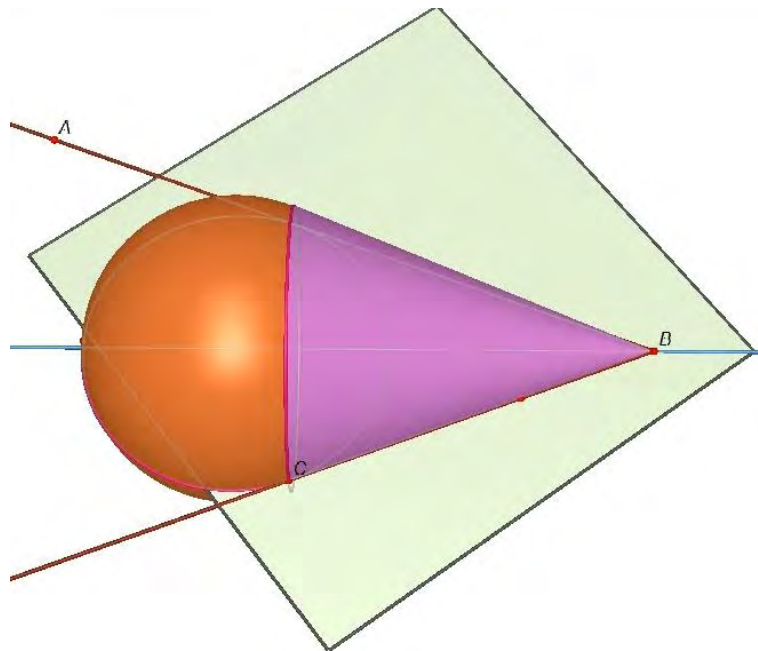


Figura 35: Construcción de Zambrano de la fase 2.2 de la situación didáctica N°1

Se tenía previsto que, a partir de la circunferencia tangente, se proyectara los objetos tridimensionales, sin embargo, González a diferencia de los demás, intento construir una esfera tangente a un cono desde una perspectiva perpendicular al plano base, construyendo el plano que realiza el corte transversal.

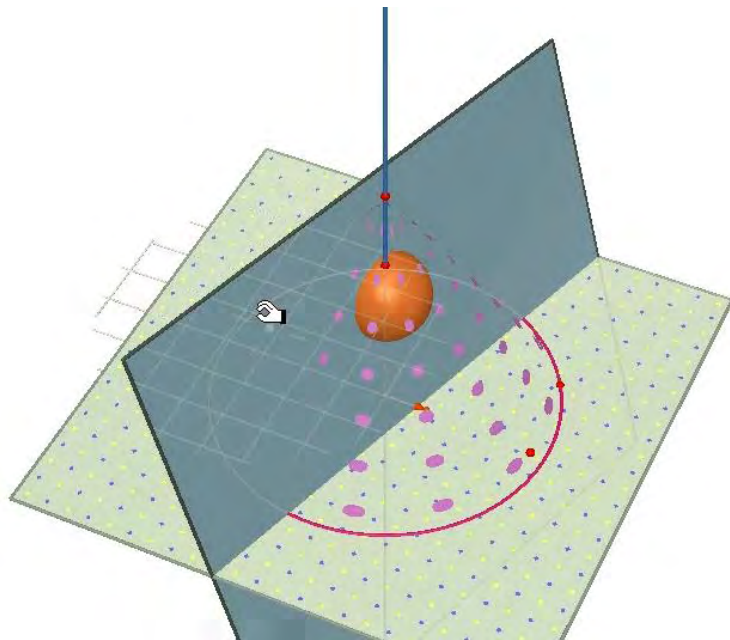


Figura 36: Construcción de González de la fase 2.2 de la situación didáctica N°1

Se puede deducir que los docentes en formación *visualizaron* una representación tridimensional de la representación plana, ya que lograron componer este objeto para al menos obtener un cono y una esfera, lo cual es justamente una actividad que promueve el proceso cognitivo de *visualización* (Gonzato, Godino, & Neto, 2011). Sin embargo, se esperaba que los estudiantes realizaran construcciones diferentes, debido a que existen múltiples figuras que resuelven esta actividad, de ahí que, el tiempo que emplearon fue menor que el previsto en los análisis *a priori*

En cuanto a la hoja del estudiante se planteó los siguientes interrogantes para esta fase:

¿Cómo realizaste la circunferencia tangente? Descríbela

En este interrogante se planeó que se plasmará la propiedad del teorema 7.12, hecho que se vio reflejado en las respuestas de González y Villota, que, aunque no tenían presente el teorema, las construcciones que realizaron les permitieron

deducirlo, ya que lo mencionaron en sus respuestas las construcciones de las propiedades que involucran a este teorema.

• Se crea un plano perpendicular a una de las semirectas (por la propiedad de que el radio es perpendicular a la tangente)
• se marca el punto de intersección entre el plano y la recta b .
• Se crea una circunferencia con centro en el punto de intersección del plano y recta b , y se pase por el punto de intersección entre el plano y la semirecta.

Figura 37: Respuesta de González al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.

Para realizar la construcción de la circunferencia tangente fue necesario la definición de una recta tangente de una circunferencia, entonces se construyó una recta perpendicular a una de las semirectas y se denotó el punto de intersección entre el plano bisector y el plano que utilizamos para realizar la recta perpendicular. Ese punto es el centro de la circunferencia arbitraria

Figura 38: Respuesta de Villota al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.

Por otra parte, aunque Acosta y Palacios utilizaron de manera implícita el teorema, se limitaron a describir la construcción realizada en el AGD Cabri 3D, sin mencionar la propiedad del teorema que permite realizar esta construcción.

Una vez se tiene el plano bisector se construye un plano perpendicular al plano base que pase por la semirecta n , luego una recta perpendicular al plano perpendicular que pase por un punto de la recta m y construir circunferencia de centro la intersección de recta b con la perpendicular y radio el punto (r) .

Figura 39: Respuesta de Acosta al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.

realizar recta perpendicular a n y m , seleccionamos la intersección de estas con la recta bisectriz, el punto de corte de las 3 rectas traza una circunferencia con centro en la intersección y radio un punto en la recta n o m .

Figura 40: Respuesta de Palacios al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.

Sin embargo, Morales y Zambrano cometieron errores en sus respuestas, por un lado, Morales creyó que la propiedad del teorema radica en la bisectriz, que únicamente es la encargada de contener el centro de la circunferencia tangente; y Zambrano a pesar de haber realizado de forma correcta la construcción de la circunferencia tangente se equivocó al momento de redactar su respuesta debido a que el plano debe ser perpendicular a una semirrecta y no al plano bisector.

Por un punto cualquiera en m o n trazamos una perpendicular y definimos un nuevo punto al intersectar esta perpendicular con la recta b , posteriormente con estos puntos construimos la circunferencia, la cual será tangente a m y n , puesto de que b es bisectriz.

Figura 41: Respuesta de Morales al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.

Transcripción de la respuesta expresada por Morales (Figura 41):

Por un punto cualquiera en m o n trazamos una perpendicular y definimos un nuevo punto al intersectar esta perpendicular con la recta b , posteriormente con estos puntos construimos la circunferencia la cual será tangente a m y n , puesto de que b es bisectriz.

Se construye un plano perpendicular al plano bisector y que pase por el punto C, luego hallamos la recta intersección entre el nuevo plano y el plano base, en seguida hallamos el punto de entre la anterior recta y la recta bisectriz, por último, la circunferencia buscada tiene centro en el último punto hallado y pasa por el punto C.

Figura 42: Respuesta de Zambrano al primer interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.

En cuanto al segundo interrogante:

¿Qué otras figuras tridimensionales puedes imaginar que resolverían la actividad? Descríbelas

Nota: no necesariamente debes realizarlas en Cabri 3D.

Esta pregunta va de la mano con la actividad de construcción, en la cual se solicitaba una figura tridimensional de tal forma que al realizarle un corte transversal se obtenga la circunferencia tangente a las dos semirrectas.

Este interrogante tenía el objetivo de seguir promoviendo el proceso cognitivo de visualización tridimensional, de ahí que fue opcional representar sus imágenes mentales en el AGD Cabri 3D para que no surgieran obstáculos a la hora de construir las diversas figuras que resolverían este interrogante.

Teniendo en cuenta que todos los participantes realizaron anteriormente la construcción de una esfera y un cono se esperaba que esta alternativa no estuviera entre sus respuestas, sin embargo, todos los estudiantes escribieron esta respuesta.

Por otra parte, Palacios y Zambrano dieron más alternativas a este interrogante, lo cual refleja una mayor capacidad de visualización con respecto a los otros docentes en formación.

Handwritten text on lined paper: "un cono circular recto en cuyo interior hay una esfera, una piramide. en cuyo interior hay una esfera tangente a sus caras,"

Figura 43: Respuesta de Palacios al segundo interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.

Transcripción de la respuesta expresada por Palacios (Figura 43):

Un cono circular recto en cuyo interior hay una esfera, una pirámide en cuyo interior hay una esfera tangente a sus caras

Handwritten text on lined paper: "figura 1: una esfera y un cono", "figura 2: un cilindro y un cono", "figura 3: una esfera y una piramide."

Figura 44: Respuesta de Zambrano al segundo interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°1.

FASE 3. Actividad de construcción de la Elipse.

Como se mencionó en los análisis *a priori*, se esperaba que los estudiantes establezcan la inclinación del plano cortante de tal manera que solo genere elipses, debido a que la secuencia didáctica se limita a la propiedad intrínseca de la sección cónica: *Elipse*, de ahí que, se solicitó a los estudiantes realizar una construcción que mantenga esta propiedad, es decir, una construcción robusta.

Realiza una construcción robusta (es aquella que mantiene sus propiedades superando la prueba del arrastre) de la Elipse.

Debido a que lo propuesto en la hoja del estudiante para esta fase está ligado a la anterior construcción, los análisis se desarrollaran en conjunto con lo realizado en el AGD Cabri 3D.

Describe el procedimiento que realizaste para la construcción robusta de la Elipse.

Nota: recuerda etiquetar los objetos geométricos.

En las construcciones se observó que el único que realizó una construcción robusta fue Palacios, debido a que la construcción del plano que realizó es de tal manera que es oblicuo al eje del cono, además, de asegurar que el plano seccione en su totalidad al cono.

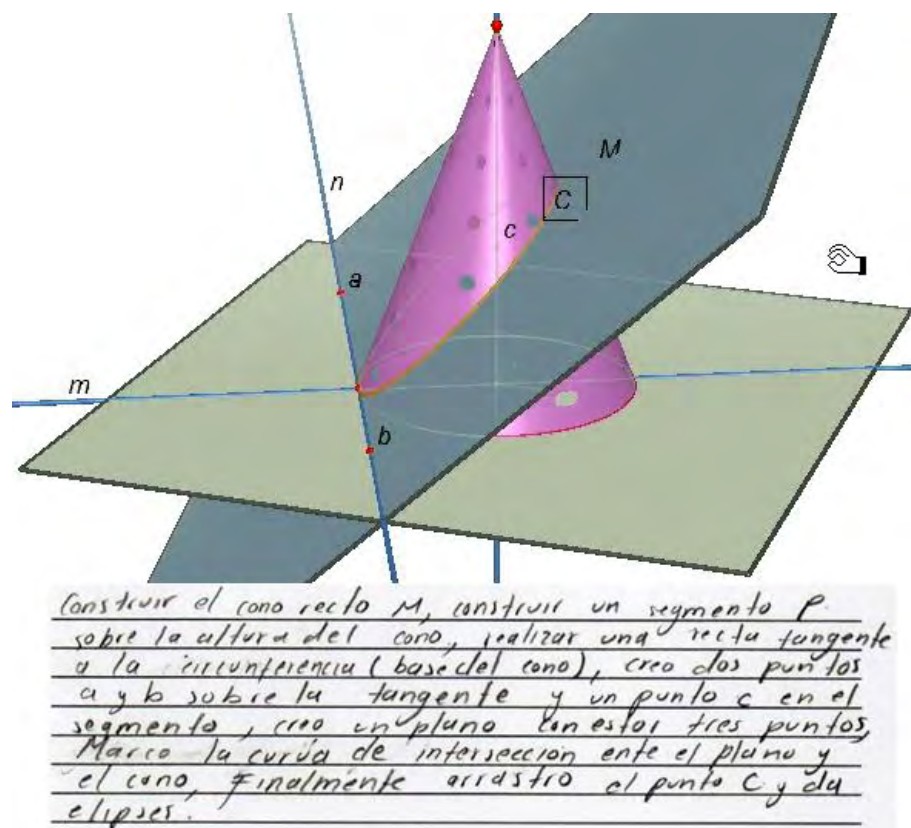


Figura 45: Construcción y respuesta de Palacios de la fase 3 de la situación didáctica N°1.

Transcripción de la respuesta expresada por Palacios (Figura 45):

Construir el cono recto M, construir un segmento P sobre la altura del cono, realiza una recta tangente a la circunferencia (base del cono), creo dos puntos a y b sobre la tangente y un punto c en el segmento, creo un plano con estos tres puntos, marco la curva de intersección entre el plano y el cono, finalmente arrastro el punto C y da elipses.

Con respecto a Morales, se puede inferir que *visualizó* la característica que tiene la sección cónica: *Elipse* con relación a la inclinación del plano cortante, sin embargo, realizó una construcción que a simple vista podría ser robusta, pero al analizar su construcción se puede observar que tiene como base una recta aleatoria, para luego trazar una recta paralela a la anterior; y así construir un plano que mantenga una inclinación fija al cono, de tal forma que siempre genere elipses.

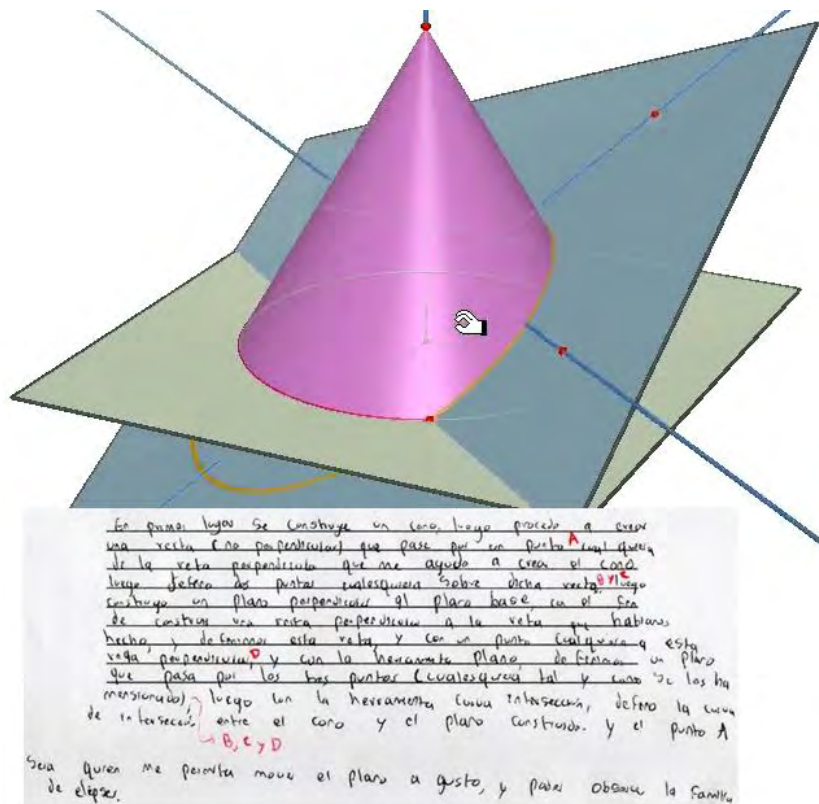
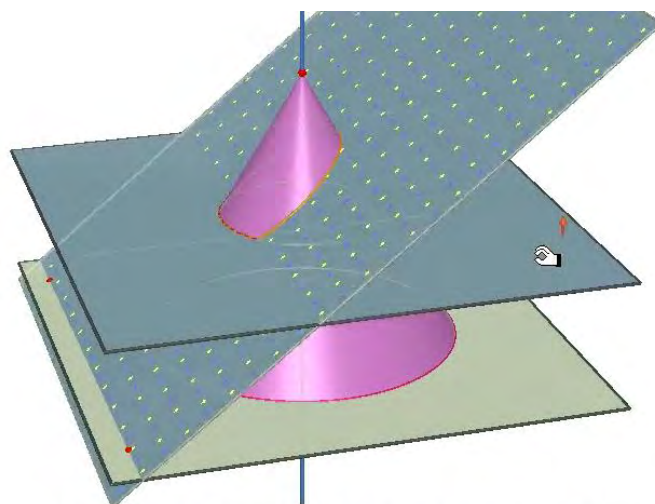


Figura 46: Construcción y respuesta de Palacios de la fase 3 de la situación didáctica N°1.

Transcripción de la respuesta expresada por Palacios (Figura 46):

En primer lugar se construye un cono, luego procedo a crear una recta (no perpendicular) que pase por un punto A cualquiera de la recta perpendicular que me ayudó a crear el cono luego defino dos puntos cualesquiera sobre dicha recta B y C luego construyo un plano perpendicular al plano base con el fin de construir una recta perpendicular a la recta que habíamos hecho y definimos esta recta, y con un punto cualquiera a esta recta perpendicular D y con la herramienta plano definimos un plano que pasa por los tres puntos (cualesquiera tal y como se los ha mencionado B, C y D) luego con la herramienta curva intersección, defino la curva de intersección entre el cono y el plano construido y el punto A seta quien me permita mover el plano a gusto, y poder observar la familia de elipses.

A diferencia de Morales y Palacios, los estudiantes Villota y González al parecer no comprendieron la definición de construcción robusta que fue expuesta en la actividad, debido a que sus construcciones funcionan siempre y cuando se mantengan fijos ciertos objetos de la construcción.



Para realizar el procedimiento de la construcción robusta de la elipse fue necesario una circunferencia, para ello se construyo un plano paralelo al dado en el programa y eso nos genera una circunferencia arbitraria ya que corta al cono. Luego con la herramienta plano se lo construyo ubicando dos puntos que pertenescan al plano dado y un punto que pertenece a la circunferencia arbitraria. Moviendo el plano paralelo construido podemos ver que el otro plano corta al cono, siempre formando una elipse.

Figura 47: Construcción y respuesta de Palacios de la fase 3 de la situación didáctica N°1.

Transcripción de la respuesta expresada por Palacios (Figura 47):

Para realizar el procedimiento de la construcción robusta de la elipse fue necesario una circunferencia, para ello se construyó un plano paralelo al dado en el programa y eso nos genera una circunferencia arbitraria ya que corta al cono. Luego con la herramienta plano se lo construyo ubicando dos puntos que pertenezcan al plano dado y un punto que pertenece a la circunferencia arbitraria moviendo el plano paralelo construido podemos ver que el otro plano corta al cono, siempre formando una elipse.

5.2.2. Situación didáctica N° 2

FASE 1: Actividades de Construcción de las Esferas de Dandelin para la Elipse.

Como se planeó en los análisis *a priori* se realizó una estandarización para la construcción robusta, para que los estudiantes realicen de manera sencilla la construcción de las *esferas de Dandelin* únicamente para sección cónica: *Elipse*. Posteriormente, mediante una presentación elaborada y presentada por los investigadores, se dio a conocer brevemente lo que plantea el *Teorema de Dandelin* (Ver Figura 48) y de esta manera deduzcan como representar este teorema en el AGD Cabri 3D.

TEOREMA DE DANDELIN



Los focos de toda cónica situada en un cono circular recto son los puntos de contacto de las esferas tangentes a dicho cono, y que sean a la vez tangentes al plano que la contiene.

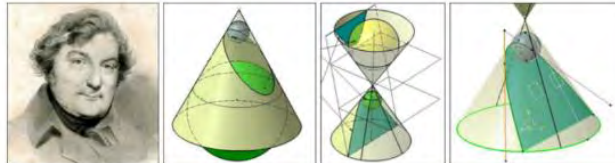


Figura 48: Teorema de Dandelin presentado a los docentes en formación.

Para el desarrollo de esta fase, se propuso que los estudiantes construyan las *Esferas de Dandelin* para la sección cónica: *Elipse*, donde se planteó la siguiente pregunta con la intención de orientar a los docentes en formación a la construcción de estas:

¿Cómo crees que se utiliza el plano bisector para realizar las Esferas de Dandelin a partir de la Elipse construida anteriormente?

Nota: Siempre existen una o dos esferas interiores al cono que son simultáneamente tangentes al plano y al cono, cada una de estas tocan al plano de intersección en un foco de la sección cónica, dichas esferas son denominadas Esferas de Dandelin.

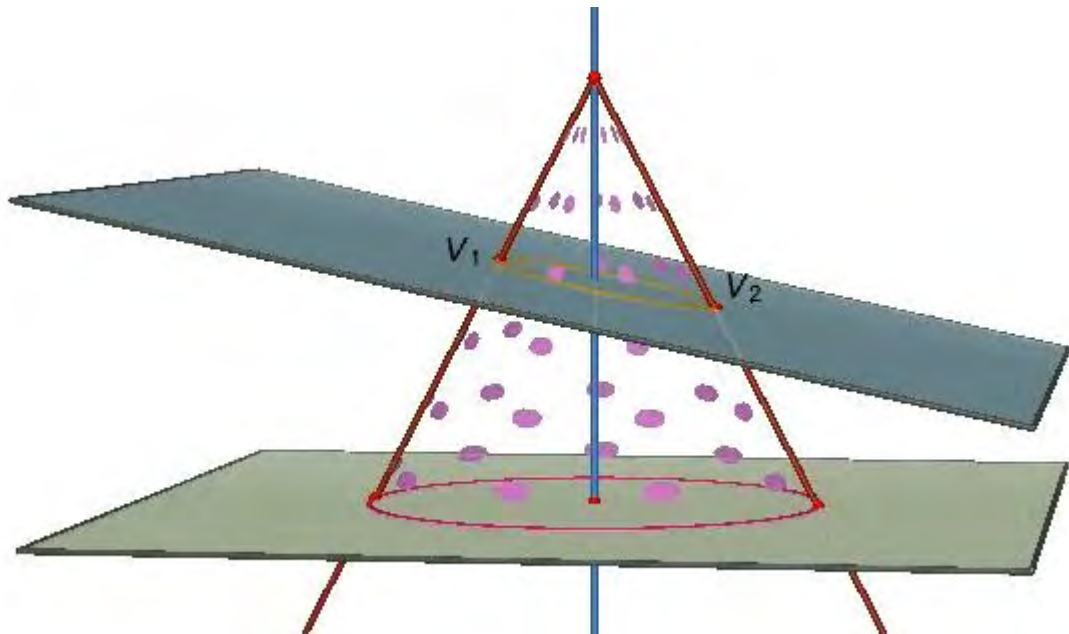
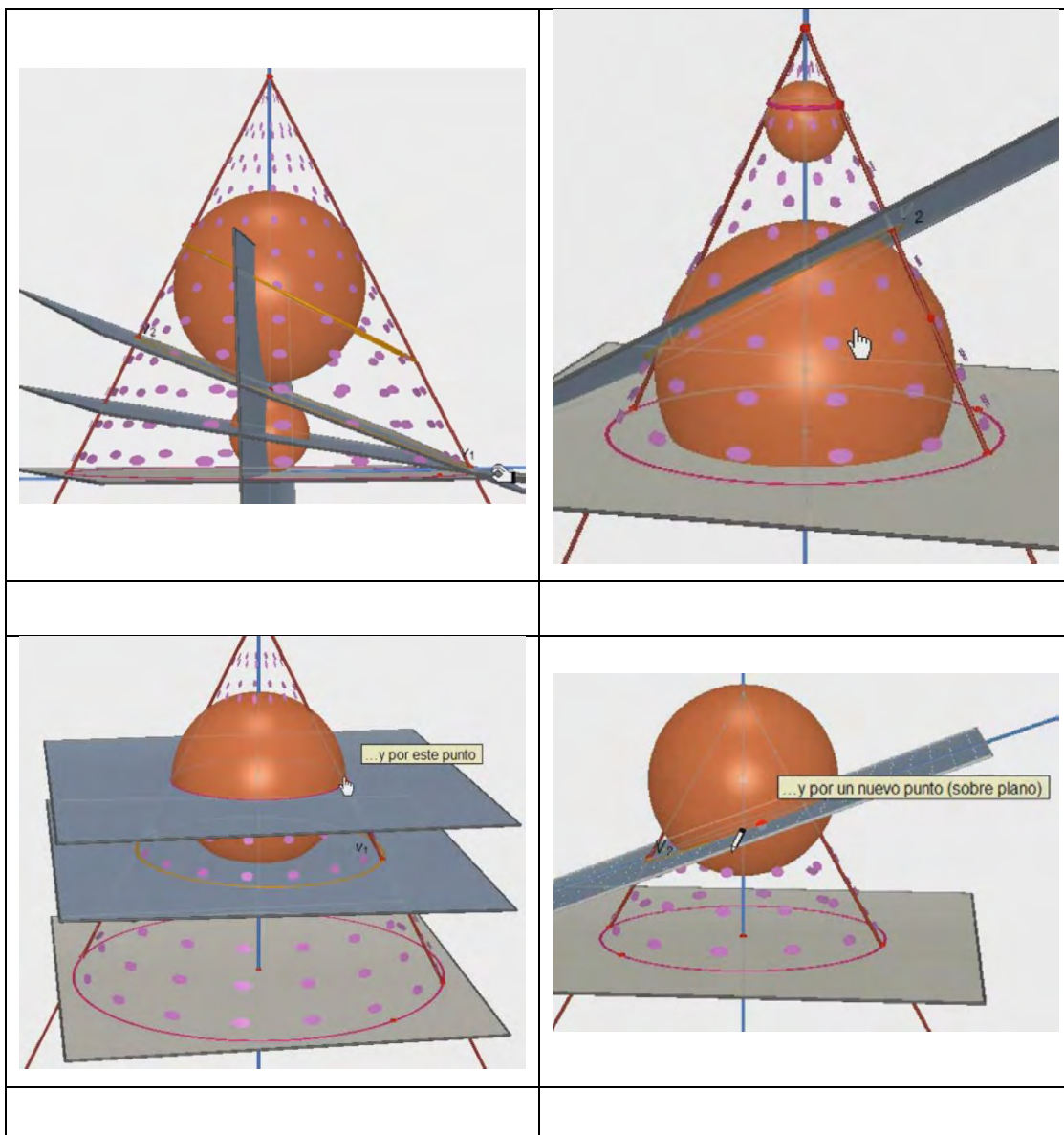


Figura 49: Construcción robusta estandarizada de la Elipse.

En esta fase se pudo observar que todos los docentes en formación realizaron una transición errónea, ya que algunos volvieron a cometer los mismos errores que surgieron en la actividad 2.1 propuesta en la fase 2 de la Situación Didáctica N°1; o realizaron una esfera tangente únicamente al cono, utilizando como base el teorema 7.12, con lo cual se podría decir que no lograron *visualizar* rápidamente que el plano bisector permite encontrar los centros de las esferas tangentes tanto al cono como al plano que secciona al mismo.

Tabla 34: Errores cometidos por parte de los docentes en formación al realizar las Esferas de Dandelin



Después lograron comprender que el plano bisector les permitía realizar la construcción que se solicitaba, sin embargo, continuaron cometiendo errores al realizar planos bisectores aleatorios como se tenía previsto en los análisis *a priori*.

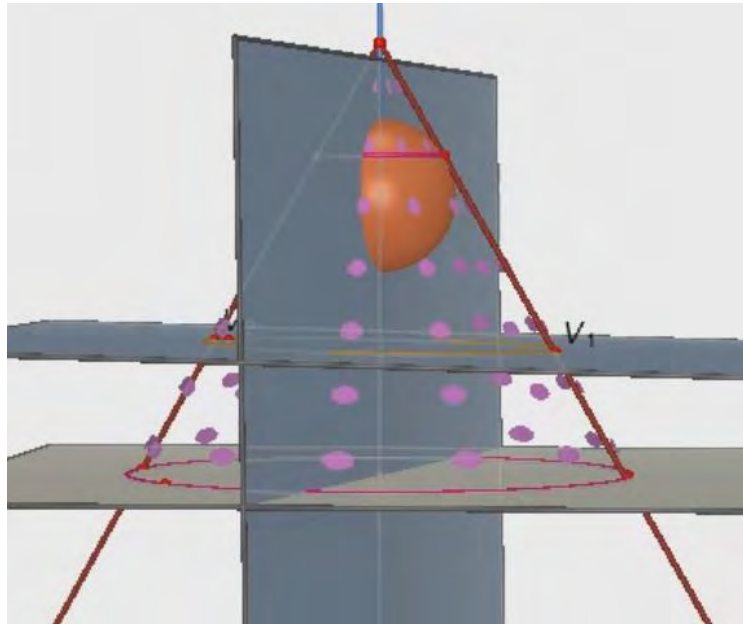


Figura 50: Plano bisector erróneo para tratar de realizar las Esferas de Dandelin.

Finalmente, todos lograron construir las *esferas de Dandelin*, pero el único que realizó una transición adecuada de la fase 2 de la situación didáctica N°1 fue Palacios, debido a que logró visualizar la circunferencia tangente tanto al cono como al plano cortante para finalmente expandir esta situación al espacio mediante la creación de la esfera tangente.

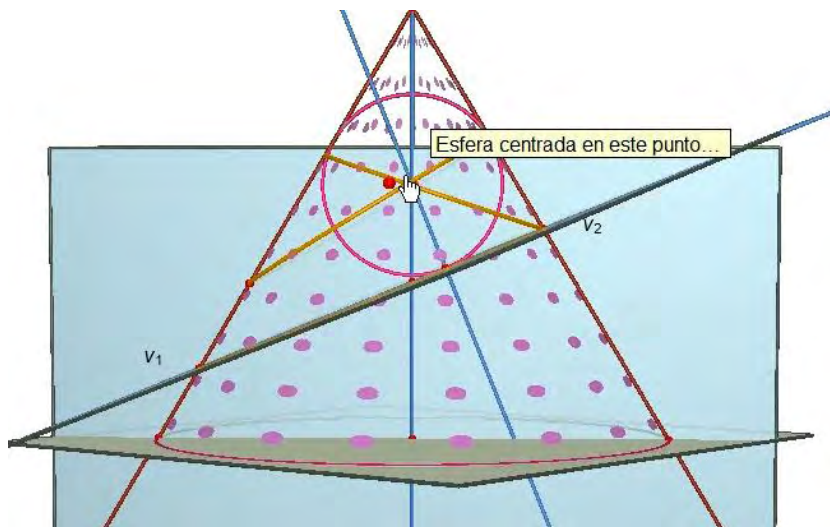


Figura 51: Transición de Palacios para desarrollar la fase 1 de la situación didáctica N°2

A pesar de los errores cometidos, la exploración que ofrece el AGD Cabri 3D les permitió llegar a la construcción correcta de las *esferas de Dandelin*.

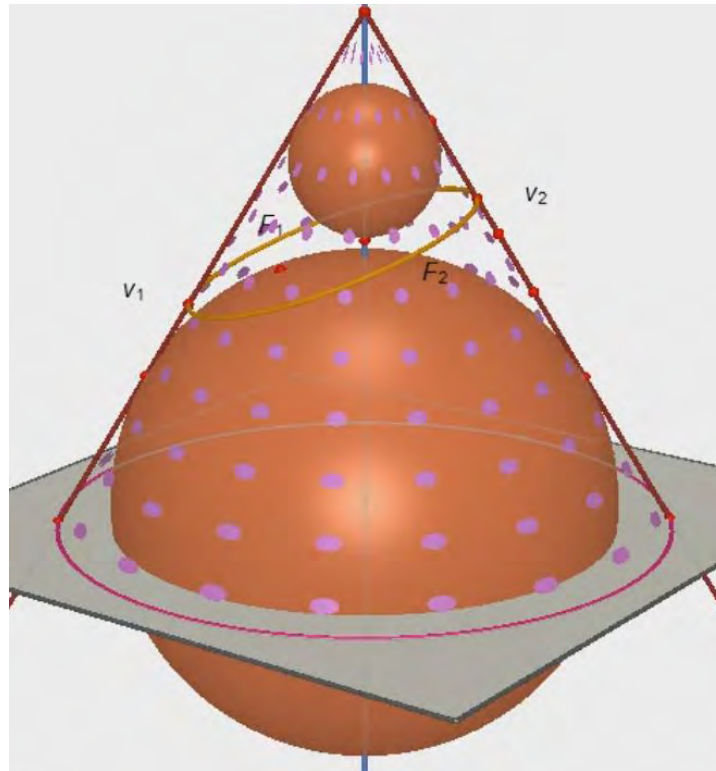


Figura 52: Construcción de las esferas de Dandelin realizada por un participante.

En cuanto a los interrogantes planteados para esta fase, se tiene:

¿Por qué crees que se utiliza el Plano Bisector para la construcción de las Esferas de Dandelin?

A partir de las respuestas plasmadas por los docentes en formación se puede mencionar que la mayoría se limitaron a describir lo realizado con el plano bisector, sin mencionar que esta herramienta permite localizar los centros de las esferas, sin embargo, los estudiantes Villota y Morales, especifican en sus respuestas que el plano bisector tiene la labor de permitir encontrar los centros de las esferas tangentes tanto al cono como al plano, es decir, las *esferas de Dandelin*.

Se hace uso del plano bisector para la construcción de las esferas porque con este podemos encontrar el centro de la esfera y un punto de tangencia al cono, lo cual podemos construir las esferas.

Figura 53: Respuesta de Villota al primer interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°2

El plano Bisector me permite bisecar el ángulo formado por el plano constructivo que pasa por V_1 y V_2 y la generatriz, para posteriormente encontrar el centro de la esfera al intersecar este plano bisector con la recta que con forma al cono, luego se hace un procedimiento parecido al de la actividad anterior.

Figura 54: Respuesta de Morales al primer interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°2

En cuanto a la otra pregunta:

Al completar la construcción de las Esferas de Dandelin, ¿Qué objetos geométricos cumplen con la propiedad de tangencia?

Con respecto a esta pregunta, ocurrió lo previsto en los análisis *a priori*, dado que la mayoría de los estudiantes respondieron de manera errónea, debido a que describían a los objetos geométricos que se generaban mediante los objetos geométricos que cumplían la propiedad de tangencia. Sin embargo, González respondió correctamente porque mencionó puntualmente los objetos geométricos que cumplían con esta propiedad.

González

El plano con las esferas y las esferas con el cono.

Figura 55: Respuesta de González al segundo interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°2.

Además, con la respuesta de Acosta se puede observar que la tangencia está limitada a un punto, ya que trata a la circunferencia como un objeto geométrico que se genera a través de un punto de tangencia.

* cumple los focos de las elipses que genera el plano cortante. donde f_1 lo da la esfera, y f_2 lo da la esfera. Al ser tangentes con el plano bisector.
* la esfera al ser tangente con el cono, este punto de tangencia genera una circunferencia al igual que la esfera dos genera una circunferencia (9).

Figura 56: Respuesta de Acosta al segundo interrogante de la fase 1 de la situación didáctica N°2.

Transcripción de la respuesta expresada por Acosta (Figura 56):

- Cumple los focos de las elipses que genera el plano cortante donde f_1 lo da la esfera y f_2 lo da la esfera: al ser tangentes con el plano bisector
- La esfera al ser tangente con el cono, este punto de tangencia genera una circunferencia al igual que la esfera dos genera una circunferencia

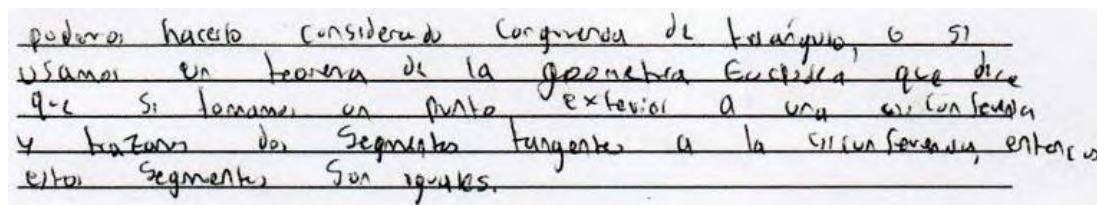
FASE 2: Actividad de Construcción de Teorema de Dandelin.

Al analizar lo realizado por parte de los estudiantes, se pudo observar que todos los docentes en formación lograron construir las circunferencias que se generan mediante la intersección del cono con las *esferas de Dandelin*, tal como fue previsto en los análisis *a priori*, por otra parte, se observó que la mayoría al construir una de

En cuanto al interrogante para esta fase, se tiene lo siguiente:

En la Ilustración de la fase 2, E es un punto arbitrario de la elipse. Los segmentos $\overline{F_1E}$ y $\overline{P_1E}$ son congruentes, además, $\overline{F_2E}$ y $\overline{P_2E}$ también lo son. ¿Cuál es la razón geométrica para que suceda lo anterior?

En las respuestas a este interrogante, se puede observar que todos los estudiantes respondieron tal como fue previsto en los análisis *a priori*, demostrando que pudieron visualizar a la esfera como una circunferencia y de esta manera aplicar el teorema 7.13 de la Geometría Euclídea en el espacio, es decir, realizaron una buena transición hacia a geometría plana desde la geometría espacial. Además, Morales fue el único que observó que mediante la congruencia de triángulos también se podía resolver este interrogante.



podemos hacerlo considerando congruencia de triángulo, o si usamos un teorema de la geometría Euclídea que dice que si tomamos un punto exterior a una circunferencia y trazamos dos segmentos tangentes a la circunferencia, entonces estos segmentos son iguales.

Figura 58: Respuesta de Morales al interrogante de la fase 2 de la situación didáctica N°2.

Transcripción de la respuesta expresada por Morales (Figura 58):

Podemos hacerlo considerando congruencia de triángulo, o si usamos un teorema de la geometría Euclídea que dice que, si tomamos un punto exterior a una circunferencia y trazamos dos segmentos tangentes a la circunferencia, entonces estos segmentos son iguales.

Teniendo en cuenta las respuestas se puede deducir que los docentes en formación lograron *visualizar* de manera óptima el objeto tridimensional, ya que al descomponer este objeto mediante un corte transversal obtuvieron una circunferencia con dos

segmentos tangentes, lo cual es justamente una actividad que promueve el proceso cognitivo de *visualización* descrito por los investigadores Gonzato, Godino y Neto (2010) como *componer y descomponer en partes un objeto tridimensional*, donde los docentes en formación realizaron una transición hacia lo bidimensional para visualizar una configuración de figuras geométricas bidimensionales mediante la descomposición de las *esferas de Dandelin* que les permitió resolver esta pregunta de carácter tridimensional con criterios bidimensionales.

FASE 3: Demostración para el Teorema de Dandelin.

En esta fase los estudiantes tuvieron tiempo para *visualizar* como posiblemente Germinal Dandelin logro deducir su teorema, teniendo en cuenta que este matemático estuvo limitado a realizar representaciones mentales de una manera estática al realizarlas en lápiz y papel, a diferencia de la interactividad que ofrece el AGD Cabri 3D el cual permite explorar de manera dinámica lo realizado en este ambiente.

En la ilustración, E es un punto arbitrario de la elipse. Los segmentos $\overline{F_1E}$ y $\overline{P_1E}$ son congruentes, además, $\overline{F_2E}$ y $\overline{P_2E}$ también lo son, ¿Por qué crees que sucede esto?

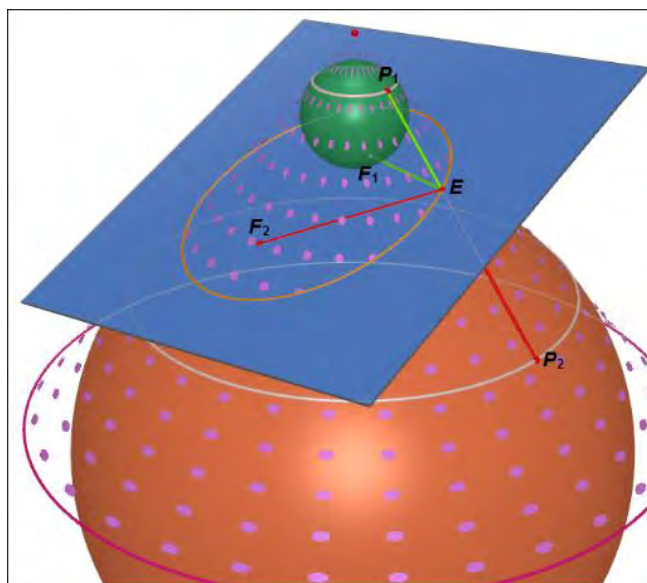


Figura 59: Ilustración auxiliar para la demostración del Teorema de Dandelin

Recuerda que: una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante.

Donde se replanteó la pregunta de la hoja del estudiante de la fase anterior con la intención de que los estudiantes encuentren la importancia que radica en esta propiedad y realicen una transición hacia la geometría plana para obtener la demostración del *Teorema de Dandelin*. Además, se mencionó la definición de elipse dada por Lehman (2002), debido a que es una definición dinámica que cobra sentido en este ambiente porque es definida como lugar geométrico.

En cuanto a la hoja del estudiante, se solicitó lo siguiente:

Realiza una Demostración Euclidiana (Doble Columna) para el Teorema de Dandelin.

Analizando las demostraciones, los estudiantes Palacios y Acosta lograron realizar la demostración del *Teorema de Dandelin* correctamente, dado que emplearon los teoremas y propiedades que se desarrollaron a lo largo de la secuencia didáctica,

visualizando como encajan cada uno de estos en la demostración de la sección cónica: *Elipse* como lugar geométrico.

$\overline{F_1E} \cong \overline{P_1E}$ y $\overline{F_2E} \cong \overline{P_2E}$	Hipotesis:
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong \overline{P_1E} + \overline{P_2E}$	suma de segmentos iguales (transitiva)
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong \overline{P_1E} + \overline{EP_2}$	Como E pertenece a la recta $\overline{P_1P_2}$
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong \overline{P_1P_2}$	
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong K.$	m $\overline{P_1P_2}$ da siempre una constante $K.$
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong \overline{P_1E} + \overline{EP_2} = \overline{P_1P_2}$	por igualdad.
$\overline{P_1P_2} = K.$	
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} = K.$	por transitividad
$\overline{P_1E} + \overline{EP_2} = K.$	
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} = K$	

Figura 60: Respuesta de Palacios al interrogante de la fase 3 de la situación didáctica N°2.

Por otra parte, Morales planteó como debía ser la demostración del *Teorema de Dandelin*, sin embargo, se limitó a desarrollar nuevamente lo solicitado en la fase anterior, dado que realizó una demostración detallada de porque los segmentos tangentes son congruentes, ocasionando un desarrollo inconcluso del *Teorema de Dandelin*. Cabe resaltar, que, aunque no realizó la demostración solicitada para esta fase, desarrolló una demostración importante y no prevista para la fase 2 de la situación didáctica N°2.

Morales

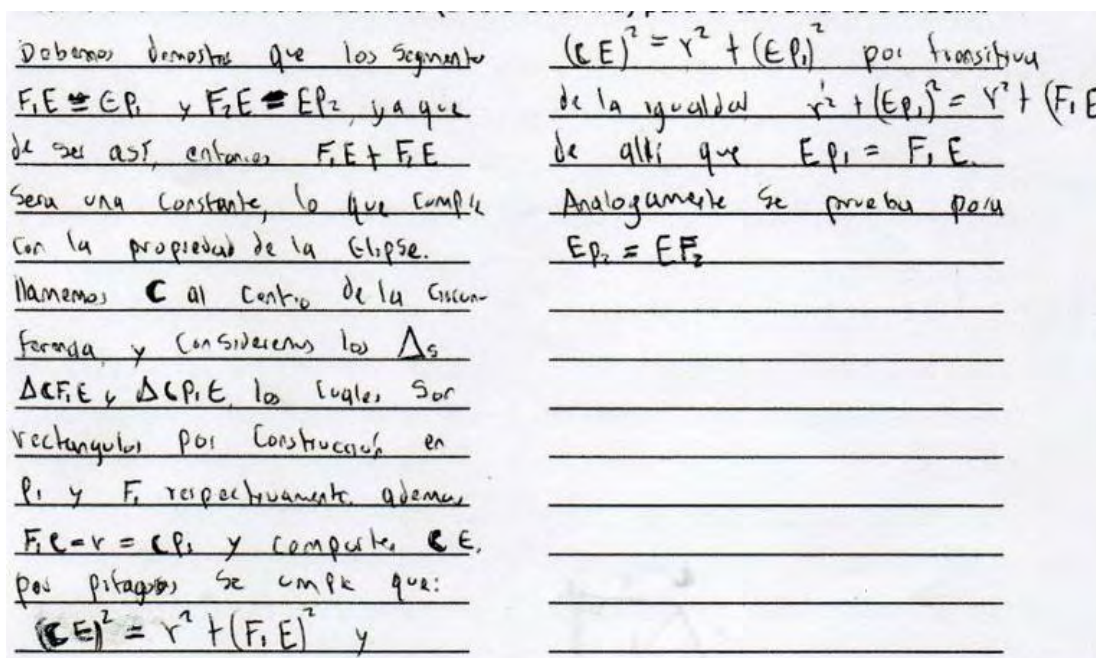


Figura 61: Respuesta de Morales al interrogante de la fase 3 de la situación didáctica N°2.

Transcripción de la respuesta expresada por Morales (Figura 61):

Debemos demostrar que los segmentos $F_1E = EP_1$ y $F_2E = EP_2$, ya que de ser así, entonces $F_1E + F_2E$ será una constante, lo que cumple con la propiedad de la elipse, llamemos C al centro de la circunferencia y consideremos los Δ s ΔCF_1E y ΔCP_1E los cuales son rectángulos por construcción en P_1 y F_1 respectivamente además $F_1C = r = CP_1$ y comparten CE , por Pitágoras se cumple que $(CE)^2 = r^2 + (F_1E)^2$ y $(CE)^2 = r^2 + (EP_1)^2$ por transitiva de la igualdad $r^2 + (EP_1)^2 = r^2 + (F_1E)^2$ de allí que $EP_1 = F_1E$ análogamente se prueba para $EP_2 = F_2E$

Finalmente, Villota y González realizaron una interpretación errónea del *Teorema de Dandelin*, debido a que creyeron que al demostrar la congruencia de segmentos se demostraba este teorema, no teniendo en cuenta la propiedad intrínseca de la sección cónica: *Elipse*.

<p>Para demostrar lo anterior debemos probar la congruencia ΔAF_1E y ΔAP_1E dado que A</p>	<p>entre dos triángulos, el es el centro de la circunferencia</p>
<p>$\overline{AP_1} \cong \overline{AF_1}$</p>	<p>Por ser radios de la misma \odot</p>
<p>$\overline{AE} \cong \overline{AE}$</p>	<p>Por ser los mismos lados (propiedad reflexiva)</p>
<p>$\sphericalangle P_1AE = \sphericalangle F_1AE$</p>	<p>Por la razón de que AE es bisectriz del $\sphericalangle P_1AF_1$.</p>
<p>Luego $\Delta AF_1E, \Delta AP_1E$</p>	<p>son congruentes</p>
<p>Por tanto se cumple el</p>	<p>teorema de Dandelin.</p>

Figura 62: Respuesta de Villota al interrogante de la fase 3 de la situación didáctica N°2.

CAPITULO 6

CONCLUSIONES

En este apartado se presentan las conclusiones que surgieron al momento de contrastar los análisis *a priori* con los *a posteriori* de esta investigación, la cual se fundamentó en la TSD y la micro-ingeniería didáctica para diseñar de manera adecuada las situaciones didácticas; cabe resaltar que se tuvo como fundamento unas pruebas piloto²⁹ presentadas a docentes de diferentes instituciones que se realizaron en diferentes eventos de Educación Matemática, las cuales aportaron al rediseño de estas situaciones para implementarlas de forma adecuada a la secuencia didáctica, además, se tuvo en cuenta los obstáculos que tenían algunos participantes de las pruebas piloto; y se puede concluir que los docentes en formación realizaron de forma eficaz y rápida la solución de estas situaciones, seguramente por la familiarización que tuvieron con el AGD Cabri 3D y por haber estudiado recientemente la Geometría Euclídea y la Geometría Analítica.

Teniendo en cuenta el objetivo de la investigación y los fenómenos que surgieron a lo largo de la experimentación las conclusiones se clasificaran en tres categorías:

²⁹ Talleres realizados por los investigadores en V, VI y VII Congreso Internacional de Formación y Modelación en Ciencias Básicas, XII Coloquio Regional de Matemáticas y II Simposio de Estadística; y IV Congreso CABRIWORLD y VII congreso Iberoamericano de Cabri 2014.

- En relación a las TIC:

Primero, el avance tecnológico que se ha presenciado en los últimos años, ha permitido que el computador sea un objeto accesible y conocido por las nuevas generaciones, en consecuencia, el diseñar situaciones didácticas que involucren el uso de softwares como el AGD Cabri 3D permite atraer de forma más llamativa la atención de los estudiantes causando mayor interés con respecto a la educación.

Segundo, la exploración por parte de los docentes en formación en el AGD Cabri 3D fue primordial debido a que mediante la acción y retroalimentación ofrecida por este AGD permitió que los estudiantes recordaran propiedades o teoremas que tendrían que utilizar a lo largo de la secuencia didáctica, además, la herramienta *Ayuda* permitió que los estudiantes recordaran como emplear las diversas herramientas para progresar en el desarrollo de la secuencia didáctica.

Tercero, a pesar de contar con registros textuales y archivos del AGD Cabri 3D, la utilización del software CamStudio permitió observar totalmente lo desarrollado en el AGD Cabri 3D, lo cual permitió realizar un análisis profundo ya que, en las respuestas de los docentes en formación, en ocasiones no plasmaron muchas de las interacciones que experimentaron con el AGD Cabri 3D lo cual podría haber limitado a los investigadores a una solución correcta sin mencionar los diferentes obstáculos o pasos ocurridos al momento de resolver la actividad.

Cuarto, el AGD Cabri 3D permitió estudiar el concepto de la sección cónica: *Elipse* como pudo haber sido visualizado por parte de los matemáticos, es decir, el saber sabio³⁰ de Germinal Dandelin para luego transformarlo en un saber enseñado³¹, con el propósito de evitar reiterar obstáculos u errores que cometieron los matemáticos al momento de transponer este conocimiento a los estudiantes y obtener

³⁰ El saber-sabio designa el conjunto de resultados admitidos por verdaderos por la comunidad científica de referencia, los matemáticos en este caso.

³¹ El saber enseñado es la parte de las matemáticas que son enseñadas finalmente, de forma efectiva en un nivel escolar determinado.

una mejor apropiación de este concepto por parte de los docentes en formación para que logren transmitirlo de manera adecuada a sus futuros estudiantes.

- En relación al proceso cognitivo de *visualización*:

Quinto, el uso del AGD Cabri 3D contribuyó al proceso cognitivo de *visualización* debido a que permitió realizar transiciones de doble vía de la geometría plana y la geometría espacial, al momento de realizar cortes transversales mentales para emplear teoremas de la Geometría Euclídea e interpretar de manera sencilla el problema tridimensional, para desarrollar la secuencia didáctica de acuerdo a lo que planteaba esta investigación.

Sexto, con respecto a la sección cónica: *Elipse*, en esta investigación se diseñó una secuencia didáctica innovadora que permitió a los docentes en formación involucrarse y comprender la propiedad intrínseca de esta; además de trabajarla desde su propia naturaleza tridimensional no se limitó al método tradicional que solo involucra definiciones.

Séptimo, un aspecto a destacar es que durante la secuencia didáctica el concepto de *transición de doble vía* estuvo implícito a lo largo de la secuencia didáctica, sin embargo, realizaron las acciones de transición que surgían a través de la geometría plana y la geometría tridimensional de una forma adecuada para tratar de resolver en su totalidad las fases que componen la secuencia didáctica.

- En relación a la enseñanza y aprendizaje por medio de las TIC:

Octavo, cabe resaltar que el propósito de esta investigación no estaba enfocado en la demostración del *Teorema de Dandelin*, sino en promover el proceso cognitivo de *visualización* que este genera, empleando el AGD Cabri 3D, sin embargo la mayoría de los participantes comprendieron de forma intuitiva la propiedad intrínseca de la sección cónica: *Elipse*, evidenciando que esta secuencia didáctica es un método

alternativo que puede ser sencillo e interesante al momento de aprender el concepto matemático *Elipse* sin recurrir a métodos algebraicos, demostrando el *Teorema de Dandelin* con Geometría Euclídea mas no Analítica.

Noveno, las construcciones y respuestas expresadas por los docentes en formación revelan que lograron integrar los saberes que han adquirido a través de los cursos de Geometría Euclídea, Geometría Analítica y TIC en Educación Matemática para resolver la secuencia didáctica, lo cual podría implicar que serían capaces de utilizar los diversos conceptos matemáticos que han estudiado para desarrollar actividades que integren el proceso cognitivo de *visualización*.

Decimo, con respecto a los análisis *a posteriori* se pudo observar que las situaciones didácticas se diseñaron de forma adecuada, debido que se desarrollaron las propiedades del *Teorema de Dandelin* para la sección cónica: *Elipse* a lo largo de la secuencia didáctica para que al finalizar los estudiantes sean capaces de *visualizar* cómo estas propiedades convergen al *Teorema de Dandelin*, es decir, que el proceso cognitivo de *visualización* desempeña un papel importante, debido a que este evoca procesos deductivos en los estudiantes, logrando imaginar diferentes rutas que podrían tomar al momento de demostrar algún enunciado, por lo tanto la *visualización* sería una buena forma de iniciar a los estudiantes a realizar demostraciones.

Undécimo, a pesar de que es común tomar como correcta la solución de una actividad realizada en un software sin cuestionar el por qué, se pudo observar que los participantes de esta investigación en ninguna de las diferentes fases optaron por dar respuestas de este tipo, sino que cada respuesta se iba desarrollando mediante algún argumento de la Geometría Euclídea.

Duodécimo, debido a que los docentes en formación son más creativos al no tener una rutina establecida al momento de enseñar y teniendo en cuenta la sugerencia de los investigadores Gonzato, Godino, & Neto (2011) los cuales mencionan que se debe

promover investigaciones que tengan como participantes a docentes, debido a que ellos son los encargados de adecuar las actividades que presentaran posteriormente a sus estudiantes, se desarrolló la secuencia didáctica con la intención de promover un método de enseñanza diferente con respecto a la sección cónica: *Elipse*.

Finalmente, aunque hubo obstáculos al momento de seleccionar las figuras geométricas correctas para desarrollar algunas fases de las situaciones didácticas, los investigadores se limitaron a orientar a los estudiantes, tal como sugiere la TSD, para que lleguen por sus propios medios a la respuesta y de esta manera hagan una construcción propia del concepto matemático.

Con respecto a lo ocurrido en esta secuencia didáctica y al limitado margen de investigación por parte de los investigadores, se proponen las siguientes preguntas de investigación:

- Dado que en esta investigación se estudió el concepto matemático de la sección cónica: *Elipse*, se propone investigar una secuencia didáctica que aborde todas las secciones cónicas, de ahí, que se propone la siguiente pregunta: ¿Cómo se manifiesta el proceso cognitivo de *visualización a través de la transición de doble vía entre la geometría espacial y la geometría plana* cuando abordan las secciones cónicas, a partir del *Teorema de Dandelin* en el AGD Cabri 3D?
- A pesar de realizar esta secuencia didáctica en un ambiente dinámico de tres dimensiones, todavía estamos limitados a una pantalla de dos dimensiones; y dado que con el avance tecnológico actual ya se dispone de herramientas como lo son la realidad virtual³² y la realidad aumentada³³, de ahí surge la siguiente pregunta:

³² Es un entorno de escenas u objetos de apariencia real, generado mediante tecnología informática, que crea en el usuario la sensación de estar inmerso en él. Dicho entorno es contemplado por el usuario a través normalmente de un dispositivo conocido como gafas o casco de realidad virtual. Este puede ir acompañado de otros dispositivos, como guantes, que permiten una mayor interacción con el entorno, así como la percepción de diferentes estímulos que intensifican la sensación de realidad.

¿Qué ventajas u obstáculos surgirían al emplear estas herramientas tecnológicas en el ámbito educativo a la hora de trabajar las secciones cónicas?

- En esta investigación se abordó el concepto del proceso cognitivo de *visualización* desde una perspectiva geométrica a través de la transición de doble vía mediante el *Teorema de Dandelin*, de lo anterior surge la siguiente pregunta ¿Cómo se plantean situaciones didácticas que promuevan el proceso cognitivo de visualización para desarrollar conceptos de diferentes ramas de las matemáticas?
- Teniendo en cuenta que esta investigación se realizó con respecto a un concepto matemático de naturaleza tridimensional que es estudiado generalmente desde una perspectiva bidimensional, por lo tanto, se formula la siguiente pregunta: ¿Cómo se podría estudiar otros conceptos matemáticos de naturaleza tridimensional a partir de la *transición de doble vía entre la geometría espacial y la geometría plana*?
- Dado que la secuencia didáctica para esta investigación estuvo adecuada para docentes en formación, los cuales contaban con los saberes adquiridos a lo largo de la Licenciatura en Matemáticas, surge la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué cambios se tendría que realizar en la secuencia didáctica de esta investigación para que la desarrollen estudiantes que van a abordar por primera vez la sección cónica: *Elipse*?

Para finalizar, este trabajo ha aportado al desarrollo del problema que existe en la escasez de investigaciones que incentivan el estudio de la geometría tridimensional, de igual manera promovió el proceso cognitivo de visualización mediante una propuesta interesante que involucró tecnologías en auge, para realizar transiciones de doble vía entre la geometría espacial y la geometría plana de forma adecuada y

³³ La realidad aumentada es el término que se usa para definir una visión a través de un dispositivo tecnológico, directa o indirecta, de un entorno físico del mundo real, cuyos elementos se combinan con elementos virtuales para la creación de una realidad mixta en tiempo real.

controlada de acuerdo a la TSD y la micro-ingeniería didáctica; y el empleo de conceptos matemáticos esenciales y fáciles de recordar, para llegar a la demostración de la propiedad intrínseca de la sección cónica: *Elipse*, que usualmente no se trabaja. En consecuencia, esta investigación contribuyó a la formación de los investigadores y se espera que sirva como un posible referente para investigaciones en el ámbito de la Educación Matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. *Memorias de 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (pp. 132-142). Bogotá, Colombia: ASOCOLME. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMETRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRIA_DINMICA_Asocolme2010.pdf

Accascina, G. & Rogora, E. (2006). Using Cabri 3D Diagrams for Teaching Geometry. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 13 (1), 11–22.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Béguin, P., & Rabardel, P. (2000). Designing for instrument mediated activity. *Scandinavian Journal of information Systems*, 12, 173–190.

Bonilla, D. & Parraguez, M. (2013). La elipse desde la perspectiva de la teoría de los modos de pensamiento. En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 26, 617-624. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Boyer, C. B. (1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas* (Primera Ed.). (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Buchelli, G. & Marín, J. (2009), Transposición Didáctica: Bases para repensar la enseñanza de una disciplina científica - I parte. En: *Páginas 85*, 17-38. Colombia: Revista académica e institucional de la UCPR. Disponible en: dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/4897931.pdf

Camou, B. (2012). La geometría del espacio: un fascinante mundo por descubrir. *Actas del Cuarto Congreso Uruguayo de Educación Matemática, CUREM 4*. Montevideo, Uruguay. Disponible en: <http://semur.edu.uy/curem/actas/procesadas1348011188/actas.pdf>

Carabús, O & Pérez, A. (2004). *Creatividad, Actitudes y Educación*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Biblos.

Chamorro, M. (2003). Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. En Chamorro, M., Belmonte, J., Llinares, S., Ruíz, M. & Vecino, F. (Eds.), *Didáctica de las Matemáticas para primaria* (pp. 69- 94). Madrid, España: Pearson Educación.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición Didáctica, Del saber sabio al saber enseñado* (Tercera Ed.). (AIQUE Grupo Editor, Trad.). Montevideo, México: Aiqué.

Del Castillo, A. & Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o instrumento? Esa es la pregunta. En Leston, P (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 459-467. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa: México.

Duval, R. (2002). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. En F. Hitt, (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization* (pp. 311-335). North American Chapter of PME: Cinvestav-IPN.

Fernández, E., Chaucanes, D. & Enríquez, J. (2013). Las secciones cónicas y las *esferas de Dandelin* en el Cabri 3D. En J. A. Rúa & L. A. Zabala (Coords.), *Memorias del V Congreso de Formación y Modelación en Ciencias Básicas*. (pp. 37-38). Cursillo llevado a cabo en este Congreso, Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Fernández, E., Chaucanes, D. & Enríquez, J. (2014). Las secciones cónicas y las *esferas de Dandelin*: un estudio a través de la transición de doble vía entre la geometría plana y la geometría espacial usando Cabri 3D. En J. A. Rúa & L. A. Zabala (Coords.), *Memorias del IV Congreso CABRIWORLD y VII congreso Iberoamericano de Cabri 2014*. (pp. 184-185). Cursillo llevado a cabo en este Congreso, Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.

Fernández, E., Chaucanes, D. & Enríquez, J. (2014). La elipse y sus relaciones geométricas con las *esferas de Dandelin* en el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D. En *Memorias del XII Coloquio Regional de Matemáticas y II Simposio de Estadística*.

Fernández, E & Garzón, D. (2007). *La Visualización en la Geometría. Programa de formación permanente de educadores de tecnologías de la información y la comunicación en educación matemática*. Universidad del Valle Cali.

Fernández, E. & Garzón, D. (2007). Módulo 3: Pensamiento Geométrico y Métrico. Las representaciones en educación matemática. En: *Programa de Formación Permanente de Educadores en Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Matemática*. Universidad del Valle. (Documento en formato electrónico no publicado aun).

Galindo, C. (1996). Desarrollo de habilidades básicas para la comprensión de la geometría. *Revista EMA*, 2 (1), 49-58.

Galvez, G. (1994). La didáctica de las Matemáticas. En Parra, C y Saiz, I. *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, 39-50. Buenos Aires: Paidós.

González-López, M.J. (2001). La Gestión de la Clase de Geometría utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En P. Gómez y L. Rico (eds.), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Universidad de Granada; 277-290.

Gonzato, M., Godino, J. D. y Neto, T. (2011). Evaluación de conocimientos didáctico-matemáticos sobre la visualización de objetos tridimensionales. *Educación Matemática*, 23, (3), 5-37.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E. y Wilhelmi, M. R. (2013). Didactic engineering as design-based research in mathematics education. *Proceedings of the CERME 8*, Turkey.

Hemmerling, E. (2002). *Geometría Elemental*. Limusa, Noriega Editores, México.

Ibáñez, R. (2002). Secciones Cónicas. *Sigma: Revista de Matemáticas*, 20, 12-38.

Laborde, C. (2005). Robust and soft constructions: two sides of the use of the use of dynamic geometry environments. *En 10th Asian Technology Conference in Mathematics*. Cheong-Ju: Korea National University of Education.

Laborde, C. & Laborde, J. M. (2011). *Interactivity in dynamic mathematics environments: what does that it mean?.* En *Electronic Proceedings of the Sixteenth Asian Technology Conference in Mathematics 2011*. Disponible en: http://atcm.mathandtech.org/EP2011/invited_papers/3272011_19113.pdf

Lehmann, C. (2002). *Geometría Analítica*. (34ta. Ed.). México: Limusa S.A.

Leung, F. (2013). Introduction to Section C: technology in the Mathematics Curriculum. En M.A. Clements; A. Bishop; C. Keitel; J. Kilpatrick & F. Leung (Ed.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 517-524) Nueva York, E.U: Springer.

Lugo, J. (2014). Secciones cónicas: un estudio epistemológico y el análisis de su tratamiento en los libros de texto (tesis de postgrado). Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina. Recuperado el 30 de mayo de 2015, de: http://www.ungs.edu.ar/ms_idh/wp-content/uploads/2014/10/Secciones-C%C3%B3nicas.-Un-estudios-epistemol%C3%B3gico-y-el-an%C3%A1lisis-de-su-tratamiento-en-los-libros-de-textos.pdf

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas: Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas: Lineamientos Curriculares*. Bogotá, Colombia. Panamericana Formas e Impresos.

Presmeg, N. (2000). *On visualization and generalization in mathematics*. The Florida State University.

Río-Sánchez, J. del. (1996). *Lugares Geométricos. Cónicas*. Madrid: Síntesis.

Ruiz J. (1996). *Las Esferas de Dandelin*. *Educación Matemática*. 8 (2). 116-126.

Schumann, H. (2005). Introduction to Conics with Cabri 3D. *Proceedings of 20th Mathematics Education conference*, 25-38.

Taylor, C. (1881). *An introduction to the ancient and modern geometry of conics, being a geometrical treatise on the conic sections with a collection of problems and*

historical notes and prolegomena. London: Deighton, Bell & Co. Disponible en: <http://ebooks.library.cornell.edu/cgi/t/text/text-idx?c=math;idno=00800001>.

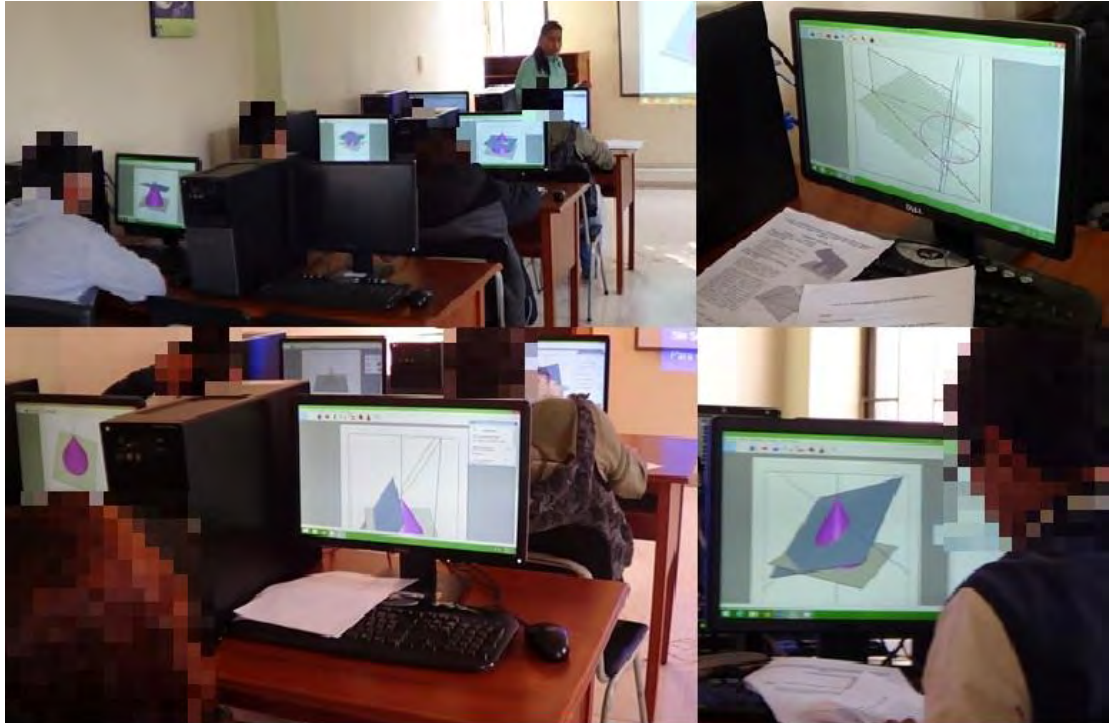
Torres, P. (1986). El método heurístico en la enseñanza de la Matemática del nivel medio General. *Revista Educación*, (n° 60), 114-120.

Zimmerman, W. & Cunningham, S. (1991). What is Mathematical Visualization?. En Zimmerman, W. & Cunningham, S. (Eds.). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 1-8). Washington D.C., E.U.: Mathematical Association of America Service Center.

ANEXOS

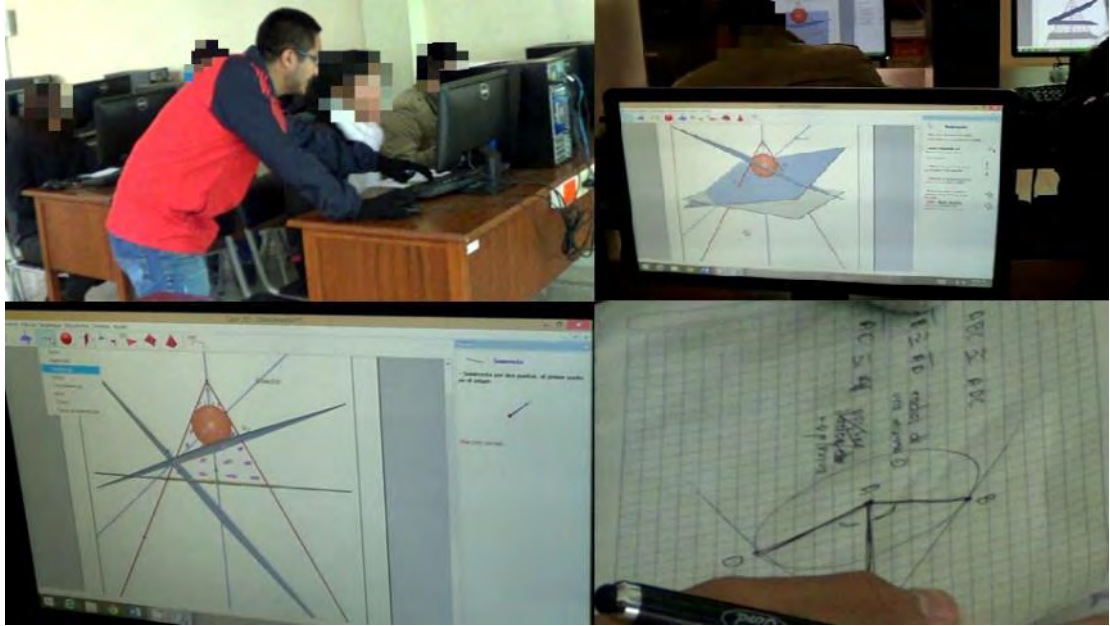
Anexo A

Registro fotográfico de la Situación Didáctica N°1

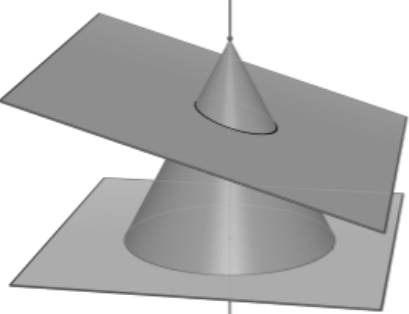
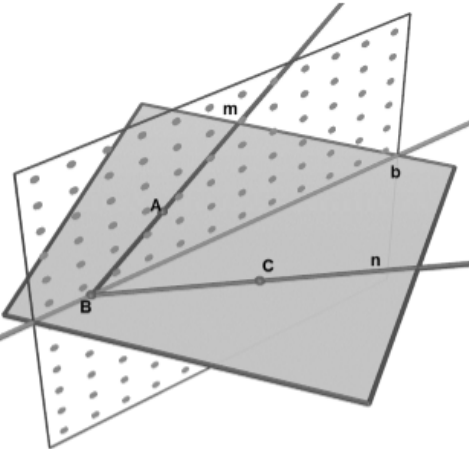
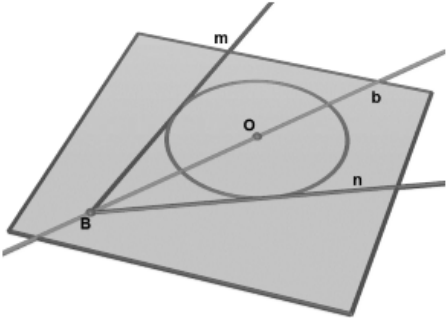


Anexo B

Registro fotográfico de la Situación Didáctica N°2



Actividades de construcción de la Situación Didáctica N°1

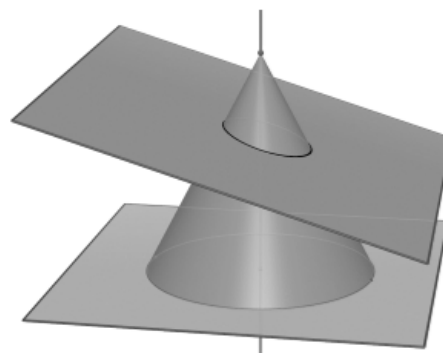
LA ELIPSE Y LAS ESFERAS DE DANDELIN: UN ESTUDIO A TRAVÉS DE LA TRANSICIÓN DE DOBLE VÍA DE LA GEOMETRÍA PLANA Y LA GEOMETRÍA ESPACIAL USANDO CABRI 3D	
SITUACIÓN DIDÁCTICA #1	
<p>FASE 1. Actividades de Construcción geométrica del cono y los cortes con un plano para generar elipses.</p> <ol style="list-style-type: none"> 1.1. Construir geoméricamente un cono circular recto con la herramienta "Cono". 1.2. Construir geoméricamente la Elipse como corte de un cono. 1.3. Construir geoméricamente la Circunferencia como corte de un cono. 	
<p>FASE 2. Transición de doble vía: Construcción del Plano Bisector.</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Crea un punto B sobre el plano base, luego crea dos semirrectas m y n desde el punto B. Además Crea dos puntos, uno en cada semirrecta y etiquételos con las letras A y C. ➤ Seleccione la herramienta <i>Plano Bisector</i>. Y luego de Clic en cada uno de los tres puntos. Si se acerca primero al punto A, le aparecerá un mensaje que dice: "Plano bisector de un ángulo empezando en el punto A", luego diríjase al punto B, le aparecerá un mensaje que dice: "Definido en el punto B" y por último diríjase al punto C. Entonces le quedará construido el plano bisector que divide el ángulo formado por las semirrectas m y n. Finalmente, marque la recta de intersección entre el plano bisector y el plano base, y denótela b. Oculte el plano bisector. <p>Ahora construya Usted solo:</p> <ol style="list-style-type: none"> 2.1. Una circunferencia tangente cualquiera a las semirrectas m y n. 2.2. Construya una figura tridimensional de tal forma que al realizar un corte transversal se obtenga la figura anterior. 	 

LA ELIPSE Y LAS ESFERAS DE DANDELIN: UN ESTUDIO A TRAVÉS DE LA TRANSICIÓN DE DOBLE VÍA DE LA GEOMETRÍA PLANA Y LA GEOMETRÍA ESPACIAL USANDO CABRI 3D

SITUACIÓN DIDÁCTICA #1

FASE 3. Actividad de Construcción de la Elipse.

Realiza una construcción robusta (es aquella que mantiene sus propiedades superando la prueba del arrastre) de la Elipse.



Anexo D

Respuesta a los interrogantes de la hoja del estudiante de la Situación Didáctica
N°1 por parte de los docentes en formación

HOJA DEL ESTUDIANTE PARA LA SITUACIÓN DIDÁCTICA #1

Nombre: _____

Número de Computador: _____

FASE 1. Actividades de Construcción geométrica del cono y los cortes con un plano para generar elipses.

¿Por qué crees que es necesario realizar una construcción aparte para la Circunferencia, teniendo en cuenta que la circunferencia es un caso particular de la Elipse?

Palacios

por que se hace mas facil visualizar, la circunferencia realizada a partir de un plano paralelo al otro plano donde se encuentra al cono y que lo corta, si se trabaja con el plano que corta al cono y forma la elipse, seria complicado el desarrollo de tal forma que la curva de corte sea una circunferencia.

Acosta

Es necesario porque al realizar los pasos correspondientes para construir la circunferencia se obtiene con mayor precisión esta conica,

Villota

Es necesario realizar una construcción aparte para la circunferencia porque una circunferencia no puede ser una elipse, pero una elipse si puede ser una circunferencia.

González

Porque el plano que corta al cono tiene que ser paralelo al plano con el que se dio origen al cono, ya no es cualquier plano.

Morales

Es necesario hacer una construcción aparte para la circunferencia, puesto que el plano anterior que me define la elipse al intersectarse con el cono, se encuentra ligado a los dos puntos que se encuentran en el plano base, y además, si pudiese moverse, no sería adecuado tratar de buscar la circunferencia, puesto que a punto se cometen errores de precisión, así; es mejor usar las herramientas que nos ofrece el software.

Zambrano

Es necesario realizar otra construcción porque la circunferencia es un caso particular de la elipse en que se requiere que el plano que corta al cono sea perpendicular al eje del cono.
Por tanto, para construir la circunferencia, en lugar de construir cualquier plano que corte al cono, se debe construir un plano perpendicular al eje del cono.

FASE 2. Transición de doble vía: Construcción del Plano Bisector.

¿Cómo realizaste la construcción de la circunferencia tangente? Descríbela

Palacios

realizar recta perpendicular a n y m , seleccionamos la intersección de estas con la recta bisectriz, el punto de corte de las 3 rectas traza una circunferencia con centro en la intersección y radio un punto en la recta n o m .

Acosta

Una vez se tiene el plano bisector se construye un plano perpendicular al plano base que pase por la semirecta n , luego una recta perpendicular al plano perpendicular que pase por un punto de la recta m y construir circunferencia de centro la intersección de recta b con la perpendicular y radio el punto (T) .

Villota

Para realizar la construcción de la circunferencia tangente fue necesario la definición de una recta tangente de una circunferencia, entonces se construyó una recta perpendicular a una de las semirectas y se denotó el punto de intersección entre el plano bisector y el plano que utilizamos para realizar la recta perpendicular. Ese punto es el centro de la circunferencia arbitraria

González

- Se crea un plano perpendicular a una de las semirectas (por la propiedad de que el radio es perpendicular a la tangente)
- se marca el punto de intersección entre el plano y la recta b .
- Se crea una circunferencia con centro en el punto de intersección del plano y recta b , y pase por el punto de intersección entre el plano y la semirecta.

Morales

Por un punto cualquiera en m o n trazamos una perpendicular y de forma un nuevo punto al intersectar esta perpendicular con la recta b , posteriormente con estos puntos construimos la circunferencia, la cual será tangente a m y n , puesto de que b es bisectriz.

Zambrano

Se construye un plano perpendicular al plano bisector y que pase por el punto C , luego hallamos la recta intersección entre el nuevo plano y el plano base, en segunda hallamos el punto de entre la anterior recta y la recta bisectriz, por último, la circunferencia buscada tiene centro en el último punto hallado y pasa por el punto C .

¿Qué otras figuras tridimensionales puedes imaginar que resolverían la actividad?
Describelas

Nota: no necesariamente debes realizarlas en Cabri 3D

Palacios

un cono circular recto en cuyo interior hay una esfera, una pirámide en cuyo interior hay una esfera tangente a sus caras,

Acosta

Un cono circular recto, que tiene una esfera, un paraboloides con vértice un punto en la recta perpendicular al plano base y pasó por la circunferencia que se construyó en el anterior paso, el vértice ponerlo en otra recta n° que se construye al igual que el anterior paso pero en un plano perpendicular a la plano base.

Villota

Otras figuras geométricas tridimensionales resolverían la actividad sería el cono y una esfera.

González

Un cono con una esfera en su interior, con la condición de que la esfera sea de un radio menor al de la circunferencia del cono.

Morales

- una esfera sobre un cono. -
- un cono con un plano
-

Zambrano

figura 1: una esfera y un cono.
figura 2: un cilindro y un cono.
figura 3: una esfera y una piramide.

FASE 3. Actividad de Construcción de la Elipse.

Describe el procedimiento que realizaste para la construcción robusta de la Elipse.

Nota: recuerda etiquetar los elementos geométricos.

Palacios

Construir el cono recto M , construir un segmento P sobre la altura del cono, realizar una recta tangente a la circunferencia (base del cono), creo dos puntos a y b sobre la tangente y un punto c en el segmento, creo un plano con estos tres puntos, Marco la curva de intersección ente el plano y el cono, finalmente arrastro el punto C y da elipse.

Acosta

se construye una tangente a la circunferencia base y se pone dos puntos en ella, con estos dos puntos y un tercero ubicado en un segmento del cono se construye el plano, y la intersección del plano con el cono forma elipse, el segmento sobre el cono se realiza del vértice con un punto del círculo base.

Villota

Para realizar el procedimiento de la construcción robusta de la elipse fue necesario una circunferencia, para ello se construyó un plano paralelo al dado en el programa y eso nos genera una circunferencia arbitraria ya que corta al cono. Luego con la herramienta plano se lo construyó ubicando dos puntos que pertenezcan al plano dado y un punto que pertenece a la circunferencia arbitraria. Moviendo el plano paralelo construido podemos ver que el otro plano corta al cono, siempre formando una elipse.

González

- Construir geométricamente un cono circular recto con la herramienta "cono"
 - Se crea una recta perpendicular al plano origen en cualquier punto por fuera del cono.
 - Se crea una recta en el plano al otro lado de la recta perpendicular.
 - Se crea un plano con dos puntos de la recta en el plano y la recta perpendicular.
- Nota: la ubicación de la recta en el plano y de la perpendicular depende de la circunferencia del cono.

Morales

En primer lugar se construye un arco. luego procedo a crear una recta (no perpendicular) que pase por un punto A cual queda de la recta perpendicular que me ayudo a crear el arco. luego defino dos puntos cualesquiera sobre dicha recta. luego construyo un plano perpendicular al plano base, con el fin de construir una recta perpendicular a la recta que habiamos hecho, y de trazar esta recta, y con un punto cualquiera a esta recta perpendicular, y con la herramienta plano de trazar un plano que pasa por los tres puntos (cualesquiera tal y como se los ha mencionado), luego con la herramienta curva intersección, defino la curva de intersección entre el arco y el plano construido. y el punto A B, C y D


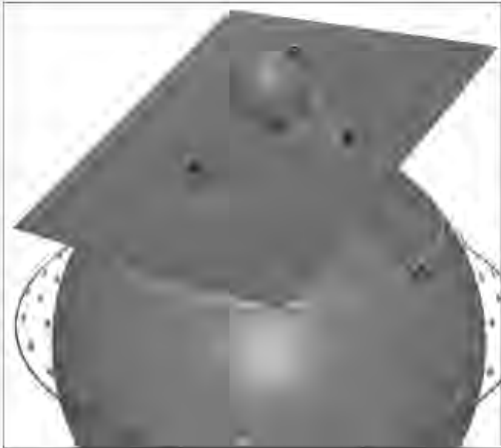
Sea quien me permita mover el plano a gusto, y poder observar la familia de elipses.

Zambrano

No realizo el procediendo de la construcción en la hoja del estudiante, pero realizo la construcción en el AGD Cabri 3D.

Anexo E

Actividades de construcción de la Situación Didáctica N°2

LA ELIPSE Y LAS ESFERAS DE DANDELIN: UN ESTUDIO A TRAVÉS DE LA TRANSICIÓN DE DOBLE VÍA DE LA GEOMETRÍA PLANA Y LA GEOMETRÍA ESPACIAL USANDO CABRI 3D	
SITUACIÓN DIDÁCTICA #2	
<p>FASE 1. Actividades de Construcción de las Esferas de Dandelin para la Elipse.</p> <p>¿Cómo crees que se utiliza el plano bisector para realizar las Esferas de Dandelin a partir de la Elipse construida anteriormente?</p> <p>Nota: Siempre existen una o dos esferas interiores al cono que son simultáneamente tangentes al plano y al cono, cada una de estas tocan al plano de intersección en un foco de la sección cónica dichas esferas son denominadas <i>Esferas de Dandelin</i>.</p>	
<p>FASE 2. Actividad de Construcción del Teorema de Dandelin.</p> <p>Construcciones auxiliares para la demostración del Teorema de Dandelin:</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Denota los puntos de tangencia de las esferas con el plano cortante como F_1 para la esfera superior y como F_2 para la esfera inferior. ➤ Traza las circunferencias que se forman por la intersección del cono con las <i>esferas de Dandelin</i>. ➤ Crea un punto E sobre la Elipse, luego crea una semirrecta g desde el vértice del cono al punto E. ➤ Marca los puntos de intersección de la recta g con las circunferencias tangentes y etiquételos como P_1 y P_2. ➤ Construye los segmentos $\overline{P_1E}$, $\overline{F_1E}$, $\overline{P_2E}$ y $\overline{F_2E}$. 	

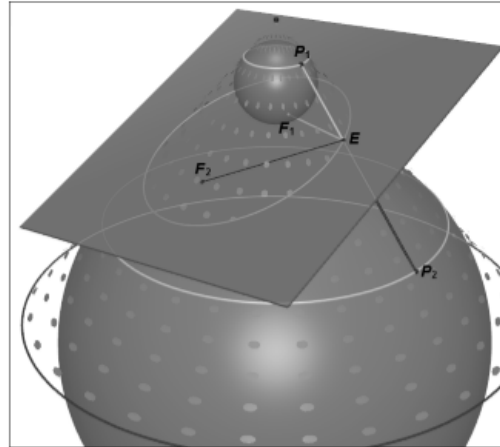
LA ELIPSE Y LAS ESFERAS DE DANDELIN: UN ESTUDIO A TRAVÉS DE LA TRANSICIÓN DE DOBLE VÍA DE LA GEOMETRÍA PLANA Y LA GEOMETRÍA ESPACIAL USANDO CABRI 3D

SITUACIÓN DIDÁCTICA #2

FASE 3. Demostración del Teorema de Dandelin.

En la ilustración, E es un punto arbitrario de la elipse. Los segmentos $\overline{F_1E}$ y $\overline{P_1E}$ son congruentes, además, $\overline{F_2E}$ y $\overline{P_2E}$ también lo son, ¿Por qué crees que sucede esto?

Recuerda que: Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano, de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante.



Anexo F

*Respuesta a los interrogantes de la hoja del estudiante de la Situación Didáctica
N°2 por parte de los docentes en formación*

HOJA DEL ESTUDIANTE PARA LA SITUACIÓN DIDÁCTICA #2

Nombre: _____

Número de Computador: _____

FASE 1. Actividades de Construcción de las Esferas de Dandelin para la Elipse.

¿Por qué crees que se utiliza el Plano Bisector para la construcción de las Esferas de Dandelin?

Palacios

se necesitara para la construcción de la circunferencia tangente al cono y a la elipse, a partir de las perpendiculares a una recta que pertenece al lado del cono y al plano donde se encuentra la elipse y que corta al cono, y mirar el punto de intersección de esas rectas + con la altura del cono, hacer una circunferencia tangente para hacer la esfera

Al completar la construcción de las Esferas de Dandelin ¿Qué objetos geométricos

Acosta

Se utiliza porque se está trabajando en 3D, y se necesita bisecar dos rectas, para luego construir un plano perpendicular a dichas rectas que pase por el punto de intersección del plano bisector con la recta que nos da altura del cono.

Villota

Se hace uso del plano bisector para la construcción de las esferas porque con este podemos encontrar el centro de la esfera y un punto de tangencia al cono, lo cual podemos construir las esferas.

González

Porque ayuda a encontrar el punto de intersección entre el plano y el eje del cono; con este encontramos la tangencia con el cono y así formar la esfera con los dos puntos.

Morales

El plano Bisector me permite bisecar el ángulo formado por el plano constructivo que pasa por V_1 y V_2 y la generatriz, para posteriormente encontrar el centro de la esfera al intersecar este plano bisector con la recta que con forma al cono, luego se hace un procedimiento parecido al de la actividad anterior.

Al completar la construcción de las Esferas de Dandelin ¿Qué objetos geométricos cumplen con la propiedad de tangencia?

Palacios

las focos, (la tangencia de las esferas con la elipse),
la tangencia de las esferas con el cono en una
circunferencia.

Acosta

* cumple los focos de las elipses que genera el plano cortante.
donde f_1 da la esfera, y f_2 da la esfera. Al ser tangentes.
con el plano bisector.
* la esfera al ser tangente con el cono, este punto de tangencia
genera una circunferencia al igual que la esfera dos genera una
circunferencia (9).

Villota

Los objetos geométricos cumplen con la propiedad de
tangencia sería la circunferencia.

González

El plano con las esferas y las esferas con el cono.

Morales

Los objetos geométricos que se generan al interseccionar las esferas con el cono son dos circunferencias, los puntos de intersección (tangencia) con las semirectas (ejes) y el plano, también si consideramos la intersección del plano con el cono, entonces estamos hablando de las elipses con sus vértices y los focos conformados por la tangencia del plano con las esferas.

FASE 2. Actividad de Construcción del Teorema de Dandelin.

En la Ilustración de la fase 2, E es un punto arbitrario de la elipse. Los segmentos $\overline{F_1E}$ y $\overline{P_1E}$ son congruentes, además, $\overline{F_2E}$ y $\overline{P_2E}$ también lo son. ¿Cuál es la razón geométrica para que suceda lo anterior?

Palacios

por teorema si tenemos una circunferencia tangente a dos rectas se tiene que por propiedad el punto de tangencia con el origen (punto exterior) van a ser iguales que es el caso que está sucediendo.

Acosta

por teorema se tiene que: un punto exterior a la circunferencia y se tiene dos tangentes a esta circunferencia que pasan por el punto luego los puntos de tangencia P_1 y P_2 forman segmentos congruentes con el punto exterior.

Villota

La razón para que suceda la congruencia en ese par de segmentos es por la propiedad de tangencia de una circunferencia; que dice que un punto exterior a la circunferencia pasa por dos tangentes a la circunferencia. Por lo cual, los dos segmentos que se forman con los puntos de tangencia y el punto exterior son iguales.

González

Porque ambos segmentos son tangentes a la circunferencia (esfera)

Morales

podemos hacerlo considerando congruencia de triángulos, o si usamos un teorema de la geometría Euclídea que dice que si tomamos un punto exterior a una circunferencia y trazamos dos segmentos tangentes a la circunferencia, entonces estos segmentos son iguales.

FASE 3. Demostración del Teorema de Dandelin.

Realiza una Demostración Euclídea (Doble Columna) para el teorema de Dandelin.

_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____
_____	_____

Palacios

$\overline{F_1E} \cong \overline{P_1E}$ y $\overline{F_2E} \cong \overline{P_2E}$	Hipotesis
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong \overline{P_1E} + \overline{P_2E}$	suma de segmentos iguales (transitiva)
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong \overline{P_1E} + \overline{EP_2}$	Como E pertenece a la recta $\overline{P_1P_2}$
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong \overline{P_1P_2}$	"
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong \kappa$	en $\overline{P_1P_2}$ da siempre una constante κ .
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong \overline{P_1E} + \overline{EP_2} = \overline{P_1P_2}$	por igualdad.
$\overline{P_1P_2} = \kappa$	
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} = \kappa$	por transitividad
$\overline{P_1E} + \overline{EP_2} = \kappa$	" "
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} = \kappa$	

Acosta

$\overline{F_1E} \cong \overline{P_1E}$ y $\overline{F_2E} \cong \overline{P_2E}$	Por teorema que se menciona en
	face 9.
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong \overline{P_1E} + \overline{P_2E}$	+ suma de dos igualdades
Como E pertenece a $\overline{P_1P_2}$	se tiene $\overline{P_1P_2} = \kappa$.
$\overline{P_1E} + \overline{EP_2} = \overline{P_1P_2} = \kappa$	
Ahora como $\overline{EP_2} \cong \overline{P_2E}$	
se tiene.	
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} \cong \overline{P_1E} + \overline{EP_2} \cong \overline{P_1P_2}$	
Así	
$\overline{F_1E} + \overline{F_2E} = \overline{P_1P_2} = \kappa$	

Villota

Para demostrar lo anterior debemos probar la congruencia entre dos triángulos, el $\triangle AFE$ y $\triangle APE$ dado que A es el centro de la circunferencia

$$\overline{AP_1} \cong \overline{AF_1}$$

$$\overline{AE} \cong \overline{AE}$$

$$\sphericalangle P_1AE = \sphericalangle F_1AE$$

Luego $\triangle AFE$, $\triangle APE$

Por tanto se cumple el

Por ser radios de la misma \odot

Por ser los mismos lados (propiedad reflexiva)

Por la razón de que AE es bisectriz del $\sphericalangle P_1AF_1$.
son congruentes

teorema de Dandelin.

González

Se crea una bisectriz que pasa por E de los segmentos $\overline{P_1E}$ y $\overline{F_1E}$, pasa por el centro de la circunferencia, lo llamamos O , entonces tomamos

$\triangle F_1OE$ y $\triangle P_1OE$:

- $\overline{OE} \cong \overline{OE}$
- $\overline{P_1O} \cong \overline{F_1O}$
- Angulos: $\sphericalangle OF_1E \cong \sphericalangle OP_1E$
- $\therefore \triangle F_1OE \cong \triangle P_1OE$

Por tanto

$$\overline{P_1E} \cong \overline{F_1E}$$

Reflexiva

Por radio de la misma \odot

Por la bisectriz

L - A - L

Morales

Dobemos demostrar que los segmentos $F_1E \cong EP_1$ y $F_2E \cong EP_2$, ya que de ser así, entonces $F_1E + F_2E$ será una constante, lo que cumple con la propiedad de la elipse. llamemos C al centro de la circunferencia y consideremos los Δ s ΔCFE y ΔCP_1E , los cuales son rectángulos por construcción en P_1 y F_1 respectivamente, además $F_1C = r = CP_1$ y comparten CE , por pitágoras se cumple que:
 $(CE)^2 = r^2 + (F_1E)^2$ y

$(CE)^2 = r^2 + (EP_1)^2$ por transitiva de la igualdad $r^2 + (EP_1)^2 = r^2 + (F_1E)^2$ de allí que $EP_1 = F_1E$.
Analogamente se prueba para $EP_2 = F_2E$.


Anexo G

Herramientas del AGD Cabri 3D empleadas en la secuencia didáctica

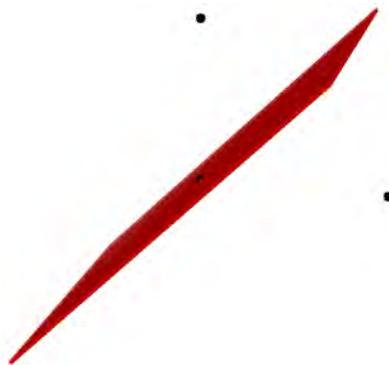
A continuación, se presentará algunos usos de las herramientas más relevantes que se emplearon en esta investigación.


Nota:

- Las construcciones resultantes de las herramientas estarán representadas mediante el color rojo.
- Las construcciones que se utilizan rectas, también son posibles realizarlas con segmentos, vectores o semirrectas.

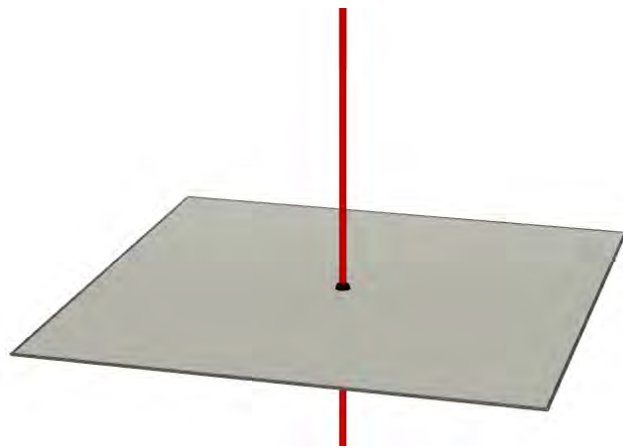
Plano Bisector : Permite construir el plano bisector de un ángulo formado por 3 puntos:

Se selecciona el primer punto, aparecerá un mensaje que dice: “Plano bisector de un ángulo empezando en el punto...”, luego se selecciona el punto que define el vértice del ángulo, mostrará un mensaje que dice: “Definido en el punto...” y por último se selecciona el tercer punto. Entonces quedará construido el plano bisector que divide el ángulo formado por 3 puntos.

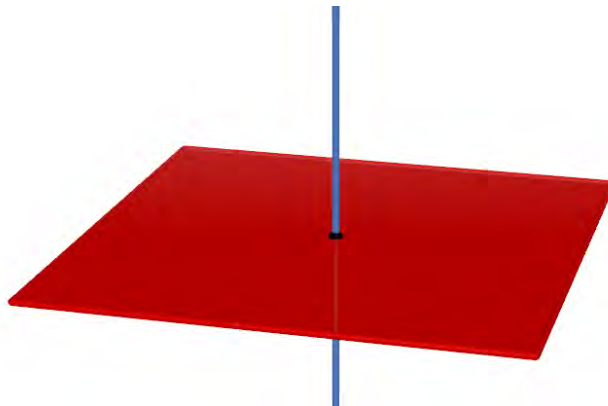


Perpendicular : Permite construir rectas perpendiculares o planos perpendiculares, tales como:

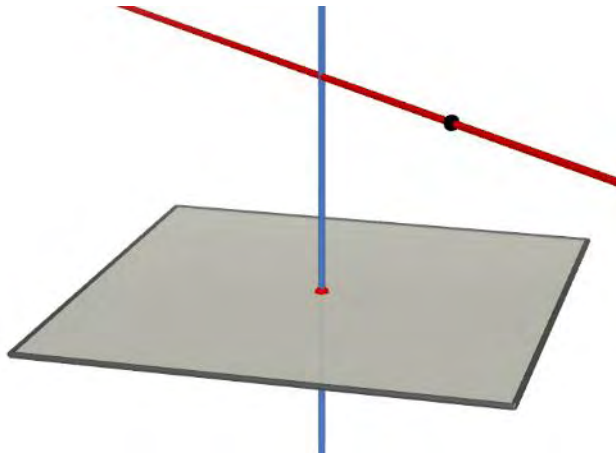
- Recta perpendicular a un plano por un punto: se selecciona el plano al cual se desea hacer la recta perpendicular, aparecerá el mensaje “recta perpendicular a este plano” y luego se selecciona el punto por el cual pasará la recta perpendicular a ese plano.



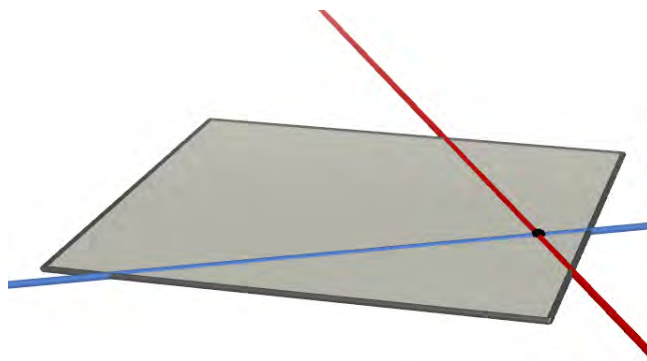
- Plano perpendicular a una recta por un punto: se selecciona la recta a la cual se desea hacer el plano perpendicular, mostrará el mensaje “plano perpendicular a esta recta” y luego se selecciona el punto por el cual pasará el plano perpendicular.




- Recta perpendicular a una recta por un punto exterior: Mientras se mantiene pulsada la tecla Ctrl del teclado, se selecciona la recta a la cual se desea hacer la recta perpendicular, aparecerá el mensaje “recta perpendicular a esta recta” y luego se selecciona el punto exterior por el cual pasará la recta perpendicular.

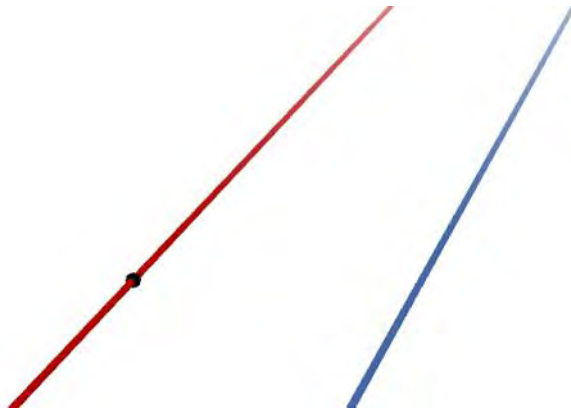


- Recta perpendicular a una recta por un punto cualquiera: Mientras se mantiene pulsada la tecla Ctrl del teclado, se selecciona el plano en el cual se desea hacer la recta perpendicular, aparecerá el mensaje “recta perpendicular en este plano”, luego se selecciona la recta a la cual se desea hacer la recta perpendicular, mostrará el mensaje “a esta recta” y finalmente se selecciona el punto por el cual pasará la recta perpendicular a la recta dada.




Paralela : Permite construir rectas o planos paralelos, tales como:

- Permite construir una recta paralela a una recta: se selecciona la recta a la cual se desea hacer la recta paralela, mostrará el mensaje “recta paralela a esta recta” y luego se selecciona el punto por el cual pasará la recta paralela.

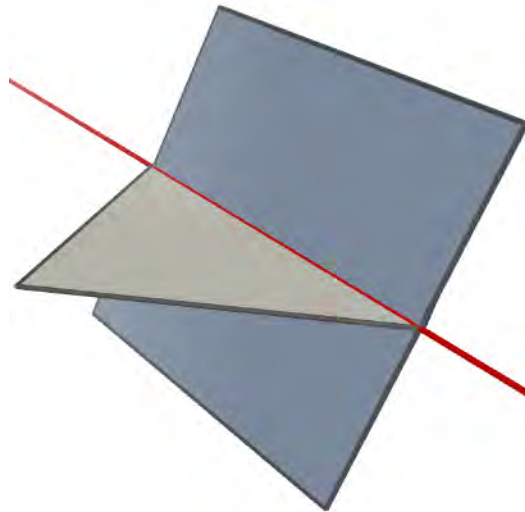


- Permite construir un plano paralelo a una superficie plana y que pase por un punto exterior: se selecciona el plano al cual se desea hacer el plano paralelo, aparecerá el mensaje “plano paralelo a este plano” y luego se selecciona el punto exterior por el cual pasara el plano paralelo.

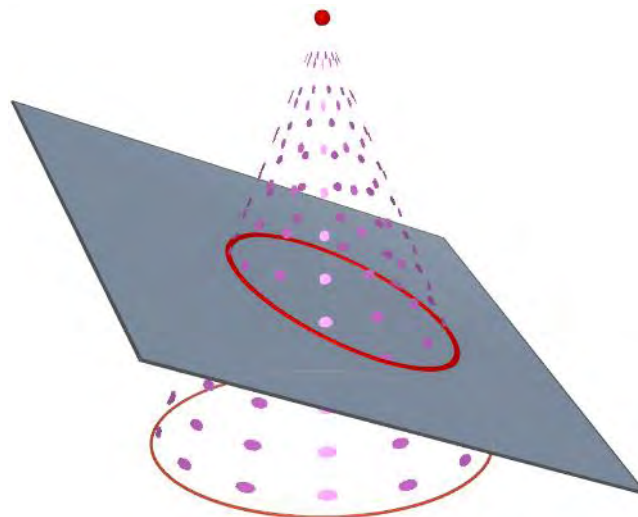



Curva de intersección : permite determinar la intersección de dos objetos y/o figuras tridimensionales:

- Permite construir la intersección de 2 planos: Se selecciona los dos planos que se interceptan.

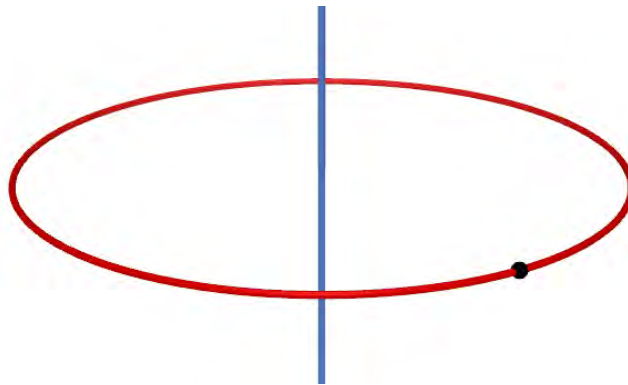


- Permite construir la intersección de un plano con un cono: Se selecciona el cono y el plano cortante.

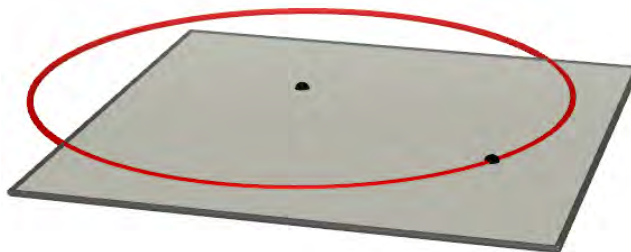


Circunferencia : Permite construir circunferencias de diferentes maneras:

- Circunferencia centrada sobre un eje dado: Se selecciona una recta en la cual aparecerá el mensaje “circunferencia alrededor de esta recta” y luego se selecciona un punto exterior a esta.



- Circunferencia definida por 2 puntos (centro y radio) sobre un plano: se selecciona el plano en el cual se desea hacer la circunferencia, aparecerá el mensaje “circunferencia en este plano”, luego se selecciona el punto que define el centro de la circunferencia, aparecerá el mensaje “centrada en un nuevo punto (sobre plano)” y finalmente se selecciona el punto que define el radio.



Anexo H

Propiedades, Definiciones y Teoremas

Propiedad de la adición de los números reales: Sean a, b, c y d , números reales.

$$(a = b) \wedge (c = d) \rightarrow (a + c) = (b + d)$$

Definición de segmentos congruentes: Dos segmentos son *congruentes* si, y solo si, tienen la misma medida. Por lo tanto si se sabe que $m\overline{AB} = m\overline{CD}$, puede decirse que \overline{AB} y \overline{CD} son congruentes, que \overline{AB} es congruente a \overline{CD} o bien que \overline{CD} es congruente a \overline{AB} .

Definición de ángulos congruentes: Dos ángulos son *congruentes* si, y solo si, tienen la misma medida. Por lo tanto si se sabe que $m\angle ABC = m\angle RST$, puede decirse que $m\angle ABC$ y $m\angle RST$ son congruentes, que $m\angle ABC$ es congruente a $m\angle RST$ o bien que $m\angle RST$ es congruente a $m\angle ABC$.

Definición de un punto entre otros dos puntos: B se encuentra entre A y C si, y sólo si, A, B y C son puntos distintos sobre la misma recta y $m\overline{AB} + m\overline{BC} = m\overline{AC}$

Definición de bisectriz: El rayo bisector o la bisectriz de un ángulo es el rayo cuyo punto externo es el vértice del ángulo y el cual divide al ángulo en dos ángulos congruentes.

Definición cono circular recto: Un *cono circular recto* es aquel en el cual la recta que pasa por el vértice y el centro de la base es perpendicular a la base. Con frecuencia, está perpendicular se denomina *eje* del cono. Los elementos de un cono circular recto son congruentes. La apotema de un cono circular recto es la longitud de un elemento del cono.

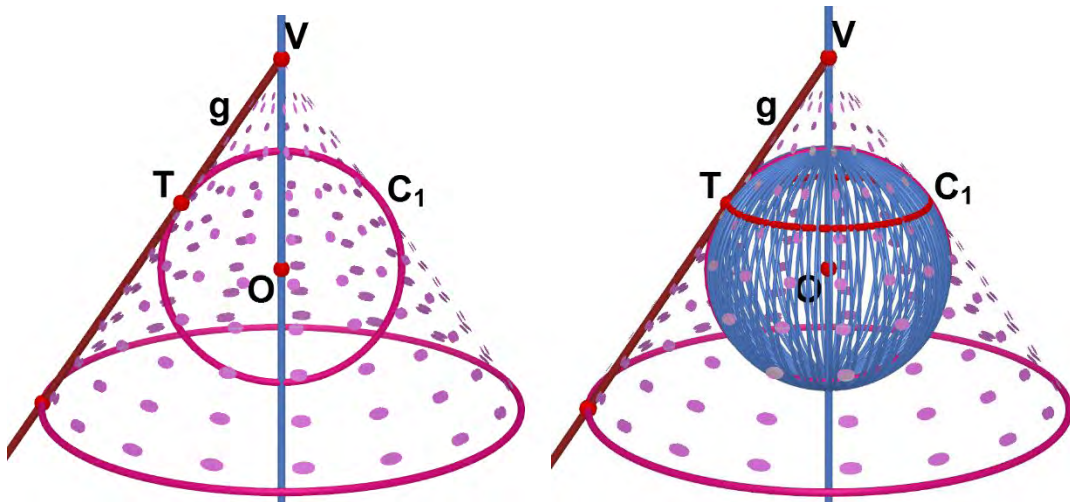
Determinación de un plano: Un plano puede determinarse geoméricamente por:

- Por tres puntos no alineados.
- Por una recta y un punto exterior a ella.
- Por dos rectas que se corten o sean paralelas.

Definición sección cónica: La curva formada por la intersección de un plano y una superficie cónica circular recta se llama *sección cónica*. Si el plano es perpendicular al eje, la cónica es un círculo. Si el plano es oblicuo al eje y corta todos los elementos, la cónica es una elipse. Si el plano es paralelo a uno y sólo a un elemento del cono, la cónica es una parábola. Si el plano es paralelo al eje, cortará ambas partes de la superficie, formando una cónica que es una hipérbola.

Definición de cono truncado: El cono truncado o tronco de cono es el cuerpo geométrico que resulta al cortar un cono por un plano paralelo a la base y separar la parte que contiene al vértice.

La curva de contacto de un cono y una esfera es una circunferencia: Dado el siguiente cono, y sea T el punto de tangencia entre la circunferencia C_1 y la generatriz g , al rotar el punto T alrededor del eje del cono la trayectoria que se describirá será una circunferencia.



Postulado 17 (el postulado L.A.L.): Dos triángulos son congruentes si dos lados y el ángulo que forman en uno son, respectivamente, congruentes a los dos lados y el ángulo que forman en el otro.

Teorema 4.14: Si dos triángulos tienen dos ángulos y el lado incluido de uno congruentes a los dos ángulos y el lado incluido correspondiente del otro, los triángulos son congruentes.

Teorema 5.17: la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180° .

Teorema 5.19: Si dos triángulos rectángulos tienen la hipotenusa y uno de los ángulos agudos de uno respectivamente congruentes a la hipotenusa y uno de los ángulos agudos del otro, los triángulos son congruentes.

Teorema 7.12: Si una recta, que se encuentra en el plano de un círculo, es perpendicular a un radio en su punto sobre el círculo, es tangente al círculo.

Teorema 7.13: Los segmentos tangentes desde un punto externo a un círculo son congruentes y forman ángulos congruentes con la recta que pasa por el punto y el centro del círculo.

Corolario 7.16 (Teorema de Tales): un ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.

Teorema 14.1: Si una recta intersecta a un plano que no la contiene, entonces la intersección es un solo punto. Si hubiera dos puntos de intersección comunes al plano y a la recta, la recta estaría en el plano.

Teorema 14.3: Por un punto dado pasa uno y sólo un plano perpendicular a una recta dada.

Teorema 14.4: Desde un punto no en un plano puede trazarse una y solo una perpendicular al plano.