DE LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA A LA TRIGONOMETRÍA HIPERBÓLICA: ASPECTOS DEL SURGIMIENTO DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

MARCOS FIDEL SUAREZ PORTILLA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO

2017

DE LA TRIGONOMETRÍA ESFÉRICA A LA TRIGONOMETRÍA HIPERBÓLICA: ASPECTOS DEL SURGIMIENTO DE LAS GEOMETRÍAS NO EUCLIDIANAS

MARCOS FIDEL SUAREZ PORTILLA

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
ANDRÉS CHAVES BELTRÁN
Doctor en Historia de la Ciencia

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2017

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva del autor.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1996 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Andrés Chaves Beltrán
Asesor

Edinsson Fernández Mosquera
Jurado

Libardo Manuel Jácome
Jurado

San Juan de Pasto, Agosto 29 de 2017

Este trabajo está dedicado a
mi familia, que ha estado presente en el camino para su desarrollo, agradeciéndoles
por sus comentarios, ánimos y valiosos consejos, que me inspiran a seguir adelante.

Agradecimientos

Durante el tiempo dedicado para sacar adelante mi licenciatura, estuvieron muchas personas a mi lado, a ellas quiero expresar mi gratitud por el apoyo y la confianza que me han prestado de forma desinteresada.

En primer lugar quiero agradecer al Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño y a la Universidad de Nariño por su acogida y el apoyo recibido durante largos y fructíferos periodos en los cuales me he desarrollado personal e intelectualmente.

Un sincero agradecimiento a mi asesor Andrés Chaves Beltrán, por todo el tiempo y apoyo que me ha brindado, por sus sugerencias e ideas de las que tanto provecho he sacado, por el respaldo y la amistad.

Gracias a cada uno de mis profesores que me impartieron sus conocimientos, de los cuales he aprendido sobre la matemática y educación matemática, como también en la formación de integridad personal.

No puedo olvidar a mis compañeros y amigos con los cuales he compartido incontables horas de trabajo, en las cuales se obtuvo buen aprendizaje, experiencias e historias para contar. Gracias por los buenos y malos momentos, por aguantarme y por escucharme.

Este trabajo de grado y mi carrera en general nunca hubiera sido posible sin el amparo incondicional de mi familia. Esto es también nuestro premio.

Resumen

Se presenta una monografía que aborda aspectos histórico epistemológicos del origen de las Geometrías no Euclidianas, en concreto se abarca un recorrido del problema histórico de las paralelas, que comienza antes del mismo Euclides (desde los Pitagóricos), y luego se recorre los aportes de varios autores, que intentaron demostrar el V Postulado de Euclides a partir de los primeros cuatro. También se desarrolla la sugerencia, de los siglos XVIII y XIX hecha por Johan Lambert y Franz Taurinus de obtener fórmulas de la geometría hiperbólica a partir de las fórmulas de Bessel (en la esfera) para extrapolarlas algebraicamente a una esfera de radio imaginario. Por último, se incorpora un apéndice correspondiente a la recepción de las Geometrías No Euclidianas (GNEs) en Colombia.

Abstract

The present monograph addresses historical - epistemological aspects of the origin of Non-Euclidean Geometries. It specifically addresses a tour of the historical problem of the parallels, whose problem starts with the Pythagoreans before Euclid himself. Afterwards, it goes over the contributions of different authors, whom attempted to prove the Euclid's Fifth Postulate based on the four ones. Moreover, it develops the suggestion of the eighteenth and the nineteenth centuries done by Johan Lambert and Franz Taurinus regarding to the obtainment of formulae of Hyperbolic geometry based on Bessel's formulae in the real sphere in order to extrapolate algebraically to a sphere of imaginary radian. Finally, it includes an appendix corresponding to the reception of Non-Euclidean geometry (NEG) in Colombia.

Índice general

Introducción

Aunque la primera Geometría No Euclidiana descubierta y consolidada teóricamente en un lenguaje matemático hace referencia a la Geometría Hiperbólica y similarmente la segunda Geometría No Euclidiana descubierta teóricamente es la Geometría Elíptica, aspectos de la Geometría Elíptica se aplicaron antes que los de la Geometría Hiperbólica. En este trabajo se pueden distinguir tres tipos de geometrías que son, la Geometría Euclidiana, la Geometría Hiperbólica y la Geometría Elíptica.[1]

La Geometría Euclidiana: La geometría es una de las ramas más antiguas de las ciencias y su origen está ligado a la resolución de problemas concretos que permitían abordarse a través de la GE, entre estos problemas están la medida de extensiones de terrenos, la construcción de viviendas, puentes, monumentos, etc. Ajustándose perfectamente en el plano real y el espacio tridimensional real.

La GE satisface los cinco postulados de Euclides, es un caso limite intermedio entre la Geometría Hiperbólica y la Elíptica, se supone en un espacio plano por lo que la suma de los tres ángulos internos de un triángulo da siempre 180°, (ha sido y sera un modelo consistente que ha servido entre otras cosas para modelar el universo a cortas distancias).

Euclides (330-275, a. C. aprox.), fue el primero en utilizar y desarrollar una teoría a partir de la axiomática-deductiva. Realizada a partir de un conjunto de términos no definidos utilizados en el vocablo, y axiomas consistentes y convencionales, donde realiza deducciones y demostraciones de teoremas mediante el encadenamiento de proposiciones.

Euclides, en su obra *Elementos*, que data de 300 a. de C., realiza un compendio de la geometría conocido hasta la época. Este compendio que consta de 13 libros, inicia con cinco postulados que son[2]:

I Postulado. Dos puntos cualesquiera determinan un segmento de recta.

II Postulado. Un segmento de recta se puede extender indefinidamente en una línea recta.

III Postulado. Se puede trazar una circunferencia dados cualquier punto como centro y un radio cualquiera.

IV Postulado. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.

[1] En adelante cuando se refiera a la *Geometría Euclidiana* se podrá notar como *GE*, como también se notara *GNEs* refiriéndose a *Las Geometrías No Euclidianas* o *GNE* a alguna *Geometría No Euclidiana* especifica.

[2] Estos cinco Postulados son la base de la teoría de Euclides desarrollada a partir de la axiomática-deductiva. Al último postulado se nombrara tambien como *Postulado de las Paralelas*, *V Postulado de Euclides* o en su forma abreviada *VP*.

V Postulado. *Postulado de las paralelas*: Si una línea recta corta a otras dos, de tal manera que la suma de los dos ángulos interiores del mismo lado sea menor que dos rectos, las otras dos rectas se cortan, al prolongarlas, por el lado en el que están los ángulos menores que dos rectos.

Desde tempranas épocas el V Postulado generó controversias, debido a su extensión y a la forma del enunciado se derivó la duda si ese enunciado deba o no considerarse como postulado, o en otras palabras, si es o no independiente de los postulados restantes. Así, durante varios siglos una buena cantidad de matemáticos se dedicaron a la demostración del V Postulado de dos formas diferentes:

1. Se realizaron varios intentos por demostrarlo a partir de los otros cuatro, pero para ello usaban inconscientemente una equivalencia de este postulado.
2. Se intentó demostrarlo por reducción al absurdo, suponiendo que el V Postulado es falso partiendo de negaciones a este pretendiendo llegar a una contradicción. Sin embargo, lejos de llegar a un absurdo se encontró que existen geometrías coherentes y diferentes de la Euclidiana.

Estas controversias se las conoce como el Problema de las Paralelas. Fue hasta principios del siglo XIX que se obtuvo dos conclusiones formalizadas de aquel problema[3], la primera conclusión es que el enunciado de las paralelas (VP) es independiente de los cuatro primeros postulados de Euclides, y la segunda conclusión es que a partir de una de las negaciones del V Postulado y aceptando los cuatro anteriores, se obtiene una geometría consistente que actualmente conocemos como Geometría Hiperbólica y fue la primera Geometría No Euclidiana que se descubrió.

La Geometría Hiperbólica o Geometría de Bolyai-Lobachevski: La Geometría Hiperbólica aunque tiene propiedades, postulados y teoremas que sigue compartiendo con la Geometría Euclidiana, satisface sólo los cuatro postulados de Euclides, remplazando el V Postulado por; *hay infinitas rectas distintas que pasan por un punto fuera de una recta dada y no cortan a ella, de modo que el V Postulado de Euclides es falso.* En la Geometría Hiperbólica la suma de los tres ángulos internos de un triángulo da siempre menor que 180°.

En esta Geometría hay dos grupos de rectas paralelas a una dada que son, las **rectas hiperparalelas:** Rectas que pasan por un punto exterior a la recta dada y que son asintóticas a esta, cada recta en un espacio hiperbólico contiene exactamente dos *rectas hiperparalelas* o conocidas como *paralelas asintóticas*, las **rectas ultraparalelas:** rectas que pasan por un punto exterior a la recta dada pero no son asintóticas a ella y lógicamente tampoco la cortan, cada recta en un espacio hiperbólico contiene infinitas rectas *ultra paralelas* o conocidas como *paralelas no asintóticas.*

Modelos clásicos de Geometría Hiperbólica son: pseudoesfera, paraboloide hiperbólico, representación de Klein, el modelo del Disco de Poincaré, el modelo del semiespacio de Poincaré y el modelo de Lorentz. Estos modelos definen un plano hiperbólico que satisface los axiomas de una geometría hiperbólica. Todos estos modelos son extensibles a más dimensiones.[4]

A principios del siglo XIX, Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793-1856), en su publicación *Acerca de los principios de geometría* en 1829 y János Bolyai (1802-1860), en su publicación *La ciencia absoluta del espacio* en 1832, lograron plasmar matemáticamente la existencia de la Geometría Hiperbólica.

[3] Se denotara indistintamente como *Problema de las Paralelas* o como *problema del V Postulado* y entiéndase como aquel que generó controversias al rededor del VP.

[4] Se puede encontrar relaciones entre modelos hiperbólicos en [Ramsay y Richtmyer, 1995].

Aunque los trabajos de Bolyai y Lobachevski no tuvieron un reconocimiento inmediato, esta geometría quedó validada a finales del siglo XIX cuando Eugenio Beltrami (1835-1900) demostró la consistencia de la Geometría Hiperbólica en un modelo euclidiano con Geometría No Euclidiana. Aunque [Gray, 1992], en esta segunda edición de su libro *Ideas de Espacio*, duda que Beltrami haya sido quien consolidó esta idea, ya que Felix Christian Klein (1849-1925), dio la interpretación proyectiva de la Geometría Hiperbólica que ya se tenía por consistente, incluso Gray se atreve a decir que es Roberto Bonola (1874-1911) en su libro *Geometrías no Euclidianas* de 1923, quien da un planteamiento claro a la consistencia de este problema. De todas formas los resultados de Beltrami y Klein prueban que la Geometría Hiperbólica es tan consistente como la Geometría Euclidiana; así, si la Geometría Hiperbólica lleva a alguna contradicción, entonces la Geometría Euclidiana también.

La Geometría Elíptica o Riemanniana: Una vez concebido el modelo de Geometría Hiperbólica, los matemáticos buscaron nuevos sistemas geométricos que incumplieran el V Postulado. Uno de esos modelos es representado en la superficie de una esfera, siendo esta superficie bidimensional.

La Geometría Elíptica aunque tiene propiedades, postulados y teoremas que sigue compartiendo con la Geometría Euclidiana satisface solo tres postulados de Euclides, remplazando el V Postulado por, *no existen rectas que pasan por un punto fuera de una recta dada y no cortan a ella*, y también modifica el segundo postulado al, *no existen rectas infinitas*. En la Geometría Elíptica la suma de los tres ángulos internos de un triángulo da siempre mayor que $180°$.

En la Geometría Elíptica toda recta que pasa por un punto fuera de una recta dada en algún lugar terminara intersecándola.

Modelos clásicos de Geometría Elíptica son: Modelo (hiper)esférico (una hiperesfera de dimensión n, que está inmersa en el espacio euclidiano $n+1$ dimensional), la superficie de una esfera es un modelo de Geometría Elíptica bidimensional, Modelo proyectivo y Proyección estereográfica.[5]

En este trabajo se aborda apartes de la historia que anteceden las obras de los tres matemáticos C. F. Gauss (1777-1855), N. I. Lobachevski (1793-1856) y J. Bolyai (1802-1860), y que fueron necesarios para que ellos demostraran la existencia de la primera Geometría No Euclidiana. En concreto, se hace referencia comparativa entre la obra de G. G. Saccheri (1667-1733)[6], y la de J. H. Lambert (1728-1777)[7], quienes son considerados precursores de la primera GNE. También se incluye un apartado en el que se describe los fundamentos de la Trigonometría Esférica que dio origen algebraico a la trigonometría de la esfera de radio imaginario como lo hizo F. A. Taurinus (1794-1874), a mediados de la década de 1820, y esta última sirve como base para obtener la Geometría Hiperbólica que fue la primer Geometría No Euclidiana.

En las conclusiones dos y tres del trabajo de grado [Chaves, 2001, p. 88], se sugiere al igual que Lambert, que una forma de descubrir la primer GNE es usando la trigonometría de una esfera en la cual su radio se asume imaginario. Esta sugerencia no tiene una base física,[8] sin embargo, brinda todas las herramientas algebraicas para una geometría consistente. Así, en este trabajo se aborda la siguiente pregunta ¿Qué importancia tuvo la Trigonometría Esférica en el surgimiento de la primera Geometría No Euclidiana?

[5] algunos ejemplos se los puede encontrar en [Lee, 2006].
[6] Euclides ab omni naevo vindicatus (1733) de Gerolamo Saccheri.
[7] Theorie der Parallelinien (1766) del Johann Heinrich Lambert.
[8] Motivo por el cual fue rechazada por varios de sus interlocutores.

El objetivo general de este trabajo es realizar un estudio histórico epistemológico del surgimiento de las GNEs. Para abordar este propósito, se plantearon los siguientes objetivos específicos; donde, los objetivos iniciales eran los primeros cuatro, luego se añadió el quinto objetivo especifico, que se trabaja en el apéndice de este trabajo.

1. Presentar una historiografía del Problema de las Paralelas.

2. Presentar una forma de obtener las fórmulas de senos y cosenos de la Trigonometría Esférica.

3. A partir de las fórmulas de senos y cosenos de la Trigonometría Esférica generar las fórmulas de senos y cosenos de la primera GNE.

4. Evidenciar diferencias conceptuales entre Saccheri, Lambert y Taurinus, que impidieron al primero aceptar la existencia de una Geometría No Euclidiana, pero que permitieron a los otros dos visibilizar la posibilidad de esta nueva geómetra.

5. Presentar las concepciones filosóficas del colombiano Julio Garavito respecto a las GNEs.

El estudio del problema del V Postulado está ligado al origen de las Geometrías No Euclidianas, así este problema brinda grandes posibilidades de estudios y análisis históricos ya que abarco más de 2200 años de esfuerzos matemáticos, empezando desde el propio Euclides hasta los desarrollos de Gauss, Lobachevski y Bolyai en el siglo XIX.

Respecto al énfasis que se le da a la Trigonometría Esférica en este trabajo, radica en que la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Nariño no ofrece un curso donde se trabaje esta temática. En este sentido, este trabajo, es una herramienta que se pueden incorporar a alguna asignatura electiva o incluso algunas de las asignaturas de la línea de evolución del pensamiento matemático.

Además para un futuro licenciado en matemáticas esta temática sobre aspectos histórico - epistemológicos en la Geometría No Euclidiana brinda herramientas históricas y epistemológicas que permiten hacer evaluaciones críticas a las concepciones tradicionales derivadas del estudio del modelo euclidiano.

Este trabajo de grado se desarrolló teniendo en cuenta el estudio histórico epistemológico del surgimiento de las Geometrías No Euclidianas, el problema generado a partir del V Postulado de Euclides (el Problema de las Paralelas) y los triángulos en la Trigonometría Esférica.

Dado que el libro Los Elementos es una recopilación de Euclides sobre la geometría existente en su época, se podría decir que la historia de las GNEs comienza antes que Euclides, de echo Aristóteles (384-322 a. C.) ya propone una formulación equivalente al quinto postulado. Posterior a este libro hubo varios personajes que intentaron demostrar el quinto postulado a partir de los cuatro primeros, entre ellos se destaca los intentos de personajes como Omar Jayan (1048-1131), Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274) y Gerolamo Saccheri, entre otros. Luego surgió la independencia del quinto postulado formalizada por Gauss, Lobachevski y Bolyai, quienes partieron de la negación del V Postulado para probar su “dependencia de los otros cuatro ”, en la cual aunque el resultado no fue el esperado, por fin se llegó a una conclusión. Obtuvieron una geometría coherente, impecable, valida desde el punto de vista lógico.

Existen dos formas de negar el V Postulados de Euclides:

1. Dada una recta y un punto exterior a ella, no existe ninguna recta paralela a la dada que contenga al punto.

2. Dada una recta y un punto exterior a ella, existen al menos dos rectas paralelas a la dada que contienen al punto.

Antes de que se demostrara la independencia del V Postulado de Euclides, aspectos importantes de la Geometrías No Euclidianas ya eran utilizados desde la antigüedad, en especial los relacionados a la denominada actualmente como geometría riemanniana y que se aplicaban a la navegación por ser la superficie terrestre un modelo apropiado para esta geometría. Sin embargo, no podía hablarse en ese entonces de una formalización matemática de una GNE.

Posteriormente y en fechas cercanas a la conclusión de la independencia del V Postulado, Lambert, quien además de realizar aportes a la solución de este problema, también hizo aportes al desarrollo de la Geometría Hiperbólica y en la astronomía, desarrollando un método para calcular las órbitas de los cometas. Con lo anterior se muestra que la solución del problema del V Postulado, sirvió como base para la justificación de la aplicación y de los estudios científicos con respecto a las Geometrías No Euclidianas.

De otro lado, otros autores diferentes a los nombrados en este documento que trabajaron alrededor del problema del V Postulado, y que están referenciados en los textos que abordan la historia de las Geometrías No Euclidianas son: Ptolomeo (siglo II después de Jesucristo), Proclo (410-485), Al-Nirizi (875-940), G. Vitale (1633-1711), G. S. Klügel (1739-1812), F. K. Schweikart (1780-1859), G. F. Bernhard Riemann (1826-1866), J. H. Poincaré (1854-1912).

Actualmente, se encuentra gran variedad de bibliografía especializada en historia de las Geometrías No Euclidianas. Como ejemplo: el libro de [Bonola, 1923], que ha sido la principal referencia acompañada con trabajos de grado [Chaves, 2001] y [Espitia, 2009].

Este trabajo se desarrolló en el marco histórico de la Geometría No Euclidiana, en el cual se estableció el recorrido histórico del problema de las paralelas (V Postulado de Euclides) y comparaciones entre Lambert, Saccheri y Taurinus, que se asocian a los objetivos (1) y (4) expuestos en los capítulos 1 y 2 de este trabajo, en la cual, en primer momento el libro de [Bonola, 1923], la tesis de [Espitia, 2009] y la tesis de [Chaves, 2001], fueron de gran ayuda.

De la Geometría Esférica basándose inicialmente en la Trigonometría Esférica, que a partir de ella se plasmó la construcción de las fórmulas de Bessel. Donde, en primer momento la guía ha sido [Barrero, 2008], luego se conectó con las fórmulas de senos y cosenos de la Trigonometría Hiperbólica que se encuentran en (Chaves 2001), esto se asocia a los objetivos (2) y (3) expuestos en el capítulo 3 de este trabajo. En los triángulos esféricos, los grupos de fórmulas de Bessel son:

1. Primer grupo referente al Teorema del seno en la Trigonometría Esférica.

2. Segundo grupo referente al Teorema del coseno para los lados en la Trigonometría Esférica.

3. Tercer grupo referente al Teorema del coseno para los ángulos en la Trigonometría Esférica.

Además, el apéndice, que responde al quinto objetivo específico, se asocia a la recepción de las Geometrías No Euclidianas (GNEs) en Colombia; centrándose en las concepciones filosóficas de Julio Garavito Armero, exponiendo la parte filosófica de sus concepciones de “Espacio Matemático” y “Espacio” y las implicaciones de estas concepciones en las GNEs, también la comparativas con los pensamientos de dos autores no colombianos: Immanuel Kant y Henri Poincaré. Para este apéndice la principal referencia es [Arboleda y Anacona, 1994].

Este proyecto, se enmarcó dentro de la historia de las matemáticas de orden internalista, esto significa que se presenta una historiografía de las GNEs, atendiendo básicamente su estructura lógica de producción, sin tener en cuenta aspectos como los políticos, sociales, culturales o religiosos que apuntan más a un estudio sociológico de las ciencias.

Capítulo 1

Historiografía del problema de las paralelas

1.1. Los pitagóricos y la propiedad de las paralelas en triángulos

La *Propiedad de las paralelas en triángulos*; dice que la suma de los ángulos interiores en un triángulo cualquiera da dos rectos. Esta propiedad se enuncia en el primer Libro de Euclides (proposición 32), y siendo ésta, equivalente al V Postulado que es considerado como el punto de partida en el cual se generaron las GNEs.

En [Heath, 1921, pp. 141-142], referenciando a Proclo (410-485), se atribuye al matemático griego Thales de Miletus (alrededor de 624-547 a. C.) el siguiente resultado:

El ángulo formado por las cuerdas que parten de los extremos de un diámetro del círculo y se encuentran sobre su perímetro en cualquier punto diferente de los extremos del diámetro, es recto.

Por lo cual, se puede afirmar que Thales estaba en una posición óptima, para demostrar que en cualquier triángulo rectángulo la suma de los tres ángulos es igual a dos ángulos rectos (ver figura 1.1). Para luego, en cualquier triángulo dibujando la perpendicular de un lado que pase por el vértice opuesto, poder demostrar que la suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos (ver figura 1.2).

Thomas Heath (1861-1940) menciona que si el método de pasar del caso particular en el cual (en un triángulo rectángulo la suma de sus ángulos internos da dos ángulos rectos) al caso general donde (en cualquier triángulo la suma de sus ángulos internos da dos ángulos rectos) no se le ocurrió a Thales, es en todo caso poco probable que haya escapado de Pitágoras de Samos (569-475 a. C.) o de alguno de los pitagóricos.[1] Pero con certeza, todo lo que se sabe es que Eudemus (370-300 a. C.) refirió a los pitagóricos el descubrimiento del teorema general de que en cualquier triángulo la suma de los ángulos interiores es igual a dos ángulos rectos.

[1] Los Pitagóricos: se llama a la escuela conformada por seguidores de Pitágoras entre el “siglo VI y siglo V” a. C.

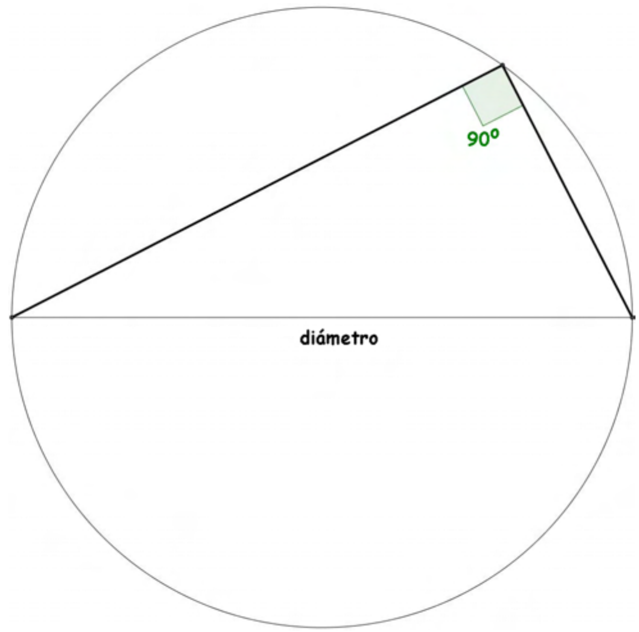


Figura 1.1: Ángulo recto inscrito en una circunferencia.
Fuente: esta investigación.

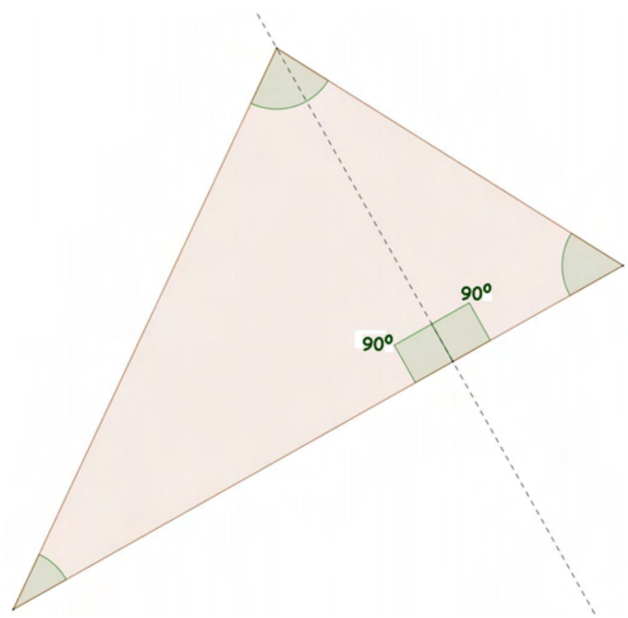


Figura 1.2: Triángulo cualquiera.
Fuente: esta investigación.

Eudemus expone la manera como los pitagóricos demostraron este resultado, la cual difiere ligeramente de la forma como lo hace Euclides, sin embargo, tanto los pitagóricos como Euclides recurren a propiedades de las paralelas para demostrar el resultado, por lo tanto, sólo se pudo haber desarrollado en un momento en que esas propiedades ya eran conocidas. Los pitagóricos demostrarían esta propiedad de la siguiente manera:

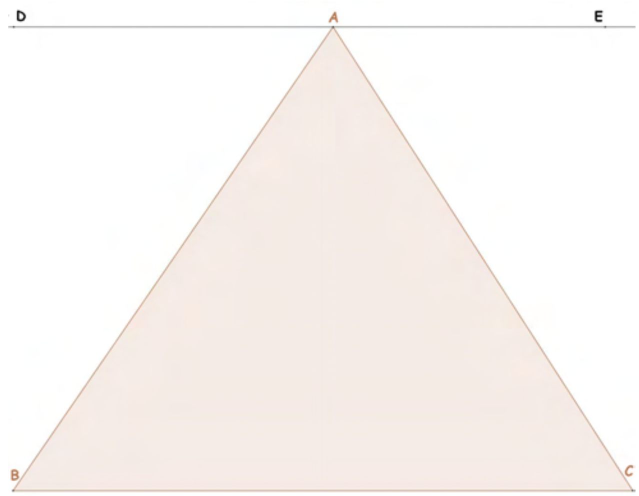


Figura 1.3: Triángulo.
Fuente de investigación: [Heath, 1921, p. 143].

> Sea ABC cualquier triángulo; Mediante un dibujo trazamos DE paralelo a BC y que pase por A, como se observa en la figura 1.3. Entonces, puesto que BC, DE son paralelas, los ángulos alternos $\widehat{DAB}$, $\widehat{ABC}$ son iguales.
>
> Del mismo modo los ángulos alternos $\widehat{EAC}$, $\widehat{ACB}$ son iguales. Por lo tanto, la suma de los ángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$ es igual a la suma de los ángulos $\widehat{DAB}$, $\widehat{EAC}$.
>
> Añadiendo a cada suma el ángulo $\widehat{BAC}$; se tiene que, la suma de los tres ángulos $\widehat{ABC}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{BAC}$, es decir, los tres ángulos internos del triángulo, es igual a la suma de los ángulos $\widehat{DAB}$, $\widehat{BAC}$, $\widehat{CAE}$, es decir, a dos ángulos rectos [Heath, 1921, p. 143].

Aunque, esta propiedad se encuentra en *Elementos*, libro 1 proposición 32, ya fue conocida en tiempos de Aristóteles (384-322 a. C.) el cual tuvo como uno de sus principales discípulos a Eudemus.

Los conocimientos matemáticos crecen de generación en generación con las contribuciones de muchos personajes. En particular, con la historia de las GNEs, referida al problema de las paralelas (V Postulado de Euclides) equivalente a la *propiedad de las paralelas en triángulos*, se observa que esta propiedad se remonta a los pitagóricos, antes del mismo Euclides. Aunque el V Postulado ocasionó un problema en su entendimiento y aceptación como postulado, con lo expuesto en esta sección, la Proposición 32 de *Elementos* es atribuida a los pitagóricos como una propiedad.

1.2. Formulaciones equivalentes al Quinto Postulado de Euclides

Algunos intentos por demostrar el V Postulado, estuvieron precedidos por proposiciones que, eran equivalentes a éste. Algunas de estas equivalencias son las siguientes:

1. La proposición que plantea: *la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos*, era conocida por Aristóteles, tanto así que Eudemus, uno de sus más importantes discípulos la atribuyó a los pitagóricos [Heath, 1921, pp. 141-144].

2. A Posidonio (alrededor 135-51 a. C.) se le atribuye la siguiente proposición: *Dos rectas paralelas son equidistantes.* Esta equivalencia refleja la equidistancia en un mismo plano de dos rectas; que se las llama paralelas. En [Bonola, 1923, p. 8] se realiza una transcripción de Proclo donde se refiere a la equidistancia en las paralelas de Posidonio y las líneas paralelas en el sentido Euclídeo.

   > Proclo (410-485), en su *comentario al libro I de Euclides* nos transmite preciosas noticias acerca de las primeras tentativas hechas con este propósito. Refiere, por ejemplo, que POSIDONIO (siglo I antes de j. C.) había propuesto se llamasen paralelas a dos rectas coplanarias y equidistantes, esta definición y la Euclídea corresponden, sin embargo, a dos hechos que pueden presentarse separadamente, y Proclo (p. 177), refiriéndose a un tratado de Gemino (siglo I antes de J. C.), aduce a este propósito los ejemplos de la hipérbola y de la concoide y de su posición con las respectivas asíntotas, para mostrar que podría haber líneas paralelas en el sentido euclídeo, esto es, líneas que prolongadas hasta el infinito no se encuentran, y, sin embargo, no paralelas en el sentido de POSIDONIO, esto es no equidistantes.

   Según [Sánchez y Sigarreta, 2011, p. 121], la proposición de Posidonio es un caso particular de la definición de rectas paralelas de Euclides, ya que en Euclides son líneas que nunca se encuentran al extenderlas al infinito, mientras que en la proposición de Posidonio tienen que ser estrictamente equidistantes.

3. [Bonola, 1923, pp. 9-10], dice que Proclo mencionando a Tolomeo (alrededor 87-165), luego de estudiar los ángulos internos de un mismo lado formados por una transversal a dos paralelas, llega a la conclusión de que estos ángulos no pueden ser mayores ni menores que dos ángulos rectos, por lo tanto serán igual a dos ángulos rectos. Así, a Tolomeo se le atribuye la siguiente proposición equivalente al V Postulado de Euclides: *los ángulos internos de un mismo lado formados por dos paralelas con una transversal son suplementarios.*

4. A Proclo (410-485) se le atribuye tres proposiciones equivalentes al V Postulado, que son:

   - Si una recta encuentra a una de dos paralelas encuentra también a la otra.

- Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
- Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a esta recta.[2]

5. Otra proposición en la cual se observa la equidistancia, es atribuida a Cristóbal Clavio (1537-1612): *el lugar de los puntos equidistantes de una recta es una recta.* Esta proposición fue presentada después de que criticara la demostración de Proclo en su traducción latina del texto euclídeo.
6. John Wallis (1616-1703), luego de abandonar el concepto de equidistancia que ya habían trabajado sus precedentes geómetras presenta una nueva demostración del V Postulado, centrándose en la noción común, *de toda figura existe una semejante de magnitud arbitraria,* el cual llega a la conclusión de la siguiente proposición equivalente al V Postulado Euclídeo que dice, *de un triángulo cualquiera puede siempre construirse un triángulo cualquiera de magnitud arbitraria.*
7. De Saccheri (1667-1733) se extrae la proposición: *en todo cuadrilátero de Saccheri se satisface la Hipótesis del ángulo Recto.*[3]
8. A Johann Friedrich Lorenz (1738-1807) se le atribuye la siguiente proposición, *por un punto situado entre los lados de un ángulo pasa siempre una recta que corta los dos lados del ángulo.* Esta proposición es utilizada por Legendre A. M. (1752-1833) para demostrar al igual que Lorenz, que la suma de los ángulos en un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
9. A Farkas Wolfgang Bolyai (1775-1856), padre y profesor del célebre contribuyente a la independencia del V Postulado, János Bolyai (1802-1860), se le atribuye la siguiente proposición equivalente, *por tres puntos no colineales, pasa una circunferencia.*

1.3. Algunos intentos por demostrar el V Postulado hasta el siglo XVII

A partir de la poca evidencia del V Postulado de Euclides, requiriendo para muchos personajes ser demostrado. En primera instancia se intentó, por métodos directos de demostración a partir de los otros cuatro,[4] modificando el enunciado del VP por uno equivalente y ademas modificando la definición de paralelas dada por Euclides que dice:

[2] La última de estas proposiciones de Proclo también se la conoce como el Postulado de de Playfair. John Playfair (1748-1819) fue un científico escocés y matemático, profesor de filosofía en la Universidad de Edimburgo. En el libro de Playfair *Elements of Geometry* hizo una breve expresión del postulado paralelo de Euclides, conocido ahora como el Postulado de Playfair.

[3] En el capítulo 2 se abordará más sobre HAR, el cual corresponde a la *Hipótesis de Ángulo Recto* planteada por algunos personajes para abordar el Problema de las Paralelas, también se hablara sobre la Hipótesis de Ángulo Obtuso y la Hipótesis de Ángulo Agudo. Saccheri es el personaje mas destacado en el planteamiento de estas hipótesis.

[4] Luego de intentos de demostración directa, con Saccheri se comienza la brillante idea de intentos para demostrar el VP utilizando métodos indirectos de demostración como se observa en el capítulo 2.

dos rectas coplanarias son paralelas, si prolongadas cuanto se quiera, no se encuentran. En esta definición se pude contemplar una idea mas amplia de paralelas donde, "dándose o sin darse cuenta" Euclides, en su definición de rectas paralelas, acepta las equidistantes como no equidistantes, a diferencia de Posidonio que deben ser estrictamente equidistantes; como se expone en el anterior apartado de este capítulo. En consecuencia, para muchos como Posidonio, la definición de paralelas de Euclides es errónea y la remplazan con la de equidistancia. Entre algunos intentos históricos relevantes se presentan los siguientes:

1. El griego Proclo (411-485), comentador de la geometría, en particular de la geometría griega y del libro I de Euclides, observando que la inversa al V Postulado de Euclides *la suma de dos ángulos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos* (Pro. XVII) es un teorema demostrable, y no admitiendo que una proposición cuya inversa sea demostrable sea no demostrable, rechazando que las rectas paralelas de Euclides puedan comportarse de un modo asintótico en donde al igual que Posidonio se refiere a las paralelas como dos rectas equidistantes, además, a partir de la proposición *la distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan pueden hacerse tan grandes como se quiera prolongando suficientemente las dos rectas*,[5] deduce y demuestra el siguiente lema:

   Una recta que encuentra a una de dos paralelas, encuentra necesariamente a la otra.[6] La demostración dada por Proclo se encuentra en [Bonola, 1923, p. 10] como sigue:

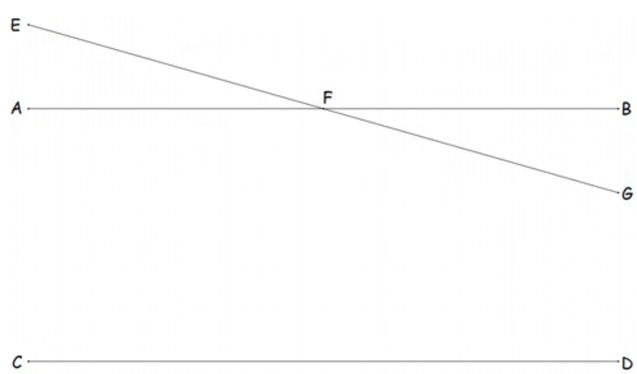


Figura 1.4: Proclo.
Fuente de investigación: [Bonola, 1923, p. 10].

> Sean AB, CD dos paralelas, y EG una transversal, incidente en F sobre la primera. La distancia de un punto variable sobre el rayo FG a la recta AB crece más allá de todo límite, cuando el punto se aleja indefinidamente de F, *y puesto que*

[5] La demostración de esta proposición se la encuentra en una obra del Padre Gerolamo Saccheri en una revista filosófica de 1903. En el pie de página de [Bonola, 1923, p. 26] le llama una obra olvidada del P Gerolamo Saccheri.

[6] Recordemos que de los tres postulados de Proclo equivalentes al V Postulado, este lema es uno de tales postulados.

la distancia de dos paralelas es finita, la recta EG deberá necesariamente encontrar a CD (ver figura 1.4).

2. El griego Aganis (siglo VI), centrándose en la misma idea de Posidonio acerca de las rectas paralelas como equidistantes, tiene como propósito *construir el punto de encuentro de dos rectas no equidistantes*; que en otras palabras al determinar este punto de encuentro, demostraría el V Postulado de Euclides. En [Bonola, 1923, pp. 13-14], se muestra como Aganis construye el punto de encuentro de dos rectas que no son equidistantes, como sigue:

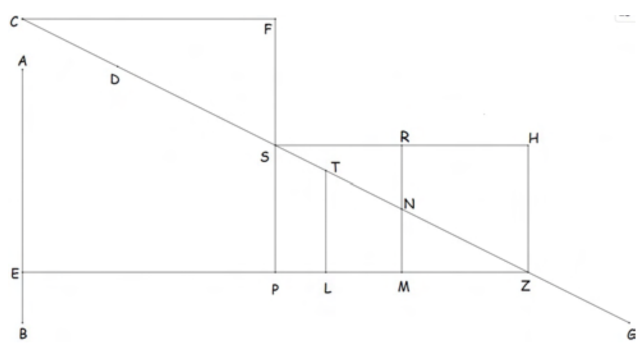


Figura 1.5: Aganis.
Fuente de investigación: [Bonola, 1923, p. 14].

Sea AB y GD dos rectas cortadas por la transversal EZ y tales que la suma de los ángulos internos $\widehat{AEZ}$, $\widehat{EZD}$ sea menor que dos rectos. Sin restar nada a la generalidad de la figura, se puede suponer que $\widehat{AEZ}$ sea recto.

Fíjese ahora sobre ZD un punto arbitrario T, desde el cual se traza TL perpendicular a ZE; después divídase por el punto P el segmento EZ en dos partes iguales: luego, por el punto M, el segmento PZ en dos partes iguales, y así sucesivamente MZ, en dos partes iguales, etc..., hasta que uno de los puntos medios P, M, ... caiga en el segmento LZ. Si éste, por ejemplo, es el punto M, trácese por M la recta perpendicular a EZ, que encontrará en N a la DZ. Constrúyase finalmente sobre ZD el segmento ZC, múltiplo de ZN, como ZE es múltiplo de ZM. en nuestro caso es: $ZC = 4.ZN$. *El Punto C así obtenido es el punto de encuentro de las dos rectas AB y GD* (ver figura 1.5).[7]

3. El árabe Nasir al-Din (1201-1274) se adapta al criterio de demostración de V Postulado por Aganis, también admitiendo la hipótesis: *Si dos rectas, r y s, son la primera perpendicular, la otra oblicua al segmento AB, los segmentos de las perpendiculares bajadas desde s sobre r son*

[7]Bonola termina señalando que, lo ultimo se cumple, al probar que los segmentos consecutivos e iguales ZN, NS..., de la recta DZ tienen proyecciones iguales sobre la EZ.

menores que AB en la región en que AB forma con s ángulo agudo, y mayores que AB en la región en que AB forma con s ángulo obtuso, y además Nasir al-Din obteniendo el resultado que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos, demuestra el quinto postulado.

4. El ingles John Wallis (1616-1703), para demostrar el V Postulado se fundamenta en la noción común como ya antes se menciono, de que, *para toda figura existe una semejante de magnitud arbitraria*, como también abandona el concepto de equidistancia.[8]

5. El italiano Giordano Vitale (1633-1711) volviendo al concepto de las paralelas dada por Posidonio como equidistantes, y al igual que Proclo rechaza la idea de que las paralelas de Euclides puedan comportarse de un modo asintótico. Vitale pretende demostrar que el lugar geométrico de los puntos equidistantes de una recta es una recta, en el cual utiliza el lema: *si entre dos puntos A y C, tomados en cualquier línea curva, se traza la recta AC, y si desde los infinitos puntos del arco AC se trazan perpendiculares a alguna recta, digo que es imposible que esas perpendiculares sean iguales entre sí*, como también utiliza un cuadrilátero birrectángulo en donde veremos más adelante, que este cuadrilátero es la figura fundamental de Saccheri.

[8]En [Sánchez y Sigarreta, 2011] señala que Wallis abandona el concepto de equidistancia temporalmente, donde luego utiliza este concepto y otros principios equivalentes al V Postulado, como la equidistancia de paralelas, las semejanza de triángulos, y la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.

Capítulo 2

Algunos precursores de las Geometrías No Euclidianas-GNEs

Después de que algunos personajes intentarán demostrar el VP por métodos directos, con los siguientes personajes se busca establecer la verdad del VP y de la Geometría Euclidiana por métodos indirectos. Aunque no se logra demostrar el VP, se obtuvo avances que posteriormente se reflejaron en la Geometría Elíptica y Geometría Hiperbólica.

2.1. Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733)

Saccheri, nació el 5 de septiembre 1667 en San Remo, Génova (ahora Italia), entró en la orden de los Jesuitas en Génova el 24 de marzo de 1685, orden altamente implicada en la educación superior. Fue mientras estaba estudiando en el Colegio de Brera en Milán - Italia que se animó a tomar las matemáticas e introducirse en la obra de Euclides animado por uno de sus maestros, Tommaso Ceva, y su hermano Giovanni Ceva a través de correspondencias. Saccheri publicó su *Euclides ab omni naevo vindicatus: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia* (Reivindicar a Euclides de toda Mancha) en Milán en 1733 [O'Connor y Robertson, 2009].

El *Euclides ab omni naevo vindicatus* contiene 124 páginas dividido en dos libros. En este trabajo se hará uso de la traducción al primer libro realizada por [Espitia, 2009] que contiene treinta y nueve proposiciones[1], a la vez se hará uso hasta su proposición XXXIII en el cual Saccheri comete el primer paralogismo y pertenece a una segunda conclusión en las que Saccheri pretende reivindicar a Euclides negando su VP.

La idea directriz del Padre Saccheri, es contraria a lo desarrollado por sus precedentes (quienes buscaban demostrar el VP por métodos directos de demostración). De esa forma, Saccheri admite

[1]Según [Dou, 1992], en las Proposiciones XXXIII y XXXVII del libro de Saccheri, se cometen paralogismos, y en consecuencia de la proposición XXXVII resulta una pseudodemostración en la proposición XXXIX. De donde las proposiciones XXXIII y XXXIX son supuestas demostraciones del V Postulado de Euclides.

como hipótesis válida la negación de la proposición que quiere demostrar y mediante un encadenamiento lógico de proposiciones requiere llegar a una contradicción, así demostrando la validez del VP y en consecuencia que la Geometría Euclidiana es válida y la “única existente”.

Saccheri, para llegar a su objetivo toma como base, las *primeras veintiséis proposiciones* del libro I de los *Elementos* de Euclides, y del *V Postulado* de Euclides toma su negación. Este método de Saccheri es básicamente el que condujo a las nuevas Geometrías No Euclidianas. Entre las proposiciones desarrolladas en *Euclides ab omni naevo vindicatus* se busca encontrar una contradicción al utilizar la negación del V Postulado y así poder afirmar la veracidad del mismo postulado, por ende decir que la Geometría Euclidiana es válida y la “única existente” (es a lo que se refiere reivindicar a Euclides).

Saccheri, utiliza para su investigación, un *Cuadrilátero Birrectángulo Isósceles* $ABCD$ (cuadrilátero con dos lados iguales y perpendiculares a la base; de ángulos $\widehat{A}$ y $\widehat{B}$ rectos). Los ángulos $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$ adyacentes al lado opuesto de la base los utiliza para negar el VP, dado que en la geometría de Euclides estos ángulos también serían rectos entonces, admitiendo que estos dos ángulos son obtusos o agudos se negara el VP. Esta figura es conocida como *Figura Fundamental de Saccheri* o *Cuadrilátero de Saccheri* (ver figura 2.1).

Figura 2.1: Cuadrilátero de Saccheri.
Fuente: esta investigación.

A partir de este cuadrilátero, Saccheri estudia los ángulos diferentes a los ángulos rectos dados; es decir, cuando los ángulos $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$ son rectos, obtusos o agudos, nombrando cada una de estas discusiones como la *Hipótesis del Ángulo Recto*, *Hipótesis del Ángulo Obtuso* o *Hipótesis del Ángulo Agudo* y las simboliza con *HAR, HAO, HAA* respectivamente.

Ahora, del Cuadrilátero de Saccheri, surge la duda que si los ángulos $\widehat{C}$ y $\widehat{D}$ son iguales o desiguales. Al respecto, Saccheri enuncia y demuestra la proposición I: *En un cuadrilátero con dos lados opuestos iguales que forman con la base ángulos iguales, se tiene que los ángulos restantes serán iguales.*

Otro resultado notable es la proposición III: *En un Cuadrilátero Birrectángulo Isósceles, según se admita la HAR o HAO o HAA se tendrá, la base igual que su lado opuesto, la base mayor que su lado opuesto o la base menor que su lado opuesto respectivamente y recíprocamente.*

En las proposiciones V-VII, demuestra que *si en un sólo cuadrilátero es verdadera la HAR, la HAO o HAA, la hipótesis será verdadera en todos los demás cuadriláteros.* De este resultado le permite concluir que entre las hipótesis en el Cuadrilátero de Saccheri, una y sólo una se cumplirá.

En la proposición IX *según se verifique la HAR, HAO o la HAA, la suma de los ángulos de un triángulo rectángulo será igual, mayor o menor que dos ángulos rectos respectivamente.* En su forma general para cualquier triángulo se verificaría en su descomposición en dos triángulos rectángulos. La proposición XV es el inverso de esta proposición para un triángulo cualquiera.

En las proposiciones XI y XII dice que, *en HAR e HAO, una perpendicular y una oblicua a una misma recta se encuentran.* Demostrando la validez del V Postulado en las HAR e HAO en la proposición XIII: *En HAR e HAO es verdadero el V Postulado de Euclides*, es decir, en HAR e HAO si al realizar la suma de los ángulos internos a un mismo lado de la transversal que corta a otras dos rectas, es menor que dos rectos, las dos rectas se encuentran en el lado de estos ángulos.

Este resultado es complementado en el Escolio XIII.II explicando la demostración cuando en los ángulos internos del mismo lado de una transversal a dos rectas son uno obtuso, el otro agudo y sumen menos que dos rectos.

Por último, Saccheri para obtener finalmente el primer objetivo parcial (rechazar la HAO), presenta la proposición XIV, *la HAO es absolutamente falsa, porque se destruye a si misma*,

Recuérdese que el objetivo de Saccheri es revindicar a Euclides en cuanto a la verdad de su V Postulado. Que, tanto para Saccheri y muchos otros autores, no era evidente el VP por su extenso enunciado y su comprensión como postulado. Con esta proposición XIV termina la reivindicación sólo por el camino de HAO; el cual en [Espitia, 2009, pp. 31-32] refuta esta hipótesis al darse cuenta que, de HAR e HAO se deduce el V Postulado de Euclides (dos rectas que hacen con una transversal a ellas, ángulos interiores del mismo lado de la transversal menores que dos rectos, se encontraran del lado de aquellos ángulos). Pero HAR es equivalente al VP, donde es posible demostrar que la suma de los ángulos internos en un triángulo es igual a dos rectos; mientras que en HAO es posible demostrar que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es mayor que dos rectos, los cuales son resultados contradictorios.[2]

Además en la misma demostración de La proposición XIV en la traducción [Espitia, 2009, p. 32], encuentra dos rectas transversales a dos rectas dadas; tales que, con una transversal forma ángulos internos de un mimo lado a ella menores que dos rectos (así, las dos rectas dadas se encuentran de ese mismo lado), pero con la otra transversal la suma de los ángulos internos de un mismo lado a ella y del mismo sentido de los anteriores ángulos da dos rectos (las dos rectas dadas no se encontraran en ese mismo lado), contradiciendo que con la primera transversal las rectas se encontraran.

Saccheri no se da cuenta que estas consecuencias, que lo llevan a contradicción, pertenecen a una geometría diferente a la euclidiana, la que hoy se conoce como *Geometría Elíptica*, esta geometría fue la segunda Geometría No Euclidiana descubierta y consolidada teóricamente con Bernhard Riemann (1826-1866).

Como lo explica [Dou, 1992, p, 49], Saccheri con la geometría del Ángulo Obtuso aun no tenía una nueva Geometría No Euclidiana, aunque cabe señalar no era su objetivo. Apenas obtuvo la misma Geometría Euclidiana omitiendo su VP y continuando como Euclides asumiendo la recta de longitud infinita, que concluye diciendo.

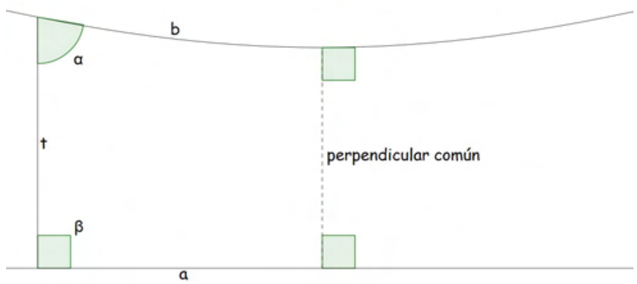
> Así pues, Saccheri supone la longitud infinita de la recta, lo que contradice los postulados de la geometría elíptica. Consecuentemente, Saccheri puede sin paralogismo alguno demostrar, y de hecho demuestra que su geometría del ángulo obtuso lleva a la contradicción y por tanto es absolutamente falsa.

Para reivindicar a Euclides y en particular probar que el V Postulado es válido, Saccheri continúa abordando la HAA. En la proposición XVII asegura que, *en HAA, para cualquier segmento tan pequeño como se quiera, existen dos rectas que lo corten tales que una sea perpendicular, la otra oblicua, y prolongadas cuanto se quiera no se encuentran.* Saccheri, en los Escolios XIII,I y XVII.I asegura que: *en la HAA no se puede demostrar que, si en dos restas dadas y una transversal a ellas, los ángulos internos de un mismo lado de la transversal suman menos que dos rectos, entonces las dos rectas dadas se encuentren.*

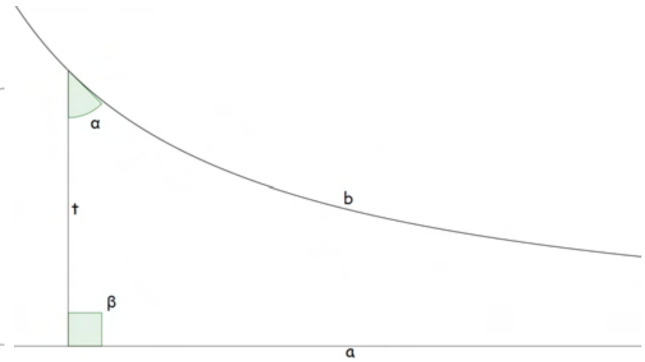
Saccheri habiendo destruido la HAO y queriendo continuar con su segundo propósito, destruir la HAA, a partir de la proposición XXII se dedica exclusivamente a demostrar propiedades de la HAA y direccionar hacia una contradicción que destruya esta hipótesis.

Así, de la Proposición XXII a la proposición XXVI Saccheri se dedica a probar que, *en HAA, si dos rectas a y b no incidentes tienen con una transversal t, ángulos internos α y β de un mismo lado de la transversal que sumen menos que dos rectos, las dos rectas a y b tienen una perpendicular en común de ese lado o de ese lado prolongadas se aproximan cada vez más* (ver figura 2.2).

[2] Una analogía similar se encuentra en [Bonola, 1923, p. 41] sumando los ángulos en un Cuadrilátero de Saccheri (la suma de los ángulos en cuadriláteros siendo iguales a cuatro rectos en la HAR y mayor que cuatro rectos en la HAO).



(a) Comparten perpendicular.



(b) Se aproximan cada vez más.

Figura 2.2: Rectas no incidentes sobre la recta a.
Fuente: esta investigación.

La proposición XXV afirma que, *si dos rectas coplanares las cuales se aproximan cada vez más la una de la otra manteniendo una distancia mayor a alguna longitud constante t, entonces HAA se destruye.*[3]

La proposición XXVII afirma que, *en HAA, en dos rectas que se cortan formando un ángulo en su defecto lo más pequeño que se quiera. Entonces, siempre existirá en una de las rectas, una perpendicular lo suficientemente alejada del punto de corte de las dos primeras tal que no corte a la otra recta y con esta se aproxime cada vez más.* Esta proposición es tomada de [Dou, 1992, p. 50], es una alternativa del original expuesto en [Espitia, 2009, p. 54] el cual afirma que, si se llegasen a encontrar no hay lugar para HAA. Por ejemplo, en la figura 2.3, las rectas t y n se cortan en el punto P formando el ángulo α, y en la recta t existe alguna perpendicular l lo suficientemente alejada del punto P, tal que no corte a la recta n y con esta se aproximen cada vez más.

Con las anteriores proposiciones XXV y XXVII, Saccheri señala dos posibles formas en las cuales se destruiría la HAA, en las dos proposiciones involucra las asintóticas señalando que al prolongarse indefinidamente, su distancia no puede terminar siendo mayor a alguna longitud constante ni las rectas se cortarán entre ellas.

Por lo anterior, desde la proposición XXVIII a XXXII desarrolla resultados entorno a, *si una transversal a dos rectas no incidentes, hace ángulos internos del mismo lado tales que, con la primera un ángulo recto y con la segunda el menor ángulo para el cual las rectas se aproximan cada vez más, la distancia de las dos rectas que se acercan acaba por ser menor a alguna longitud constante t.*

Por consiguiente [Bonola, 1923, p. 42] realiza el siguiente razonamiento.

Dada, como *hipótesis*, la existencia de dos recta coplanarias no incidentes y des-

[3]Si las rectas no incidentes, prolongadas se aproximan cada vez más, se hace referencia a las rectas asintóticas; como se observa en la Proposición XXV, en adelante tales rectas entiéndase de esa manera. (estas rectas, son rectas limites que no deben confundirse con rectas por devajo de la recta a, las cuales con la recta b se aproximan cada vez más, pero su distancia sera mayor a alguna longitud constante t).

provistas de perpendiculares comunes, Saccheri demuestra que tales rectas van siempre acercándose (prop. XXIII) y que su distancia acaba por ser menor que un segmento tan pequeño como se quiera (prop. XXV). En otros términos, si existen dos rectas coplanarias no incidentes, sin perpendiculares comunes, deben comportarse *asintóticamente* entre sí.

En la HAA dada una recta l, un punto P fuera de l y una perpendicular t a l que pase por P, Saccheri asegura la existencia de exactamente dos rectas m y n que se intersecan en el punto P y hacen con la perpendicular t el menor ángulo interno α para el cual, una sea asintótica a l por la derecha y la otra asintótica a l por la izquierda. El haz de rectas al que pertenecen estas asintóticas se divide en tres grupos (ver figura 2.3):

1. Las dos rectas m y n asintóticas, encontradas por Saccheri.
2. Rectas no asintóticas que inciden sobre la recta l.
3. Rectas no asintóticas y no incidentes sobre la recta l, pero con ella comparten una perpendicular (como se menciona más adelante, son las rectas paralelas en Saccheri).

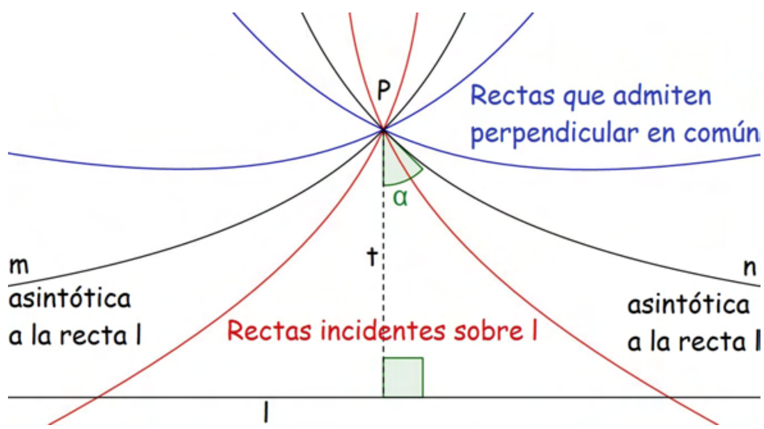


Figura 2.3: Haz de rectas por el punto P fuera de la recta l.
Fuente: esta investigación.

De esta manera llega a la proposición en la cual rechaza en su totalidad la Hipótesis del Ángulo Agudo, proposición XXXIII, *HAA es absolutamente falsa porque repugna a la naturaleza de la línea recta*. Según [Dou, 1992, p, 51] este es el primer paralogismo, el cual el error en la demostración se encuentra en el primer párrafo.

En esencia Saccheri admite el punto de encuentro en el infinito de dos rectas que se aproximan cada vez más, y además en este punto existe una perpendicular en común a las dos rectas asintóticas;

es decir, Saccheri abordando la HAA en la geometría de Euclides, aplicando propiedades en el infinito que solo se cumplen en una geometría finita, encuentra la contradicción que las dos rectas que se aproximan cada vez más tengan un punto de encuentro en el infinito y que a la vez en ese punto compartan una perpendicular. Otro aspecto de notar es que, Saccheri por su lugar como padre ostentaba un carácter de pensamiento conservador, que posiblemente también tuvo influencia al rechazo de la Hipótesis de Ángulo Agudo. Así, [Bonola, 1923, p. 44] menciona que, para refutar la HAA, Saccheri se basa confiando más en la fe y en la intuición que en la lógica.

Esto último es reflejado en la *definición* del concepto de *rectas paralelas* para Saccheri, que lo expresa en el corolario XXV.II como *dos rectas coplanarias que poseen una perpendicular común.* De este modo, dos rectas no son paralelas si carecen de una perpendicular común y al ser prolongadas en "cualquier" sentido deberán encontrarse.

Saccheri no se percató de lo que sucede con las rectas asintóticas, que en realidad hace parte de una nueva geometría que hoy se la conoce como *Geometría Hiperbólica.* La Geometría Hiperbólica es la primera geometría descubierta y consolidada teóricamente por Gauss (1777-1855), J Bolyai (1802-1860) y Lobachevski (1793-1856).

2.2. Johann Heinrich Lambert (1728-1777)

Lambert, nació el 26 de agosto 1728 en Mülhausen, Alsace (ahora Mulhouse, Francia). Por lo general, sus días de niño hasta los 15 años, estaban completamente ocupados en ayudar a su padre (un sastre de profesión), pero por las noches él estudiaba temas científicos por su cuenta. Por sus bajos ingresos en la familia decide trabajar en una ferrería, perjudicando sus estudios. A la edad de 17 años ocupó el puesto como secretario de Johann Rudolf Iselin quien era el editor del *Basler Zeitung*, un diario conservador. En 1748, cuando tenía veinte años, Lambert tomó una nueva posición, esta vez como profesor en la casa del conde Peter von Salis en Chur, Chur fue una ciudad ubicada en Graubünden que en ese momento era parte de la Confederación Suiza. Se convirtió en tutor del nieto del conde y su primo, ambos de once años de edad, y otro miembro de la familia que tenía siete años. Lambert así tuvo acceso a la excelente biblioteca en la casa del conde. En 1760 Leonhard Euler recomendó a Lambert para el puesto de profesor de astronomía en la Academia de Ciencias de San Petersburgo en la cual se posicionó por varios años. Lambert realizó estudios en matemáticas, astronomía, física y filosofía. En 1766 Lambert escribió *Theorie der Parallellinien*; un estudio del V Postulado de Euclides [O'Connor y Robertson, 2004].

Theorie der Parallellinien, fue publicado después de la muerte de Lambert en 1786 por Daniel Bernoulli (1744-1807). Esta obra se divide en tres partes, en la primera expone en forma crítica y filosófica cuestiones relacionadas al V Postulado de Euclides, la segunda parte presenta proposiciones sencillas equivalentes al VP que de igual manera deberían ser demostradas, la tercera y en la que nos centraremos en este apartado se basa en sus investigaciones semejantes a las de Saccheri; esta parte se divide a la vez en tres secciones, que se detallarán más adelante.

Considerando como su figura fundamental un *Cuadrilátero Trirrectángulo* $ABCD$ (cuadrilátero donde tres de sus ángulos son rectos) y con respecto a su cuarto ángulo $\widehat{D}$ admite, de la misma forma que Saccheri, la HAR, la HAO y la HAA que corresponden a, si el ángulo $\widehat{D}$ se lo considera recto, se lo considera obtuso o se lo considera agudo respectivamente. La HAO y la HAA hacen correspondencia a la negación del V Postulado de Euclides.

Figura 2.4: Cuadrilátero de Lambert.
Fuente: esta investigación.

En la **primera sección** de la tercera parte del libro de Lambert, se considera la *HAR* el cual, al mostrar que si todos los ángulos de su cuadrilátero son *rectos* entonces, todos los cuadriláteros de Lambert son cuadriláteros rectángulos, así, sin dar más explicaciones concluye que existe una paralela a una recta dada, también de forma implícita demuestra el V Postulado de Euclides [Dou, 1992, p. 55].

En la **segunda sección**, se considera la *HAO*, en el *Cuadrilátero Trirrectángulo* haciendo el cuarto ángulo $\widehat{D}$ obtuso, en [Dou, 1992, p. 55] menciona que Lambert demuestra sin necesidad del *principio de continuidad* pero suponiendo implícitamente la recta con longitud infinita, que dos de los lados opuestos del cuadrilátero, al prolongarlos hacia un mismo lado, sus distancias decrecen hasta encontrarse. Por lo tanto la HAO queda descartada.[4]

En la **tercera sección**, Lambert demuestra resultados que se encuentran en la obra de Saccheri pero por caminos diferentes, su mayor diferencia entre las demostraciones es la no utilización de rectas asintóticas.

Lambert aborda la *HAA* utilizando el *cuadrilátero trirrectángulo* el cual, en este caso tiene tres

[4]En [Bonola, 1923, p. 46] se realiza una demostración aplicando el *postulado de Arquímedes* (que forma parte de los axiomas de continuidad), pero que implícitamente incluye la continuidad de la recta.

de sus ángulos rectos y el cuarto ángulo $\widehat{D}$ agudo. En [Bonola, 1923, p. 47] expresa que de forma similar a la anterior hipótesis, recurre a la distancia entre dos de los lados opuestos del cuadrilátero. Partiendo de un lado adyacente a los ángulos rectos hacia el lado opuesto adyacente a un ángulo agudo, la distancia de los otros dos lados opuestos crece y a la vez crecen las diferencias de estas distancias. Pero en este resultado Lambert no encuentra contradicción, así al igual que Saccheri lo descarta sin ningún razonamiento meramente matemático.

De esta manera no se evidencia claramente la forma que Lambert descarta la HAA, y no se puede decir que es a la misma manera como lo realizó Saccheri ya que Lambert no utilizó las asintóticas. Así Lambert se ve obligado a proseguir, del cual a pesar de no llegar a una contradicción contundente obtiene unos resultados matemáticos destacados.

[Dou, 1992, p. 56] menciona que, entre las contribuciones más notables de Lambert esta la fórmula por la cual se puede obtener el área S de un triángulo cualquiera,

$$S = \omega(\pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C})$$

Donde ω es una constante del plano y $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ los ángulos interiores de un triángulo. Obsérvese, lo parecido de la anterior fórmula con la fórmula del área de un triángulo en la Trigonometría Esférica, donde R es el radio de a esfera,

$$S = R^2(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi)$$

Según [Bonola, 1923, p, 50] otro de los trabajos interesantes que se encuentran en la *Theorie der Parallellinien* es la comparación de la geometría en el plano que sería válida si la segunda hipótesis (la HAO) fuera verdadera, con la Geometría Esférica, como también las interesantes observaciones de la independencia de la Geometría Esférica del Postulado de las Paralelas.

Así, de esta manera tanto en [Bonola, 1923, p. 51] y [Dou, 1992, p, 57] mencionan que, Lambert posiblemente observó y sacó la conclusión de que, *a partir de la esfera de radio imaginario se pueda obtener la geometría en la tercera hipótesis (HAA), o que, la tercera hipótesis se verifica sobre la esfera de radio imaginario.*

Del cual en [Dou, 1992, p. 57] afirma que, aunque Lambert no lo expresa explícitamente, cabe pensar que cayó en la cuenta, que a partir de la fórmula del área de un triángulo esférico, si se remplaza el radio R por el radio imaginario $Ri = R * \sqrt{-1}$ resulta,

$$S = R^2(\pi - \widehat{A} - \widehat{B} - \widehat{C})$$

Que es precisamente la fórmula del área de un triángulo en la Geometría de la Tercera Hipótesis de Lambert, en donde lógicamente la constante del plano ω sería R^2.

Por lo anteriormente mencionado y dado que Lambert no publicó su libro en vida, cabe la incertidumbre, que le quedaba todavía dudas sobre las Hipótesis del Ángulo Obtuso y Ángulo Agudo, y por ende la duda de la existencia de una posible nueva geometría y la independencia del V Postulado de Euclides de los otros cuatro restantes.

2.3. Franz Adolph Taurinus (1794-1874)

Taurinus, nació el 15 de Noviembre de 1794 en Bad König, Alemania, catorce años después del nacimiento de su tío **Ferdinand Karl Schweikart** (1780-1859) (profesor de derecho en la Universidad de Königsberg), el cual desempeñó un papel importante en la influencia de ideas y logros académicos en Taurinus, que también estudio derecho. Desde 1822 vivió en Colonia como un hombre de medios independientes capaz de dedicarse por entero a la investigación y no vinculado a la enseñanza. Dos años antes de irse a vivir a Colonia empezó a tener correspondencia con su tío en temas matemáticos y, en gran parte debido a la influencia de Schweikart, comenzó a investigar el problema de las líneas paralelas y el quinto postulado de Euclides[5], como también influenciado por **Carl Friedrich Gauss**, uno de los descubridores de la primer Geometría No Euclidiana con quien compartió cartas acerca de desarrollos en las nuevas geometrías [O'Connor y Robertson, 2001]. Taurinus, con la confianza de poder demostrar el V Postulado de Euclides, en 1825 publicó su *Theorie der Parallellinien*, el cual, el mismo año se da cuenta de aspectos poco convincentes, que consecuentemente en 1826 publica *Geometriae prima elementa*, pero drásticamente Taurinus quema su segundo libro luego de enviar algunos ejemplares y no tener el reconocimiento por él esperado. Y así, por resultado de aquel despecho, es muy difícil encontrar un ejemplar de este libro, [Dou, 1992] citando a [Stäckel y Engel, 1895].

En su primer libro *Theorie der Parallellinien*, la geometría correspondiente a la Hipótesis de Ángulo Obtuso es fácilmente descartada, dándose cuenta que dada cualesquier recta, todas sus perpendiculares se encontraran en dos puntos simétricos a la primer recta dada. Luego, por esos dos puntos pasan infinitas rectas siendo contradictorio al primer postulado de la Geometría Euclidiana que nos dice *por dos puntos solo cabe una única recta.*

Por lo anterior, también tuvo que haberle llamado la atención el observar que las *rectas paralelas perpendiculares a la primera* se encuentren, de esa manera el primer postulado de Euclides no encajaría en la HAO. De esta manera culmina y rechazando la HAO, continúa con la HAA.

En [Dou, 1992, p. 58] aparece un escrito traído de Paul Stäckel donde afirma que, Taurinus mantiene una postura en la cual no excluye el *postulado de línea recta* de Euclides, que *entre dos puntos sólo es posible una única recta*, y afirma que la geometría correspondiente a la HAA en la que la suma de los ángulos de un triángulo es menor que dos rectos no contiene ninguna contradicción en si misma con respecto al postulado de línea recta. Por lo tanto para Taurinus la contradicción debe ser admitiendo infinitos de estos sistemas[6], de que por dos puntos pase exclusivamente una

[5] La Geometría correspondiente a la Hipótesis del Ángulo Agudo, Schweikart la llamó *Geometría Astral*.

[6] Cada que se determina específicamente una recta, a la vez se determina el sistema en el cual todas sus rectas tienen las mismas características y en aquel sistema por dos puntos solo pasara una única recta. Pero, se podrá obtener infinitos de estos sistemas.

Además, cada recta que pasa por dos puntos como se menciona más adelante, está determinada por el parámetro P de Schweikart y Taurinus, y estos tuvieron la habilidad de poner en relación el parámetro con otras cantidades que aparecen en geometría. por ejemplo: el límite superior del área de un triángulo cuando los lados son asintóticos dos única recta, en donde cada uno de estos sistemas tendrán igual validez. Así, se tendrá que por dos puntos del espacio existirían infinitas rectas.

[Dou, 1992] menciona que tanto en el primer y segundo libro de Taurinus se encuentran aspectos importantes, como por ejemplo, que las infinitas rectas entre dos puntos donde cada una pertenece a un sistema de los anteriormente mencionados, están determinadas por una constante, la *Constante de Schweikart* que luego fue encontrada nuevamente por su sobrino Taurinus llamándola *Parámetro* P. En Dou nos dice que Taurinus muestra que este parámetro puede tomar infinitos valores desde el cero al infinito, y que al fijar un valor la Geometría queda unívocamente determinada.

Pero, como Taurinus para cada parámetro no puede encontrar contradicción al sistema definido, se tendrá que todos los sistemas serán válidos. Es decir, por dos puntos pasaran infinitas rectas de las cuales cada una con relación al parámetro asignado forma un sistema válido.

Como ya se afirmó, Taurinus no excluye que, entre dos puntos solo pase una única línea recta. En [Dou, 1992, p, 59] refiriéndose a Stäckel menciona que, Taurinus en su primer libro en el último párrafo rechazando la Geometría del Ángulo Agudo escribe:

> "Pero entre dos puntos deber haber en definitiva sólo una única línea recta: de donde, las líneas de una geometría en la cual la suma de los ángulos de cualquier triángulo es menor que dos rectos, no pueden ser líneas rectas" (p. 102) (Stáckel, p. 266).

Es decir, que tanto las líneas como los triángulos no están absolutamente determinados como lo requiere Taurinus, y que *para que queden absolutamente determinados, las líneas rectas no deben depender de un parámetro, por lo tanto esta geometría no es rectilínea.*

En el segundo libro de Taurinus, aparte de las mejoras a las demostraciones y deducciones del primer libro, entre sus contribuciones en el camino de estos estudios esta la deducción de la Trigonometría valida en la Geometría del Ángulo Agudo que la llamo *Geometría logarítmico esférica.* En [Dou, 1992, p. 60] Taurinus lo expresa así,

> Ya estaba esto impreso y me retaba sólo presentar mi visión sobre la verdadera esencia de esta geometría, cuando alcancé finalmente la certeza de que esta visión efectivamente puede demostrarse. Desde el principio había abrigado la sospecha de que una tal geometría tenía que ser en cierta manera la inversa (die Umkehrung) de la esférica, que implicaba logaritmos y que se podía deducir de las fórmulas generales de la geometría esférica; y me maravillaría, que una cosa así, que es tan clara y está al alcance de la mano de cualquiera, no la hubiese visto antes y hubiese tenido tantas prolijidades,

a dos $\dfrac{\pi * P^2}{(\log(1+\sqrt{2}))^2}$ por Schweikart, y la máxima altura posible de un triángulo rectángulo isósceles en términos de k en relación con el parámetro P, $k = \dfrac{P}{\log(1+\sqrt{2})}$ por Taurinus, donde k es la constante de Gauss [Gray, 1992, pp. 141-145].

si no me acordara de que precisamente cosas, que parecen evidentes, a menudo hayan quedado escondidas largo tiempo, incluso a hombres importantes, (pp. 64-65; Stäckel, pp. 270-271)[7].

Taurinus partiendo de las formulas fundamentales de la Trigonometría Esférica,

$$\operatorname{sen}\widehat{B} * \operatorname{sen}\frac{a}{k} = \operatorname{sen}\widehat{A} * \operatorname{sen}\frac{b}{k}$$
$$\cos\frac{a}{k} = \cos\frac{b}{k} * \cos\frac{c}{k} + \operatorname{sen}\frac{b}{k} * \operatorname{sen}\frac{c}{k} * \cos\widehat{A}$$
$$\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B} * \cos\widehat{C} + \operatorname{sen}\widehat{B} * \operatorname{sen}\widehat{C} * \cos\frac{a}{k}$$

Donde $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ son los ángulos en cada vértice, a, b, c son los lados del triángulo y k es el radio de la esfera, Ahora, en ellas sustituyendo el radio real k por el radio imaginario ik donde $i = \sqrt{-1}$ y mediante el uso de *funciones hiperbólicas*, se tiene las siguientes formulas fundamentales en la *Geometría Logarítmico Esférica* de Taurinus o que es lo mismo en la *Geometría Hiperbólica*,

$$\operatorname{sen}\widehat{B} * \operatorname{senh}\frac{a}{k} = \operatorname{sen}\widehat{A} * \operatorname{senh}\frac{b}{k}$$
$$\cosh\frac{a}{k} = \cosh\frac{b}{k} * \cosh\frac{c}{k} - \operatorname{senh}\frac{b}{k} * \operatorname{senh}\frac{c}{k} * \cos\widehat{A}$$
$$\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B} * \cos\widehat{C} + \operatorname{sen}\widehat{B} * \operatorname{sen}\widehat{C} * \cosh\frac{a}{k}$$

En los apartados 3.2 y 3.3 de este trabajo se puede observar el paso de las formulas fundamentales en la Trigonometría Esférica a las formulas fundamentales en la Trigonometría Hiperbólica. Aunque cabe aclarar, que se lo ha realizado para la *esfera de radio unidad*, por el cual la constante k está en forma implícita.

En [Bonola, 1923, pp. 57-79], podemos encontrar entre los aportes de Taurinus en la *Trigonometría Hiperbólica* o como él le llamo *Geometría Logarítmico Esférica*, los siguientes:

- Verificación, en la Geometría Logarítmico Esférica que, la suma de los ángulos en cualquier triángulo es menor que 180^o, que es lo mismo menor que π o dos ángulos rectos.
- Entre más pequeño sea el triángulo la suma de sus ángulos se aproximan a 180^o.
- Cuando k tiende a infinito, de igual manera la suma de los ángulos tienden a 180^o como en la geometría ordinaria y quedando similar que en la geometría ordinaria.
- En las formulas fundamentales de la Logarítmico Esférica para $k = \infty$, se convierten en las fórmulas fundamentales de la trigonometría plana Euclidiana.

[7](pp. 6a-65) se refiere al libro de Taurinus y (Stäckel, pp. 270-271) al libro de Stäckel.

- La relación de la constante o parámetro P de Schweikart y Taurinus con la constante k de Gauss, donde k expresa la longitud de la circunferencia y P está relacionado con el ángulo de paralelismo de Lobachevski.

$$k = \frac{P}{\log(1+\sqrt{2})}$$

- El área de un triángulo es proporcional a su deficiencia donde la deficiencia de un triángulo hiperbólico está dado por

$$\pi - (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}) = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 * \cos\frac{a}{2} * \cos\frac{b}{2} * \cos\frac{c}{2}}$$

  Y que el límite superior del área es,

$$\frac{\pi * P^2}{(\log(1+\sqrt{2}))^2}$$

- La longitud de la circunferencia de radio r es,

$$2 * \pi * k * \operatorname{senh}\frac{r}{k}$$

- Que el área del circulo está dado por,

$$2 * \pi * k^2(\cosh\frac{r}{k} - 1)$$

- El área de la esfera es,

$$4 * \pi * k^2 * \operatorname{senh}^2\frac{r}{k}$$

- El volumen de la esfera es,

$$4 * \pi * k^3 * \frac{1}{2}(\operatorname{senh}\frac{r}{k} * \cosh\frac{r}{k} - \frac{r}{k})$$

Capítulo 3

Aspectos de las Trigonometrías Esférica e Hiperbólica

Definiciones y resultados de este capítulo están en los textos [Ayres y Alonso, 1974, pp. 144-162] y [Barrero, 2008, pp. 5-23], que se plasma en el apartado siguiente 3.1 y el apartado 3.2 sobre las fórmulas fundamentales de la Trigonometría Esférica, y a partir de estas, se utilizó el trabajo de grado [Chaves, 2001, pp. 8-12] para desarrollar el apartado 3.3 sobre las fórmulas fundamentales de la Trigonometría Hiperbólica.

3.1. Preliminares a las fórmulas fundamentales de la Trigonometría Esférica

Es necesario plantear algunos conceptos acerca de las fórmulas de senos y cosenos en la Trigonometría Esférica, aspectos importantes sobre la geometría del espacio y la geometría sobre una superficie esférica.

3.1.1. Definiciones y Conceptos en Geometría del Espacio

Definición 3.1.1 (**Perpendicularidad de una recta y un plano**). Si una recta es perpendicular a dos rectas que la intersecan en un mismo punto, es perpendicular al plano comprendido por las dos rectas, además toda recta de este plano que pase por el punto de intersección será perpendicular a la recta dada y el punto de intersección es el pie de la recta perpendicular al plano (ver figura 3.1).

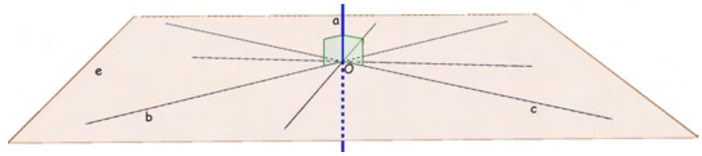


Figura 3.1: Perpendicularidad de recta y plano.
Fuente: esta investigación.

Definición 3.1.2 (**Ángulos diedros**). Cuando dos planos tienen una sola recta en común se determina cuatro regiones del espacio comprendidas entre dos semiplanos llamadas *ángulos diedros*. Aquí, se considerará el que se observa entre los semiplanos a y b y se nombrara como $A - \widehat{BC} - D$ representado en la figura 3.2. La recta de intersección BC recibe el nombre de *arista* del ángulo diedro y los semiplanos respecto a la recta de división BC y que contienen a los puntos A y D se llaman *caras* del ángulo diedro, designadas de igual manera como las caras a y b del ángulo diedro.

Se llama ángulo correspondiente al diedro, al ángulo formado por dos rectas en cada cara y cada una de ellas es perpendiculares a la arista en un mismo punto. Así, siendo EF y EH perpendiculares a la arista BC, el ángulo $\widehat{FEH}$ es el ángulo del diedro $A - \widehat{BC} - D$.

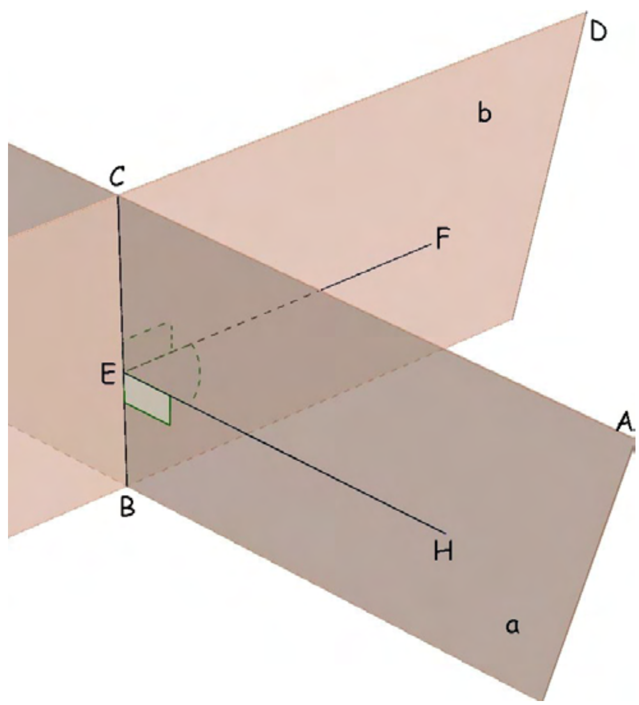


Figura 3.2: Ángulos diedros.
Fuente: esta investigación.

Definición 3.1.3 (Ángulos triedros). Cuando tres planos tienen un solo punto en común se determinan ocho regiones del espacio llamadas *ángulos triedros*. Estos ángulos triedros están comprendidos entre tres porciones de planos unidos dos a dos por semirrectas.

Las porciones de planos que comprenden el ángulo triedro se llaman *caras* del ángulo triedro. Así, aquí se considera el ángulo triedro comprendido por las caras a, b y c, que a la vez están unidas dos a dos con semirrectas llamadas *aristas* del ángulo triedro y designadas como las aristas OA, OB y OC, el punto en común O de los tres planos es el *vértice* del ángulo triedro, y el ángulo triedro se designa como el ángulo triedro $\widehat{O-ABC}$, como se representa en la figura 3.3.

Las caras a, b y c del ángulo triedro toman como sus medidas los ángulos planos $\widehat{BOC}$, $\widehat{AOC}$,$\widehat{AOB}$ respectivamente. La medida del ángulo de cada cara es siempre menor que 180°.

En un ángulo triedro, cada dos caras contiene un ángulo diedro, que en total se tienen tres ángulos diedros donde su medida es siempre menor que 180°, se designan mediante las letras $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$, y cada ángulos diedros es opuestos a las caras a, b y c respectivamente.

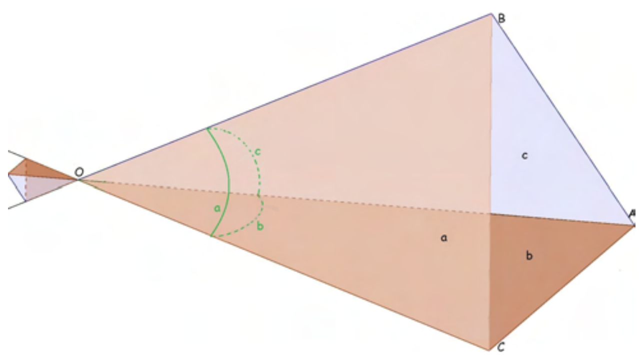


Figura 3.3: Ángulos triedros.
Fuente: esta investigación.

Definición 3.1.4 (Circunferencias máximas y menores). La intersección de un plano y una superficie esférica es una circunferencia. Si el plano secante pasa por el centro O de la esfera, la anterior intersección recibe el nombre de *circunferencia máxima*; en los demás casos, se llama *circunferencia menor*, como se representa en la figura 3.4. Los extremos del diámetro perpendicular al plano de las circunferencias (máximas o menores) reciben el nombre de *polos* de tales circunferencias, que en la figura 3.4 se los designa como los puntos P y P'.

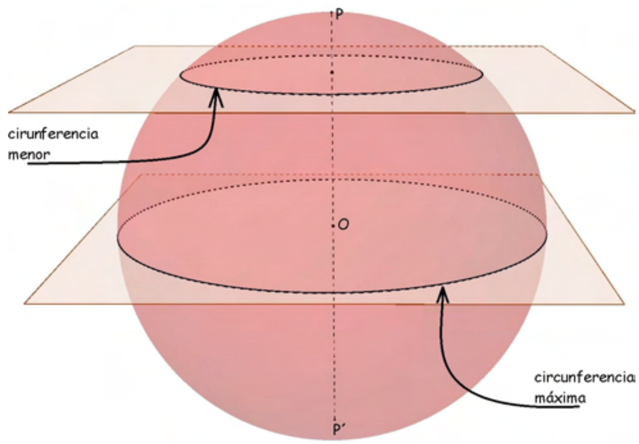


Figura 3.4: Circunferencias máximas y menores.
Fuente: esta investigación.

Definición 3.1.5 (**Distancia esférica**). Sea A y B dos puntos en la esfera no diametralmente opuestos, entonces, por ellos pasara una sola circunferencia máxima y su *distancia esférica* está dada por la medida del menor arco entre los puntos A y B de la circunferencia máxima que los contiene, el cual su medida o distancia del arco AB es la del ángulo plano $\widehat{AOB}$, donde el punto O es el centro de la esfera (ver figura 3.5).

Por ejemplo: dos puntos en una esfera que son extremos de un diámetro pertenecen a infinitas circunferencias máximas y su distancia es 180°.

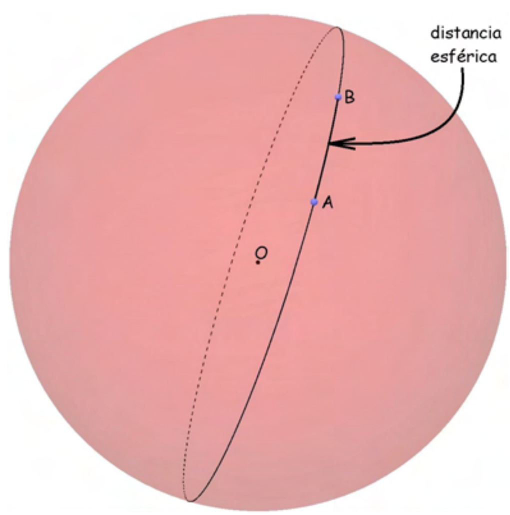


Figura 3.5: Distancia esférica.
Fuente: esta investigación.

Definición 3.1.6 (**Ángulo esférico**). Dos circunferencias máximas siempre se cortan en los extremos de un diámetro. La abertura sobre la superficie esférica de tales circunferencias se denomina *ángulo esférico* como se observa en la figura 3.6.

En la esfera con centro el punto O en la figura 3.6, los arcos de circunferencia máxima PA y PB que contienen el ángulo esférico son los *lados* del ángulo esférico, y el punto P de intersección de los arcos es el *vértice*. La medida del ángulo esférico corresponde a la medida del ángulo diedro formado por los semiplanos correspondientes a los lados del ángulo esférico y el diámetro con extremo el vértice del ángulo esférico.

Dada la circunferencia máxima que pasa por A y B y tenga como polo el punto P. Se tendrá que, la medida del arco AB de circunferencia máxima está dado por la medida del ángulo plano $\widehat{AOB}$, que corresponde a la medida del ángulo diedro $A - \widehat{PO} - B$ y esta medida a la vez con la medida del ángulo esférico $\widehat{APB}$. Así, la medida de un ángulo esférico está dada por la medida o distancia esférica del arco sobre la circunferencia máxima de polo el vértice del ángulo esférico y que une los lados del ángulo esférico por su interior.

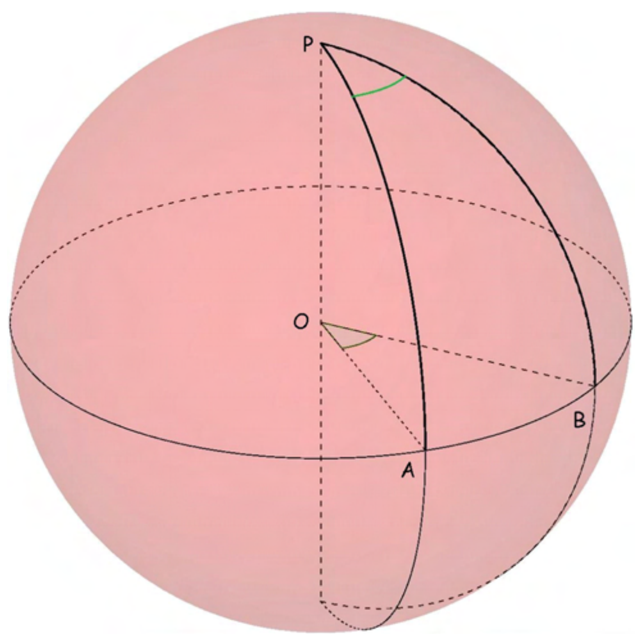


Figura 3.6: Ángulo esférico APB.
Fuente: esta investigación.

Definición 3.1.7 (**Triángulos esféricos**). La región de la superficie esférica limitada por tres arcos de circunferencia máxima que se cortan dos a dos se denomina *triángulo esférico*.

Los tres arcos AB, BC y CA del triángulo esférico ABC se denominan *lados* del triángulo esférico y se designan por c, a y b respectivamente. Los puntos A, B y C, donde se intersecan las circunferencias máximas son los *vértices del triángulo esférico*, los cuales son opuestos a los lados a, b y c respectivamente, como se observa en la figura 3.7. La designación $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ y $\widehat{C}$ también será utilizada para nombrar el ángulo correspondiente a su vértice.

La medida de cada ángulo de un triángulo esférico, está dada por la medida del ángulo diedro correspondiente. Es decir, el ángulo $\widehat{A}$ en el triángulo esférico ABC está dado por la medida del ángulo diedro $B - \widehat{AO} - C$. Ver figura 3.7.

La región comprendida entre las proyecciones de los lados a, b y c del triángulo esférico con el centro O de la esfera forma el ángulo triedro $O - \widehat{ABC}$ como se observa en la figura 3.7. Los lados de un triángulo esférico, siendo arcos de circunferencias máximas, son expresados normalmente en unidades angulares. De esta manera, los lados a, b, y c del triángulo esférico se miden por los ángulos planos $\widehat{BOC}$, $\widehat{COA}$ y $\widehat{AOB}$ respectivamente de las caras del ángulo triedro $O - \widehat{ABC}$.

Observando un ángulo triedro correspondiente a un triángulo esférico, los ángulos de las caras y los ángulos diedros no se alteran en magnitud modificando el radio de la esfera. De esta manera y según lo expuesto hasta este momento, a cada propiedad de los ángulos triedros le corresponde una propiedad análoga en los triángulos esféricos, y recíprocamente. Por lo tanto las relaciones entre los lados y ángulos en un triángulo esférico observado de esta manera son independientes del radio de la esfera, de las cuales algunas relaciones serán trabajadas en el siguiente apartado 3.2, más específicamente en el desarrollo de las llamadas fórmulas de Bessel.[1]

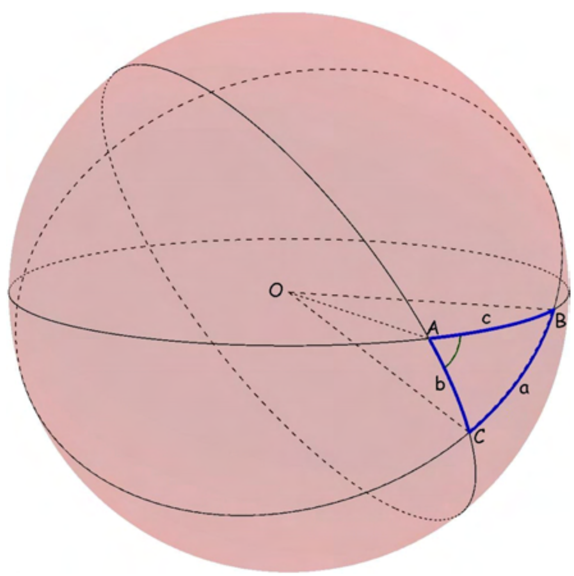


Figura 3.7: Triángulos esféricos ABC.
Fuente: esta investigación.

[1]Téngase en cuenta que en casos como, obtener la dimensión lineal (longitud) de un lado en un triángulo esférico, si es necesario conocer el radio de la esfera que lo contiene.

Definición 3.1.8 (**Triángulos esféricos polares**)**.** Dado un triángulo esférico ABC de lados a, b y c. La unión de los polos correspondientes a las circunferencias máximas que contienen a los lados a, b, y c, donde cada polo se encuentra más cerca del vértice opuesto al lado utilizado para encontrar dicho polo, forma un triángulo esférico llamado *triángulo esférico polar* o *triángulo polar*.

En la figura 3.8, los radios OC', OA' y OB' son perpendiculares a los planos que pasa por los puntos O, A, B; O, B, C; y O, A, C, respectivamente.

Los elementos de un triángulo polar se nombraran de la siguiente manera. Dada la circunferencia máxima que contiene al lado AB, su polo más cerca de C será C'; dada la circunferencia máxima que contiene al lado BC, su polo más cerca de A será A'; dada la circunferencia máxima que contiene al lado CA, su polo más cerca de B será B'. Así el triángulo esférico polar del triángulo esférico ABC es $A'B'C'$ de lados a', b' y c' respectivamente a su vértice opuesto.

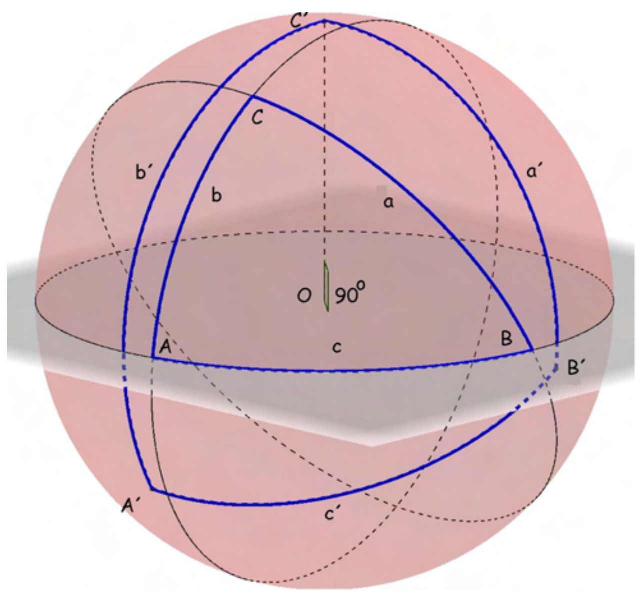


Figura 3.8: Triángulos esféricos polares.
Fuente: esta investigación.

3.1.2. Propiedades y teoremas en triángulos esféricos

Aunque las propiedades de los ángulos triedros no han sido expuestas en este trabajo, no son difíciles de deducir a partir de las propiedades de los triángulos esféricos que se exponen a continuación.

1. Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que una semicircunferencia, es decir menor que 180°.

$$a < 180^\circ$$

2. Cualquier ángulo esférico es menor que 180°.

$$\widehat{A} < 180^\circ$$

3. Cada lado del triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que el módulo de su diferencia.

$$|a - b| < c < a + b$$

4. La suma de los lados de un triángulo esférico es menor que cuatro ángulos rectos

$$a + b + c < 360^\circ$$

La expresión $360^\circ - (a + b + c)$ se llama *defecto esférico*.

5. En un triángulo esférico, si dos lados son iguales, los ángulos opuestos son iguales, y recíprocamente.

$$a = b \Longleftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B}$$

6. En un triángulo esférico, si dos lados son desiguales, los ángulos opuestos son desiguales, a mayor lado se opone mayor ángulo y recíprocamente.

$$a > b \Longleftrightarrow \widehat{A} > \widehat{B}$$

7. La suma de los tres ángulos en un triángulo esférico es mayor que dos ángulos rectos y menor que seis ángulos rectos.

$$180^\circ < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 540^\circ$$

El exceso en la suma del valor de los tres ángulos esféricos en un triángulo esférico con respecto a 180°, se llama *exceso esférico*.

$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - 180^\circ$ es el exceso esférico y se lo representa por E.

Véase dos Teoremas correspondientes a triángulos esféricos.

Teorema 3.1.1. *Si el triángulo esférico ABC tiene como triángulo polar $A'B'C'$ entonces ABC es triángulo polar del $A'B'C'$.*

Teorema 3.1.2. *Dado un triángulo esférico y su triángulo polar, cada ángulo esférico de cualquiera de los triángulos dados es igual al suplemento del lado correspondiente del otro triángulo. Es decir, dado el triángulo esférico ABC y su triángulo polar $A'B'C'$, se tiene que,*

$$\widehat{A} = 180^\circ - a' \ \widehat{B} = 180^\circ - b' \ \widehat{C} = 180^\circ - c'$$

$$\widehat{A'} = 180^\circ - a \ \widehat{B'} = 180^\circ - b \ \widehat{C'} = 180^\circ - c$$

3.2. Fórmulas fundamentales de la Trigonometría Esférica

El apartado anterior, tienen gran importancia para un mejor entendimiento de las fórmulas de senos y cosenos de la Trigonometría Esférica o también conocidas como las Fórmulas de Bessel, las cuales fueron deducidas por primera vez por el matemático Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846), son relaciones de lados y ángulos de triángulos en la Trigonometría Esférica aplicando seno y coseno tanto a ángulos como a lados de éstos.

3.2.1. Teorema del seno

El seno de cada lado es directamente proporcional al seno de cada ángulo opuesto en un triángulo esférico.

Sobre una esfera de centro O, determínese un triángulo esférico ABC cuyos lados a y b sean menores que $90°$. Únase O con los vértices del triángulo para formar el ángulo triedro $\widehat{O-ABC}$. Por C pasa una circunferencia máxima que corta perpendicularmente en H a la circunferencia máxima que pasa por el arco AB. Sea $CH = h_c$ el cual se llama altura esférica del triángulo (ver figura 3.9).

Proyéctese ortogonalmente el vértice C sobre el plano OAB en P y P sobre las rectas OA en N y OB en M, únase el vértice C con M y N. Se obtiene así los triángulos rectángulos planos CPN y CPM rectos en P.

Obsérvese, como la recta CP es ortogonal al plano OAB también es perpendicular a la recta OA. De esta manera en el triángulo plano CPN por contener dos perpendiculares a OA, la recta CN también es perpendicular a OA, de manera análoga la recta CM es perpendicular a la recta OB. Se obtiene así los triángulos rectos planos CNO y CMO rectos en N y M respectivamente.

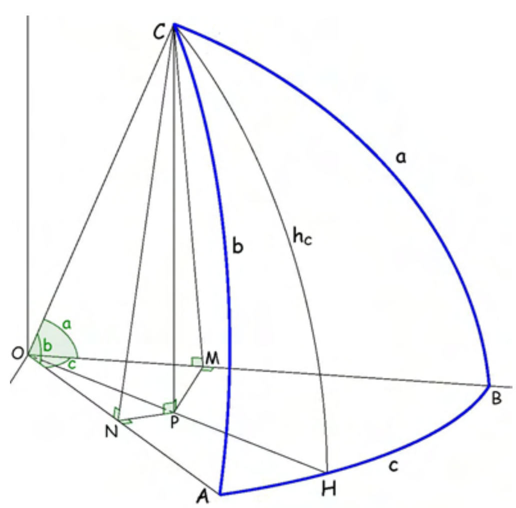


Figura 3.9: Triángulos esféricos ABC.
Fuente de investigación: [Barrero, 2008, p. 19].

Obsérvese que el ángulo plano $\widehat{CNP}$ es correspondiente al ángulo diedro $B - \widehat{OA} - C$, el cual sirve de medida al ángulo esférico $\widehat{A}$ del triángulo esférico. Por tanto, de los triángulos CPN y CPM se tiene:

$$\operatorname{sen}\widehat{A} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CN}} \longrightarrow \overline{CP} = \overline{CN} * \operatorname{sen}\widehat{A}$$
$$\operatorname{sen}\widehat{B} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CM}} \longrightarrow \overline{CP} = \overline{CM} * \operatorname{sen}\widehat{B}$$

Igualando ambas ecuaciones

$$\overline{CN} * \operatorname{sen}\widehat{A} = \overline{CM} * \operatorname{sen}\widehat{B} \tag{3.2.1}$$

Por otro lado, la medida de los lados AC y BC son las de los ángulos planos $\widehat{AOC}$ y $\widehat{BOC}$ respectivamente, que a la vez corresponden con los ángulos planos de vértice O en los triángulos CNO y CMO respectivamente, obteniendo que:

$$\operatorname{sen} a = \frac{\overline{CM}}{\overline{OC}} \longrightarrow \overline{CM} = \overline{OC} * \operatorname{sen} a$$
$$\operatorname{sen} b = \frac{\overline{CN}}{\overline{OC}} \longrightarrow \overline{CN} = \overline{OC} * \operatorname{sen} b$$

Sustituyendo $\overline{CN}$ y $\overline{CM}$ en la ecuación 3.2.1, se sigue

$$\overline{OC} * \operatorname{sen} b * \operatorname{sen}\widehat{A} = \overline{OC} * \operatorname{sen} a * \operatorname{sen}\widehat{B}$$

Simplificando por $\overline{OC} \neq 0$,

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen}\widehat{B}}$$

Trazando la altura esférica h_a sobre el lado a, se probaría la relación $\dfrac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \dfrac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$, y por tanto, el primer grupo de fórmulas de Bessel es:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\widehat{A}} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen}\widehat{B}} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen}\widehat{C}}$$

Como en un triángulo esférico se tiene tres lados, tres ángulos opuestos a cada lado y por su proporcionalidad directa, la razón del seno de cualquier lado y el seno de su ángulo opuesto es igual a cada una de las otras dos razones; esta relación permite calcular un lado o un ángulo, conocido su ángulo o lado puesto, y otro par de elementos opuestos.

3.2.2. Teorema del coseno para los lados

El coseno de cada lado es igual al producto de los cosenos de los otros dos lados, más el producto de los senos de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido en un triángulo esférico.

De los triángulos CNO y CPN de la figura precedente se tiene:

$$\overline{CN} = \overline{OC} * \operatorname{sen} b$$

$$\overline{NP} = \overline{CN} * \cos \widehat{A}$$

Remplazando $\overline{CN}$ se obtiene

$$\overline{NP} = \overline{OC} * \operatorname{sen} b * \cos \widehat{A} \tag{3.2.2}$$

En la figura 3.9 observando la construcción sobre el plano OAB luego de las siguientes proyecciones; teniendo que OM, es igual a la suma de las proyecciones de las componentes ON, NP, y PM sobre la recta OB, sea G y M las proyecciones de N y P respectivamente en la recta OB y J la proyección de P sobre NG (ver figura 3.10). Se sigue que:

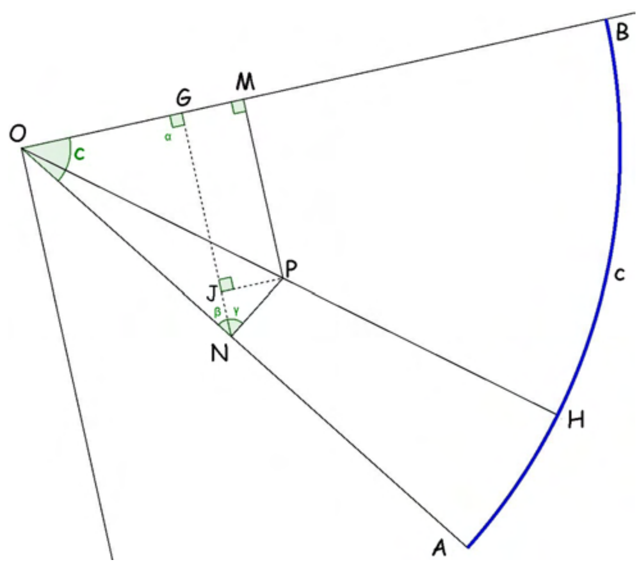


Figura 3.10: Plano OAB de la construcción 3.9.
Fuente de investigación: [Barrero, 2008, p. 21].

$$\overline{OM} = \overline{OG} + \overline{GM} \tag{3.2.3}$$

De los triángulos planos CMO, CNO de la figura 3.9, y del triángulo GNO de la figura 3.10, se tiene

$$\overline{OM} = \overline{OC} * \cos a$$

$$\overline{OG} = \overline{ON} * \cos c = \overline{OC} * \cos b * \cos c$$

Dado que el ángulo AOB tienen medida c y $\alpha = 90°$ se tiene $\beta = 90° - c$, y como $\beta + \gamma = 90°$, se tiene que $\gamma = c$. además, teniendo en cuenta la ecuación 3.2.2;

$$\overline{GM} = \overline{JP} = \overline{NP} * \operatorname{sen} c = \overline{OC} * \operatorname{sen} b * \cos \widehat{A} * \operatorname{sen} c$$

Por lo tanto, remplazando $\overline{OM}$, $\overline{OG}$ y $\overline{GM}$ en la ecuación 3.2.3;

$$\overline{OC} * \cos a = \overline{OC} * \cos b * \cos c + \overline{OC} * \operatorname{sen} b * \operatorname{sen} c * \cos \widehat{A}$$

Y simplificando por $\overline{OC} \neq 0$, se obtiene;

$$\cos a = \cos b * \cos c + \operatorname{sen} b * \operatorname{sen} c * \cos \widehat{A}$$

Análogamente para los cosenos de los lados b y c.

Por lo tanto el segundo grupo de fórmulas de Bessel, que permite calcular un lado conocido el ángulo opuesto y los lados que los comprenden, o bien, un ángulo conocidos los tres lados, es:

$$\cos a = \cos b * \cos c + \operatorname{sen} b * \operatorname{sen} c * \cos \widehat{A}$$
$$\cos b = \cos a * \cos c + \operatorname{sen} a * \operatorname{sen} c * \cos \widehat{B}$$
$$\cos c = \cos a * \cos b + \operatorname{sen} a * \operatorname{sen} b * \cos \widehat{C}$$

3.2.3. Teorema del coseno para los ángulos

El coseno de cada ángulo es igual a menos el producto de los cosenos de los otros dos ángulos, más el producto de los senos de dichos ángulos por el coseno del lado comprendido en un triángulo esférico.

Considérese el triángulo polar $A'B'C'$, correspondiente al triángulo ABC, en el que $a' = 180° - \widehat{A}$, $\widehat{A'} = 180° - a$, etc. Aplicando el segundo grupo de fórmulas al triángulo polar de ABC, se tiene,

$$\cos a' = \cos b' * \cos c' + \operatorname{sen} b' * \operatorname{sen} c' * \cos \widehat{A'}$$

Por lo tanto,

$$\cos(180° - \widehat{A}) = \cos(180° - \widehat{B}) * \cos(180° - \widehat{C}) + \operatorname{sen}(180° - \widehat{B}) * \operatorname{sen}(180° - \widehat{C}) * \cos(180° - a)$$

Y, puesto que $\operatorname{sen}(180° - \theta) = \operatorname{sen}\theta$ y $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$, se obtiene

$$-\cos A = \cos B * \cos C + \operatorname{sen} B * \operatorname{sen} C * (-\cos a)$$

$$\cos A = -\cos B * \cos C + \operatorname{sen} B * \operatorname{sen} C * \cos a$$

Las otras fórmulas se obtienen mediante un intercambio cíclico de las letras al aplicar el *Teorema del coseno para los lados* en el triángulo complementario. Así, las fórmulas que relacionan tres ángulos y un lado son:

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \operatorname{sen} \widehat{B} * \operatorname{sen} \widehat{C} * \cos a$$

$$\cos \widehat{B} = -\cos \widehat{A} * \cos \widehat{C} + \operatorname{sen} \widehat{A} * \operatorname{sen} \widehat{C} * \cos b$$

$$\cos \widehat{C} = -\cos \widehat{A} * \cos \widehat{B} + \operatorname{sen} \widehat{A} * \operatorname{sen} \widehat{B} * \cos c$$

3.3. Fórmulas fundamentales de la Trigonometría Hiperbólica

De la Trigonometría Esférica se tiene las formulas fundamentales expuestas en el apartado anterior, que en resumen, dado un triángulo esférico de lados a, b, c y ángulos opuestos $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ respectivamente, entonces, para todo ángulo y lado en un triángulo esférico:

$$\operatorname{sen} \widehat{B} * \operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \widehat{A} * \operatorname{sen} b \tag{3.3.1}$$

$$\cos a = \cos b * \cos c + \operatorname{sen} b * \operatorname{sen} c * \cos \widehat{A} \tag{3.3.2}$$

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \operatorname{sen} \widehat{B} * \operatorname{sen} \widehat{C} * \cos a \tag{3.3.3}$$

Como se mencionó en el segundo capítulo, es Taurinus quien se interesa y desarrolla la geometría de una esfera imaginaria, que en principio fue sugerida por Lambert para trabajar la HAA.

Taurinus empieza con las fórmulas de Trigonometría Esférica y remplaza los lados reales de un triángulo, por lados imaginarios, de lo que obtiene.

$$\operatorname{sen} \widehat{B} * \operatorname{sen} ia = \operatorname{sen} \widehat{A} * \operatorname{sen} ib \tag{3.3.4}$$

$$\cos ia = \cos ib * \cos ic + \operatorname{sen} ib * \operatorname{sen} ic * \cos \widehat{A} \tag{3.3.5}$$

$$\cos \widehat{A} = -\cos \widehat{B} * \cos \widehat{C} + \operatorname{sen} \widehat{B} * \operatorname{sen} \widehat{C} * \cos ia \tag{3.3.6}$$

De otro lado, téngase presente las siguientes series de Taylor

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n!}\right) \tag{3.3.7}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \tag{3.3.8}$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{3.3.9}$$

Si en la serie 3.3.7 se sustituye x por ix, considerando que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1 \cdots$ etc. y si se agrupa las potencias pares de x por un lado y las impares por otro, entonces:

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \left(1 + \frac{-x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{-x^6}{6!} \pm \cdots\right) + \left(\frac{ix}{1!} + \frac{-ix^3}{3!} + \frac{ix^5}{5!} + \frac{-ix^7}{7!} \pm \cdots\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + i * \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

Que es un número complejo, donde su parte real es $\cos x$; la serie 3.3.8, y su parte imaginaria es $\operatorname{sen} x$; la serie 3.3.9, así que

$$e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

Ahora, cambiando la variable x por ix, se tiene:

$$e^{-x} = \cos ix + i \operatorname{sen} ix \tag{3.3.10}$$

Cambiando ahora la variable $-x$ por x, queda $e^x = \cos(-ix) + i \operatorname{sen}(-ix)$, pero como $\cos x$ es una función par y $\operatorname{sen} x$ es impar se tiene:

$$e^x = \cos ix - i \operatorname{sen} ix \tag{3.3.11}$$

Con el fin de despejar $\cos ix$, sumando 3.3.10 y 3.3.11, lo que nos queda $e^{-x} + e^x = 2\cos ix$; ahora para despejar $\operatorname{sen} ix$, a 3.3.10 se resta 3.3.11, obteniendo $e^{-x} - e^x = 2i \operatorname{sen} ix$ y por lo tanto,

$$\frac{e^{-x} + e^x}{2} = \cos ix$$

$$\frac{e^{-x} - e^x}{2i} = \operatorname{sen} ix$$

De [Gray, 1992, pp. 135-136], se deduce que la expresión $-i \operatorname{sen} ix$ es el *seno hiperbólico de x*, y $\cos ix$ es el *coseno hiperbólico de x*, debido a que se pueden obtener de la parametrización de la hipérbola, y las cuales son reales.

Ahora, para llegar a las fórmulas de la Trigonometría Hiperbólica se prosigue de la siguiente manera, donde, utilizando la notación actual, seno hiperbólico de x se notara como $\operatorname{senh} x$ y coseno hiperbólico de x se notara como $coshx$.

- De 3.3.4 $\operatorname{sen}\widehat{B} * \operatorname{sen} ia = \operatorname{sen}\widehat{A} * \operatorname{sen} ib$, y dado que $\operatorname{sen} ix = \frac{-i \operatorname{sen} ix}{-i} = -\frac{\operatorname{senh} x}{i}$, se tiene que

$$\operatorname{sen}\widehat{A} * \frac{\operatorname{senh} b}{-i} = \operatorname{sen}\widehat{B} * \frac{\operatorname{senh} a}{-i}$$

  Por lo tanto $\operatorname{sen}\widehat{A} * \operatorname{senh} b = \operatorname{sen}\widehat{B} * \operatorname{senh} a$

- De 3.3.5 $\cos ia = \cos ib * \cos ic + \operatorname{sen} ib * \operatorname{sen} ic * \cos\widehat{A}$, se tiene que

$$\cosh a = \cosh b * \cosh c + \operatorname{sen} ib * \operatorname{sen} ic * \cos\widehat{A}$$

  pero $\operatorname{sen} ix = \frac{\operatorname{senh} x}{-i}$, así que

$$\cosh a = \cosh b * \cosh c + \frac{\operatorname{senh} b}{-i} * \frac{\operatorname{senh} c}{-i} * \cos\widehat{A}$$

  Por lo tanto $\cosh a = \cosh b * \cosh c - \operatorname{senh} b * \operatorname{senh} c * \cos\widehat{A}$

- De 3.3.6 $\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B} * \cos\widehat{C} + \operatorname{sen}\widehat{B} * \operatorname{sen}\widehat{C} * \cos ia$, se tiene que

$$\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B} * \cos\widehat{C} + \operatorname{sen}\widehat{B} * \operatorname{sen}\widehat{C} * \cosh a$$

Así, las formulas fundamentales de la Trigonometría Hiperbólica son

$$\operatorname{sen}\widehat{A} * \operatorname{senh} b = \operatorname{sen}\widehat{B} * \operatorname{senh} a$$

$$\cosh a = \cosh b * \cosh c - \operatorname{senh} b * \operatorname{senh} c * \cos\widehat{A}$$

$$\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B} * \cos\widehat{C} + \operatorname{sen}\widehat{B} * \operatorname{sen}\widehat{C} * \cosh a$$

Capítulo 4

Conclusiones

Teniendo presente los objetivos propuestos en este trabajo, a continuación se presenta algunas conclusiones y algunos comentarios de los capítulos anteriores.

4.1. Conclusiones capítulo 1

Se presentó algunos personajes que contribuyeron a la demostración del V Postulado de Euclides, el cual lo "demostraban" desde puntos de vista diferentes, en su mayoría utilizando proposiciones equivalentes al VP y sustituyendo la "deficiente" definición de las paralelas dada por Euclides, en ese sentido:

1. Se puede observar con el apartado 1.1 que el V Postulado de Euclides ya era conocido antes que el mismo Euclides, desde los Pitagóricos, atribuido a éstos por Eudemus, uno de los principales discípulos de Aristóteles conocedor de este postulado. Incluso la controversia sobre el VP se plantea desde el mismo Euclides, la razón es por su obra *Elementos*, en donde muchos conocimientos ya existentes fueron recopilados en este libro y la geometría expuesta fue considerada por más de XX siglos como la que representa el universo en su totalidad.

2. Entre los personajes abordados en el apartado 1.3 (Proclo, Aganis, Nasir al-Din, Wallis y Vitale) se han encontrado los siguientes efectos;

   a) El postulado no era lo suficientemente evidente para aceptarlo sin demostración, por el cual trataron de deducirlo como consecuencia de otras proposiciones.

   b) Se acogieron a la definición de Posidonio sobre las rectas paralelas, en la cual las toma como coplanarias y equidistantes. Aunque J. Wallis abandona esta definición temporalmente.

   c) A pesar de apropiarse de la definición de Rectas Paralelas como equidistantes, que desde esta perspectiva el V Postulado de Euclides podría observarse con mejor claridad como postulado, estos personajes se rehúsan a observarlo como un postulado considerándolo como un teorema.

3. En sus demostraciones, los personajes nombrados anteriormente, usan implícitamente el V Postulado de Euclides, para ello asumen proposiciones equivalentes a éste, en las cuales se observa los siguientes equivalentes al VP:

   a) Todos ellos utilizaron la proposición *las rectas paralelas son equidistantes.*

   b) Nasir al-Din utiliza la proposición *la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.*

   c) Wallis utiliza la proposición *de un triángulo cualquiera puede siempre construirse un triángulo semejante de magnitud arbitraria.*

4. Las "demostraciones"anteriores se quedaron en intentos, ello debido al uso implícito del V Postulado. Entre los aspectos y dificultades para avanzar en el problema de las paralelas y que posiblemente frenara el descubrimiento de nuevas geometrías son:

   a) Hubo un retraso en Proclo al utilizar la inversa del V Postulado (la suma de dos ángulos en un triángulo es menor que dos ángulos rectos) para suponer que de igual manera el VP seria demostrable, ya que no le pareció aceptable que si una proposición es demostrable su inversa no lo sea.

   b) La no suficiente evidencia del V Postulado como postulado.

   c) La definición de rectas paralelas; como coplanarias y equidistantes.

   d) En las demostraciones de Equivalentes al VP de Euclides para demostrar este mismo, implícitamente se observa inmersa en ellas la utilización del VP. Es decir, utilizaban lo que se requería demostrar.

   e) Hasta el siglo XVII se utilizó para demostrar el V Postulado método directo de demostración y con este método no se obtuvo sobresalientes resultados.

4.2. Conclusiones capítulo 2

1. Giovanni Gerolamo Saccheri fue el primer personaje que utilizó, para abordar el Problema del VP un método de demostración por reducción a lo absurdo; Con la particularidad que quería reivindicar a Euclides: al negar su quinto postulado busca una contradicción para rechazar las HAO e HAA y demostrar que la Geometría Euclidiana es valida y la unica existente, y no se percato que este método también es un método de demostración a la valides de la negación del VP; es decir la existencia de una geometría diferente a la de Euclides, y además que la GE sigue siendo igual de valida.

a) Saccheri rechaza la HAO al darse cuenta que, aunque en la HAO e HAR se comprueba el V Postulado de Euclides, en la HAR la suma de los ángulos interiores de cualesquier triángulo da dos ángulos rectos, mientras que en la HAO da mayor que dos ángulos rectos, y esto lo toma como contradictorio. Donde, encuentra una contradicción al II Postulado de Euclides (en la infinitud de la línea recta).

b) Una aplicación que se cumple en lo finito Saccheri la extiende a lo infinito, que le sirve para rechazar de manera errónea la HAA. En particular dice, que si dos rectas las cuales se aproximan cada vez más, en el infinito llegaran a encontrarse en un mismo punto y en este punto compartirán una recta perpendicular, y siendo esto contradictorio; que dos rectas se encuentren y a la misma vez conserven una perpendicular en común rechaza la HAA.

Entre Las contribuciones más destacadas en Saccheri están:

c) La aplicación del método de reducción a lo absurdo, que, aunque no obtuvo resultados contundentes en que una nueva geometría existiese, sirvió para que los siguientes geómetras o personajes que se dedicaran al Problema del VP obtuvieran mejores resultados.

d) En la HAA, la observación de un haz de rectas que pasa por un punto fuera de una recta dada y que este haz de rectas se divide en tres grupos: rectas que inciden sobre la recta dada, dos rectas asintóticas sobre la recta dada y rectas que permiten una perpendicular en común con la recta dada. Para Saccheri las *Rectas Paralelas* solo son aquellas que comparten una perpendicular en común.

2. Johann Heinrich Lambert continúa con procesos muy similares a los de Saccheri. Con la diferencia, que mientras en el Cuadrilátero de Saccheri se toma un cuadrilátero birrectángulo isósceles, en Lambert utiliza un cuadrilátero trirectángulo y en su cuarto ángulo desarrolla las HAR, HAO e HAA de forma similar que en Saccheri.

   a) Lambert rechaza la HAO al darse cuenta que en su cuadrilátero admitiendo el cuarto ángulo obtuso, dos rectas opuestas al prolongarlas infinitamente se encontraran.

   b) Mientras que la HAA admitiendo en su cuadrilátero el cuarto ángulo agudo, en un proceso similar que en HAO, pero en esta ocasión, dos lados opuestos al prolongarlos infinitamente se separan cada vez más, en el cual no encuentra contradicción, e igual que Saccheri descarta la HAA sin un razonamiento meramente matemático.

   Entre lo más destacado de Lambert se tiene:

   c) De la fórmula del área del triángulo esférico donde deduce la notable conjetura: “de ello debería casi sacar la conclusión de que la tercera hipótesis se verifica sobre una esfera de radio imaginario" [Dou, 1992, p. 57], posiblemente Lambert se dio cuenta y sugirió que a partir de las fórmulas de la trigonometría esférica se puede llegar a una nueva geometría. Ademas, el no haber publicado su libro en vida, cabe la intuición que en Lambert existió la duda que una nueva geometría puede ser posible.

3. De Franz Adolph Taurinus, se puede decir lo siguiente:

   a) Rechazó la HAO de manera similar que Lambert, al darse cuenta que dos rectas perpendiculares a una tercera se encuentran en dos puntos simétricos a la tercera recta.

   b) En la HAA, Taurinus, al igual que Saccheri y Lambert, no encuentra contradicción alguna con el V Postulado. A pesar de ello, menciona que la contradicción se la tendría que observar en el primer postulado, en el cual por dos puntos pasen infinitas rectas.

   c) Entre sus contribuciones más importantes se tiene, el haber desarrollado la sugerencia de Lambert, que a partir de la Trigonometría Hiperbólica y asumiendo una esfera de radio imaginario se puede llegar a las fórmulas de la Trigonometría corespontiente a la Hipótesis de Ángulo Agudo el cual el la llamo como la *Geometría logarítmico esférica*. Incluso [Chaves, 2001, pp. 30-31] plantea que este método posiblemente fue el usado por Lobachevski para llegar a la primer Geometría No Euclidiana, la geometría correspondiente a la HAA.

4.3. Conclusiones capítulo 3

1. En el proceso de la obtención de las fórmulas de senos y cosenos, tanto para la Trigonometría Esférica (fórmulas de Bessel), como para la primera Geometría No Euclidiana (Geometría Hiperbólica), se observa la utilización de conceptos que requieren del espacio tridimensional, que a diferencia de la Geometría Euclidiana, las formulas, las construcciones de las fórmulas de senos y cosenos, no necesitarían del espacio tridimensional. De hecho, para la Geometría hiperbólica, Lobachevski en su libro *Geometrical Researches on the Theory of Parallels* donde desarrolla su *geometría imaginaria* que corresponde con la Geometría Hiperbólica, como menciona [Chaves, 2001, p. 4]: "las primeras quince proposiciones no son demostradas por él, de éstas, la primera, y desde la once hasta la quince, son enunciadas para el espacio tridimensional; lo que indica que la concepción de esta nueva geometría no es posible sin la idea del espacio tridimensional, al contrario de la geometría euclidiana", además, en [Lobachevski, 1840], la proposición 25 (Dos líneas rectas que son paralelas a una tercera son también paralelas entre si), trata de la transitividad del paralelismo, "Se prueba la transitividad del paralelismo, donde Lobachevski al igual que Bolyai y Gauss demuestra esta propiedad primeramente para rectas coplanares, y luego para rectas no coplanares, lo que nos indica que la nueva geometría

no se puede obtener sin usar la tridimensionalidad del espacio, hecho que no ocurre con la geometría euclidiana".

Ahora, aunque Lobachevski requirió de la tridimensionalidad del espacio para desarrollar la Geometría Hiperbólica, se puede observar que el *modelo del disco de Poincaré en el plano* (en el que los elementos geométricos como puntos y rectas están en el disco, y las rectas son arcos de circunferencia ortogonales a la frontera del disco) [Gray, 1992, pp. 217-222]. Es un ejemplo de Geometría Hiperbólica sobre el plano y no se observa que requiera de un espacio tridimensional. Esta observación es uno de tantos interrogantes para futuras investigaciones en lo que corresponde con Geometrías No Euclidianas y su historia.

2. En la historiografía que corresponde al Problema de las Paralelas, en este trabajo se ha llegado hasta Taurinus. Quedando para trabajos posteriores, el estudio y las observaciones de puntos de vista particulares con respecto a la continuidad en esta historia, que prosigue con personajes como Gauss, Lobachevski, J. Bolyai y Riemann quienes fueron los fundadores de las Geometrías No Euclidianas, y continuando con Beltrami, Klein, Poincaré y otros; algunos de estos personajes se nombraron superficialmente en este trabajo.

Apéndice A

Apéndice: Geometrías No Euclidianas en el colombiano Julio Garavito

Este apéndice, se desarrolló en el marco del **Proyecto de investigación** de la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad de Nariño, titulado: *Historia de las matemáticas en Colombia: una innovación en el currículo del programa de licenciatura en matemáticas de la Universidad de Nariño.*

Este apéndice se centra en un aparte de la recepción de las Geometrías no euclidianas en Colombia, concretamente, en parte de la obra del ingeniero Julio Garavito Armero (1865-1920). Por el escaso hallazgo de documentos, ha sido difícil acceder a los aportes de otros autores colombianos en Geometrías No Euclidianas (GNEs), sin embargo se puede sugerir que Garavito, es quien en cambio de siglo XIX al XX mas publicaciones hizo sobre estas geometrías. En Garavito, además de aspectos generales en estudios a este tema se expondrá la parte filosófica a lo que él piensa como "Espacio Matemático" y "Espacio", acompañado de pensamientos en dos autores no colombianos de diferentes épocas, Immanuel Kant y Henri Poincaré.

La Geometría Euclidiana ha sido catalogada desde sus principios como la mejor representación del espacio que nos rodea y del espacio en general. Sin embargo se ha mostrado en diferentes textos inconvenientes o puntos de vista aislados de muchos personajes que trabajaron alrededor de la GE optando por colocar su propio punto de vista,[1] y que hicieron parte del desarrollo de las GNEs. Entre los personajes más destacados están Nasir al-Din al-Tusi (1201-1274), Giovanni Gerolamo Saccheri (1667-1733), Johann Heinrich Lambert (1728-1777), Carl Friedrich Gauss (1777-1855), Ferdinand Karl Schweikart (1780-1857), Nikolái Lobachevski (1792-1856), Franz Adolph Taurinus (1794-1874), János Bolyai (1802-1860), entre otros.

[1]Uno de los textos más referenciados es *Geometrías No Euclidianas* de [Bonola, 1923], En este mismo libro se puede observar aquellos inconvenientes o puntos de vista de cada autor. como por ejemplo, sobre el Problema del VP y la concepción de como definir rectas paralelas, entre otros. En el capítulo 1 de este trabajo se amplia estos temas.

Las GNEs comenzaron con cuestiones naturales que se dieron acerca de la geometría de Euclides especialmente del V de sus Postulados. En particular su último postulado, que se lo conoce como Postulado de las Paralelas o el V Postulado, fue el que generó controversias entre algunos personajes, dado a su extensión de escritura y difícil entendimiento, la duda era sí podrían catalogarlo como postulado o teorema.[2] A partir de este postulado se generan las nuevas geometrías que se las conoce como Geometrías No Euclidianas (GNEs); en la primera mitad del siglo XIX ya se conocían publicaciones de N. Lobachevski y J. Bolyai que expandían el conocimiento de las nuevas geometrías, en partícular sobre la Geometría Hiperbólica. A principios de la segunda mitad del mismo siglo se pudo identificar la Geometría Elíptica[3] inmersa en la Geometría de Riemann la cual como casos especiales particulares aparecen los tres tipos convencionales -Geometría Elíptica y Geometría Hiperbólica como parte de las GNEs, así como la misma GE- Este conocimiento se expandía particularmente desde Europa y Asia, encontrándose una de sus historiografía en el libro referenciado anteriormente *Geometrías No Euclidianas* de Roberto Bonola.

Pero ¿Qué hay alrededor de las Geometría No Euclidianas en Colombia? En forma general, se tiene una reverencia en cuanto a las matemáticas por los extranjeros especialmente por los europeos. En particular, los matemáticos colombianos de los años anteriores de 1950 se alimentaron del conocimiento matemático de los europeos y de sus textos.

Entre los personajes más destacados de Colombia que tuvieron participación en las GNEs, que particularmente fueron ingenieros militares e ingenieros civiles, se pude encontrar con Indalecio Liévano (1834-1913), Julio Garavito Armero (1865-1920), Darío Rozo Martínez (1881-1964), Jorge Alvarez Lleras (1885-1952). Con respecto a algunos de estos personajes, ¿qué participación han tenido en relación a las GNEs y a la GE, como también al entendimiento de espacio y su representación? A continuación se dará un breve resumen histórico de sus contribuciones en el tema, centrándose en Garavito por su fuerte influencia en las GNEs y en la élite de científicos en Colombia.

A.1. Personajes Colombianos

Aspectos importantes fueron tomados de [Arbeláez, 2016] profesora de la Universidad Del Cauca. En la conferencia *Transformación de la Actividad Matemática en Colombia: siglo XIX y primera mitad del siglo XX.* XIII COLOQUIO REGIONAL DE MATEMÁTICAS y el III SIMPOSIO DE ESTADÍSTICA realizado en la Universidad de Nariño, 2016.

Indalecio Liévano Reyes (1834-1913): Ingeniero apasionado por la matemática, la astronomía y la pedagogía, fue director del observatorio astronómico nacional por varios años, profesor de la

[2] Esto, es a lo que se conoce como Problema del VP o Problema de las Paralelas.

[3] Aspectos de la Geometría Elíptica (segunda Geometría No Euclidiana) se aplicaron antes que los de la Geometría Hiperbólica (primera Geometría No Euclidiana), sin embargo la hiperbólica se descubrió y se consolidó teóricamente antes que la elíptica.

facultad de ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia en la que fue profesor del ingeniero Garavito Armero. En su desempeño como profesor contribuyó a la ingeniería, incorporando las matemáticas como elemento distintivo de esta profesión. Este ingeniero sale del estereotipo de matemáticos colombianos que no tenían una cultura de escritura. Escribe no solamente sobre temas matemáticos sino también sobre temas de filosofía, astronomía y pedagogía.

En cuanto a sus aportes en las GNEs intenta hacer una demostración del V Postulado de Euclides que generó gran polémica en Colombia. En su libro titulado *Investigaciones Científicas* publicado en 1871 el cual se divide en cuatro partes: "Teoría de las paralelas", "Cuestiones de aritmética", "Cuestiones de álgebra" y "Estudios filosóficos", se observa en el título de la primer parte del libro las aportaciones a las GNEs.

Jorge Álvarez Lleras (1885-1952) Fue un profesor, astrónomo y geógrafo. Además de ser el discípulo incondicional de Garavito fue su compañero de trabajo en el Observatorio Nacional de Colombia donde Garavito fue director entre 1891 y 1920. Luego de la muerte de Garavito el observatorio queda en manos de extranjeros aproximadamente por 10 años, el cual en 1930 se reorganiza el instituto otorgándole a Álvarez Lleras la responsabilidad de este observatorio.[4]

Las ideas de Garavito fueron extrapoladas y divulgadas por Álvarez Lleras en los *Anales de Ingeniería* y en la revista de la *Academia Colombiana de ciencias Naturales, físicas y exactas* donde fue director de esta revista por varios años. Entre estas ideas se encuentran las GNEs donde idealizó con el tiempo las posiciones de su maestro llevando a cabo una difusión dogmática de sus ideas defendiendo la ciencia clásica desde una posición más bien escolástica que positivista.[5]

Julio Garavito Armero (1865-1920): Astrónomo, matemático, economista político e ingeniero. Catalogado como personaje más contribuyente de la ciencia colombiana de finales del siglo XIX y principios del siglo XX[6]. Este personaje comenzó sus estudios a los diez años en el Colegio de San Bartolomé del cual se graduó de bachiller en filosofía y letras en 1884. En el año siguiente presentándose la revolución de finales del federalismo e inicios de la Regeneración en Colombia tuvo que frenar sus estudios, aprovechando éste tiempo realizó adelantos matemáticos y astronómicos por su cuenta, en 1887 reinicia en la facultad de ingeniería de la ya conocida Universidad Nacional de Colombia donde se tituló como profesor de matemáticas y posteriormente de ingeniero civil en el año 1891. Este personaje se desempeñó en las áreas de ingeniería, astronomía, geodesia,

[4] Breve bibliografía de Jorge Álvarez Lleras en `http://www.banrepcultural.org/blaavirtual/biografias/alvarez-jorge.htm` [Garavito, 2016].

[5] [Arboleda y Anacona, 1994, pp. 22-23]. Los autores no profundizan sobre las difusiones dogmáticas de la geometría en Jorge Álvarez lleras. Tampoco es del interés de este trabajo averiguar si para Álvarez la GE era comprendida desde una revelación religiosa, omitiendo que las nuevas concepciones ideológicas de GNEs por lo menos inducia a sospechar sobre la actualización de la GE en GNEs. Ahora, la consistencia de las GNEs es el triunfo de la experimentación y el positivismo sobre la visión escolástica en la geometría; de esta manera, la GE antes de la aparición de GNEs, eran llevadas como un paradigma y no como una difusión dogmática.

[6] [Arboleda y Anacona, 1994, p. 7].

matemática, trabajó en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia y en el Observatorio Nacional de Colombia. Por sus grandiosas contribuciones científicas ha tenido algunos reconocimientos como; Orden al mérito Julio Garavito y la aparición de su rostro en el Billete Nacional de 20.000 pesos colombianos, como también, un cráter de la luna lleva su nombre.[7]

Garavito al igual que su maestro Indalecio Liévano, También se preocupó por una cultura de escritura, donde sus trabajos de matemáticas conjuntamente llevaban reflexiones pedagógicas y filosóficas.

Nos centraremos en las concepciones del espacio, su representación, la geometría y la experiencia, para entender mejor el porqué de la negativa de Garavito a la divulgación de las GNEs, donde se establece una estrecha relación con la comunidad europea donde de igual manera en el siglo XIX se encontraba un fuerte rechazo a la recepción de las nuevas geometrías. Rechazo que se lo puede observar a partir de revisión de posturas en algunos críticos a Lobachevski.[8]

A partir de 1915 Garavito publicó en los *Anales de Ingeniería*[9] gran cantidad de documentos expresando sus conocimientos y aportes a los diferentes campos de sus ocupaciones y áreas de interés. Entre muchos de estos artículos se tiene el de 1917: *¿Banca rota de la ciencia?* El cual consta de dos partes; en los primeros párrafos de la primera parte habla sobre *Legitimidad de las Geometrías Planas No Euclídeas* y en la segunda parte demuestra la *Caducidad de las Geometrías Planas No Euclídeas*.

En muchos de sus documentos expresa el mismo modo de reaccionar en cuestión a las GNEs, dice: Que Lobachevski y Riemann han creado un "juguete" como armazón teórico que no tiene relación con la realidad, que ha sido un acertijo que estos matemáticos como muchos otros estudiosos de este tema lo dejaron como el enigma bajo la forma de verosimilitud de otras geometrías planas no euclídeas, y que sirve como entretenimiento para los curiosos. Además dice que este acertijo no ha sido puesto en claro por el progreso moderno que existía en aquella época de automovilismo y cinematografía, impidiéndoles estudiar esta clase de asuntos con la debida atención. Así, la confusión de conceptos que reina en el mundo sabio es causada a su vez además de muchas otras circunstancias, por juguetes como el presentado por Lobachevski y Riemann. Que en efecto, algunos geómetras kantianos que conferían a los axiomas como verdades absolutas, luego de la presentación de Lobachevski, toman la decisión de asemejar sus pensamientos admitiendo la existencia de espacios no euclídeos[10].

[7] Aspectos importantes se los pude observar en [Bateman, 1955].

[8] [Arboleda y Anacona, 1994, pp. 12-15]. Los autores realizan una breve revisión de personajes que expresaron críticas a los razonamientos de Lobachevski.

[9] La revista *Anales de Ingeniería* surge en la necesidad de agremiar a los ingenieros con la Sociedad Colombiana de Ingenieros, el primer intento de reunirlos fue el 25 de abril de 1873. Esta revista circula en forma ininterrumpida desde agosto de 1887, centrándose básicamente en recopilación de información sobre políticas que afecten al país en diferentes áreas de la ingeniería nacional, y siendo consultada principalmente por entidades públicas y privadas que desarrollan proyectos de ingeniería en el país.

[10] En uno de los documentos que se puede encontrar estas ideas es en [Garavito, 1938, p. 566], *Nota Sobre las Geometrías Planas No Euclideas.*

En *Las geometrías no euclidianas en Colombia. La apuesta euclidiana del profesor Julio Garavito (1865-1920)*, escrito por L. C. Arboleda y M. P. Anacona.[11] Se expresa los pensamientos de Poincaré, Kant Y Garavito respecto al espacio y su representación, donde cada uno los llama de diferente manera como se muestra a continuación con el fin de observar las diferencias y similitudes en Garavito.[12]

A.2. Espacio matemático y Espacio para Garavito

El Espacio matemático según Garavito: Es un ente abstracto, una simple convención, donde es más general que el espacio euclidiano.

El Espacio Euclidiano tiene tres dimensiones que permite el cambio de posición de las figuras sin el cambio de forma. Pero no es el único espacio de tres dimensiones que permite el movimiento de figuras sin deformarlas. Estos otros espacios han recibido el nombre de Espacios No Euclidianos.[13]

Para Garavito, los Espacios No Euclidianos se los puede utilizar analíticamente en la interpretación de los hechos de orden geométrico, admitiendo estos espacios pero en forma abstracta como una parte del espacio matemático, el cual es resultado de la imaginación sin utilidad en la realidad. Así, tanto la GE como las GNEs son válidas. De esta manera Garavito acepta las GNEs desde un punto de vista filosófico que las ubica sólo en la posibilidad ontológica-abstracta desde lo analítico y matemático, que surgen del resultado teórico consistente a partir de la aceptación de los primeros cuatro postulados de la GE y la negación del quinto, donde estas nuevas Teorías No Euclídeas no reflejan la realidad. De esta manera la única que puede expresar y dar cuentas del espacio físico que nos rodea y que es el mismo que se percibe a través de los sentidos es la Geometría Euclidiana.

El Espacio según Garavito: Es la representación directa que nos formamos a través de los sentidos el cual corresponde a esa intuición directa que obtenemos del espacio que nos rodea, donde, la representación del espacio que nos rodea corresponde al Espacio Euclidiano.

[11] [Arboleda y Anacona, 1994, pp. 15-21]. En lo que sigue, tener en cuenta como cada personaje nombran al espacio en general y su representación; por ejemplo, lo que representamos a trabes de nuestros sentidos Garavito lo llama "espacio", mientras que Kant llama "espacio" al universo en su totalidad; esta el la mas notable confusión ya que utilizan la misma palabra

[12] Para entender la concepción de Garavito en cuanto a lo que él llama "Espacio Matemático" y "Espacio" me he apoyado en [Arboleda y Anacona, 1994, pp. 15-21]. Los autores realizan una revisión de sus ideas confrontándolas con las ideas de Kant y Poincaré para acentuar algunas ideas de Garavito contrarias a las de Lobachevski.

[13] Aunque claro, al observarlo desde el punto de vista de [Poincaré, 1948] como Espacio Representativo, en su ejemplo de un mundo encerrado en una esfera que se encuentra en el espacio euclidiano de tres dimensiones. Donde en esa esfera los objetos son premiados con unas condiciones físicas que hace: los objetos en ese mundo se agranden cada que se acercan al centro de la esfera obteniendo su mayor tamaño en el centro y se achiquen al encontrarse cada vez más cerca de la superficie, pero nunca podrán tocar la superficie. Podríamos decir que en este espacio las figuras se deforman. Aunque claro está, desde un punto de vista imaginario, donde las figuras se deforman al observarlas con el ojo euclidiano. y para los seres que abitan en la esfera ¿observan que los objetos en ella se deforman (cambian de tamaño)?

El espacio físico que nos rodea es el mismo que se percibe a través de los sentidos; es imposible desligarse de la intuición directa de la cual percibimos el espacio, donde hemos estado persistentemente influenciados desarrollando nuestros pensamientos y a través de los siglos recibiendo el conocimiento de nuestros antepasados.

En otras palabras, para Garavito el Espacio es la representación del mundo real y la realidad sólo se manifiesta a través del Espacio, además el Espacio es el Espacio Euclidiano que hace parte del Espacio Matemático.

A.3. Espacio Geométrico y Espacio representativo para Poincaré

Espacio Geométrico según Poincaré: Es el objeto de estudio de la geometría, el cual tiene las siguientes propiedades: es continuo, infinito, tiene tres dimensiones, todos sus puntos son idénticos entre si.

Es un concepto matemático alcanzado a través de la abstracción y sus características pueden ser o no ser euclidianas.

Nos dice que la geometría depende de la educación y la cultura. De esta manera, para Poincaré, la geometría no está antes que cualquier razonamiento, es decir, no es a priori.

Espacio representativo según Poincaré: Es donde se enmarca nuestras representaciones y sensaciones, el cual se conforma de espacio visual, espacio táctil y espacio motriz.

Es una imagen sensorial del Espacio Geométrico, el cual no necesariamente corresponde con dicho espacio, puesto que el espacio geométrico no se impone a los sentidos, es decir no se impone al espacio representativo, pero por medio de los sentidos se puede formar una imagen del espacio geométrico.

A través de la experiencia se realiza la representación. Es el resultado de la educación y la cultura.

A.4. Espacio y Representación de espacio para Kant

Espacio según Kant: Es la “cosa en si”: Concepto ideal inaprehensible por el conocimiento, pero con gran utilidad para que sucedan los fenómenos. El universo es totalmente euclidiano.

El espacio es una representación a priori y necesaria, (es una condición fundamental que posibilita los fenómenos y no una determinación dependiente de ellos), para toda intuición y percepción fenoménica se necesita esencialmente del espacio, convirtiéndolo en a priori.

Representación de espacio según Kant: Es la “cosa para mí”: imagen que nos formamos del espacio, donde sólo es posible representarse un único espacio que todo lo abarca, siendo una intuición a priori que precede a todos los conceptos de espacio, donde esta representación es el Espacio Euclidiano.

Las experiencias externas sólo son posibles gracias a la previa representación del espacio. De esta manera Kant aprueba lo a priori del espacio.

Todo lo que se percibe es posterior gracias a la intuición a priori, donde el universo “para mi” será totalmente euclidiano.

A.5. Conclusiones

Se puede observar, que al igual que otros personajes, como los europeos en el siglo XIX. En Colombia también se ha tenido una disputa y un rechazo a las nuevas teorías en la cual para llegar a una teoría ya establecida se ha pasado por un proceso arduo, por ejemplo Gauss, Lobachevski y Bolyai luego de resolver sus dudas han podido establecer firmes concepciones frente a las GNEs. De forma similar Garavito en Colombia ha tenido obstáculos filosóficos que se centraban en las matemáticas aplicadas en su contexto.

El pensamiento filosófico y epistemológico de Garavito no le permitió avanzar y corroborar en el camino de las GNEs.

> La actitud de Garavito en Colombia no pude ser vista como una patología histórica. Obedece más bien a una toma de partido frente a posiciones epistemológicas que se encontraban enraizadas en tradiciones filosóficas muy respetadas.[14]

Además de las actitudes conservadoras de Garavito. Este ha sido el matemático con mayor prestigio en su época, al cual le intereso la educación en nuestro país. De donde, posiblemente todos los demás personajes que abordaron la GE y las GNEs de aquella época hayan seguido algunas de sus ideologías haciendo que también se les impida tener una perspectiva diferente para asimilar geometrías diferentes a la de Euclides. Esta postura no se ha podido referenciar por la poca cultura de escritura de aquella época.

Se puede decir que la posición de Garavito no fue producto del atraso intelectual del medio, ya que en sus textos se puede notar su fuerte conocimiento en la ciencia, más bien, se debió a posturas filosóficas firmes. Se puede observar que en otros contextos socioculturales de forma similar se presentaron obstáculos para consolidar teorías nuevas.

Por otra parte se observa que el “Espacio Matemático” en Garavito se asemeja al “Espacio Geométrico” de Poincaré en donde es mucho más General que el espacio Euclidiano.

Como también el “Espacio” Para Garavito lo podemos comparar encontrando una aproximación de sus conceptos con la “Representación del Espacio” de Kant y el “Espacio Representativo” de

[14] [Arboleda y Anacona, 1994].

Poincaré en donde es una intuición que se adquiere a través de los sentidos, siendo una representación totalmente directa donde es un espacio muy particular del "Espacio Matemático".

También el "Espacio" en Garavito que es captado de nuestra intuición, se asemeja en la "Representación del Espacio" de Kant, en cuanto es una intuición que necesariamente es euclidiana y directa o pura que garantiza la unicidad de su representación en los seres humanos. Es decir, que no existe otro -espacio- el cual explique el entorno en el que vivimos.

El pensamiento de Garavito en cuanto al "Espacio" se enlaza con la "Representación de Espacio" en Kant afirmando que es independiente de las condiciones socio-culturales. Mientras que para Poincaré el "Espacio Representativo" como también la "Geometría" se dan a través de procesos culturales.

Bibliografía

[Arbeláez, 2016] Arbeláez, G. (2016). Transformación de la actividad matemática en Colombia: siglo XIX y primera mitad del siglo XX. Conferencia en el marco del XIII COLOQUIO REGIONAL DE MATEMÁTICAS y el III SIMPOSIO DE ESTADÍSTICA, Universidad de Nariño.

[Arboleda y Anacona, 1994] Arboleda, L. C. y Anacona, M. P. (1994). Las geometrías no euclidianas en Colombia. La apuesta euclidiana del profesor Julio Garavito (1865-1920). *Quipu, Revista Latinoamericana de Historia de las Ciencias y la Tecnología*, 11(1):7–24.

[Ayres y Alonso, 1974] Ayres, F. y Alonso, A. (1974). *Trigonometría plana y esférica: teoría y 680 problemas resueltos*. McGraw-Hill.

[Barrero, 2008] Barrero, R. M. (2008). *Trigonometría esférica: fundamentos*. [Apuntes Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía]. Universidad Politécnica de Madrid, Escuela Técnica Superior de Ingenieros en Topografía, Geodesia y Cartografía.

[Bateman, 1955] Bateman, A. (1955). Julio Garavito Armero. *Sociedad Geográfica de Colombia*, 13(45 y 46).

[Bonola, 1923] Bonola, R. (1923). *Geometrías No Euclidianas*. Calpe. Traducción del italiano por Luis Gutiérrez de Arroyo.

[Chaves, 2001] Chaves, B. A. (2001). Versión crítica y comentada de la teoría de paralelas de Lobachevski en español. Tesis de pregrado, Universidad del Valle.

[Dou, 1992] Dou, A. (1992). Orígenes de la geometría no euclidiana: Saccheri, Lambert y Taurinus. (Conferencia en la RACEFNM 26.2.1991), en Historia de la Matemática en el siglo XIX (primera parte). Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Académico Numerario, 43-63.

[Espitia, 2009] Espitia, C. (2009). La obra saccheriana en el surgimiento de las geometrías no euclidianas. Tesis de pregrado, Universidad de Nariño.

[Garavito, 2016] Garavito, C. (2016). *Centenario del Nacimiento del Doctor, JORGE ALVAREZ LLERAS*. Sociedad Geográfica de Colombia, Academia de Ciencias Geográficas. https://www.sogeocol.edu.co/documentos/jor_alv_ller.pdf Accedido 01-06-2017.

[Garavito, 1938] Garavito, J. (1938). Nota Sobre las Geometrías Planas No Euclideas. *Revista de la Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales*, 2(239):566–572.

[Gray, 1992] Gray, J. (1992). *Ideas de Espacio*. Mondadori Epaña. Segunda edición.

[Heath, 1921] Heath, T. (1921). *A History of Gkeek Mathematics*, volume 1. Clarendon, Oxford.

[Lee, 2006] Lee, J. (2006). *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York.

[Lobachevski, 1840] Lobachevski, N. (1840). *Geometrical researches on the theory of parallels*. Véase [Bonola, 1923]. traducción de G. B. Halsted.

[O'Connor y Robertson, 2001] O'Connor, J. J. y Robertson, E. F. (Información registrada 2001). Mactutor history of mathematics archive. Franz Adolph Taurinus `Http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Taurinus.html`. Accedido 01-06-2017.

[O'Connor y Robertson, 2004] O'Connor, J. J. y Robertson, E. F. (Información registrada 2004). Mactutor history of mathematics archive. Johann Heinrich Lambert `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Lambert.html`. Accedido 01-06-2017.

[O'Connor y Robertson, 2009] O'Connor, J. J. y Robertson, E. F. (Información registrada 2009). Mactutor history of mathematics archive. Giovanni Girolamo Saccheri `http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Saccheri.html`. Accedido 01-06-2017.

[Poincaré, 1948] Poincaré, H. (1948). Filosofía de la Ciencia. *México, D.F. Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, segunda edición*.

[Ramsay y Richtmyer, 1995] Ramsay, A. y Richtmyer, R. (1995). *Introduction to Hyperbolic Geometry*. Universitext. Springer New York.

[Sánchez y Sigarreta, 2011] Sánchez, P. A. y Sigarreta, A. J. M. (2011). Estudio epistemológico de las geometrías no-euclidianas. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 14(2):117–132.

[Stäckel y Engel, 1895] Stäckel, P. y Engel, F. (1895). *Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss: eine Urkundensammlung zur Vorgeschichte der nichteuklidischen Geometrie, in Gemeinschaft mit Friedrich Engel*. B. G. Teubner.