

**COMPLEMENTARIEDAD PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LA
HOMOTECIA CON ARTEFACTOS COMO CABRI II PLUS Y PANTÓGRAFO. UN
ACERCAMIENTO A LAS REPRESENTACIONES HOMOTÉTICAS COTIDIANAS.**

JHONATAN ESTIVEN ORTEGA BETANCOURT

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO**

2017

**COMPLEMENTARIEDAD PARA LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE LA
HOMOTECIA CON ARTEFACTOS COMO CABRI II PLUS Y PANTÓGRAFO. UN
ACERCAMIENTO A LAS REPRESENTACIONES HOMOTÉTICAS COTIDIANAS.**

JHONATAN ESTIVEN ORTEGA BETANCOURT

**Trabajo de Grado presentado como
Requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas**

Asesor

**EDINSSON FERNÁNDEZ MOSQUERA
Magister en Educación Matemáticas**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
PROGRAMA DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SAN JUAN DE PASTO**

2017

NOTA DE RESPONSABILIDAD

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1ro del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

NOTA DE ACEPTACIÓN:

Director
Profesor Edinsson Fernández M.

Jurado
Profesor Libardo Jácome

Jurado
Profesora Yudis Ibarguen

San Juan de Pasto, Noviembre 27 del 2017.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar agradezco a Dios por haberme dado la vida, la salud, la paciencia, y el ánimo necesario para poder desarrollar éste Trabajo de Grado.

A mi director y profesor Edinsson Fernández M., por su colaboración, paciencia, y tiempo invertido en el desarrollo de éste trabajo; gracias a su exigencia y perseverancia, guío en forma correcta cada una de mis ideas, al igual que fomentó la perfección y construcción de otras. Doy gracias a mi Familia por su apoyo incondicional durante mi formación profesional, y su comprensión durante el transcurso de éste trabajo; sin ellos no habría sido posible.

A Nelly Erazo, quien me brindo durante todo el desarrollo de mi carrera un techo donde vivir en la ciudad de Pasto; a tal punto en que se convirtió en una madre para mí. Agradezco cada y uno de los favores recibidos, y sus buenas intenciones conmigo; su apoyo moral fue valioso para mí.

A mis amigos y compañeros, por estar presentes en los buenos y en los malos momentos, en particular a Cesar Bolaños y Jimmy Díaz, con quienes compartí toda mi carrera universitaria; haciendo de la vida universitaria una etapa importante e inolvidable para mí.

Al Liceo de la Universidad de Nariño, a la docente Sandra Viviana Escobar, y a los estudiantes: Gabriel Rodríguez Rosero, Juan Sebastián Peñafiel, Camilo Revelo, Tatiana Michelle Villota, y Alexandra Campiño, por brindarme el espacio y el tiempo necesario para desarrollar la implementación y cabalidad de éste trabajo.

A todos, gracias.

Jhonatan Ortega.

RESUMEN

Este trabajo presenta un estudio investigativo que promueve la enseñanza del concepto de *homotecia* para estudiantes de *noveno grado* en Colombia, bajo una nueva *propuesta didáctica* que integra un artefacto físico como el *pantógrafo*, y otro digital como el Ambiente de Geometría Dinámica *Cabri II Plus*, bajo un criterio de *complementariedad* de artefactos, que integra a su vez las *Representaciones Homotéticas Cotidianas* en el diseño de las actividades que hicieron parte de esta investigación.

Así mismo, se presentan resultados de una encuesta tipo *Likert* desarrollada en el transcurso de la investigación, la cual dio razones suficientes del porqué era importante desarrollar esta investigación. Análogamente, se muestra el diseño de las situaciones (*a-didácticas*) de esta investigación; su análisis *a priori* y *a posteriori*. Al final se muestran las *Conclusiones* que se obtuvieron al respecto, sobre el *uso complementario* de los artefactos que se utilizaron en esta investigación.

Palabras claves: Complementariedad, AGD, pantógrafo, Representaciones Homotéticas Cotidianas.

ABSTRACT

This work presents a research study that promotes the teaching of the concept of *homothety* for *ninth grade* students in Colombia, under a new didactic proposal that integrates a physical artifact such as the *pantograph*, and another digital one like the Dynamic Geometry Environment *Cabri II Plus*, under a criterion of *complementarity* of artifacts, which integrates the *Everyday Homothetic Representations* in designing activities that were part of this investigation.

Likewise, the results of a *Likert* survey developed during the course of the research, which gave sufficient reasons why it was important to develop this research. Analogously, the design of the situations (*a-didactic*) of this investigation is shown; his analysis *a priori* and *a posteriori*. At the end the *Conclusions* that were obtained in this regard, on the *complementary use* of the artifacts that were used in this investigation are shown.

Keywords: Complementarity, AGD, pantograph, *Everyday Homothetic Representations*.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS	10
LISTA DE TABLAS	12
RESUMEN.....	¡ERROR! MARCADOR NO DEFINIDO.
INTRODUCCIÓN	13
1. ASPECTOS GENERALES	16
1.1. Planteamiento del Problema	16
1.2. Justificación.....	18
1.3. Objetivos.....	26
1.3.1. Objetivo General.....	26
1.3.2. Objetivos Específicos	26
1.4. Antecedentes.....	27
2. ANÁLISIS PRELIMINARES	54
2.1. Dimensión Histórica – Epistemológica.....	55
2.1.1. Acercamiento Histórico del Concepto de Homotecia.....	55
2.1.2. Aspectos Matemáticos de la Homotecia	58
2.1.3. Historia y Descripción del Artefacto: Pantógrafo.....	60
2.2. Dimensión Cognitiva	66
2.2.1. Errores, Obstáculos y Dificultades	66
2.2.2. Uso Complementario Existente Entre Materiales Manipulativos y Cabri II Plus.....	71
2.2.3. Génesis Instrumental	75
2.3. Dimensión Didáctica	79
2.3.1. Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)	79
2.3.2. Acciones y Retroacciones de Cabri Géomètre II Plus y el Pantógrafo.....	84
2.3.3. Análisis Curricular.....	86
3. DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y ANÁLISIS A <i>PRIORI</i>.....	95
3.1. Análisis de las Secuencias Didácticas.....	96
3.1.1. Situación Didáctica No.1: Foto con tus compañeros.....	100
3.1.2 Situación Didáctica No.2: Uso del Pantógrafo	108
3.1.3. Situación Didáctica No.3: El eclipse de sol	120
3.1.4. Situación Didáctica No.4: Familia tangible de Homotecias.....	131
4. ANÁLISIS A <i>POSTERIORI</i> Y RESULTADOS.....	139

4.1. Marco contextual	139
4.2 Análisis a posteriori	141
4.2.1 Situación No. 1. “Foto con tus compañeros”	142
4.2.2 Situación No. 2. “Uso del Pantógrafo”	146
4.2.3 Situación No. 3. “El eclipse de sol”	151
4.2.4 Situación No. 4. “Familia tangible de homotecias”	158
4.3 Resultados	162
5. CONCLUSIONES	165
6. REFERENCIAS	170
7. ANEXOS	175
Anexo No. 1. Secuencia Cero: Desarrollo	175
Anexo No. 2. Primera sesión: Situación Didáctica No. 1: Registro fotográfico del desarrollo	179
Anexo No. 3. Segunda sesión: Situación Didáctica No. 2: Registro fotográfico empelando pantógrafo	180
Anexo No. 4. Tercera sesión: Situaciones Didácticas No. 3 y No. 4: Registro fotográfico haciendo uso del material virtual Cabri II Plus, pantógrafo y otros materiales físicos	181
Anexo No. 6. Producciones de los estudiantes - Situación No. 1.	182
Anexo No. 7. Producciones de los estudiantes – Situación No. 2.	187
Anexo No. 8. Producciones de los estudiantes – Situación No. 3.	194
Anexo No. 9. Producciones de los estudiantes – Situación No. 4.	199

SIGLAS UTILIZADAS

SIGLA	SIGNIFICADO
AC	Aprendizaje Colaborativo
AGD	Ambiente de Geometría Dinámico
EBP	Educación Básica Primaria
FGS	Figuras Geométricas Semejantes
IE	Institución Educativa
CN	Condiciones Necesarias
RHC	Representaciones Homotéticas Cotidianas
RPP	Razón, Proporción y Proporcionalidad
SGD	Software de Geometría Dinámico
TAD	Teoría Antropológica de la Didáctica
TD	Tecnologías Digitales
TG	Transformación(es) Geométrica(s)
TIC	Tecnologías de la Información y Comunicación
TSD	Teoría de las Situaciones Didácticas

Resumen de siglas utilizadas

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Balanza simulada para ecuaciones lineales	41
Figura 2: Acciones y retroacciones con Cabri II Plus	51
Figura 3. Aspectos desprendidos del teorema de Thales	57
Figura 4. Ejemplo de homotecia	59
Figura 5. Pantógrafo moderno	61
Figura 6. "Figura 11 del artículo"	63
Figura 7. Foto del tipo de pantógrafo usado en el método mencionado.....	64
Figura 8. Pantógrafo diseñado por Christopher	64
Figura 9. Parte de obra: Pantographice seu ars delineandi.....	65
Figura 10. Génesis instrumental.....	77
Figura 11. Relación entre situación didáctica y a-didáctica	82
Figura 12. Algunos materiales manipulativos empleados	98
Figura 13. Panorama de ubicación en el pantógrafo.....	116
Figura 14. Proceso de construcción	125
Figura 15. Esquema general.....	126
Figura 16. Construcción del punto L que define la posición de la luna.....	127
Figura 17. Panorama final.....	127
Figura 18. Panorama general (macro).....	128
Figura 19. Menú ayuda sobre herramienta "Homotecia"	129
Figura 20. Panorama final (Proceso Macro).....	129
Figura 21. Proceso inicial	135
Figura 22. Proceso final	136
Figura 23. Foto grupal de los estudiantes.	143
Figura 24. Relación de la actividad con la cotidianidad	144
Figura 25. Conclusión sobre actividad.....	145
Figura 26. Respuesta de los ítems F y G	145
Figura 27. Respuesta de ítems F y G un poco más acertadas.....	145
Figura 28. Montaje del pantógrafo.....	147
Figura 29. Trazo generado por estudiante con el pantógrafo.....	149

Figura 30. Respuesta de estudiante en ítem 1	149
Figura 31. Respuesta de estudiante ítem 2.....	150
Figura 32. Respuesta de estudiante en ítems 3 y 4	150
Figura 33. Respuesta de estudiante en los ítems del 5 al 8	150
Figura 34. Proceso de adaptación de datos por estudiante.....	152
Figura 35. Inicio de construcción del sistema.....	153
Figura 36. Proceso inicial del estudiante en el AGD	154
Figura 37. Proceso secundario del estudiante en el AGD.....	155
Figura 38. Proceso final generado por el estudiante con el AGD.....	156
Figura 39. Descripción del proceso anterior en palabras del estudiante.....	157
Figura 40. Respuesta del estudiante en el ítem a	157
Figura 41. Respuesta al ítem c	157
Figura 42. Trazo de la circunferencia de radio uno (1).....	159
Figura 43. Uso incorrecto del pantografo en la actividad, y verificación de resultados.....	159
Figura 44. Generación de circunferencia de razón cuatro (4), y verificación.....	160
Figura 45. Generación de circunferencia de razón ocho (8), y recorte.....	161
Figura 46. Soluciones presentadas por los estudiantes	161
Figura 47. Respuesta de estudiante en ítem f	162

LISTA DE TABLAS

Tabla No. 1. Resultados cuantitativos de encuesta realizada a docentes en ejercicio ..	20
Tabla No. 2. Resultados cuantitativos de los estudiantes	22
Tabla No. 3. Estructura de la Secuencia Didáctica	99
Tabla No. 4. Ejecución de la Secuencia Didáctica	141

INTRODUCCIÓN

En las aulas de matemáticas el uso correcto de *materiales didácticos* juega un papel fundamental en la adquisición de conceptos, relaciones y métodos matemáticos. En éste sentido ésta investigación fue dirigida hacia el diseño de una propuesta didáctica que giró en torno a la enseñanza del concepto de homotecia en estudiantes de *noveno grado* en Colombia, integrando artefactos como el pantógrafo y un Ambiente de Geometría Dinámica (AGD)¹ como el Cabri II plus; y las RHC. Estos recursos didácticos cumplieron un *uso complementario*², en la creación y en el desarrollo de las situaciones didácticas. A partir de esto, el trabajo contiene la siguiente organización.

En los ASPECTOS GENERALES de éste documento se abordan el Planteamiento del Problema, la Justificación, los Objetivos, y los Antecedentes. En cuanto a los Antecedentes, se presenta un breve resumen de las diferentes investigaciones más recientes relacionadas con el uso de materiales didácticos que conlleven a la construcción y elaboración conceptual de algunas TG, en particular la homotecia, al igual que aquellas que se relacionan con la enseñanza de éste concepto. Por tanto, se pudo clasificarlas en tres partes: investigaciones que hacen un *uso complementario* de materiales didácticos, aquellas que integran las TIC, y aquellas que no integran las TIC ni la *complementariedad* de artefactos.

En la Justificación se presenta un análisis obtenido de las pruebas tipo *Likert*³ realizadas con anterioridad a algunos profesores del magisterio, y estudiantes de primer semestre de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, de tal

1 Durante el desarrollo de este trabajo se hablará de Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) para dar cuenta del Software Cabri Géomètre II Plus como un artefacto.

2 Una postura de lo que se va a entender por uso complementario entre materiales manipulativos y virtuales, se encontrará en la sección 2.2.2 de éste documento, específicamente en la Dimensión Cognitiva del Marco Teórico tomado en consideración.

3 Las Pruebas tipo Likert son unas encuestas de tipo selectivo muy limitado que generalmente miden la frecuencia con que se realizan las acciones, por ejemplo incluye opciones de respuesta como: Siempre, Casi Siempre, Algunas Veces, y Nunca.

manera que se pudo sondear respecto al uso del concepto de homotecia, el uso de *Tecnologías Digitales (TD)*, y la complementariedad de los mismos, en las clases de matemáticas de los estudiantes de la región Sur Occidente de Colombia.

Por otro lado, en el Planteamiento del Problema, se mencionan algunas de las investigaciones consideradas en los Antecedentes, las cuales dan prueba de que ésta investigación no es ajena a interés investigativos que pretenden mejorar y encontrar nuevas propuestas didácticas que involucren el uso de artefactos manipulativos en la adquisición de conceptos matemáticos. Así mismo, se mencionan algunas de las preguntas abiertas inmersas dentro de estas investigaciones, las cuales dieron forma y sentido al origen de la pregunta de investigación; en la que se buscó que el pantógrafo y el Cabri II Plus fomenten la comprensión del concepto de homotecia para estudiantes de noveno grado en Colombia, bajo un *uso complementario*, y haciendo uso de las RHC.

En cuanto a los Objetivos, se planteó un objetivo general que responde a la pregunta de esta investigación, y los objetivos específicos que ayudaron a cumplir con el objetivo general.

En los ANÁLISIS PRELIMINARES se abordaron tres dimensiones usuales en Didáctica de las Matemáticas, de acuerdo con la metodología de micro-ingeniería didáctica: Dimensión Histórica – Epistemológica, Dimensión Cognitiva y Dimensión Didáctica.

En la Dimensión Histórico – Epistemológica, se presenta un acercamiento histórico respecto al concepto de homotecia, al igual que se exhibe su aspecto matemático. Por último, se menciona la historia y descripción del pantógrafo.

En la Dimensión Cognitiva, se estudia el enfoque instrumental de Verillón y Rabardel (1995, citado en Maschietto & Trouche, 2010), con el fin de entender la utilización de artefactos en el campo de la investigación de las TIC. Igualmente, se menciona respecto a *Errores, Obstáculos y Dificultades*, tal y como se entienden en Socas

(2000), análogamente, se mencionan algunos de los *errores* cometidos por los estudiantes cuando estudian el concepto de homotecia. Por último, se presenta la existencia del *uso complementario* entre materiales manipulativos, y el Cabri II Plus.

La Dimensión Didáctica se fundamentó en la TSD desarrollada por Brousseau (2007). Donde el estudiante será el propio gestor de su conocimiento⁴, mediante la interacción con los medios (pantógrafo y Cabri II Plus), el profesor deberá jugar un papel de orientador. Así mismo, se muestran las *acciones* y *retroacciones* que pueden realizar con éstos artefactos.

Por último, se muestra un análisis curricular, cuya referencia fueron los Estándares Básicos de Competencias para el área de Matemáticas, planteados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) en el año 2006, acorde a los objetivos de ésta investigación.

En el DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y ANÁLISIS *A PRIORI*, se muestra el diseño y el análisis de una adaptación de la secuencia didáctica donde se plantean las posibles soluciones de cada situación.

Por su parte, en los ANÁLISIS *A POSTERIORI* Y RESULTADOS, se analizaron las producciones que realizaron los estudiantes, demostrando y confrontando los planteamientos propuestos en el análisis *a priori*. De igual forma, se exponen los resultados obtenidos.

Para finalizar, en las CONCLUSIONES, se validan o refutan los objetivos, la hipótesis y la pregunta de investigación que se mencionó al inicio de la investigación, examinando los resultados y los logros alcanzados, presentados en ésta investigación.

⁴ En la TSD se ha una distinción entre *Saber* y *Conocimiento*, el primero es institucional, es decir, recibe la sanción de una comunidad de “sabios”, quienes deciden lo que es ese saber. La segunda hace referencia a una experiencia personal.

1. ASPECTOS GENERALES

1.1. Planteamiento del Problema

No es extraño que esta investigación vaya en la misma vía de muchas otras que se presentan en los Antecedentes de éste documento, en la cual todas pretenden mejorar y encontrar nuevas propuestas didácticas que involucren el uso de artefactos manipulativos capaces de generar un conocimiento empírico e intuitivo que promueva la exploración, la comunicación, la discusión y la reflexión entre los estudiantes. En general, las TG no son un caso aislado a esta situación, puesto que se han realizado diversas investigaciones en diferentes tópicos relacionados con ellas. Por ejemplo: Hoyos (2006), Iburgüen y Realpe (2012), Hernández y Bastidas (2014), y muchos más que se mencionarán en los Antecedentes.

Esta investigación fue dirigida hacia el diseño de una propuesta didáctica que giró en torno a la enseñanza del concepto de homotecia con estudiantes de noveno grado⁵ de la Educación Básica Secundaria de Colombia, integrando artefactos como: el Pantógrafo y Cabri II plus; a través de *situaciones didácticas* que promuevan las RHC bajo un criterio de *complementariedad*. Así pues, éste propósito no se alejó de los intereses investigativos que se mencionarán en los antecedentes, y genera aportes significativos que fomentan *estrategias didácticas*⁶ que involucran el uso de tecnologías con el concepto de homotecia, fomentando el interés y uso del mismo en las clases de matemáticas; generando *retroacciones* positivas en cuanto a la adquisición del mismo y la solución de problemas.

De esta manera, en algunos antecedentes que se presentan más adelante, se pueden encontrar algunas preguntas de investigación abiertas tales como: ¿En particular, interesaría dar cuenta de patrones de uso o de esquemas de utilización del

⁵ La investigación se realizó con cinco (5) estudiantes de noveno grado de la IE Liceo de la Universidad de Nariño de la ciudad de Pasto.

⁶ Refiriéndose a todas a aquellos materiales didácticos que se convierten en herramientas o estrategias didácticas para los docentes de Matemáticas.

artefacto para incorporarlo a la resolución de problemas? (Hoyos, 2006) ¿Cómo el docente puede trabajar el uso complementario empleando distintas clases de materiales, como medio para alcanzar un aprendizaje significativo? (Hernández & Bastidas, 2014) ¿De qué manera la complementariedad de artefactos favorece el aprendizaje de otras transformaciones geométricas? (Ibargüen & Realpe, (2012).

De acuerdo a las mencionadas preguntas, se dio respuesta a la pregunta que da pie a esta investigación:

¿Cómo organizar una situación didáctica bajo una función complementaria de utilización de artefactos como el Cabri y el pantógrafo a través de las RHC, para fomentar el aprendizaje de las propiedades de la homotecia en estudiantes de grado noveno de Básica secundaria?

1.2. Justificación

Dentro del desarrollo investigativo de éste trabajo de Pregrado, es substancial preguntarse: ¿Por qué es importante resolver éste problema? Pues bien, para ello se ha considerado la tarea de buscar pruebas palpables que den garantía de que el concepto de homotecia no se estudia, o se pasa de modo muy ligero en las clases de matemáticas en muchos de los colegios del Departamento de Nariño. Al igual que para garantizar que muy pocos profesores utilizan TD, ni mucho menos cumplen un papel *complementario*. Para ello, se desarrolló una encuesta tipo Likert con Profesores de Matemáticas de diferentes municipios del Departamento de Nariño, quienes se encontraban realizando un Diplomado sobre Formación de Docentes en la Universidad de Nariño. De la misma manera, se realizó una encuesta del mismo estilo a estudiantes de primer semestre de Licenciatura en Matemáticas de la misma Universidad. Para el análisis, se procedió a realizar un *análisis cualitativo y cuantitativo*.

Fueron trece (13) profesores y treinta (30) estudiantes encuestados, respondieron a cada uno de los ítems que se les planteó en la prueba. Las pruebas (Ver Tabla No. 3) fueron previamente diseñadas: divididas en diferentes ítems correlacionados, con el fin de confrontar las diferentes respuestas obtenidas en cada caso. Cada ítem tuvo opciones de respuesta como: Siempre (S), Casi siempre (CS), Algunas veces (AV) y Nunca (N).

Para el análisis cuantitativo, se procedió a calcular los porcentajes de frecuencia de cada opción de respuesta en cada ítem, para posteriormente generar un análisis cualitativo. La siguiente *Tabla No. 1* muestra los resultados cuantitativos obtenidos en la encuesta realizada a docentes:

No.	PREGUNTA	EN PORCENTAJES			
		S	CS	AV	N
1.	Durante el año lectivo pasado, mis estudiantes pudieron reconocer algunos conceptos matemáticos relacionados con las Transformaciones Geométricas en el plano (Translaciones, Rotaciones, Simetrías, Homotecias).	15.4	7.7	76.9	0

No.	PREGUNTA	EN PORCENTAJES			
		S	CS	AV	N
2.	El concepto de Homotecia usualmente lo enseño en el grado de escolaridad correspondiente y dispongo de tiempo para actividades geométricas de ésta Transformación en el plano.	7.7	38.4	46.2	7.7
3.	Mis estudiantes reconocen lo que es una <i>Homotecia</i> , y lo que no es una <i>Homotecia</i> .	23.1	15.4	53.8	7.7
4.	Mis estudiantes aprenden a reconocer una Transformación Geométrica de <i>Homotecia</i> en un ambiente natural (cuando toman una fotografía, cuando utilizan una proyección con un chorro de luz, cuando realizan un dibujo, cuando miran objetos a la distancia, etc.)	0	23.1	53.8	23.1
5.	Al comparar dos figuras geométricas <i>semejantes</i> , mis estudiantes son capaces de identificar una <i>razón</i> entre las figuras.	7.7	46.2	38.5	7.7
6.	Como docente en ejercicio, me intereso y me gusta dictar temas relacionados con las <i>Transformaciones Geométricas</i> .	23.1	53.8	15.4	7.7
7.	En el desarrollo de mis clases, utilizo algunas Tecnologías Digitales (<i>Computadores, Software, Tablet, Celulares Smartphone, Calculadoras Algebraicas y Gráficas, etc.</i>).	23.1	23.1	53.8	0
8.	Mis estudiantes conocen y aprenden a manejar Software para el aprendizaje de la geometría Escolar (como por ejemplo, Cabri II Plus, GeoGebra, GEOLOG, Geometry Inventor, Geometric Supposer, Thales, etc.).	7.7	7.7	61.5	23.1
9.	Mis estudiantes comprenden el significado y el comportamiento del valor de la razón (<i>R</i>) al variarse en los siguientes intervalos numéricos: $0 < R \leq 1$ o $-1 \leq R < 0$	23.1	7.7	53.8	15.4
10.	Como docente en ejercicio, me interesa conocer o seguir conociendo sobre el uso de Tecnologías Digitales en las clases de Matemáticas.	84.6	15.4	0	0
11.	El uso de Tecnologías podría promover una mejor comprensión de los conceptos matemáticos en mis estudiantes.	76.9	23.1	0	0
12.	En la Institución Educativa donde laboro como docente de matemáticas, contamos con los recursos, materiales didácticos, artefactos, ayudas audio visuales, computadores, tabletas, calculadoras, etc., necesarios para desarrollar una clase de matemáticas.	15.4	23.1	53.8	7.7

No.	PREGUNTA	EN PORCENTAJES			
		S	CS	AV	N
13.	Mis estudiantes pueden llegar a generar una ampliación o reducción de una figura geométrica en el plano cartesiano.	30.8	23.1	46.2	0

Tabla No. 1. Resultados cuantitativos de encuesta realizada a docentes en ejercicio

Análisis Cualitativo de la Tabla No. 1:

Considerando el hecho de que las opciones de respuesta: S, y CS son opciones de respuesta favorables, entonces, se optó por considerarlas con igual credibilidad. Las opciones de respuesta: AV, y N por su parte, fueron consideradas como opciones desfavorables. No obstante, se consideró con un mayor grado de aceptabilidad la respuesta AV. Así pues:

De las ítems 7, 8, 10, 11 y 12:

Se puede inferir que del total del grupo de profesores de matemáticas encuestados, se interesa un 84.6% de ellos en el uso de las TD en el desarrollo de sus clases. Al igual un 76.9% creen que el uso de las mismas podría mejorar la comprensión de conceptos matemáticos en sus estudiantes. Por otra parte, en muy pocas ocasiones más de la mitad de ellos no cuentan con los recursos necesarios otorgados por parte de sus instituciones de procedencia, pero, de manera no tan frecuente, un 53.8% han utilizado las TD en sus clases. No obstante, un 61.5% de ellos, afirma que sus estudiantes no aprendieron a utilizarlas como medios para solucionar Problemas Matemáticos.

De los ítems 1, 2, 3, y 6:

Se puede afirmar que la gran mayoría de ellos (76.9% de condición favorable) se interesan por dictar temas relacionados con las TG. Aunque, la gran mayoría de sus estudiantes (76.9%) en muy pocas ocasiones aprenden a dominar conceptos matemáticos relacionados con las TG. Por otra parte, afirman que en muy pocas

ocasiones (53.9% de condición desfavorable) disponen del tiempo necesario para enseñar el concepto de homotecia; aunque una buena cantidad de docentes (46.1% condición favorable) afirma dictar éste tema en sus clases.

De los ítems 4, 5, 9 y 13:

Más de un 50% garantizó que sus estudiantes pueden identificar una Razón entre dos Figuras Geométricas Semejantes (FGS). Pero, afirman en un 69.2% de condición desfavorable que sus estudiantes no reconocen el comportamiento de la homotecia al variar la Razón en los intervalos: $0 < R \leq 1$ o $-1 \leq R < 0$. Es decir, sus estudiantes no generaron un pensamiento Dinámico del comportamiento de la Homotecia. Además, dan prueba de que sus estudiantes no reconocen lo que no es una Homotecia, y no son capaces de identificar cuando esta se presenta en un ambiente natural (76.9% de condición desfavorable). Por otra parte, más de la mitad de ellos afirmó que sus estudiantes pueden generar una ampliación o reducción de una figura geométrica en un Plano Cartesiano.

La siguiente Tabla No. 2 muestra los resultados cuantitativos obtenidos en la encuesta realizada a los estudiantes:

No.	PREGUNTA	EN PORCENTAJES			
		S	CS	AV	N
1.	En el proceso de mi formación académica pude conocer algunos conceptos relacionados con las Transformaciones Geométricas en el plano (<i>Translaciones, Rotaciones, Simetrías, Homotecias</i>).	3.2	32.3	48.4	16.1
2.	En el proceso de mi formación académica conocí muy bien el concepto de Homotecia.	0	0	16.1	83.9
3.	Puedo reconocer lo que es una Homotecia, y lo que no es una Homotecia.	0	0	12.9	87.1
4.	Puedo reconocer una Transformación Geométrica de <i>Homotecia</i> en un ambiente natural (cuando tomo una fotografía, cuando utilizo una proyección con un chorro de luz, cuando realizo un dibujo, cuando miro objetos a la distancia, etc.)	0	3.2	19.4	77.4
5.	Mi profesor de Matemáticas, de Bachillerato, se interesó por enseñar las <i>Transformaciones</i>	0	41.9	45.2	12.9

No.	PREGUNTA	EN PORCENTAJES			
		S	CS	AV	N
	<i>Geométricas (Translaciones, Rotaciones, Simetrías, Homotecias).</i>				
6.	Mi profesor de Matemáticas, de Bachillerato, utilizó algunas Tecnologías Digitales (<i>Computadores, Software, Tabletas, Celulares Smartphone, Calculadoras Algebraicas y Gráficas, etc.</i>) en sus clases de Matemáticas.	6.4	16.1	51.6	25.8
7.	Comprendo el comportamiento y el significado del valor de la razón (<i>R</i>) de la homotecia; También conocido como: factor de ampliación o reducción, achicamiento o agrandamiento, o magnitud, al hacerse variar entre los siguientes intervalos numéricos: $0 < R \leq 1$ o $-1 \leq R < 0$	0	16.1	25.8	58.1
8.	En el bachillerato, pude conocer y manejar Software para el aprendizaje de la geometría (como por ejemplo, <i>Cabri II Plus, GeoGebra, GEOLOG, Geometry Inventor, Geometric Supposer, Thales, etc.</i>).	3.2	12.9	19.4	64.5
9.	Me interesa conocer o seguir conociendo sobre el uso de Tecnologías Digitales en las clases de Matemáticas.	93.6	6.4	0	0
10.	Al comparar dos figuras geométricas semejantes en el plano, puedo establecer una razón (<i>R</i>) entre ellas.	0	54.8	25.8	19,4
11.	Creo que el uso de tecnologías podría promover una mejor comprensión de los conceptos matemáticos.	74.2	19.4	6.4	0
12.	En mi Colegio de donde salí, contaba con los recursos, materiales didácticos, artefactos, ayudas audio-visuales, computadores, etc., que fueron necesarios para desarrollar una clase de matemáticas.	9.7	32.3	41.9	16.1
13.	Puedo determinar si se puede encontrar las coordenadas de los vértices de una figura geométrica cuando se amplía o reduce de tamaño.	3.2	32.3	48.4	16.1
14.	Dadas dos figuras geométricas semejantes en el plano, puedo encontrar las coordenadas del <i>Centro Homotético</i> .	0	9.7	29.0	61.3

Tabla No. 2. Resultados cuantitativos de los estudiantes

Análisis cualitativo de la Tabla No. 2:

Análogamente al análisis de la *Tabla No. 1*, se consideró que las opciones de respuesta: S, y CS son opciones de respuesta favorables, por ende, se les otorgó la misma credibilidad. Las opciones: AV y N de igual forma, fueron consideradas como opciones desfavorables, no obstante, se le dio un mayor grado de aceptabilidad a la respuesta AV. Así pues:

De los ítems 6, 9, 11 y 12:

Se trata de una población estudiantil interesada (93.6%) en el uso de las TD en las clases de Matemáticas; considerando que estas pueden mejorar la comprensión de conceptos matemáticos. La gran mayoría (77.1% de condición desfavorable) de ellos afirma que sus profesores de matemáticas en muy pocas ocasiones usaron las TD en sus clases. Puesto que, existió una tendencia desfavorable (58%) acorde a la disponibilidad de recursos por parte de los colegios de procedencia, Sin embargo, un número razonable de ellos afirmaron tener condiciones favorables de recursos en sus colegios (42%).

De los ítems 1, 2, 5 y 8:

Los estudiantes en muy pocas ocasiones (32.3%) pudieron conocer Conceptos relacionados con TG. Por ende, el panorama acorde al interés de los docentes respecto a la enseñanza de estos conceptos, es desfavorable (58.1%). Por otra parte, afirmaron no haber visto el concepto de homotecia (83.9%), ni mucho menos haber aprendido a manejar algún tipo de Software especializado para comprender conceptos relacionados con la Geometría (64.5%).

De los ítems 3, 4, 7, 10, 13 y 14:

Afirmaron no distinguir una homotecia de una no homotecia (87.1%), al igual que no son capaces de identificarla en un ambiente natural (77.4%). Aunque ellos afirman en el ítem 2 no haber visto el concepto de Homotecia (83.9%), se contradicen en el ítem 10, puesto que afirman que son capaces de identificar una Razón entre dos FGS (54.8%), no obstante, desconocen el comportamiento de una homotecia al variar su Razón entre los intervalos $0 < R \leq 1$ ó $-1 \leq R < 0$ (83.9% de condición desfavorable). Por otra parte, no son capaces de identificar el centro homotético de una figura en el plano cartesiano (90.3% de condición desfavorable), y en muy pocas ocasiones identifican las coordenadas de los vértices de una figura geométrica (64.5% de condición desfavorable).

Conclusión general

Tanto profesores y estudiantes están de acuerdo con el uso de TD en las clases de matemáticas, puesto que consideran que estas pueden mejorar la comprensión de conceptos matemáticos. Y aunque en algunos colegios se cuenta con algunos recursos económicos y materiales didácticos, en muy pocas ocasiones fueron usados para mejorar la comprensión de conceptos matemáticos, ni mucho menos tomaron un carácter complementario. Por esta razón, los estudiantes no aprendieron a usar tecnologías como medios para solucionar problemas matemáticos.

Aunque los docentes afirman tener un interés por enseñar temas relacionados con las TG, los estudiantes afirman que realmente no existe ese interés. Por otra parte, los docentes en su mayoría no disponen del tiempo necesario y suficiente para dictar el concepto de Homotecia, por ende, éste concepto matemático se pasa de modo ligero o no se enseña. Los estudiantes por su parte afirman no haber visto éste concepto en algún momento.

Respecto a los ítems que involucran preguntas conceptuales hechas respecto al concepto de Homotecia, se concluye que: aunque los profesores garantizan que sus estudiantes pueden identificar una Razón entre dos FGS, realmente no existe una

comprensión significativa, puesto que los estudiantes no son capaces de identificar una homotecia en un ambiente natural, al igual que no identifican una homotecia de una no Homotecia. No obstante, no se genera un pensamiento Dinámico respecto a la Razón al variarse en los intervalos $0 < R \leq 1$ o $-1 \leq R < 0$. Acción que puede movilizarse por un AGD como Cabri II plus. Por otra parte, los profesores concibieron que sus estudiantes pueden generar una homotecia en el plano cartesiano, pero, los estudiantes se muestran inseguros frente a tal afirmación; dando credibilidad a lo afirmado por los docentes respecto a que sus estudiantes tienen dificultades para entender conceptos relacionados con las TG.

De manera general se puede concluir que el concepto de homotecia se pasa de modo ligero o no se enseña, por tal razón, será de gran importancia realizar una investigación que fomente el uso del mismo en las clases de matemáticas a través de propuestas didácticas que mejoren la comprensión del mismo, acompañadas por el uso complementario de materiales didácticos como Cabri II Plus y Pantógrafos, que garanticen un aprendizaje significativo de las propiedades de homotecia acorde a las RHC y a la resolución de problemas matemáticos.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

- Determinar el uso complementario de artefactos manipulativos como el *Pantógrafo* y *Cabri II Plus* en el aprendizaje de la Homotecia para estudiantes de *grado noveno* de la Educación Básica Secundaria.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Diseñar una *secuencia didáctica*⁷, que comprometa el uso complementario entre el *Pantógrafo* y *Cabri II Plus* cuando se les presenta RHC a estudiantes de *grado noveno* de la Educación Básica Secundaria de Colombia, empleando la metodología de *micro-ingeniería didáctica*.
- Analizar las diferentes estrategias de solución realizadas por los estudiantes cuando hicieron un uso complementario de estos artefactos para que comprendieran las propiedades matemáticas de la *homotecia*.

⁷ una secuencia didáctica es una serie de actividades correlacionadas (interrelacionadas, en las cuales, cada actividad se complementa y amplía con la anterior) que pretenden enseñar un contenido educativo.

1.4. Antecedentes

Para poder alcanzar un conocimiento en cuanto a las TG, en particular, sobre homotecia y su relación con el empleo de tecnologías para su comprensión, es necesario investigar la forma de cómo los estudiantes interactúan con el concepto mismo y de qué manera las diferentes tecnologías (materiales y recursos didácticos⁸) han aportado al entendimiento del significado de las propiedades geométricas intrínsecas de esta Transformación.

Resultados recientes de investigación han confirmado que la integración de Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) en los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las Matemáticas han sido exitosas. Por otro lado, es importante mencionar que diferentes posturas teóricas en Educación Matemática han emergido recientemente a la hora de estudiar de qué manera los estudiantes logran comprender propiedades matemáticas de objetos y nociones geométricas cuando se utilizan máquinas articuladas o artefactos físicos mecánicos (pantógrafo, simetrizador, elipsógrafo, parabológrafo, hiperbológrafo, etc.) como un medio para trazar figuras geométricas (García & Vargas, 2014 ; Hoyos, 2006 ; Ibargüen & Realpe, 2012 ; Iranzo & Fortuny, 2009 ; Morera, Fortuny & Planas, 2012).

En particular, para el caso de homotecia, en la Geometría escolar, se ha comprobado que algunos profesores pasan por alto o bien, estudian de un modo muy ligero éste concepto (Candía & Galleguillos, 2011).

En consecuencia, en esta sección de éste documento, se presentan algunas investigaciones recientes acorde a la problemática mencionada. Es por esto que se consideró una elección de artículos contemporáneos desde las dos últimas décadas, accediendo a diferentes bases de datos especializadas o en repositorios especializados en Educación Matemática, con el fin de garantizar una verdadera calidad en el contenido de los mismos.

⁸ Refiriéndose en este caso a materiales virtuales como el Cabri II Plus.

Por lo tanto, para efectos de presentación de los antecedentes se consideraron 14 estudios que figuran en diferentes modalidades de presentación de informes de investigación alrededor de esta problemática tales como: ponencias, artículos, cursillos y tesis de Pregrado. Esta masa documental fue clasificada en tres categorías con el propósito de facilitar el manejo de la información presente en cada uno de ellos; a saber:

1. Estudios sobre la Complementariedad de Artefactos.
2. Estudios Sin uso de las TIC.
3. Estudios que integran las TIC.

A continuación, se presentan cada una de ellas:

Estudios sobre la Complementariedad de Artefactos. Hace referencia a los trabajos de investigación que se basan en el uso complementario de artefactos físicos y virtuales como: pantógrafos, simetrizadores, palillos, AGD, plastilina, etc., en complementariedad con el uso de las TIC como por ejemplo, el Cabri.

Al respecto se define artefacto a la luz de la ergonomía cognitiva ⁹según Rabardel (2011):

Verillon y Rabardel (1995; citado por Trouche, 2005), Trouche (2005) y Maschietto y Trouche (2010), quienes han desarrollado el enfoque instrumental en el campo de las TIC en Educación Matemática, establecen las diferencias entre artefacto e

⁹ La Ergonomía Cognitiva, definida por la Asociación Internacional de Ergonomía (IEA):

Se ocupa de los procesos mentales, tales como la percepción, la memoria, el razonamiento y la respuesta motora, que afectan a las interacciones entre los seres humanos y otros elementos de un sistema. Los temas relevantes incluyen carga de trabajo mental, la toma de decisiones, el rendimiento experto, la interacción persona – computadora, la fiabilidad humana, el estrés laboral y la forma como estos pueden estar relacionados con el diseño de los sistemas humanos. La ergonomía cognitiva estudia los procesos de cognición en el trabajo y ajustes operativos, a fin de optimizar el bienestar humano y el rendimiento del sistema.

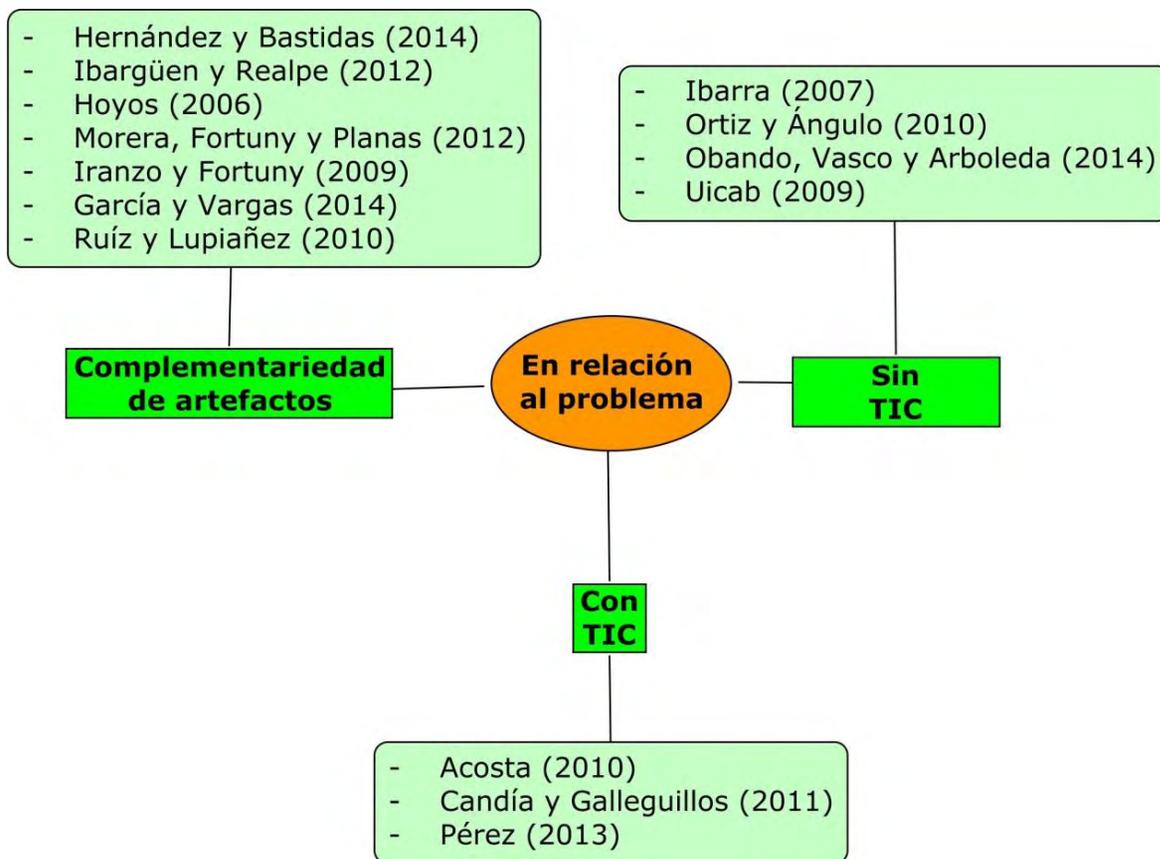
instrumento. Un artefacto se utiliza para referirse a las cosas susceptibles de un uso, es lo que ha sido elaborado por humanos para “inscribirse en actividades intencionadas”, por lo que los artefactos pueden ser materiales u *objetos abstractos (simbólicos)*. Los artefactos es lo dado al sujeto. Mientras que el instrumento es lo que el sujeto construye a partir del artefacto, incluye las acciones del sujeto con el artefacto para realizar una tarea (los usos que le da) y a uno o varios esquemas de utilización asociados. El instrumento es psicológico o material, y en consecuencia es subjetivo, relacionado con la actividad que hace el sujeto. El artefacto se convierte en instrumento cuando el sujeto soluciona y piensa un problema matemático dado con dicho artefacto (pág. 37).

Estudios *Sin* uso de las TIC. Aquí se consideran aquellos trabajos cuyo fin es trabajar el concepto de la homotecia, pero sin la intervención de artefactos o tecnologías.

Estudios que integran las TIC. Esta clase de artículos agrupa aquellos trabajos de investigación en los que se toma las TIC como un medio para la comprensión de propiedades, conceptos y procedimientos matemáticos; y que además fueron utilizadas en secuencias de enseñanza¹⁰ o las clases de matemáticas.

De acuerdo con lo anterior, se construyó el *Mapa Conceptual No. 1*, donde se ilustra un panorama más claro de acuerdo con la masa documental recolectada y clasificada en cada categoría. Posteriormente se reseñará cada uno de los documentos clasificados.

¹⁰ Conjunto de actividades educativas encadenadas que permiten abordar un objeto de estudio.



Mapa Conceptual No. 1: Clasificación de antecedentes

En la categoría de Complementariedad de Artefactos, se encontraron siete investigaciones. El primero es un Trabajo de Grado a nivel de Pregrado realizado por Hernández y Bastidas (2014) en Pasto (Colombia), denominado: *Uso complementario de materiales manipulativos y del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D en la comprensión de las propiedades geométricas del cubo*, donde se presenta una investigación con base en el *uso complementario* entre materiales manipulativos como: palillos, plastilina y cartulina, con el AGD Cabri 3D, cuyo fin fue promover la comprensión matemática y el desarrollo del aprendizaje de las propiedades geométricas del cubo en estudiantes de quinto grado de Educación Básica Primaria (EBP) en Colombia, de una Institución Educativa (IE) publica de Nariño¹¹. Para ello, se

¹¹ Este Trabajo de Grado se llevó a cabo en la IE Normal Superior Pio XII del municipio de Pupiales del departamento de Nariño, la secuencia didáctica diseñada fue aplicada a cinco (5) estudiantes de grado quinto de ésta institución, durante un periodo de nueve (9) días en la jornada diurna (7:00 a.m. a 12:00 pm).

tomó como hipótesis principal el hecho de que estos artefactos cumplen con una *función complementaria* entre ellos.

El marco teórico que dio luz a ésta investigación fue la simbiosis entre tres dimensiones de análisis: La *Histórico – Epistemológica*, cuando estudiaron los teoremas, definiciones y propiedades matemáticas en los *Elementos* de Euclides, relacionadas estrechamente con el Cubo. La *Cognitiva*, donde se tuvo en cuenta la Génesis Instrumental de Rabardel (2011) y Verillon y Rabardel (1995, citados en Maschietto & Trouche, 2010) y la *Didáctica*, donde se tuvo en cuenta la TSD de Brousseau (2007) y un análisis curricular que las autoras realizaron al respecto. Asimismo, se tomó como base la *micro-ingeniería didáctica* (Artigue, 1995) como metodología de investigación principal, estudio que fue llevado a cabo con pocas estudiantes, quienes no sabían ni conocían nada al respecto del manejo del AGD Cabri 3D.

La secuencia didáctica presentada a los estudiantes constó de las siguientes situaciones:

- Cubos con palillos: Mediante el uso de palillos y plastilina se construyeron cubos, relacionando los materiales con las propiedades geométricas del cubo. Así: bolitas de plastilina serían vértices, palitos aristas, y cuadrados conformados por estos serían las caras del cubo; además de determinar número de vértices, caras, y aristas. En conclusión, se afirmó cumplir con el objetivo, al igual que existió una relación con los conocimientos previos de los estudiantes.
- Cubo con Cabri 3D: con el Cabri 3D, y tres archivos denominados: **Poliedros platónicos.cg3**, **Cajita.cg3** y **Cubo.cg3**, se desarrolló ésta actividad. En el primer archivo se trabajó diferentes poliedros; identificando en cada uno el número de aristas, vértices, y caras. En el segundo se presentó un prisma recto, el cual debió ser explorado para responder interrogantes. El último archivo motivó a realizar algunas *acciones* sobre un cubo para responder algunas preguntas. En conclusión, el número de preguntas y *acciones* con el AGD

fomentó tiempo extra al planeado. Así mismo, los estudiantes tuvieron algunas dificultades en el desarrollo de ésta actividad.

- Los Hexaminos: en ésta actividad los estudiantes trabajaron con 22 hexaminos¹². Y mediante la exploración y manipulación de éstos, los estudiantes debían descubrir cuáles de ellos formaban un cubo, al igual que las razones que permiten clasificarlos, y las condiciones respecto a el área y el perímetro. A manera de conclusión, se estableció que se cumplió con el objetivo propuesto.
- Desdoblado el Cubo: la docente¹³ explica la construcción de un hexamino en el AGD, y procede a construir un cubo a raíz de éste. Así, los estudiantes deberán seleccionar un hexamino visto en la actividad anterior, y hacer el mismo proceso. Posteriormente discutirían su respuesta. En general, los estudiantes no presentaron complicaciones al respecto sobre el desarrollo de ésta actividad. No obstante, una estudiante no quiso dar detalles al respecto sobre su construcción.

Finalmente se logró establecer que los artefactos que intervinieron en las intencionalidades didácticas, lograron cumplir con la propiedad complementariedad de los artefactos utilizados, estableciendo grandes avances acorde al diseño y aplicación de situaciones didácticas que promueven la enseñanza y aprendizaje de las propiedades geométricas del cubo en estudiantes de quinto grado.

Según Hernández y Bastidas (2014):

Esta investigación favoreció las prácticas pedagógicas, puesto que permite innovar en el momento de desarrollar una clase, empleando distintos materiales didácticos como lo son: los palillos, la plastilina y el papel y el AGD Cabri 3D, los cuales, al usarlos de manera complementaria sirvieron como medio para lograr la adquisición de conceptos matemáticos aunque estos sean demasiado abstractos para los estudiantes. (pág. 124).

¹² Un hexaminos es una figura geométrica compuesta por seis (6) cuadrados adyacentes uno a uno por cada lado. Según Hernández y Bastidas (2014), existen 35 versiones, de los cuales algunos al cerrarse por las líneas de su división forman un cubo o un hexaedro.

¹³ Las investigadoras jugaron el papel de docentes a cargo durante el desarrollo de ésta investigación.

Así mismo, el segundo estudio que hace parte de ésta categoría, es el Trabajo de Grado a nivel de Pregrado realizado por Ibargüen y Realpe (2012) en Cali (Colombia) titulado: *La enseñanza de la Simetría Axial a partir de la Complementariedad de Artefactos*. Donde de manera similar al trabajo anteriormente mencionado, éste se fundamentó en el *uso complementario* entre materiales manipulativos como: regla, lápiz, papel y un *simetrizador*¹⁴, con el AGD Cabri Géomètre II Plus. El objetivo principal fue la enseñanza y aprendizaje de la *Simetría Axial* para niños de tercer grado de EBP en Colombia. Con el fin de fomentar el desarrollo del mismo, se consideró como hipótesis principal que aquellos artefactos cumplen con la *función complementaria*.

Éste Trabajo de Grado se realizó en una IE de carácter público, de la ciudad de Cali (Colombia), con una población compuesta por treinta y cuatro estudiantes de grado tercero, cuyas edades oscilaron entre siete (7) y nueve (9) años, durante el año lectivo 2012.

A la luz de tres dimensiones de análisis, se construyó el marco teórico que guio esta investigación. A saber, la *Epistemológica*, donde se presentaron aproximaciones históricas de: las TG, aspectos matemáticos de la Simetría Axial, y la utilización de artefactos en Geometría. La *Cognitiva*, donde se consideró: dificultades, obstáculos y errores de los estudiantes, la visualización, y la Génesis Instrumental. Y la *Didáctica*, donde se consideró la TSD; *acciones* y *retroacciones* usando Cabri II plus y Simetrizador, tipos de tareas con estos artefactos, y la complementariedad entre ellos. Análogamente, se consideró la *micro-ingeniería didáctica* (Artigue, 1995) como metodología principal.

La secuencia didáctica presentada a los estudiantes constó de las siguientes situaciones:

¹⁴ En Ibargüen & Realpe (2012) se define como “una máquina articulada con la cual es posible realizar la transformación de simetría axial, ésta puede ser llevada al aula para la adquisición de nuevos conocimientos que se evidencian cuando el estudiante desarrolla esquemas de utilización” (pág. 67).

- Dibujando con un mecano¹⁵: en ésta actividad los estudiantes debieron determinar las relaciones existentes entre una figura dada, y otra obtenida con el simetrizador. A manera de conclusión, el objetivo propuesto se vio desarrollado en los conocimientos adquiridos por los estudiantes.
- Uniendo mitades: su objetivo parte del hecho de identificar la congruencia como una propiedad de las figuras simétricas. Para tal fin, se hizo uso del AGD Cabri II Plus como medio. Como conclusión: el propósito de ésta actividad se vio reflejado en las justificaciones dadas por los estudiantes, al argumentar que sólo era posible formar un corazón y cuatro (4) mariposas al apoyarse en la forma y tamaño que éstas poseen.
- El automóvil: en ésta actividad se usó Cabri II Plus como medio. La importancia del desarrollo de ella radicó en que los estudiantes descubrieron que las figuras geométricas invierten su orientación. En conclusión, se cumplió con el objetivo planteado.
- Distintos lugares: el propósito de ésta actividad es el de reconocer las diferentes direcciones posibles de los ejes de simetría: vertical, horizontal y oblicuo. El objetivo planteado aquí, se vio reflejado en las representaciones graficas realizadas por los estudiantes en cada tipo de eje de simetría.

Al final, se resaltó que la *función complementaria* efectuada por estos artefactos en las intencionalidades didácticas desarrolladas en el transcurso de la investigación, posibilitaron el fortalecimiento de la enseñanza y aprendizaje de la Simetría Axial a partir de la generación de conocimientos diferentes, y el enriquecimiento mutuo.

Ibarguen y Realpe (2012), concluyeron lo siguiente:

Se pudo observar que el simetrizador permitió reconocer que la figura dibujada por él era la misma que la dada pero en dirección opuesta, mientras que al trabajar con Cabri Geometry II Plus los estudiantes percibieron que la figura inicial y la final no

¹⁵ En la investigación desarrollada en este trabajo de grado, se le denominó mecano al simetrizador utilizado.

sólo eran iguales en su forma sino también en su tamaño, lo cual manifiesta la complementariedad entre el simetrizador y el software Cabri Geometry II Plus (pág. 138).

De igual manera, el tercer estudio clasificado dentro de esta categoría es el artículo de Hoyos (2006) denominado: *Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria*, en el que se puso en juego la complementariedad entre dos materiales didácticos como: Cabri II plus y Pantógrafo, respecto al aprendizaje y comprensión de las propiedades geométricas de algunas TG como: Homotecias, Reflexiones, Simetrías y Translaciones, cuando se aplicó de manera conjunta estos dos artefactos en cada una de las secuencias de actividades.

Por consiguiente, al igual que en los fines investigativos desarrollados en éste Trabajo de Grado, la investigación de Hoyos (2006) también trabajó el concepto de homotecia. Sin embargo, en ella no se consideraron Situaciones Didácticas que promuevan las RHC bajo un uso complementario entre el pantógrafo y el AGD Cabri II Plus, al igual que en ella se menciona que: “En síntesis, es probable que el software¹⁶ y los pantógrafos hayan satisfecho funciones complementarias en el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas” (pág. 40), abriendo la posibilidad a nuevas investigaciones al respecto.

En ésta investigación se trabajó con 18 estudiantes de noveno grado de una escuela pública de México, quienes se encargaron de explorar y manipular el *Software de Geometría Dinámica* (SGD) Cabri II Plus, acorde a las especificaciones promovidas por cada una de las Plantillas de Enseñanzas. Las ayudas del Software (con la tecla F1) fueron consideradas de gran importancia a la hora de obtener apoyos extras e información útil respecto al manejo de cada una de las herramientas del SGD. Además, el conjunto de pantógrafos que se les ofreció a los estudiantes tuvo configuraciones geométricas distintas; conformando TG diferentes.

¹⁶ Haciendo mención al AGD Cabri II Plus

Las actividades se desarrollaron durante diez (10) sesiones de 50 minutos, desarrolladas así:

- Las dos (2) primeras sesiones se desarrolló un proceso de instrumentación del SGD, mediante una exploración general de los comandos básicos del software, tomando el “arrastre” como opción para la manipulación de objetos.
- En la tercer y cuarta sesión, se estudió el concepto de homotecia, haciendo uso del SGD Cabri II Plus.
- En la quinta y sexta sesión, se estudió: la simetría, la reflexión, y translación, dado la cualidad que las caracteriza, es decir, son isométricas. Para el desarrollo de éstas sesiones, se hizo uso del Cabri II Plus.
- En la séptima y octava sesión, se trabajó con los pantógrafos. Y cuyo propósito fue explorar y manipular éstos artefactos bajo configuraciones distintas, las cuales se adaptan a generar trazos relacionados con conceptos como la simetría, reflexión y translación.
- Finalmente, en las sesiones nueve y diez, se trabajó una serie de ejercicios planteados en un libro (Alarcón, Bonilla, Nava & quintero (1994).), los cuales resultan ser difíciles, sino se cuenta con conocimientos previos.

En general, éste estudio dio lugar a que los estudiantes desarrollen procesos de intuición y objetivación en torno de algunas nociones matemáticas en el ciclo de Educación Matemática, en torno a las TG por medio de la exploración del SGD y el uso de máquinas articuladas como lo son los pantógrafos. Al igual que se concluyó (tal y como se citó anteriormente) que: es posible que estos instrumentos hayan satisfecho funciones complementarias en el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las TG.

El cuarto artículo considerado fue el de Morera, Fortuny y Plana (2012) denominado: *Momentos clave en el aprendizaje de isometrías en un entorno colaborativo y*

tecnológico. Donde, se efectuó un estudio experimental realizado en una escuela secundaria española con estudiantes que comprendieron las edades entre 14 y 15 años, respecto a la resolución de problemas de Isometrías, que estudiaron: translaciones, simetrías y giros, excluyendo homotecias. Usando un AGD como GeoGebra¹⁷ (los estudiantes conocían aspectos básicos de éste software), con base en una Secuencia Didáctica cuyo propósito fue promover el Aprendizaje Colaborativo (AC); ejerciendo una construcción de conocimiento participativa y colaborativa entre los estudiantes.

El estudio se realizó bajo tres dimensiones, a saber: Influencia de la Cognición Matemática¹⁸, la Mediación Tecnológica¹⁹ y la Orquestación del Profesor (intervenciones del profesor). Para facilitar los análisis de los datos, se recopiló información en: video, fotografías, tablas, entre otros. Donde los indicios de cambio observables en los registros, dieron garantía de modificaciones en la construcción del conocimiento significativo de los estudiantes.

La Secuencia Didáctica se estructuró en ocho (8) sesiones de clase: una primera sesión de actividades introductorias con lápiz y papel, y siete (7) alternando trabajo en parejas con la ayuda del GeoGebra. Distribuidas así:

- Problema 1: Construir simetrías axiales: donde se recordó y manejó conceptos básicos sobre el concepto de simetría con lápiz y papel, trabajando en parejas.

¹⁷ En Hernández y Bastidas (2014) se define como “un software interactivo de matemáticas que reúne dinámicamente geometría, algebra y cálculo, para la enseñanza de la matemática escolar. Es un ambiente informático que incorpora un AGD y un CAS (por sus siglas en inglés, un Software de Algebra Computacional)” (pág. 28).

¹⁸ La noción de cognición matemática admite fundamentaciones diversas, pero prácticamente todas ellas coinciden en ver este tipo de cognición como una forma de pensamiento que lleva a relacionar objetos matemáticos.

¹⁹ En Morera, Fortuny y Planas (2012) se entiende la *Mediación Tecnológica* como:

Noción derivada de la psicología sociocultural Vygotskiana, que ve los sistemas de signos y las herramientas como mediadores de la acción humana y del aprendizaje. En concreto, la mediación tecnológica se asienta en la relación entre herramienta o artefacto físico y sujeto, pudiendo ocurrir que ciertos usos de la herramienta transformen completamente la comprensión –cognición– del sujeto. (pág. 144).

- Problema 2: Identificar isometrías y construir ejes de simetría: consistió en resolver dos problemas de construcción de isometrías, con el objetivo de formalizar conceptos intuitivos.
- Puesta en común problemas 1 y 2: el profesor consolidó los problemas de las sesiones anteriores.
- Problema 3: Encontrar centro de giro: aquí se trabajó el concepto de giro, con base a un problema donde se tuvo que deducir la construcción del centro a partir de propiedades básicas, al igual que explorar todos los casos que se podían generar.
- Puesta en común problema 3: el profesor consolidó el problema de la sesión anterior.
- Problema 4: Componer simetrías axiales: que consistió en un problema un poco más complejo, donde se compone simetrías axiales, y reflexionar al respecto sobre éste proceso.
- Problema 5: Aplicar simetrías axiales: donde se aplicó el concepto de simetría axial.
- Puesta en común problemas 4 y 5: el profesor consolidó los problemas 4 y 5, para comentar enfoques y dificultades.

Al respecto Morera, Fortuny y Planas (2012), concluyen sobre el uso de las TIC:

Desde nuestra aproximación teórica a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, damos prioridad al estudio de factores de influencia en el aprendizaje del alumnado y al mismo tiempo consideramos que existe una fuerte interrelación entre dichos factores. Por ejemplo, entendemos que el trabajo de matemáticas en entornos tecnológicos condiciona qué se aprende y cómo se aprende. Sin embargo, tal como se ha observado en la sección de resultados, los usos del programa de geometría dinámica están a su vez relacionados con las orquestaciones instrumentales del profesor y con las reacciones del alumnado a los esquemas de uso sugeridos para la herramienta. (pág. 152).

El quinto artículo hallado fue el de Iranzo y Fortuny (2009) denominado: *La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado*. Aquí, se trabajó con 10 estudiantes de primer año de bachillerato tecnológico en España, con base en el análisis de la influencia conjunta que se presentó en el desarrollo de las mismas actividades resueltas con GeoGebra, y con lápiz y papel; fueron analizados dos problemas de Geometría Analítica Plana, cuyo propósito fue fomentar competencias matemáticas en la resolución de problemas usando TD. Por otra parte, los estudiantes no tenían conocimiento alguno del AGD GeoGebra. Por tanto, fue necesario brindarles asesorías extras.

Para la recolección de datos, se posibilitó el uso de: grabaciones de audio y video, y grabaciones en tiempo real de las pantallas de los monitores de cada estudiante. Además, se diseñó dos cuestionarios: uno dirigido hacia la resolución de las actividades con lápiz y papel, y el otro hacia la resolución de las actividades con el AGD.

Los dos (2) problemas analizados, y comentados en ésta investigación, fueron los siguientes:

- Problema de la circunferencia: Una circunferencia pasa por los puntos $P = (1, -1)$, $Q = (3, 5)$ y su centro pertenece a la recta de ecuación $x + y + 2 = 0$. Hallar su centro y el radio.
- Problema del rombo: Un rombo tiene dos vértices $P = (-2, 1)$ y $Q = (0, -3)$ que forman una diagonal del rombo. El perímetro es de 20 cm. Hallar los vértices restantes y el área del rombo.

Al respecto Iranzo y Fortuny (2009), consideran que el AGD jugó un papel de soporte visual, algebraico y conceptual a la mayoría de estudiantes, al igual que:

...el uso de GeoGebra también favorece múltiples representaciones de conceptos geométricos, ayuda a evitar obstáculos algebraicos permitiendo centrarse en los

conceptos geométricos así como a resolver los problemas de otra forma. Hay que señalar, sin embargo, que la influencia del uso de GeoGebra depende de los alumnos y de los problemas propuestos. (págs. 442 - 443).

Una conclusión de esta investigación, de acuerdo con la *Teoría de la Instrumentación* (Rabardel & Verillon, 2001) fue que para los estudiantes al usar GeoGebra, es importante involucrarlos en el proceso de apropiación del software y conjugar con las técnicas de resolución de problemas en lápiz y papel.

En sexto lugar, se encontró el artículo de García y Vargas (2014) denominado: *El uso de manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales y cuadráticas, y de sistemas de ecuaciones lineales en la escuela secundaria*. En el cual se trabajó con estudiantes de Secundaria, de entre 13 y 15 años de edad, de una escuela pública de México, con base en la resolución de: ecuaciones lineales, sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones cuadráticas, bajo la manipulación de artefactos físicos como balanzas articuladas de platillos, canicas, y tapaderas (tapas plásticas de botellas, un poco grandes), y virtuales como el GeoGebra. Así pues, mediante la *Teoría de las Representaciones Semióticas* de Duval (1998), se pretendió construir un puente de entendimiento hacia ideas abstractas entre los diferentes registros semióticos posibilitados por estos artefactos, respecto a los conceptos trabajados aquí.

Las canicas y tapaderas sirvieron como medio para representar las estructuras algebraicas de cada lado en las balanzas. Así pues, se consideró a las ecuaciones algebraicas como estructuras equilibradas de peso. Para ecuaciones lineales con una sola incógnita se utilizó una balanza, y se trabajó con ecuaciones de tipo $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = cx + d$, donde a , b y c son números enteros no negativos. Para el caso de sistemas de ecuaciones lineales 2×2 se utilizaron dos balanzas²⁰.

²⁰ Al respecto sobre ecuaciones cuadráticas, los autores señalan que por motivos relacionados con el tiempo y el espacio, en ésta investigación se hizo más alusión al tema de ecuaciones lineales.

La correspondencia de los elementos en la balanza y la ecuación fueron los siguientes:

- Una ecuación es representada mediante el equilibrio en una balanza, así: en cada lado del platillo de la balanza, deberá representarse cada lado de la ecuación.
- Los términos independientes de una ecuación fueron representados mediante canicas sobre una tapadera descubierta.
- Los términos incógnitos de la ecuación fueron representados mediante tapaderas cubiertas, que representaron las cantidades a descubrir.
- Los números enteros fueron representados por canicas.

El software por su parte, fue utilizado como un simulador virtual del comportamiento de los pesos en las balanzas concretas.

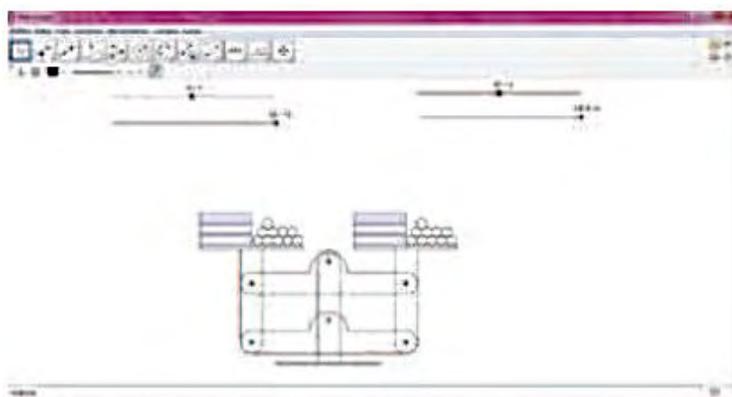


Figura 1 Balanza simulada para ecuaciones lineales

Fuente: García y Vargas (2014)

En ésta simulación²¹, los términos independientes no requirieron de un recipiente, las canicas se acomodaron formando un montón. Los recipientes que representan a las incógnitas quedaron plasmados en rectángulos apilados. Las manipulaciones se

²¹ Los tipos de ecuaciones utilizados aquí fueron de tipo $x + a = b$, $ax = b$, $ax + b = c$ y $ax + b = cx + d$, donde a , b y c son números enteros no negativos.

hicieron a través del “arrastre”. Adicionalmente, se hizo uso del software para representar gráficamente las ecuaciones en el plano cartesiano.

Ésta investigación se desarrolló durante diez (10) sesiones de 50 minutos cada una. En la primera etapa, los estudiantes manipularon las balanzas al representar en ellas ecuaciones lineales, en la segunda etapa, se trabajó con las balanzas simuladas en el software, y en la tercer y última etapa, se hizo utilizó el software para representar gráficamente las ecuaciones lineales, cuadráticas, y sistemas de ecuaciones, para que los estudiantes construyeran éstos conceptos bajo diversas representaciones.

Al respecto, los autores concluyen que el uso de manipulables crea un ambiente en donde se facilita la construcción del conocimiento sin mecanizaciones, igualmente, el uso de uso de una “computadora” potencializa las posibilidades de exploración de los recursos de representación semiótica en la enseñanza de las matemáticas.

El séptimo y último artículo fue el de Ruíz y Lupiañez (2010) denominado: *Empleo de la Geometría Dinámica como apoyo en actividades de lápiz y papel, para la comprensión de los tópicos de razón y proporción*. El cual se fundamentó en un trabajo investigativo con 29 niños de sexto grado de Básica Primaria, de 11 años de edad, en una escuela pública de México, donde se resaltó el papel corroborativo (como fuente de apoyo) que juega el AGD Cabri II Plus con el ambiente de Lápiz y Papel, con base en la complementación del aprendizaje respecto a los conceptos de Razón y Proporción.

Para ello, se diseñaron e implementaron dos programas didácticos sobre razón y proporción, uno de ellos centrado para realizar con lápiz y papel, y el otro estructurado para resolver en el AGD; ambos relacionados con el desarrollo de tres actividades,

adaptadas a cada propósito en cada programa²². Así, cada uno de los programas didácticos estuvo organizado acorde a las siguientes actividades:

- Torneo de fútbol: donde se debe determinar las razones en las que se encuentran diferentes medidas de tres canchas de fútbol. Su propósito fue hacer uso de diferentes razones al trabajar la proporción.
- Construye tu propia cancha: donde los estudiantes debieron pintar en el patio de su escuela la mayor cancha posible y proporcional a la cancha de su escuela (los datos fueron dados en la hoja guía). Su propósito fue fomentar el uso de diferentes modos de representación de la proporción.
- La fotografía con tu equipo²³: donde se debe emplear proporciones y razones apoyándose en operaciones naturales, al igual que trabajar en tres registros diferentes: el dibujo, tablas, y operaciones numéricas. El objetivo aquí era que mediante una foto grupal, los estudiantes debían averiguar la estatura de sus compañeros al seguir unas reglas.

El desarrollo de ellas (en cada programa) promovió algunas dificultades en los estudiantes, no obstante, la interacción con diferentes registros de representación: la gráfica, la tabla y las operaciones numéricas, conllevó a la comprensión y resolución en cada situación planteada. El sobreponer figuras físicas sobre otras, así como la utilización del ratón de computador para arrastrarlas figuras, con el fin de compararlas y establecer razones, dio pie a pensar que existió una corroboración al trabajar en ambos ambientes.

Una de las conclusiones finales de éste artículo fue la de considerar que para proponer modelos experimentales sólidos que puedan realizarse en los mismos

²² En el programa didáctico con el AGD se realizó una actividad extra, con el fin de fomentar un proceso de *instrumentación* básico al AGD, respecto a herramientas necesarias para el desarrollo de éste apartado.

²³ La idea principal de ésta actividad fue considerada dentro del diseño de una de las actividades que hacen parte de la *Secuencia Didáctica* planteada en ésta investigación. Puesto que hace parte de lo que en la investigación se ha denominado las RHC. No obstante, la idea principal fue adaptada y mejorada acorde al interés investigativo.

ambientes, se requiere de un marco teórico amplio y experimentado. Puesto que la experimentación aportará datos para comprender los problemas que presentan los estudiantes en torno a la Razón y Proporción, en especial su maduración en el transcurso de su educación. Y por último, se menciona que los últimos modelos que giran en torno a destacar lo geométrico, frecuentemente se está opacando por el énfasis dado a los aspectos algorítmicos.

Ya en la categoría Sin TIC se encontró cuatro investigaciones. La primera consistió en un diseño y análisis *a priori* de una Secuencia de enseñanza diseñada por Ibarra (2007) en Chile, denominada: *Plan de Clases para estudiar el concepto de "homotecia"*. El propósito fue promover una guía de trabajo con una duración máxima de 90 minutos, para docentes quienes deseen implementar de manera coherente y organizada el concepto de homotecia (en el plano) en sus clases de matemáticas.

El plan de clases fue dividido en ocho (8) instantes, especialmente diseñados para los siguientes propósitos: identificar una homotecia y una no Homotecia; realizar Homotecias a distintas figuras y, reconocer y describir los invariantes geométricos que se establecen al ampliar o reducir una figura. El plan fue organizado así:

- La motivación: éste instante tuvo una duración de máximo seis (6) minutos, y el propósito fue poner en contexto a los estudiantes respecto a la existencia de la homotecia, mediante un discurso relacionado, y planteando la pregunta: ¿Cómo podemos ampliar o reducir una figura en un factor que nosotros queramos?
- Revisión de la situación de entrada: con una duración de máximo 20 minutos, el docente tuvo que poner en contexto aquellos preconceptos de la homotecia como: Transformaciones Isométricas, Razón, y Proporción.
- La Definición: en éste instante que tuvo una duración de cinco (5) minutos, el docente debió escribir en el tablero una definición formal del concepto de homotecia, para que sus estudiantes la escriban en sus cuadernos.

- Estudio de las Condiciones Necesarias (CN): en un tiempo estimado de ocho (8) minutos, el docente tuvo que plantear la pregunta “¿cómo puedo dame cuenta de que estoy frente a una homotecia?” a su estudiante, posteriormente escuchara respuestas, y concluirá junto con ellos que existen cuatro (4) condiciones al respecto²⁴.
- Ejemplos y No Ejemplos: en un tiempo aproximado de 20 minutos, el docente debió presentar dos ejemplos (previamente pensados) sobre una homotecia, y una no homotecia, y preguntar al respecto a sus estudiantes sobre “¿por qué la primera transformación es una homotecia, y la otra no?”
- Propiedad o Características del concepto: en un tiempo aproximado de seis (6) minutos, deberá explicar a sus estudiantes algunas de las propiedades del concepto de homotecia, para que ellos copien en sus cuadernos²⁵.
- Analogías y Diferencias: en un tiempo aproximado de 20 minutos, el docente debió presentar a sus alumnos las analogías y diferencias que existen entre la forma de ampliar o reducir una figura, antes de conocer el concepto de homotecia, y ahora que ya lo conocen.
- La tarea: en un tiempo aproximado de cinco (5) minutos, el docente plantea una tarea a sus estudiantes, donde se evaluarán algunas propiedades del concepto de homotecia.

La segunda es una ponencia de Ortíz y Ángulo (2010) denominada: *La Homotecia, Un Tema Casi Olvidado en la Enseñanza de la Educación Matemática en Buenaventura: Una Propuesta desde el Punto de Vista Algebraico*. Donde se presentó un informe sobre un trabajo realizado en una institución pública de la ciudad de Buenaventura (Colombia), al trabajar homotecias en el plano cartesiano con

²⁴ Según Ibarra (2007), las condiciones necesarias para saber cuándo estamos frente a homotecia (en el plano) son:

- Es una transformación en el plano
- Tiene asociado un punto O , llamado centro de homotecia.
- Tiene asociada una razón K , distinta de cero
- Cada punto A de la figura original le corresponde un punto A' , alineado con A y O , tal que $OA' = K.OA$

²⁵ Algunas de estas propiedades fueron tenidas en cuenta en la sección 2.1.2, específicamente en la Dimensión Histórico Epistemológica del marco teórico tomado en consideración.

estudiantes de séptimo grado. Para tal fin, los investigadores dieron a conocer una expresión algebraica que facilitó el proceso de encontrar la imagen homotética de un punto coordinado (x,y) respecto a un centro de homotecia. En general, la representación algebraica ayudó a encontrar la imagen homotética de cualquier figura geométrica en el plano.

Según los autores la motivación principal para desarrollar esta investigación fue que las TG han sido dejadas de lado hasta casi ya no enseñarse en las clases de geometría en dicha ciudad. En particular, la homotecia, desde un punto de vista analítico. En consecuencia, éste estudio posibilitó el interés del mismo en las clases de matemáticas de la ciudad de Buenaventura.

Por otra parte, durante el desarrollo de ésta investigaciones, los estudiantes presentaron debilidades fuertes acorde a preconceptos fundamentales al concepto de homotecia (en el plano), y otros fundamentales, como por ejemplo no conocer los números enteros. Por tanto, fue necesario implementar secciones de trabajo extra para poder construir nociones matemáticas básicas al respecto sobre esta TG. Igualmente, los estudiantes no conocían nada respecto a la homotecia.

La actividad se llevó a cabo en un periodo de ocho (8) horas, desarrolladas en cuatro sesiones, las cuales se dividieron en los siguientes momentos (según autores):

- Reconocimiento del plano cartesiano.
- Graficas de puntos y figuras en el plano.
- Presentación de una serie de figuras a las cuales ya se les había aplicado una homotecia, con el objetivo de que el estudiante pudiera reconocer la semejanza entre las figuras y las propiedades de la transformación.
- Presentación formal de la teoría de homotecia, y planteamiento de algunos ejercicios teniendo en cuenta el origen de coordenadas.

- Presentación a los estudiantes de algunos ejercicios de homotecias cuyo centro no era el origen de coordenadas, donde se espera observar la reacción de éstos para la solución de los ejercicios.
- Finalmente, se presentó la expresión general se resolvieron algunos ejercicios y se escucharon algunas conclusiones por parte de los estudiantes.

Al respecto Ortiz y Ángulo (2010), concluyen que la implementación de estas actividades logró captar la atención de los estudiantes, puesto que se sintieron satisfechos con los conocimientos que habían adquirido, y la forma como lo habían aprendido. Finalmente, se afirmó que se deberá posibilitar el diseño de situaciones que permitan seguir difundiendo nuevas formas de ver la geometría de transformaciones en el salón de clases.

La tercera investigación fue la de Obando, Vasco y Arboleda (2014) denominada: *Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte*. Donde se presentó un estado del arte sobre la: Razón, Proporción y Proporcionalidad (RPP) bajo tres momentos: Cognitivo, epistemológico y Semiótico – Antropológico.

En el momento *cognitivo* se identificaron elementos importantes para la construcción del proceso de enseñanza y aprendizaje de la RPP; sugiriendo que las dificultades respecto a la enseñanza y aprendizaje podrían ser tratadas bajo avances en el proceso cognitivo y en los fenómenos ligados a las condiciones del contexto. En el momento *epistemológico* resaltó las propiedades matemáticas respecto a: estructura, organización y naturaleza de la RPP. Por último, en el momento *Semiótico - Antropológico* se utilizó la Teoría Antropológico de la Didáctica (TAD) con base en la RPP, como organización matemática compleja definida por situaciones: prácticas matemáticas, técnicas, tecnología y teoría, resaltando el interés en centrarse en el uso de: magnitudes, gráficas, fracciones y decimales.

Esta revisión también se comentó algunas investigaciones recientes sobre la RPP concluyendo que estos objetos de conocimiento siguen siendo difíciles de aprender para la mayoría de los estudiantes, lo que se constituye en un verdadero indicador de la necesidad de continuar haciendo mayores investigaciones que permitan nuevos enfoques didácticos para el estudio de las TG.

El cuarto artículo corresponde a Uicab (2009) denominado: *Materiales tangibles. Su influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Aquí, se resaltó el papel didáctico que proporcionan los materiales manipulativos concretos²⁶ en las aulas de clase a la hora de posibilitar una mejor orientación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; a través de la manipulación y la práctica se pretende movilizar lo simbólico, lo abstracto y lo formal de conceptos matemáticos en estudiantes de diferentes edades. Así mismo, se destacó que su uso fomenta el desarrollo en aspectos relacionados con el pensamiento, el lenguaje oral y escrito, la imaginación, la socialización, y el mejor conocimiento de sí mismo y de los demás; por lo que estos han cobrado importancia en la educación contemporánea.

Algunas características que se les asocia según el autor son:

- Tiene un fuerte carácter exploratorio, lo que propicia un marco para la resolución de problemas, discusión, comunicación y reflexión. Las limitaciones bien “encauzadas” pueden generar “la chispa” para algunas discusiones en clase.
- A medida que los estudiantes trabajan con las herramientas por un tiempo considerable y desarrollen más y más el entendimiento de los conceptos matemáticos, entonces necesitaran menos de herramientas concretas (piezas manipulables o diagramas), sirviendo las piezas concretas como un puente hacia ideas abstractas.

²⁶ Según Uicab (2009), son aquellos materiales u objetos físicos que los estudiantes pueden “palpar” para ver y experimentar conceptos matemáticos, poniendo en juego la percepción táctil.

- El material didáctico manipulable es un complemento, no un sustituto de otras representaciones (Báez & Hernández, 2002, citado en Uicab, 2009).

Al respecto, sus bondades los llevan a considerarlos como recursos obligatorios en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. No obstante, según el autor su uso en las clases de matemáticas se ve influenciado por:

- El profesor: su formación (científica y didáctica), y sus concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza.
- El alumno: su interés, motivación, disciplina, o el nivel de los estudiantes. Aunque con el uso de estos materiales tangibles se pretende mejorar la actitud del estudiante hacia las matemáticas. No obstante, un grupo excesivo de estudiantes ocasionaría dificultades en la organización del trabajo a desarrollar.
- El conocimiento matemático a estudiar, puesto que generará inquietudes en el docente sobre qué materiales manipulativos usar, y cómo implementarlos.
- El diseño del material tangible ¿qué elementos se deben considerar para el diseño y elaboración de un material? Es importante considerar el nivel al que va dirigido dicho material, las características del grupo, la duración de los módulos, etc.

En conclusión: tales artefactos sirven como herramientas didácticas que posibilitan la generación de conocimiento matemático formal en la resolución de problemas, al igual que promueven la inclusión, la participación, el discurso y la reflexión grupal e individual. Así mismo su uso en las clases de matemáticas fue influenciado por: el docente, los estudiantes y los conocimientos a enseñar. Por otra parte, el autor dejó en claro que el uso de materiales tangibles en las clases de matemáticas puede posibilitar el entendimiento de algunas nociones matemáticas y ocultar otras, por lo que se debe ser cuidadoso en el diseño, elaboración y uso de estos artefactos.

Finalmente en la categoría Con TIC se clasificaron tres investigaciones. La primera de ellas, la ponencia de Acosta (2010), denominada: *Enseñando transformaciones*

geométricas con software de geometría dinámica. Realizada en el XI encuentro Colombiano de Matemática Educativa, donde se generó un cuestionamiento respecto al uso de las tecnologías computacionales en las clases de matemáticas, de acuerdo con unas preguntas orientadoras: ¿Cómo estas influyen en la enseñanza? Y ¿Estamos preparados para asumir éste cambio? Con el fin de dar respuesta al papel que juega el uso de las tecnologías en la enseñanza de las matemáticas.

Así, se examinó el uso de Cabri II plus con base en una secuencia de situaciones didácticas alrededor del concepto de Simetría Axial en niños de cuarto grado de Básica Primaria en Colombia; diseñadas a la luz de la TSD de Brousseau (2007). Además, se estudió tanto el papel jugado por el profesor como las interacciones que el *medio* (Cabri II plus) promovió en la comprensión de éste concepto.

Llegando a que el papel del profesor en la TSD tiene las siguientes características:

- Antes de la clase debe preparar con cuidado el problema y el *medio* que conforman la *situación a-didáctica*, es decir prever las *acciones* que pueden realizar los alumnos, las *retroacciones* del medio y las posibilidades de validación que tendrán los alumnos.
- Durante el desarrollo de la situación a-didáctica debe limitar sus intervenciones para garantizar el aprendizaje por adaptación. Debe evitar darle información directa o indirecta al alumno que le permita resolver el problema, y sobre todo debe evitar juzgar (positiva o negativamente) el trabajo del alumno. Sin embargo, esto no quiere decir que deba retirarse completamente; en esta fase, sus intervenciones deben limitarse a ‘devolverle el problema al alumno’, es decir evitar que renuncie a resolver el problema, asegurándose de que comprende lo que se espera que logre, que identifica algunas acciones que puede realizar en el medio, y que toma conciencia de las retroacciones del mismo.

- Una vez terminada la situación a-didáctica interviene directamente para hacer tomar conciencia a los alumnos del conocimiento que han adquirido, para verbalizar dicho conocimiento y explicitar sus conexiones con el saber oficial.

Así mismo, en Acosta (2010) el AGD Cabri II Plus es considerado como un *medio* adecuado para el aprendizaje por adaptación de la geometría, pues su programación garantiza que los fenómenos asociados a la construcción y manipulación de las figuras geométricas correspondan a la teoría de la geometría euclidiana. Análogamente, se da a conocer dos tipos de *acciones* (realizadas con este medio) con sus respectivas *retroacciones*:

Tipo de acción	Tipo de retroacción
Construir : consiste en seleccionar una herramienta de Cabri y utilizarla para obtener un dibujo	Fenómeno estático : un dibujo estático que corresponde teóricamente a las herramientas utilizadas según la teoría
Ejemplo: Se selecciona la herramienta 'segmento' y se hacen dos clic en la pantalla: aparece un segmento. Se selecciona la herramienta 'recta perpendicular', se hace clic sobre el segmento y luego sobre un punto cualquiera de la pantalla: aparece una recta perpendicular al segmento.	
Arrastrar : consiste en agarrar un objeto con el ratón y desplazarlo	Fenómeno dinámico : los objetos en la pantalla se desplazan de manera que se conservan todas las propiedades declaradas explícitamente (al usar una herramienta de construcción) o aquellas que se deducen teóricamente de ellas.
Ejemplo: al arrastrar un extremo del segmento dibujado anteriormente, el segmento se moverá para seguir teniendo ese punto como extremo, y la recta también se moverá para conservar la perpendicularidad con respecto al segmento.	

Figura 2: Acciones y retroacciones con Cabri II Plus

Fuente: Acosta (2010)

La segunda ponencia fue la de Candía y Galleguillos (2011), denominada: *Uso de herramientas interactivas en el aprendizaje de homotecias*. Donde, se presentó una investigación realizada con estudiantes (de género femenino) de grado decimo de un

colegio chileno, respecto al concepto de homotecia²⁷. Para ello, se pretendió determinar la relación existente entre el uso de una secuencia de aprendizaje con el uso de la Pizarra Digital Interactiva²⁸ (PDI), el SGD GeoGebra, y los logros académicos alcanzados por los estudiantes en cuanto a la unidad de homotecias, mediante un AC. Se trabajó con dos grupos de estudiantes, quienes trabajaron en forma colaborativa con base en las mismas guías de trabajo. Los grupos fueron denominados: experimental (con 24 estudiantes) y el de control (con 30 estudiantes), donde: el primero de ellos tuvo acceso a TD, y el otro no. Por tanto, también se presentaron resultados en ambos grupos, al haberse sometido a condiciones didácticas diferentes.

La metodología adoptada fue un diseño cuasiexperimental²⁹. Se implementó tres fases de trabajo: *Introducción* a conceptos básicos, *Exploración* de propiedades por parte de estudiantes, y *Consolidación* por parte del docente. Por último, se realizó una prueba estadística con prueba y post-prueba, cuyo fin fue constatar resultados (diferencias) acorde al antes y al después entre los grupos, y en cada grupo. Así, se pudo apreciar una diferencia de aprendizaje de 1.5 décimas del grupo experimental sobre el de control, lo que corresponde a una diferencia significativa en su aprendizaje y no producto del azar, puesto que el uso de las TD les ayudó a aclarar dudas por sí mismas y motivó al trabajo grupal. No obstante, ambos grupos presentaron diferencias significativas en su aprendizaje, respecto al antes y después de haber aplicado la prueba.

Al respecto Candía y Galleguillos (2011):

²⁷ Según Candía y Galleguillos (2011), resultados obtenidos en una encuesta preliminar en la Universidad de Valparaíso a estudiantes de la carrera de Matemáticas, dan prueba de que el concepto de homotecia de la unidad de geometría puede haberse descartado por algunos profesores, o bien, se pasa de modo ligero; pues los estudiantes no recuerdan haber visto éste concepto.

²⁸ La Pizarra Digital Interactiva es un sistema tecnológico integrado con un computador, que posibilita proyectar contenidos digitales e interactuar directamente con ellos.

²⁹ Un diseño cuasiexperimental es una investigación donde existe una exposición, respuesta e hipótesis (para contrastar), pero no existen alteraciones de los grupos considerados.

Finalmente, este estudio muestra por un lado una forma de integrar la tecnología a la clase. Por otro lado muestra que utilizar herramientas interactivas en la clase puede mejorar los logros académicos de los estudiantes en condiciones similares. Y por último que la tecnología y el AC se complementan para crear un ambiente adecuado para que se produzca el aprendizaje. (pág. 8).

El tercer y último artículo corresponde a Pérez (2013), denominado: *Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la homotecia utilizando CabriLM como medio*. Donde se presentó un breve resumen de un trabajo realizado con estudiantes de bachillerato en Colombia (sin presentar resultados al respecto), utilizando el nuevo AGD CabriLM³⁰ como medio para proporcionar el aprendizaje de las propiedades de homotecia; basándose en la construcción de cuatro (4) actividades a la luz de la TSD de Brousseau, bajo el diseño de situaciones *a – didácticas* que según el autor, pretenden que los estudiantes implementen y construyan un conocimiento personal y contextualizado, al utilizar propiedades de la homotecia en la solución de problemas.

Por otra parte, según Pérez (2013), el concepto de homotecia es un concepto complejo, que ha recibido poca atención en los libros de texto, y que tiende a desaparecer del currículo de geometría. Sin embargo, es una herramienta importante para la solución de problemas, y condensa las propiedades de semejanza y proporcionalidad.

³⁰ El CabriLM o también conocido como Cabri ELEM, según Mora y Lucena (2010):

No sólo es un programa de geometría dinámica sino que además tiene herramientas importantes que le permiten al profesor controlar el avance de la actividad (por medio del control del tiempo, de la evaluación de las soluciones propuestas por los estudiantes, etc.), dar instrucciones y diversas posibilidades de evaluación y retroalimentación. También le permite al estudiante la posibilidad de arrastrar los objetos, la interacción con imágenes realistas, más autonomía a la hora de hacer las actividades y verificar (al experimentar) si la solución a la tarea es correcta o no (pág. 5).

2. ANÁLISIS PRELIMINARES

Éste capítulo aborda tres análisis *preliminares* de acuerdo con la metodología de *micro-ingeniería didáctica* de Artigue (1995), los cuales se presentan en las tres dimensiones usuales en Didáctica de las Matemáticas: Dimensión *Histórica - Epistemológica*, Dimensión *Cognitiva* y Dimensión *Didáctica*, que según Chamorro (2003), sirven como herramientas profesionales para producir y controlar secuencias de aprendizaje con cierta garantía de éxito. A continuación se describen las tres dimensiones.

En la *Dimensión Histórica–Epistemológica* se presenta una aproximación histórica referente al concepto de *Homotecia*, y al *artefacto Pantógrafo* (incluyendo descripción del mismo sobre su fisionomía y uso), al igual que se habla sobre el aspecto matemático de la *homotecia*.

En la *Dimensión Cognitiva* se estudiará el enfoque instrumental de Verillón y Rabardel (1995, citados en Maschietto & Trouche, 2010), al igual que se presentará un bosquejo general respecto al *uso complementario* entre materiales manipulativos y Cabri II Plus. Análogamente, se tendrá en cuenta un análisis de los *Errores, Obstáculos y Dificultades* (Socas, 2000) presentes en la comprensión del concepto de *Homotecia*. Así mismo, dada la intrínseca y estrecha relación entre la homotecia y el *Razonamiento Proporcional* en éste tipo de transformaciones no isométricas, se presentará algunos errores que se han observado en algunas investigaciones en didáctica de la geometría.

En la *Dimensión Didáctica* se centrará en reconocer el estado de la enseñanza de los objetos en cuestión, el diseño, la intervención y gestión didáctica del profesor, y que según Artigue (1995), se puede analizar el funcionamiento del sistema didáctico y el campo de restricciones en donde se sitúa la investigación. Aquí se tendrá en cuenta la TSD de Brousseau (2007), en donde se observarán los principales componentes que conllevan tanto profesores como estudiantes a traspasar las barreras de la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Escolar.

2.1. Dimensión Histórica – Epistemológica

2.1.1. Acercamiento Histórico del Concepto de Homotecia

Los orígenes del concepto de homotecia están arraigados a los de: **Razón**, **Proporción**, y **Semejanza**; puesto que es sabido que estos hacen parte de conceptos precursores del mismo. Por tal razón, será necesario revisar fuentes primarias que hablen de ellos. Así, una de las primeras fuentes de concepciones de la geometría está plasmada en los *Elementos* del matemático Euclides (330 a.C. – 275 a.C.), alrededor del año 300 a.C. en Alejandría. Donde se trató de recopilar muchos de los conocimientos que se encontraban dispersos en Grecia entre los años 600 a.C. y 300 a.C. en trece (13) libros.

Según Hernández y Bastidas (2014):

Los aportes de Euclides a la historia de las matemáticas conllevaron a que en la actualidad se pueda comprender los temas de la geometría, su obra fue significativa, ya que a partir de ella se creó una nueva visión de ésta rama, permitiendo por medio del estudio de los postulados y el uso de la lógica aristotélica, encontrar su significado en la matemática, así como también dar paso al desarrollo de geometrías no euclidianas tales como las de Lobashevsky - Bolyai y Riemann. (pág. 43).

Los aportes realizados por Euclides acorde a los tres conceptos mencionados anteriormente, aparecen en los libros **V** y **VI**. Ya que en el libro **V** se trata todo lo relacionado a la teoría de la proporción aplicable a magnitudes conmensurables e inconmensurables; resolviéndose así el problema planteado por el descubrimiento pitagórico acorde a los números irracionales. El libro **VI** por su parte, contiene la teoría eudoxiana³¹ de la proposición a la geometría plana. Se establecen los teoremas

³¹ Correspondiente a Eudoxo de Cnido, la cual es relatada en la definición quinta del libro V de los elementos de Euclides.

fundamentales de los triángulos semejantes, y la construcción de la tercera, la cuarta y la media proporcional, entre otras cosas.

Entre otras cosas, una de las definiciones del libro **V** de los elementos de Euclides que cabe resaltar es la número tres (3), que dicta: “Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas”. Puesto que define una de las nociones matemáticas primordiales que conforman el concepto de Homotecia. Análogamente, en la definición uno (1) del libro **VI** de los elementos de Euclides, se dice: “Figuras rectilíneas semejantes son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales”. Que define otra noción importante.

En Moriena (2006) se analiza la proposición cuatro (4) del libro **I** de los elementos de Euclides, la cual dicta: “Si dos triángulos tienen dos lados de uno iguales a dos lados del otro, y tienen iguales los ángulos comprendidos por los lados iguales, tendrán también las respectivas bases iguales, y un triángulo será igual al otro, y los ángulos restantes a saber: los subtendidos por lados iguales, serán también iguales respectivamente”. Clasificándola como empírica, pero promotora de un método racional y deductivo. El cual motiva el uso del método de superposición de las figuras, a lo que Moriena (2006) argumenta:

El uso del método de superposición de las figuras, ha dado lugar al debate alrededor del recurso de aplicación de un movimiento o de la idea de desplazamiento natural para superponer las figuras. Estos desplazamientos que intervienen, son desplazamiento de figuras y no transformaciones que operan sobre el espacio como conjuntos de puntos.

Para Euclides, según mi criterio, no hay concepto de transformación, se limita a establecer correspondencia entre los elementos de dos figuras mediante la superposición para afirmar la igualdad de las mismas. (pág. 4).

Sin embargo, según Mrabet (2012), la proposición dos (2)³² del libro VI de los elementos de Euclides proporciona la primera declaración en la historia del teorema de Thales, la cual a su vez según el enfoque dado en esa investigación tiene suma relación con los conceptos de homotecia y *proyección*. Y además, es clasificada como una declaración euclidiana que conduce al “acercamiento homotético”.

Según Duperret (1995, citado en Mrabet, 2012) “La figura característica del teorema de Thales en un triángulo parece ser estática, mientras que esconde dos aspectos dinámicos que han estado en su origen” (pág. 481).

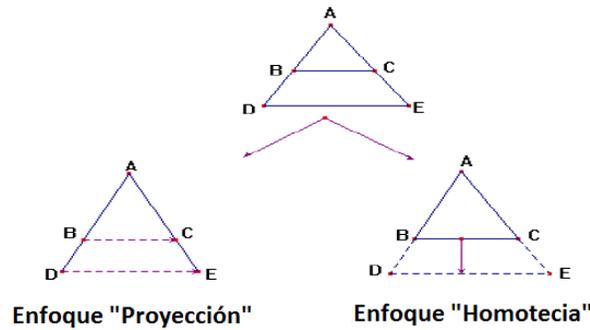


Figura 3. Aspectos desprendidos del teorema de Thales
Fuente: Mrabet (2012)

En el enfoque “Homotecia”, se propone igualdad de proporciones, las cuales son relacionadas con dos triángulos semejantes así:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

Que en forma vectorial es:

$$\vec{AB} = K\vec{AD} \text{ entonces } \vec{BC} = K\vec{DE}$$

³² La cual trata de: “Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo. La recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo”

A lo que Mrabet (2012) afirma:

El estado general se basa en triángulos que muestran el paso de la idea de un triángulo a otro y no aparece como un fin en sí mismo: el vínculo con triángulos semejantes inmediatamente después y más en general con cifras similares es un punto característico de éste punto de vista. (pág. 482).

En síntesis, puede ser éste el inicio de lo que hoy conocemos como el concepto de homotecia, no obstante, en ésta pequeña investigación no se han encontrado fuentes suficientes que garanticen autores patentes. Sin embargo, con la llegada del programa Erlangen (1872) promovido por Klein (1849 – 1925)³³ surge lo que se conoce como modernidad de la geometría, que permitió un fortalecimiento de las propiedades invariantes y de familia de transformaciones ligadas a esas propiedades. El cual pudo fortalecer el mismo.

2.1.2. Aspectos Matemáticos de la Homotecia

Para generar las situaciones didácticas será necesario conocer las características que posé una transformación no isométrica, tal como lo es la homotecia.

Así pues, a diferencia de una transformación isométrica, la cual según Ibarquén y Realpe (2012) preserva la congruencia de las figuras después de un proceso de transformación, es decir, conserva las propiedades de igualdad y la correspondencia de elementos entre ellas, predispuestos en el mismo orden. La homotecia será una transformación que no preservara la congruencia, es decir, no preservará la longitud entre los lados de una figura o dibujo. No obstante, existirá la correspondencia de los elementos predispuestos en el orden.

³³ El programa Erlangen, permitió establecer relaciones entre la geometría y la teoría de grupos, promoviendo un estudio sistemático de las relaciones geométricas, la cual descubrió una geometría libre del pensamiento intuitivo. Que según Mrabet (2012) se describió “a una geometría como el estudio de aquellas propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones”. (pág. 7).

Entre los conceptos regidos en éste campo se encuentran: la **simetría**, y la **homotecia**. Los cuales permiten comparar dos magnitudes por medio de un cociente, que es denominado **Razón**. No obstante, el concepto de **semejanza** compone al de **homotecia**, por tal razón, sólo será viable hablar de un sólo proceso no isométrico.

En Ortíz y Ángulo (2010) se define así:

Se llama homotecia de centro **O** y razón **k** (distinto de cero) a la transformación que hace corresponder a un punto **A** otro **A'**, alineado con **A** y **O**, tal que: $OA' = k \cdot OA$ Si $k > 0$ se llama homotecia directa y si $k < 0$ se llama homotecia inversa. (pág. 6).

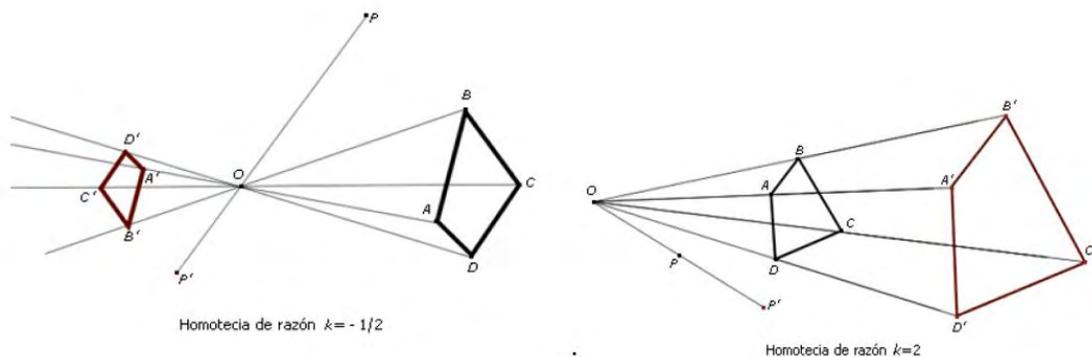


Figura 4. Ejemplo de homotecia

Fuente: Ortíz y Ángulo (2010)

Así, las propiedades del concepto de homotecia son los siguientes:

- **Colinealidad:** Acorde a la definición dada anteriormente, se debe cumplir que: dados los puntos **A**, **A'** y **O**, donde **A'** es imagen de **A** y **O** es el centro de homotecia, serán colineales.
- **Paralelismo:** La imagen de un segmento corresponderá a otro paralelo. En síntesis, la imagen de una recta corresponderá a otra recta paralela.
- **Composición de homotecias con mismo centro:** Al componer dos homotecias de centro **O**, se obtiene una homotecia con centro **O**, y cuya razón es el producto de las razones de las homotecias que la componen.

- **Composición de homotecias con diferente centro:** Al componer homotecias de centros distintos y razones K y K' , se obtiene una homotecia de razón $K'' = K * K'$, y una traslación.
- **Cualidades del valor de K :** Todas las longitudes son multiplicadas por $|K|$ entonces:
 - Cuando $k = 1$ se conoce como la identidad de homotecia.
 - Si $K > 1$ implica una “ampliación” de la figura.
 - Si $0 < k < 1$ implica una “reducción” de la figura.
 - Cuando $K < 0$, entonces se generará una homotecia inversa, que implicará una rotación alrededor de O con un ángulo de π radianes (180°).

Análogamente, en Ibarra (2007) se definen CN³⁴ para establecer cuando un estudiante está frente a un proceso de homotecia.

- C.N.1: Tiene asociada un punto O , llamado centro de homotecia.
- C.N.2: Tiene asociada una razón K , con K distinto de cero.
- C.N.3: Cada punto A de la figura original le corresponde un punto A' , alineado con A y O , tal que $OA' = K * OA$

2.1.3. Historia y Descripción del Artefacto: Pantógrafo

El Pantógrafo (ver Figura 3. Pantógrafo moderno) es un *artefacto* que posibilita transferir dibujos a escalas mayores o menores que la figura original.

³⁴ De donde fue omitida la primera de ellas, puesto que ésta sugería que se trataba de una transformación en el plano.

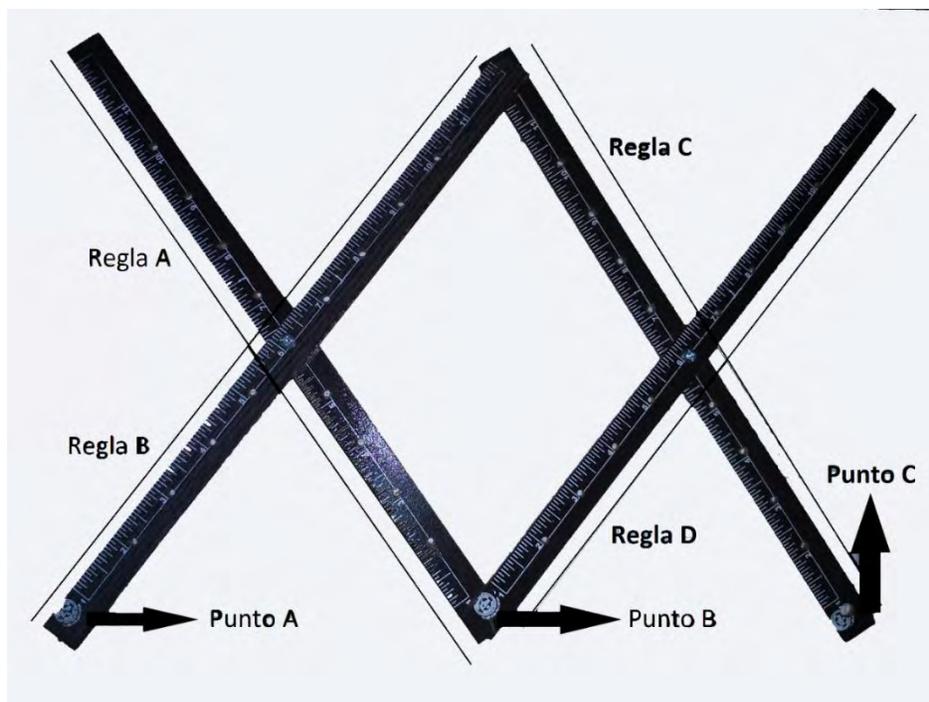


Figura 5. Pantógrafo moderno

Se encuentra conformado por cuatro reglas articuladas (que pueden ser: metálicas o en madera) denominadas: **A**, **B**, **C** y **D**, que contienen orificios métricamente ubicados, a los cuales es asociado un número entero que demarca la distancia en cada regla. Las configuraciones de éste *artefacto* se dan al variar las distancias³⁵ entre los puntos de articulación dados por las reglas: **A** con **B**, y **C** con **D** conservando siempre la propiedad de **paralelismo** entre las reglas: **A** con **C** y **B** con **D**.

Los puntos **A** y **B** se conocen como **Punto Base** y **Aguja guía** respectivamente, y en el punto **C** deberá ubicarse el lápiz que realizara el trazo³⁶. Así, se tendrá que fijar el punto **A** sobre el espacio de trabajo, y el punto **B** deberá seguir el contorno o perímetro de la imagen que se quiere *ampliar*. No obstante, si el proceso que se quiere realizar es “reducir”, se deberán intercambiar respectivamente las posiciones de los puntos **B** y **C**.

³⁵ El cambio en la fisonomía del Pantógrafo, atribuye que: a mayor distancia entre las articulaciones denominadas, mayor será la escala con la que se amplía un dibujo.

³⁶ En otros textos estos puntos se conocen como: Pivote, Punto de referencia y punto de copiado respectivamente; como por ejemplo en González, J. (2009).

No obstante, aparte de los intereses que se ocupan aquí, también existen otros campos en donde tiene importancia su utilización, tal como se afirma en González, J. (2009):

Se utiliza, por ejemplo, en aplicaciones de metalistería, como joyería para reproducir y crear diseños; y en las casas de las Monedas o Cecas, los departamentos de grabado utilizan pantógrafos para reproducir un motivo original de tamaño grande que se utilizará en una acuñación monetaria. También se emplea, en éste mismo sentido, para la reproducción de los motivos de los sellos (comunicación personal de Jesús Muñoz Fernández, Servicio de Fotografía, Museo Nacional de Ciencias Naturales-CSIC). (pág. 206).

De igual forma, su utilización a través de la historia ha abarcado campos que tal vez podrían considerarse inusuales, tales como en la medicina y la agricultura. Pues así se argumenta en Lukič, A. y Hübscher, K. (2003); y Hill, R (1920) respectivamente:

Pues en Lukič, A. y Hübscher, K. (2003), se dice:

Hacia fines de la década de 1960, el trazado del contorno corporal se realizó con un pantógrafo (Figura 11), un dispositivo mecánico que trazaba los contornos del cuerpo sobre el papel mientras un radiólogo desplazaba su antena a lo largo de la superficie del cuerpo del paciente. Se utilizaron varios tipos de pantógrafos, desde mecánicamente muy simples hasta dispositivos complejos y precisos. Un pantógrafo sigue siendo parte del equipo estándar del Departamento de Teleradioterapia. Siendo un instrumento mecánico, casi nunca puede fallar. Sirve como un dispositivo de respaldo para dispositivos más modernos y complejos (como CTs o láseres). (pág. 263).



Figura 6. "Figura 11 del artículo"

Fuente: Lukič, A. y Hübscher, K. (2003)

Análogamente en Hill, R. (1920), se dice:

El método³⁷ de trazado seguido hasta ahora es el común en el que se utilizan correas para dividir el cuadrado en decímetros cuadrados, y la vegetación en cada decímetro se mapea a escala reducida por estimación ocular, complementada por medición real. Las desventajas reconocidas de éste método llevaron al escritor a experimentar con el pantógrafo como un medio práctico para evitarlas. Ahora, el pantógrafo se considera corrientemente como adaptado para el uso solamente cuando se hace funcionar sobre una mesa de dibujo. Para cartografiar la vegetación en el campo parecería bastante inutilizable. Sin embargo, los experimentos mostraron sorprendentemente buenos resultados. De hecho, cuando está montado sobre un marco adecuado, el pantógrafo registra el contorno de la vegetación con la misma exactitud que si el trabajo se realizara sobre una mesa de dibujo. Esto es para decir que el resultado de éste método de representación gráfica es una reproducción perfecta de los contornos de la vegetación; Es simplemente un rastreo preciso de los contornos que fueron seguidos por el operador. La producción de

³⁷ En Hill, R. (1920) se dice:

El método cuadrante de registro de los cambios en la composición de la vegetación ha sido utilizado por el Servicio Forestal en relación con sus diversas investigaciones de pastoreo para un número de años. La historia exacta así compilada de los cambios en las formaciones de las plantas, especialmente bajo diferentes condiciones de pastoreo, es invaluable en los principios de desarrollo de la gestión de la gama. (pág. 270).

gráficos precisos es en gran medida una cuestión de adquirir sistema y habilidad para guiar una aguja alrededor de los contornos de las plantas.

Como resultado de los experimentos con el pantógrafo, el instrumento se utilizó para trazar la mayor parte de los cuadrantes establecidos en la Reserva de la Gama de Santa Rita en el otoño de 1919. [...] (págs. 270 - 271)



Figura 7. Foto del tipo de pantógrafo usado en el método mencionado.

Fuente: Hill, R. (1920)

La palabra Pantógrafo proviene de las voces griegas **Pan** (Todo) y **Graphein** (Descripción). Su invención se atribuye al sacerdote jesuita alemán Christopher Scheiner (1575 – 1650) en el año 1603.

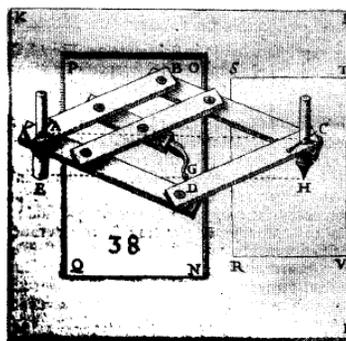


Figura 8. Pantógrafo diseñado por Christopher

Fuente: Kemp, M. (1990)

En Kemp, M. (1990), se afirma que Christopher “Era un gran estudioso de la óptica y un astrónomo observacional de verdadera habilidad, que ciertamente poseía poderes

inventivos por su propia cuenta, como era evidente en su concepción del pantógrafo” (pág. 180). En su obra denominada **Pantographice seu ars delineandi** publicada en 1631, él cuenta en la introducción de ésta, cómo él realizó la invención de su máquina de dibujo.



Figura 9. Parte de obra: **Pantographice seu ars delineandi**

En Kemp, M. (1990) se narra una anécdota al respecto de esta invención de Scheiner:

En 1603 en Dillingen, un maestro Gregorio, «un excelente pintor», se jactaba de Scheiner de su dibujo, pero se negó irritablemente a revelar sus secretos. Tentativamente, Gregorio dijo que "él no creyó que tal cosa incluso podría ser imaginado; De hecho, que no era tanto un ser humano como una invención divina, que pensaba que había sido traída y revelada a él por ningún esfuerzo humano, sino más bien por algún genio celestial » (pág. 180).

La teoría detrás de la invención que realizó Scheiner respecto a la creación de éste **artefacto**, se relaciona con los principios de los paralelogramos brindados por **Descartes**. No obstante, su invención tiene efectos en el campo de la mecánica, tales como: el pantógrafo de ferrocarril, el gato hidráulico, y el pantógrafo de oxicorte.

En González, J. (2009) Se describe un Pantógrafo que hace parte de la colección de arqueología de los instrumentos científicos del museo nacional de Ciencias Naturales de Madrid (España), que resalta por su belleza morfológica, e importancia técnica. El cual fue construido en Francia por Adrien Gavard (Casa constructora, que ganó dos medallas de primera clase en los años 1855 y 1862) aproximadamente en el año 1860. De igual forma, se le relaciona con Graells (Un español, quien fue fundador de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales).

2.2. Dimensión Cognitiva

Durante los procesos de formación en la escuela y en el bachillerato los estudiantes pueden experimentar diferentes problemas cognitivos en torno al aprendizaje de nuevos conceptos; ya sea porque: carecen de bases estructuradas, por la ineficiente metodología del docente, o porque les resultan nuevo e incomprensibles. No obstante, ésta dimensión pretende deslumbrar todos aquellos *errores, obstáculos, y dificultades* alrededor del concepto de *Homotecia*, que podrían presentar los estudiantes en torno al aprendizaje de éste tópico. Anticipándolos durante el desarrollo de las situaciones didácticas.

Análogamente, se estudia el enfoque instrumental de Verillón y Rabardel (1995, citados en Maschietto & Trouche, 2010), con el fin de observar cuando un *artefacto* se convierte en un *instrumento*, y cómo se da el *uso complementario* entre el Pantógrafo y el Cabri II Plus.

2.2.1. Errores, Obstáculos y Dificultades

Durante el desarrollo de las clases de matemáticas es muy común encontrar que los estudiantes padezcan algunas *dificultades* en cuanto al *aprendizaje* o *entendimiento* de las nociones y procesos matemáticos; los cuales se ven reflejados en muchos de los *errores* que cometen los estudiantes. Para muchos estudiantes por efectos asociados al *errar*, o a los mitos que se crean respecto a las matemáticas, las matemáticas se han

convertido en muchas ocasiones en el “terror”, o aquello no deseado. No obstante, muchos de los *errores* que se comenten en matemáticas tienden a ser de carácter común, es decir, tienden a repetirse. Por ésta razón, será necesario que el docente alimente su profesionalismo a partir de ello, para así fortalecer su papel, poniendo en acto soluciones al respecto. Al igual que disipar todas aquellas ideas erróneas sobre las matemáticas.

Según Socas (2000), en el proceso de aprendizaje de las matemáticas se presentan *dificultades y obstáculos*, que preceden en el *error*. Las *dificultades* en el aprendizaje en matemáticas por su parte, se asocian o presentan en cinco grandes categorías, a saber:

- *Dificultades* asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos: que se ven identificados por el carácter semántico, sintáctico, y operacional conceptual. Puesto que no existe claridad respecto al significado, y utilidad del mismo. Al igual que no se relacionan con términos del sistema antiguo con los nuevos.
- *Dificultades* asociadas a los procesos de pensamiento matemático, donde se ve involucrado el pensamiento lógico. Puesto que existe una ruptura del mismo, ya que se deja de lado la generación de capacidades que permita a los estudiantes seguir argumentos lógicos. No obstante, el pensamiento lógico es promovido en muchas ocasiones por actividades que involucran situaciones cotidianas; a lo que se sugiere que será necesario promover actividades que involucren una lógica social en la que se encuentre inmerso el estudiante, que les resulte significativas.
- *Dificultades* asociadas a los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas. Donde se ven involucrados: institución escolar (genera orientación escolar: materiales curriculares, recursos, y métodos de enseñanza), el currículo (que debe: desarrollar habilidades competentes, envolver contenidos anteriores, generar un nivel de abstracción requerido e

incluir la naturaleza lógica de las matemáticas), y los métodos de enseñanza, que se adaptan a los dos anteriores.

- *Dificultades* asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes. Lo cual obliga a los docentes a adaptar conocimientos acorde a los procesos cognitivos de sus estudiantes.
- *Dificultades* asociadas a actividades afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Relacionadas con las concepciones promovidas por la sociedad, lo cual suscita en el estudiante el miedo al fracaso.

Por otra parte, el concepto de obstáculo fue presentado según Socas (2000), por el filósofo francés Bachelard (1938) en el contexto de las ciencias experimentales bajo la denominación de *obstáculo epistemológico*, el cual es entendido así:

Hay que plantearse el problema del conocimiento científico en términos de *obstáculos*. Y no se trata de considerar *obstáculos* externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni tampoco de culpar la debilidad de los sentidos y de la mente humana, pues es, precisamente, en el mismo acto de conocer, íntimamente, cuando surgen, como una necesidad funcional, torpezas de entendimiento y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, y donde descubriremos causas de inercia que llamaremos *obstáculos* epistemológicos. (Bachelard, 1938; citado por Socas, 2000, p. 136)

Tanto *dificultades* como *obstáculos*, recaen en los efectos que promueven el *error* en el estudiante, no obstante, la concepción de *error* varía de un autor a otro. Según Batanero, Font y Godino (2003, p. 69, citados en Ibarquén & Realpe, 2012) los *errores* se presentan “cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar”; en todo caso, se presentan cuando existe una deficiencia en la adquisición de los conocimientos. No obstante, según Socas (2000), el conocimiento por parte de los docentes respecto a los

“errores básicos” cometidos por los estudiantes, le prevé información sobre la forma en que los estudiantes interpretan los problemas, y de cómo pretenden solucionarlos; alimentando lo que él ha denominado “Estrategias de prevención y remedios”, y los cuales a su vez deberán estar enfocados en las cinco categorías de *dificultades* planteadas por el mismo autor.

No obstante, el concepto de homotecia no es ajeno a ésta situación, pues es común encontrar que los estudiantes presenten *dificultades*, *obstáculos* y *errores* al respecto; los cuales en muchas ocasiones tienen origen en el desarrollo del *Razonamiento Proporcional*, dada la intrínseca y estrecha relación que existe de éste concepto con el concepto de *Homotecia*. A lo que Obando, Vasco y Arboleda (2014) argumentan que Razones, Proporciones, y Proporcionalidad (RPP) se han convertido en los últimos cincuenta años en objeto de estudio, puesto que evaluaciones recientes muestran que estos objetos de conocimiento siguen siendo difíciles de aprender para la mayoría de los estudiantes; al no alcanzar un nivel significativo de un año al otro.

Por otra parte, en Gonzales y Arias (2017), se exhiben una serie de *errores* que se presentan al desarrollar tareas donde se estudia el concepto de homotecia, con base en: revisiones bibliográficas, entrevistas realizadas a docentes de Educación Secundaria y Universitaria (en Puerto Rico), y revisiones hechas a ciertos desarrollos de tareas donde se estudió el concepto de *Homotecia*. Acorde a lo anterior, se identificó lo siguiente:

- Realizar divisiones erradas
- Definir de manera incorrecta la *Homotecia*
- Cálculo erróneo de distancias o cocientes
- Determinar incorrectamente los puntos homólogos
- Determinar de manera incorrecta los segmentos homólogos
- Determinar de manera incorrecta los ángulos homólogos
- Realizar mediciones erradas

- Ubicación de puntos en el plano cartesiano³⁸
- Hacer inferencias incorrectas
- No reconocer el centro de *Homotecia*
- Realizar sumas erradas
- Representar en el plano cartesiano una figura con rotación cuando dibuja figuras homotéticas
- Identificar erróneamente diferencias entre figuras
- Identificar erróneamente similitudes entre figuras
- Realizar multiplicaciones erradas

Análogo a esto, los mismos autores presentan otros resultados de las encuestas realizadas a la misma población de docentes. Donde se exhiben resultados acorde a lo que ellos han denominado “limitaciones de aprendizaje del análisis cognitivo”, es decir, se refieren a las *dificultades cognitivas* (según autores) que cometen estudiantes de secundaria y universitarios (docentes en formación) cuando se encuentran aprendiendo el concepto de *Homotecia*. En relación a lo anterior, se presentó lo siguiente:

- Identificar si una homotecia es una ampliación o una disminución, identificar los lados homólogos, los puntos homólogos y los ángulos homólogos.
- Trazar una recta entre dos puntos, creer que toda proyección³⁹ es una homotecia, ubicar ángulos en figuras homotéticas inversas, calcular el punto de homotecia, no saber usar la regla.
- La correspondencia de puntos.
- Al hacer construcciones confunden ampliaciones con disminuciones.
- Lo numérico, al multiplicar.
- La homotecia inversa, por la posición.
- En visualizar⁴⁰.

³⁸ La investigación realiza sólo tendrá en cuenta aquellos *errores* presentados en el espacio euclideo.

³⁹ Referente a la geometría proyectiva, es decir, a la rama de la matemática que estudia las propiedades de incidencia de las figuras geométricas, pero sin considerar el concepto de medida. Técnicamente, las figuras en un plano se proyectan sobre otro, que no necesariamente será paralelo.

- En la homotecia inversa al identificar lados, puntos y ángulos homólogos.
- Al ver la homotecia como una translación, la constante les complica.
- Creer que cuando se multiplica se obtiene algo más grande, que el signo cuando la razón es negativa varia la dirección.
- En algún problema relacionado con la composición de la homotecia que no tenga el mismo centro.

En ésta investigación se encontró que existen *dificultades* tales como:

- Los estudiantes presentan *dificultades* para identificar una Razón entre dos FGS.
- Los estudiantes no identifican una homotecia de una *no* homotecia. Al igual que no la reconocen en un ambiente natural.
- No se genera un pensamiento Dinámico respecto al comportamiento de la Razón (R), al variarse: $0 < R \leq 1$ o $-1 \leq R < 0$.

2.2.2. Uso Complementario Existente Entre Materiales Manipulativos y Cabri II Plus

El ser humano hoy en día gira alrededor del uso constante de tecnologías, frecuentemente es muy común que mucha de la información que éste quiera dar a conocer, o conocer, proceda del uso constante de las TIC. No obstante, el impacto que éstas han promovido en la vida del ser humano ha generado cambios drásticos, inclusive hasta en la educación, puesto que tal y como lo señalan Ruíz y Lupiáñez (2010), “ésta situación motiva tanto a docentes e investigadores a incluir nuevos aparatos electrónicos en sus actividades de enseñanza” (pág. 213).

Por otra parte, según Hernández y Bastidas (2014), procesos cognitivos como: razonar, atender, memorizar, entre otros, son promovidos por el uso de diferentes materiales dentro del ámbito escolar. Puesto que originan nuevas experiencias para los

⁴⁰ En Gonzales y Arias (2017), no existe una definición formal de éste concepto, por lo que se optó por entenderlo como una acción física de ver.

estudiantes, ya que promueven la interpretación de nuevos conocimientos, tomando como referencia los previos; permitiendo así, dar solución a las situaciones planteadas, generando e interpretando el conocimiento adquirido. Por tanto, el uso de materiales manipulativos como el Pantógrafo y el Cabri II Plus no serán la excepción.

Análogamente, el Ministerio de Educación Nacional (MEN) (en Colombia) propone incluir nuevas tecnologías en el *Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia*, puesto que juegan el papel de mediadores, y hacen de los estudiantes participantes activos en la construcción de su conocimiento. Así pues, tal y como lo afirman Ibarquén y Realpe (2012), un AGD como el Cabri II Plus permite que los estudiantes manipulen representaciones de objetos geométricos (explorando propiedades), y materiales físicos (como el *Pantógrafo*), no sólo incentivan la creatividad, sino que pueden ser utilizados para generar ideas y desarrollar el pensamiento espacial y geométrico.

No obstante, ¿Qué se entenderá por *uso complementario* o *complementariedad* entre éstos materiales? Pues bien, en ésta investigación se concuerda con Ibarquén y Realpe (2012) de la siguiente manera:

En la investigación de Hoyos (2006), se entiende por las características que posee cierto *artefacto* que le permiten mejorar las de otro, o aquellas que tiene un grupo de *artefactos* que hace enriquecerse mutuamente, donde cada *artefacto* posibilita la construcción de un conocimiento diferente. Cabe mencionar que el *artefacto* complementa el pensamiento del estudiante, más no lo modifica (pág. 8).

Así pues, *artefactos* como el Pantógrafo, y el AGD Cabri II Plus podrán ejercer un *uso complementario*, puesto que las características que posee el uno (aspectos diferentes) le permitirán mejorar las del otro, logrando así ejercer un proceso de retroalimentación entre las funciones que cumple cada *artefacto*. Por otra parte, según Assude y Gelis (2002, citados en Ibarquén & Realpe, 2012) se establece que: lo viejo alimenta a lo nuevo, permitiendo coexistir y formar una nueva red de relaciones.

Permitiendo que *artefactos* como el AGD Cabri II Plus, y el *Pantógrafo* puedan complementarse. Enriqueciendo el conocimiento generado por el estudiante.

En Hoyos (2006), se realizó una investigación acorde al “uso complementario” entre *artefactos* como: el *Pantógrafo*, y el AGD Cabri II Plus, en relación al diseño de una secuencia sobre el aprendizaje de diferentes TG, tales como: *Homotecia*, simetría, reflexión, y translación. La cual dio prueba de que quizá haya existido el “uso complementario” entre éstos *artefactos*, puesto que se movilizó intuitivamente la noción de homotecia; tal intuición fue movilizada de forma vaga por las leyendas o ayudas que incluye el AGD Cabri II Plus. No obstante, la metodología que fue utilizada aquí, es diferente la que se implementó en el desarrollo de ésta investigación.

Ahora bien, se presentaran algunas de las características que hacen parte de *artefactos* manipulativos físicos (articulados), y virtuales (AGD Cabri II Plus), con el fin de dar a conocer el cómo éstos se complementan para generar una comprensión del espacio.

En Bartolini y Maschietto (2008), los *artefactos* manipulativos físicos, son descritos como maquinas matemáticas, o también como maquinas geométricas, puesto que éstas obligan a un punto a seguir una trayectoria, o a transformarse de acuerdo con una ley dada. Como un ejemplo de esto, podemos nombrar al *Compás* estándar, el cual obliga a un punto a recorrer una trayectoria circular. No obstante, los mismos autores mencionan algunas otras cualidades respecto a éstos *artefactos*.

- El uso eficiente de éstos *artefactos* en las aulas de matemáticas, se convierte en un verdadero desafío para el docente, puesto que requieren de competencias profesionales específicas (que no pueden darse por concebidas); dependientes de la característica multidimensional del conocimiento matemático para la enseñanza

- Necesitan de un manejo concreto, que requiere habilidades motoras, puesto que pone resistencia al movimiento, y necesitan tiempo para ser explorados. Al igual que trabajan en una parte limitada del plano.
- No sólo se pueden utilizar con niños, sino con estudiantes de más edad (Se muestran ejemplos al respecto sobre la elaboración de definiciones y la construcción de pruebas).
- No son de carácter “transparente”, sino que según Meira, “se hacen eficientes, relevantes, y transparentes a través de su uso en actividades específicas y en relación con las transformaciones que sufren en manos de los usuarios” (1998, citado en Bartolini & Maschietto, 2008). Es decir, para ella la “transparencia” surgirá del uso dado a la herramienta.
- Existen dos orientaciones, es decir, como herramienta técnica, y psicológica. No obstante, según Vygotsky: Como herramienta técnica está orientada hacia el exterior; como herramienta psicológica está orientada internamente. (1978, p. 55, citado en Bartolini & Maschietto, 2008).

Ahora bien, *artefactos* manipulativos (virtuales) como el AGD Cabri II Plus permiten al estudiante trabajar la geometría en un modo virtual y experimental. Puesto que según Azinian, “permiten construir y manipular objetos con el fin de explorar las relaciones que existen entre los elementos de cada uno y entre ellos” (2009, p. 101, citado por Ibarguen & Realpe, 2012). Es decir, el estudiante podrá ejercer dominio dinámico sobre los elementos a través de una de las características más importantes de éste tipo de ambientes, “el arrastre”, el cual impulsa libertad respecto a la manipulación de los objetos.

Sin embargo, análogamente al uso respecto a *artefactos* físicos, para el profesor, la integración de la tecnología al aula, no es un proceso sencillo (Zhao, Pugh & Byers, 2002, citado por Candía & Galleguillos, (2011), puesto que según Candía y Galleguillos

(2011), “Se requiere de metodologías bien evaluadas de integración de los recursos tecnológicos a la clase” (pág. 2).

Finalmente, según Bartolini y Maschietto (2008), las TIC (manipulativos virtuales) se han convertido en el sustituto de recursos manipulativos físicos, puesto que se emplean como copias virtuales de estos objetos; no obstante, su tarea típica será modelar su función dentro de un AGD. Sin embargo, según ellos, éstas copias “sólo forman una parte de la historia y que la manipulación concreta tiene que encontrar un lugar tanto en el aulas de matemáticas como en la formación de maestros” (pág. 22). Puesto que las TIC no sustituyen objetos concretos (bajo la generación de algunos procesos); “sino que tienen su propio lugar en la educación matemática, debido a las características que son en parte diferentes de los *artefactos* físicos” (pág. 22).

2.2.3. Génesis Instrumental

La integración de computadores en las clases de matemáticas ha tenido gran importancia en la Educación Matemática, tal y como se afirma en uno de los seis (6) principios establecidos por los estándares de la NCTM⁴¹, el cual dice que la tecnología es esencial en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en la matemática que se enseña y amplía el aprendizaje de los estudiantes (NCTM, 2000, p. 24, citado por Del Castillo & Montiel, 2009). No obstante, al integrar los computadores al aula de clase, se origina una *transposición informática*, que según Trouche (2005) implica una contextualización del conocimiento creado. Por lo que estudiantes deberán apropiarse de sus cualidades. Sin embargo, según Del Castillo y Montiel (2009), un *artefacto* por sí sólo, no genera aprendizaje de las nociones matemáticas, será necesario que los estudiantes interactúen con él en un ambiente organizado.

Existe una distinción entre lo que se conoce como *artefacto* e *instrumento*, puesto que según Verillon y Rabardel (1995, citado por Trouche, 2005), un *artefacto* será un

⁴¹ National Council of Teachers of Mathematics, en español: Consejo Nacional de Maestros de Matemáticas

objeto que puede ser material o abstracto, el cual será empleado por un sujeto al realizar una cierta tarea, convirtiéndose en un *instrumento*. Éste proceso de conversión se denomina ***génesis instrumental***, e involucra dos procesos coordinados: la *instrumentalización* y la *instrumentación*.

Según Ibarguen y Realpe (2012):

La instrumentalización es un proceso dirigido hacia el *artefacto*, donde intervienen varias fases: una fase donde se descubren y seleccionan las herramientas o elementos pertinentes, una fase de personalización, donde se ajusta el *artefacto* dependiendo de las necesidades y una fase de transformación del *artefacto*; por ejemplo, la modificación de la barra de herramientas, la creación de atajos en el teclado, entre otros. En otras palabras, el sujeto al usar el *artefacto* se apropia de sus propiedades iniciales, adaptándolo a sus necesidades y limitado a sus potencialidades.

La instrumentación es un proceso dirigido hacia el sujeto, donde éste concibe las restricciones y potencialidades del *artefacto*, pasando a través de la emergencia y evolución de esquemas⁴² mientras realiza un determinado tipo de tarea. (págs. 63 - 64).

⁴² Según Vergnaud (1996; citado por Trouche, 2005) un **esquema** es una organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situaciones.

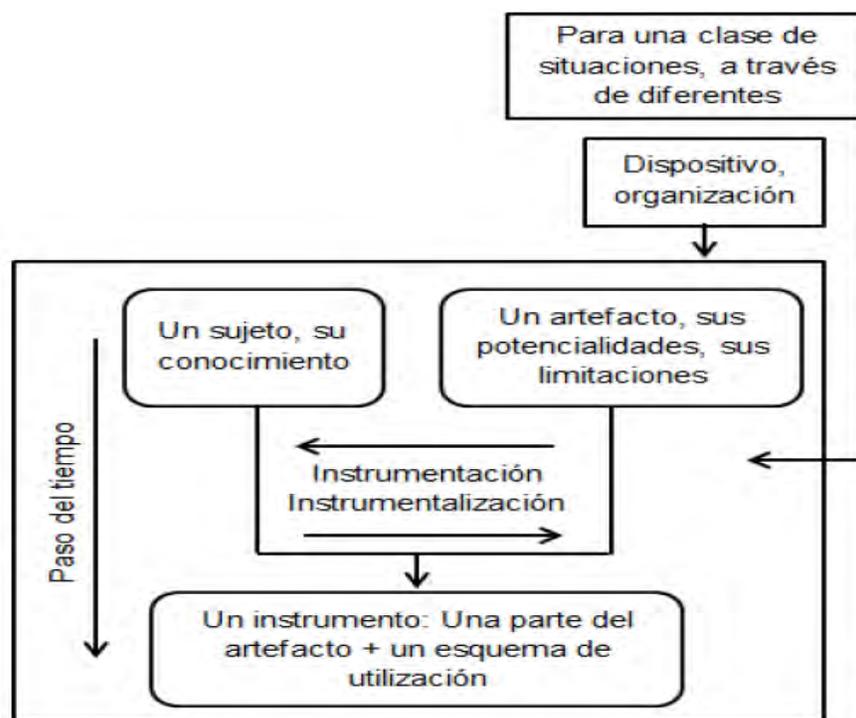


Figura 10. Génesis instrumental

Fuente: Guin y Trouche (2002, citado por Ibarguen & Realpe, 2012)

Según Del Castillo y Montiel (2009), el descubrimiento de las propiedades intrínsecas en un *artefacto* va acompañado de la adaptación de *esquemas*⁴³ por parte del sujeto (lo cual motiva *acciones* sobre éste), al igual que los cambios en la significación del *instrumento* resultante de la asociación del *artefacto* con nuevos *esquemas*. Así mismo, el proceso de *instrumentación* surge con el nacimiento de estos *esquemas*, la asimilación de nuevos artefactos a los *esquemas* (dando un significado nuevo a los artefactos) y la adaptación de los *esquemas* (contribuyen al cambio en su significado).

No obstante, durante el proceso de *génesis instrumental* según Ibarguen y Realpe (2012), el sujeto puede llevar el *artefacto* a su mejoramiento, o a su subutilización.

⁴³ *Esquemas mentales*, que en palabras de Vergnaud (1996), según Ibarguen y Realpe (2012), quienes citan a Cedillo (2006) “Es una acción deliberada, para lograr una meta que contiene operaciones invariantes” (pág. 134). Lo que permite al sujeto abordar estrategias para solucionar una tarea.

Donde el último se entiende como “hacer un uso mínimo de las tecnologías brindadas por el artefacto”; lo que crea un proceso de amplificación que no genera conocimiento.

Según Del Castillo y Montiel (2009), los *ambientes informáticos* le permiten al usuario interactuar de una forma directa con los objetos matemáticos y sus relaciones. Sin embargo, existen algunas *restricciones* ligadas a las potencialidades de estos ambientes, las cuales al ser puestas en conocimiento facilitarían el desarrollo del análisis *a priori* en las distintas formas en que tal *software* propone realizar un tipo de tarea. No obstante, éstas son desplegadas al citar a Trouche (1997) como: Internas, de comando, y de organización, las primeras se consideran predeterminadas, y vienen relacionadas con: la naturaleza del microprocesador, capacidad de la memoria, estructura de pantalla, entre otras cosas. Las de comando están asociadas a la sintaxis de los propios comandos (que podrían modificarse en algunos casos), y por último, las de organización que están asociadas al teclado y a las pantallas, es decir, a la estructuración de las informaciones y de los comandos disponibles (que también podrían ser modificadas por el usuario).

Por otra parte, en Truche (2005), se menciona que la *génesis instrumental* se ve influenciada por aspectos individuales o sociales, los cuales son promovidos por factores como: el tipo de materiales (por ejemplo, el uso de una calculadora promueve el uso individual o en grupos pequeños), disponibilidad de *artefactos* (puesto que no siempre existe disponibilidad absoluta de materiales), y la forma en que el docente promueve su uso.

Por último, la inclusión de la máquina articulada *Pantógrafo*, con la cual es posible realizar *Homotecias*, tal y como se pudo ver en el aspecto histórico de éste *artefacto*, puede ser llevada al aula de clases. Puesto que puede fomentar la adquisición de nuevos conocimientos, los cuales se pueden evidenciar cuando el estudiante desarrolle *esquemas de utilización*. Análogamente, si ésta se incluye al iniciar el tema de *Homotecias*, se constituiría como un *artefacto* valioso, puesto que no se utilizaría como un amplificador, sino como un organizador que permite generar nuevos conocimientos.

2.3. Dimensión Didáctica

Para el desarrollo de ésta investigación será primordial exhibir cómo opera la TSD en la construcción del conocimiento⁴⁴, puesto que permitirá promover la construcción de la secuencia didáctica y los análisis presentes en éste estudio.

2.3.1. Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD)

Según Hernández y Bastidas (2014), el Ministerio de Educación Nacional (1998), sugiere la integración de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas, donde la geometría puede ser enseñada por medio de un AGD; puesto que se favorece el desarrollo de habilidades en los estudiantes a través de la resolución de problemas, lo que permite que los estudiantes exploren, descubran, conjeturen, validen, refuten, y hasta sacar conclusiones al respecto. Por tal motivo, artefactos físicos y virtuales como el *Pantógrafo* y el *Cabri II Plus (Materiales Didácticos)*, utilizados en ésta investigación, no serán la excepción. No obstante, será responsabilidad del docente promover con ellos una intención didáctica predeterminada, acorde a la adquisición del conocimiento que se va a enseñar. Los artefactos involucrados deberán jugar el papel de *medio*⁴⁵ (de aprendizaje), es decir, serán el puente que unirán al estudiante con el conocimiento que va a ser enseñado.

A continuación se definirá lo que se entenderá por *Materiales Didácticos*:

⁴⁴ Según Acosta (2010), la TSD distingue entre Conocimiento y Saber. Pues el Conocimiento será una experiencia personal, mientras el Saber es institucional, es decir que recibirá la sanción de una comunidad de sabios, quienes deciden lo que es el saber.

⁴⁵ Según Acosta (2010):

El medio es aquello con lo que interactúa el alumno, sobre el cual puede realizar acciones y recibir retroacciones que le permitan la validación. Ese medio debe ser seleccionado o diseñado de manera cuidadosa para que los conocimientos producto del aprendizaje por adaptación sean lo más parecidos posible al saber que se quiere enseñar. (pág. 135).

Coriat (1997) hace una distinción entre materiales didácticos y recursos, los primeros son creados con fines exclusivamente educativos, concepto o procedimiento matemático que el profesor decide integrar en su práctica educativa. Para el autor los materiales didácticos pueden utilizarse en varias situaciones, es por tanto que no existe una delimitación entre los dos conceptos y los divide en: Materiales didácticos manipulativos físicos y virtuales o no manipulables.

Material manipulativos físicos:

Se definen como cualquier material u objeto físico que se puede “palpar”, estos facilitan la adquisición de un determinado concepto matemático, dependiendo de la complejidad de la tarea pueden tener propósitos específicos o propósitos variados.

Material virtual o no manipulable.

Son aquellos materiales que representan digitalmente la realidad en un grado superior que los anteriores, por ejemplo, para el desarrollo de ésta investigación, se empleará el AGD Cabri Géomètre II Plus, que permite realizar construcciones geométricas por medio de la manipulación directa de objetos en la pantalla.

Brousseau (2007), define la *situación didáctica* como “un conjunto de relaciones establecidas explícitamente e implícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto *medio* y un sistema educativo, con el fin de que los alumnos se apropien de un saber constituido o en vía de constituirse”; es decir, el estudiante pondrá en ejercicio sus conocimientos al interactuar con un problema matemático, esto podría modificar o adquirir otros nuevos, en base a sus interpretaciones.

La TSD está compuesta por dos tipos de situaciones, a saber: *situación didáctica* y *situación a-didáctica*. Donde la primera de ellas es una situación en la que intervienen tres (3) elementos: un saber (a enseñar), un docente (quien enseña ese saber) y un estudiante (o más; quien o quienes desean aprender). La segunda se caracteriza por

generar una situación (diseñada por el docente) donde el estudiante deberá aprender por *adaptación*⁴⁶, es decir, él deberá interactuar con el *medio* (que en muchos casos es material) en que vive, realizando *acciones* que produzcan *retroacciones*, que puedan ser interpretadas por los estudiantes; sin la mediación de un docente.

Según Acosta (2010), en una *situación a-didáctica*:

1. El sujeto parte de una intención, de una meta que desea alcanzar,
2. Para lo cual realiza una acción sobre el medio
3. El medio reacciona a esa acción (lo cual recibe el nombre de retroacción)
4. El sujeto interpreta la retroacción del medio usando los conocimientos de los que ya dispone.
5. El sujeto valida su acción de acuerdo con la interpretación que hace de las retroacciones del medio. Esta validación puede tomar dos valores. Cuando la acción realizada le permite alcanzar su intención la validación es positiva, en cuyo caso refuerza esta acción, es decir la repetirá con mayor frecuencia cuando quiera alcanzar esa intención. Cuando la acción realizada no le permite alcanzar su intención la validación es negativa, y produce una modificación de la acción, iniciando un nuevo ciclo acción-retroacción-validación. (pág. 133).

La validación será considerada como señal de aprendizaje, es decir, la modificación de una conducta observable. Por otra parte, según la TSD, en una situación de clase (situación didáctica) la situación a-didáctica será incluida.

⁴⁶ Según Acosta (2010), alrededor de éste concepto se construye la TSD. No obstante, éste fue heredado de la teoría Piagetiana del aprendizaje dada por Piaget; la cual fue adaptada al aprendizaje biológico. Por su parte, Brousseau la adapto al análisis de las actividades escolares.



Figura 11. Relación entre situación didáctica y a-didáctica

Fuente: Acosta (2010)

Análogamente, en Acosta (2010), se mencionan algunas características que deberá ejercer (el papel) el docente durante el desarrollo de la TSD. A saber:

1. Antes de la clase debe preparar con cuidado el problema y el medio que conforman la situación a-didáctica, es decir prever las acciones que pueden realizar los alumnos, las retroacciones del medio y las posibilidades de validación que tendrán los alumnos.
2. Durante el desarrollo de la situación a-didáctica debe limitar sus intervenciones para garantizar el aprendizaje por adaptación. Debe evitar darle información directa o indirecta al alumno que le permita resolver el problema, y sobre todo debe evitar juzgar (positiva o negativamente) el trabajo del alumno. Sin embargo, esto no quiere decir que deba retirarse completamente; en esta fase, sus intervenciones deben limitarse a 'devolverle el problema al alumno', es decir evitar que renuncie a resolver el problema, asegurándose de que comprende lo que se espera que

logre, que identifica algunas acciones que puede realizar en el medio, y que toma conciencia de las retroacciones del mismo.

3. Una vez terminada la situación a-didáctica interviene directamente para hacer tomar conciencia a los alumnos del conocimiento que han adquirido, para verbalizar dicho conocimiento y explicitar sus conexiones con el saber oficial.

Entonces, según Hernández y Bastidas (2014):

Además la TSD ha clasificado las situaciones didácticas en situaciones de acción, situaciones de formulación y situaciones de validación, sin embargo, será la situación de acción la que se empleará en el desarrollo de las actividades presentadas en las situaciones. Esta consiste básicamente en que el estudiante trabaje individualmente con un problema, aplique sus conocimientos previos y desarrolle un determinado saber. Es decir, el estudiante individualmente interactúa con el medio didáctico, para llegar a la resolución de problemas y a la adquisición de conocimientos por su propia cuenta. (pág. 62).

De acuerdo con todo lo expuesto anteriormente, se puede decir que, las situaciones programadas en éste trabajo investigativo son *situaciones a-didácticas*, puesto que las situaciones están diseñadas para desarrollarse con *medios* manipulativos físicos y virtuales como lo son el Pantógrafo y el AGD Cabri II Plus, cuyo propósito será despertar el interés por parte de los estudiantes al resolver los problemas planteados en la situaciones, y generen el conocimiento.

La interacción profesor, estudiante, y saber a ser enseñado, genera un concepto fundamental de la TSD; el *contrato didáctico*, que según Acosta (2010), se refiere a la consigna establecida entre docente y estudiante. Así, se establecen normas o roles que deberán cumplir acorde a las relaciones docente-estudiante y estudiante-docente, a la hora de enseñar y aprender un saber.

2.3.2. Acciones y Retroacciones de Cabri Géomètre II Plus y el Pantógrafo

Dentro del diseño de una *situación a-didáctica* el *medio* juega un papel fundamental, puesto que permite que el sujeto (estudiante) realice *acciones* con éste, tal que le concederá recibir de ellas *retroacciones*; abriendo la posibilidad a la reestructuración de su conocimiento o lo valides del mismo. No obstante, el *medio* por sí solo no generará conocimiento, por lo que será importante que éste se encuentre sometido en una intencionalidad didáctica.

Para Sadovsky (2005, citado por Hernández & Bastidas, 2014), el concepto de *medio* incluye tanto la problemática inicial a la que el sujeto se enfrente, al igual que también un conjunto de relaciones matemáticas, las cuales se irán modificando conforme el sujeto produce conocimiento en el trascurso de la situación, transformando (en consecuencia) la realidad con la que interactúa.

Acosta (2010) señala que, el *medio* con el cual el estudiante interactuará durante la *secuencia a-didáctica* deberá ser elegido cuidadosamente, puesto que los conocimientos adquiridos mediante el *aprendizaje por adaptación* deberán ser lo más parecidos al saber que se quiere enseñar. En éste sentido, materiales físicos como el Pantógrafo, y virtuales como el AGD Cabri II Plus, servirán como *medio* para la enseñanza de las matemáticas, según la forma en la que el docente plantee las situaciones; despertando curiosidad e interés en los estudiantes al interactuar con éstos *medios* (en conjunto o en forma individual), interpretando y descubriendo las potencialidades que se encuentran inmersas en ellos, al generar conocimiento.

Según Moreira (2002, citado por Hernández & Bastidas, 2014), los *medios* se caracterizan por ofrecer a los sujetos un modo de representación del conocimiento de naturaleza inactiva, es decir, la modalidad de experiencia de aprendizaje (posibilitada) con éstos *medios* es contingente, sólo que la misma deberá ser regulada por un contexto de enseñanza. Por otra parte, *medios* digitales como un AGD según Acosta (2010), son adecuados para el *aprendizaje por adaptación* de la geometría, puesto que

su programación garantiza que todos los fenómenos asociados a la construcción y manipulación de figuras geométricas correspondan a la teoría de la geometría euclidiana.

Según Acosta (2010), en Cabri Geometry II Plus se pueden realizar dos tipos de *acciones* con sus respectivas *retroacciones*. A saber:

- La primera *acción* es la de *construir*, y su *retroacción* corresponde a un dibujo estático (*fenómeno estático*) en pantalla. La *acción* consiste en seleccionar una de las herramientas de Cabri, y utilizarla para generar un dibujo, el cual será sometido a las teorías de la herramienta utilizada. Por ejemplo, cuando seleccionamos la herramienta **Segmento**, entonces procedemos a dar un clic en pantalla para marcar el origen del segmento, y en consiguiente deberemos dar clic nuevamente en pantalla, para marcar el final del segmento. No obstante, la utilización en conjunto de estas herramientas, acorde a un protocolo de construcción coherente con las propiedades matemáticas como paralelismo, perpendicularidad, pertenencia, entre otros, generaran figuras geométricas (*retroacción estática*).
- La segunda *acción* es la de *arrastrar*, y su *retroacción* corresponde a un *fenómeno dinámico*. La *acción* consiste en agarrar un objeto (con la herramienta **Apuntador**) con el ratón y desplazarlo por la pantalla, tal que su desplazamiento no generará cambios (*fenómeno dinámico*) en las propiedades explícitamente sometidas en la construcción del objeto (al usar una herramienta de construcción) o aquellas que se deducen teóricamente de ellas. Por ejemplo, cuando agarramos un triángulo equilátero, podremos cambiarlo de lugar, hasta incluso de tamaño, no obstante, sus propiedades matemáticas inmersas en el serán invariables.

Con el Pantógrafo se puede realizar la *acción* de *construir*, recibiendo como *retroacción* un *dibujo estático* en una hoja de papel. La construcción con el Pantógrafo

se debe realizar sobre una hoja en blanco, configurando éste artefacto de acuerdo a las necesidades de construcción, es decir, al valor escalar que se quiera ampliar o reducir la figura, no obstante, éste valor dependerá de la ubicación o posición articular de las reglas que lo conforman; las cuales a su vez deberán articularse a modo de cumplir con los principios de los paralelogramos. Por consiguiente, se deberá ubicar el dibujo (a transformar) bajo la aguja guía, tal que ésta pueda seguir el perímetro del dibujo, para que el lápiz, el cual se ubica en el otro punto, pueda marcar trazo del resultado obtenido sobre la hoja en blanco.

Por otra parte, Cabri Geometry II Plus, y el Pantógrafo permiten a los estudiantes validar e invalidar sus acciones al interpretar las retroacciones de dichos medios.

2.3.3. Análisis Curricular

Para observar el desarrollo del pensamiento espacial, en particular, la concepción del concepto de Homotecia, se tomó como referencia los Estándares Básicos de Competencias para el área de matemáticas planteados por el MEN (2006), en los cuales se evidencia que algunas de las características que el estudiante debe alcanzar en su proceso de aprendizaje, son visibles en las situaciones didáctica propuesta, y como el uso de medios físicos y digitales como el Pantógrafo y el AGD Cabri II Plus, pueden contribuir al mejoramiento de destrezas; fomentando la adquisición de conceptos, e interpretando y desarrollando situaciones. Por ésta razón, éste análisis curricular enfatizará en la relación existente de un estándar con los del mismo tipo de pensamiento (coherencia vertical), al igual que la relación existen de éste con los otros estándares de los demás tipos de pensamientos (coherencia horizontal).

Los Estándares Básicos están distribuidos por niveles (según los grados): primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a once. Cada nivel deberá desarrollar competencias relacionadas con los cinco tipos de pensamientos matemáticos, a saber: espacial, numérico, métrico, aleatorio, y variacional. Y demás, en cada columna de cada estándar se hace énfasis a uno o más de uno de los cinco

procesos matemáticos: formular, resolver problemas, comparar, ejercitar procedimientos y algoritmos.

Los estándares deben tener coherencia vertical y horizontal. La *coherencia vertical* hace referencia a la relación existente entre estándares del mismo pensamiento, pero de diferentes niveles. Mientras que la *coherencia horizontal* será la relación existente entre un determinado estándar con los demás pensamientos dentro del mismo nivel.

A continuación se presenta el listado de estándares que se consideró pertinente para el diseño de las situaciones didácticas, así como también su respectiva relación entre los estándares del pensamiento espacial y los estándares del pensamiento métrico de los grados 6° y 9°. Con el fin de comprender la organización, procedimientos y procesos que se presentan al realizar un proceso de homotecia.

Coherencia vertical

Estándares Básicos de competencias Pensamiento espacial y Sistemas geométricos de los grados 6° y 7°

1. Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.
2. Identifico y describo figuras y cuerpos generados por cortes rectos y transversales de objetos tridimensionales.
3. Clasifico polígonos en relación con sus propiedades.
4. Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre figuras bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte⁴⁷.

⁴⁷ Según los Estándares Básicos de Competencias para el área de matemáticas planteados por el MEN (2006), el concepto de homotecia deberá ser visto por los estudiantes en los grados 6° o 7°, y según la investigación desarrollada, ésta se implementó en estudiantes de grado 9°. Lo que obedece a un fortalecimiento de las primeras ideas obtenidas por los estudiantes en los grados 6° o 7° respecto este concepto, al igual que no dejarlo en el olvido. Así mismo, se promueve este concepto bajo una nueva propuesta didáctica.

5. Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales.
6. Resuelvo y formulo problemas usando modelos geométricos.
7. Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

De acuerdo a esto, se puede comprender que acciones como predecir y comparar resultados obtenidos al aplicar la TG de homotecia, al igual que resolver problemas que involucren propiedades de semejanza y congruencia en representaciones visuales, son enunciados en el cuarto y quinto estándar. Los cuales formaron parte del diseño estructural de todas las actividades que conformaron lo que se denominó *Secuencia Cero*⁴⁸ (Ver Anexo No. 1). Análogamente, en las *Situaciones Didácticas* diseñadas para éste estudio, el quinto estándar fomenta la estructura de la *Primer actividad diseñada*, y las otras tres se ven influenciadas por el cuarto estándar.

Así mismo, para el quinto estándar, se encontró que en el nivel de 8° y 9° se encuentran relacionados verticalmente los siguientes estándares:

1. Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas
2. Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.

No obstante, el concepto de homotecia se deja de lado, por lo que: no existe coherencia vertical entre los estándares del nivel de 8° y 9° con el cuarto estándar del

⁴⁸ Ésta secuencia hace parte del primer acercamiento que tuvieron los estudiantes hacia el AGD Cabri II Plus, pues los estudiantes seleccionados no habían tenido experiencia alguna con estas tecnologías. Por tal motivo, fue diseñada e implementada con el fin de promover procesos de *instrumentalización* respecto a algunas herramientas del Software, útiles para la buena implementación de la secuencia diseñada en éste trabajo (desarrollando semejanzas de diferentes razones a diferentes figuras geométricas, al igual que usando el concepto de homotecia). Así mismo, que los estudiantes en principio exploren algunas propiedades, cualidades y diferencias entre los conceptos de *Semejanza*, *Congruencia* y *Homotecia*. Puesto que se parte de la hipótesis de que existe confusiones al respecto entre ellos, tal y como se menciona en los Antecedentes.

nivel 6° y 7°. Por lo que se asume que el concepto de homotecia dentro de los *Estándares Básicos de Competencias* para matemáticas es considerado como transitorio, y sin importancia en el desarrollo del *pensamiento espacial* de los estudiantes.

Estándares Básicos de competencias Pensamiento espacial y Sistemas geométricos de los grados 8° y 9°

1. Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas.
2. Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
3. Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas.
4. Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.

Conforme a esto, se puede comprender que acciones como conjeturar y verificar propiedades entre figuras bidimensionales y tridimensionales al igual que aplicar y justificar criterios de semejanzas y congruencias entre triángulos (en la resolución de problemas), son enunciadas por el primer y el tercer estándar, aludiendo al concepto de Semejanza; cuya relación es intrínseca con el concepto de Homotecia. No obstante, estas acciones forman parte de la constitución estructural de todas las actividades que conforman el diseño de la *Secuencia Cero* (sin incluir figuras tridimensionales); tal y como se explicó anteriormente. Sin embargo, el concepto de homotecia no es considerado en éste nivel. Más aun, dentro del diseño de las *Situaciones Didácticas* de éste estudio, el primer estándar fomenta la estructura de la *Primer actividad diseñada*, puesto que se aplican propiedades de semejanza.

El primer y el tercer estándar se encuentran relacionados vertical con éste estándar del nivel 6° y 7°:

1. Resuelvo y formulo problemas que involucren relaciones y propiedades de semejanza y congruencia usando representaciones visuales

En conclusión, se asume que el concepto de homotecia dentro de los *Estándares Básicos de Competencias* para matemáticas es considerado como transitorio, y sin importancia en el desarrollo del *pensamiento espacial* de los estudiantes. Más aun, la importancia recae en el uso de conceptos relacionados al de Homotecia, tales como: Congruencias y Semejanzas; conceptos que son de suma importancia para el desarrollo del concepto de Homotecia, puesto que involucran algunas de las nociones matemáticas que fundamentan las de Homotecia.

Estándares Básicos de competencias del Pensamiento métrico y Sistemas de medidas de los grados 6° y 7°

1. Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
2. Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).
3. Calculo áreas y volúmenes a través de composición y descomposición de figuras y cuerpos.
4. Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
5. Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.

Por tanto se puede observar que resolver y formular problemas que involucren factores escalares (gráficos) es considerado en el segundo estándar. Análogamente, algunas de las actividades diseñadas tanto en la *secuencia cero* (segunda, y tercer

actividad) al igual que las diseñadas en la *secuencia* de ésta investigación (tercer, y cuarta actividad) involucran el uso del primer estándar.

En las actividades de ésta investigación, los estudiantes deberán realizar procesos de ampliación con el Pantógrafo, y con el AGD Cabri II Plus, al igual que resolver algunos problemas que involucran cálculos de medidas (precisos y estandarizados) y procesos de construcción construcciones con éstos artefactos. Es por ello que los estándares del nivel 8° y 9° que se relacionan verticalmente son:

1. Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
2. Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

Estándares Básicos de competencias del Pensamiento métrico y Sistemas de medidas de los grados 8° y 9°

1. Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.
2. Selecciono y uso técnicas e instrumentos para medir longitudes, áreas de superficies, volúmenes y ángulos con niveles de precisión apropiados.
3. Justifico la pertinencia de utilizar unidades de medida estandarizadas en situaciones tomadas de distintas ciencias.

De donde acciones como medir longitudes con instrumentos (como reglas o cintas para medir), y la utilización de medidas estandarizadas (para la definición de la Razón) son promovidas por los estándares dos y tres. Cuyos procesos son fundamentales en el desolló de las actividades que se han diseñado. Debido a esto, los estándares de nivel 6° y 7° que se relacionan verticalmente son:

1. Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.
2. Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).

Coherencia Horizontal

Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos (Estándares del nivel 6° y 7°)

1. Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.
2. Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.

El uso de diferentes representaciones de expresiones como la *Razón*; justificando su uso y sus procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa. Será necesario que el estudiante entienda, y comprenda estos factores, puesto que esto le permitirá tener mayor precisión y claridad en sus procesos y resultados obtenidos.

Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos (Estándares del nivel 8° y 9°)

1. Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.
2. Utilizo la notación científica para representar medidas de cantidades de diferentes magnitudes.

Análogamente, el estudiante durante el desarrollo de las actividades planeadas puede hacer uso de diferentes números reales (números naturales, enteros, o racionales positivos o negativos). A esto se le suma que: en la actividad número tres de las actividades diseñadas en ésta investigación, se promueve el uso de la notación científica.

Después de realizar el anterior análisis se concluye que:

1. El MEN (1998) plantea ciertos criterios de acuerdo a cada grado, los cuales deberán ser cumplidos a cabalidad. Para ello, los docentes deberán construir y validar situaciones problema, las cuales entren en interacción con los estudiantes, confrontando su contexto; para que reflexionen y construyan estrategias de solución. No obstante, esto no será suficiente, pues será conveniente permitir que los estudiantes validen también sus conocimientos previos al construir nuevos. Tal motivo será más que suficiente para que el docente revalide el diseño de sus actividades. Para éste caso particular, el uso de materiales físicos y virtuales permitirá al estudiante y al docente fomentar el uso de estrategias que conlleven a una mejor comprensión y conceptualización del concepto a enseñar.

2. Según Hernández y Bastidas (2014):

En cuanto a la enseñanza de la geometría espacial en la escuela, en los lineamientos curriculares existe el enfoque de la *Geometría Activa*⁴⁹ propuesta por Vasco (1992). Esta parte de la actividad del alumno y su confrontación con el mundo, aunque es un recurso con el cual se beneficia al estudiante, no existe una proposición que sea coherente con ella debido a que no se encuentra una coherencia vertical entre los estándares planteados dentro del pensamiento espacial y los sistemas geométricos a través de todos los grados de la educación básica primaria y básica secundaria. Además no existe un orden en relación con la enseñanza del espacio entre los distintos pensamientos, lo que permite la coherencia horizontal entre los mismos. (pág. 74).

3. Es claro que durante el desarrollo del análisis hecho a los *Estándares Básicos de Competencias* para matemáticas, en relación al *pensamiento espacial*, el concepto de homotecia sólo fue considerado una única vez, por lo que se supone

⁴⁹ Según Hernández y Bastidas (2014) “La propuesta de *Geometría Activa*, está enfocada en la exploración activa del espacio, no sin antes hacer un reconocimiento de los problemas a los que se enfrenta el estudiante en la exploración con el cuerpo y el dibujo” (pág. 74).

que éste concepto es considerado como transitorio y sin importancia en el desarrollo del pensamiento espacial para los estudiantes. Sin embargo, la atención se centra en el uso de conceptos relacionados al de homotecia, tales como: Congruencias y Semejanzas; conceptos primordiales para el entendimiento del concepto de Homotecia, puesto que involucran algunas nociones matemáticas que fundamentan las de Homotecia. Por tal razón, será fundamental fomentar el uso de éste concepto en el *grado noveno* de Básica Secundaria en Colombia, a raíz de la poca o inexistente experiencia de los estudiantes con éste concepto; según el análisis presentado, y los resultados obtenidos previamente en las encuestas tipo Likert.

3. DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y ANÁLISIS A PRIORI

En éste capítulo se muestra el diseño de la adaptación de una secuencia de enseñanza con su respectivo análisis *a priori*. Centrándose en las dimensiones: *Histórico-Epistemológica, cognitiva, y didáctica*, las cuales forman parte del esquema de *micro-ingeniería* considerado.

Para el diseño de las secuencias didácticas se tuvieron en cuenta algunas *variables didácticas*⁵⁰, que pueden generar un cambio de estrategia en los estudiantes⁵¹. Las variables que se tuvieron en cuenta para obtener la conceptualización de las propiedades del concepto de homotecia fueron:

1. Los artefactos que son utilizados para las adaptaciones a las situaciones, como: la cámara digital junto su trípode, la cinta para medir, las imágenes usadas para trabajar con el pantógrafo, el pantógrafo junto con la goma de borrar, el lápiz y la cinta aislante, la cartulina, las tijeras, el compás, la plastilina, la barra de madera, y el AGD Cabri II Plus.
2. Las construcciones blandas y robustas⁵² al generar procesos de construcción geométricos.
3. Capturar una fotografía que no cumpla con las reglas que se considerarán para que ésta pueda fácilmente ser trabajada con las propiedades de homotecia en el AGD, y el manejo de ella con el AGD.
4. Definir en forma errada la razón por factores que pueden estar asociados a: medidas erradas, definir erróneamente la fórmula de razón y no considerar las mismas unidades de medida.
5. La precisión en los trazos generados por el pantógrafo ocasionados por la orientación y ubicación de éste artefacto, y la reubicación del mismo en el lugar de trabajo.

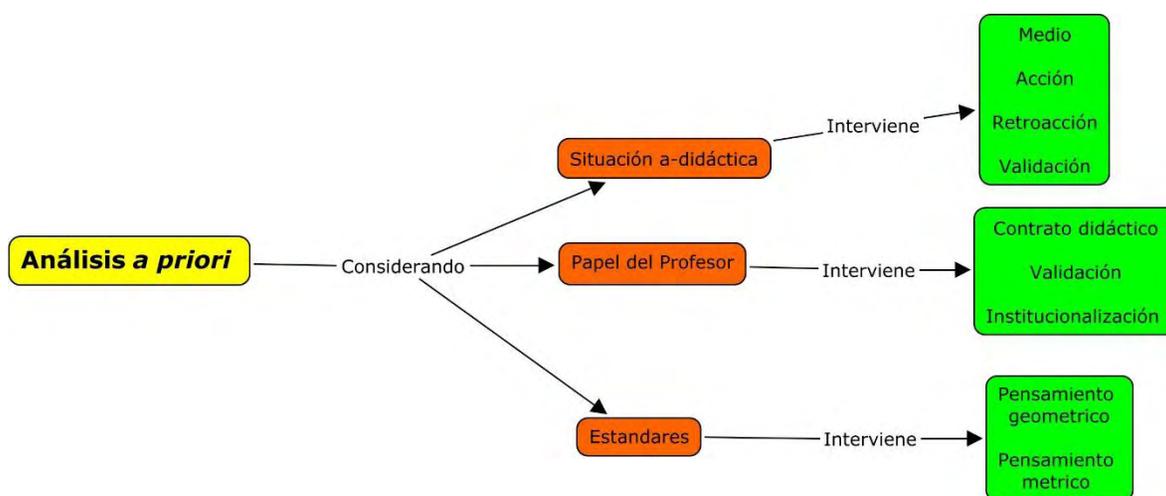
⁵⁰ Las *variables didácticas* son aquellas que el profesor modifica para provocar un cambio de estrategia en el alumno y que llegue al conocimiento matemático deseado. (Fernández, 2011 , pag.169).

⁵¹ El número de estudiantes considerados para desarrollar ésta secuencia didáctica fue de cinco (5).

⁵² Según Fernández (2011), las construcciones robustas son construcciones geométricas que preservan sus cualidades cuando se someten al modo de arrastre, y las construcciones blandas no las preserva.

3.1. Análisis de las Secuencias Didácticas

Éste análisis se basó en el estudio de situaciones *a-didácticas* que intervienen en las situaciones didácticas planteadas a los estudiantes: *acciones* de los estudiantes sobre el *medio*, las *retroacciones* que reciben de estas, y la *validación*. Por otra parte se tiene en cuenta el *papel didáctico* al que se encuentra sometido el docente⁵³: el momento de su *contrato didáctico*, sus intervenciones, actos de devolución, al igual que el momento en el que se considera los momentos de validación e *institucionalización*. Además, se considera el cómo un artefacto se convierte en un *instrumento* que permite desarrollar conceptos matemáticos formales.



Esquema 1. Estructura del análisis a priori.

La secuencia estuvo conformada por cuatro (4) situaciones didácticas, que se trabajaron en un tiempo aproximado de seis (6) horas y veinte (20) minutos, conformando tres (3) sesiones de trabajo. Cada una de estas situaciones fue de *acción*, puesto que cada estudiante trabajó en forma individual aplicando sus conocimientos, y adquiriendo nuevos.

⁵³ El docente encargado de realizar las actividades estuvo a cargo del autor de ésta investigación, debido a su conocimiento de la TSD.

Al inicio de cada sesión a cada estudiante se le facilitó la entrega de la guía de trabajo, al igual que hojas en blanco, donde deberían dar respuesta a los interrogantes planteados en cada actividad, para posteriormente entregárselas al docente (finalizada cada sesión) al finalizar el tiempo estipulado previamente en el *contrato didáctico*. Si el tiempo no fuese suficiente para realizar la actividad planteada, entonces el estudiante deberá entregar sus avances para posteriormente continuar en la siguiente sesión. En otro caso, si el estudiante alcanzase a realizar la actividad y un poco más, entonces no existiría restricción alguna. En dicho caso el docente entregará los materiales pertinentes.

En la primera sesión, conformada por la primera actividad, se hace necesario la entrega de materiales como: una cinta para medir, una cámara digital con su respectivo trípode, y un computador con el AGD Cabri II plus. En la segunda sesión, conformada por la segunda actividad diseñada, se hace necesario la entrega de: un *Pantógrafo* con sus respectivo lápiz y goma de borrador (que sirve como base del mismo), un cuarto de cartulina, cinta aislante, una regla transparente, y fotocopias correspondientes a unas imágenes que se trabajaran en dicha sesión. Ya en la tercer y última sesión, conformada por la tercer y cuarta actividad, se deberá facilitar la entrega de: un computador con el AGD Cabri II Plus, un *Pantógrafo* con su respectivo lápiz y goma de borrador, un cuarto de cartulina, cinta aislante, una regla transparente, compás, tijeras, un palillo largo, y una barra de plastilina.

Las actividades se construyeron con fines corroborativos entre sí, puesto que generan aportes en cuanto a procesos de *instrumentación* de los artefactos. Así pues, el estudiante deberá seguir algunas instrucciones de uso al realizar ciertos procesos. Y en relación a sus resultados, deberá responder interrogantes en forma individual.



Figura 12. Algunos materiales manipulativos empleados

EL objetivo de cada situación, y el tiempo empleado para el desarrollo de cada una de ellas, se muestra en la Tabla No. 3.

Tabla No. 3. Estructura de la Secuencia Didáctica

ACTIVIDAD	OBJETIVO	TIEMPO
No.1. Foto con tus compañeros	Aplicar el concepto de <i>Homotecia</i> para calcular la altura real de los compañeros, haciendo uso de una fotografía grupal.	2 horas
No.2. Uso del <i>Pantógrafo</i> .	Exponer por vez primera el <i>Pantógrafo</i> : hablando sobre su fisonomía, el cómo y el porqué de su funcionamiento. Dibujar a escala para vislumbrar propiedades de la <i>Homotecia</i> , bajo respuesta a preguntas planteadas; exponiéndolo a su vez como una herramienta psicológica.	2 horas
No.3. El eclipse de sol	Construir mediante el AGD Cabri II Plus una representación tangible del concepto de <i>Homotecia</i> , identificando las partes esenciales que la componen; sin la ayuda de la herramienta " <i>Homotecia</i> " del AGD.	1 hora
No.4. Familia tangible de <i>Homotecias</i> .	Construir mediante el uso de artefactos como: <i>Pantógrafo</i> , cartulina, compás, entre otros, un sistema tangible (en el espacio) de una familia homotética.	1 hora mas veinte minutos

3.1.1. Situación Didáctica No.1: Foto con tus compañeros

En ésta actividad vas a averiguar cuánto mide cada uno de tus compañeros, para ello usarás: una cámara digital, un computador, el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Cabri II plus, y una cinta para medir.

Así pues, necesitarás tomarte una fotografía (haciendo uso de la cámara con el trípode nivelado) con tus compañeros, de tal manera que: se encuentren alineados frente al lente de la cámara, en un lugar plano, y que su postura sea lo más perpendicularmente posible a ese lugar: al igual como si se encontrasen comparando sus alturas (Ver Foto 1, a manera de ejemplo). De no hacerse así, habrá problemas con la obtención de datos, y tendrán que tomarse otra foto nuevamente.



Foto 1: Ejemplo de fotografía con tus compañeros

Ahora, sigue los siguientes pasos:

- a) Comparte ésta fotografía con tus compañeros en cada uno de los computadores asignados, guárdala en un lugar donde te sea fácil localizarla.
- b) Con la herramienta **Imagen de fondo** de Cabri, anexa ésta imagen al software: dando clic derecho sobre cualquier parte en la pantalla de la ventana del AGD, luego selecciona tu fotografía.

Nota: Deberás bajar el tamaño o pixeles de tu imagen con ayuda del software **Paint**, de lo contrario tu imagen será lo suficientemente grande y no podrás ejercer dominio sobre ella con el AGD. Se recomienda un *Porcentaje* Horizontal y vertical de 100.

- c) Considerate a ti como modelo de referencia. Es decir, deberás conocer tu altura real en centímetros. Si no la conoces, pídele ayuda a tu profesor para que con ayuda de la “cinta para medida” puedan conocerla (maneja discreción sobre éste dato con tus compañeros). Ahora, para dar respuesta a la pregunta del problema, deberás averiguar tu altura en la fotografía. Entonces:

Altura en la fotografía:

- Construye una **Recta** que pase por el punto de apoyo (en la fotografía) a ti y a todos tus compañeros.
 - Construye un **Punto sobre la Recta**, tal que esté lo más posiblemente centrado a tus pies (en la fotografía), y llámalo **A**.
 - Con la herramienta **Recta Perpendicular** de Cabri, procede a construir una recta perpendicular a la recta anteriormente construida, tal que ésta pase por el punto **A**.
 - Sobre ésta **Recta Perpendicular** vas a definir un punto que delimitará tu altura en la fotografía. Y lo denominarás **B**.
 - El segmento **AB** define tu altura en la fotografía. Para saber cuál es el valor de ésta altura, con la herramienta **Distancia o Longitud**, procedes a calcularla: señalando el punto **A**, y luego el punto **B**. Ésta altura estará dada en centímetros.
- d) Ahora, deberás calcular la **Razón (R)** de *Homotecia* impuesta en la fotografía. Para ello, tendrás que considerar la fórmula matemática de razón:

$$R = \frac{\text{Altura en la fotografía}}{\text{Altura real}}$$

Utiliza la herramienta **Calculadora** del AGD, y arrastra éste resultado a algún lado de la ventana del Software (llámalo R).

- e) Para calcular las medidas reales de tus compañeros necesitaras considerar la fórmula matemática de *Homotecia*: $OA' = K * OA$ donde llevándola a nuestro contexto: K es R (Constante), OA será la *Altura real*, y OA' será la *Altura en la fotografía*. ¿Qué deberás hacer ahora para calcular la altura real de tus compañeros? ¿Cuánto vale cada una de ellas?
- f) ¿Qué conclusiones consideras importantes al respecto de éste procedimiento?
- g) ¿Crees que es posible encontrar homotecias en otros contextos? ¿Cuáles serían?

Descripción general⁵⁴

Ésta situación surgió a partir de un problema que fue propuesto en Ruíz y Lupiáñez (2010), no obstante, la idea principal de ésta actividad fue modificada al añadir algunos ítems que promueven *acciones* que involucran construcciones y procesos geométricos con el AGD Cabri II Plus; mejorando a su vez el entendimiento. Por otra parte, se pretende movilizar un fortalecimiento acorde a los procesos de *Instrumentación* e *Instrumentalización* con el AGD Cabri II Plus, puesto que al público que va dirigida ésta secuencia no cuenta con los suficientes recursos de *instrumentación*. Por último, se añadieron algunas preguntas respecto al proceso.

Para el desarrollo de ésta actividad el docente deberá facilitar la entrega de los *medios* necesarios para el desarrollar la misma, es decir: la hoja guía de correspondiente a ésta actividad, una hoja en blanco para que los estudiantes respondan algunas preguntas o realicen procesos, una cámara digital con su respectivo cable USB y trípode, y una cinta para medir. Al igual que, cada estudiante deberá tener acceso a un computador con el AGD Cabri II Plus, ya sea que la secuencia fuese realizada en un aula de informática de las instalaciones de la institución, o brindarlos de algún modo. Los estudiantes por su parte, deberán contar con sus respectivos lapiceros, o lápices.

Después de entregar los materiales pertinentes, el docente deberá establecer el tiempo necesario para realizar ésta primera actividad (*contrato didáctico*). Luego, los estudiantes se dispondrán a leer y comprender sus guías, realizando los procesos involucrados en cada ítem. No obstante, durante el desarrollo de la misma, el docente deberá orientar a sus estudiantes en forma discreta⁵⁵; sin olvidar que se encuentra desarrollando una situación *a-didáctica*.

⁵⁴ La estructura de la presentación del orden de ideas del análisis *a priori* fue obtenida de Fernández (2011).

⁵⁵ En el ítem *c*, el docente deberá promover la discreción entre los estudiantes; al informarles que éste valor (correspondiente a la altura de cada uno de ellos), deberá ser encontrado en forma procedimental durante el desarrollo de la actividad.

El objetivo propuesto en ésta actividad radica en una aplicación del concepto de *homotecia*. Así pues, mediante la obtención de una fotografía grupal se pretende averiguar cuál es la altura real de cada una de las personas que salen en dicha foto. Los estudiantes por su parte, deberán tener en claro todas las sugerencias (*acciones*) hechas al respecto sobre la captura de la fotografía grupal, puesto que el mínimo descuido provocará errores en la obtención de datos (*proceso de retroacción*) y desarrollo de la misma.

Después de obtener una buena toma grupal, deberán compartirla entre compañeros, bajando el archivo a cada uno de los computadores brindados. Para después anexar dicha fotografía en la ventana del software Cabri II Plus; no sin antes haber bajado la calidad en los pixeles de la misma, ya que esto permitirá tener mayor dominio de ella con el AGD, para así, generar las construcciones que allí prosiguen en cada uno de los ítems (*acciones*), las cuales permiten tener claridad y dominio sobre el interés de la actividad y procesos de *instrumentación* del AGD.

Al finalizar el tiempo predispuesto en el *contrato didáctico* para el desarrollo de ésta actividad, el docente se dispondrá a recoger: la hoja guía de ésta actividad, materiales predispuestos, y hojas de respuestas de los estudiantes. Puesto que hasta aquí se ha desarrollado la *primera parte* de la situación didáctica planteada.

Para el desarrollo de ésta actividad, los estudiantes deberán tener en claro algunas propiedades matemáticas y geométricas tales como:

- Unidades de medida
- Dos puntos definen una recta
- La distancia más cercana entre dos puntos es una línea recta
- Medir
- Definir y calcular la razón de *homotecia*
- Despejar una incógnita

Propósitos

- Generar un panorama particular respecto a las **RHC** y la aplicación del concepto de *homotecia*. Al igual que brindar una perspectiva tangible y común en la vida de los estudiantes.
- Fortalecer los procesos de *instrumentación e instrumentalización* del AGD Cabri II Plus, acorde a algunas de las herramientas necesarias para el desarrollo de ésta secuencia.
- Despertar el interés de los estudiantes respecto al estudio del concepto de *homotecia*, presentándoles un panorama totalmente diferente respecto a los comúnmente vistos en clase.

Saberes matemáticos involucrados en ésta situación

Para el desarrollo de ésta situación será necesario realizar cada una de las *acciones* involucradas en cada ítem, las cuales motivan procesos de: entendimiento, construcciones geométricas con el AGD, y promueven el fortalecimiento de procesos de *instrumentación e instrumentalización* del AGD. Por consiguiente, se plantearon algunos interrogantes respecto al proceso, y sus posibles conclusiones. De los cuales se presentan sólo una de las posibles respuestas en cada caso, o lo justo, ya que la estructura de estas preguntas (abiertas) da cabida a muchas posibles respuestas. Por tanto, se podría esperar las siguientes soluciones:

HG⁵⁶: Para calcular las medidas reales de tus compañeros necesitaras considerar la fórmula matemática de *Homotecia*: $OA' = K * OA$ dónde llevándola a nuestro contexto: K es R (Constante), OA será la *Altura real*, y OA' será la *Altura en la fotografía*. ¿Qué deberás hacer ahora para calcular la altura real de tus compañeros? ¿Cuánto vale cada una de ellas?

⁵⁶ HG: hoja guía; RE: respuesta de estudiantes (Lo que se espera que el estudiante responda).

RE: La fórmula matemática de homotecia es $OA' = K * OA$, entonces en nuestro contexto, si llamamos $OA = AR$ (Altura real), $OA' = AF$ (Altura en la foto), y puesto que K es R , entonces:

$$OA' = K * OA$$

Así, en nuestro contexto

$$AF = R * AR.$$

De donde podremos conocer AF y R , por tanto, no conocemos la Altura Real (AR), que a su vez es el valor buscado para cada compañero. Por tanto, debemos despejarla de la fórmula, así:

$$AR = \frac{AF}{R}$$

Puesto que R es constante, y ya se conoce, entonces, a cada compañero (en la fotografía), se le deberá realizar el procedimiento de “Altura en la fotografía”, haciendo uso de la herramienta “Calculadora” del AGD, para conocer dicho valor. Ya por último, conociendo estos valores, tendremos que aplicar la formula anterior cuatro veces, es decir, por cada compañero una vez.

HG: ¿Qué conclusiones consideras importantes al respecto de éste procedimiento?

RE: Se muestra que muchas veces como estudiantes no somos conscientes de que en nuestro diario vivir se manifiestan muchos de los conceptos matemáticos aprendidos en las clases de matemáticas. Puesto que muchas veces nuestros profesores de matemáticas no orientan sus clases en un sentido práctico y tangible; que a su vez sea más significativo para nosotros los estudiantes, ya que muchas de las cosas que se ven en las clases de matemáticas tienen sentido riguroso y abstracto. En particular, muchas veces estamos constantemente tomando fotografías y no sabemos que es lo que matemáticamente se esconde detrás de ésta acción. Ahora, ya que he desarrollado ésta actividad, se tiene claro que no sólo se está tomando una fotografía, sino que también se está aplicando matemáticas. Igualmente, también fue importante

saber de la existencia de programas o softwares que permiten modelar una situación real.

HG: ¿Crees que es posible encontrar *homotecias* en otros contextos? ¿Cuáles serían?

RE: Sí, como por ejemplo: cuando vemos televisión, vamos al cine, miramos un objeto a distancia, usamos objetos como un microscopio o lupa, o cuando por ejemplo aclaramos un objeto con una linterna y éste se proyecta en una pared.

Comportamientos previos en la situación problema

- Se prevén dificultades en la obtención de la fotografía. Puesto que los estudiantes podrían no saber cómo realizar éste proceso, a pesar de las sugerencias hechas en la hoja guía.
- Algunos estudiantes podrían tener dificultades al anexar la imagen al AGD, por lo que quizá sea necesario la intervención del docente.
- Es posible que los estudiantes presenten dificultades con aquellos ítems instructivos que promueven el proceso de *instrumentalización* del AGD Cabri II Plus.
- En el ítem *e* algunos estudiantes podrían no comprendan lo qué deben hacer, lo que dificultaría la obtención de datos o el desarrollo de la actividad.
- Podría definir de forma herrada la razón, al no saber relacionar unidades medidas, es decir, la *razón* deberá obtenerse bajo las mismas unidades.
- En el ítem *f* es posible que los estudiantes presenten respuestas cortas y breves, que no muestren el impacto que se esperaba. Así mismo, en el ítem *g* podrían presentarse respuestas cortas que den prueba del desconocimiento de **RHC** por parte de los estudiantes.

3.1.2 Situación Didáctica No.2: Uso del Pantógrafo

Ahora haremos uso del *Pantógrafo* (Ver Foto 2). Que es un artefacto utilizado para realizar dibujos a escala, es decir, agrandar o reducir un dibujo. Para estudiar su comportamiento (según sus configuraciones), realizaremos la siguiente actividad. Mientras experimentamos las potencialidades o limitaciones que nos ofrece éste artefacto.

Empezaremos por reconocer las partes sus partes.

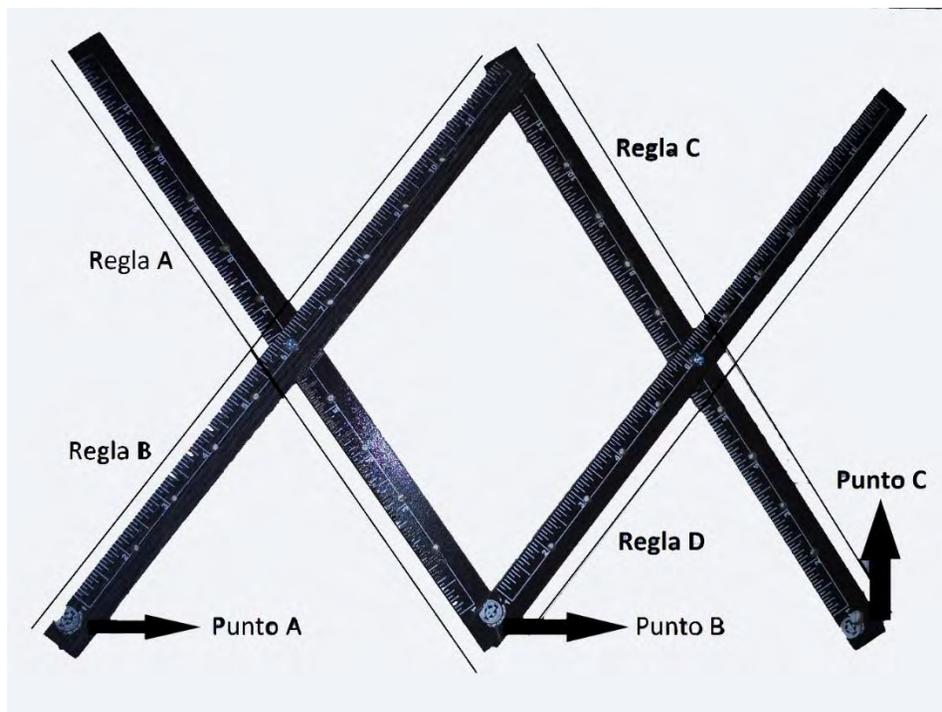


Foto 2: Pantógrafo.

El pantógrafo consta de cuatro varillas o reglas de madera articuladas, reglas: *A*, *B*, *C* y *D*. Donde cada una de ellas se encuentra dividida en forma semejante, y contiene orificios métricamente ubicados, a los cuales es asociado un número entero. Las configuraciones del *Pantógrafo* se realizan articulando las reglas: *A* con *B*, y *C* con *D*, mediante tornillos que asocian por parejas a dichos números enteros, en ambos pares de reglas.

El punto **A** es conocido como **Punto Base** o de apoyo (es articulado), el punto **B** contiene la **Aguja Guía**, la cual deberá ser guiada sobre el perímetro o contorno del dibujo o figura que se quiere ampliar o reducir (en otro caso). Por último, en el punto **C** deberá ubicarse un lápiz, que ejercerá el trazo o el resultado esperado.

Ahora que hemos identificado las partes esenciales de nuestro pantógrafo, y cómo éste funciona, realizaremos la siguiente actividad.

Consideraremos la siguiente imagen (Ver Imagen 1). La cual te será facilitada en fotocopia por tu docente.

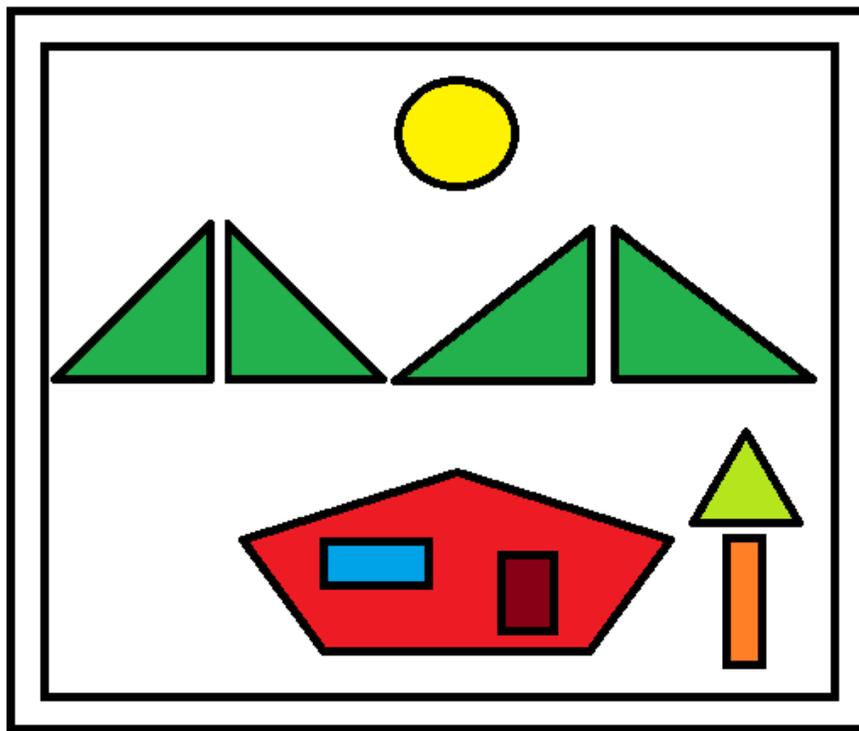


Imagen 1: Paisaje Geométrico

Ahora con ayuda del pantógrafo y el Paisaje Geométrico, realizaremos los siguientes pasos:

- a) Sitúa tu pantógrafo sobre una mesa donde puedas trabajar a gusto. Para ello, primero con ayuda de cinta asegura la goma de borrar, donde deberá ir el **Punto Base** o de apoyo (Punto **A**) sobre la mesa; tal que la **Aguja Guía** y el punto **C** puedan moverse libremente, ejerciendo trazo sobre todo el espacio.

Nota: Considera el hecho de que deberás realizar diferentes configuraciones a tu pantógrafo, es decir, en cada proceso deberás retirar tu pantógrafo del sitio sin mover el **Punto Base** (la goma de borrador). Igualmente ten en cuenta que el clavo que hace parte de éste punto, deberá regresar al mismo lugar, de lo contrario tus resultados podrían verse afectados.

- b) Ahora, en tu espacio de trabajo deberás ubicar y asegurar con cinta la hoja de cartulina que te ha brindado tu profesor, tal que la **Aguja Guía** y el punto **C** (donde irá ubicado el lápiz) puedan ejercer su trazo o recorrido.
- c) Ubica la imagen del Paisaje Geométrico que se te ha brindado en dicha cartulina, tal que la **Aguja Guía** del pantógrafo pueda ejercer recorrido sobre el perímetro de las diferentes figuras geométricas que se presentan en el paisaje.
- d) Asegura muy bien tu lápiz en el punto **C** de tu pantógrafo, y realiza tres trazos diferentes e independientes del Paisaje Geométrico con las configuraciones correspondientes a los números enteros: 9, 6 y 3.
- e) Ahora, procede a responder las siguientes preguntas:

Preguntas sobre el procedimiento anterior:

- 1) Dado que la imagen del Paisaje Geométrico se amplió durante los tres procesos, ¿Cuál fue la razón (factor de *Homotecia*) que posibilitó ésta ampliación en cada proceso? ¿Cómo encuentras éste valor?
- 2) ¿Es posible realizar un proceso inverso con tu pantógrafo, es decir, de reducción? ¿Cómo harías esto?
- 3) ¿Por qué crees que ocurre la ampliación o reducción de las figuras con éste artefacto?
- 4) ¿Existe alguna relación matemática entre el triángulo definido en “Fotografía 1: *Pantógrafo*” por el Punto **A**, el punto definido por la intersección de las reglas **A** y **B**, y el Punto **B**, y el triángulo definido por las reglas **B** y **C**?
- 5) Crees que los procesos realizados con éste artefacto se relacionan con la definición de homotecia anteriormente dada. ¿Por qué? ¿Cuáles crees que

serán las condiciones necesarias para saber cuándo estamos hablando de un proceso de homotecia?

- 6) Crees que los ángulos de las figuras geométricas se vieron afectados por ésta transformación ¿Por qué no, o por qué si?
- 7) ¿Qué puedes intuir respecto a la imagen homotética de un segmento, y en general de una recta?
- 8) ¿Cómo crees que se comporte la homotecia cuando su Razón (K) se encuentra entre los intervalos: $0 < K < 1$ y $K > 1$?

Ahora realizaremos un último ejercicio, para ello utiliza el respaldo del pliego de cartulina que se te ha facilitado:

Un dibujante no tan experto, necesita ampliar un dibujo (ver Imagen 2: Entrada de la Plaza del Carnaval de la Ciudad de Pasto) por un factor de razón 4, pero él no sabe cómo hacer esto. Podrías tú explicarle cómo él realizaría esto. Argumenta tu respuesta, y realiza el procedimiento. ¿Cómo podrías generalizar éste resultado para razones pares con el uso de tu pantógrafo?



Imagen 2: Entrada de la plaza del Carnaval de la Ciudad de Pasto

Descripción general

Para realizar ésta actividad, que corresponde a la segunda sesión de la secuencia diseñada, el docente deberá facilitar a cada uno de sus estudiantes: la guía correspondiente a la actividad junto con una hoja en blanco donde ellos darán respuesta a interrogantes, un cuarto de cartulina, una goma de borrador, un lápiz, cinta aislante, un pantógrafo, y por último fotocopias correspondientes a las imágenes que se han denominado: *Paisaje Geométrico*, y *Entrada a la plaza del Carnaval de la Ciudad de Pasto*.

Posteriormente, el docente procederá a: definir el tiempo necesario para realizar ésta actividad (*contrato didáctico*), al igual que dar algunas advertencias sobre el cuidado con el uso del pantógrafo, tales como: no perder de vista las piezas pequeñas como lo son “tuercas” y “tornillos”, y procurar no lastimarse ni a ellos o terceros con los “clavos” que hacen parte de la fisonomía del mismo.

Posteriormente, cada estudiante deberá leer, comprender y realizar cada uno de los procesos indicados en los ítems de ésta actividad; los cuales no sólo hacen parte del diseño de una actividad, sino que fueron diseñados para ejercer procesos de *instrumentación e instrumentalización* con el pantógrafo.

La actividad planteada consta de tres fases y dos partes, donde las dos primeras fases conforman la primera parte, y la última fase será la última parte. No obstante, los objetivos de cada fase son los siguientes:

En la primera fase se presenta un panorama general sobre el pantógrafo, hablando sobre: para qué sirve, cómo se configura (proceso de *instrumentalización*), y qué elementos lo componen. No obstante, es una fase introductoria que abre paso al primer contacto que tendrán los estudiantes con el pantógrafo utilizado en ésta investigación.

En la segunda fase se presenta una actividad que promueve el uso del pantógrafo, cuyo propósito es promover el ensamblaje correcto de éste artefacto en el espacio de trabajo (*acciones que fomentan la instrumentalización*); realizando tres (3) procesos diferentes que involucran configuraciones diferentes en este artefacto, respecto a una imagen que se ha denominado *Paisaje Geométrico*. Para posteriormente responder algunas preguntas que pretenden deslumbrar propiedades geométricas del concepto de homotecia, al igual que promover procesos de *instrumentación* y comprensión del porqué del funcionamiento de éste artefacto.

En la tercer y última fase se trabaja con la imagen que se ha denominado *Entrada de la plaza del Carnaval de la Ciudad de Pasto*. Aquí, se promueven procesos de *instrumentación* con el pantógrafo, al igual que se pretende movilizar este artefacto como una *herramienta psicológica*. Ya que en esta fase se pretende generar incertidumbre en los estudiantes respecto a sus procesos; obligándolos a generar *acciones* como medir, y establecer razones para verificar sus procesos (*proceso de retroacción*).

Al finalizar el tiempo predispuesto en el *contrato didáctico* para el desarrollo de ésta actividad, el docente se dispondrá a recoger: la hoja guía de ésta actividad, materiales predispuestos, y hojas de respuestas de los estudiantes. Puesto que hasta aquí se ha desarrollado la *segunda parte* de la situación didáctica planteada.

Algunas de las *acciones* o nociones matemáticas que deberán tener en claro los estudiantes durante el desarrollo de ésta actividad son:

- Medición
- Definir y calcular la razón de homotecia
- Semejanza de triángulos
- Colinealidad
- Centro de homotecia
- Igualdad de ángulos

- Composición de homotecias con el mismo centro
- Paralelismo
- Perpendicularidad
- Dinamismos del comportamiento de la homotecia

Propósitos

- Presentar un panorama general sobre el pantógrafo, hablando sobre: para qué sirve, cómo se compone, y cómo se configura y utiliza. Al igual que motivar procesos de *instrumentalización e instrumentación* con este artefacto.
- Promover propiedades matemáticas y geométricas del concepto de homotecia. Al igual que concientizar sobre los elementos que se mantienen variantes e invariantes en el proceso de homotecia.

Saberes matemáticos involucrados

Para el desarrollo de ésta situación será necesario realizar cada uno los ítems que promueven *acciones* que involucran procesos de *instrumentalización* con el pantógrafo; los cuales recaen a su vez en la generación de dos procesos ligados pero diferentes. No obstante, se plantearon algunos interrogantes respecto al proceso, los cuales tienen como fin promover argumentos, justificaciones, y análisis por parte de los estudiantes en torno a propiedades del concepto de homotecia, y la fisionomía del artefacto.

En relación a lo anterior, sólo se presentará una de las posibles respuestas en cada caso, ya que la estructura de estas preguntas (abiertas) da cabida a muchas posibilidades. Por tanto, se podría esperar las siguientes soluciones:

Primera parte:

HG: Dado que la imagen del Paisaje Geométrico se amplió durante los tres procesos, ¿Cuál fue la razón (factor de homotecia) que posibilitó ésta ampliación en cada proceso? ¿Cómo encuentras éste valor?

RE: Para encontrar las razones que en cada procedimiento posibilitaron la ampliación, sólo fue necesario medir en centímetros: el largo de la base del Paisaje Geométrico, y el largo de la base de cada una de las imágenes homotéticas en cada proceso, con ayuda de la regla. Posteriormente, se procedió a calcular cada razón así:

$$R = \frac{\text{medida de base de imagen homotetica}}{\text{medida de base de Paisaje Geometrico}}$$

Se obtuvieron los siguientes resultados:

Puesto que la medida en centímetros de la base del Paisaje Geométrico fue de 7 cm (que será una constante en todos los procesos), y como las medidas de las bases de las imágenes homotéticas para las configuraciones 3, 6 y 9 fueron 9, 14, y 27 centímetros correspondientemente. Entonces, cuando las reglas estuvieron ubicadas en la configuración tres (3), la razón fue nueve séptimos ($\frac{9}{7}$); cuando estuvieron en seis (6), la razón fue dos (2), y finalmente, cuando estuvieron ubicadas en nueve (9), la razón fue veintisiete séptimos ($\frac{27}{7}$).

HG: ¿Es posible realizar un proceso inverso con tu pantógrafo, es decir, de reducción? ¿Cómo harías esto?

RE: Sí, es posible realizar un proceso inverso, es decir, envés de “ampliar” las figuras o dibujos, se podrán “reducir”. Para ello, se deberá reubicar el lápiz en la parte donde se encuentra la **Aguja Guía**. No obstante, el pantógrafo que disponemos no

posee ésta cualidad; lo que haría parte de las limitaciones de éste tipo de artefacto que disponemos. Por ende, todo dependerá de nuestro pantógrafo.

HG: ¿Por qué crees que ocurre la ampliación o reducción de las figuras con este artefacto?

RE: Creo que los objetos se ven “ampliados o reducidos” por el largo del alcance de las reglas, es decir, entre mayor sea el número que se asocia a la configuración del pantógrafo, entonces mayor será el tamaño. No obstante, no sé porque ocurre éste fenómeno en éste artefacto.

HG: ¿Existe alguna relación matemática entre el triángulo definido en “Fotografía 2: pantógrafo” por el Punto A, el punto definido por la intersección de las reglas A y B, y el Punto B, y el triángulo definido por las reglas B y C?

RE: Los triángulos que se consideran dentro de la fotografía son:

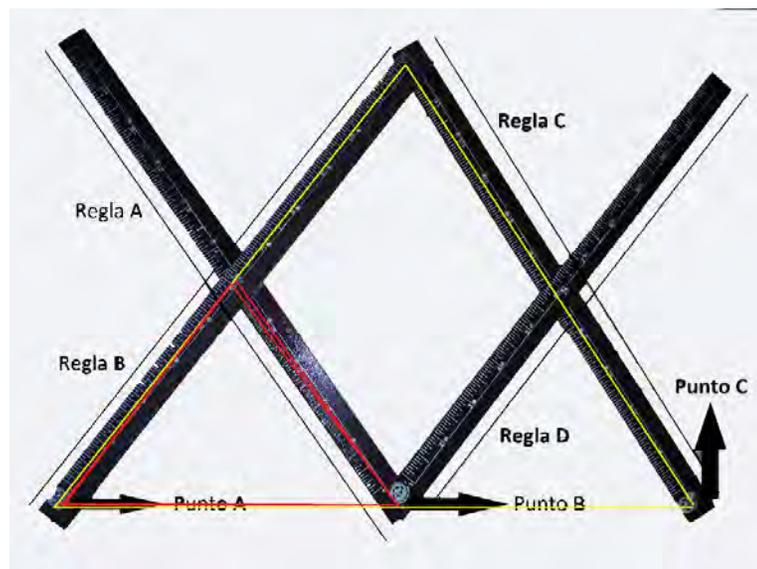


Figura 13. Panorama de ubicación en el pantógrafo

Los conformados por las rectas rojas, y las amarillas. Los cuales tendrán un ángulo en común en el punto A, y el ángulo conformado por la intercepción de las reglas A y B,

junto con el ángulo formado por las reglas **B** y **C** será el mismo, puesto que las reglas **A** y **C** son paralelas (según las reglas **B** y **D**). En conclusión, estos dos triángulos tendrán sus tres ángulos iguales, y por tanto, serán semejantes.

HG: Crees que los procesos realizados con éste artefacto se relacionan con la definición de homotecia anteriormente dado. ¿Por qué? ¿Cuáles crees que serán las condiciones necesarias para saber cuándo estamos hablando de un proceso de homotecia?

RE: La definición anteriormente dada resalta tres cosas fundamentales del concepto de homotecia: Una razón, la colinealidad, y un centro de homotecia. Las cuales a su vez se convierten en las condiciones necesarias para saber cuándo estamos hablando de un proceso de homotecia. Por ende, los procesos que he desarrollado en ésta actividad cumplen con estas condiciones, ya que la transformación es lineal, existe una razón, y el punto **A** (Base del pantógrafo) se convierte en el centro de homotecia.

HG: Crees que los ángulos de las figuras geométricas se vieron afectados por ésta transformación ¿Por qué no, o por qué si?

RE: No, puesto que durante una transformación homotética las figuras geométricas se ven afectadas por una razón que las “agranda o encoge”, es decir, cambian su tamaño, pero no sus cualidades.

HG: ¿Qué puedes intuir respecto a la imagen homotética de un segmento, y en general de una recta?

RE: En los tres procesos que he realizado anteriormente es claro que bajo un proceso de homotecia un segmento se convierte en otro segmento mucho más pequeño o corto, y que además éste será paralelo a su imagen inicial e imágenes homotéticas en general. Por otra parte, una recta no tiene inicio ni final, es decir, es infinita, por tanto asumo que su imagen bajo la homotecia será otra recta infinita

paralela, no obstante, el pantógrafo se queda “corto” para un cierto rango de longitud en la representación de la misma. Lo que podría considerarse en otra limitación del mismo.

HG: ¿Cómo crees que se comporte la homotecia cuando su Razón se encuentra entre los intervalos: $0 < K < 1$ y $K > 1$?

RE: Según el proceso que hicimos anteriormente, todas las razones encontradas fueron para $K > 1$, y su efecto fue la de agrandar las figuras geométricas. Entonces para valores K entre $0 < K < 1$ se espera un efecto contrario.

Segunda parte:

HG: Un dibujante no tan experto, necesita ampliar un dibujo (ver Imagen 1: *Entrada a la Plaza del Carnaval de la Ciudad de Pasto*) por un factor de razón 4, pero él no sabe cómo hacer esto. Podrías tú explicarle cómo él realizaría esto. Argumenta tu respuesta, y realiza el procedimiento. ¿Cómo podrías generalizar éste resultado para razones pares con el uso de tu pantógrafo?

RE: Para que el dibujante pueda hacer un dibujo a escala deberá conocer el pantógrafo, ya que éste es un artefacto que se utiliza para tal fin. En consiguiente, podría utilizar un pantógrafo que incluya dentro de sus configuraciones, ampliar un dibujo por razón 4. No obstante, el pantógrafo del que disponemos para realizar ésta actividad no contiene dicha configuración. Sin embargo, eso no fue un impedimento, ya que fue necesario realizar el proceso en dos ocasiones con la configuración de seis (6), pues esto nos permitirá duplicar un dibujo, y en un segundo proceso estaríamos duplicando el doble, es decir, usando una razón de cuatro (4).

En general, si se quiere usar razones pares con este pantógrafo; sólo bastaría dividir la razón entre dos para saber cuántas veces será necesario realizar el proceso con la configuración seis (6).

Comportamientos previos en la situación problema

- En ésta actividad se espera que los estudiantes comprendan el comportamiento, funcionamiento y estructura del pantógrafo; fomentando esquemas de uso que lo impulsan como una *herramienta psicológica*, y no *técnica*⁵⁷.
- Se prevé dificultades en torno a la generación de los “dibujos” con el uso del pantógrafo, puesto que el uso del mismo requiere habilidades motoras, ya que ejerce resistencia a las mismas.
- Por la razón anterior, se prevé que los estudiantes podrían generar desinterés respecto al desarrollo de ésta actividad.
- Los resultados obtenidos en el ítem 1 serán un tanto diferentes, puesto que se prevé que los estudiantes tendrán dificultades a la hora de medir, por razones relacionadas con la precisión en los procesos.
- Se cree que no existirá un éxito rotundo en las respuestas dadas al ítem 2. Puesto que los estudiantes no generaran una comprensión inmediata como se cree.
- Análogamente en el ítem 3, los estudiantes no podrán dar respuesta a éste sin tan siquiera haber visto el ítem 4.

Se espera que a los estudiantes les sea fácilmente identificada cada una de las propiedades del concepto de homotecia. Considerando aquellos elementos que se mantienen variantes e invariantes en éste proceso.

⁵⁷ Según Bartolini y Maschietto (2008), una herramienta se entiende como técnica cuando se encuentra orientada hacia el exterior; es decir, el estudiante sólo se limita a entender el comportamiento físico, mientras que cuando un estudiantes ve una herramienta como psicológica, ésta estará orientada internamente, es decir, el estudiante será capaz de comprender su comportamiento conceptual.

3.1.3. Situación Didáctica No.3: El eclipse de sol

Un estudiante de primer semestre de astronomía deberá realizar un diseño preciso sobre un eclipse solar (Ver Imagen 3: Eclipse de sol) dado en un Planeta X. El diseño deberá construirse a una razón $R = \frac{1}{2 \cdot 10^8}$.



Imagen 3: Eclipse de sol

Su profesor le ha facilitado los siguientes datos:

Radio del Planeta X: 4000 Km ($4 \cdot 10^8$ cm)

Radio de su Luna: 2000 Km ($2 \cdot 10^8$ cm)

Radio de su Sol: 16000 Km ($1,6 \cdot 10^9$ cm)

Distancia del Planeta X a su Sol: 64000 Km ($6,4 \cdot 10^9$ cm)

No obstante, el estudiante no sabe cómo realizar ésta tarea. Si se considera a los planetas como esferas perfectas ¿podrías tú darle pautas para que él realice su tarea?

Entonces responde las siguientes preguntas:

- ¿Crees que éste ejercicio recae en una aplicación del concepto de homotecia? ¿Por qué si, o por qué no? Justifica. En caso afirmativo, identifica las partes que conforman ésta homotecia.
- Realiza la representación de éste eclipse solar con la ayuda del AGD Cabri II Plus. Describe tu proceso. Puedes Utilizar pantallazos.
- ¿Qué conclusión puedes sacar al respecto?

Descripción general

El docente y sus estudiantes se predisponen a desarrollar la tercer y última sección de la *Secuencia Didáctica* diseñada, la cual está conformada por la tercera y cuarta actividad. Por tanto, con el desarrollo de ésta actividad, se dará inicio a la primer parte de ésta sesión. Por consiguiente: el docente predispone el tiempo necesario con sus estudiantes (*contrato didáctico*) para el desarrollo de ésta actividad, y hará entrega a cada estudiante de las hojas guías correspondientes a ella, al igual que entregará hojas en blanco, donde los estudiantes darán respuesta a las preguntas planteadas, por otra parte, cada estudiante tendrá acceso a un computador con el AGD Cabri II plus. Los estudiantes deberán tener a su disposición sus respectivos lapiceros.

Para el desarrollo de ésta actividad, cada estudiante deberá tener en claro los procesos de *instrumentalización* brindados respecto al AGD, al igual que algunas de las propiedades del concepto de homotecia que le fueron posibilitadas en el desarrollo de la *Secuencia Cero* y primer parte de ésta *Secuencia Didáctica*. Tales como:

- Hacer uso de la formula homotecia.
- Usar las tres condiciones que definen un proceso de homotecia.

El objetivo de ésta actividad recae en la generación de *acciones* que involucran la construcción de un sistema de circunferencias regido por propiedades homotéticas, con ayuda del AGD Cabri II Plus. Cuyo sistema deberá representar un eclipse solar particular (inventado por el autor), el cual se ha adaptado de tal manera que sea posible graficarse a *escala* y en forma precisa con el AGD Cabri II Plus, así pues, la verificación de la adaptación del sistema a un proceso homotético, jugará un papel *retroactivo*. Por otra parte, la idea principal en cuanto al diseño e inventiva de ésta actividad es atribuida al autor, ya que no fue extraída de algún texto conocido por el mismo, en particular.

Por otra parte, algunas de las nociones o propiedades matemáticas que los estudiantes deberán tener en cuenta para el desarrollo de ésta actividad son:

- Multiplicación de números racionales
- Notación científica
- Conversión de unidades de medida.
- Radio
- Distancia
- Medida

Propósitos

- Presentar un panorama diferente respecto a los comúnmente presentados en las clases de matemáticas donde se estudia el concepto de homotecia, involucrando un AGD y las **RHC**.
- Poner a prueba los procesos de *instrumentación* logrados por los estudiantes durante el desarrollo de ésta secuencia y en la *Secuencia Cero*.
- Evaluar el nivel de comprensión logrado por los estudiantes en relación al concepto de homotecia.

Saberes matemáticos involucrados en ésta situación

Para el desarrollo de ésta situación será necesario tener en claro algunos de los procesos de *instrumentalización* brindados en la *Secuencia Cero* y en el desarrollo de la *Secuencia Didáctica* respecto al AGD Cabri II Plus. Al igual que considerar las propiedades del concepto de homotecia. Por otra parte, se plantearon algunos interrogantes respecto al proceso realizado por los estudiantes, los cuales pretenden movilizar argumentos, justificaciones, y descripciones sobre el proceso que sirvió para dar solución al problema planteado.

Así, dada la naturaleza de algunas preguntas (abiertas), sólo se presentará una de las posibles respuestas en cada caso. Al igual que, se presentaran dos posibles opciones descriptivas sobre el proceso desarrollado para solucionar este problema con el AGD. Por tanto, se podría esperar las siguientes soluciones:

HG: ¿Crees que éste ejercicio recae en una aplicación del concepto de *Homotecia*? ¿Por qué si, o por qué no? Justifica. En caso afirmativo, identifica las partes que conforman ésta *Homotecia*.

RE: Sí, puesto que se cumplen las tres condiciones que se mencionaron en la actividad anterior. Es decir:

- Existe un centro de *Homotecia*, que en éste caso estará dado por un punto que vive sobre o en el “Planeta x”.
- La transformación será lineal, puesto que el perímetro de lo que se ha denominado “sol” se transformará en el perímetro de lo que se ha denominado “luna”.
- Existe una razón, la cual se podrá establecer como: $R = \frac{\text{Radio sol}}{\text{Radio luna}}$

HG: Realiza la representación de éste eclipse solar con la ayuda del AGD Cabri II Plus. Describe tu proceso. Puedes utilizar pantallazos.

Aquí, se espera dos posibles procesos con el AGD. En cualquier caso, la respuesta es válida.

RE: El ejercicio sugiere trabajar la representación de éste eclipse a una razón $R = \frac{1}{2 \times 10^8}$, Y puesto que los datos que brindados son los siguientes:

- **Radio del Planeta X:** 4000 Km ($4 * 10^8$ cm)
- **Radio de su Luna:** 2000 Km ($2 * 10^8$ cm)
- **Radio de su Sol:** 16000 Km ($1,6 * 10^9$ cm)
- **Distancia del Planeta X a su Sol:** 64000 Km ($6,4 * 10^9$ cm)

Entonces, si consideramos la fórmula de homotecia: $AB * K = AB'$ donde $K = R$, tenemos⁵⁸:

- **Radio del Planeta X:** 2 cm
- **Radio de su Luna:** 1 cm
- **Radio de su Sol:** 8 cm
- **Distancia del Planeta X a su Sol:** 32 cm

Así, el proceso a seguir por el estudiante será el siguiente:

- 1) Con la herramienta “Recta” defino una recta m , la cual servirá de eje principal para construir el sistema.
- 2) Construyo el punto S sobre la recta. Posteriormente con las herramientas “Número” y “Compás” defino una circunferencia con radio 8 sobre ésta. Ella será la representación del “Sol”, por ende la llamo así.
- 3) Defino el punto T , el cual será centro de la circunferencia que definirá al “Planeta X”. Para ello, con centro en S , y radio 32 construyo una circunferencia con las mismas herramientas usadas anteriormente. La intercepción de la recta m con ésta circunferencia definirá T .

⁵⁸ Los estudiantes podrían obtener estos cálculos de manera directa al confiar en sus agilidades aritméticas, o también podrían hacer uso de la herramienta “Calculadora” del AGD Cabri II Plus.

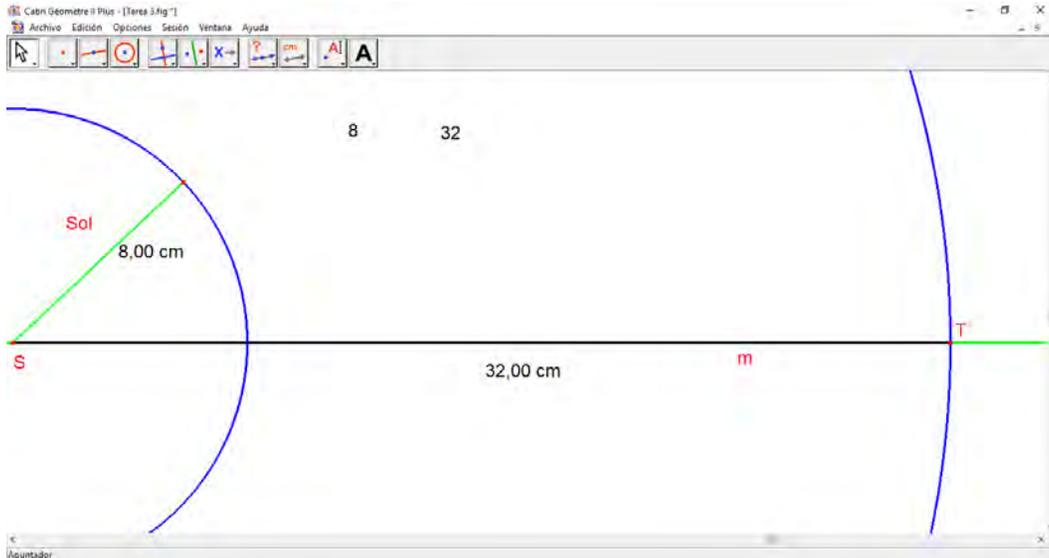


Figura 14. Proceso de construcción

- 4) Análogamente, con centro en T y radio 2 construyo una circunferencia que representará al “Planeta X”, y lo llamo así.

De lo realizado anteriormente, se esperarían dos formas de proceder:

Proceso constructivista

- 1) Construir una circunferencia de radio 1 y centro L , la cual representará a la “Luna”, y la llamo así. Proceso a “ocultar” lo que no necesitare. Entonces la pregunta que me surge para resolver el problema es: ¿En qué parte de la recta m deberá ubicarse el centro L para que un eclipse de sol sea posible en éste sistema?

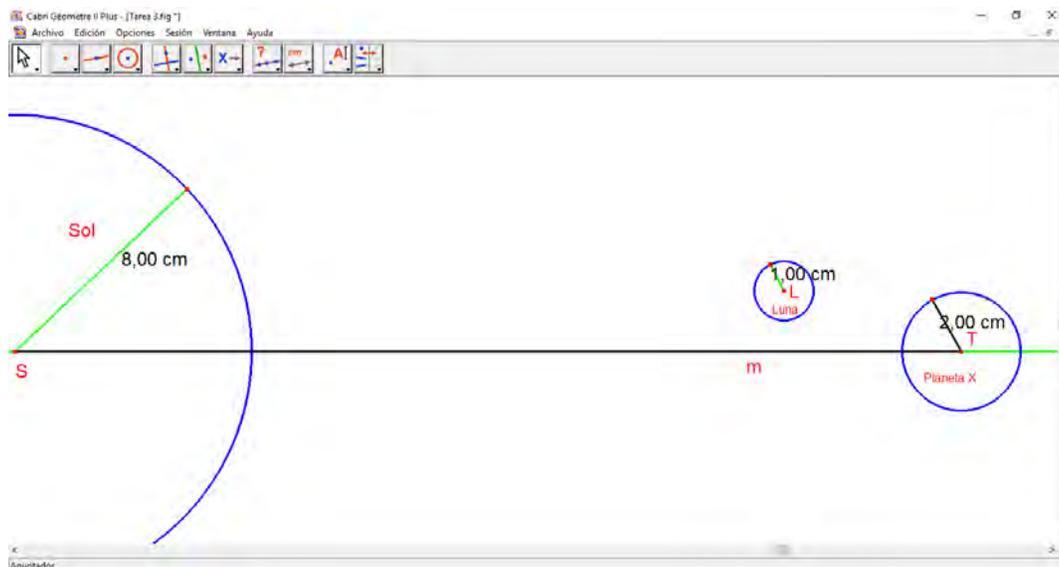


Figura 15. Esquema general

- 2) Para dar respuesta a la anterior pregunta se deberá conocer la razón a la cual es reducido el radio del sol respecto al de la luna. Entonces:

Considerando la formula general de homotecia $AB * R = AB'$, donde AB será "Radio Sol", y AB' será "Radio Luna", se tendrá que:

$$R = \frac{\text{Radio Luna}}{\text{Radio SOL}}$$

Así:

$$R = \frac{1}{8}$$

Ahora, puesto que la distancia entre el "Sol" (punto S) y el "Planeta X" (punto T) es 32 centímetros, y si consideramos la fórmula anterior de homotecia, se tendrá que: AB será ST que vale 32, R valdrá $\frac{1}{8}$, y AB' será LT (L centro de circunferencia que representa la luna). Así:

$$32 * \frac{1}{8} = LT$$

$$LT = 4$$

Lo que significa que el punto L deberá ubicarse a 4 centímetros del punto T .

- 3) Con centro en T y radio 4 construimos una circunferencia, la intercepción de ésta con la recta m definirá L ; el centro de la circunferencia de radio 1 que representará la luna.

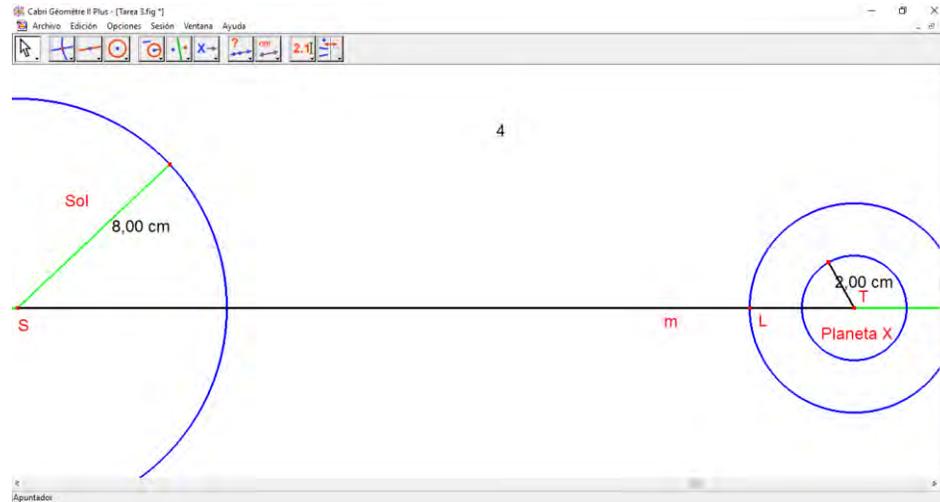


Figura 16. Construcción del punto L que define la posición de la luna

- 4) Ahora, con centro en L y radio uno construyo una circunferencia, la cual será la representación de la luna. Y así éste será el panorama general de la tarea propuesta.

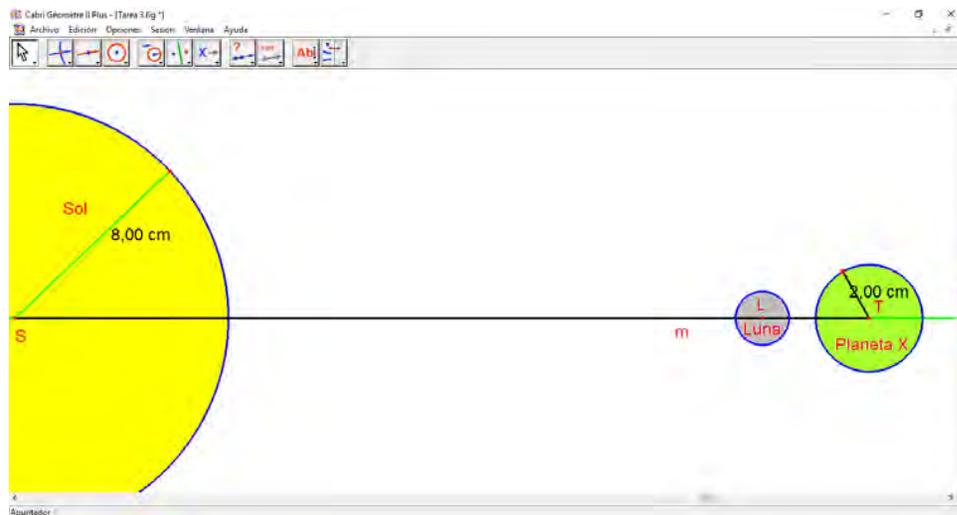


Figura 17. Panorama final

Proceso Macro

- 1) Ahora, se deberá conocer la razón a la cual es reducido el radio del sol respecto al de la luna. Entonces:

Considerando la formula general de homotecia $AB * R = AB'$, donde AB será “Radio Sol”, y AB' será “Radio Luna”, se tendrá que:

$$R = \frac{\text{Radio Luna}}{\text{Radio SOL}}$$

Así:

$$R = \frac{1}{8}$$

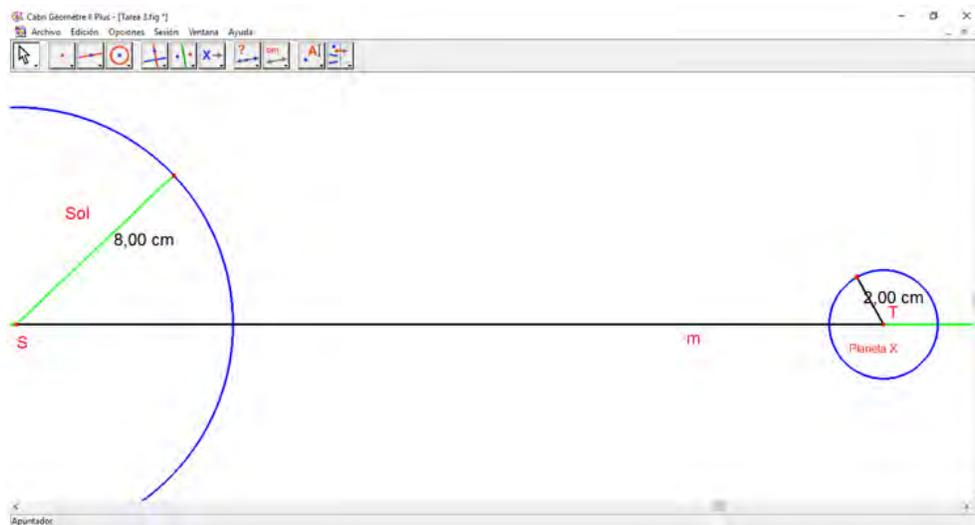


Figura 18. Panorama general (macro)

- 2) Con la herramienta “Homotecia” del AGD Cabri II Plus, procedo a generar la imagen homotética del “Sol” respecto al punto T con una razón $(R = \frac{1}{8})$ así: Selecciono la herramienta “Homotecia” del AGD, y con la tecla **F1** del computador podré ver cómo ésta funciona.

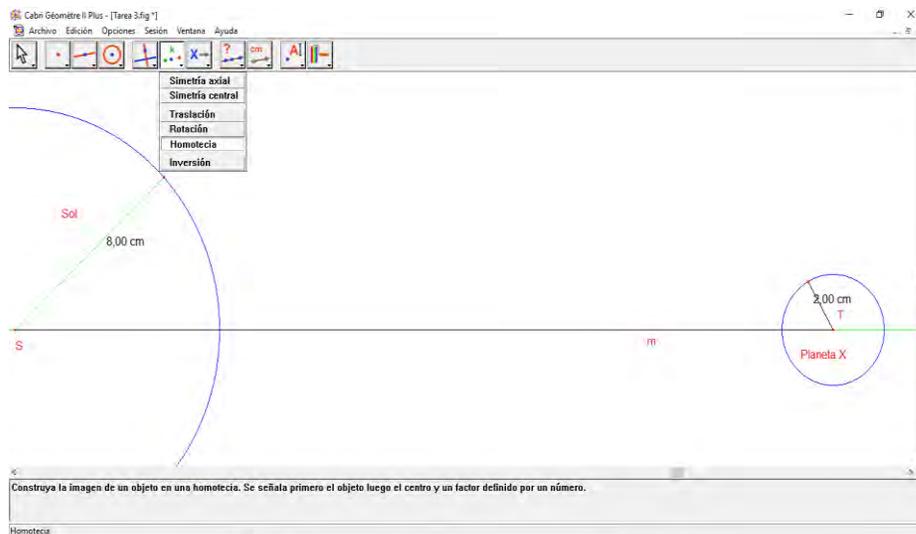


Figura 19. Menú ayuda sobre herramienta “Homotecia”

- 3) Procedo a realizar el proceso, tal y como dice en la barra de ayuda inferior. Para ello, con la herramienta “Número” escribo el número $\left(\frac{1}{8}\right)$, el cual servirá de razón R . Así, selecciono la herramienta “Homotecia”, luego doy clic a la circunferencia que representa al “Sol”, posteriormente al centro T , y por último a la razón R .



Figura 20. Panorama final (Proceso Macro)

HG: ¿Qué conclusión puedes sacar al respecto?

RE: Me resulta interesante la importancia que tiene el concepto de homotecia en el desarrollo de eventos cotidianos, tal como lo resultó ser en un eclipse solar. El cual deberá cumplir con dichas propiedades del concepto, puesto que de no ser así, entonces, no será posible tan increíble evento. No obstante, nunca hubiese imaginado que éste concepto, aparentemente sencillo tuviera tan gran importancia y utilidad.

Ahora tengo un panorama más amplio respecto a la aplicación de éste concepto, el cual al igual que muchos otros se ven en una forma simple y ligera en las típicas clases de matemáticas, a tal punto que muchas veces no resultan ser significativos para nosotros los estudiantes. Resultaría mucho más efectivo y llamativo realizar actividades de éste estilo, que involucren situaciones reales y tangibles. Al igual que hacer uso de tecnologías.

Comportamientos previstos en la situación problema

- Se prevén problemas con las operaciones con números expresados en notación científica.
- Podría presentarse debilidades en cuanto al uso del concepto de homotecia. Por tanto, podría no darse una solución.
- Los estudiantes podrían no haber desarrollado un nivel adecuado en cuanto a procesos de *instrumentación* del AGD.
- Se prevén inconvenientes sobre el uso correcto de la herramienta “Compás” del AGD; puesto que su uso será fuerte en el carácter *técnico*, y no *psicológico*.

3.1.4. Situación Didáctica No.4: Familia tangible de Homotecias

Ahora vamos a construir una *Familia tangible de homotecias* respecto a una circunferencia de radio un centímetro. Para ello necesitaremos:

- Un pantógrafo, junto con: goma de borrador, cinta y lápiz.
- Un compás.
- Un cuarto de cartulina.
- Una regla.
- Tijeras.
- Un palillo largo.
- Una barra de plastilina
- Un marcador

Así pues:

- Construye en la cartulina paso a paso cada una de las representaciones homotéticas de una circunferencia de radio un (1) centímetro con las escalas correspondientes a razones: 2, 4 y 8.
- Recorta cada una de estas representaciones.
- Ahora imagina cómo podrás construir en el espacio el comportamiento homotético de estas circunferencias con ayuda del palillo. Procede a realizar éste proceso. Ten en cuenta que deberás realizar en forma precisa dicho comportamiento, para ello, podrás hacer uso de otros artefactos que tienes a mano.

Luego de realizar ésta representación, responde las siguientes preguntas:

- a) Describe tu procedimiento paso a paso.
- b) ¿Cómo harías éste proceso para otras figuras geométricas?
- c) Identifica las partes tangibles que representan éste sistema de homotecias.
- d) ¿Dónde podría darse una aplicación de ésta representación?
- e) ¿Qué ocurriría si infinitas representaciones de éste sistema formaran un solo cuerpo? ¿Qué representaría?
- f) ¿Crees que existan otros campos en la vida cotidiana, donde podría darse una aplicación útil del *Pantógrafo*? ¿Cuáles?

Descripción general

Para realizar ésta última actividad que corresponde a la tercera sesión, será necesario que los estudiantes movilicen conocimientos previos adquiridos durante las actividades anteriores, puesto que se pretende desarrollar un bosquejo preciso y tangible del comportamiento del concepto de homotecia en lo que se ha denominado “*Familia tangible de Homotecias*”; por tanto, se necesitará de cada una de las propiedades del concepto de homotecia estudiadas. Por otra parte, esta actividad se convertirá en un reto nuevo y diferente para los estudiantes, ya que permite construir un objeto tridimensional a partir de otro bidimensional.

Antes de dar comienzo a ésta actividad, el profesor establecerá con sus estudiantes el tiempo necesario para el desarrollo de la misma (*contrato didáctico*), al igual que brindará a cada uno de ellos los materiales necesarios para desarrollar ésta actividad, es decir: un pantógrafo junto con una goma de borrador y un lápiz, una regla, tijeras, compás, una barra de madera delgada, un cuarto de cartulina, una barra de plastilina, y un marcador. Posteriormente los estudiantes se dispondrán a leer sus guías y desarrollar cada uno de los ítems planteados.

Las *acciones* que los estudiantes deberán desarrollar durante ésta actividad involucran: Procesos de *instrumentación* con artefactos como el compás y el pantógrafo, recortar, medir, y construir un esquema final en base a sus conocimientos previos. No obstante, la adaptación de éste sistema generará procesos *retroactivos* respecto a la verificación del mismo.

Algunas de las propiedades o nociones matemáticas que los estudiantes deberán tener en cuenta para el desarrollo de ésta actividad son:

- Medir
- Transportar medidas
- Composición de homotecias con mismo centro
- Centro de homotecia

- Definición de homotecia

Propósitos

- Presentar un nuevo desafío para los estudiantes; pasar de una representación bidimensional a otra tridimensional.
- Evaluar el éxito logrado por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades anteriores; en relación al uso de las propiedades del concepto de homotecia.
- Evaluar el grado de “aceptabilidad” por parte de los estudiantes hacia el artefacto pantógrafo. Puesto que, el desarrollo inicial de ésta prueba podría dejar en modo opcional el uso del pantógrafo, y fomentar el uso exclusivo del *Compás*.

Saberes matemáticos involucrados

Para el desarrollo de ésta situación será necesario tener en claro la definición y propiedades del concepto de homotecia. Al igual que todos aquellos procesos anteriormente brindados acorde al montaje, funcionalidad y uso del artefacto pantógrafo. Sin embargo, el uso del *Compás* podría anular al pantógrafo, puesto que en ésta actividad su funcionalidad puede ser fácilmente sustituida por el compás.

Al final, se plantearon algunos interrogantes a los estudiantes respecto al proceso realizado, los cuales tienen como fin ampliar el margen de entendimiento respecto a ésta actividad y el uso del pantógrafo. Además, cada estudiante deberá describir el proceso que haya utilizado para dar solución al problema planteado.

Así mismo, dada la naturaleza de las preguntas planteadas (abiertas), sólo se presentará una en cada caso de las posibles respuestas.

HG: Construye en la cartulina paso a paso cada una de las representaciones homotéticas de una circunferencia de radio un centímetro con las escalas correspondientes a las razones: 2, 4 y 8.

PE⁵⁹: Existirán dos formas de realizar éste procedimiento, puesto que el ítem no motiva inmediatamente el uso del pantógrafo, por tal razón, existirá la libertad para que el estudiante proceda a utilizar la definición de homotecia; y construir dichas circunferencias con sólo el uso del compás.

En el otro caso, Los estudiantes procederán a realizar éste proceso con su pantógrafo, sin embargo, les será un tanto difícil realizar un trazo perfecto con éste artefacto, puesto que éste artefacto pone en juicio sus habilidades motoras, complicando el proceso. No obstante, quizá algunos estudiantes perfeccionen sus trazos en el compás.

La primer circunferencia de radio un (1) centímetro será construida con la ayuda del compás y la regla, pues, se procederá a medir el radio y construir dicha circunferencia. Posteriormente, con el pantógrafo configurado en seis (6), se construirán las circunferencias de razones 2, 4 y 8; realizando el mismo proceso en las tres ocasiones, bajo la misma configuración (éste proceso ya se explicó en una actividad anterior). Por otra parte, pese al pequeño tamaño de la cartulina brindada, y el poco alcance del pantógrafo, se hará necesario cambiar el centro de homotecia para la construcción de la circunferencia con razón 8.

⁵⁹ PE: Proceso de estudiante



Figura 21. Proceso inicial

HG: Describe tu procedimiento paso a paso.

Independiente del proceso considerado para la construcción de las circunferencias, el proceso a seguir por el estudiante será el siguiente:

RE: Siguiendo con los ítems de las guías, procedemos a recortar las circunferencias, e imaginar ¿Cuál sería el comportamiento de éste sistema? Pues bien, se deberán tener en cuenta las tres condiciones consideradas anteriormente, respecto a saber “cuándo estamos hablando sobre un proceso de homotecia”. Así, deberá existir:

- Un centro de homotecia.
- Una razón.
- Y los puntos de estas circunferencias deberán ser colineales.

En fin, las razones están dadas, y cambian en tres oportunidades, y los puntos de las circunferencias deberán ser *colineales* (centros y contornos). Por tanto, debemos ubicar sobre el palillo los centros de las circunferencias, y construir una bolita de plastilina, la cual simule el *centro de homotecia*.

Las distancias a las que se encontraran separados los centros de las circunferencias respecto al *centro de homotecia* deberán estar sometidas a la definición de homotecia ($A * K = A'$), donde el punto A corresponde a la distancia desde la bolita de plastilina al centro de la circunferencia inicial de radio 1, y los A' corresponderán a los de los otros centros de las demás circunferencias, dependiendo de los valores de K (2, 4 u 8).

Por tanto, si consideramos $A = 3$, entonces:

- La circunferencia afectada por $K = 2$, estará separada 6 centímetros de la bolita de plastilina.
- La circunferencia afectada por $K = 4$ estará separada 12 centímetros.
- Y la circunferencia afectada por $K = 8$ estará separada 24 centímetros.

Luego se procede a medir y trazar con el marcador éstas medidas respecto una marca hecha sobre el palillo (la cual indica la posición de la bolita de plastilina que simula el *centro de homotecia*). Dichas marcas corresponderán a las ubicaciones de los centros de las circunferencias homotéticas sobre el palillo. Posteriormente, se realiza pequeños orificios en los centros de las circunferencias recortadas con el palillo, para asegurarlas y ubicarlas con ayuda de plastilina.

Y el resultado será el siguiente:

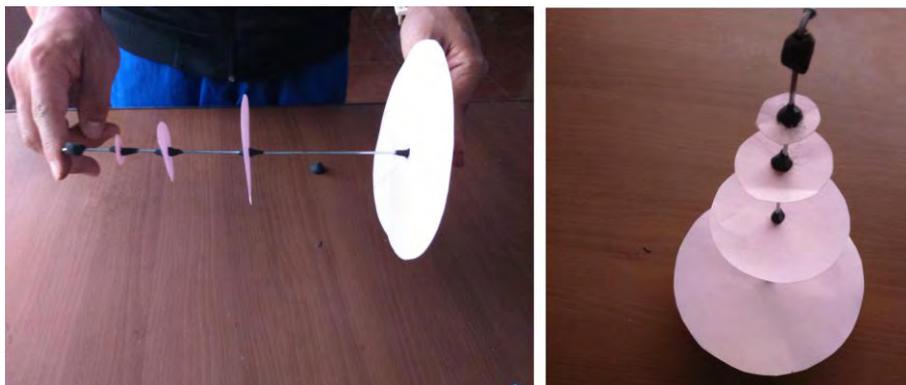


Figura 22. Proceso final

HG: ¿Cómo harías éste proceso para otras figuras geométricas?

RE: El proceso será similar, puesto que independientemente de la figura geométrica que se utilice, ésta estará sometida a las tres mismas condiciones que definen un proceso de homotecia. No obstante, para otras figuras geométricas habrá que usar más palillos, ya que habrá más puntos colineales de soporte, es decir, ellos ayudaran a mantener firme la estructura.

HG: Identifica las partes tangibles que representan éste sistema de homotecias.

RE: Las partes tangibles que componen éste sistema son:

- Un eje compuesto por un palillo que funciona como una recta que define la colinealidad de los puntos establecidos por: el *centro de homotecia*, y los centros de las circunferencias.
- Un *centro de homotecia*, que es representado por una bolita de plastilina.
- Y las circunferencias que componen el sistema de homotecia.

HG: ¿Dónde podría darse una aplicación de ésta representación?

RE: Una aplicación de ésta representación de éste sistema podría darse en la construcción de algunos puentes, pues es común ver figuras geométricas (en particular cuadrados o rectángulos) que ejercen ese comportamiento dentro de la estructura de un puente.

HG: ¿Qué ocurriría si infinitas representaciones de éste sistema formaran un sólo cuerpo? ¿Qué representaría?

RE: Si infinitas representaciones de éste sistema formaran un solo cuerpo, se esperaría que representen un cono.

HG: ¿Crees que existan otros campos en la vida cotidiana, donde podría darse una aplicación útil del pantógrafo? ¿Cuáles?

RE: Sí, por ejemplo en el arte, ya que por ejemplo, en el arte, un artista necesitará dibujar a escala.

Comportamientos previos en la situación problema

- Se prevén fortalezas en cuanto a la construcción (con compás o pantógrafo) de las circunferencias que constituyen esta familia homotética.
- El pantógrafo podría dejarse de lado, para hacer uso exclusivo del compás.
- Al hacer un uso exclusivo del pantógrafo, se prevén debilidades en cuanto a la precisión de las imágenes homotéticas.
- Pasar de una representación bidimensional a una tridimensional podría convertirse en un problema sin solución para los estudiantes.
- Podrían existir argumentos cortos o nulos en cuanto a las RHC (impuestas por éste tipo de representaciones), y aquellos que justifican la aplicación del pantógrafo en otros campos.

4. ANÁLISIS A *POSTERIORI* Y RESULTADOS

En este se estudian los datos recogidos durante el proceso de aplicación de la adaptación de la secuencia didáctica realizada al grado quinto, indagando si ocurrió lo planteado en el análisis a priori y los posibles sucesos que no fueron previstos, a fin de confrontar si son ciertas las hipótesis planteadas al inicio de ésta investigación.

4.1. Marco contextual

Este trabajo de grado se llevó a cabo en la IE Liceo de la Universidad de Nariño de la ciudad de Pasto, Departamento de Nariño, esta IE es de carácter público, y hace parte de la Universidad de Nariño. La secuencia didáctica fue aplicada a cinco (5) estudiantes de grado noveno⁶⁰, cuyas edades oscilan entre catorce y quince años durante el año electivo 2017, la jornada de estudio es en la mañana de 7:00 a.m. a 1:00 p.m. de lunes a viernes.

Se eligió esta institución debido a las facilidades con las que cuenta respecto al acceso del AGD Cabri II Plus, puesto que cuenta con la licencia del software que se encuentra financiada por la Universidad de Nariño. Además, tiene reconocimientos nacionales que la acreditan como una de las mejores IE del país, por sus grandes desempeños y logros académicos. Los estudiantes seleccionados fueron elegidos por su buen desempeño en el área de matemáticas y por su espíritu de colaboración.

La secuencia didáctica fue llevada a cabo del 1 al 19 de Septiembre del 2017; en horas de la tarde en un aula de informática de la institución que cuenta con alrededor de 25 computadores de mesa, de donde sólo se hizo uso exclusivo de algunos computadores, puesto que estos tenían instalado el AGD. Los horarios se distribuyeron únicamente los días viernes en horas de la tarde (de 3:30 pm a 5:30 pm), puesto que

⁶⁰No obstante, sólo tres (3) de los cinco (5) estudiantes realizaron toda la prueba.

los estudiantes no contaban con disponibilidad los demás días. No obstante, la última fecha se pudo realizar un día martes.

Para la recolección de datos para el análisis, en cada sesión se obtuvieron producciones de los estudiantes mediante hojas de trabajo, al igual que se realizaron registros fotográficos y de video. De estos datos, se consideraron los más distinguidos para justificar cada secuencia, esto con el fin de observar y determinar el *uso complementario* entre los materiales didácticos utilizados.

Es importante mencionar que los estudiantes no tenían experiencia con el AGD Cabri II Plus, al igual que presentaron dificultades en la diferenciación y utilización de conceptos como semejanza y congruencia. Así mismo, no conocían el concepto de homotecia. Por lo que fue de gran importancia el haber desarrollado e implementado la *Secuencia Cero* (que tuvo vigencia el día 18 de Agosto del 2017); la cual promovió la familiarización instrumental (básica y necesaria) de los estudiantes en cuanto a herramientas de éste software, necesarias para el buen desarrollo de la secuencia diseñada en éste trabajo. Así mismo, se promovió la diferenciación y entendimiento de conceptos como semejanza, congruencia y homotecia.

Por ejemplo, cuando a los estudiantes se les preguntó sobre la diferencia respecto a semejanza y congruencia (a raíz de la solución de la primer actividad (*Emparejamiento*) de la *Secuencia Cero*), ellos dieron respuestas tales como⁶¹:

- Por semejanza se entiende que se asemeja a la imagen original, es decir, no es la misma imagen, puede cambiar de tamaño, color, etc.
- Semejante es parecido
- Congruente es completamente igual, es igual pero se asemeja

Sólo una de las compañeras dijo que:

⁶¹ Sólo tres (3) estudiantes dieron respuestas

- Semejante es la misma imagen, pero de diferente tamaño, y congruente es la misma imagen

4.2 Análisis *a posteriori*

En este análisis se muestran los sucesos ocurridos durante la experimentación, comprobando si se cumplió con lo propuesto en el análisis *a priori* y dando a conocer aquellos hechos que no se previeron.

Así mismo, el tiempo pronosticado en el análisis *a priori* para el desarrollo de las situaciones didácticas fue el apropiado, ya que no hubo necesidad de ampliarlo, e incluso en algunos casos fue más que suficiente. En total se utilizaron cinco (5) horas más treinta minutos distribuidos en cuatro sesiones. (Ver Tabla No. 4)

Tabla No. 4. Ejecución de la Secuencia Didáctica

FECHA	ACTIVIDAD	No. ESTUDIANTES	TIEMPO
1 de Septiembre	Situación No.1: Foto con tus compañeros.	5	1 hora más treinta minutos
15 de Septiembre	Situación No.2: Uso del Pantógrafo.	3	2 horas
19 de Septiembre	Situación No.3: El eclipse de sol.	3	1 hora
19 de Septiembre	Situación No.4: Familia tangible de Homotecias.	3	1 hora

4.2.1 Situación No. 1. “Foto con tus compañeros”

De acuerdo con el tiempo propuesto en el análisis *a priori* para el desarrollo de la Situación Didáctica No. 1: Foto con tus compañeros (Ver Tabla No. 3) y el tiempo que realmente se utilizó para la ejecución de esta situación (Ver Tabla No. 4), se puede decir que los procesos de adaptación e *instrumentación* movilizados previamente por la *Secuencia Cero* respecto al AGD Cabri II Plus fueron efectivos⁶², al igual que aquellas sugerencias hechas en esta actividad respecto a la captura de la fotografía grupal y el manejo de la misma con el AGD fueron consideradas por los estudiantes. Por lo que no se presentaron mayores dificultades en el desarrollo de esta actividad, lo que ocasionó que el tiempo experimentado durante la experimentación fuese menor al propuesto en el análisis *a priori*.

La cámara digital, el trípode, la cinta para medir y un computador con el AGD Cabri II Plus hacen parte del *medio* que es utilizado para desarrollar esta actividad.

Como fue planteado en el análisis *a priori*, el docente facilitó a los estudiantes el *medio* con el cual van a interactuar para que comiencen a resolver la actividad, incluyendo las hojas guías de esta actividad junto con una hoja en blanco donde los estudiantes deberán dar respuesta a los interrogantes planteados⁶³.

Para el desarrollo de esta actividad, lo primero que hicieron los estudiantes fue dirigirse al respaldo del salón, con el fin de tomarse la fotografía grupal (Ver Figura 23) con la cámara digital asignada al grupo. Luego compartieron el archivo en cada uno de los computadores que se les había asignado, e hicieron uso del software *Paint* (editor de imagen) para bajar la dimensión de la fotografía, puesto que así se podría ejercer mayor dominio de la imagen en el AGD. Posteriormente, continuaron desarrollando la

⁶² Aunque también es de resaltar el hecho de que la actividad (No. 1: Foto con tus compañeros) fue diseñada de tal manera que fomente procesos de *instrumentalización* respecto a algunas herramientas del AGD (necesarias para el desarrollo de otras actividades planteadas).

⁶³ No fue necesario establecer el tiempo necesario (con los estudiantes) para el desarrollo de esta actividad, puesto que el horario ya había sido predeterminado con los estudiantes, es decir, dos (2) horas por cada sesión.

actividad manipulando la fotografía con el AGD; calculando cada una de las alturas reales (en centímetros) de sus compañeros, al realizar algunas *acciones* promovidas por la hoja guía, que fortalecieron los procesos de adaptación e *instrumentalización* del AGD y el manejo del concepto de homotecia. Por último dieron respuesta a los interrogantes planteados.



Figura 23. Foto grupal de los estudiantes.

Se esperaba que los estudiantes despertaran un interés respecto al concepto de homotecia al haberles brindado un panorama particular sobre RHC y la aplicación de este concepto, al igual que se fortalecieran los procesos de *instrumentalización* del AGD. Así mismo, algunas dificultades, o comportamientos previos que se esperaban por parte de los estudiantes, eran: dificultades en la obtención de la foto, problemas al anexar la imagen al AGD, no saber relacionar unidades de medida para calcular la razón (R) de homotecia en la foto, y en los ítems **F** y **G** se esperaban respuestas cortas y breves que demuestren el desinterés o falta de impacto deseado, al igual que el desconocimiento de RHC por parte de los estudiantes; después de haber puesto en acto la actividad, y de examinar las hojas de respuestas de los estudiantes se observó que:

- Los estudiantes se sintieron motivados por el desarrollo de la actividad, puesto que durante la prueba cada estudiante se mantuvo atento e inquieto por cada uno de sus resultados obtenidos, y constantemente cada uno de ellos estuvo preguntando a sus compañeros sus alturas reales⁶⁴, con el fin de comparar y verificar sus resultados; de no ser correcto (s), procedían a corregir sus procesos en el AGD. Además, sintieron interés respecto a cómo el concepto de homotecia se adaptó a lo que algunos estudiantes llamaron “cotidianidad” (Ver Figura 24)

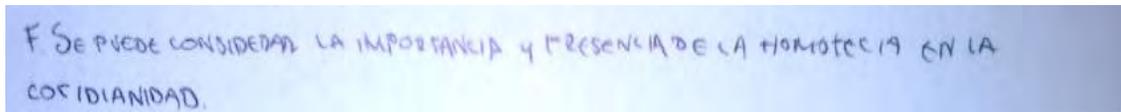
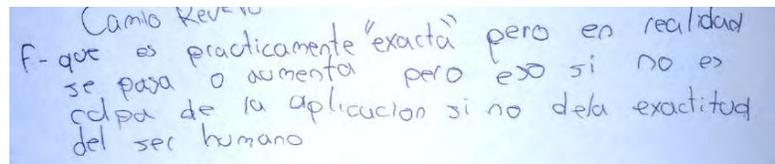


Figura 24. Relación de la actividad con la cotidianidad

- Sólo dos (2) estudiantes presentaron dificultades al anexar la fotografía digital al AGD Cabri II Plus, y necesitaron la intervención del docente; a raíz de no haber leído correctamente la hoja guía. Los otros compañeros no presentaron tales inconvenientes, o en su defecto corrigieron después de leer bien. Se puede decir que existió un buen proceso de *instrumentalización*, puesto que no existieron más inconvenientes (existió en general gran agilidad en el manejo del AGD). Es importante mencionar que la sugerencia hecha en la hoja guía respecto a la modificación en la dimensión de la fotografía con el editor de imagen *Paint* debió ser cambiada, puesto que lo recomendado no generó cambio (debido a un error en la escritura de la hoja guía), y fue necesario considerar un porcentaje horizontal y vertical de 25.
- Los estudiantes no presentaron dificultades en la obtención de la fotografía con la cámara asignada, puesto que sus resultados tuvieron un margen de error entre uno (1) y dos (2) centímetros. No obstante, atribuyeron este error a la exactitud de humano con el AGD (Ver Figura 25). Es importante mencionar que

⁶⁴ No existió discreción por parte de los estudiantes frente a este dato; a pesar de la sugerencia hecha en la hoja guía, o los llamados de atención sobre esto. Se quería que los estudiantes por intuición dedujeran si sus valores eran correctos o aproximados. Al finalizar la prueba, se daría oportunidad a los estudiantes para socializar sus resultados.

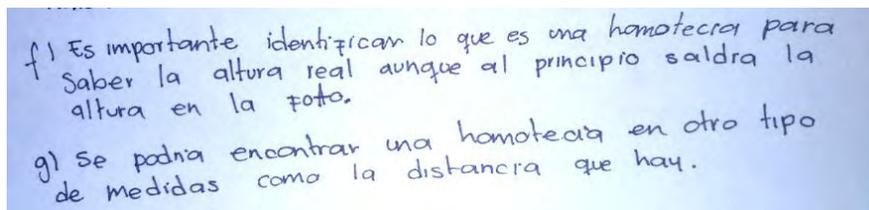
el docente ayudó a capturar la fotografía, mientras los estudiantes se disponían según las recomendaciones hechas en la hoja guía.



Cómo Rev-10
F- que es prácticamente "exacta" pero en realidad se pasa o aumenta pero eso si no es culpa de la aplicación si no de la exactitud del ser humano

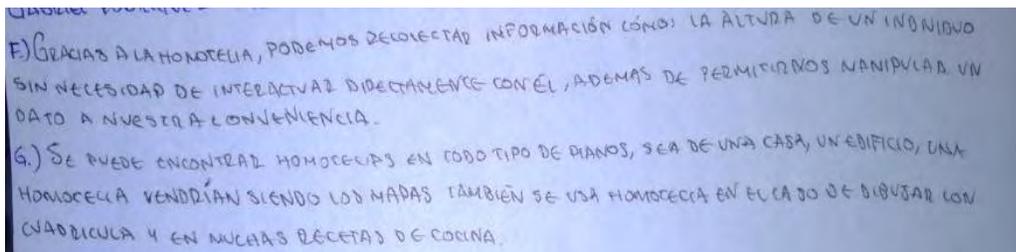
Figura 25. Conclusión sobre actividad

Los estudiantes no presentaron dificultades en el manejo de las unidades de medida al calcular la Razón (R) de homotecia en la fotografía. No obstante, un detalle que no se consideró en el análisis *a priori* fue que los estudiantes en principio presentaron dificultad al aplicar el concepto de homotecia al calcular las alturas reales de sus compañeros. Así mismo, en los ítems **F** y **G** (Ver Figura 26) se presentaron respuestas cortas y breves que mostraron el desconocimiento de las RHC (otras por su parte mostraron un limitado conocimiento (Ver Figura 27); y no de la falta de impacto o desinterés, puesto que la actitud de los estudiantes fue distinta, tal y como se dijo anteriormente.



f) Es importante identificar lo que es una homotecia para saber la altura real aunque al principio saldra la altura en la foto.
g) Se podria encontrar una homotecia en otro tipo de medidas como la distancia que hay.

Figura 26. Respuesta de los ítems **F** y **G**



F) GRACIAS A LA HOMOTECIA, PODEMOS RECOLECTAR INFORMACIÓN COMO LA ALTURA DE UN INDIVIDUO SIN NECESIDAD DE INTERACTUAR DIRECTAMENTE CON ÉL, ADEMÁS DE PERMITIRNOS MANIPULAR UN DATO A NUESTRA CONVENIENCIA.
G.) SE PUEDE ENCONTRAR HOMOTECIAS EN TODO TIPO DE PLANOS, SEA DE UNA CASA, UN EDIFICIO, UNA HOMOTECIA VENDRIAN SIENDO LOS MAPAS TAMBIÉN SE USA HOMOTECIA EN EL CASO DE DIBUJAR CON CUADRICULA Y EN MUCHAS RECETAS DE COCINA.

Figura 27. Respuesta de ítems **F** y **G** un poco más acertadas

A manera de conclusión, se puede decir que el objetivo propuesto para la situación No. 1 se cumplió, puesto que se logró despertar el interés deseado sobre los estudiantes en relación al concepto de homotecia y a las RHC; ya que al finalizar la prueba los estudiantes compartieron sus intereses en conocer más al respecto, al compartir sus respuestas. Igualmente, se fortalecieron los procesos de instrumentalización del AGD, respecto a herramientas que se utilizaron en las siguientes actividades.

4.2.2 Situación No. 2. “Uso del Pantógrafo”

De acuerdo con el tiempo propuesto en el análisis *a priori* para el desarrollo de la Situación No. 2: “**Uso del Pantógrafo**” (Ver Tabla No. 3) y el tiempo que realmente se utilizó para la ejecución de esta situación (Ver Tabla No. 4), se puede decir que los procesos de adaptación sobre el uso, configuración y utilización (*instrumentalización*) del pantógrafo, requieren mayor tiempo, puesto que a pesar que la prueba se realizó con el tiempo propuesto, esta no se culminó completamente⁶⁵.

El pantógrafo junto con la goma de borrador, el lápiz y la cinta, al igual que la cartulina, y las imágenes denominadas *Paisaje Geométrica* y *Entrada de la Plaza del Carnaval de la Ciudad de Pasto*, hacen parte del *medio* utilizado durante esta situación.

En primer lugar se adaptó un espacio para cada estudiante sobre las mesas donde se encontraban los computadores del aula, con el fin de que cada uno de ellos pudiera trabajar libremente con un pantógrafo. Por consiguiente, el docente hizo entrega de los *medios* necesarios para que cada estudiante realice la actividad, al igual que las hojas guías de la actividad, junto con una hoja en blanco donde ellos debían dar respuesta los interrogantes planteados. Así mismo, él dio algunas recomendaciones sobre el cuidado con el uso del pantógrafo; no perder de vista piezas pequeñas como “tuercas o tornillos”, al igual que tener cuidado con los “clavos” que hacen parte del pantógrafo.

⁶⁵ No se hizo uso de un tiempo mayor al predispuesto con los estudiantes (en los horarios), puesto que ellos no disponían de este.

Por otra parte, el tiempo para desarrollar la prueba fue previamente estipulado, pues se adaptó a un horario establecido entre el docente y los estudiantes. Posteriormente, los estudiantes procedieron a leer, comprender y realizar cada proceso.

En la primera fase de ésta situación, cada estudiante procedió a leer sobre el pantógrafo; identificando sus partes en el pantógrafo que se les había asignado, su utilidad, y cómo éste se configura (*instrumentalización*). No obstante, ésta fase no fue suficiente, puesto que durante el desarrollo de la actividad los estudiantes se notaban inseguros en cada proceso. Y fue necesario la intervención del docente para promover el buen uso del artefacto respecto a sus configuraciones.

En la segunda fase de ésta situación, se trabajó con la imagen denominada *Paisaje Geométrico*, mientras se desarrollaban procesos de *instrumentalización* del pantógrafo; en relación al montaje de éste sobre el espacio brindado (Ver Figura 28), para así realizar los trazos solicitados sobre la cartulina asignada.

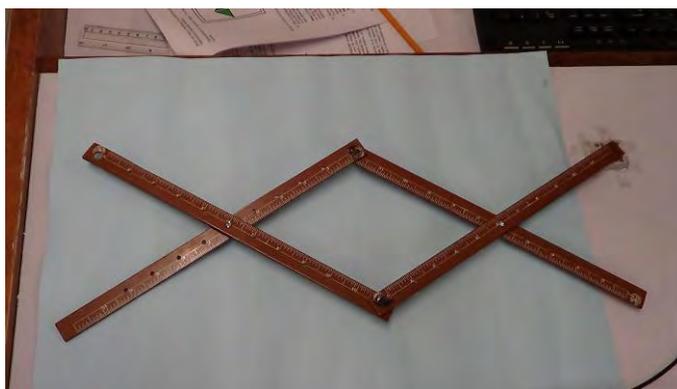


Figura 28. Montaje del pantógrafo

Una *acción* que no se había considerado en las guías, fue que los estudiantes aseguraron con cinta el lápiz en el punto *C* del pantógrafo, con el fin de generar o mejorar la precisión en el trazo.

Luego de realizar el ensamblaje correcto del pantógrafo, los estudiantes se tornaron inquietos respecto a cómo realizar los tres (3) procesos con las configuraciones

solicitadas en éste artefacto, y fue allí donde intervino el docente (tal cual como se dijo anteriormente en la primera fase). Posteriormente, ya teniendo claridad respecto a cómo configurar el pantógrafo, los estudiantes procedieron a generar los trazos con éste artefacto. Por último, dieron respuesta a las preguntas que se les plateó en ésta fase.

En la tercera fase, se pretendía trabajar con la imagen denominada *Entrada de la Plaza del Carnaval de la Ciudad de Pasto*, con el propósito de movilizar procesos de *instrumentación* con el pantógrafo, al igual de que éste artefacto sea usada como *herramienta psicológica*, puesto que se pretendía generar inquietudes (que generan proceso de retroacción) sobre cómo realiza el proceso solicitado. No obstante, debido al tiempo limitado, predispuesto por el horario establecido con los estudiantes, al igual que la gran cantidad de preguntas realizadas en la fase dos (2), que demandaron mucho tiempo en los estudiantes, no fue posible realizar la tercera fase. No obstante, el docente solicitó a sus estudiantes dar respuesta al interrogante planteado en ésta fase, sin embargo, no se generó ninguna respuesta, por lo que no fue posible movilizar procesos de *instrumentación* con éste artefacto en ésta actividad.

Tal como se había previsto en el análisis *a priori*, los estudiantes presentaron dificultades al generar los trazos con el pantógrafo; puesto que, tal como lo sugieren Bartolini y Maschietto (2008), artefactos articulados (como el pantógrafo) necesitan de un manejo concreto que requieren habilidades motoras, puesto que éstos ponen resistencia al movimiento. No obstante, los estudiantes con el pasar de los minutos y la práctica, fueron perfeccionando la manera de trabajar con éste artefacto, y por ende sus trazos (Ver Figura 29). Por lo que no se generó ningún desinterés en realizar ésta actividad.

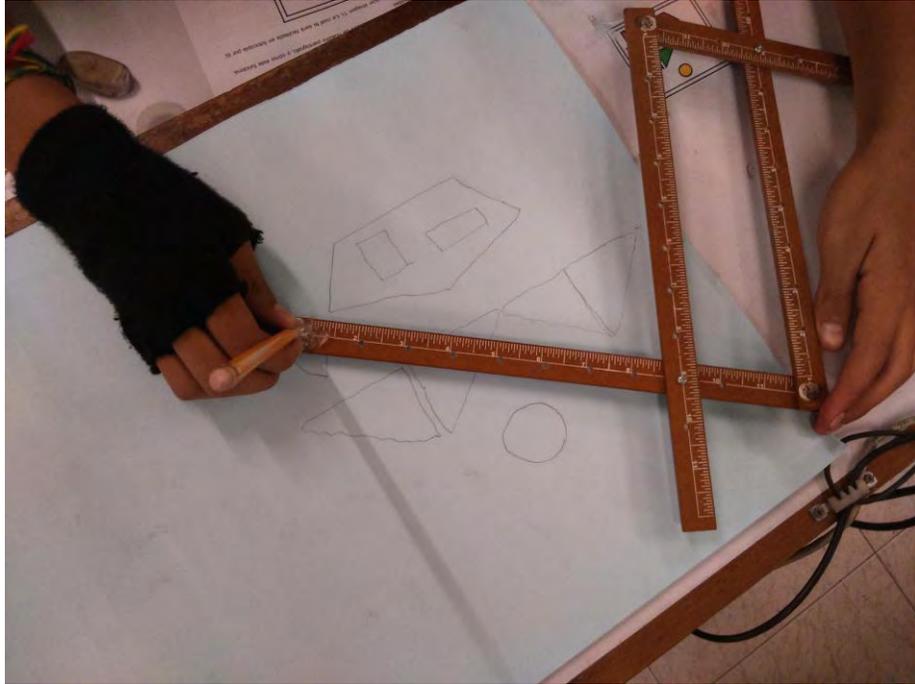


Figura 29. Trazo generado por estudiante con el pantógrafo

Sin embargo, a pesar de que los trazos se fueron perfeccionando, la obtención de las razones que posibilitaron la ampliación de las figuras geométricas en cada proceso (ítem 1), se vieron alterados por: suposiciones erróneas hechas por los estudiantes, la precisión en los trazos, o por generar medidas erróneas con la regla.

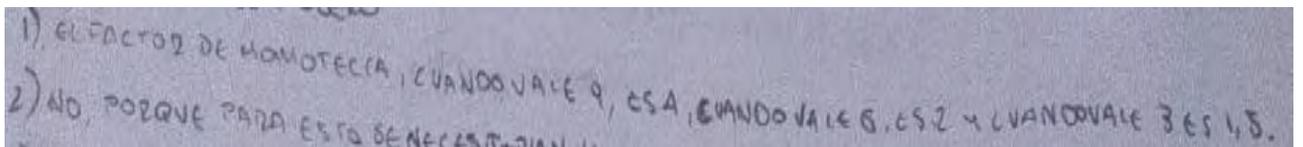


Figura 30. Respuesta de estudiante en ítem 1

Así mismo, en el ítem 2, no fue posible obtener respuestas que garantizaran procesos de *instrumentación* con el pantógrafo, puesto que los estudiantes sólo se limitaron a responder que no era posible tal *acción* con el pantógrafo (Ver Figura 31), y no dieron ninguna pauta para que aquello fuera posible.

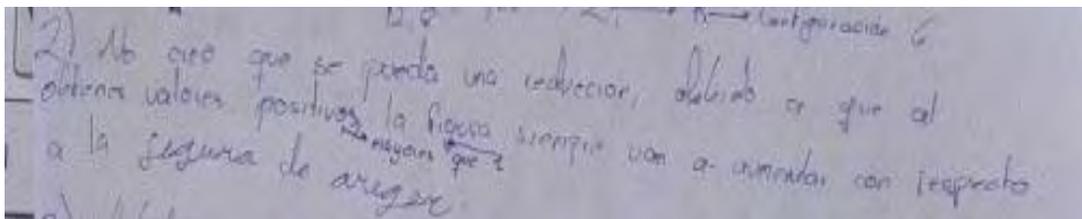


Figura 31. Respuesta de estudiante ítem 2

En los ítems 3 y 4, tal como se había previsto en el análisis a priori. No existieron respuestas acertadas o más claras en el ítem 3, sin haber visto el ítem 4 (Ver Figura 32). Por lo que se asume que no existió comprensión respecto a cómo funciona el pantógrafo.

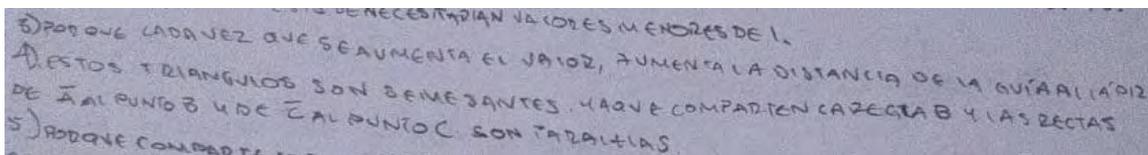


Figura 32. Respuesta de estudiante en ítems 3 y 4

El propósito de los ítems del 5 al 8, fue promover propiedades matemáticas del concepto de homotecia. No obstante, no fue posible obtener un resultado en la media deseada (Ver Figura 33), sino más bien sus argumentos fueron breves, y no acertados en algunos casos.

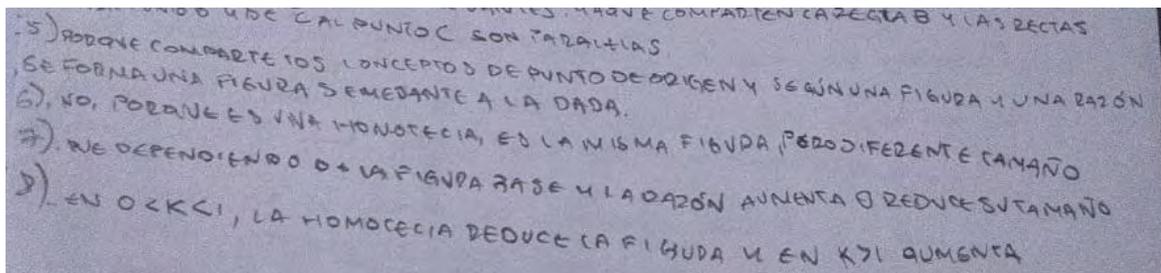


Figura 33. Respuesta de estudiante en los ítems del 5 al 8

Así: en el ítem 5, algunos estudiantes pudieron clasificar sólo dos (2) de las tres (3) CN para saber cuándo se está trabajando con un proceso de homotecia. En el ítem 6, se obtuvo una respuesta deseada, o acorde a lo que se quería, puesto que el

estudiante fue capaz de relacionar lo que se mantiene variante e invariante cuando se realiza un proceso de homotecia. Por su parte, en el ítem 7, no se obtuvo una respuesta deseada, puesto que se quería que los estudiantes relacionen éste ítem con la propiedad de paralelismo en la homotecia. Por último, en el ítem 8, se obtuvo una respuesta acertada, puesto que el estudiante pudo determinar el comportamiento dinámico del concepto de homotecia cuando su razón (R) varía entre: $0 < R < 1$ y $R > 1$.

Por último, debido a que la actividad planteada no pudo culminar en su totalidad (por factores relacionados con el tiempo y disposición de los estudiantes), puesto que la última fase no se realizó, entonces: no se puede establecer si los estudiantes hicieron un uso *psicológico* o *técnico* del pantógrafo; a pesar de que el docente les solicitó a los estudiantes responder la pregunta que se planteaba en ésta fase, y no obtener ninguna respuesta. No obstante, en la siguiente actividad “El eclipse de sol”, se pudo notar que se le dio un uso *psicológico*.

En resumen, se puede decir que se cumplió con el propósito de brindar a los estudiantes un panorama general sobre el pantógrafo, hablando sobre: para qué se usa, cómo se configura, y cómo se utiliza (procesos de *instrumentalización*); al igual que posibilitar procesos de *instrumentación* (aunque, no fue posible movilizarlos). Igualmente, se pudo promover la comprensión de algunas propiedades matemáticas y geométricas del concepto de homotecia.

4.2.3 Situación No. 3. “El eclipse de sol”

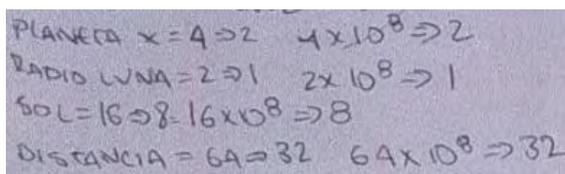
De acuerdo con el tiempo propuesto en el análisis a priori para el desarrollo de la Situación 3 “El eclipse de sol” (Ver Tabla No. 3) y el tiempo que se utilizó para la ejecución de la misma (Ver Tabla No. 4), se deduce que el trabajo realizado con el AGD Cabri II Plus no presentó dificultades; tal vez por las fortalezas adquiridas por los estudiantes en las sesiones anteriores. Por tal motivo, se generó una concordancia

entre el tiempo utilizado durante la experimentación y el propuesto en el análisis *a priori*.

El AGD Cabri II Plus hace parte del *medio* que es utilizado para desarrollar ésta situación.

Como fue planeado en el análisis *a priori*, cada estudiante tuvo acceso a un computador con el AGD Cabri II Plus. El docente, por su parte, estableció el tiempo necesario para desarrollar ésta prueba (*contrato didáctico*). Así mismo, hizo entrega a cada estudiante de las hojas guía de ésta actividad, junto con una hoja en blanco donde debían generar cálculos, o dar respuesta a los interrogantes planteados. En consiguiente, procedieron a leer y desarrollar sus guías.

Tal como había sido previsto, lo primero que hicieron los estudiantes fue hacer uso de la fórmula de homotecia, con el fin de adaptar los datos (en centímetros) a la razón pedida (Ver Figura 34); haciendo uso de sus habilidades aritméticas. Por lo que en general, no se presentaron dificultades en cuanto a la conversión, y manipulación de unidades con el AGD, ni al uso y manejo de números expresados en notación científica.



PLANETA $x = 4 \Rightarrow 2$ $4 \times 10^8 \Rightarrow 2$
RADIO LVNA = $2 \Rightarrow 1$ $2 \times 10^8 \Rightarrow 1$
SOL = $16 \Rightarrow 8$ $16 \times 10^8 \Rightarrow 8$
DISTANCIA = $64 \Rightarrow 32$ $64 \times 10^8 \Rightarrow 32$

Figura 34. Proceso de adaptación de datos por estudiante

Posteriormente, ya teniendo estos datos, los estudiantes procedieron a construir el sistema solicitado con el AGD (Ver Figura 35). Para tal fin, todos los estudiantes hicieron uso del procedimiento que en la sección 3.1.3. de éste documento se denominó *Proceso constructivista*, el cual consistía en construir el sistema con la ayuda exclusiva de la herramienta “Compás” del AGD. Es decir, ningún estudiante hizo uso del proceso que en la misma sección se había denomina *Proceso Macro*, en el cual se hace uso exclusivo de la herramienta “Homotecia”. No obstante, durante el desarrollo

de la *Secuencia* diseñada, nunca se habló a los estudiantes sobre el uso de la herramienta “Homotecia” en el AGD, sin embargo, en el desarrollo de la *Secuencia Cero* se había hablado respecto al uso de la tecla “F1”, la cual despliega en la parte inferior de la pantalla del AGD las ayudas correspondientes al uso de una herramienta. Por tal razón el *Proceso Macro* podía ser una posibilidad.

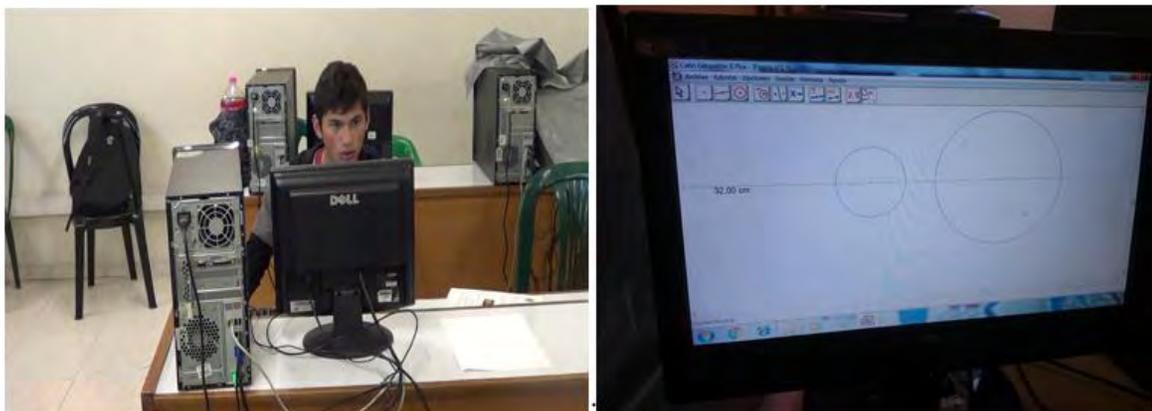


Figura 35. Inicio de construcción del sistema

A continuación, se presenta un *Proceso constructivista* desarrollado por un estudiante. Para ello, se hizo uso de la herramienta “Revisar la construcción...” del AGD, la cual permite ver paso a paso cómo fue resuelta ésta actividad por el estudiante:

- 1) Con la herramienta “Punto” se construyó un punto sobre la pantalla del AGD. Después, con la herramienta “Recta” se construyó una recta que pasa por aquel punto y un punto cualesquiera en el espacio.
- 2) Con las herramientas “Número” y “Compás” se construyó una circunferencia de radio 8 sobre el punto construido anteriormente, y se la llamó Sol. Después se pintó de amarillo con la herramienta “Rellenar...”.
- 3) Con las herramientas “Número” y “Compás” se construyó una nueva circunferencia de radio 32 con centro en el mismo punto de la circunferencia anterior, y se creó un punto de intercepción entre la recta construida anteriormente, y la nueva circunferencia.

- 4) En el punto de intercepción, se construyó una nueva circunferencia de radio 2, la cual se pintó de rojo y se llamó Planeta X. Así, la distancia entre el Planeta X y el Sol era la solicitada en el ejercicio.

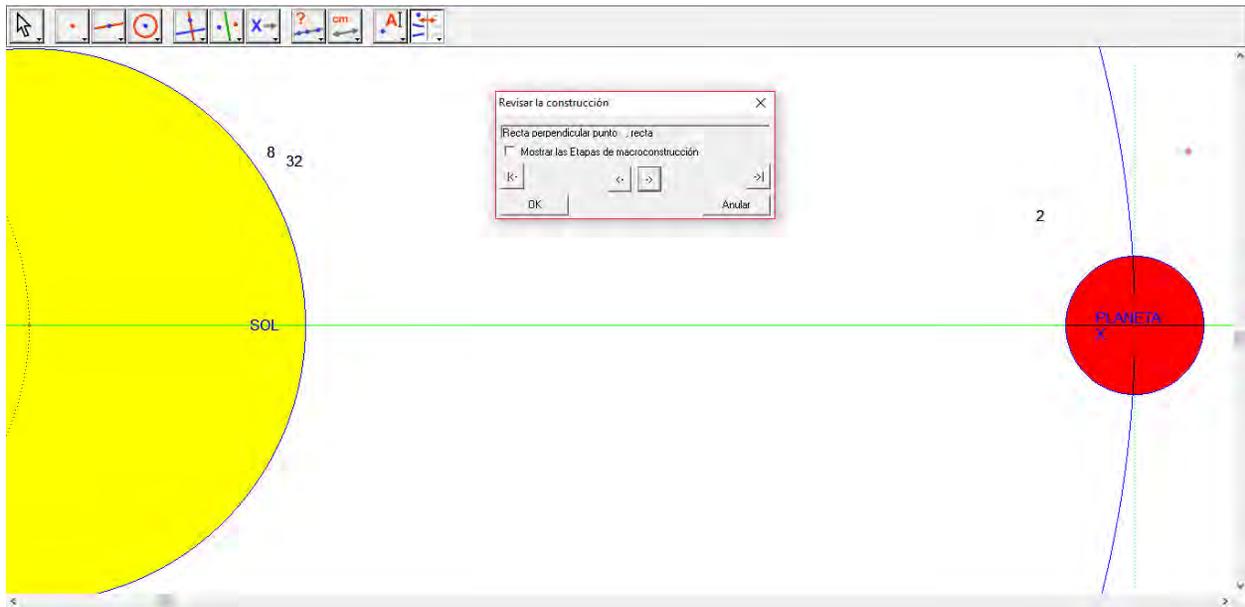


Figura 36. Proceso inicial del estudiante en el AGD

- 5) Con la herramienta “Recta perpendicular”, se construyeron las rectas perpendiculares al eje que une las circunferencias Sol y Planeta X, que pasan por los centros de dichas circunferencias.
- 6) Con la herramienta “Punto(s) de intercepción” se definieron los puntos de intercepción entre las circunferencias (Sol y Planeta X) y las respectivas rectas perpendiculares creadas anteriormente.
- 7) Los puntos de intercepción construidos anteriormente se unieron en forma cruzada a través de rectas, y se construyó un nuevo punto de corte entre éstas rectas y el eje que une las circunferencias Sol y Planeta X.

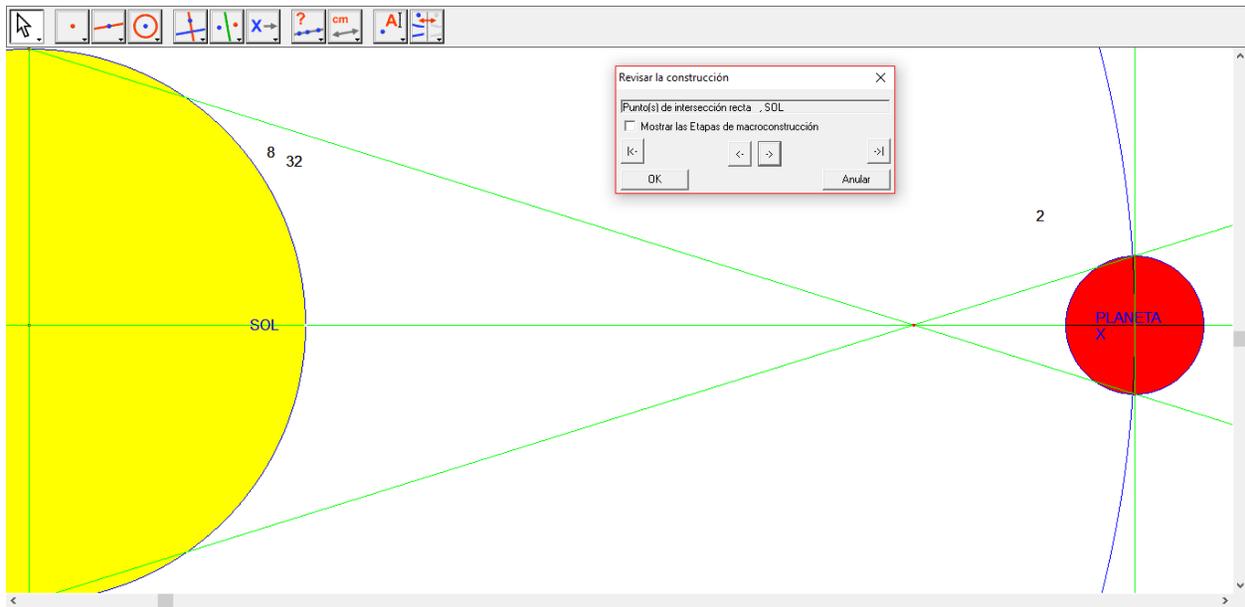


Figura 37. Proceso secundario del estudiante en el AGD

- 8) Con la herramienta “Punto medio”, se construyeron los puntos medios de los segmentos definidos entre el nuevo punto de intercepción, y los puntos de intercepción construidos anteriormente a la circunferencia Planeta X por la recta perpendicular. Que entre otras cosas, forman un triángulo isósceles.
- 9) Con la herramienta “Recta perpendicular” se construyó una recta perpendicular que pasa por los puntos medios construidos anteriormente, y es perpendicular al eje que une las circunferencias Sol y Planeta X.
- 10) Se construyó un nuevo punto de intercepción, definido entre la nueva recta perpendicular y el eje que une las circunferencias Sol y Planeta X.
- 11) Tomando como centro el nuevo punto de intercepción, se construyó una circunferencia de radio 1 y se llamó Luna. Posteriormente se procedió a hacer uso de la herramienta “Ocultar/Mostrar”, y se ocultó todo lo que no debía mostrarse.

B. PRIMERO, PUSE UN PUNTO EN EL LADO IZQUIERDO QUE SERÍA EL CENTRO DEL SOL, LUEGO TOMÉ LA DISTANCIA DESDE EL PUNTO HASTA OTRO (32 CM), QUE SERÍA EL CENTRO DEL PLANETA X, LUEGO MARQUÉ EL PUNTO DE INTERSECCIÓN Y SAQUÉ EL PUNTO MEDIO DE ESTE AL LIMITE DEL PLANETA X ESTE PUNTO MARCARÍA EL LIMITE DE LA LUNA.

Figura 39. Descripción del proceso anterior en palabras del estudiante

Sin embargo, el procedimiento desarrollado por el estudiante en el AGD es correcto hasta cierto momento. No obstante, su error consistió en no haber hecho uso de la fórmula de homotecia para saber cuál fue la razón que posibilitó la homotecia en éste caso, al igual que, no tener claro las CN para saber cuándo se está trabajando un proceso homotecia. Puesto que, el mismo estudiante al responder el ítem α (Ver Figura 40) de ésta prueba identificó éste sistema como una aplicación del concepto de homotecia, pero no clasificó sus partes.

2da PREGUNTA PARTE:
A) SÍ, PORQUE TODOS LOS ELEMENTOS SON CIRCULOS PERFECTOS Y SE DIFERENCIAN EN SU TAMAÑO CON SU RESPECTIVA RAZÓN.

Figura 40. Respuesta del estudiante en el ítem α

No obstante, el impacto generado en los estudiantes no fue el deseado (Ver Figura 41), puesto que se quería que los estudiantes resaltaran la existencia de las RHC. Más aun, sus respuestas fueron de carácter teórico, o resaltando las potencialidades del AGD; y no práctico.

B) Que caben nos facilita bastante los diseños geométricos como en este caso queda de una razón en este caso $\frac{1}{2 \times 10^8}$

Figura 41. Respuesta al ítem c

En conclusión, se puede decir que se cumplió con el propósito de presentar un panorama diferente respecto a las RHC, al igual que se pudo poner a prueba los procesos de instrumentalización brindados, y los procesos de instrumentación

generados por el estudiante. Así mismo, se pudo evaluar el nivel de comprensión de los estudiantes en relación al concepto de homotecia.

4.2.4 Situación No. 4. “Familia tangible de homotecias”

Finalizada la prueba anterior, tal como había sido previsto, los estudiantes y el docente se dispusieron a desarrollar la cuarta y última actividad. Para ello, el docente no tuvo necesidad de establecer el tiempo necesario para desarrollar la prueba, puesto que ésta debía desarrollarse en el tiempo que restaba del horario que había sido previamente establecido con sus estudiantes. No obstante, de acuerdo con el tiempo propuesto en el análisis *a priori* para el desarrollo de la Situación No. 4. “**Familia tangible de homotecias**” (Ver Tabla No. 3) y el tiempo que realmente se utilizó para la ejecución de esta situación (Ver Tabla No. 4), se puede deducir que el trabajo realizado con el pantógrafo y los demás materiales manipulativos, no presentó mayor dificultad, lo que ocasionó que el tiempo utilizado durante la experimentación fuese menor a lo propuesto en el análisis *a priori*.

El pantógrafo junto con la goma de borrador, el lápiz y la cinta, el compás, la cartulina, la regla, las tijeras, la barra de madera delgada, y el marcador, hacen parte del *medio* que es utilizado para movilizar esta situación.

Como había sido planeado en el análisis *a priori*, el docente facilitó a los estudiantes el *medio* con el cual van a interactuar para que comiencen a resolver la actividad.

Para desarrollar la actividad lo primero que hicieron los estudiantes fue generar un espacio en el lugar donde se encontraban, para así, poder ensamblar y utilizar correctamente el pantógrafo. Lo que demuestra que los estudiantes lograron alcanzar un nivel adecuado sobre los procesos de *instrumentalización* que habían sido dados previamente con éste artefacto. En consiguiente, tal como había sido previsto, los estudiantes haciendo uso de la regla y el compás trazaron la circunferencia de radio un (1) centímetro sobre la cartulina (Ver Figura 42). Uno de los estudiantes decidió trazar

la circunferencia sobre una esquina de la cartulina, para después recortarla, y pegarla con cinta.



Figura 42. Trazo de la circunferencia de radio uno (1)

Después, los estudiantes procedieron a generar las ampliaciones solicitadas sobre la anterior circunferencia con el pantógrafo. Para ello, configuraron el pantógrafo en seis (6) para generar la primera ampliación de razón dos (2); y tal como se había previsto, hicieron uso del compás para perfeccionar el trazo, ya que no eran perfectos, por razones que se asocian a habilidades motoras con el pantógrafo. Sin embargo, los estudiantes no tenían claro cómo realizar los otros procesos, y procedían a generar trazos bajo distintas configuraciones a la circunferencia de radio un (1) centímetro con el pantógrafo. No obstante, después de cada trazo procedían a medir el radio de la circunferencia generada, y verificaban sus resultados (proceso *retroactivo*) (Ver Figura 43).



Figura 43. Uso incorrecto del pantografo en la actividad, y verificación de resultados

Lo descrito anteriormente es una consecuencia inmediata de no haberse realizado la tercera fase de la *Situación No. 2 "Uso del Pantógrafo"*; por razones que ya se explicaron. Puesto que la relación en los procesos es inherente, ya que el uso *psicológico* del pantógrafo es el mismo en ambos casos. No obstante, luego de generar algunos trazos fallidos, uno de los estudiantes procedió a configurar su pantógrafo en seis (6), e hizo un trazo a la circunferencia de razón dos (2), es decir, trazó la circunferencia de radio cuatro. Posteriormente, verificó su éxito, perfeccionó su trazo con el compás, recalcó la circunferencia con el marcador (Ver Figura 44), y procedió a compartir su resultado con sus compañeros; e inmediatamente sus compañeros imitaron el proceso.



Figura 44. Generación de circunferencia de razón cuatro (4), y verificación.

En consiguiente, tal como se había previsto en el análisis *a priori*, debido al limitado espacio de trabajo generado por el pantógrafo, para la generación de la circunferencia de razón ocho (8) los estudiantes tuvieron que cambiar la orientación de la cartulina, es decir, en el último trazo cambiaron el centro de homotecia. Posteriormente, con las tijeras procedieron a recortar todas las circunferencias que habían generado (Ver Figura 45).



Figura 45. Generación de circunferencia de razón ocho (8), y recorte

Por último, los estudiantes procedieron a construir el comportamiento homotético de las circunferencias en el espacio con la ayuda de la barra de madera. No obstante, tal como se había previsto, para los estudiantes pasar de una representación bidimensional a otra tridimensional haciendo uso de las propiedades del concepto de homotecia resultó ser un verdadero desafío, y sólo dos de los tres (3) estudiantes presentaron sus soluciones. No obstante, no se obtuvieron las soluciones esperadas (Ver Figura 46). Así mismo, debido al no éxito de la prueba, no fue posible obtener soluciones claras o precisas en los ítems *b*, *c*, *d* y *e*. Por otra parte, el único campo de la vida cotidiana donde los estudiantes identificaron un uso del pantógrafo fue en la generación de dibujos a escala (Ver Figura 47).

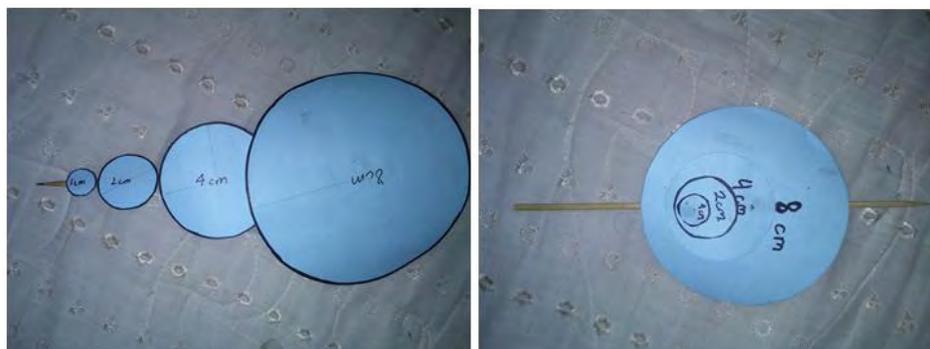
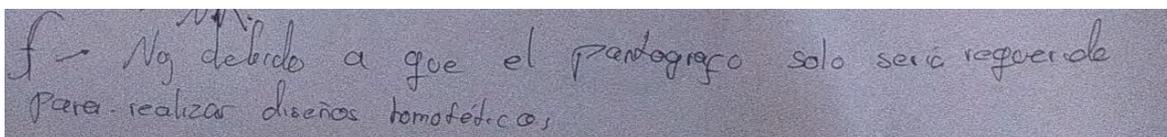


Figura 46. Soluciones presentadas por los estudiantes



f - No, debido a que el pantógrafo solo sería requerido para realizar diseños homotéticos.

Figura 47. Respuesta de estudiante en ítem *f*

Además, algunos comportamientos previos que se esperaban, o que podrían haberse dado durante el desarrollo de ésta actividad, son: los estudiantes podrían haber generado un uso exclusivo del compás, tal que este artefacto opacara el uso del pantógrafo; tal como se explicó en el análisis *a priori*. No obstante, se pudo ver un grado de “aceptabilidad” hacia el pantógrafo por parte de los estudiantes, a pesar de las resistencias y habilidades motoras que este requiere. Igualmente, no se esperaban dificultades en cuanto al uso *psicológico* del pantógrafo en esta actividad. Sin embargo, este hecho se asoció a la no culminación de la fase tres (3) de la *Situación No. 2. “Uso del Pantógrafo”*.

En conclusión, se puede decir que se cumplió con el propósito de esta actividad, puesto que se presentó un nuevo desafío a los estudiantes; pasar de una representación bidimensional a una tridimensional haciendo uso de las propiedades matemáticas del concepto de homotecia. Así mismo, se logró evaluar el éxito alcanzado por los estudiantes durante el desarrollo de las actividades anteriores; en relación al uso y definición del concepto de homotecia, aunque no les haya sido posible realizar una representación en el espacio. Por otra parte, se logró promover un uso *psicológico* del pantógrafo.

4.3 Resultados

De los planteamientos realizados en el análisis *a priori* y en el análisis *a posteriori* se hace su confrontación y se determina que cada situación planteada cumplió con el propósito planteado, viéndose reflejado en las producciones escritas y verbales de los estudiantes.

En primer lugar, aquellas actividades que requerían el uso del pantógrafo revelan que el artefacto utilizado dentro de una secuencia didáctica puede favorecer el aprendizaje de las propiedades del concepto de homotecia, puesto que para los estudiantes fue claro que a mayor razón, mayor será la ampliación, al igual que pudieron ver el comportamiento dinámico de este concepto, la colinealidad entre los puntos y lo que se mantiene variante e invariante en un proceso de homotecia. Por otra parte, los procesos de *instrumentalización* brindados respecto a este artefacto fueron asimilados en forma inmediata, al igual que se puso promover un uso *psicológico* de este artefacto.

Así mismo, el uso simultáneo del pantógrafo con artefactos tradicionales como la regla, lápiz o el compás, permitió a los estudiantes realizar trazos más precisos sobre las figuras iniciales, permitiéndoles identificar con mayor precisión la razón con la que había sido ampliada la figura.

No obstante, aquellas actividades que involucraban el uso del AGD Cabri II Plus permitieron ver a los estudiantes que a través de este software era posible modelar situaciones reales (RHC), las cuales pueden involucran contextos tangibles a su realizada, y que permitían encontrar valores desconocidos sobre objetos sin tan siquiera interactuar con estos, pues tal como afirmaban ellos “permite obtener datos sin interactuar con ellos”. Además, afirmaban que los errores obtenidos al calcular los datos se debían al error humano. Por otra parte, el proceso de *instrumentalización* del AGD se dio en forma inmediata, pues a pesar de haber sido el primer contacto de los estudiantes con este software, no se presentaron dificultades en su manejo, y fácilmente desarrollaron procesos de *instrumentación*.

El trabajo realizado con Cabri II Plus durante la Secuencia Didáctica diseñada y el desarrollo de la Secuencia Cero permitió trabajar con razones K tales que $0 < k < 1$ (homotecia directa), y $k < 0$ (homotecia inversa), al igual que permitió generar un comportamiento dinámico de la homotecia: al mostrar la dependencia generada entre

una figura y su imagen homotética, y el comportamiento de la homotecia al variar la ubicación del centro de homotecia.

Por su parte, el pantógrafo (usado en la investigación) permitió trabajar con razones K tales que $1 < k < P$, y donde P dependerá de la fisonomía del pantógrafo. Tales que al generar múltiples trazos, se desplegó un comportamiento dinámico asociado a las propiedades del concepto de homotecia, y por tanto se logró promoverlas. Así mismo, permitió promover la homotecia como un proceso de construcción geométrico asociado al comportamiento de un punto que sigue una trayectoria asociada directamente a una ley establecida por éste artefacto, hecho que no es visible en el *proceso macro* establecido dentro de la herramienta “Homotecia” de Cabri II Plus.

De ésta manera, la *primera hipótesis* de la investigación se ve evidenciada, pues cada artefacto permitió la adquisición de diferentes propiedades del concepto de homotecia, al presentar RHC a los estudiantes de grado noveno, y emplear la metodología de *micro-ingeniería didáctica*.

Es importante resaltar que las *variables didácticas*⁶⁶ que se tuvieron en cuenta en el diseño de la Secuencia Didáctica cumplieron un papel esencial, puesto que cada una permitió la construcción de un conocimiento diferente, que en conjunto proporcionaron las propiedades de la homotecia.

⁶⁶ Las *variables didácticas* utilizadas están descritas en la página 92 de éste documento.

5. CONCLUSIONES

El desarrollo de éste trabajo se fundamenta en la metodología de investigación de *micro-ingeniería didáctica*, la cual permitió estudiar algunos aspectos del desarrollo *Histórico-Epistemológico* del concepto de homotecia y el pantógrafo, donde fue posible realizar una aproximación histórica sobre el origen del concepto de homotecia; mostrando lo poco que se conoce al respecto sobre el origen de este concepto (según la corta investigación realizada). Así mismo, se pudo resaltar la importancia que ha jugado el pantógrafo a través de la historia; no sólo en el campo usual del dibujo a escala asociado a la TG de homotecia, sino también en el gravado en joyas, monedas o metales, y hasta en campos inusuales como en la mecánica, la medicina y la agricultura.

Así mismo, ésta metodología de investigación permitió estudiar algunos de los *errores, obstáculos y dificultades* que se presentan en la enseñanza y aprendizaje del concepto de homotecia, lo que permitió generar estrategias de prevención para la enseñanza de éste concepto. De ahí que, apoyado en la TSD de Brousseau se diseñó una secuencia didáctica que integrara el AGD Cabri Geometry II Plus en *complementariedad* con el artefacto articulado pantógrafo.

La perspectiva didáctica sobre el uso de diferentes materiales didácticos con el fin de proporcionar a los estudiantes una herramienta de aprendizaje tomó en consideración el *Enfoque Instrumental* de Verillon y Rabardel (1995, citados en Maschietto & Trouche, 2010). Por lo que cabe resaltar que el propósito de cada situación didáctica diseñada (involucrando la S.C.) no sólo fue el de promover conocimiento matemáticos respecto al concepto de homotecia, sino que también se logró involucrar o promover en los estudiantes un proceso de instrumentalización e instrumentación respecto a los artefactos involucrados; por lo que se logró promover las propiedades de la homotecia.

El orden en el que se presentaron las actividades en la *Secuencia Didáctica* diseñada obedeció a una alternancia, es decir, después de una actividad con Cabri II

Plus, se procedía a desarrollar otra con pantógrafo. Lo que permitió que los estudiantes alternen *medios* (dinámico o estático) al trabajar con estos artefactos, y estudien sus potencialidades o limitaciones. Por otra parte, ésta alternancia entre estos artefactos permitió el diseño de una secuencia corroborativa, es decir, cada actividad anterior brindó las herramientas necesarias (*procesos de instrumentalización* de los artefactos o propiedades de homotecia) para el desarrollo de una actividad consiguiente; lo que facilitó el diseño de una *secuencia a didáctica*, pues con ello se eliminó las participaciones del docente.

Al llevar a cabo la experimentación de la *Secuencia Didáctica* se pudo observar que el pantógrafo permitió promover las propiedades del concepto de homotecia, al igual que promovió éste concepto como un proceso de construcción geométrico generado por un punto que sigue una trayectoria asociada directamente con una ley establecida implícitamente en este artefacto. Por su parte, el AGD Cabri II Plus permitió promover un comportamiento dinámico de éste concepto, al igual que trabar con razones K tales que $0 < K < 1$.

De lo anterior, la *complementariedad* entre el pantógrafo y el AGD Cabri II Plus se manifiesta en los procesos de *instrumentalización* diferentes que se dan en cada artefacto, pues con el pantógrafo los estudiantes proceden a construir las imágenes homotéticas de la figura inicial teniendo en cuenta el manejo técnico de este artefacto (configuración, montaje y trazo), esto los llevará a concluir que el proceso desarrollado es inmediatamente asociado a una ley que se encuentra implícita en éste artefacto, la cual obliga a un punto a seguir una trayectoria que se asocia inmediatamente con las propiedades del concepto de homotecia; mientras que con el Cabri II Plus el proceso de *instrumentalización* se basa inmediatamente en un *proceso macro* incorporado dentro del software, en el cual se puede generar un comportamiento dinámico.

De ésta manera el *objetivo general* se puede ver evidenciado, pues el párrafo anterior muestra el papel de *complementariedad* mostrando que si se utilizan éstos artefactos dentro de un ambiente de aprendizaje, cada uno de ellos va a proporcionar

al estudiante un conocimiento diferente. Ya que el pantógrafo y el Cabri II Plus dejan ver distintas propiedades del concepto de homotecia.

De todo lo anterior, se puede afirmar que la *primera hipótesis* planteada al inicio de ésta investigación se cumplió, pues la complementariedad entre el pantógrafo y el AGD Cabri Geometry II Plus cuando se trabajan las RHC dentro de un ambiente de aprendizaje favoreció la conceptualización de las propiedades del concepto de homotecia.

En este sentido, acorde a la *segunda hipótesis* planteada en el inicio de ésta investigación, se puede decir que muchas de las estrategias de solución realizadas por los estudiantes cuando hicieron un *uso complementario* entre el pantógrafo y el AGD Cabri II Plus se adaptaron a las estrategias que fueron previstas en el análisis *a priori*, por lo que no se generaron *acciones* considerables.

En cuanto a la pregunta de investigación, el diseño de la *Secuencia Didáctica* basada en la TSD permitió darle respuesta, pues para el diseño de las situaciones se tuvo en cuenta las RHC, y las características que poseía cada artefacto, que le proporcionara al estudiante un conocimiento diferente; de modo que al *complementarse* hicieran posible conceptualizar las propiedades del concepto de homotecia.

Es importante resaltar que durante la experimentación de la *Secuencia Didáctica*, los estudiantes se mostraron motivados, participativos, animados y con ganas de desarrollar todas las actividades propuestas, haciendo uso de los dos tipos de artefactos trabajados en ésta investigación. Lo que lleva a pensar que, la utilización e incorporación de diferentes instrumentos de mediación en las aulas de clases promueven un aprendizaje significativo. Por lo que los docentes deberían implementarlos en el desarrollo de actividades en el aula.

Referente al diseño de la secuencia didáctica, se puede decir que cada situación fue pertinente, puesto que logró captar la atención de cada estudiante, ya que en el diseño

de cada una de ellas se involucró las RHC, lo que resultó ser satisfactorio y significativo para cada estudiante al resolverlas. Así mismo, el orden en el que se organizaron las tareas (con Cabri II Plus, con pantógrafo y viceversa) dentro de la secuencia, favoreció la adquisición de conocimientos que eran necesarios para desarrollar cada tarea.

Durante la experimentación de la secuencia se pudo evidenciar que la TSD jugó un papel importante en la construcción de conocimientos en los estudiantes, pues obligaba a los estudiantes a realizar *acciones* con los *medios* para así recibir *retroacciones* que les permitieran resolver las tareas. Así, la exploración del espacio mediante la interacción, manipulación y experimentación de los estudiantes con los artefactos les permitió construir, dibujar y reconocer por sí solos cuándo se está trabajando con un proceso de homotecia, y cuando no (CN).

La riqueza y el potencial de la *complementariedad* de estos artefactos en el aprendizaje de los estudiantes, se evidencia cuando reconocen y exponen algunas características asociadas a las propiedades del concepto de homotecia aun cuando no se les ha mencionado formalmente. En este sentido, no deberán dejarse de lado los artefactos tradicionales; ya que al trabajar los viejos (compás) en unión con los nuevos (Cabri Geometry II Plus) es posible construir conocimientos.

En ésta investigación quedaron los siguientes interrogantes:

- Puesto que en esta investigación se estudió la *complementariedad* de artefactos físicos y virtuales para la enseñanza de la homotecia en dos dimensiones, podría pensarse: ¿De qué manera la *complementariedad* de artefactos físicos y virtuales podrían favorecer el aprendizaje de la homotecia en tres dimensiones? ¿Qué artefactos se usarían?
- Debido a que en esta investigación se trabajó la enseñanza del concepto de homotecia involucrando la *complementariedad* de artefactos y las RHC, entonces, podría pensarse: ¿De qué manera la *complementariedad* de artefactos y las representaciones cotidianas de otras transformaciones

geométricas pueden generar el aprendizaje de otras transformaciones geométricas?

- Dado que este trabajo investigativo se centró en las producciones de los estudiantes y no en la labor del docente, ¿Cómo el docente puede trabajar el *uso complementario* empleando distintos artefactos, como *medio* para alcanzar un aprendizaje significativo?
- En el trabajo desarrollado se trabajó la *complementariedad* entre el AGD Cabri II Plus y el pantógrafo, para la enseñanza del concepto de homotecia, entonces podría preguntarse ¿Qué otro artefacto en *complementariedad* con el pantógrafo puede favorecer el aprendizaje del concepto de homotecia?

Finalmente, esta investigación enriquece las prácticas pedagógicas, en la medida en que se muestra que es posible incorporar un nuevo artefacto al aula de clases, sin quitar protagonismo a los tradicionales, sino que al trabajarlos en conjunto en complementariedad, favorecen la adquisición de conocimiento matemático.

Así mismo, el desarrollo de esta investigación permitió dar protagonismo al pantógrafo, un artefacto articulado que es poco conocido, pero que sirvió para promover el estudio del concepto de homotecia. Igualmente, se dio evidencia de la existencia de artefactos que pueden ser llevados a las clases de matemáticas, los cuales deberán ser indagados e incorporados por el docente, con el fin de crear un ambiente más rico para el aprendizaje, proponiendo situaciones que no son comunes en las clases de matemáticas.

6. BIBLIOGRAFÍA

- Acosta, M. (2010). Enseñando transformaciones geométricas con software de geometría dinámica. *En Memorias del 11° Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (págs. 61-68). Bogotá, Colombia: ASOCOLME: Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMETRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRA_DINMICA_Asocolme2010.pdf.
- Alcalde, J. G. (2009). El pantógrafo del Museo Nacional de Ciencias Naturales. CSIC: una pieza singular del Patrimonio Histórico. *En: El naturalista en su siglo: homenaje a Mariano de la Paz Graells en CC aniversario de su nacimiento* (págs. 205-212). Instituto de Estudios Riojanos.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (págs. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Bartolini., & Maschietto. (2008). Machines as tools in teacher education. In D. Tirosh, & T. Wood (Eds.). *En The international handbook of mathematics teacher education, Tools and Processes in Mathematics Teacher Education*. (Vol. 2, págs. 183 - 208). Rotterdam: SensePublisher.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas* (Primera ed.). (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.
- Candía, & Galleguillos. (2011). Uso de herramientas interactivas en el aprendizaje de homotecias. *En XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife, Brasil*. Recuperado el 5 de Junio de 2014 de <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/files/conferences/1/schedConfs/1/papers/2662/submission/review/2662-7261-1-RV.pdf>.
- Cedillo, T. E. (Enero - Marzo de 2006). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Los sistemas algebraicos computarizados. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 11(28), 129 - 153.
- Chamorro, M. d. (2003). Herramientas de análisis en Didáctica de las Matemáticas. En M. del C. Chamorro (Coord.). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (págs. 69-94). Madrid, España: Pearson – Prentice Hall.
- Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. *En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 155-178). Barcelona, España: Horsori.

- Cynthia, M. (2007). Plan de clases para estudiar el concepto de: “homotecia”. En el marco del curso Metodología de la enseñanza II. (Departamento de matemáticas y C. de la computación). Universidad de Santiago de Chile. Recuperado de http://simcematematica.files.wordpress.com/2008/07/_4-2c2aa-medio-u2-homotecia-46.pdf .
- Del Castillo, A., & Montiel, G. (2009). ¿Artefacto o instrumento?. Esa es la pregunta. *En P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 22* (págs. 459-467). México: : Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. Ergos 07: Los hombres y las tec-nologías. En: <http://www.ergonomia.cl/eee/ergos07.html> .
- Douady, R. (1995). La Ingeniería Didáctica y la evolución de su relación con el conocimiento. *En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). Ingeniería didáctica en educación matemática* (págs. 61-96). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Faria, E. (2006). Ingeniería didáctica. En cuadernos de investigación y formación en educación matemática. Universidad de Costa Rica.
- Fernández-Mosquera, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como Lugar Geométrico desde lo Puntual y lo Global integrando Cabri Géomètre II Plus. (Tesis de Maestría en Educación Matemática no publicada)*. Universidad del Valle, Cali, Colombia: Recuperado de: <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/4643> .
- García, P., & Vargas, J. (2014). El uso de manipulables para propiciar la comprensión del significado de ecuaciones lineales y cuadráticas, y de sistemas de ecuaciones lineales en la escuela secundaria. *En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 27* (págs. 879-887). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Gonzales, Y., & Arias, I. (2017).). *Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica. (Tesis de pregrado no publicada)*. Universidad Nacional Costa Rica, Heredia, Costa Rica. Recuperado el 19 de Marzo del 2017 en <http://www.matematica.una.ac.cr/index.php/documentacion-digital/category/12-tesis?download=153:gonzalez-y-y-arias-i-2016&start=20>.
- González, J. (2009). *Nuevos procesos de transferencia mediante tóner y su aplicación al grabado calcográfico. (Tesis Doctoral no publicada)*. Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.
- Gonzalo, Z., Vera, A., Rojano, T., & Ursini, S. (2000). Enseñanza de la matemática con tecnología: Geometría dinámica. México: Secretaria de Educación Pública.

- Hernández, B., & Bastidas, R. (2014). *Uso complementario de materiales manipulativos y del ambiente de geometría dinámica Cabri 3D en la comprensión de las propiedades geométricas del cubo. (Tesis de pregrado no publicada)*. Universidad de Nariño, Pasto, Colombia. Recuperado el 3 de diciembre de 2014 de <http://sired.udenar.edu.co/275/>.
- Hill, R. (1920). *Ecology: Charting quadrats with a pantograph*. (págs 270-273). Recuperado de: <http://library.eri.nau.edu/gsd/collect/erilibra/archives/HASH6026.dir/doc.pdf>.
- Hoyos, V. (2006). Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 31-42.
- Hoyos, V., Capponi, B., & Génèves, B. (1998). Simulation of drawing machines on Cabri-II and its dual algebraic symbolization..., en Proceedings of CERME1, <<http://www.find.uniosnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings.html>>. Alemania: Universidad de Osnabrueck.
- Ibarguen, Y., & Realpe, J. (2012). *La enseñanza de la simetría axial a partir de la complementariedad de artefactos. (Tesis de pregrado no publicada)*. Universidad del Valle, Cali, Colombia. Recuperado el 28 de Enero de 2015 en <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/handle/10893/3858>.
- Iranzo, N., & Fortuny, J. M. (2009). La influencia conjunta del uso de GeoGebra y lápiz y papel en la adquisición de competencias del alumnado. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(3), 433-446.
- Kemp, M. (1990). *The Science of Art: Optical themes in western art from Brunelleschi to Seurat*. (págs 165-220). New Haven, CT: Yale University Press.
- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and learning geometry with technology. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 275-304.
- Lukič, A., & Hübscher, K. (2003). An outline of the history of radiotherapy at the Institute of Oncology in Ljubljana from its beginning till 1980s. *Radiol*, 37(4), 257-66.
- Mariotti, M., Bartolini, B., Boero, P., Ferri, F., & Garuti, R. (1997). Approaching Geometry Theorems in Contexts: From History and Epistemology to Cognition. *en Proc. XXI PME Int. Conf., 1* (págs. 180-195). Finlandia: Lathi.
- Maschietto, M., & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *En The International Journal on Mathematical Education, ZDM, Zentralblatt für Didaktik*

- der Mathematik: The role of resources and technology in mathematics education*, 42(1), 33-47.
- Mateus, L., Fajardo, N., Guataquira, R., Gutiérrez, A., Velásquez, L. C., & Rodríguez, D. (2009). *Propuesta metodológica para la enseñanza de la geometría a través de la papiroflexia*. Taller realizado en 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (8 a 10 de octubre 2009). Pasto, Colombia. .
- Mora, A., & Lucena, A. (2010). Conceptualización de la traslación con la mediación del programa Cabri ELEM. Recuperado el 5 de Octubre del 2016 de <http://repositorio.uis.edu.co/jspui/bitstream/123456789/7161/2/133190.pdf> .
- Morera, L., Fortuny, J. M., & Planas, N. (2012). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías en un entorno colaborativo y tecnológico. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(1), 143–154.
- Moriena, S. (2006). *Reseña histórica y aplicaciones de las transformaciones geométricas del plano*. Facultad de Humanidades y Ciencias Universidad Nacional del Litoral. Prov. de Santa Fe (Argentina).
- Mrabet, S. (2012). *Les axiomatiques autour du théorème de Thalès dans les programmes et les manuels tunisiens*. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012 (GT3, págs. 480–491). <http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012>.
- Nacional, M. d. (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. Serie Lineamientos*. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Nacional, M. d. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas: Potenciar el pensamiento matemático: ¡un reto escolar!* . Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia.
- Obando, G., Vasco, C. E., & Arboleda, L. C. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 17(1), 59-81.
- Ortíz, J., & Angulo, J. (2010). La homotecia, un tema casi olvidado en la enseñanza de la educación matemática en Buenaventura: una propuesta desde el punto de vista algebraico. Comunicación presentada en 11º Encuentro Colombiano Matemática Educativa (7 al 9 de Octubre de 2010). Bogotá, Colombia.
- Pérez, L. (2013). Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la homotecia utilizando CabriLM como medio. En Perry, P. (Ed.), *Memorias 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (págs. 75-77). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.
- Puertas, M. (1994). *Euclides Elementos: Libros V – IX*. Madrid: Gredos.

- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (M. Acosta, Trad.) Bucaramanga, Colombia: Universidad Industrial de Santander, Colombia.
- Ruíz, E. F., & Lupiáñez, J. L. (2010). Empleo de la Geometría Dinámica como apoyo en actividades de lápiz y papel, para la comprensión de los tópicos de razón y proporción. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 20, 207-234.
- Sarama, J., & Clements, D. (2016). Physical and Virtual Manipulatives: What Is “Concrete”? *P. S. Moyer-Packenham (Ed.), International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives*. 7, págs. 71-93. series Mathematics Education in the Digital Era. Springer International Publishing.
- Socas, M. (2000). Dificultades, Obstáculos y Errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. *En L. Rico (Coord.), La educación matemática en la enseñanza secundaria* (págs. 125-154). Barcelona: Editorial Horsori.
- Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. *En D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche, The Didactical Challenge of Symbolic Calculators* (págs. 137- 162). New York, NY: Springer.
- Uicab, G. (2009). Materiales tangibles. Su influencia en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *En Lestón, Patricia (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 22, págs. 1007-1013. México DF, México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

7. ANEXOS

Anexo No. 1. Secuencia Cero: Desarrollo



UNIVERSIDAD DE NARIÑO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
ACTIVIDADES DE SECUENCIA CERO – GRADO NOVENO

Fecha: _____

Nombres: _____

Institución: _____

Primera actividad: Emparejamiento ¿Semejanza o congruencia?

Vamos a interactuar por primera vez con el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) *Cabri II Plus*. Para ello iremos a la carpeta denominada "**Actividades SC**", y abriremos el archivo "**Actividad 1.fig**". Al abrir el archivo encontrarás un panorama compuesto por casillas e imágenes. Tu tarea aquí será ubicar cada una de las imágenes que se encuentran al pie de las casillas en cada casilla, identificando cuál de ellas es la imagen semejante, o congruente de la imagen patrón dada.

El AGD jugará el papel de juez, pues te permitirá saber si tu respuesta es la correcta, permitiéndote retroalimentar tus ideas.

Después de realizar esta actividad responde:

- ¿Cuál es la diferencia entre semejanza y congruencia?

Segunda actividad: Semejanza a diferentes figuras geométricas

Ahora, con ayuda del AGD construiremos las imágenes semejantes a diferentes *figuras geométricas*, con distintas *razones* (valores escalares). Para ello, abriremos el archivo denominado "**Actividad 2.fig**" que se encuentra en la carpeta "**Actividades SC**".

□

Tercera actividad: De Semejanza a Homotecia

Ahora conoceremos en forma clara y precisa dos conceptos relacionados:

Semejanza: Dos figuras geométricas son semejantes si tienen la misma forma pero sus tamaños son diferentes, es decir, cada uno de los lados de una figura geométrica es multiplicado por un factor o escala $K \in \mathbb{R}^+$. Por ejemplo, dos mapas a escalas distintas son semejantes, pues la forma del contenido no cambia, pero sí su tamaño.

Homotecia:

Definición puntual: Se llama homotecia de centro O y razón K (distinto de cero) a la transformación geométrica que hace corresponder a un punto A otro A' , alineado A con O , tal que $OA' = K + OA$. Si $K > 0$ se llama homotecia directa, y si $K < 0$ se llama homotecia inversa.

Definición General: Una homotecia es una transformación afín que, a partir de un punto fijo, multiplica todas las distancias por una misma razón. En general una homotecia de razón diferente de uno (1) deja un único punto fijo, llamado centro de homotecia. En sí: sea AB un segmento, entonces $AB' = AB * K$.

Así, dada una semejanza de un cuadrado de lado cuatro (4), con razón $(R = \frac{1}{2})$. Deberás adaptar el concepto de homotecia a esta. ¿Cómo harías esto? Realiza tu proceso con ayuda del AGD en un nuevo archivo.

Después, procede a responder:

- ¿Qué conclusión sacas al respecto?

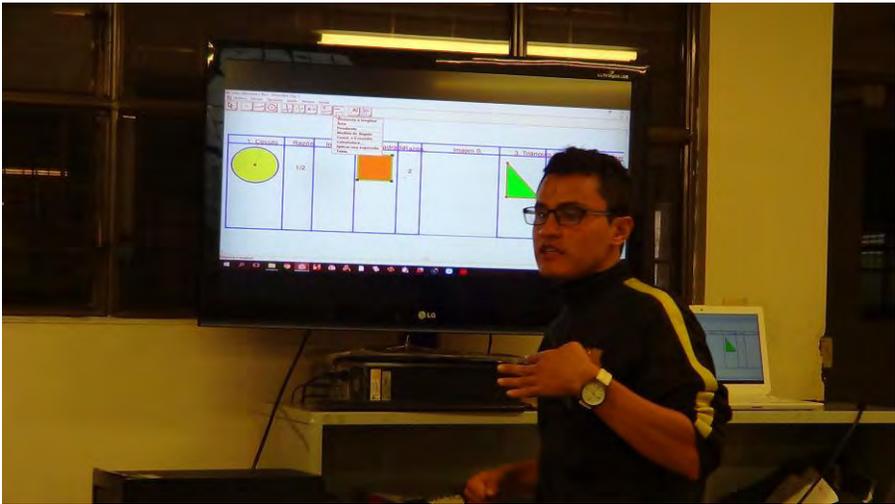
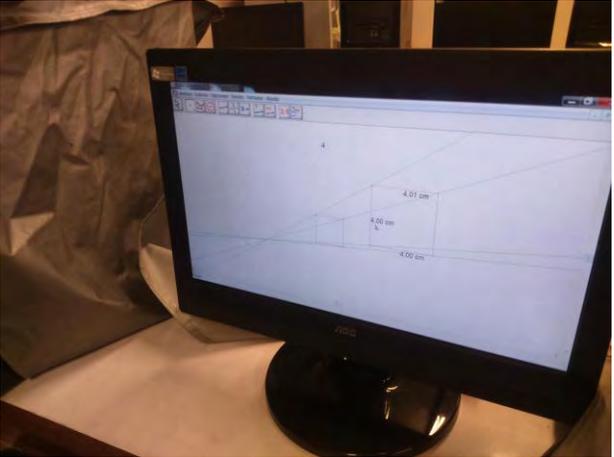
Cuarta actividad: Algunas propiedades de la homotecia.

Para resolver la actividad número cuatro procederemos a abrir el archivo denominado "**Actividad 4.fig**", ubicado en la carpeta "**Actividades SC**".

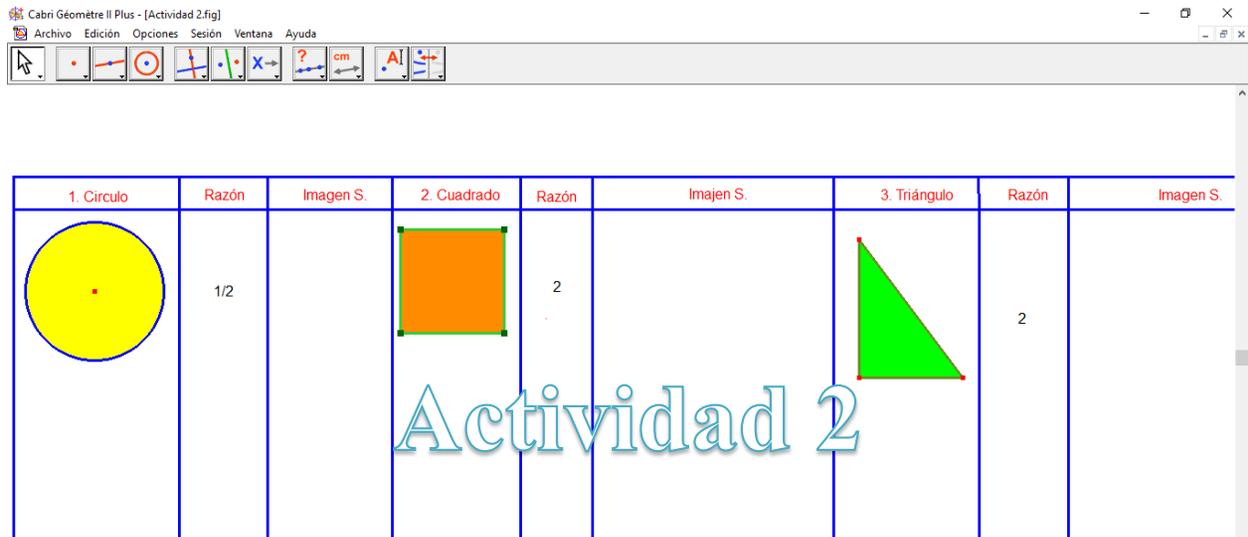
Ahora, sigue los pasos:

- a) Vamos a investigar que sucede con las figuras geométricas que se presentan. Para ello veremos qué vértices son móviles. ¿Cuáles figuras tienen sus vértices móviles? ¿Qué sucede cuando mueves un vértice de estos? ¿Por qué crees que sucede esto?
- b) Encuentra los centros de homotecia de las figuras que se presentan en pantalla. Ahora responde: ¿Cómo hiciste este proceso? ¿Qué cualidad de la homotecia consideraste? ¿Podrías encontrar las razones de las homotecias?
- c) Al realizar el movimiento de los vértices en las figuras de color amarillo, crees que la razón varía: ¿qué se mantiene variante, e invariante?
- d) Cuáles de ellas son homotecias inversas y directas.

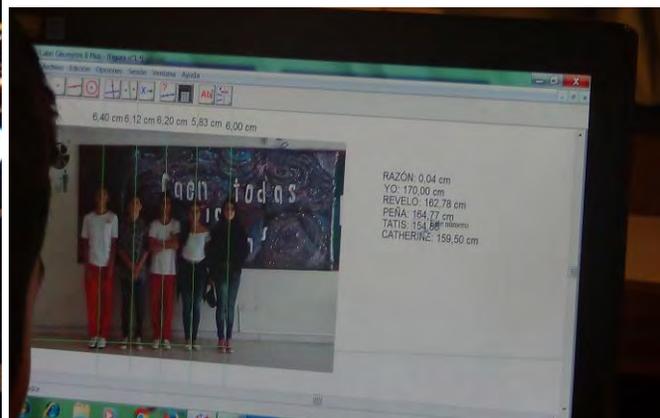
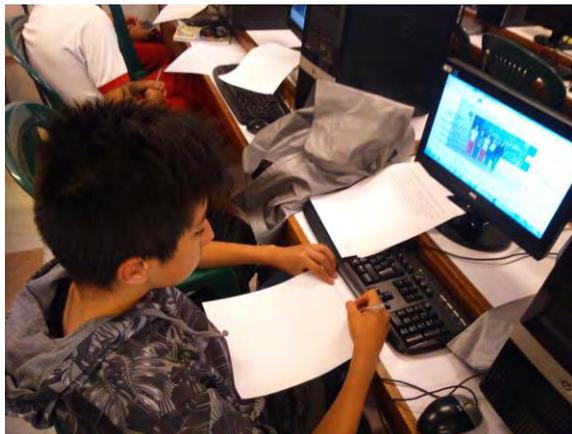
Registro fotográfico de Secuencia Cero:



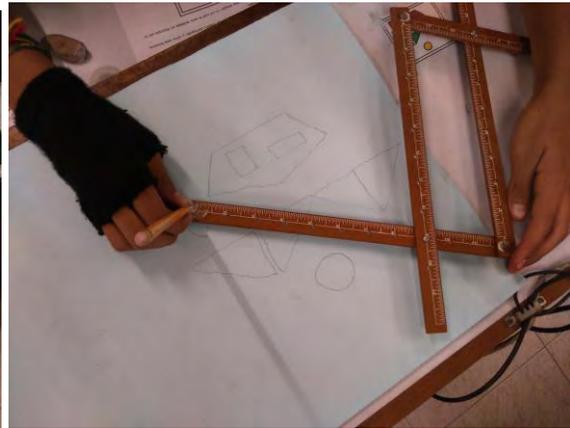
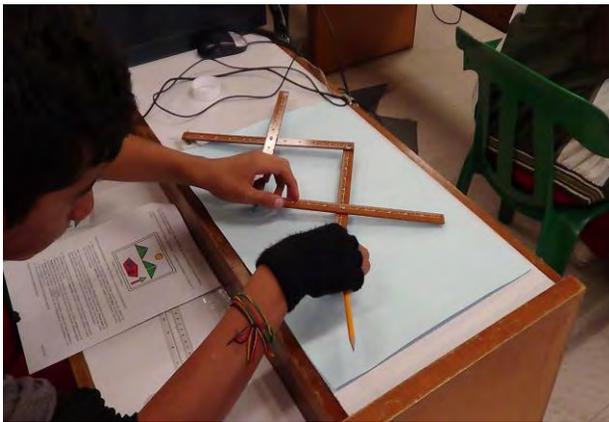
Imágenes de actividades planteadas en los archivos:



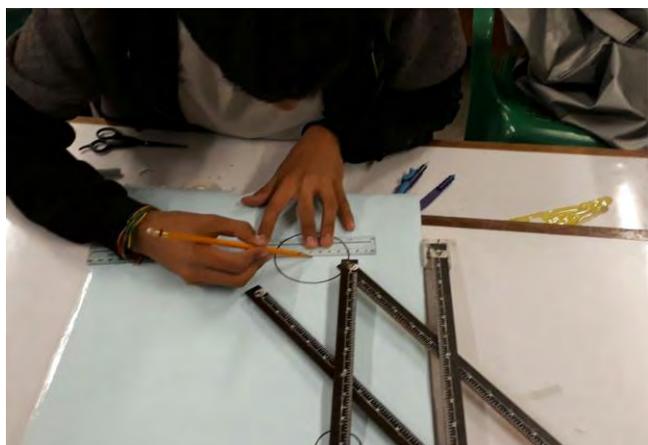
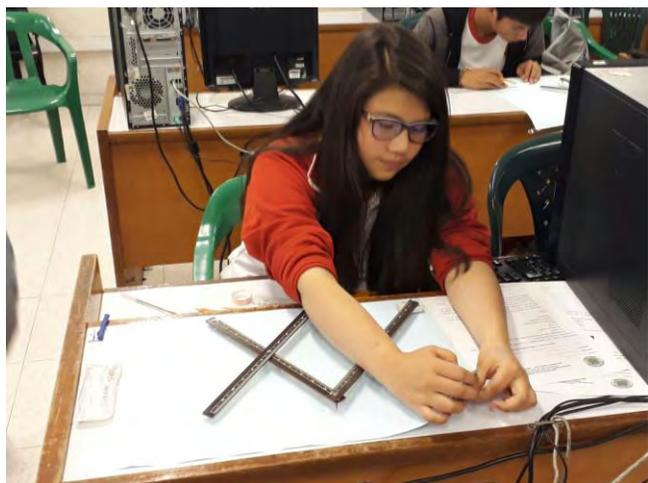
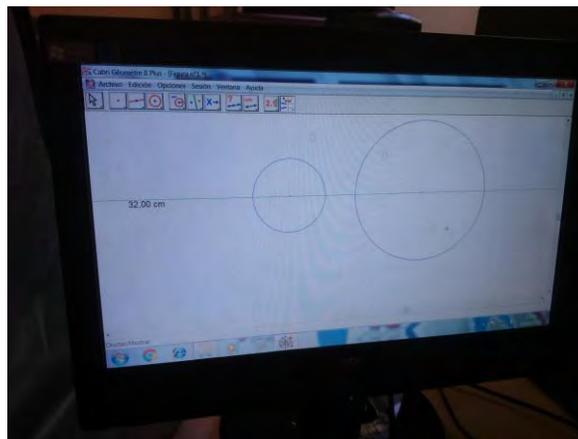
Anexo No. 2. Primera sesión: Situación Didáctica No. 1: Registro fotográfico del desarrollo



Anexo No. 3. Segunda sesión: *Situación Didáctica No. 2: Registro fotográfico empelando pantógrafo*



Anexo No. 4. Tercera sesión: Situaciones Didácticas No. 3 y No. 4: Registro fotográfico haciendo uso del material virtual Cabri II Plus, pantógrafo y otros materiales físicos



Anexo No. 6. Producciones de los estudiantes - Situación No. 1.



UNIVERSIDAD DE NARIÑO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SECUENCIA DIDÁCTICA – GRADO NOVENO

Fecha: _____

Nombres: _____

Institución: _____

Situación No.1: Foto con tus compañeros

En esta actividad vas a averiguar cuánto mide cada uno de tus compañeros, para ello usarás: una cámara digital, un computador, el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Cabri II plus, y una cinta para medir.

Así pues, necesitarás tomarte una fotografía (haciendo uso de la cámara con el trípode nivelado) con tus compañeros, de tal manera que: se encuentren alineados frente al lente de la cámara, en un lugar plano, y que su postura sea lo más perpendicularmente posible a ese lugar: al igual como si se encontrasen comparando sus alturas (Ver Foto 1, a manera de ejemplo). De no hacerse así, habrá problemas con la obtención de datos, y tendrán que tomarse otra foto nuevamente.



Foto 1: Ejemplo de fotografía con tus compañeros

Ahora, sigue los siguientes pasos:

Página 1 de 3

- Comparte esta fotografía con tus compañeros en cada uno de los computadores asignados, guárdala en un lugar donde te sea fácil localizarla.
- Con la herramienta **Imagen de fondo** de Cabri, anexa esta imagen al software: dando clic derecho sobre cualquier parte en la pantalla de la ventana del AGD, luego selecciona tú fotografía.

Nota: Deberás bajar el tamaño o pixeles de tú imagen con ayuda del software *Paint*; de lo contrario tú imagen será lo suficientemente grande y no podrás ejercer dominio sobre ella con el AGD. Se recomienda un *Porcentaje* Horizontal y vertical de 100.

- c) Considérate a ti como modelo de referencia. Es decir, deberás conocer tú altura real en centímetros. Si no la conoces, pídele ayuda a tú profesor para que con ayuda de la "cinta para medida" puedan conocerla (maneja discreción sobre éste dato con tus compañeros). Ahora, para dar respuesta a la pregunta del problema, deberás averiguar tú altura en la fotografía. Entonces:

Altura en la fotografía:

- Construye una *Recta* que pase por el punto de apoyo (en la fotografía) a ti y a todos tus compañeros.
- Construye un *Punto sobre la Recta*, tal que esté lo más posiblemente centrado a tus pies (en la fotografía), y llámalo *A*.
- Con la herramienta *Recta Perpendicular* de Cabri, procede a construir una recta perpendicular a la recta anteriormente construida, tal que ésta pase por el punto *A*.
- Sobre ésta *Recta Perpendicular* vas a definir un punto que delimitará tú altura en la fotografía. Y lo denominarás *B*.
- El segmento *AB* define tú altura en la fotografía. Para saber cuál es el valor de ésta altura, con la herramienta *Distancia o Longitud*, procedes a calcularla: señalando el punto *A*, y luego el punto *B*. Esta altura estará dada en centímetros.

- d) Ahora, deberás calcular la *Razón (R)* de homotecia impuesta en la fotografía. Para ello, tendrás que considerar la fórmula matemática de razón:

$$R = \frac{\text{Altura en la fotografía}}{\text{Altura real}}$$

Página 2 de 3

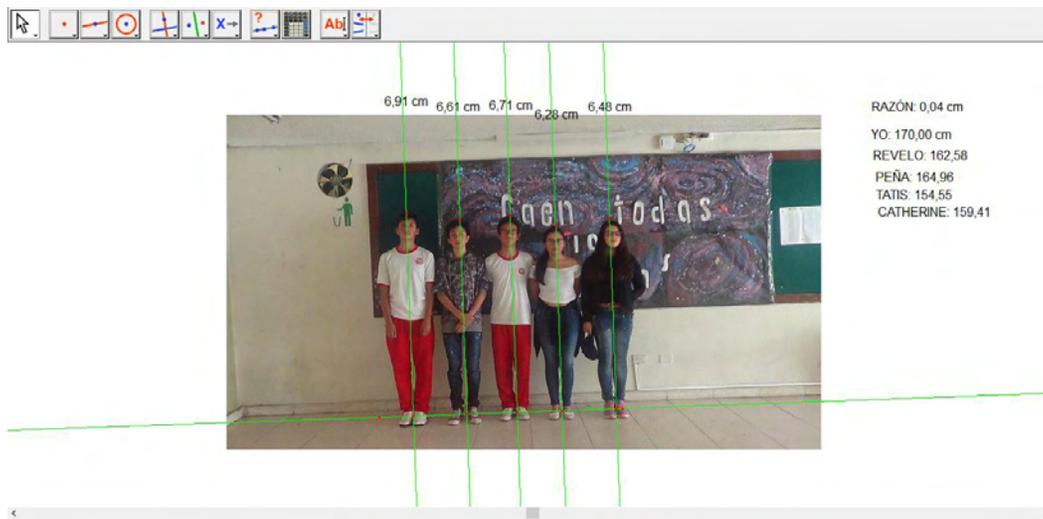
Utiliza la herramienta *Calculadora* del AGD, y arrastra éste resultado a algún lado de la ventana del Software (llámalo *R*).

- e) Para calcular las medidas reales de tus compañeros necesitaras considerar la fórmula matemática de homotecia: $OA' = K * OA$ donde llevándola a nuestro contexto: *K* es *R* (Constante), *OA* será la *Altura real*, y *OA'* será la *Altura en la fotografía*. ¿Qué deberás hacer ahora para calcular la altura real de tus compañeros? ¿Cuánto vale cada una de ellas?
- f) ¿Qué conclusiones consideras importantes al respecto de éste procedimiento?
- g) ¿Crees que es posible encontrar homotecias en otros contextos? ¿Cuáles serían?
-

Foto grupal de los estudiantes, trabajada en la actividad con el AGD Cabri II Plus



Trabajo realizado por estudiante en Cabri II Plus, para solucionar la actividad



1.

F. Se puede considerar la importancia y presencia de la homotecia en la cotidianidad.
G. Se podría usar en arquitectura, en demás fotos y mapas con uso de escala.

2.

f) Es importante identificar lo que es una homotecia para saber la altura real aunque al principio saldra la altura en la foto.
g) se podria encontrar una homotecia en otro tipo de medidas como la distancia que hay.

3.

Camio Revelo
f- que es practicamente "exacta" pero en realidad se para o aumenta pero eso si no es culpa de la aplicacion si no de la exactitud del ser humano
g- si es posible por ejemplo encontrar medidas mas grandes como la de un edificio, ciudad, etc.

4.

$K = \frac{\text{Altura foto}}{\text{Alt-Real}} \rightarrow$ Para calcular la altura de mis compañeros despejaremos la formula de la siguiente manera
Altura real \rightarrow Desconocida
Altura foto \rightarrow Conocida
Constantes \rightarrow Conocido.
Alexa \rightarrow 1.58 Revelo \rightarrow 1.63

$\boxed{OA'} = K \times OA$
 \downarrow
Despejar.

- Es algo inexacto, pero tiende a ser un proceso del cual varia entre que tan exacta sea su composicion.
- Arquitectura \rightarrow Se tendrian bases claras para construir maquetas y formas exactas.

5.

f) Que esto permite el cálculo de estaturas de cada persona, pero esto depende mucho de la persona que lo estatura, y tiene un ~~riesgo~~ margen de error que depende del instrumento. Se pueden encontrar en otros contextos como el medir distancias entre países o longitudes de un edificio.

Anexo No. 7. Producciones de los estudiantes – Situación No. 2.



UNIVERSIDAD DE NARIÑO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SECUENCIA DIDÁCTICA – GRADO NOVENO

Fecha: _____
Nombres: _____
Institución: _____

Situación No.2: Uso del pantógrafo

Ahora haremos uso del Pantógrafo (Ver Foto 2). Que es un artefacto utilizado para realizar dibujos a escala, es decir, agrandar o reducir un dibujo. Para estudiar su comportamiento (según sus configuraciones), realizaremos la siguiente actividad. Mientras experimentamos las potencialidades o limitaciones que nos ofrece éste artefacto.

Empezaremos por reconocer sus las partes.

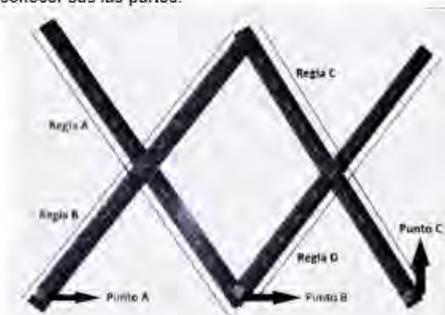


Foto 2: Pantógrafo.

El pantógrafo consta de cuatro varillas o reglas de madera articuladas, reglas: *A, B, C* y *D*. Donde cada una de ellas se encuentra dividida en forma semejante, y contiene orificios métricamente ubicados, a los cuales es asociado un número entero. Las configuraciones del Pantógrafo se realizan articulando las reglas: *A* con *B*, y *C* con *D*, mediante tornillos que asocian por parejas a dichos números enteros, en ambos pares de reglas.

El punto *A* es conocido como **Punto Base** o de apoyo (es articulado), el punto *B* contiene la **Aguja Guía**, la cual deberá ser guiada sobre el perímetro o contorno del dibujo o figura que se quiere ampliar o reducir (en otro caso). Por último, en el punto *C* deberá ubicarse un lápiz, que ejercerá el trazo o el resultado esperado.

Página 1 de 3

Ahora que hemos identificado las partes esenciales de nuestro pantógrafo, y cómo éste funciona, realizaremos la siguiente actividad.

Consideraremos la siguiente imagen (Ver Imagen 1). La cual te será facilitada en fotocopia por tú docente.

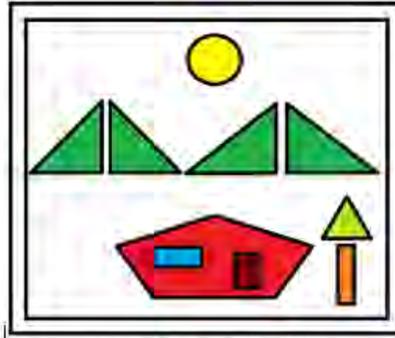


Imagen 1: Paisaje Geométrico

Ahora con ayuda del pantógrafo y el Paisaje Geométrico, realizaremos los siguientes pasos:

- Sitúa tu pantógrafo sobre una mesa donde puedas trabajar a gusto. Para ello, primero con ayuda de cinta asegura la goma de borrar, donde deberá ir el Punto Base o de apoyo (Punto A) sobre la mesa, tal que la Aguja Guía y el punto C puedan moverse libremente, ejerciendo trazo sobre todo el espacio.

Nota: Considera el hecho de que deberás realizar diferentes configuraciones a tu pantógrafo, es decir, en cada proceso deberás retirar tu pantógrafo del sitio sin mover el Punto Base (la goma de borrar). Igualmente ten en cuenta que el clavo que hace parte de este punto, deberá regresar al mismo lugar, de lo contrario tus resultados podrían verse afectados.

- Ahora, en tu espacio de trabajo deberás ubicar y asegurar con cinta la hoja de cartulina que te ha brindado tu profesor, tal que la Aguja Guía y el punto C (donde irá ubicado el lápiz) puedan ejercer su trazo o recorrido.
- Ubica la imagen del Paisaje Geométrico que se te ha brindado en dicha cartulina, tal que la Aguja Guía del pantógrafo pueda ejercer recorrido sobre el perímetro de las diferentes figuras geométricas que se presentan en el paisaje.
- Asegura muy bien tu lápiz en el punto C de tu pantógrafo, y realiza tres trazos diferentes e independientes del Paisaje Geométrico con las configuraciones correspondientes a los números enteros: 9, 6 y 3.
- Ahora, procede a responder las siguientes preguntas:

□

Preguntas sobre el procedimiento anterior:

Página 2 de 3

- Dado que la imagen del Paisaje Geométrico se amplió durante los tres procesos, ¿Cuál fue la razón (factor de homotecia) que posibilitó esta ampliación en cada proceso? ¿Cómo encuentras este valor?
- ¿Es posible realizar un proceso inverso con tu pantógrafo, es decir, de reducción? ¿Cómo harías esto?
- ¿Por qué crees que ocurre la ampliación o reducción de las figuras con este artefacto?
- ¿Existe alguna relación matemática entre el triángulo definido en "Fotografía 1: Pantógrafo" por el Punto A, el punto definido por la intersección de las reglas A y B, y el Punto B, y el triángulo definido por las reglas B y C?
- Crees que los procesos realizados con este artefacto se relacionan con la definición de homotecia anteriormente dada. ¿Por qué? ¿Cuáles crees que serán las condiciones necesarias para saber cuándo estamos hablando de un proceso de homotecia?
- Crees que los ángulos de las figuras geométricas se vieron afectados por esta transformación. ¿Por qué no, o por qué sí?
- ¿Qué puedes intuir respecto a la imagen homotética de un segmento, y en general de una recta?
- ¿Cómo crees que se comporte la homotecia cuando su Razón (K) se encuentra entre los intervalos: $0 < K < 1$ y $K > 1$?

Ahora realizaremos un último ejercicio, para ello utiliza el respaldo del pliego de cartulina que se te ha facilitado:

Un dibujante no tan experto, necesita ampliar un dibujo (ver Imagen 2: Entrada de la Plaza del Carnaval de la Ciudad de Pasto) por un factor de razón 4, pero él no sabe cómo hacer esto. Podrías tú explicarle cómo él realizaría esto. Argumenta tu respuesta, y realiza el procedimiento. ¿Cómo podrías generalizar este resultado para razones pares con el uso de tu pantógrafo?



Imagen 2: Entrada de la Plaza del Carnaval de la Ciudad de Pasto

1.

1) EL FACTOR DE HOMOTECIA, CUANDO VALE 1, ES A, CUANDO VALE 2, ES B Y CUANDO VALE 3 ES C.

2) NO, PORQUE PARA ESTO SE NECESITAN VALORES MENORES DE 1.

3) PORQUE CADA VEZ QUE SE AUMENTA EL VALOR, AUMENTA LA DISTANCIA DE LA GUÍA AL PUNTO.

4) ESTOS TRIÁNGULOS SON SEMEJANTES, YA QUE COMPARTEN LA RECTA B Y LAS RECTAS DE A AL PUNTO B Y DE C AL PUNTO C SON PARALELAS.

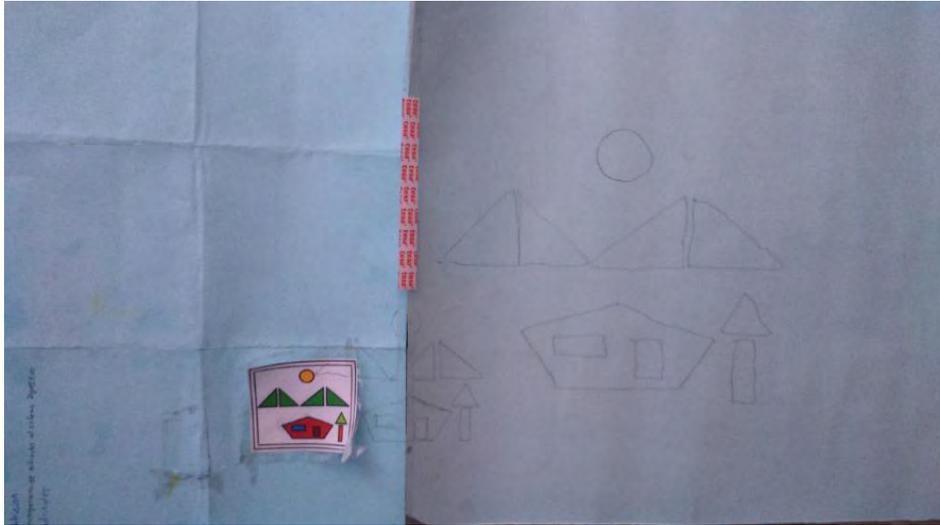
5) PORQUE COMPARTEN LOS CONCEPTOS DE PUNTO DE ORIGEN Y SEGÚN UNA FIGURA Y UNA RAZÓN SE FORMA UNA FIGURA SEMEJANTE A LA DADA.

6) NO, PORQUE ES UNA HOMOTECIA, ES LA MISMA FIGURA, PERO DIFERENTE TAMAÑO.

7) DEPENDIENDO DE LA FIGURA DADA Y LA RAZÓN AUMENTA O REDUCE SU TAMAÑO.

8) EN $0 < k < 1$, LA HOMOTECIA REDUCE LA FIGURA Y EN $k > 1$ AUMENTA.

Trabajo realizado con el pantógrafo



2.

1) La Razón por la cual se amplió el Paisaje Geométrico en cada proceso fue por su semejanza y al partir de un punto, la imagen tiende a ampliarse y cambiar de lugar.

2) Yo diría que si es posible de que se reduzca dependiendo de las medidas del pantógrafo, es decir que entre menor sea el número, la imagen sería más pequeña, pero hasta cierto punto.

3) La Ampliación y la reducción de la figura se da por la configuración que se tomó en el pantógrafo y de acuerdo a este disminuye o amplía la figura.

4) Existe una relación matemática ya que se opera por el lado es decir la fórmula de la homotecia.

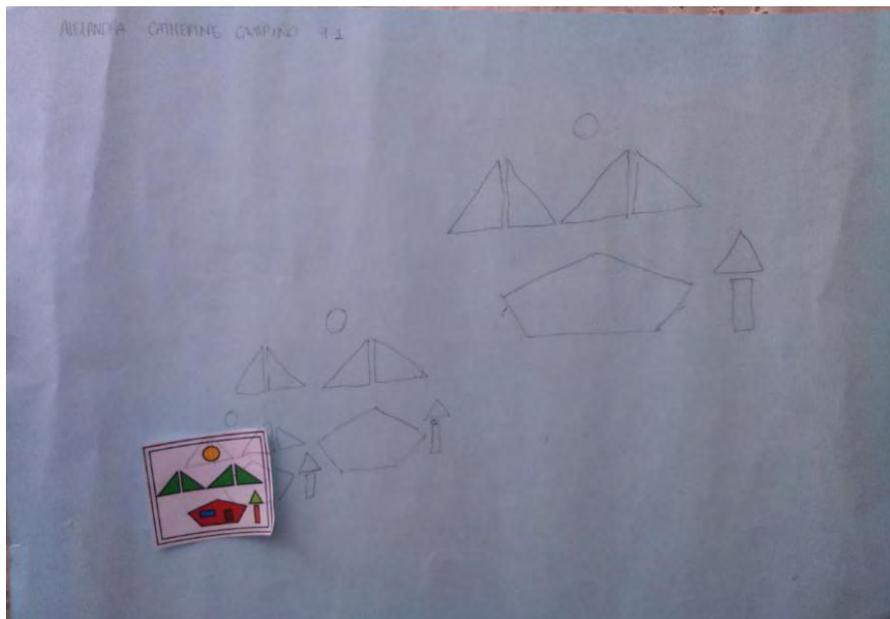
5) Los procesos realizados con el artefacto se relacionan con la definición de homotecia, ya que en la figura original se ve reflejada la misma a diferencia de que tiende a ampliar o disminuir su tamaño, las condiciones necesarias sería que la figura debe ser semejante y además tiene un punto de origen.

6) Los ángulos de las figuras geométricas no se vieron afectados ya que la figura amplía más no cambia de forma.

7)

8) La homotecia se comportaría según si $0 < k < 1$ o $1 < k < 1$

Trabajo realizado con el pantógrafo



3.

Configuración 3 → 1,5 Configuraciones ~~4~~ → ~~4~~ → ~~4~~

1) → Si usamos el pantógrafo, la razón se encuentra según la posición del tornillo en el punto a y b, c y d. Con la fórmula $\frac{d'}{d} = K \rightarrow \frac{2+1}{12+2} = 1,66 \rightarrow 2 \rightarrow K \rightarrow$ Configuración 6.

2) No creo que se pueda una reducción, debido a que al obtener valores positivos, la figura siempre van a aumentar con respecto a la figura de origen.

3) debido a que el pantógrafo, al cambiar de distancia, del lápiz, se amplían las rectas trazadas y por ende, sucederá una ampliación.

4) NS/NR

5- Las condiciones son que ambas figuras sean semejantes para que por ello exista una ampliación.

6- No, porque si hablamos de un proceso de homotecia, los ángulos no se alteran, únicamente cambia el tamaño.

7- Pues que su dominio se altera, y es dependiente a la original.

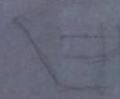
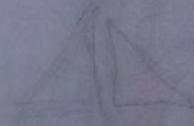
8- La figura homotética se reducirá, puesto que la razón es: $K > 0$ pero $K < 1$.

b → Requeriría un pantógrafo en el punto d, por ende y se utilizaría debido a que este funciona para facilitar el proceso de homotecia sin necesidad de trazar rectas.

Trabajo realizado con el pantógrafo

2019
2020
Tema Sekolah Dasar

2019
2020



Anexo No. 8. Producciones de los estudiantes – Situación No. 3.



UNIVERSIDAD DE NARIÑO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SECUENCIA DIDÁCTICA – GRADO NOVENO

Fecha: _____

Nombres: _____

Institución: _____

Situación No.3: El eclipse de sol

Un estudiante de primer semestre de astronomía deberá realizar un diseño preciso sobre un eclipse solar (Ver Imagen 3: Eclipse de sol) dado en un Planeta X. El diseño deberá construirse a una razón

$$R = \frac{1}{2 \times 10^9}$$



Imagen 3: Eclipse de sol

Su profesor le ha facilitado los siguientes datos:

Radio del Planeta X: 4000 Km (4×10^3 cm)

Radio de su Luna: 2000 Km (2×10^3 cm)

Radio de su Sol: 16000 Km ($1,6 \times 10^4$ cm)

Distancia del Planeta X a su Sol: 64000 Km ($6,4 \times 10^4$ cm)

No obstante, el estudiante no sabe cómo realizar esta tarea. Si se considera a los planetas como esferas perfectas ¿podrías tú darle pautas para que él realice su tarea?

Página 1 de 2

Entonces responde las siguientes preguntas:

- ¿Crees que este ejercicio recae en una aplicación del concepto de homotecia? ¿Por qué si, o por qué no? Justifica. En caso afirmativo, identifica las partes que conforman esta homotecia.
- Realiza la representación de este eclipse solar con la ayuda del AGD Cabri II Plus. Describe tu proceso. Puedes utilizar pantallazos.
- ¿Qué conclusión puedes sacar al respecto?

1.

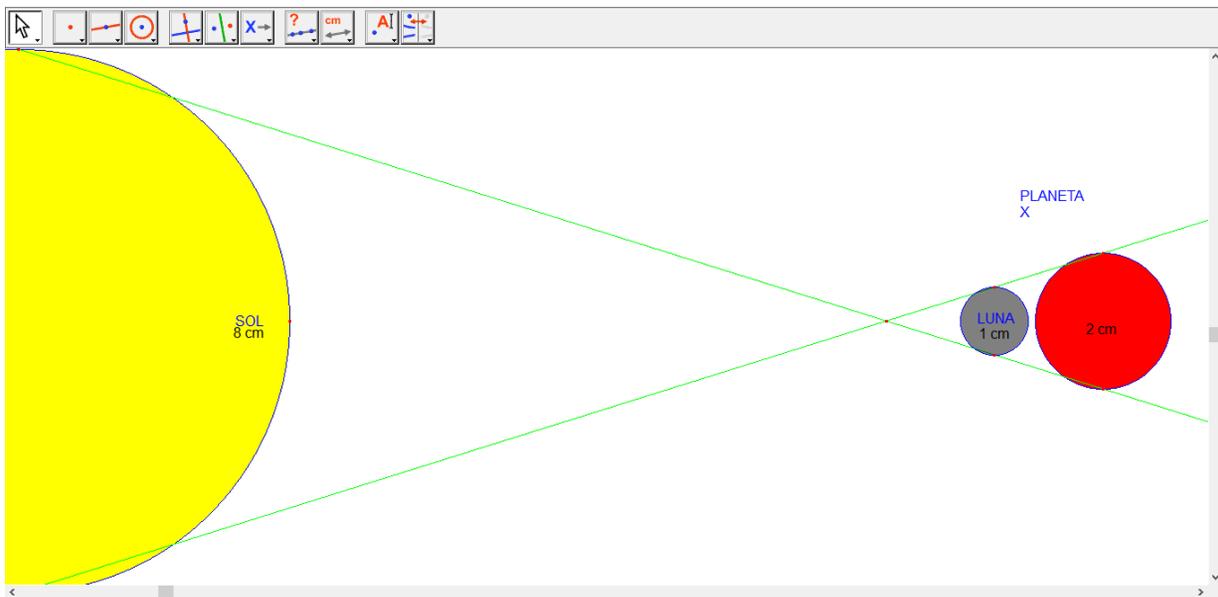
PLANETA X = 4 \Rightarrow 2 $4 \times 10^8 \Rightarrow$ 2
RADIO LUNA = 2 \Rightarrow 1 $2 \times 10^8 \Rightarrow$ 1
SOL = 16 \Rightarrow 8 $16 \times 10^8 \Rightarrow$ 8
DISTANCIA = 64 \Rightarrow 32 $64 \times 10^8 \Rightarrow$ 32

PARA PLANETA X:

A) SÍ, PORQUE TODOS LOS ELEMENTOS SON CIRCULOS PERFECTOS Y SE DIFERENCIAN EN SU TAMAÑO CON SU RESPECTIVA RAZÓN.

B) PRIMERO, PUSE UN PUNTO EN EL LADO IZQUIERDO QUE SERÍA EL CENTRO DEL SOL, LUEGO TOMÉ LA DISTANCIA DESDE EL PUNTO HASTA OTRO (32 CM), QUE SERÍA EL CENTRO DEL PLANETA X, LUEGO MARQUÉ EL PUNTO DE INTERSECCIÓN Y SAQUÉ EL PUNTO MEDIO DE ESTE AL LIMITE DEL PLANETA X. ESTE PUNTO MARCARÍA EL LIMITE DE LA LUNA.

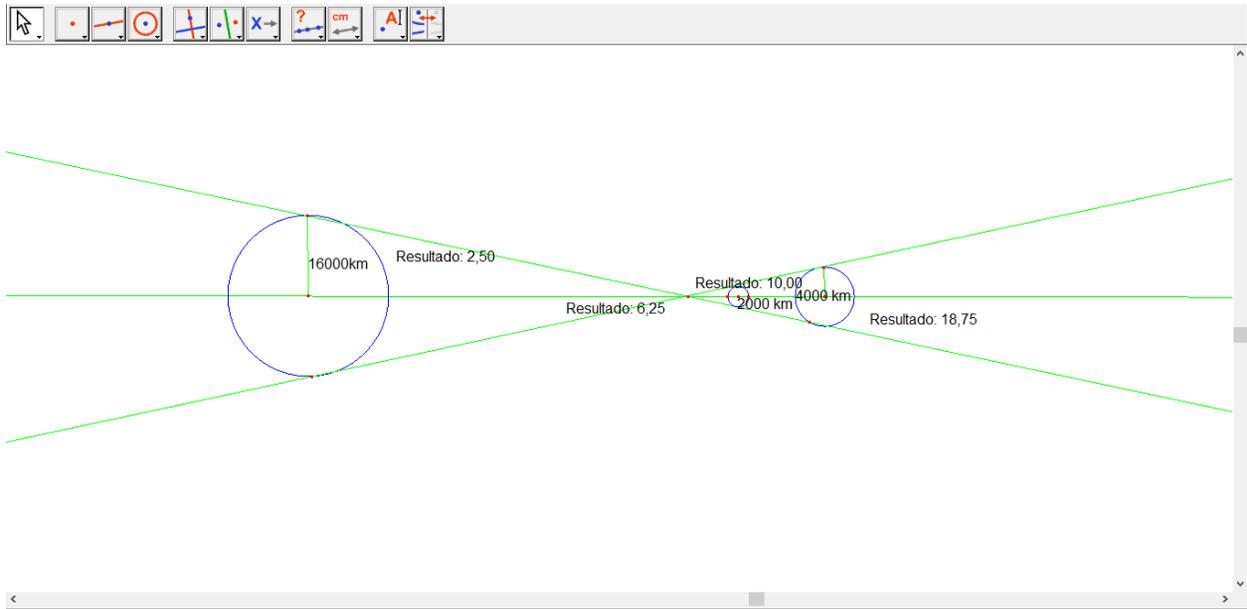
Respuesta a la actividad, realizada en Cabri II Plus



2.

1. a) si recae en el Concepto de homotecia ya que existen puntos en los cuales existe $OB = k \cdot OB$ y si la figura se mueve conserva su forma inicial.
 b) 1. Tomar las medidas dadas de cada Radio, del Planeta x , de su luna, su Sol y la distancia que existe del Planeta x a su Sol.
 2. El diseno se da por una Razon en la cual se toman en cuenta las medidas.
 c) La Conclusion que se podria sacar es que se cumple $OB = k \cdot OB$, siendo una homotecia, al hacer los procedimientos con la Razon y las medidas de estos

Respuesta a la actividad, realizada en Cabri II Plus



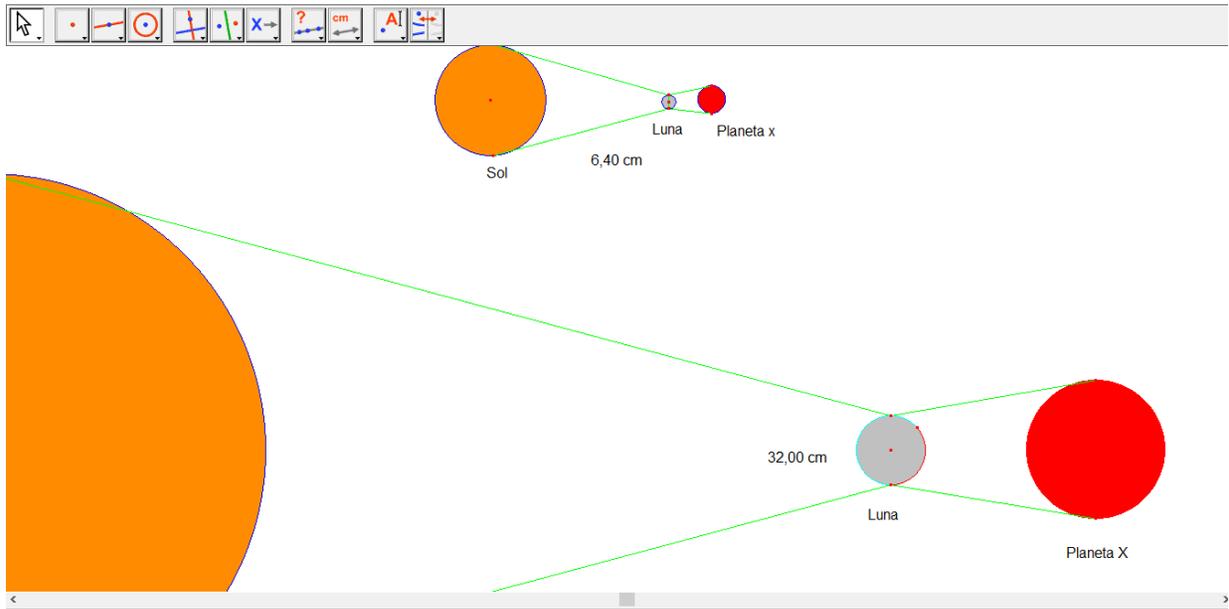
3.

A- Si creo que se cae en un concepto de homotecia, debido a que todas las figuras tienen cierta semejanza, como en el 4, 2, 8 y 16 cosa que son múltiplos del dos amplíadas. Y estas partes serian cada radio del círculo y la distancia entre ellos.

B- Primero procedi a dividir cada distancia segun la razón obtenida
 Ej $\rightarrow \frac{2 \times 10^3}{2 \times 10^4} = \frac{1}{10}$, para obtener la el radio de cada círculo, despues con la herramienta compás ~~este~~ hice los círculos, y calcule distancias.

C- Que Cabri nos facilita bastante los diseños geométricos como en este caso girada de una razón, en este caso $\frac{1}{2 \times 10^3}$

Respuesta a la actividad, realizada en Cabri II Plus



Anexo No. 9. Producciones de los estudiantes – Situación No. 4.



UNIVERSIDAD DE NARIÑO
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
SECUENCIA DIDÁCTICA – GRADO NOVENO

Fecha: _____

Nombres: _____

Institución: _____

Situación No.4: Familia tangible de homotecias

Ahora vamos a construir una *Familia tangible de homotecias* respecto a una circunferencia de radio un centímetro. Para ello necesitaremos:

- Un pantógrafo, junto con: goma de borrar, cinta y lápiz.
- Un compás.
- Un cuarto de cartulina.
- Una regla.
- Tijeras.
- Un palillo largo.
- Una barra de plastilina.
- Un marcador.

Así pues

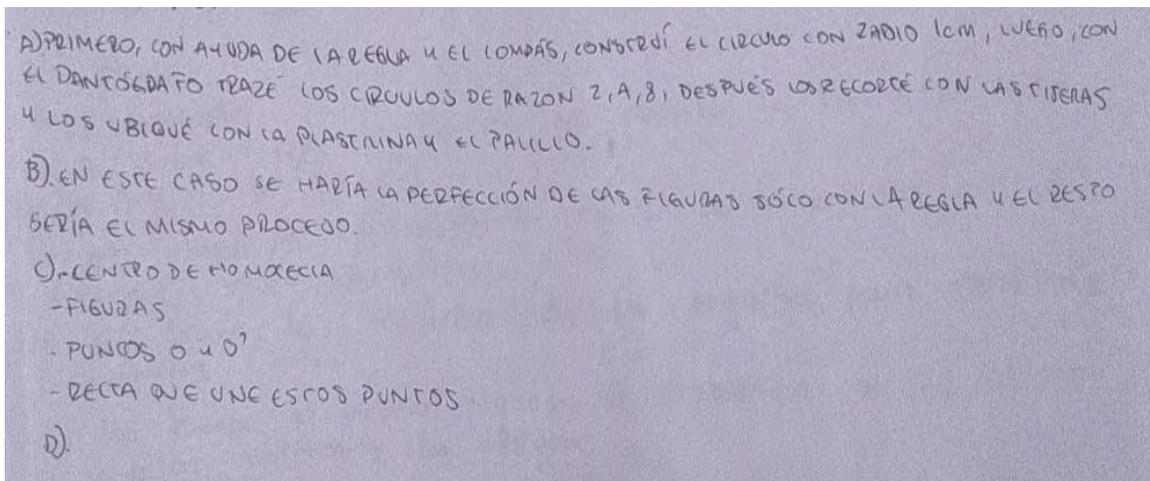
- Construye en la cartulina paso a paso cada una de las representaciones homotéticas de una circunferencia de radio un (1) centímetro con las escalas correspondientes a razones: 2, 4 y 8.
- Recorta cada una de estas representaciones.
- Ahora imagina cómo podrás construir en el espacio el comportamiento homotético de estas circunferencias con la ayuda del palillo. Procede a realizar éste proceso. Ten en cuenta que deberás realizar en forma precisa dicho comportamiento, para ello, podrás hacer uso de otros artefactos que tienes a mano.

Página 1 de 2

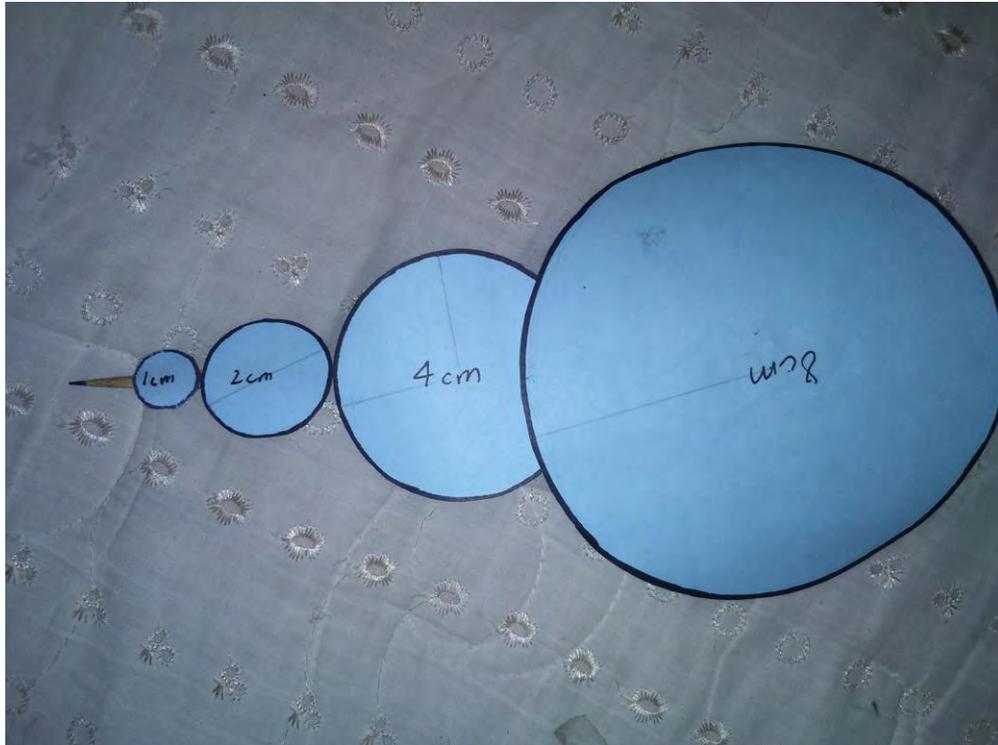
Luego de realizar ésta representación, responde las siguientes preguntas:

- Describe tú procedimiento paso a paso.
- ¿Cómo harías éste proceso para otras figuras geométricas?
- Identifica las partes tangibles que representan éste sistema de homotecias.
- ¿Dónde podría darse una aplicación de ésta representación?
- ¿Qué ocurriría si infinitas representaciones de éste sistema formaran un sólo cuerpo? ¿Qué representaría?
- ¿Crees que existan otros campos en la vida cotidiana, donde podría darse una aplicación útil del pantógrafo? ¿Cuáles?

1.



Trabajo presentado por el estudiante



2.

PROCEDIMIENTO

1. se debe tener en cuenta que cuando la razón es 2, la configuración es 6.
2. Al tener la configuración en 6, se hacen los correspondientes circunferencias.
3. Se toma la medida de la segunda para hacer las siguientes.

b) Yo haría el mismo proceso a diferencia de que al ser triángulos utilizaría la regla.

c) Las partes serían $OB = k \cdot OB$

d) Se podría dar una representación en la NASA de una Hamoteca.

f) Si se podría dar en otros campos en la vida cotidiana, al querer obtener una hamoteca con edificios.

El estudiante no presentó solución final a la actividad

3.

A → Primero hice el círculo con ~~radio~~ radio 1, después, usé el Pantógrafo para realizar el círculo de radio 2, después duplicando radio, el último círculo hasta hacerlo 8.

B → Dependiendo de la figura haría lo mismo, trazando vértices y utilizando regla o compás.

C → las figuras, las rectas y el centro de homotecia

d. ~~Ns/Nr~~ → En la elaboración de diseños de partes semejantes como un mapa etc.

e. Ns/Nr

f. No, debido a que el pantógrafo solo será requerido para realizar diseños homotéticos.

Trabajo presentado por el estudiante

