LOS CUADRILÁTEROS CÍCLICOS COMO HERRAMIENTA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

DEIBY YOHANA CASTILLO NARVAEZ
KATHERINE NATHALY PAZ MORA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2018

LOS CUADRILÁTEROS CÍCLICOS COMO HERRAMIENTA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

DEIBY YOHANA CASTILLO NARVAEZ
KATHERINE NATHALY PAZ MORA

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de Licenciado en Matemáticas

Asesor
Luis Fernando Cáceres Duque
Doctor en Matemáticas
Co-Asesora
Catalina María Rúa Alvarez
Doctora en Matemática Aplicada

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO
2018

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva de los autores.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación

Luis Fernando Cáceres Duque

Director de Tesis

Catalina María Rúa Alvarez

Co-Directora de Tesis

Arturo Portnoy

Jurado

Gabriel Darío Uribe Guerra

Jurado

San Juan de Pasto, Marzo 13 de 2018

ACUERDO NÚMERO 028 DE 2018
(Marzo 13)

Por la cual se otorga una distinción de **LAUREADO** al trabajo de Grado de las estudiantes DEIBY YOHANA CASTILLO NARVAEZ y KATHERINE NATHALY PAZ MORA.

EL CONSEJO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES DE LA UNIVERSIDAD DE NARIÑO, en uso de sus atribuciones reglamentarías y estatuarias y,

CONSIDERANDO:

Que mediante Proposición No.021 de marzo 13 de 2018, el Comité Curricular y de Investigaciones del Departamento de Matemáticas y Estadística, solicitó se otorgue la distinción de LAUREADO al Trabajo de Grado denominado " LOS CUADRILATEROS CÍCLICOS COMO HERRAMIENTA EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS " desarrollado por las estudiantes **DEIBY YOHANA CASTILLO NARVAEZ y KATHERINE NATHALY PAZ MORA** como requisito parcial para optar al título de Licenciada en Matemáticas, bajo la Asesoría del docente LUIS FERNANDO CÁCERES DUQUE de la Universidad de Puerto Rico y la Coasesoría de la docente CATALINA MARÍA RÚA ALVAREZ de la Universidad de Nariño y los docentes ARTURO PORTNOY de la Universidad de Puerto Rico, Reciento Mayagüez y GABRIEL URIBE GUERRA de la Universidad de Antioquia como integrantes del Jurado Evaluador;

Que mediante Acuerdo No.332 del 1 de noviembre de 2005 del Consejo Académico reglamentó y unificó los criterios y puntajes para la evaluación de trabajos de grado;

Que en el precitado Acuerdo en su Artículo 8° establece "*Los Consejos de Facultad podrán otorgar estas distinciones, previa presentación de la proposición correspondiente por parte de los Comités Curriculares y de Investigaciones, en el cual se adjunte un informe por parte de cada uno de los jurados evaluadores que justifique dicho merecimiento*";

Que mediante 029 de marzo 12 de 2018 previo el cumplimiento de los requisitos exigidos por la Institución, se autorizó la sesión de sustentación del citado Trabajo de Grado;

Que en sesión celebrada el 12 de marzo 2018 los integrantes del Jurado Evaluador otorgaron una calificación conjunta de 100/100 puntos, hecho consignado en el Acta de Sustentación No. 005 de 2018;

Que según comunicaciones emitidas por los integrantes del Jurado Evaluador, se sustenta las razones por las cuales el trabajo antes citado es acreedor a la distinción de LAUREADO;

Que el Comité Curricular y de Investigaciones del Departamento de Matemáticas y Estadística, una vez evaluados los conceptos, considera que la distinción de LAUREADO se ajusta a las normas;

Que los jurados evaluadores del trabajo de Grado en mención fueron los docentes ARTURO PORTNOY del a Universidad del Puerto Rico, Mayagüez y GABRIEL URIBE GUERRA de la Universidad de Antioquia como integrantes del Jurado Evaluador, quienes emitieron una calificación total al trabajo de grado de 100 puntos;

Que el docente **ARTURO PORTNOY** justificó la distinción de LAUREADA para el precitado trabajo de grado así:

- El documento está muy bien organizado y escrito. Es una monografía prácticamente autocontenida y muy apropiada para que un estudiante o maestro interesado en este importante tema la geometría euclideana pueda informarse y adquirir destrezas imprescindibles para participar en olimpiadas matemáticas.

- De hacerse disponible en forma impresa o electrónica a los estudiantes y maestros interesados, el documento será de gran importancia en los esfuerzos de organizar olimpiadas matemáticas regionales.

- La presentación oral por parte de las estudiantes fue excelente, fueron claras, ordenadas abarcadoras y mostraron profundidad de conocimiento. En el careo de la sesión de preguntas mostraron saber con gran seguridad lo que conocen y desconocen.

Que el docente **GABRIEL DARIO URIBE GUERRA** ratificó lo preceptuado en sustentación pública del precitado trabajo de grado así:

- Para comenzar pienso que el documento fue escrito en forma coherente y consiguiendo todos los objetivos que se trazaron en el anteproyecto y hasta más, ya que se consiguieron proponer problemas nuevos, como texto, este escrito puede ser tomado como referencia por todos los estudiantes que se preparen para olimpiadas matemáticas.

- En cuanto a la presentación, la seguridad y la terminología utilizada, demostró el conocimiento adquirido y el dominio del tema, además del orden y la coherencia en cada uno de los términos mencionados.

Que con base en los anteriores considerandos los jurados por la calificación obtenida de 100/100, sugieren otorgar al trabajo de grado la distinción de tesis **LAUREADA;**

Que este organismo considero viable la petición y;

ACUERDA:

PRIMERO: Otorgar la distinción de LAUREADO al Trabajo de Grado denominado " **LOS CUADRILATEROS CÍCLICOS COMO HERRAMIENTA EN LA RESOLUCION DE PROBLEMAS** " desarrollado por las estudiantes **DEIBY YOHANA CASTILLO**

NARVAEZ y KATHERINE NATHALY PAZ MORA como requisito parcial para optar al título de Licenciada en Matemáticas, bajo la Asesoría del docente LUIS FERNANDO CÁCERES DUQUE de la Universidad de Puerto Rico y la Coasesoría de la docente CATALINA MARÍA RÚA ALVAREZ de la Universidad de Nariño y los docentes ARTURO PORTNOY de la Universidad de Puerto Rico, Reciento Mayagüez y GABRIEL URIBE GUERRA de la Universidad de Antioquia como integrantes del Jurado Evaluador, según la parte motiva del presente acuerdo.

SEGUNDO: COMUNÍQUESE esta determinación compulsando las respectivas copias del presente Acuerdo al Departamento de Matemáticas y Estadística, la oficina de Registro Académico y la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

San Juan de Pasto, Marzo 13 de 2018.

HERNÁN ABDÓN GARCÍA
Presidente
Elaboró: Duvi C.

DUVI CASTILLO MENESES
Secretaria

Agradecimientos

En la culminación de esta Tesis agradecemos primeramente a Dios por habernos acompañado y guiado a lo largo de la carrera, dándonos fuerza y coraje para hacer realidad este sueño.
A la Universidad de Nariño por habernos abierto las puertas y darnos la oportunidad de crecer profesionalmente.
A nuestros asesores Dra. Catalina Rúa y Dr. Luis Cáceres quienes con su experciencia y conocimientos nos guiaron a la culminación de este trabajo, además agradecerles por su paciencia, su dedicación, por confiar en nosotras y brindarnos su apoyo incondicional en este proceso.
A los docentes del Departamento de Matemáticas y Estadística por brindarnos sus conocimientos.
A nuestros familiares, especialmente a nuestros padres, hermanos y abuelos, porque a lo largo de este camino nos brindaron su amor, su apoyo, sus consejos y su paciencia, además en los momentos difíciles nos alentaron a seguir adelante, anhelando siempre nuestra preparación, siendo esta la más valiosa herencia.
A Nathaly Cifuentes por su amistad incondicional y por tantas cosas.

Este trabajo está dedicado a:

Mi madre Aura por ser el motor de mi vida; a mis hermanas Yolanda, Patricia y Anye, a mi hermano Andrés, a mis sobrinos Itza y Mauricio y a mi cuñado Wilton por su amor y apoyo incondicional; a Diego Esteban por estar siempre allí.

Deiby

Este trabajo está dedicado a:
Mis padres Leonel y Mercy por su apoyo incondicional, a mi hermano Josué por alegrar mi vida.
Nathaly

Resumen

Los problemas propuestos en las Olimpiadas matemáticas no son necesariamente comunes y generalmente abordan temas avanzados en diferentes áreas, es allí donde la experiencia en la solución de problemas juega un papel importante, porque es necesario integrar conocimientos previos, estrategias, habilidades e ingenio cuando se enfrenta a un problema.

Este trabajo se enfocó en la solución de problemas geométricos, principalmente de competencias matemáticas y relacionados con cuadriláteros cíclicos, esto es, cuadriláteros cuyos vértices se encuentran en una circunferencia. Este tema normalmente no se enseña en las escuelas, pero en las Olimpiadas matemáticas es muy común encontrar una variedad de problemas donde se aplica este concepto. Se destaca que el estudio de los problemas relacionados con los cuadriláteros cíclicos ayuda a profundizar, comprender y aplicar conceptos geométricos.

En este trabajo se presenta una compilación teórica de cuadriláteros cíclicos, que incluye criterios para su caracterización. Estos conceptos teóricos se aplicaron en la resolución de problemas donde, implícita o explícitamente, se requiere el uso de cuadriláteros cíclicos como una herramienta de solución. También se muestra una colección de problemas propuestos sobre este tema. Además, cabe señalar que con la experiencia obtenida haciendo esta tesis, se crearon y resolvieron tres problemas relacionados con los cuadriláteros cíclicos.

Abstract

Proposed problems in mathematical Olympiads are not necessarily common and generally address advanced topics in different areas, it is there where experience in the solution of problems plays an important role, because it is necessary to integrate previous knowledge, strategies, abilities and ingenuity when facing a problem.

This work was focused on solution of geometric problems mainly from mathematical competition and related to cyclic quadrilaterals, this is, quadrilaterals whose vertices all lie on a circumference. This topic is not normally taught in schools, but in mathematical Olympiads it is very common to find a variety of problems where this concept is applied. It is highlighted that the study of problems related to cyclic quadrilaterals help to deepen, understand and apply geometric concepts.

In this work a theoretical compilation of cyclic quadrilaterals is presented, including criteria for their characterization. These theoretical concepts were applied in problem solving where, implicitly or explicitly, the use of cyclic quadrilaterals is required as a solution tool. A collection of proposed problems about this topic is also shown. Additionally, it should be noted that with the experience gained doing this thesis, three problems related to cyclic quadrilaterals were created and solved.

Índice general

Índice de figuras

Notación

Símbolos

$\measuredangle$	Ángulo
$\cong$	Congruencia
$\leftrightarrow$	Recta
$-$	Segmento
$\sim$	Semejanza
$\triangle$	Triángulo

Abreviaturas

CM	Canguro Matemático
IMO	Olimpiada Internacional de Matemáticas
OCM	Olimpiada Colombiana de Matemáticas
OIM	Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
OMA	Olimpiada Matemática Argentina
OMCC	Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe
OMCS	Olimpiada Matemática del Cono Sur
OMI	Olimpiada Matemática Italiana
OMM	Olimpiada Matemática Mediterránea
OMNC	Olimpiada Matemática Nacional de China
OMPR	Olimpiada Matemática de Puerto Rico
AOPS	Art Of Problem Solving

Introducción

Desde el siglo XVI con los torneos matemáticos de Italia y luego con el primer torneo matemático para jóvenes en Hungria en 1894, las olimpiadas matemáticas comenzaron a tomar fuerza y se volvieron populares. En 1959, Rumania toma la iniciativa y lleva a cabo la primera versión de la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), en la que participaron siete países. Actualmente, la mayoría de países participan en esta y otras olimpiadas internacionales, incluso en muchos países se realizan olimpiadas nacionales, regionales y locales. Por ejemplo, en Colombia la Universidad Antonio Nariño organiza la olimpiada nacional y coordina el equipo de estudiantes que participan en la IMO, en la Olimpiada Matemática de Centro América y el Caribe (OMCC), en la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM), entre otras.

Las olimpiadas matemáticas se han convertido en concursos con gran acogida por las situaciones problema que plantean, pues no son usuales y generalmente su solución no es obvia, retando a los estudiantes a explorar nuevas estrategias que impulsan su ingenio y creatividad al intentar resolverlos. Es aquí donde la resolución de problemas juega un papel importante.

La resolución de problemas matemáticos, es un proceso que permite reflexionar sobre las acciones que se pueden realizar al enfrentarse a un problema. Resolver un problema, es un reto intelectual para quien lo enfrenta y se necesita de una serie de pasos o estrategias que guien el camino hacia la solución, donde es necesario tener en cuenta los conocimientos, las habilidades, la creatividad y el ingenio (Castillo et al, 2017). En este campo, uno de los pioneros es George Polya quien en su libro "Cómo plantear y resolver problemas", o más conocido como "How to solving", propone cuatro pasos que pueden guiar el proceso para resolver un problema, aunque no existe un método mecánico, ni una fórmula mágica que los resuelva. Los pasos son: entender el problema, idear un plan, ejecutar el plan y hacer una mirada retrospectiva.

Al igual que Polya, otros autores como Miguel de Guzmán, Allan Schoenfeld y Santos Trigo, han trabajado e investigado en el área de resolución de problemas proponiendo métodos para abordarlos y coinciden en que la resolución de problemas es un proceso complejo e importante en el desarrollo integral de una persona. Más información al respecto se puede encontrar en Guzmán (1995), Polya (1965), Schoenfeld (1985) y Santos (2014).

Dado el impacto que las olimpiadas matemáticas generan, los participantes se preparan en las diferentes áreas como son aritmética, teoría de números, álgebra, geometría, entre otros. En el área de geometría, se ha observado que en cada versión de estos certámenes siempre hay problemas relacionados con ella. Después de un análisis realizado a los problemas de la IMO, disponibles en la página de internet de Art Of Problem Solving, desde la primera versión de esta olimpiada hasta la realizada en el año 2016, concluimos que el 35 % de los problemas propuestos han sido geométricos.

En los problemas geométricos que se proponen en las diferentes olimpiadas se encuentran problemas relacionados con cuadriláteros cíclicos, es decir, con cuadriláteros que se pueden inscribir en una circunferencia. En el análisis realizado a los problemas propuestos por la IMO, se observó que desde el examen del año 2000 hasta la prueba realizada en el año 2016, el 56 % de los problemas en geometría están relacionados con cuadriláteros cíclicos. Este hecho afirma la importancia en el estudio de dichos cuadriláteros.

Los cuadriláteros cíclicos, no son un tema muy conocido en la educación básica y media e incluso en la universidad. Sin embargo, es común encontrarlos en libros de geometría elemental, como propiedades de cuadriláteros inscritos en circunferencias y no con su nombre técnico. Por otra parte, hay libros de geometría más avanzada donde se deja una sección para hablar de ellos, donde normalmente se presentan teoremas básicos. Algunas referencias donde se pueden encontrar cuadriláteros cíclicos son Andreescu y Gelca (2009), Barnett (1997), Coxeter y Greitzer (1967) y Hemmerling (1971).

En este trabajo se presentan teoremas relacionados con cuadriláteros cíclicos y su aplicación en la resolución de problemas geométricos, para ello se plantean cinco capítulos. El primero, denominado preliminares, recopila conceptos de geometría necesarios para comprender la temática que se desarrolla en el trabajo, asumiendo conocimientos geométricos básicos. En el segundo capítulo, se resalta la importancia de la resolución de problemas y se presenta una breve descripción de algunas olimpiadas matemáticas en las que se han encontrado problemas sobre cuadriláteros cíclicos. El tercer capítulo es fundamental en este trabajo, al contener el componente teórico sobre cuadriláteros cíclicos que permite determinar criterios para demostrar propiedades relacionadas con ellos y características que los determinan. Por otro lado, en el cuarto capítulo, se presentan problemas tomados de olimpiadas matemáticas y libros de geometría con su respectiva solución, donde el uso de las propiedades de cuadriláteros cíclicos como herramienta ha sido esencial. Además, en este capítulo, gracias a la temática estudiada y a la exploración en el software de geometría dinámica GeoGebra, se proponen y solucionan tres problemas originales. Finalmente, en el último capítulo se incluye una recopilación de problemas tomados de diferentes olimpiadas matemáticas y libros de geometría, los cuales se relacionan con los cuadriláteros estudiados. Con este capítulo se pretende que el lector pueda practicar y adquirir más habilidades en la resolución de problemas geométricos relacionados con cuadriláteros cíclicos.

Capítulo 1

Preliminares

Para comprender el tema de cuadriláteros cíclicos y problemas estudiados en el presente trabajo, es necesario conocer conceptos de geometría elemental. Es así, como en este capítulo se presentan de forma breve algunos conceptos y teoremas básicos que pueden ser de utilidad en la solución de dichos problemas y demostraciones, las figuras que se prensentan en adelante son de nuestra autoría.

Para empezar, es importante aclarar que en el presente trabajo los puntos se denotarán con letras mayúsculas y las rectas con letras minúsculas o se pueden definir por dos puntos que pertenezcan a ella y sean diferentes, por ejemplo una recta definida por los puntos A y B denota como $\overleftrightarrow{AB}$. Además, se denotará el segmento AB como $\overline{AB}$ y cuando se trate de la medida del segmento, por abuso de notación, se escribirá de igual manera.

Los ángulos se denotarán mediante tres puntos, de modo que el del medio corresponda al vértice y los otros dos puntos estén sobre los lados que definen del ángulo. El símbolo que se emplea para ángulo es $\measuredangle$, por ejemplo en la Figura 1.1 el ángulo $\measuredangle CED$ y cuando se trate de la medida no se hará distinción, por ejemplo el ángulo
Las relaciones de congruencia entre los ángulos formados por el corte de una transversal s y unas rectas paralelas l y m, tal como se observa en la Figura 1.1, son:

- *Ángulos alternos internos* tales como $\measuredangle ADE = \measuredangle CED$ y $\measuredangle DEG = \measuredangle BDE$.
- *Ángulos correspondientes* tales como $\measuredangle FDA = \measuredangle DEG$, $\measuredangle BDF = \measuredangle CED$, $\measuredangle ADE = \measuredangle GEH$ y $\measuredangle BDE = \measuredangle CEH$.
- *Ángulos opuestos por el vértice* tales como $\measuredangle FDA = \measuredangle EDB$, $\measuredangle BDF = \measuredangle ADE$, $\measuredangle DEG = \measuredangle HEC$ y $\measuredangle CED = \measuredangle GEH$.
- *Ángulos alternos externos* como $\measuredangle BDF = \measuredangle GEH$ y $\measuredangle FDA = \measuredangle HEC$.

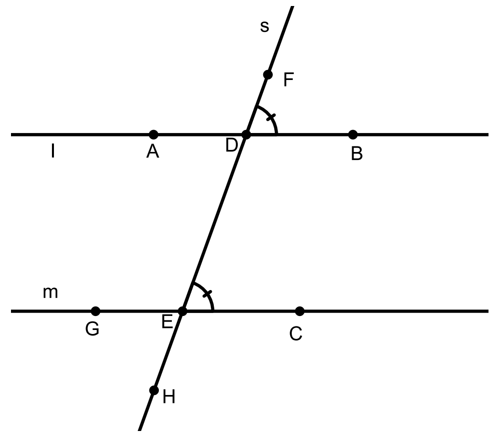

Figura 1.1: Rectas paralelas cortadas por una transversal.

Además de las relaciones de congruencia se tienen *ángulos colaterales*, los cuales son suplementarios y pueden ser internos o externos. En la Figura 1.1, $\measuredangle EDB$ y $\measuredangle CED$ son ángulos colaterales internos, mientras que $\measuredangle BDF$ y $\measuredangle HEC$ son colaterales externos.

Por otra parte, por la importancia que presentan los triángulos en los problemas geométricos y a que se usarán propiedades que se asumen conocidas sobre ellos, se presentan algunas de estas y se aclara la notación a usar con respecto a propiedades de congruencia sobre los triángulos.

Los triángulos son figuras geométricas cerradas formadas por la unión de tres segmentos, los cuales se llaman lados, donde los puntos comunes a cada par de lados se denominan vértices. Cada triángulo, se denotará con el símbolo $\triangle$ seguido de los tres vértices que lo forman, por ejemplo el triángulo con vértices A, B y C se denota $\triangle ABC$. Una característica importante de ellos, en la geometría euclidiana, es que la suma de la medida de sus ángulos internos es $180°$.

Los triángulos se pueden clasificar según la longitud de sus lados en:

- *Equiláteros:* si los tres lados tienen la misma longitud.
- *Isósceles:* si solo dos lados tienen la misma longitud.
- *Escalenos:* si las longitudes de los lados son diferentes.

También es posible clasificar los triángulos según sus ángulos en:

- *Rectángulos:* si tienen un ángulo recto.
- *Acutángulos:* si sus tres ángulos son agudos.
- *Obtusángulos:* si uno de sus ángulos es obtuso.

Por otro lado, es importantes tener en cuenta las siguientes definiciones relacionadas con triángulos:

- *Altura:* es el segmento perpendicular a uno de los lados (o a su prolongación) desde el vértice opuesto. El punto de intersección de las rectas que pasan por las alturas se conoce como *ortocentro.*

- *Mediana:* es el segmento que va desde un vértice al punto medio del lado opuesto. El punto de intersección de las rectas que pasan por las medianas se conoce como *baricentro.*

- *Bisectriz:* es el segmento o rayo que biseca un ángulo y se extiende hasta el lado opuesto. El punto de intersección de las bisectrices se conoce como *incentro.*

- *Mediatriz:* es la recta perpendicular a cada lado del triángulo por el punto medio. El punto de intersección de las mediatrices se conoce como *circuncentro.*

Para profundizar más sobre estas definiciones se recomienda revisar Barnett (1997).

En la Figura 1.2-a se han construido las alturas del $\triangle ABC$, donde las alturas desde B y C no son perpendiculares directamente al lado del triángulo sino a la extensión del mismo; en este caso, H es el ortocentro del triángulo. Por otro lado, en la Figura 1.2-b para el $\triangle MNP$ se construyeron las mediatrices, las cuales se cortan en el circuncentro O, siendo este punto el centro de la circunferencia que inscribe el triángulo. En adelante, para indicar segmentos o ángulos de igual medida se usará una pequeña traza de igual forma, por ejemplo, los segmentos $\overline{NQ}$ y $\overline{QP}$ en la Figura 1.2-b tienen la misma medida y los ángulos $\measuredangle CED$ y $\measuredangle BDF$ en la Figura 1.1 tienen la misma medida.

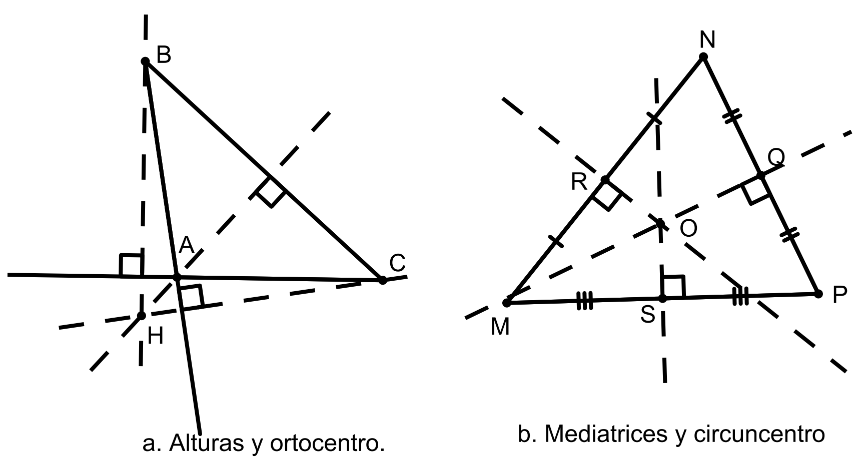

Figura 1.2: Alturas y mediatrices de un triángulo.

En ocaciones es de gran utilidad demostrar la congruencia o semejanza entre triángulos. La relación de congruencia para dos triángulos significa que tienen la misma forma y el mismo tamaño, es decir, los lados y los ángulos correspondientes en ambos triángulos tienen la misma medida, aunque no necesariamente tienen la misma orientación o posición. El símbolo para denotar congruencia de triángulos es $\cong$.

La relación de semejanza implica que los triángulos tienen la misma forma pero posiblemente diferente tamaño, de donde, los ángulos son iguales, pero los lados correspondientes pueden diferir en igual proporción. El símbolo para denotar semejanza es $\sim$.

Por ejemplo, en la Figura 1.3 se supone que el lado $\overline{AC}$ es paralelo al lado $\overline{DE}$ y por tanto se tiene que $\triangle ABC \sim \triangle DEF$. De esta semejanza, es posible concluir que los ángulos correspondientes son congruentes, es así como $\measuredangle CAB = \measuredangle EDB$, $\measuredangle BCA = \measuredangle BED$ y el ángulo $\measuredangle ABC$ es común. Además por la semejanza, también se concluye la relación de proporcionalidad dada por

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DE}} = k, \tag{1.1}$$

donde k es una constante positiva.

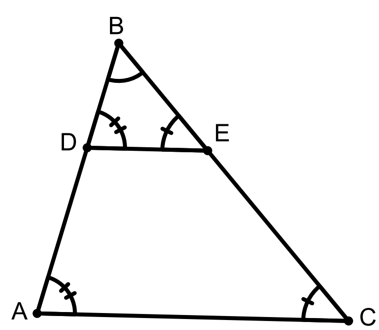

Figura 1.3: Triángulos semejantes.

Por la importancia de la congruencia y semejanza de triángulos, se presentan los criterios para probar estas relaciones.

Para probar congruencia entre dos triángulos se tienen tres criterios que son:

- Ángulo-Lado-Ángulo (A-L-A), en este es necesario probar que dos ángulos de un triángulo son congruentes con dos del otro triángulo y que los lados comprendidos entre los ángulos son iguales.
- Lado-Ángulo-Lado (L-A-L), en este es necesario probar que los dos triángulos tienen dos lados y el ángulo comprendido entre ellos congruentes.

- Lado-Lado-Lado (L-L-L), en este es necesario probar que los tres lados de un triángulo son congruentes con los del otro triángulo.

Se presenta a seguir, los tres criterios para verificar si dos triángulos son semejantes.

- Ángulo-Ángulo (A-A), en el cual dos triángulos son semejantes si tienen dos ángulos congruentes.

- Lado-Lado-Lado (L-L-L), en este criterio se tiene la semejanza si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales.

- Lado-Ángulo-Lado (L-A-L), si un ángulo de un triángulo es congruente con un ángulo del otro triángulo, y los lados correspondientes que incluyen este ángulo son proporcionales entonces los triángulos son semejantes.

Un texto para profundizar más sobre estos temas es Hemmerling (1971).

La rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre los ángulos y los lados de los triángulos es la trigonometría, en ella se encuentran diversas fórmulas que facilitan el cálculo de dichos elementos y por tanto se pueden aplicar en la resolución de problemas. Se destanca la identidad trigonométrica fundamental $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, que permite deducir otras identidades de gran utilidad; además de la ley del seno, la ley del coseno, que incluso en el Capítulo 3 se demuestran con la aplicación de cuadriláteros cíclicos. Otras fórmulas trigonométricas se pueden encontrar en Zill y Dewar (2012).

La Figura 1.4 permitirá comprender las leyes de seno y coseno descritas a seguir.

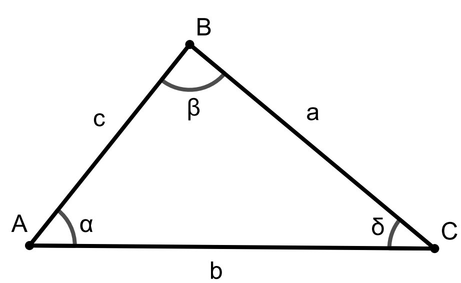

Figura 1.4: Lados y ángulos de un triángulo.

Teorema 1.1. *(Ley del seno). Sea $\triangle ABC$ tal que la medida de los correspondientes lados opuestos a los ángulos α, β y δ son respectivamente a, b y c, como se tiene en la Figura 1.4. Entonces se cumple que*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\delta}. \tag{1.2}$$

Teorema 1.2. *(Ley del coseno). Sea $\triangle ABC$ tal que sus ángulos internos son α, β y δ y la longitud de los lados opuestos a ellos son a, b y c, respectivamente, como se ilustra en la Figura 1.4. Entonces se cumplen las siguientes igualdades*

$$\begin{aligned} c^2 =& a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta, \\ b^2 =& a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ a^2 =& b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

Otro aspecto a resaltar en geometría, es lo referente a los ángulos centrales e inscritos en una circunferencia. Los *ángulos centrales,* son aquellos formados por dos radios de una circunferencia, donde el vértice del ángulo es el centro de la circunferencia y los *ángulos inscritos* son aquellos formados por dos cuerdas o un diámetro y una cuerda, que tienen un punto común sobre la circunferencia. En la Figura 1.5, dado que O es el centro de la circunferencia, $\measuredangle DOC$ es un ángulo central y los ángulos $\measuredangle DAC$ y $\measuredangle DBC$ son ángulos inscritos, en el caso del ángulo $\measuredangle DBC$ observe que el punto común sobre la circunferencia es B.

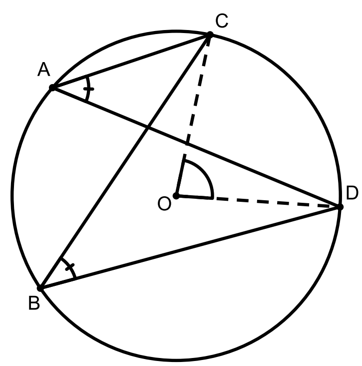

Figura 1.5: Ángulos central y ángulos inscritos.

A continuación, se describen relaciones importantes entre los ángulos mencionados.

Teorema 1.3. *Si dos ángulos inscritos en una circunferencia abren el mismo arco, entonces son congruentes.*

Teorema 1.4. *La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Por los anteriores teoremas, se concluye que en la Figura 1.5, los ángulos $\measuredangle DAC$ y $\measuredangle DBC$ son congruentes y además se tiene que $\measuredangle DBC = \frac{1}{2}\measuredangle DOC$.

Por otro lado, cabe resaltar la propiedad de la barquilla y la definición de la potencia de un punto. La primera relaciona una circunferencia con rectas tangentes a ella y la segunda está relacionada con la distancia de un punto, con el centro de una circunferencia y su radio. Se puede profundizar más sobre ellas en Cáceres (2010) y Coxeter (1967).

Teorema 1.5. *(Propiedad de la barquilla). Si se trazan dos rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, entonces los segmentos de recta desde ese punto exterior a los puntos de tangencia son congruentes y el centro de la circunferencia está en la bisectriz del ángulo entre las rectas.*

Definición 1.1. La *potencia de un punto P* con respecto a una circunferencia con centro en O y radio r se define como $(\overline{PO})^2 - r^2$.

Observe que la potencia de un punto es una constante y en caso de que P se encuentre sobre la circunferencia, la potencia es cero debido a que $\overline{PO} = r$. Además, cuando el punto P está en el interior de la circunferencia la potencia es negativa y cuando está en el exterior es positiva.

En los preliminares geométricos, finalmente se encuentra un grupo especial de polígonos que se conocen como cuadriláteros. Los cuadriláteros son figuras geométricas cerradas, formadas por la unión de cuatro segmentos, llamados lados, y los puntos donde esos lados se intersectan se llaman vértices.

Los cuadriláteros pueden ser *convexos*, si sus ángulos internos son menores a 180°, o *cóncavos* si uno de sus ángulos internos es mayor a 180°.

En el presente trabajo se usan cuadriláteros convexos. Una característica de estos cuadriláteros es que la suma de sus ángulos internos es 360°. Así, por ejemplo los cuadrados, rectángulos, trapecios y paralelogramos son cuadriláteros convexos.

Hay un gran número de propiedades básicas de los cuadriláteros que se enseñan en cursos elementales de geometría y por la importancia de ellos en este trabajo se recomienda profundizar en textos como Barnett (1997) y Hemmerling (1967).

Por otro lado, se encuentran en geometría casos especiales que son interesantes de estudiar, ya que a partir de ellos se pueden determinar propiedades. Por ejemplo, es claro que dado un punto pasan por el infinitas circunferencias. Así mismo, dados dos puntos se puede concluir que por ellos pasan infinitas circunferencias, pero cuando son tres puntos se forma un triángulo y se conoce que la circunferencia que lo inscribe es única. De aquí surge el interrogante ¿cuántas circunferencias pasan dados cuatro, cinco o más puntos? Para responder a ello imagine tres puntos, por los cuales pasa una circunferencia, si se agregan más puntos pueden estar o no en dicha circunferencia, por tanto la respuesta es que dados cuatro o más puntos por ellos pasa una única circunferencia o ninguna. Cuando una circunferencia pasa por cuatro puntos es un caso especial ya que se forma un cuadrilátero cíclico.

Capítulo 2

Resolución de Problemas

2.1. Resolución de problemas

En nuestro diario vivir tenemos que enfrentarnos a diferentes situaciones problema que requieren de la puesta en juego de nuestras habilidades, destrezas y conocimientos para poder encontrar una solución correcta y satisfactoria. Incluir en la enseñanza de las matemáticas la resolución de problemas permite un acercamiento agradable a ellas, para que así los estudiantes no solo las estudien en clase, sino también fuera de ella por su propia cuenta (Santos, 2014).

A lo largo de la historia se han realizado considerables aportes a la resolución de problemas matemáticos. Entre los autores que se destacan en esta área, se resalta al matemático húngaro George Polya, quien en su libro "Cómo plantear y resolver problemas", publicado en 1965, propone las cuatro fases de oro para la solución de problemas y como afirma Santos (2014): "son etapas fundamentales en las que el uso de los métodos heurísticos desempeñan un papel importante".

Polya plantea que el primer paso para resolver un problema es *comprender el problema*, es decir, ver claramente lo que se pide, tener clara la información dada, ser capaz de contar el problema sin necesidad de leerlo, percatarse de los pequeños detalles aunque parezcan insignificantes y si hay figuras dibujarlas, identificando en ellas los datos dados.

Luego de realizar el primer paso, Polya propone que se debe *concebir un plan*. Para ello hay que mirar las relaciones existentes entre los elementos a partir del problema, los conocimientos previos e incluso se pueden aplicar estrategias empleadas en la solución de otros problemas similares.

Ya pensado un plan, el paso a seguir es *ejecutar el plan*, en donde se pone en juego los conocimientos adquiridos, buenos hábitos de estudio, la concentración y la paciencia.

Finalmente, Polya resalta que es importante realizar una *mirada retrospectiva*, la cual enriquece al estudiante, pues en este momento se hace una revisión de los procesos y razonamientos realizados para tener completa seguridad de la validez de su solución y en el caso de no resolver el problema correctamente, idear un nuevo plan. Además, es el punto de partida para pensar en la posibilidad de cambiar el problema, de tal manera que permita crear uno nuevo.

Así como Polya propone un método para resolver problemas, en esta misma área el matemático español Miguel de Guzmán, quien basa sus ideas en Polya, propone cuatro pasos en Guzman (1995).

El primer paso para Guzman, es *familiarizarse con el problema*, para lograrlo se debe tratar de entender a detalle el problema, con paciencia y tranquilidad para perderle el miedo.

Despues se debe hacer una *búsqueda de estrategias*, entre las cuales propone empezar por lo más fácil, ensayar, realizar dibujos, figuras o esquemas, definir la notación, el lenguaje y buscar problemas semejantes o suponer que el problema ésta resuelto.

El tercer paso, por su parte, es *llevar adelante la estrategia*, es decir, seleccionar y ejecutar la mejor idea, perseverar en el desarrollo de la misma, si el camino se acaba buscar otro alternativo, y si se logra solucionarlo mirar a fondo los razonamientos realizados.

Por último Guzman, plantea que se debe *revisar el proceso y sacar consecuencias de él*, para ello se examina a fondo el camino que se siguió, ya sea que se haya logrado o no encontrar la solución, no obstante, se debe reflexionar sobre los procesos realizados para determinar si hay caminos más simples, hasta donde llega el método, y el por qué funciona y cómo funciona la solución planteada. Esta etapa debe ser la más fructífera para quien resuelve un problema.

Por otra parte, Santos basa sus ideas en el matemático norteamericano que hizo aportes considerables a la resolución de problemas Allan Schoenfeld, compartiendo con él que hay elementos importantes que pueden guiar la resolución de un problema como se puede ver en Santos (2014) y Schoenfeld (1985).

Para Santos lo primero es el *análisis* donde se tiene algunas pautas a seguir, como realizar un diagrama si es posible, examinar casos especiales y tratar de simplificar el problema.

Luego del análisis se debe realizar la *exploración*, donde se pueden considerar problemas equivalentes al remplazar algunas condiciones o recombinar elementos, también problemas modificados ligeramente, como descomponer el problema y trabajarlo por casos.

Finalmente, Santos plantea que en la *verificación* de la solución es necesario responder preguntas como por ejemplo ¿se usaron todos los datos?, ¿la solución puede obtenerse de otro modo diferente?, ¿puede reducirse a resultados conocidos?, entre otras.

Los elementos que propone Santos (2014), pueden servir de guía en el proceso de resolución, sin embargo, en ningún momento se espera que los estudiantes los mecanicen o los utilicen rígidamente, sino que se conviertan en herramientas que ayuden a entender y resolver problemas.

Las olimpiadas matemáticas son competencias que permiten profundizar los conocimientos matemáticos a través de problemas no convencionales y diferentes a los habituales que se presentan en clase, esto no significa que los problemas de olimpiadas no se puedan llevar al aula de clase. Por tal motivo, problemas tipo olimpiadas permiten llevar a los estudiante a razonar y aplicar conocimientos matemáticos en diferentes contextos e incluso ellos prueban o refutan sus propias ideas. Además, las olimpiadas ayudan a identificar jóvenes talentos, quienes pueden mejorar sus conocimientos matemáticos al realizar problemas cada vez más avanzados.

En las olimpiadas de matemáticas se proponen problemas de geometría, sin embargo su enseñanza se ha dejado de lado en la educación básica y media (Marmolejo, 2010), por lo cual los estudiantes deben prepararse en esta área, tanto en conceptos básicos como en conceptos avanzados. Un ejemplo de un tema avanzado en geometría son los cuadriláteros cíclicos, lo cuales como se verá más adelante se usan en la resolución de problemas.

2.2. Olimpiadas matemáticas

Las olimpiadas matemáticas se han convertido en un concurso importante para aquellas personas interesadas en el tema, pues, como ya se dijo, en ellas se plantean situaciones problemas que no necesariamente tienen una solución obvia, retando a los estudiantes a explorar nuevas estrategias y a poner en juego su ingenio y creatividad al intentar resolverlos por diferentes caminos.

Un común denominador de las olimpiadas matemáticas es la aplicación de problemas geométricos en sus pruebas. Particularmente, al observar los problemas en la Olimpiada Internacional de Matemáticas, desde la primera olimpiada hasta el año 2016, el 35 % de los problemas propuestos han sido geométricos y entre estos el 56 % están relacionados con cuadriláteros cíclicos (AOPS, 2018; IMO, 2015). Incluso al observar en otras olimpiadas internacionales como la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM, 2017), también se destacan en los problemas de geometría, los relacionados con dichos cuadriláteros, lo cual resalta la importancia de que se estudien estrategias de resolución de problemas y algunos componentes teóricos que fomenten el conocimiento sobre cuadriláteros cíclicos. Antes de estudiar estos cuadriláteros se presentan algunos aspectos importantes de olimpiadas matemáticas, de las cuales más adenlante se tomarán problemas.

Se considera en primer lugar, la Olimpiada Internacional de Matemáticas (IMO), la cual es uno de los campeonatos de matemáticas más importantes en el mundo. La primera versión de este certamen se realizó en el año 1959 en Rumania, con la participación de países (Bulgaria, Checoslovaquia, República Democrática Alemana, Hungría, Polonia, Rumania y Unión de Repúblicas Socialistas Soviéticas) y actualmente, participan más de 100 países de todo el mundo. Cada país conforma un equipo de máximo seis participantes menores de 20 años, sin embargo, el examen se presenta de manera individual. La competencia se desarrolla en dos días, cada día se presentan a los estudiantes tres problemas para ser resueltos en cuatro horas y media. Los mejores puntajes son merecedores de medallas de oro, plata y bronce (IMO, 2015).

Otra competición de nivel internacional es la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe (OMCC) en la cual participan jóvenes menores de 16 años de países como El Salvador, Panamá, Puerto Rico, entre otros. El objetivo primordial de la olimpiada es estimular el estudio de las matemáticas y el desarrollo de jóvenes talentosos en matemáticas. En esta olimpiada, además de premiar las mejores puntuaciones con medallas de oro, plata y bronce, también se premia el ingenio y la creatividad de los participantes, al otorgar incentivos especiales a quienes propongan soluciones creativas y originales. Los equipos de cada país se componen por tres concursantes, a partir del año 2018 los equipos tendrán cuatro participantes. En esta competencia cada concursante trabaja de manera individual, al igual que en la IMO la competencia se desarrolla en dos días, donde por día en cuatro horas y media se proponen tres problemas (OMCC, 2007).

Por otro lado, se encuentra la Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (OIM). Esta olimpiada, al igual que la OMCC y la IMO, se desarrolla en dos días, donde en cada día se proponen tres problemas con un tiempo de cuatro horas y media para ser resueltos. Los concursantes son de los distintos países iberoamericanos, deben ser menores de 18 años y conforman un equipo de máximo cuatro participantes, que representa a su país (OIM, 2017).

Otro concurso de carácter internacional es el Canguro Matemático (CM). En este participan estudiantes de más de 50 países alrededor del mundo, entre ellos de Colombia. Este concurso se realiza, en la mayoría de naciones de forma presencial y en algunas de forma virtual. Las respuestas de los problemas se presentan por selección múltiple, lo que permite una gran participación. El nombre de este certamen, se debe a que inició en Australia a inicios de los 80´s, luego por su suceso en los

90´s se comenzó la participación de Francia y progresivamente fueron incrementando el número de países en este evento. Por su importancia, muchas olimpiadas matemáticas referencian esta competencia como preparación para los estudiantes. A diferencia de las anteriores olimpiadas, el CM realiza solo una prueba de forma simultánea en los diversos países. Esta prueba ofrece los siguientes niveles: preecolier o nivel 1, ecolier o nivel 2, benjamin o nivel 3, cadete o nivel 4, junior o nivel 5 y estudiantes o nivel 6 (CM, 2018).

También se encuentran en diferentes países, olimpiadas nacionales. Se resalta entre ellas la Olimpiada Matemática de Puerto Rico (OMPR), que es un proyecto liderado por el Departamento de Ciencias Matemáticas del Recinto Universitario de Mayagüez, donde el objetivo principal es identificar estudiantes interesados en las matemáticas y apoyarlos para que desarrollen el potencial que tienen. Los estudiantes ganadores de esta olimpiada tienen la oportunidad de representar a Puerto Rico en la IMO, en la OIM y en la OMCC.

Los participantes de la OMPR son estudiantes de grados superior o igual a tercero e inferior o igual al undécimo grado, los niveles en esta olimpiada son: elemental (grados 3, 4 y 5), intermedio (grados 6, 7 y 8) y superior (grados 9, 10 y 11), donde los alumnos se enfrentan en tres fases. La primera fase es publicada en la página de internet y el estudiante debe enviar sus respuestas por medio de un correo electrónico. La segunda fase se desarrolla en la universidad, en este caso los mejores tienen la oportunidad de participar en una academia sabatina. Finalmente, la tercera fase también se realiza de forma presencial en la universidad y en esta fase se entregan las medallas de oro, plata y bronce, además de premiar a los mejores alumnos con la participación en el campamento de verano (OMPR, 2018).

Otra olimpiada de igual relevancia que la desarrollada en Puerto Rico es la Olimpiada Matemática Española (OME), que es un concurso dirigido a estudiantes menores de 19 años. Los concursantes se enfrentan a tres fases: fase distrital, fase nacional y fase internacional que se desarrollan en diferentes ciudades. La primera fase, se realiza en los primeros meses en cada universidad; la segunda, por su parte, cada año se realiza en diferentes ciudades de España, los cuatro mejores participan en la OIM y los seis mejores calificados en esta fase formarán parte del equipo olímpico de España en la IMO, siendo esta la fase internacional (OME, 2018).

Finalmente, se presenta la Olimpiada Colombiana de Matemáticas (OCM) la cual es organizada por la Universidad Antonio Nariño. Esta olimpiada consta de tres niveles, el primer nivel para estudiantes de grado sexto y séptimo, el nivel intermedio se dirige a alumnos de grados octavo y noveno y por último el nivel superior al que corresponden los jóvenes de grado décimo y undécimo. Este concurso tiene cuatro pruebas: la clasificatoria, la selectiva, la semifinal y la final. En el caso de las pruebas clasificatoria y selectiva la prueba se presenta en cada colegio, la prueba semifinal se presenta en la sedes de la universidad organizadora y la última prueba se desarrolla en la ciudad de Bogotá. El proceso que se describió permite la selección de los estudiantes que representan a Colombia en olimpiadas internacionales como la IMO, la OMCC, la OIM, entre otras (OCM, 2018).

Otras olimpiadas matemáticas de igual relevancia que las mencionadas son, por ejemplo, la Olimpiada Matemática del Cono Sur (OMCS), la Olimpiada Matemática Mediterránea (OMM), la Olimpiada Matemática Argentina (OMA), la Olimpiada Matemática Nacional de China (OMNC), la Olimpiada Matemática Italiana (OMI), entre otras. Una referencia para encontrar más olimpiadas, los problemas que proponen y algunas ideas de solución, es la página de internet de Art Of Problem Solving (AOPS, 2018).

Capítulo 3

Cuadriláteros Cíclicos

En las olimpiadas matemáticas se encuentran problemas de distintas áreas de la matemática, como por ejemplo de álgebra, teoría de números, geometría e incluso juegos matemáticos. En este trabajo se resalta la solución de problemas geométricos como el siguiente:

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, sea P la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$. La recta $\overleftrightarrow{AC}$ corta a la circunferencia circunscrita del triángulo BDP en S y T, con S entre A y C, la recta $\overleftrightarrow{BD}$ corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ACP en U y V, con U entre B y D. Demostrar que $\overline{PS} = \overline{PT} = \overline{PU} = \overline{PV}$ (OMPR, 2018).

Para resolver problemas como este, una estrategia puede ser usar las propiedades y teoremas de los cuadriláteros cíclicos. Pero ¿qué son los cuadriláteros cíclicos?, ¿qué propiedades cumplen?, ¿cómo saber cuando un cuadrilátero es cíclico? Para responder estas preguntas se realizó una revisión bibliográfica en textos como Andreescu y Gelca (2009), Cáceres (2010), Coxeter (1967) y Kichenassamy (2009).

A continuación se presenta la definición de cuadrilátero cíclico y algunos teoremas relacionados con ellos.

Definición 3.1. Un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, es un *cuadrilátero cíclico.*

Es importante comprender que los cuadriláteros de la Definición 3.1 son especiales, pues no todos los cuadriláteros se pueden inscribir en una circunferencia. Por ejemplo, en la Figura 3.1 los cuadriláteros $ABCD$, $EFGH$ y $OPQR$ son cíclicos, mientras que en la Figura 3.2 los cuadriláteros $HIJK$ y $PQRS$ no se pueden inscribir en una circunferencia y por tanto no son cíclicos.

En los problemas de geometría no siempre se menciona el término cuadrilátero cíclico o cuadrilátero inscrito en una circunferencia, por tanto es importante determinar criterios y características que

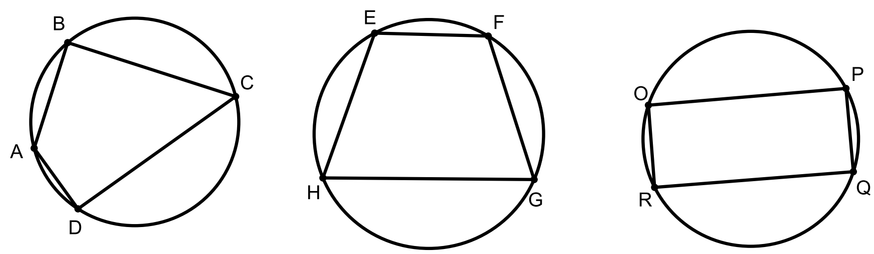

Figura 3.1: Ejemplos de cuadriláteros cíclicos.

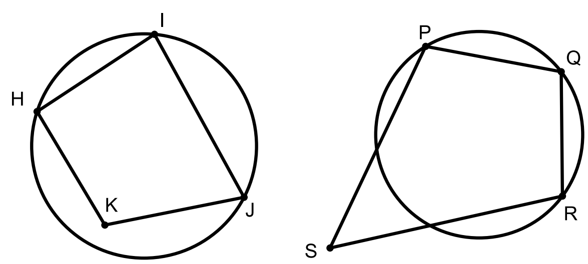

Figura 3.2: Ejemplos de cuadriláteros que no son cíclicos.

nos lleven a relacionar un cuadrilátero con la propiedad de ser cíclico.

Teorema 3.1. *Un cuadrilátero es cíclico si y solo si tiene un par de ángulos opuestos suplementarios.*

Demostración. Primero se va a demostrar que dado un cuadrilátero cíclico cualquiera, este debe tener un par de ángulos opuestos que son suplementarios, es decir, que la suma de un par de sus ángulos opuestos es 180°.
Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, se debe probar que $\measuredangle BCD + \measuredangle DAB = 180°$ o $\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180°$. Sin pérdida de generalidad se va a demostrar la primera igualdad.
Dado que $ABCD$ es cíclico existe una circunferencia de centro O que inscribe el cuadrilátero. El ángulo $\measuredangle BOD$ es un ángulo central y los ángulos $\measuredangle DAB$ y $\measuredangle BCD$ son ángulos inscritos (ver Figura 3.3), por tanto por el Teorema 1.4 se cumple lo siguiente

$$\measuredangle BCD = \frac{1}{2}\measuredangle BOD \tag{3.1}$$

y

$$\measuredangle DAB = \frac{1}{2}\measuredangle DOB. \tag{3.2}$$

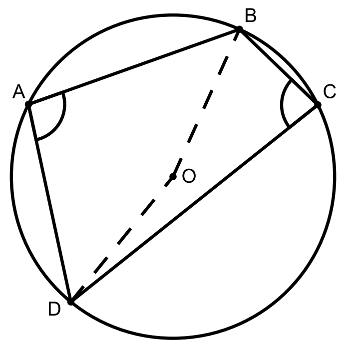

Figura 3.3: Circunferencia que inscribe al cuadrilátero $ABCD$.

Sumando (3.1) y (3.2) se tiene

$$\measuredangle BCD + \measuredangle DAB = \frac{1}{2}\left[\measuredangle BOD + \measuredangle DOB\right]. \tag{3.3}$$

Dado que $\measuredangle BOD + \measuredangle DOB = 360°$, al sustituir lo anterior en (3.3) se obtiene

$$\measuredangle BCD + \measuredangle DAB = 180°, \tag{3.4}$$

que es lo que se quería demostrar.

Para demostrar la otra implicación, es necesario suponer que un par de ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios y demostrar que el cuadrilátero es cíclico.

Para mostrar esto, se cuenta con la Definición 3.1, por lo cual se debe demostrar que los vértices del cuadrilátero se encuentran sobre una misma circunferencia.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que un par de sus ángulos opuestos son suplementarios. Por los puntos A, B y D se traza una circunferencia. Suponga que C no está en la circunferencia y sea C_1 el punto de intersección de la circunferencia con la recta $\overleftrightarrow{BC}$, tal como se muestra en la Figura 3.4.

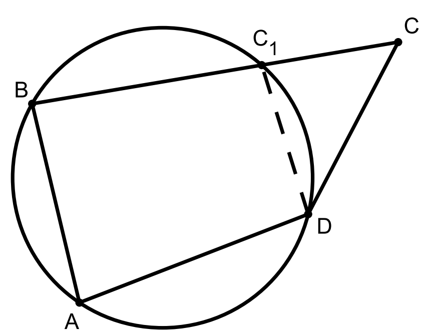

Figura 3.4: Construcción de C_1.

Luego por la Definición 3.1, ABC_1D es cíclico y por lo demostrado anteriormente se cumple que

$$\measuredangle ABC_1 + \measuredangle C_1DA = 180°. \tag{3.5}$$

Por otro lado, se tiene de la hipótesis que

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CDA = 180° \tag{3.6}$$

y como C_1 y C pertenecen a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ en la misma recta entonces $\measuredangle ABC_1 = \measuredangle ABC$. De donde al sustituir en (3.6) se tiene

$$\measuredangle ABC_1 + \measuredangle CDA = 180°. \tag{3.7}$$

Observe que de las ecuaciones (3.5) y (3.7) se concluye $\measuredangle C_1DA = \measuredangle CDA$, pero como $\measuredangle CDA = \measuredangle CDC_1 + \measuredangle C_1DA$ entonces $\measuredangle C_1DA = \measuredangle CDC_1 + \measuredangle C_1DA$, de donde $\measuredangle CDC_1 = 0°$ por lo cual se deduce que $C_1 = C$ y por lo tanto $ABCD$ es cíclico. □

Observe que los ángulos opuestos de un rectángulo son suplementarios, por lo cual el siguiente corolario es una consecuencia inmediata del teorema anterior.

Corolario 3.1. *Todo rectángulo es cuadrilátero cíclico.*

Del Teorema 3.1, se puede inferir otra propiedad de cuadriláteros cíclicos al relacionar un ángulo interno con uno externo como se describe en el próximo corolario.

Corolario 3.2. *Un cuadrilátero es cíclico si y solo si un ángulo interno es igual al ángulo adyacente del ángulo opuesto (ver Figura 3.5).*

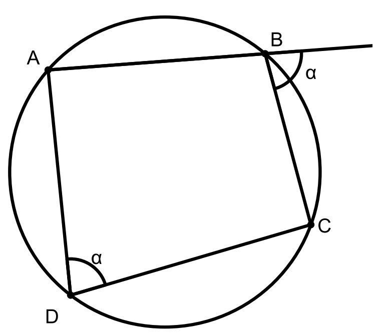

Figura 3.5: Ilustración del corolario 3.2.

El Teorema 3.1 permite determinar si un cuadrilátero es cíclico conociendo la medida de sus ángulos, lo cual brinda un criterio muy útil a la hora de resolver problemas. Sin embargo, existen más características que poseen estos cuadriláteros, a continuación se presenta un teorema que determina cuando un trapecio es cuadrilátero cíclico.

Teorema 3.2. *Si un trapecio es isósceles entonces es un cuadrilátero cíclico.*

Demostración. Para realizar la demostración se usa el Teorema 3.1, por tanto lo que se va a probar es que estos trapecios tienen un par de ángulos opuestos suplementarios.
Sea $ABCD$ un trapecio isósceles, con $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{DC}$ y

$$\measuredangle CDA = \measuredangle BCD, \tag{3.8}$$

como se indica en la Figura 3.6.

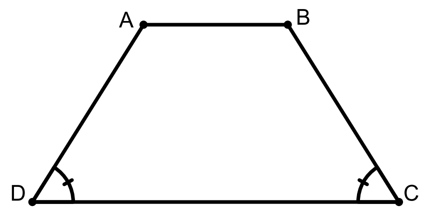

Figura 3.6: Trapecio isósceles.

Los ángulos $\measuredangle DAB$ y $\measuredangle CDA$ son suplementarios al ser ángulos colaterales internos, es decir

$$\measuredangle DAB + \measuredangle CDA = 180°. \tag{3.9}$$

Luego reemplazando (3.8) en (3.9) se obtiene que $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = 180°$, con lo cual se concluye la demostración. □

El siguiente teorema, permite identificar si un cuadrilátero es cíclico por medio de la relación de los lados, las diagonales y los ángulos de dicho cuadrilátero.

Teorema 3.3. *Un cuadrilátero es cíclico si y solo si el ángulo formado por un lado y una diagonal es igual al ángulo formado por el lado opuesto y la otra diagonal.*

Demostración. Sea un cuadrilátero cualquiera $ABCD$, siendo las diagonales de dicho cuadrilátero $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ como se muestra en la Figura 3.7.
Primero se va a demostrar que si $ABCD$ es cíclico, entonces $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$.
Puesto que los ángulos $\measuredangle CAB$ y $\measuredangle CDB$ abren el mismo arco, por el Teorema 1.3 se tiene que $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$.
Para la otra implicación, se prueba que si $\measuredangle BAC = \measuredangle CDB$ entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. Para ello se utiliza el Teorema 3.1, es decir, si $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = 180°$ entonces $ABCD$ es cíclico.
Por la suma de los ángulos internos del triángulo ABC se tiene $\measuredangle CAB + \measuredangle BCA + \measuredangle ABC = 180°$, de donde como $\measuredangle ABC = \measuredangle ABD + \measuredangle DBC$ resulta

$$\measuredangle CAB + \measuredangle BCA + \measuredangle ABD + \measuredangle DBC = 180°. \tag{3.10}$$

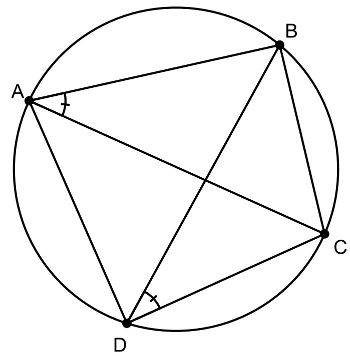

Figura 3.7: Ilustración del Teorema 3.3.

Luego, como los ángulos $\measuredangle DBC$ y $\measuredangle ABD$ abren el mismo arco que $\measuredangle DAC$ y $\measuredangle ACD$, respectvamente, por el Teorema 1.3 se tiene que $\measuredangle DBC = \measuredangle DAC$ y $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$, entonces reemplazando en (3.10) se obtiene

$$\measuredangle CAB + \measuredangle BCA + \measuredangle ACD + \measuredangle DAC = 180°,$$

y dado que $\measuredangle DAB = \measuredangle CAB + \measuredangle DAC$ y $\measuredangle BCD = \measuredangle BCA + \measuredangle ACD$, se concluye que $\measuredangle DAB + \measuredangle BCD = 180°$. Así el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. □

Observe que este teorema es una doble implicación, es decir, que no solo indica una manera de probar que un cuadrilátero es cíclico, sino también presenta una característica propia de dichos cuadriláteros. Se muestra más adelante en la resolución de problemas lo útiles que son estos teoremas. Para caracterizar los cuadriláteros cíclicos en los anteriores teoremas se consideraron sus ángulos, pero ahora se presentan teoremas que relacionan las longitudes de sus lados y diagonales.

Teorema 3.4. *Si $ABCD$ es un cuadrilátero tal que sus diagonales se intersectan en P, entonces $ABCD$ es cíclico si y solo si $\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}$ (ver Figura 3.8).*

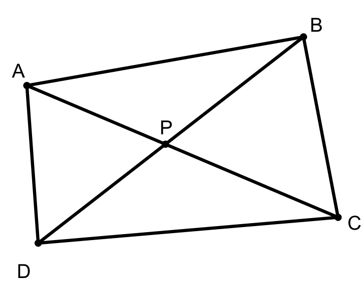

Figura 3.8: Ilustración del Teorema 3.4

Demostración. Primero se va a probar que si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$.

Se supone que $ABCD$ es cíclico. Por el Teorema 3.3 se tiene que $\measuredangle BDA=\measuredangle BCA$ y por ángulos opuestos por el vértice $\measuredangle APD=\measuredangle CPB$. Así por el criterio de semejanza A-A, se concluye que $\triangle ADP\sim\triangle BCP$ y por tanto

$$\frac{\overline{PC}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}. \tag{3.11}$$

Al operar (3.11), se concluye que $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$.

Para la otra implicación se demuestra que si $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$, entonces el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

Como $\overline{PA}\cdot\overline{PC}=\overline{PB}\cdot\overline{PD}$ entonces $\frac{\overline{PA}}{\overline{PD}}=\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$ y por ángulos opuestos por el vértice $\measuredangle APD=\measuredangle CPB$. Así por el criterio L-A-L los triángulos ADP y BCP son semejantes, por lo cual se tiene que $\measuredangle PDA=\measuredangle BCP$. Finalmente por el Teorema 3.3 $ABCD$ es cíclico. □

Observe que en este teorema $\overline{PA}\cdot\overline{PC}$ y $\overline{PB}\cdot\overline{PD}$ corresponden a la potencia del punto P con respecto a la circunferencia que contiene a los puntos A, B, C y D de acuerdo a la Definición 1.1. Este teorema brinda otra manera de probar que un cuadrilátero es cíclico cuando ya se conocen las longitudes de sus diagonales, además permite conocer otra característica de ellos.

El siguiente teorema, a diferencia de los anteriores, permite demostrar que un cuadrilátero es cíclico teniendo en cuenta un punto exterior a él.

Teorema 3.5. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero tal que dos lados opuestos se cortan en P. Entonces $ABCD$ es cíclico si y solo si $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ (ver Figura 3.9).*

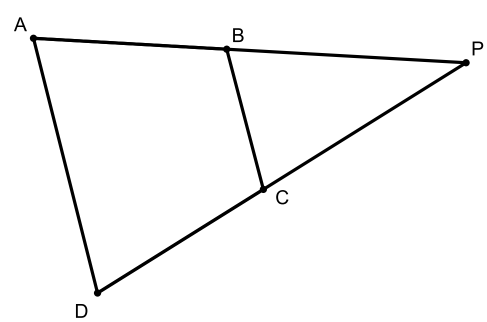

Figura 3.9: Ilustración del Teorema 3.5.

Demostración. Primero se va a probar que si un cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$. Por el Teorema 3.1 como $ABCD$ es cíclico, se tiene

$$\measuredangle CDA+\measuredangle ABC=180^\circ. \tag{3.12}$$

Luego, dado que el ángulo $\measuredangle ABP$ es llano, se obtiene

$$\measuredangle ABC + \measuredangle CBP = 180°. \tag{3.13}$$

De (3.12) y (3.13) se puede concluir que $\measuredangle CDA = \measuredangle CBP$ y dado que $\measuredangle BPC$ es común en los triángulos ADP y CBP, entonces $\triangle ADP \sim \triangle CBP$ por el criterio A-A. Por tanto $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$ así resulta $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$.

Para demostrar la otra implicación, se supone que $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$ de donde $\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}$ y como $\measuredangle BPC$ es común, entonces por el criterio L-A-L los triángulos APD y CPB son semejantes, por lo tanto

$$\measuredangle PCB = \measuredangle DAB. \tag{3.14}$$

Así, por el Corolario 3.2 se concluye que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico. □

Observe que en algunas figuras se tiene un cuadrilátero cíclico sin incluir la circunferencia que lo inscribe, por ejemplo el cuadrilátero de la Figura 3.9. Es así como surge el siguiente interrogante: ¿cómo se construye la circunferencia que inscribe a un cuadrilátero cíclico? Para responder a esta pregunta imagine un cuadrilátero cíclico, para el cual basta trazar las mediatrices de dos lados, luego con centro en el punto de intersección de las mediatrices y con radio hasta uno de los vértices del cuadrilátero se construye la circunferencia que lo inscribe.

El siguiente teorema recibe le nombre del matemático y astrónomo griego *Claudio Ptolomeo*, en el cual se establece una relación geométrica entre las longitudes de los lados y las diagonales de un cuadrilátero cíclico.

Teorema 3.6. *(Teorema de Ptolomeo). El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$ (ver Figura 3.10).*

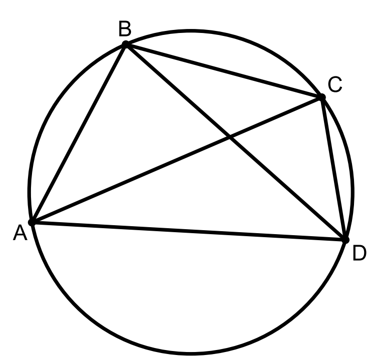

Figura 3.10: Ilustración del Teorema de Ptolomeo.

Demostración. Para empezar se realiza una construcción auxiliar que se usará en la demostración de este teorema. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cualquiera. Luego se construye el punto E tal que $\triangle BCE \sim \triangle BAD$, teniendo en cuenta la correspondiente congruencia de ángulos que se muestra en la Figura 3.11.

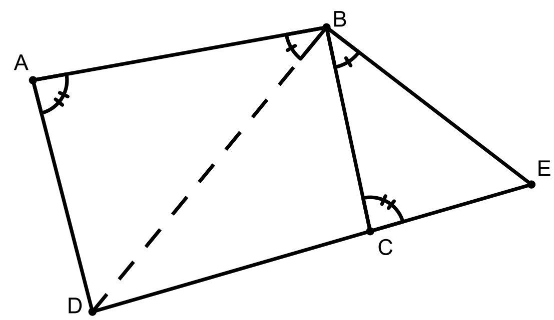

Figura 3.11: Construcción del punto E.

De la anterior semejanza se tiene que $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AD}}$ y despejando $\overline{CE}$ resulta

$$\overline{CE} = \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{\overline{AB}}. \tag{3.15}$$

Por otro lado, de esta semejanza también se puede concluir que $\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$ y como $\measuredangle ABC = \measuredangle DBE$, debido a que $\measuredangle ABD = \measuredangle CBE$ por construcción, se concluye que $\triangle ABC \sim \triangle DBE$. De aquí al despejar $\overline{DE}$ de la relación de proporcionalidad $\frac{\overline{DE}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}}$, se obtiene

$$\overline{DE} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}}. \tag{3.16}$$

Para la primera implicación, suponga que $ABCD$ es cíclico. Por construcción del punto E se tiene $\measuredangle DAB = \measuredangle ECB$, entonces por el Corolario 3.2 los puntos D, C y E son colineales, por lo cual $\overline{DE} = \overline{DC} + \overline{CE}$ y reemplazando (3.15) y (3.16) se tiene

$$\frac{\overline{BD} \cdot \overline{AC}}{\overline{AB}} = \overline{DC} + \frac{\overline{BC} \cdot \overline{AD}}{\overline{AB}},$$

luego, multiplicando por $\overline{AB}$ y simplificando

$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}.$$

Para la otra implicación, suponga $ABCD$ no es un cuadrilátero cíclico, entonces D, C y E no son colineales por lo cual $\overline{DE} < \overline{DC} + \overline{CE}$ y reemplazando (3.15) y (3.16) se deduce que $\overline{AC} \cdot \overline{BD} < \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$, lo cual contradice la hipótesis. $\square$

Los dos siguientes teoremas se atribuyen al matemático indú Brahmagupta. El primero aplica para cuadriláteros cíclicos tales que sus diagonales son perpendiculares. El segundo establece una fórmula entre el semiperímetro y la longitud de los lados del cuadrilátero para poder determinar su área, se anticipa que en este último se usan relaciones trigonométricas.

Teorema 3.7. *(Teorema de Brahmagupta). Si las diagonales de un cuadrilátero cíclico son perpendiculares, entonces toda recta perpendicular a un lado cualquiera del cuadrilátero y que pase por la intersección de las diagonales divide al lado opuesto en dos partes iguales.*

Demostración. Sea el cuadrilátero cíclico $ABCD$, tal que sus diagonales son perpendiculares y se cortan en Q. Sea M el pie de la perpendicular al segmento $\overline{CD}$ que pasa por Q y corta a $\overline{AB}$ en P, como se indica en la Figura 3.12.

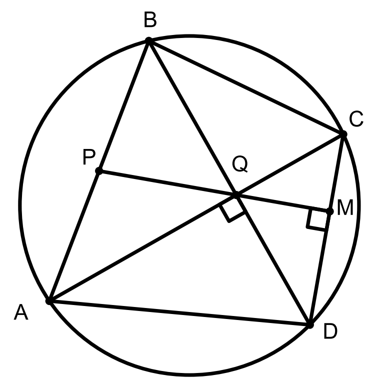

Figura 3.12: Ilustración del Teorema de Brahmagupta.

Se va a demostrar que $\overline{AP} = \overline{PB}$. Para ello observe que $\triangle ABQ \sim \triangle DQM$ por el criterio A-A, pues por hipótesis los ángulos $\measuredangle BQA$ y $\measuredangle QMD$ son rectos y por el Teorema 3.3 se tiene $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$. De la semejanza se concluye que

$$\measuredangle PBQ = \measuredangle DQM. \tag{3.17}$$

Por otro lado, los ángulos $\measuredangle DQM$ y $\measuredangle BQP$ son opuestos por el vértice y por tanto

$$\measuredangle DQM = \measuredangle BQP. \tag{3.18}$$

Luego de (3.17) y (3.18) se concluye que $\measuredangle BQP = \measuredangle PBQ$ de esta manera $\triangle BPQ$ es isósceles y de allí

$$\overline{PB} = \overline{PQ}. \tag{3.19}$$

De manera análoga, al considerar los triángulos ABQ y CMQ se demuestra que el $\triangle APQ$ es isósceles, de donde

$$\overline{PQ} = \overline{AP}. \tag{3.20}$$

Finalmente, de (3.19) y (3.20) se puede concluir que $\overline{AP} = \overline{PB}$. □

Teorema 3.8. *(Fórmula de Brahmagupta). Si un cuadrilátero es cíclico entonces su área es la raíz del producto de las diferencias del semiperímetro con la longitud de cada uno de sus lados.*

Demostración. Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico tal que $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$, $\overline{CD} = c$ y $\overline{DA} = d$, ver Figura 3.13. Se va a probar que el área del cuadrilátero es $A_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, donde s es el semiperímetro.

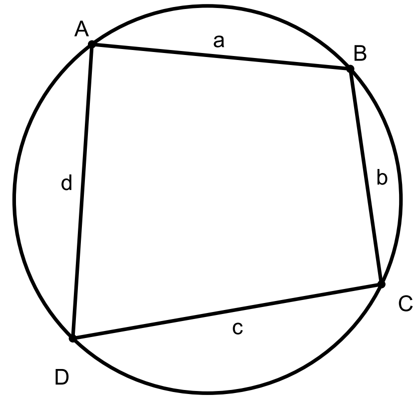

Figura 3.13: Longitud de los lados del cuadrilátero $ABCD$.

Considere $\measuredangle ABC = \alpha$, luego por el Teorema 3.1 se tiene $\measuredangle CDA = 180° - \alpha$.
Aplicando la ley del coseno a los triángulos ABC y ACD se tiene, respectivamente, que

$$(\overline{AC})^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha, \tag{3.21}$$

$$(\overline{AC})^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha. \tag{3.22}$$

Así, igualando (3.21) y (3.22) resulta

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha,$$

y al realizar las respectivas operaciones y despejar $\cos\alpha$, se concluye

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(cd+ab)}.$$

Ahora, observe que $\alpha < 180°$ pues $ABCD$ es cíclico y al despejar $\sin\alpha$ de la relación fundamental trigonométrica $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, se tiene

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= \sqrt{1 - \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{(2(cd+ab))^2}},\\ &= \sqrt{\frac{(2(cd+ab))^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(cd+ab)^2}}.\end{aligned}$$

Desarrollando como diferencia de cuadrados y factorizando se obtiene

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{\left[(a+b)^2-(c-d)^2\right]\left[(c+d)^2-(a-b)^2\right]}}{2(cd+ab)}. \tag{3.23}$$

Considerando que el semiperímetro del cuadrilátero $ABCD$ es

$$s = \frac{a+b+c+d}{2},$$

despejando $a+b$ y elevando al cuadrado se sigue $(a+b)^2 = (2s-(c+d))^2$. De donde desarrollando el cuadrado se tiene

$$(a+b)^2 = 4s^2 - 4sc - 4sd + c^2 + 2cd + d^2. \tag{3.24}$$

De manera similar al despejar $c+d$ se puede concluir que

$$(c+d)^2 = 4s^2 - 4sa - 4sb + a^2 + 2ab + b^2. \tag{3.25}$$

Así, si se reemplaza y opera (3.24) y (3.25) en (3.23), resulta

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{(4s^2-4sc-4sd+4cd)(4s^2-4sa-4sb+4ab)}}{2(cd+ab)},$$

de donde

$$\sin\alpha = \frac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-d)(s-c)(s-b)(s-b)}. \tag{3.26}$$

Dado que el área del cuadrilátero $ABCD$ se puede encontrar al sumar el área de los triángulos ABC y ACD, entonces

$$\begin{aligned} A_{ABCD} &= \frac{ab\sin\alpha}{2} + \frac{cd\sin(180^\circ-\alpha)}{2}, \\ &= \frac{ab+cd}{2}\sin\alpha. \end{aligned}$$

Luego, reemplazando (3.26) en A_{ABCD}, se tiene

$$A_{ABCD} = \frac{ab+cd}{2}\cdot\frac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Simplificando la expresión anterior queda demostrado el teorema. □

La importancia de este teorema es que proporciona una fórmula para calcular el área de cualquier cuadrilátero cíclico partiendo únicamente de la longitud de sus lados.

Observe que, si la longitud de uno de los lados del cuadrilátero tiende a cero, se obtiene la fórmula que propuso el matemático griego Herón de Alejandría para calcular el área de un triángulo conociendo la longitud de sus lados. Siendo así, la Fórmula de Herón es un caso particular de la Fórmula de Brahmagupta, la cual esta dada por

$$A_{\triangle} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

donde s es el semiperímetro del triángulo y a, b y c la longitud de sus lados.

Una aplicación de cuadriláteros cíclicos se encuentra en la demostración de las leyes del seno y del coseno como se verá a continuación.

Recuerde que la ley del seno dada en el Teorema 1.1 dice: sea $\triangle ABC$ tal que la medida de los correspondientes lados opuestos a los ángulos α, β y δ son respectivamente a, b y c. Entonces se cumple que

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\delta}.$$

Demostración. Dado el triángulo ABC se considera la circunferencia que lo inscribe, donde el centro se denota con O. Luego se construyen las rectas $\overleftrightarrow{AO}$, $\overleftrightarrow{BO}$ y $\overleftrightarrow{CO}$ que cortan a la circunferencia en D, E y F, respectivamente, determinando los diámetros $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$. Aquí se presentan dos casos, el primero cuando O está en el interior del triángulo y el segundo cuando está en el exterior, lo cual se puede ver en la Figura 3.14.

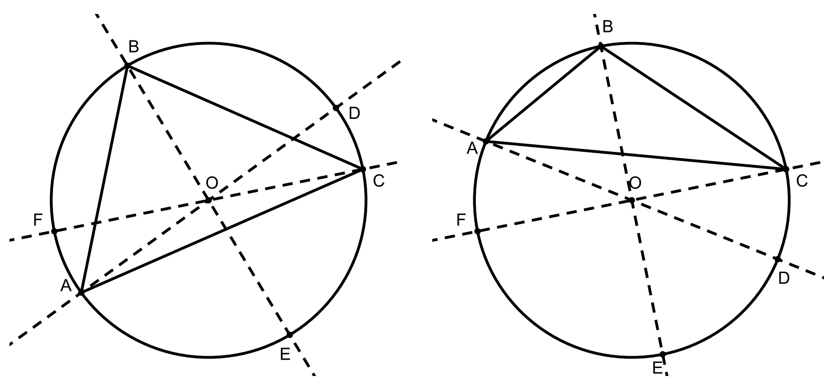

Figura 3.14: Ilustración de los dos casos de la ley del seno.

Para demostrar el primer caso, donde el centro de la circunferencia esta en el interior de $\triangle ABC$, considere el diámetro $\overline{AD}$ como se indica en la Figura 3.15. Como $ABCD$ es cíclico, por el Teorema 3.3 se concluye que $\delta = \measuredangle BDA$ y al aplicar la función seno en ambos lados de la igualdad resulta

$$\sin\delta = \sin(\measuredangle BDA). \tag{3.27}$$

Ahora, por el Teorema 1.4 el ángulo ($\measuredangle ABD$) es recto, así el $\triangle ABD$ es rectángulo por tanto

$$\sin(\measuredangle BDA) = \frac{c}{\overline{AD}}. \tag{3.28}$$

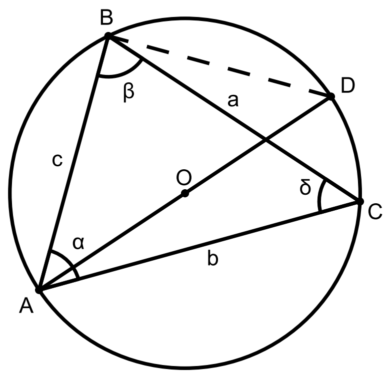

Figura 3.15: Primer caso de la ley del seno.

Luego igualando (3.27) y (3.28) resulta $\sin\delta = \frac{c}{\overline{AD}}$, de donde al despejar $\overline{AD}$ se obtiene $\overline{AD} = \frac{c}{\sin\delta}$. De manera análoga, al considerar $\overline{BE}$ con el $\triangle BCE$ y $\overline{CF}$ con el $\triangle ACF$ se puede concluir que $\overline{BE} = \frac{a}{\sin\alpha}$ y $\overline{FC} = \frac{b}{\sin\beta}$, respectivamente.
Finalmente, como $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{FC}$ al ser diámetros de la misma circunferencia, se concluye que $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\delta}$.
Para la demostración del segundo caso, donde O esta en el exterior del triángulo, considere el diámetro como se muestra en la Figura 3.16.

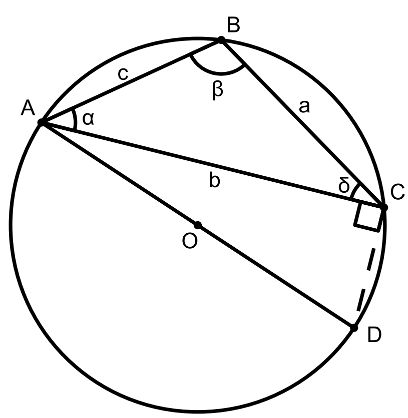

Figura 3.16: Segundo caso de la ley del seno.

Como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico entonces por el Teorema 3.1 $\beta + \measuredangle CDA = 180°$. Luego al despejar $\measuredangle CDA$ y aplicar la función seno en ambos lados de la igualdad $\sin(\measuredangle CDA) = \sin(180° - \beta)$. De donde al realizar las operaciones correspondientes se tiene

$$\sin(\measuredangle CDA) = \sin\beta. \tag{3.29}$$

Por otro lado, por el Teorema 1.4 el ángulo ($\measuredangle ACD$) es recto, así el $\triangle ACD$ es rectángulo por tanto

$$\sin(\measuredangle CDA) = \frac{b}{\overline{AD}}. \tag{3.30}$$

Así, al igualar (3.29) y (3.30) resulta $\sin\beta = \frac{b}{\overline{AD}}$ y despejando $\overline{AD}$ resulta $\overline{AD} = \frac{b}{\sin\beta}$.
Ahora, se repite el proceso realizado en el primer caso, al considerar $\overline{BE}$ con el $\triangle ABE$ y $\overline{CF}$ con el $\triangle BCE$, obteniendo como resultado $\overline{BE} = \frac{c}{\sin\delta}$ y $\overline{CE} = \frac{a}{\sin\alpha}$, respectivamente, y nuevamente como $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{FC}$ por ser diámetros de la misma circunferencia, entonces $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\delta}$. $\square$

Observe que en el teorema anterior $\frac{a}{\sin\alpha}$, $\frac{b}{\sin\beta}$ y $\frac{c}{\sin\delta}$ son iguales al diámetro del la circunferencia que inscribe al triángulo ABC.
Por otro lado, la ley del coseno que se presentó en el Teorema 1.2 dice: sea $\triangle ABC$ tal que sus ángulos internos son α, β y δ y la longitud de los lados opuestos a ellos son a, b y c, respectivamente. Entonces se cumple que

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta, \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

Demostración. Sea un triángulo ABC como el que se muestra en la Figura 3.17. Se construye una circunferencia con centro en A y radio $\overline{AC}$ tal que la prolongación de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ cortan a c en D y H, respectivamente, y $\overline{AB}$ la corta en F y E.

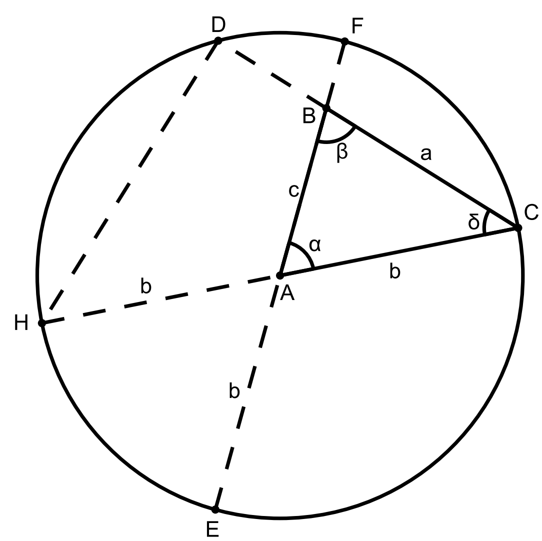

Figura 3.17: Triángulo ABC.

Dado que el $\triangle CDH$ es rectángulo, se cumple que $\cos\delta = \frac{\overline{DC}}{2b}$ y despejando $\overline{DC}$ resulta

$$\overline{DC} = 2b\cos\delta. \tag{3.31}$$

Además, por hipótesis se tiene que

$$\overline{BC} = a, \tag{3.32}$$

luego como D, B y C son colineales entonces

$$\overline{DC} = \overline{DB} + \overline{BC}. \tag{3.33}$$

Reemplazando (3.31) y (3.32) en (3.33) y operando

$$\overline{DB} = 2b\cos\delta - a. \tag{3.34}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la colinealidad de E, A, B y F se puede concluir que

$$\overline{EB} = b + c, \tag{3.35}$$

y

$$\overline{BF} = b - c. \tag{3.36}$$

Finalmente, como el cuadrilátero $CEDF$ es cíclico entonces por el Teorema 3.4 $\overline{DB}\cdot\overline{BC} = \overline{EB}\cdot\overline{BF}$ y al reemplazar (3.34), (3.32), (3.35) y (3.36) en esta última expresión y realizando las respectivas operaciones se concluye que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\delta.$$

□

La demostración anterior es un caso particular, pues la circunferencia que se construye depende de la longitud de un lado del triángulo, de modo que si se toma otro lado, la construcción no quedaría de igual manera y por ende no es posible construir el cuadrilátero que facilita la demostración.

Se resalta que las demostraciones presentadas se pueden hacer utilizando otros conceptos geométricos, sin embargo se puede observar que los cuadriláteros cíclicos constituyen una herramienta en la demostración de teoremas relacionados con trigonometría.

Con los conceptos presentados en los preliminares y en este capítulo, es posible entender los problemas que en el siguiente capítulo se resuelven.

Capítulo 4

Problemas Resueltos

En este capítulo, se presentan diversos problemas tomados de libros y olimpiadas matemáticas, los cuales han sido resueltos con ayuda de los teoremas y propiedades de cuadriláteros cíclicos descritas en el anterior capítulo.

Dado que los problemas geométricos que se plantean en olimpiadas matemáticas no siempre incluyen una gráfica que ilustre las condiciones del problema, una buena idea, para iniciar a resolverlo es realizar una gráfica. Esta se puede hacer con ayuda de un software de geometría dinámica pues facilita la elaboración de una construcción donde se pueden observar las condiciones que se enuncian en el problema y permite hacer modificaciones en tiempo real para identificar relaciones, plantear conjeturas, realizar variaciones del problema, entre otros. En este trabajo se utilizó el software GeoGebra para elaborar las gráficas presentadas, teniendo en cuenta que estas son un apoyo para la demostración, es decir, sirve como laboratorio y conjeturar más no para demostrar.

A continuación, se presentan problemas en los cuales se debe demostrar, dadas ciertas condiciones, que un cuadrilátero es cíclico.

Problema 4.1. Tomado de Cáceres (2010).

Sea $\overline{AL}$ la bisectriz del ángulo $\measuredangle BAC$ de un triángulo acutángulo ABC. Sean M y N puntos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, de manera que $\measuredangle ALM = \measuredangle CBA$ y $\measuredangle NLA = \measuredangle ACB$. Demostrar que $AMLN$ es un cuadrilátero cíclico.

Solución. Primero se ilustran las condiciones del problema en la Figura 4.1.
Para demostrar que el cuadrilátero $AMLN$ es cíclico, se va a probar que la suma de sus ángulos opuestos es 180°, es decir, $\measuredangle MAN + \measuredangle NLM = 180°$, lo que por suma de ángulos es igual a $\measuredangle MAL + \measuredangle LAN + \measuredangle ALM + \measuredangle NLA = 180°$.
Para ello se considera el $\triangle ABC$ y como la suma de la medida de sus ángulos internos es 180°,

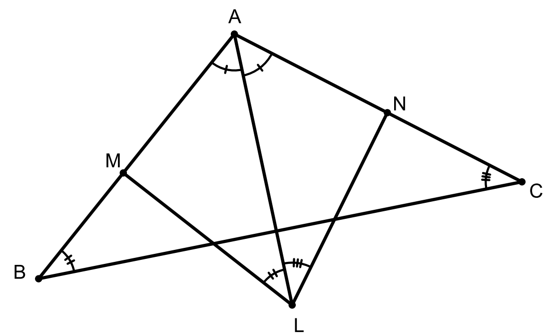

Figura 4.1: Ilustración del Problema 4.1.

entonces

$$\measuredangle CBA + \measuredangle BAC + \measuredangle ACB = 180^\circ. \tag{4.1}$$

Por hipótesis, $\measuredangle CBA = \measuredangle ALM$ y $\measuredangle ACB = \measuredangle NLA$, además como $\measuredangle BAC = \measuredangle MAL + \measuredangle LAN$, entonces reemplazando estos valores en (4.1), se tiene

$$\measuredangle MAL + \measuredangle LAN + \measuredangle ALM + \measuredangle NLA = 180^\circ,$$

por lo cual el cuadrilátero $AMLN$ es cíclico.

Problema 4.2. Tomado de Cáceres (2010).

Sean $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ las alturas de un triángulo ABC y H su punto de intersección. Demostrar que los cuadriláteros $AEHF$, $CDHE$, $BDHF$, $BCEF$, $ACDF$ y $ABDE$ son cíclicos (ver Figura 4.2).

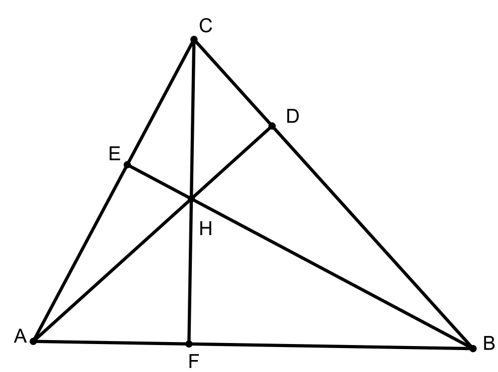

Figura 4.2: Alturas del triángulo ABC.

Solución. Dado que $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ son alturas del triángulo ABC, entonces $\measuredangle AEH = 90^\circ$ y $\measuredangle HFA = 90^\circ$, respectivamente, así por el Teorema 3.1 el cuadrilátero $AEHF$ es cíclico. Análogamente, se tiene que los cuadriláteros $CDHE$ y $BDHF$ son cíclicos.

Por otra parte, como $\measuredangle BEC = 90^\circ$ y $\measuredangle BFC = 90^\circ$, entonces por el Teorema 3.3 el cuadrilátero $BCEF$ es cíclico. De manera análoga, los cuadriláteros $ACDF$ y $ABDE$ son cíclicos.

Problema 4.3. Tomado de Cáceres (2010).

En la Figura 4.3 están trazadas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$, las cuales se intersectan en los puntos E, F, G y H como se muestra en la figura. Demostrar que el cuadrilátero $EFGH$ es cíclico.

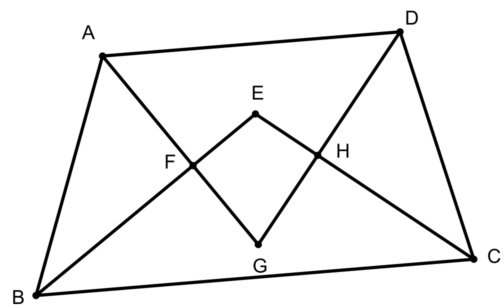

Figura 4.3: Ilustración dada por el Problema 4.3.

Solución. Se denota los ángulos como se muestra en la Figura 4.4.

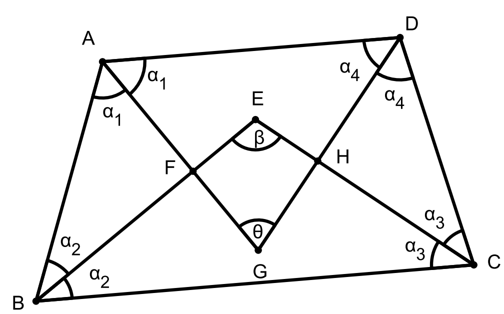

Figura 4.4: Notación de los ángulos internos del cuadrilátero.

Considere los triángulos ADG y BCE, de donde se tiene que $\theta = 180^\circ - \alpha_1 - \alpha_4$ y $\beta = 180^\circ - \alpha_2 - \alpha_3$, respectivamente, luego sumando θ y β resulta

$$\theta + \beta = 360 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4).$$

Como la suma de la medida de los ángulos internos de un cuadrilátero $ABCD$ es 360° entonces $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 180^\circ$.
Así $\theta + \beta = 180^\circ$ y por lo tanto el cuadrilátero $EFGH$ es cíclico.

Problema 4.4. Tomado de OMPR, año 2001-2002, nivel intermedio.

Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia. Sea M la intersección de las rectas tangentes a la circunferencia en B y C. Por el punto M se traza la recta paralela a $\overline{AC}$, la cual corta a $\overline{AB}$ en el punto N.

- Demuestre que $BMCN$ es un cuadrilátero cíclico.
- Demuestre que $\overline{AN} = \overline{CN}$.

Solución. Para la primera parte, se debe demostrar que el cuadrilátero $BNCM$ es cíclico, entonces por el Teorema 3.3 basta con probar que $\measuredangle MCB = \measuredangle MNB$.
Para ello sea $\alpha = \measuredangle BMC$ y como las rectas $\overleftrightarrow{BM}$ y $\overleftrightarrow{CM}$ son tangentes a la circunferencia, se tiene $\measuredangle OBM = 90°$ y $\measuredangle MCO = 90°$, respectivamente.
Luego, del cuadrilátero $BMCO$ se obtiene $\measuredangle COB = 360° - \measuredangle OBM - \measuredangle MCO - \alpha$. Al reemplazar en la expresión anterior los ángulos encontrados y hacer las respectivas operaciones resulta $\measuredangle COB = 180° - \alpha$.
Ahora, como $\measuredangle COB$ es un ángulo central, entonces por el Teorema 1.4 $\measuredangle CAB = \frac{1}{2}\measuredangle COB$, así $\measuredangle CAB = 90° - \frac{\alpha}{2}$ y puesto que la recta $\overleftrightarrow{NM}$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{AC}$ se tiene que $\measuredangle MNB = \measuredangle CAB$, por lo tanto

$$\measuredangle MNB = 90° - \frac{\alpha}{2}. \tag{4.2}$$

Por otra parte, como las rectas $\overleftrightarrow{BM}$ y $\overleftrightarrow{CM}$ son tangentes a la circunferencia en B y C, respectivamente, por la propiedad de la barquilla se cumple que $\overline{BM} = \overline{CM}$. Así el triángulo BMC es isósceles, de donde $\measuredangle CBM = \measuredangle MCB$ (ver Figura 4.5).

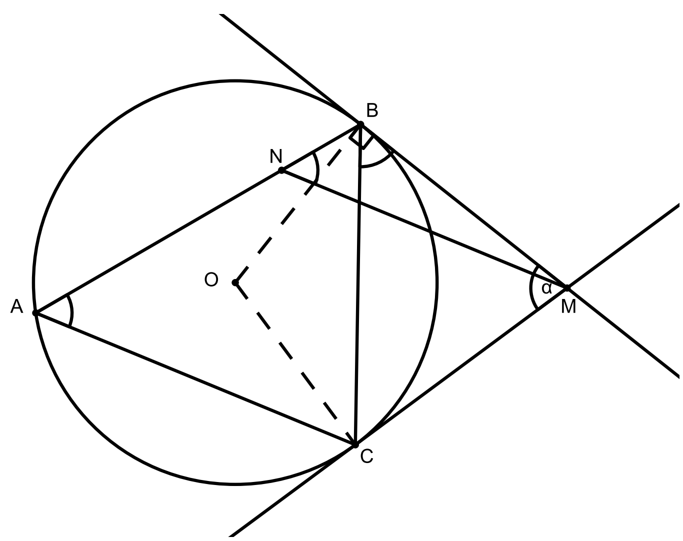

Figura 4.5: Construcción de las rectas tangentes a la circunferencia por B y C.

Del triángulo BCM se puede inferir que $\measuredangle CBM + \measuredangle MCB + \alpha = 180°$. Por lo tanto $2(\measuredangle MCB) = 180° - \alpha$ lo que es igual a

$$\measuredangle BCM = 90° - \frac{\alpha}{2}. \tag{4.3}$$

Finalmente, igualando (4.2) y (4.3) se tiene que $\measuredangle MNB = \measuredangle MCB$, así el cuadrilátero $BMCN$ es cíclico.

Para la segunda parte, como $BMCN$ es cíclico los ángulos α y $\measuredangle CNB$ son suplementarios por el Teorema 3.1, así $\measuredangle CNB = 180° - \alpha$. Luego, por suma de ángulos

$$\measuredangle CNB = \measuredangle CNM + \measuredangle MNB.$$

Al reemplazar (4.2) y la medida del ángulo $\measuredangle CNB$ se concluye

$$\measuredangle CNM = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Como las rectas $\overleftrightarrow{CA}$ y $\overleftrightarrow{MN}$ son paralelas, entonces por ángulos alternos internos $\measuredangle CNM = \measuredangle NCA$ y de esta manera

$$\measuredangle NCA = 90° - \frac{\alpha}{2}. \tag{4.4}$$

Por otro lado, de la primera parte se tiene que

$$\measuredangle CAB = \measuredangle CAN = 90° - \frac{\alpha}{2}. \tag{4.5}$$

Finalmente de (4.4) y (4.5) el triángulo CAN es isósceles, de donde se concluye $\overline{AN} = \overline{CN}$.

Problema 4.5. Tomado de OMCC, año 2004.

Sea $ABCD$ un trapecio tal que $\overline{AB}$ paralelo a $\overline{CD}$ y $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD}$. Sea P el punto sobre $\overline{AD}$ tal que $\overline{AP} = \overline{AB}$ y $\overline{PD} = \overline{CD}$.

- Demostrar que $\measuredangle CPB = 90°$.
- Sea Q el punto medio de $\overline{BC}$ y R el punto de corte de la recta $\overleftrightarrow{AD}$ y la circunferencia que pasa por los puntos B, A y Q. Demostrar que los puntos B, P, R y C están sobre una misma circunferencia.

Solución. Para la primera, parte se denota $\measuredangle PAB = \alpha$, además por ángulos colaterales internos $\measuredangle DAB + \measuredangle CDA = 180°$, de donde $\measuredangle CDA = 180° - \measuredangle DAB$. Como $\measuredangle DAB = \measuredangle PAB$ se tiene $\measuredangle CDA = 180° - \alpha$.

Por otra parte, observe que los triángulos ABP y CDP son isósceles (ver Figura 4.6), así del $\triangle ABP$ resulta

$$\measuredangle BPA = \measuredangle ABP, \tag{4.6}$$

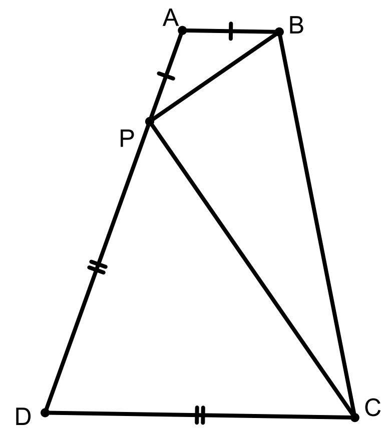

Figura 4.6: Triángulos isósceles.

y como la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es 180°, entonces

$$\measuredangle BPA + \measuredangle ABP + \alpha = 180°, \tag{4.7}$$

luego reemplazando (4.6) en (4.7) y operando resulta

$$\measuredangle BPA = \frac{180° - \alpha}{2}. \tag{4.8}$$

De manera análoga, del triángulo CDP se puede concluir que

$$\measuredangle DPC = \frac{\alpha}{2}. \tag{4.9}$$

Ahora, como el ángulo $\measuredangle DPA$ es llano, entonces $\measuredangle DPA = \measuredangle DPC + \measuredangle CPB + \measuredangle BPA = 180°$, si se reemplaza (4.8) y (4.9) en esta última expresión se tiene

$$\frac{\alpha}{2} + \measuredangle CPB + \frac{180° - \alpha}{2} = 180°,$$

y finalmente operando se obtiene que $\measuredangle CPB = 90°$.

Para la segunda parte se tiene por hipótesis que los puntos A, B, Q, y R están sobre la misma circunferencia (ver Figura 4.7), por tanto, el cuadrilátero $ABQR$ es cíclico, así por el Teorema 3.3 $\measuredangle RAQ = \measuredangle RBQ$.

Luego, como el triángulo BCP es rectángulo por lo demostrado en el punto anterior y por hipótesis Q es el punto medio de la hipotenusa $\overline{BC}$ entonces $\overline{BQ} = \overline{QP}$. De esta manera los triángulos ABQ y APQ son congruentes por el criterio L-L-L, de donde $\measuredangle PAQ = \measuredangle QAB$. De lo cual se puede concluir que $\triangle BQR$ es isósceles con $\overline{BQ} = \overline{QR}$.

De lo anterior se tiene que los puntos B, P, R y C equidistan de Q, es decir que se puede construir una circunferencia con centro en Q y radio $\overline{QC}$ de tal manera que pase por los puntos B, P, R y C, que era lo que se buscaba.

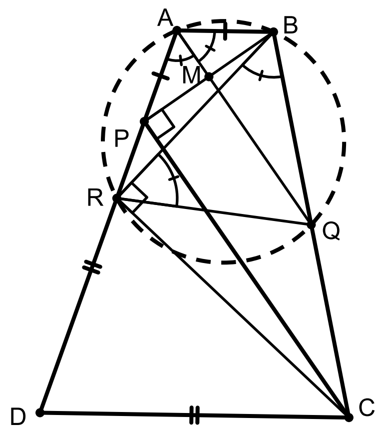

Figura 4.7: Ángulos congruentes.

Para demostrar que un cuadrilátero es cíclico, en el Capítulo 3 se presentaron criterios que fueron de gran utilidad en la solución de los anteriores problemas. Es el caso del Teorema 3.1 por el cual si en un cuadrilátero un par de ángulos opuestos son suplementarios entonces el cuadrilátero es cíclico, este criterio se usó en el Problema 4.3. Se resalta el uso de los conceptos geométricos como la suma de los ángulos internos de un triángulo, la relación de ángulos centrales e inscritos, características de los triángulos isósceles, entre otros, en la solución de los problemas que se presentan.

Ahora, se presentan problemas donde a partir de las condiciones dadas es posible identificar un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, el cual al ser cíclico por definición permite utilizar las propiedades que lo caracterizan en la solución.

Problema 4.6. Tomado de CM, año 2001, nivel 5.

¿Cuál es la medida del ángulo α en la Figura 4.8?

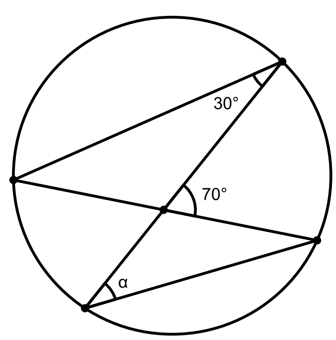

Figura 4.8: Ilustración dada por el Problema 4.6.

Solución. Se considera el cuadrilátero cíclico $ABCD$ y T el punto de corte de sus diagonales, como se muestra en la Figura 4.9. Dado que $ABCD$ es cíclico, entonces por el Teorema 3.3 $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$, es decir que $\measuredangle CAB = \alpha$.

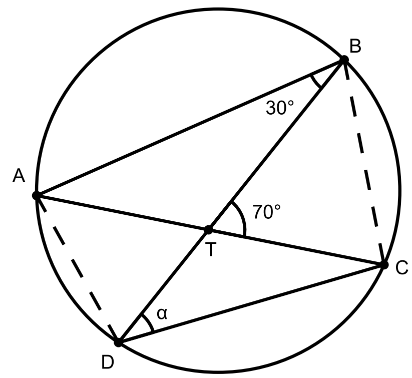

Figura 4.9: Construcción del cuadrilátero $ABCD$ y el punto de corte de las diagonales.

Luego, como el ángulo $\measuredangle CTA$ es llano entonces $\measuredangle BTA = 180° - \measuredangle CTB$ y por hipótesis se tiene $\measuredangle CTB = 70°$, así se concluye que $\measuredangle BTA = 110°$.
Además, como la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo es $180°$ entonces la medida del ángulo $\measuredangle TAB = 40°$. Finalmente, como $\measuredangle TAB = \measuredangle CAB$ se concluye que $\alpha = 40°$.

Problema 4.7. Tomado de CM, año 2005, nivel 2.

En la Figura 4.10 $ABCD$ es un trapecio inscrito en una circunferencia, ¿cuánto mide el ángulo $\measuredangle DAB$?

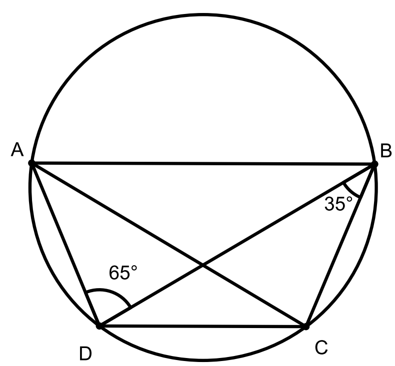

Figura 4.10: Ilustración dada por el Problema 4.7.

Solución. Se debe encontrar la medida del ángulo $\measuredangle DAB$, pero por suma de ángulos es equivalente a encontrar la medida de los ángulos $\measuredangle DAC$ y $\measuredangle CAB$ y sumarlas.

En primer lugar, como el trapecio está inscrito en una circunferencia entonces es cíclico, así por el Teorema 3.3 se determina $\measuredangle DAC = 35°$ y $\measuredangle BCA = 65°$.
Se denota T el punto de intersección de las diagonales del trapecio y teniendo en cuenta que la suma de la medida los ángulos internos de un triángulo es 180° del triángulo BCT se tiene que $\measuredangle CTB = 80°$ y como el ángulo $\measuredangle CTA$ es llano, se infiere que $\measuredangle BTA = 100°$, tal como se indica en la Figura 4.11.

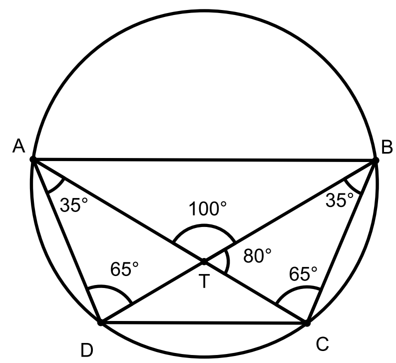

Figura 4.11: Medida de ángulos dados y concluidos inicialmente.

Como ya se dijo, $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces por el Teorema 3.3 se tiene que

$$\measuredangle CAB = \measuredangle CDB. \tag{4.10}$$

Además, como $ABCD$ es un trapecio y los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son paralelos cortados por la transversal $\overline{BD}$, entonces por ángulos alternos internos resulta

$$\measuredangle ABD = \measuredangle CDB, \tag{4.11}$$

de esta manera por (4.10) y (4.11) se concluye que $\measuredangle ABD = \measuredangle CAB$.
Finalmente, se enfoca la atención en el $\triangle ABT$ del cual se conoce que $\measuredangle BTA = 100°$ y que los otros ángulos son congruentes, así se concluye que $\measuredangle TAB = \measuredangle ABT = 40°$. De esta manera, la medida del ángulo $\measuredangle DAB$ es 75°.

Problema 4.8. Tomado de Cáceres (2010).

El triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia. P es un punto sobre el arco que va desde B hasta C. Probar que $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$.

Solución. Se construyen los segmentos $\overline{PC}$ y $\overline{PB}$ formando el cuadrilátero cíclico $ABPC$ como se muestra en la Figura 4.12.
Luego, como $ABPC$ es cíclico entonces por el Teorema 3.6 se cumple que

$$\overline{AP} \cdot \overline{BC} = \overline{AC} \cdot \overline{PB} + \overline{PC} \cdot \overline{AB}. \tag{4.12}$$

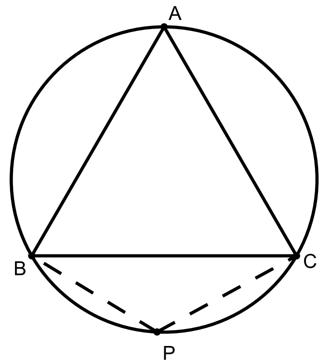

Figura 4.12: Construcción de segmentos.

Por otro parte, como el $\triangle ABC$ es equilátero entonces

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}. \tag{4.13}$$

Así, reemplazando (4.13) en (4.12) se tiene $\overline{AP} \cdot \overline{AB} = \overline{PB} \cdot \overline{AB} + \overline{PC} \cdot \overline{AB}$ y por tanto se concluye que $\overline{PA} = \overline{PB} + \overline{PC}$.

Problema 4.9. Tomado de Cáceres (2010).

Suponga que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos cuerdas perpendiculares de una circunferencia y sea E su punto de intersección. Si $\overline{AE} = 2$, $\overline{EB} = 6$ y $\overline{ED} = 3$ encontrar el diámetro de la circunferencia.

Solución. Sea O el punto de intersección de la mediatriz de $\overline{AB}$ y de $\overline{CD}$, siendo este el centro de la circunferencia (ver Figura 4.13).

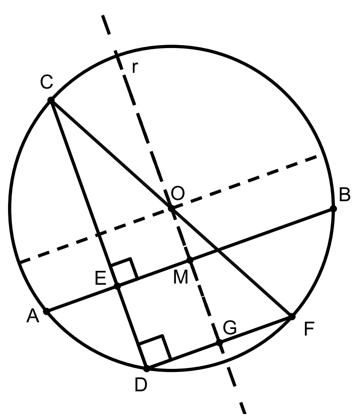

Figura 4.13: Construcciones auxiliares del Problema 4.9.

Como el cuadrilátero $ACBD$ es cíclico entonces por el Teorema 3.4 se tiene que $\overline{CE} \cdot \overline{ED} = \overline{AE} \cdot \overline{EB}$. Reemplazando los datos de la hipótesis resulta $\overline{CE}(3) = (2)(6)$, de donde al despejar $\overline{CE} = 4$, de esta manera $\overline{CD} = 7$.

Luego, se traza la recta $\overleftrightarrow{CO}$ que intersecta a la circunferencia en F determinando el diámetro $\overline{CF}$ y se considera el $\triangle CDF$. Observe que por el Teorema 1.4 el ángulo $\measuredangle FDC$ es recto.
Después, se traza la recta r paralela a $\overline{CD}$ por O, la cual corta a $\overline{DF}$ en G, como $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es paralela a r, entonces r es perpendicular a $\overline{AB}$. Sea M el punto de corte de r con $\overline{AB}$. Como los segmentos paralelos comprendidos entre rectas paralelas son congruentes entonces $\overline{DG} = 2$, pero como O es el punto medio de $\overline{CF}$ entonces G es el punto medio de $\overline{DF}$, por tanto, $\overline{DF} = 4$.
Así, aplicando el Teorema de Pitágoras al triángulo CDF y teniendo en cuenta la longitud de los segmentos $\overline{CB}$ y $\overline{DF}$ se tiene $(\overline{CF})^2 = 7^2 + 4^2$ y realizando las operaciones se encuentra que la longitud del diámetro $\overline{CF}$ es $\sqrt{65}$.

Problema 4.10. Tomado de OMPR, año 2011-2012, nivel superior.

Sea ABC un triángulo y G la circunferencia que lo inscribe. Sea D el pie de la altura desde A al lado $\overline{BC}$. La recta $\overleftrightarrow{BM}$, donde M es el punto medio de $\overline{AD}$, corta a G nuevamente en N. La recta $\overleftrightarrow{NE}$, donde E es el punto medio de $\overline{AC}$, corta a G nuevamente en P. Demuestre que $\overline{AP}$ es un diámetro.

Solución. En este problema, para demostrar que $\overline{AP}$ es diámetro, es suficiente probar que $\measuredangle POA = 180°$, donde O es el centro de G.
Observe que, ante las hipótesis dadas, el cuadrilátero $ABCN$ se encuentra inscrito en la circunferencia y por tanto es cíclico. Luego por el Teorema 3.3 se tiene

$$\measuredangle CBN = \measuredangle CAN, \tag{4.14}$$

como se indica en la Figura 4.14.

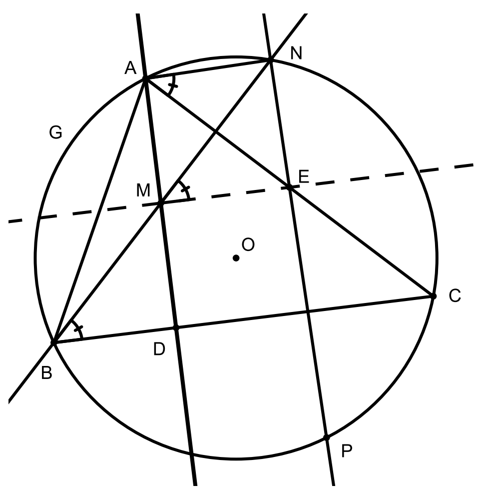

Figura 4.14: Ilustración de las condiciones del Problema 4.10 y ángulos congruentes.

Después, como por hipótesis E y M son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, al considerarse el $\triangle ACD$, se concluye que la recta $\overleftrightarrow{ME}$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{BC}$, estas rectas son cortadas por la recta transversal $\overleftrightarrow{MB}$ y por pares de ángulos correspondientes se obtiene que

$$\measuredangle CBN = \measuredangle EMN. \tag{4.15}$$

Así, de (4.14) y (4.15) se sigue que

$$\measuredangle CAN = \measuredangle EMN.$$

De esta manera, por el Teorema 3.3 el cuadrilátero $AMEN$ es cíclico.
Para finalizar, como la recta $\overleftrightarrow{AD}$ es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{BC}$ y la recta $\overleftrightarrow{BC}$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{ME}$, entonces la recta $\overleftrightarrow{AD}$ también es perpendicular a la recta $\overleftrightarrow{ME}$. Por tanto, se concluye que $\measuredangle EMA = 90°$ y como $AMEN$ es cíclico se tiene por el Teorema 3.1 que $\measuredangle ANE = \measuredangle ANP = 90°$, luego como el ángulo $\measuredangle ANP$ abre el mismo arco de circunferencia que el ángulo central $\measuredangle POA$, se tiene por el Teorema 1.4 que $\measuredangle POA = 180°$ así se concluye que $\overline{AP}$ es un diámetro.

Problema 4.11. Tomado de OMPR, año 2011-2012.

Sea ABC un triángulo que está inscrito en un circunferencia. Las bisectrices de A, B y C se encuentran en la circunferencia en D, E y F, respectivamente. Demuestre que $\overline{AD}$ es perpendicular a $\overline{EF}$.

Solución. En la Figura 4.15 se ilustran no solo las condiciones del problema, sino también los cuadriláteros cíclicos $BCEF$ y $ABDC$. Por el Teorema 3.3 del primer cuadrilátero se concluye que $\measuredangle CBE = \measuredangle CFE = \beta$ y del segundo $\measuredangle CDA = \measuredangle CBA = 2\beta$ y $\measuredangle BAD = \measuredangle BCD = \alpha$.

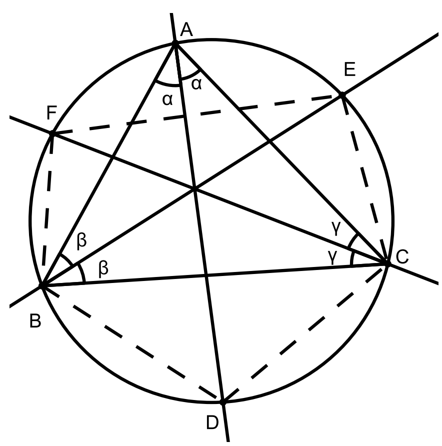

Figura 4.15: Ilustración del Problema 4.11 y construcción de cuadriláteros cíclicos.

Ahora, se considera el $\triangle ABC$ y sumando la medida de sus ángulos internos se tiene

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180°,$$

simplificando

$$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ. \tag{4.16}$$

Por otra parte, sea O el punto de corte de $\overline{FC}$ con $\overline{BE}$ y P el de $\overline{AD}$ con $\overline{EF}$ y sea $\lambda = \measuredangle DOC$. Teniendo en cuenta los ángulos internos el triángulo CDO, se tiene

$$\begin{aligned} \lambda + 2\beta + \alpha + \gamma =& 180^\circ, \\ \lambda + \beta + (\beta + \alpha + \gamma) =& 180^\circ, \end{aligned}$$

luego, reemplazando (4.16) en el resultado anterior y operando

$$\lambda + \beta = 90^\circ. \tag{4.17}$$

Finalmente, $\measuredangle DOC = \measuredangle POF = \lambda$ al ser ángulos opuestos por el vértice como se observa en la Figura 4.16. Por la suma de ángulos internos del $\triangle FOP$ se tiene $\measuredangle FPO = 180^\circ - \beta - \lambda$ luego al reemplazar (4.17) en este resultado se obtiene que $\measuredangle FPO = 90^\circ$, así se concluye que $\overline{EF}$ es perpendicular a $\overline{AD}$.

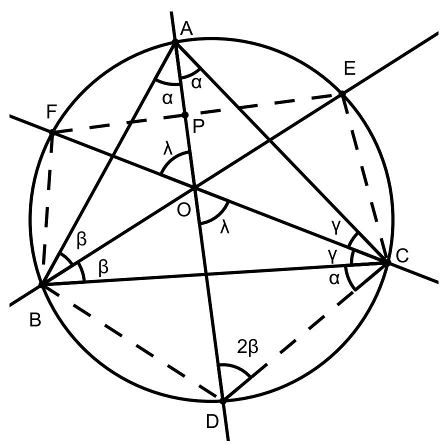

Figura 4.16: Congruencia de los ángulos $\measuredangle DOC$ y $\measuredangle POF$.

Vale la pena resaltar que los problemas propuestos por el CM proporcionan una gráfica, de la cual se puede inferir inmediatamente que hay un cuadrilátero cíclico y por tanto se pueden aplicar los teoremas estudiados para encontrar un camino que lleve a la solución. Por otro lado, los problemas 4.8, 4.9, 4.10 y 4.11 tienen en común que en su enunciado se da una circunferencia y ciertas condiciones que dejan puntos sobre la circunferencia, con lo cual se identifica la existencia de un cuadrilátero cíclico.

En las olimpiadas matemáticas y libros de geometría, también se encuentran problemas donde en el enunciado se da un cuadrilátero cíclico y a partir de ello se debe demostrar una relación o encontrar un valor. Los problemas a seguir, tienen esta característica.

Problema 4.12. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia. La diagonal $\overline{BD}$ biseca a $\overline{AC}$. Si $\overline{AB} = 10$, $\overline{AD} = 12$ y $\overline{DC} = 11$. Hallar $\overline{BC}$.

Solución. Sea Q el punto donde se cortan las diagonales del cuadrilátero $ABCD$, tal como se ve en la Figura 4.17.

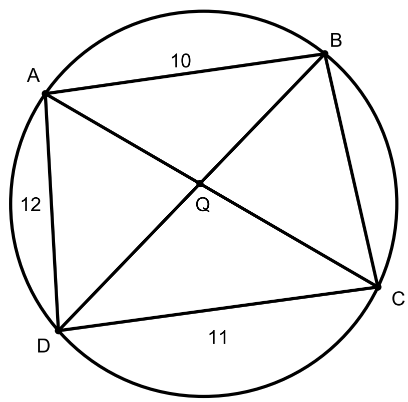

Figura 4.17: Ilustración del Problema 4.12 y construcción del punto Q.

Como $ABCD$ es cíclico por el Teorema 3.3 se tiene $\measuredangle ABD = \measuredangle ACD$ y $\measuredangle CAB = \measuredangle CDB$. Así por el criterio de semejanza A-A se obtiene $\triangle ABQ \sim \triangle DCQ$, de donde

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DC}}.$$

Reemplazando en esta proporción el valor de $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, resulta

$$\frac{\overline{QA}}{\overline{QD}} = \frac{10}{11}$$

y despejando $\overline{QA}$ se encuentra

$$\overline{QA} = \frac{10}{11} \cdot \overline{QD}. \tag{4.18}$$

De manera análoga, los triángulos ADQ y CBQ son semejantes, de donde $\frac{\overline{QD}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$. Como por hipótesis se tiene que $\overline{QA} = \overline{QC}$ y que $\overline{AD} = 12$, entonces reemplazando estos valores en la anterior expresión y despejando $\overline{QA}$ resulta

$$\overline{QA} = \frac{\overline{BC}}{12} \cdot \overline{QD}. \tag{4.19}$$

Luego igualando y operando (4.18) y (4.19) se concluye que $\overline{BC} = \frac{120}{11}$.

Problema 4.13. Tomado de OMPR, año 2006-2007.

Si $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, es decir que está inscrito en una circunferencia, y M es el punto de corte de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, demostrar que $\overline{AM} \cdot \overline{MC} = \overline{DM} \cdot \overline{MB}$.

Solución. Como $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico, entonces por el Teorema 3.3 resulta

$$\measuredangle MAB = \measuredangle CDM, \tag{4.20}$$

y

$$\measuredangle ABM = \measuredangle MCD. \tag{4.21}$$

Así, de (4.20) y (4.21) se tiene que $\triangle ABM$ y $\triangle DCM$ son semejantes, entonces $\frac{\overline{AM}}{\overline{DM}} = \frac{\overline{MB}}{\overline{MC}}$, de donde se concluye que $\overline{AM} \cdot \overline{MC} = \overline{DM} \cdot \overline{MB}$.

Otro tipo de problemas que se proponen, es cuando se pide hallar la medida de un segmento. Este es el caso del problema 4.12 donde a partir de las longitudes de tres lados se debe hallar la del cuarto, lo cual se facilita con la utilización de cuadriláteros cíclicos. El Problema 4.13 llama la atención, dado que es el recíproco del Teorema 3.4 y está propuesto en una olimpiada.

El siguiente grupo de problemas tiene una característica especial y es que las construcciones dadas no permiten identificar un cuadrilátero cíclico a primera vista, ni se menciona como tal. En estos problemas se identifica un cuadrilátero y al demostrar que es cíclico permite llegar a la solución del problema.

Problema 4.14. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).

Sobre el lado $\overline{AB}$ del cuadrado $ABCD$, se construye el triángulo rectángulo ABF, con hipotenusa $\overline{AB}$. Si $\overline{AF} = 6$ y $\overline{BF} = 8$, encontrar $\overline{EF}$, donde E es la intersección de las diagonales del cuadrado.

Solución. En la Figura 4.18 se observan las construcciones dadas en el enunciado del problema. Por hipótesis $\measuredangle BFA = 90°$ y como las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entonces $\measuredangle AEB = 90°$, por lo tanto el cuadrilátero $AEBF$ es cíclico. Ahora se va a utilizar el Teorema 3.6, por lo cual primero se debe calcular la medida de $\overline{AB}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BE}$, ya que estos aún no se conocen. Para ello se considera el $\triangle ABF$ y por el Teorema de Pitágoras

$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AF})^2 + (\overline{FB})^2,$$

reemplazando $\overline{AF}$ y $\overline{FB}$, que se tienen por hipótesis, y operando $\overline{AB} = 10$. De manera análoga, con el triángulo ABC se obtiene que $\overline{AC} = 10\sqrt{2}$. Luego, $\overline{BE} = \overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AC}$ ya que las diagonales de un cuadrado se cortan en el punto medio, así $\overline{BE} = 5\sqrt{2}$ y $\overline{AE} = 5\sqrt{2}$.

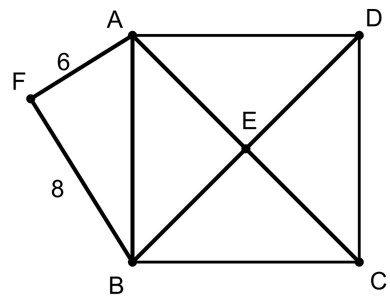

Figura 4.18: Ilustración del Problema 4.14.

Con estos datos es posible aplicar el Teorema 3.6 al cuadrilátero cíclico $AEBF$ como sigue

$$\begin{aligned}\overline{FE}\cdot\overline{AB} =&\overline{FA}\cdot\overline{BE}+\overline{AE}\cdot\overline{FB},\\ \overline{FE}(10) =&(6)(5\sqrt{2})+(5\sqrt{2})(8).\end{aligned}$$

De esta manera, al realizar las operaciones correspondientes se concluye que el lado $\overline{FE} = 7\sqrt{2}$.

Problema 4.15. Tomado de Cáceres (2010).

En un cuadrado $ABCD$, M es el punto medio de $\overline{AB}$. Una línea perpendicular a $\overline{MC}$ por M intersecta a $\overline{AD}$ en K. Demostrar que $\measuredangle BCM = \measuredangle MCK$.

Solución. Por hipótesis M es el punto medio de $\overline{AB}$ entonces $\overline{AM} = \overline{MB}$, además como $ABCD$ es un cuadrado $\overline{AD} = \overline{BC}$ y $\measuredangle DAM = \measuredangle MBC$. Así por el criterio de L-A-L se concluye $\triangle DAM \cong \triangle CBM$, de lo cual se tiene $\measuredangle BCM = \measuredangle MDA$ (ver Figura 4.19) lo que es igual a

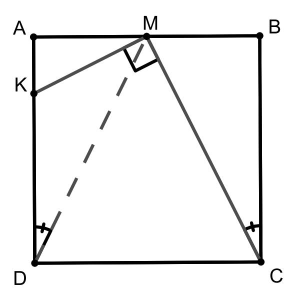

Figura 4.19: Congruencia de triángulos.

$$\measuredangle BCM = \measuredangle MDK. \tag{4.22}$$

Por otra parte, como los ángulos $\measuredangle KMC$ y $\measuredangle KDC$ son rectos entonces por en Teorema 3.1 el cuadrilátero $DCMK$ es cíclico, luego por el Teorema 3.3 resulta

$$\measuredangle MDK = \measuredangle MCK. \tag{4.23}$$

Finalmente, igualando (4.22) y (4.23) se obtiene $\measuredangle BCM = \measuredangle MCK$, que era lo que se quería demostrar.

Problema 4.16. Tomado de OMPR, año 2006-2007, nivel intermedio.

En la Figura 4.20 el trapecio isósceles $ABCD$ es tal que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD} = 1$ y $\overline{DC} = 2$, donde $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{DC}$. ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle DAC$?

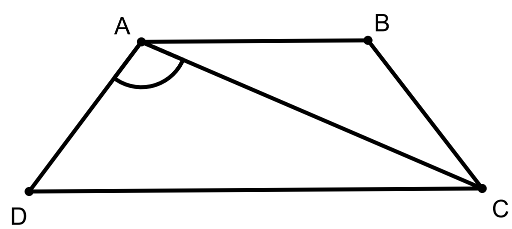

Figura 4.20: Ilustración dada por el Problema 4.16.

Solución. Primero se trazan las perpendiculares al segmento $\overline{AB}$ por los puntos A y B. Estas perpendiculares cortan al segmento $\overline{CD}$ en E y F, respectivamente, (ver Figura 4.21) de esta manera $\overline{AB} = \overline{EF} = 1$, pues son segmentos paralelos comprendidos entre rectas paralelas. Además como $\overline{CD} = 2$ entonces $\overline{CF} = \overline{ED} = \frac{1}{2}$.

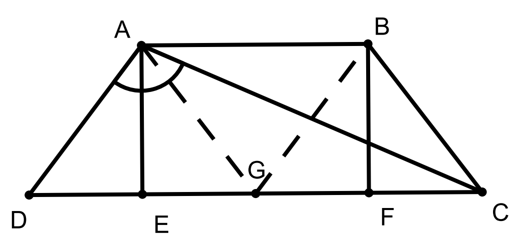

Figura 4.21: Construcción de los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$.

Sea G el punto medio de $\overline{EF}$, entonces $\overline{CG} = 1$ y como $\overline{BF}$ es mediatríz de $\overline{CG}$ se concluye que $\overline{BC} = \overline{BG}$, con lo cual el triángulo BCG es equilátero. De manera análoga, el triángulo ADG es equilátero.

Luego, como el trapecio $ABCD$ es isóceles, entonces por el Teorema 3.2 es cuadrilátero cíclico y por tanto existe una circunferencia que lo inscribe. Como $\overline{AD} = \overline{BC}$ se tiene que $\overline{GD} = \overline{GA} = \overline{GB} = \overline{GC}$

con lo cual G es el centro de la circunferencia que inscribe el trapecio. Finalmente, por ángulos centrales e inscritos $\measuredangle DAC = 90°$.

En estos problemas se resalta que el demostrar que un cuadrilátero es cíclico, logra casi de manera directa solucionar el problema, por ejemplo en el Problema 4.15 se tenía que encontrar la longitud de un segmento, el cual resultó siendo una diagonal de un cuadrilátero cíclico, lo que permitió aplicar el Teorema de Ptolomeo y de esta manera llegar al valor buscado. Hay que tener en cuenta que no es la única solución posible, pero dichos cuadriláteros brindaron un camino exitoso.

Se encuentran problemas en los que, además de no mencionar cuadriláteros cíclicos, no se identifica ningún cuadrilátero, sin embargo construir un cuadrilátero cíclico teniendo en cuenta las condiciones dadas es un punto clave en la resolución del problema.

Problema 4.17. Tomado de Posamentier y Salkind (1996).

Un triángulo inscrito en una circunferencia de radio 5, tiene dos lados que miden 5 y 6, respectivamente. Encontrar la medida del tercer lado del triángulo.

Solución. Para resolver este problema se utiliza el Teorema 3.6.
Sea el triángulo ABC inscrito en una circunferencia de radio 5, con $\overline{AB} = 6$ y $\overline{AC} = 5$, luego sea P el punto diametralmente opuesto al vértice A (ver Figura 4.22).

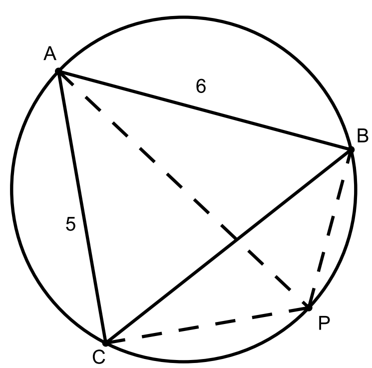

Figura 4.22: Construcción del punto P sobre la circunferencia.

Por el Teorema 1.4 se tiene que $\measuredangle ABP = 90°$ así el $\triangle ABP$ es rectángulo, luego por el Teorema de Pitágoras se obtiene que

$$\begin{aligned}(\overline{BP})^2 =& (\overline{AP})^2 - (\overline{AB})^2, \\ =& \, 10^2 - 6^2,\end{aligned}$$

de esta manera $\overline{BP} = 8$.

De manera análoga como el $\triangle ACD$ es rectángulo se concluye que $\overline{CP} = 5\sqrt{3}$.
Por la Definición 3.1 $ABPC$ es cuadrilátero cíclico, entonces por el Teorema 3.6

$$\overline{AP} \cdot \overline{BC} = \overline{AB} \cdot \overline{CP} + \overline{AC} \cdot \overline{BP},$$
$$\overline{BC} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{CP} + \overline{AC} \cdot \overline{BP}}{\overline{AP}},$$

reemplazando los valores que se obtuvieron y realizando las operaciones correspondientes, se encuentra que la longitud del lado $\overline{BC}$ del triángulo es $3\sqrt{3} + 4$.

Problema 4.18. Tomado de OME, año 2007, fase nacional.

O es el circuncentro de un triángulo ABC. La bisectríz que parte de A corta al lado opuesto en P. Si b y c son las longitudes de $\overline{AC}$ y $\overline{BA}$, respectivamente, probar que se cumple $(\overline{AP})^2 + (\overline{OA})^2 - (\overline{OP})^2 = bc$.

Solución. La Figura 4.23 ilustra las condiciones que se enuncian en este problema.

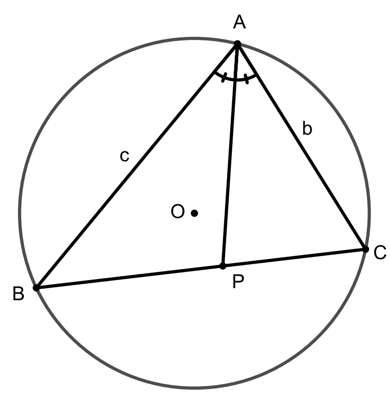

Figura 4.23: Ilustración del Problema 4.18.

Sea R el punto de intersección de la circunferencia que inscribe al $\triangle ABC$ y la recta $\overleftrightarrow{AP}$. Ahora se considera el cuadrilátero $ABRC$ que es cíclico, por lo cual $\measuredangle ARB = \measuredangle ACB$. Por otra parte como $\overline{AP}$ biseca al ángulo $\measuredangle BAC$ entonces $\measuredangle BAR = \measuredangle PAC$, con lo anterior se concluye $\triangle ABR \sim \triangle APC$, así

$$\frac{c}{\overline{AP}} = \frac{\overline{AR}}{b},$$
$$bc = \overline{AR} \cdot \overline{AP}. \tag{4.24}$$

Por suma de segmentos se tiene $\overline{AR} = \overline{AP} + \overline{PR}$, si se reemplaza este resultado en (4.24) y se opera

$$bc = (\overline{AP})^2 + \overline{AP} \cdot \overline{PR}. \tag{4.25}$$

Observe que $\overline{AP} \cdot \overline{PR}$ es la potencia del punto P respecto a la circunferencia con centro en O y radio $\overline{OA}$ (ver Figura 4.24), es decir que

$$\overline{AP} \cdot \overline{PR} = (\overline{AO})^2 - (\overline{OP})^2. \tag{4.26}$$

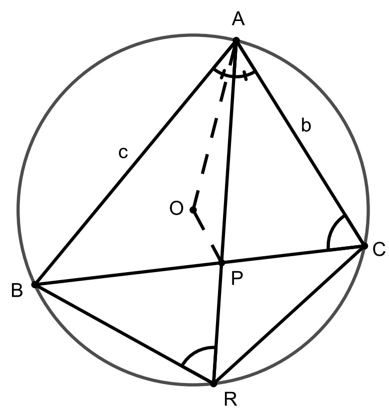

Figura 4.24: Construcción del cuadrilátero $ABRC$.

Finalmente, se reemplaza (4.26) en (4.25) y se obtiene $(\overline{AP})^2 + (\overline{OA})^2 - (\overline{OP})^2 = bc$, que era lo que se quería probar.

Problema 4.19. Tomado de OME, año 2015.

Sean M y N puntos del lado $\overline{BC}$ del triángulo ABC tales que $\overline{BM} = \overline{CN}$, estando M sobre el segmento $\overline{BN}$. Sean P y Q puntos que están, respectivamente, en los segmentos $\overline{AN}$ y $\overline{AM}$, tales que $\measuredangle CMP = \measuredangle BAN$ y $\measuredangle QNB = \measuredangle NAC$. ¿Es cierto que $\measuredangle CBQ = \measuredangle PCB$?

Solución. Se construyen las circunferencias C_1 y C_2 que inscriben a los triángulos BNQ y CMP, respectivamente, luego la recta $\overleftrightarrow{AM}$ corta a C_1 en R y la recta $\overleftrightarrow{AN}$ corta a C_2 en S, además $\measuredangle CBQ = \measuredangle NBQ$ y $\measuredangle PCB = \measuredangle PCM$. Observe que los cuadriláteros $BQNR$ y $CPMS$ son cíclicos por definición. Por el Teorema 3.3 $\measuredangle NBQ = \measuredangle NRQ = \measuredangle NRM$ y $\measuredangle PCM = \measuredangle PSM = \measuredangle NSM$ como se muestra en la Figura 4.25.

Por lo tanto, se va a demostrar que $\measuredangle NRM = \measuredangle NSM$. Para ello observe que los triángulos ABM y ACN tienen bases congruentes por hipótesis y la misma altura desde A, por consiguiente tienen igual área, entonces

$$\overline{AM} \cdot \overline{AB} \cdot \sin\alpha = \overline{AN} \cdot \overline{AC} \cdot \sin\beta,$$

si se despeja $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}$ se encuentra que

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}, \tag{4.27}$$

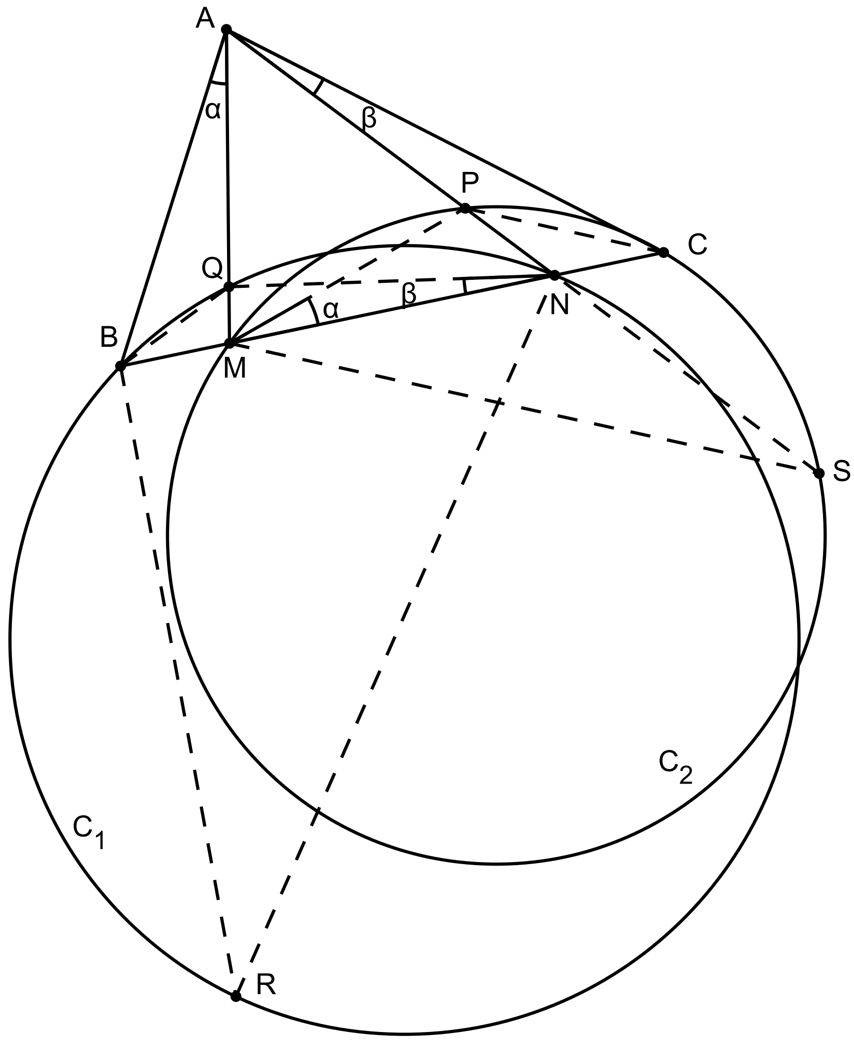

Figura 4.25: Construcción de los cuadriláteros $BQNR$ y $CPMS$.

donde $\alpha = \measuredangle BAM$ y $\beta = \measuredangle NAC$.

Por otra parte, los triángulos ABR y SCA son semejantes, ya que dos de los ángulos del $\triangle ABR$ son α y $\beta = \measuredangle QBR = \measuredangle QNB$ (porque $BQNR$ es cíclico) y de manera análoga dos de los ángulos de $\triangle ACS$ son α y β, de lo cual se tiene

$$\frac{\overline{AS}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{AB}}. \tag{4.28}$$

Además, aplicando la ley del seno al triángulo ACS resulta

$$\frac{\overline{AC}}{\sin\alpha} = \frac{\overline{CS}}{\sin\beta}.$$

Si se despeja $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$, se obtiene

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{\overline{CS}}{\overline{AC}}. \tag{4.29}$$

Luego, si primero se reemplaza (4.29) en (4.27) y luego (4.28) se tiene

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{CS}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AR}},$$

entonces $\overline{AM} \cdot \overline{AR} = \overline{AN} \cdot \overline{AS}$, de lo cual por el Teorema 3.5 el cuadrilátero $MNSR$ es cíclico y finalmente por el Teorema 3.3 $\measuredangle NRM = \measuredangle NSM$ lo que demuestra que los ángulos $\measuredangle CBQ$ y $\measuredangle PCB$ son iguales.

Estos tres últimos problemas muestran la potencialidad de los cuadriláteros cíclicos de una manera diferente, ya que las condiciones dadas distan de las características de dichos cuadriláteros, pero mediante construcciones auxiliares y el ingenio se puede construir un cuadrilátero inscrito en una circunferencia que sirva como herramienta en la resolución del problema.

Por otro lado, como se mencionó al iniciar el capítulo, GeoGebra sirve de guía para resolver problemas geométricos y además, facilita realizar la mirada retrospectiva que propone Polya. En el siguiente problema se hace uso de GeoGebra, con el cual se hicieron modificaciones al problema y se plantea una conjetura.

Problema 4.20. Tomado de OMCC, 2008.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de centro O tal que $\overline{AC}$ es un diámetro. Se construyen los paralelogramos $ADEO$ y $BCOF$. Demostrar que si los puntos E y F pertenecen a la circunferencia entonces $ABCD$ es un rectángulo.

Solución. Sin suponer que los puntos E y F se encuentran sobre la circunferencia, la Figura 4.26 ilustra el enunciado del problema.

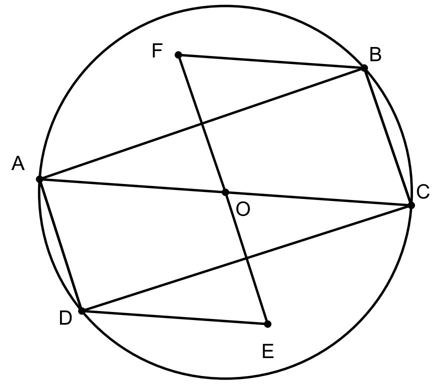

Figura 4.26: Puntos E y F fuera de la circunferencia.

Si ahora se supone que E y F están sobre la circunferencia, se desea probar que $ABCD$ es un rectángulo, es decir, se va a probar que $\measuredangle DAB = \measuredangle ABC = \measuredangle BCD = \measuredangle CDA = 90°$. Las hipótesis dadas se ilustran en la Figura 4.27.

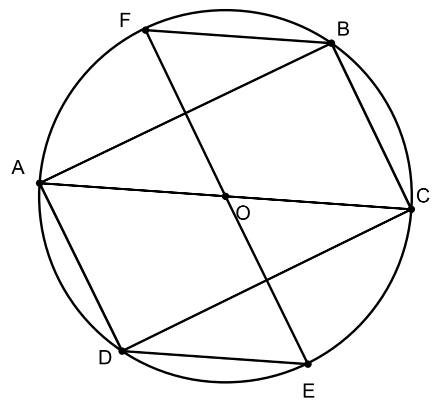

Figura 4.27: Puntos E y F sobre la circunferencia.

Como $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico entonces por el Teorema 3.1 se tiene que

$$\measuredangle ADC + \measuredangle ABC = 180°. \tag{4.30}$$

Ahora se considera el triángulo ABC que está inscrito en la semicircunferencia, entonces por ángulos inscritos la medida del ángulo $\measuredangle ABC$ es $90°$, luego reemplazando este valor en la ecuación (4.30) se obtiene que $\measuredangle CDA = 90°$.
Por hipótesis F y E están sobre la circunferencia, entonces $\overline{OF} = \overline{OE} = r$, donde r es el radio de la circunferencia. Por tanto como $BCOF$ es un paralelogramo, entonces $\overline{OF} = \overline{BC} = r$, de esta manera el triángulo BCO es equilátero, puesto que la longitud de sus lados es r, entonces $\measuredangle COB = 60°$. Luego como todo ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad del ángulo

central que abarca el mismo arco, se tiene que $\measuredangle CAB = \frac{1}{2}\measuredangle COB$, es decir, $\measuredangle CAB = 30°$ tal como se ilustra en la Figura 4.28. Además de forma análoga, se tiene que el triángulo ADO es equilátero, de donde $\measuredangle AOD = 60°$. Luego, como $\measuredangle ACD = \frac{1}{2}\measuredangle AOD$ entonces $\measuredangle ACD = 30°$.

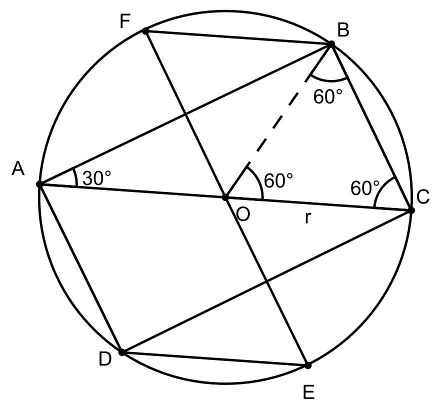

Figura 4.28: Medida del ángulo $\measuredangle CAB$.

Finalmente, como $\measuredangle DAB = \measuredangle DAC + \measuredangle CAB = 60° + 30° = 90°$ y como $ABCD$ es un cuadrilátero cíclico $\measuredangle BCD = 90°$. Así como los cuatro ángulos del cuadrilátero $ABCD$ son rectos entonces es un rectángulo.

Para realizar la mirada retrospectiva que propone Polya, se cambiaron de posición los puntos E y F de tal manera que no estén sobre la circunferencia.
Como se puede ver en la Figura 4.29, si se mueven los puntos B y D arbitrariamente sobre la circunferencia se observa que el cuadrilátero $ABCD$ no es un rectángulo.

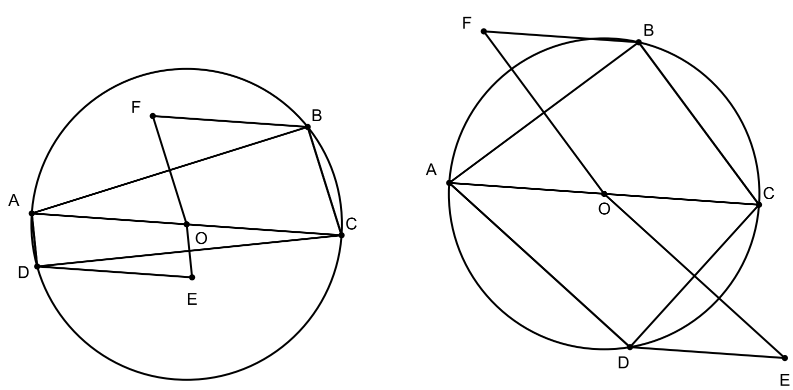

Figura 4.29: Puntos E y F dentro y fuera de la circunferencia.

Sin embargo, si se mueven los puntos B y D de tal manera que las rectas $\overleftrightarrow{FO}$ y $\overleftrightarrow{OE}$ coincidan, como se tiene en la Figura 4.30, da la impresión que el cuadrilátero $ABCD$ es un rectángulo.

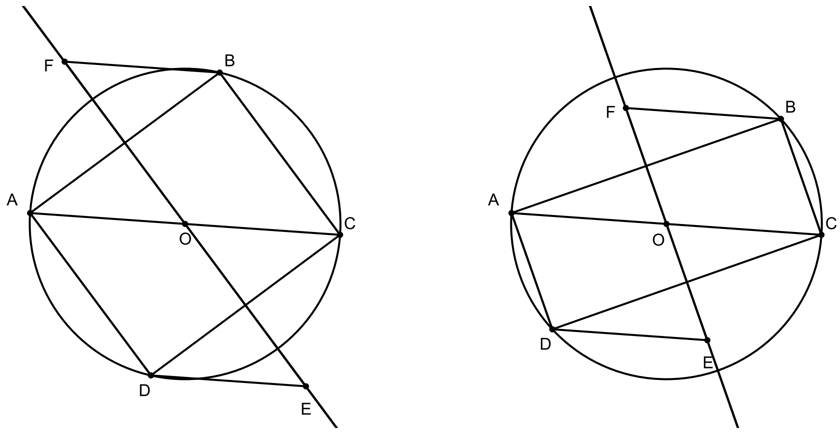

Figura 4.30: Cuando las rectas coinciden.

Finalmente se plantea la conjetura: si las rectas $\overleftrightarrow{FO}$ y $\overleftrightarrow{OE}$ coinciden, ¿el cuadrilátero $ABCD$ siempre será un rectángulo? Cabe resaltar que se intentó resolver esta conjetura y aunque no se encontró la solución, puede suceder que luego se encuentre un camino para comprobar o refutar su veracidad. Sin embargo, se deja como un problema propuesto.

Gracias a que GeoGebra permite observar invariantes en las construcciones geométricas que se realizan y a los conocimientos adquiridos en el presente trabajo sobre cuadriláteros cíclicos, fue posible crear los siguientes problemas.

Problema 4.21. Propuesto en esta tesis.

Sea ABC un triángulo isósceles, con $\overline{AB} = \overline{BC}$. Sean E y D los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Sea P un punto exterior al triángulo sobre la altura desde B, tal que la intersección de $\overline{EP}$ y $\overline{DP}$ con $\overline{AC}$ es H y J, respectivamente. Demostrar que el cuadrilátero $DJHE$ es cíclico (ver Figura 4.31).

Solución. Como E y D son puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, la altura desde B es perpendicular al segmento $\overline{ED}$ y pasa por el punto medio M, entonces $\overline{EM} = \overline{MD}$, además $\measuredangle PMD = \measuredangle EMP$ pues son rectos y como $\overline{MP}$ es común a los triángulos PMD y PME por criterio L-A-L son congruentes. De donde $\overline{EP} = \overline{PD}$, por tanto el triángulo EDP es isósceles y se cumple que

$$\measuredangle PED = \measuredangle EDP, \tag{4.31}$$

Por otro lado, como $\overline{AC}$ es paralelo a $\overline{ED}$ por ser E y D puntos medios de los otros lados del triángulo, entonces

$$\measuredangle EDJ = \measuredangle DJC. \tag{4.32}$$

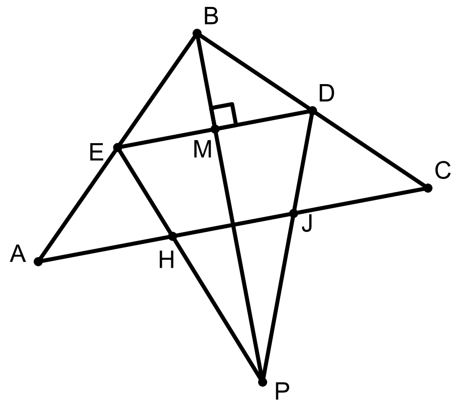

Figura 4.31: Ilustración del Problema 4.21.

Ahora, de (4.31) y (4.32) se concluye que $\measuredangle PDE = \measuredangle DJC$ y así por el Corolario 3.2 $DJHE$ es cíclico.

Problema 4.22. Propuesto en esta tesis.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, tal que la prolongación de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ se cortan en un punto P. Si $\measuredangle BPC = 60°$, $\overline{AB} = 6$, $\overline{CP} = 5$ y $\overline{AP} = 10$ (ver Figura 4.32).

- Determine $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}}$.
- Encuentre la medida de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.

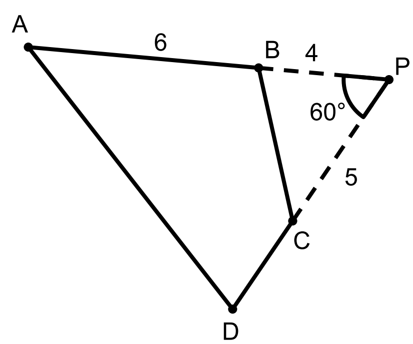

Figura 4.32: Ilustración del Problema 4.22.

Solución. Para la primera parte los triángulos APD y CBP son semejantes por el criterio A-A, ya que el ángulo $\measuredangle BPC$ es común y como el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico por el Corolario 3.2 se tiene $\measuredangle PCB = \measuredangle DAP$. De esta semejanza se tiene que

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}.$$

Luego, reemplazando $\overline{AP} = 10$ y $\overline{CP} = 5$, dados en la hipótesis, resulta

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = 2$$

.

Para la segunda parte, por hipótesis se tiene que $\overline{AP} = 10$ y $\overline{AB} = 6$, además como A, B y P son colineales entonces $\overline{AP} = 4$.

Luego, dado que el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico por el Teorema 3.5 $\overline{AP} \cdot \overline{BP} = \overline{DP} \cdot \overline{CP}$ de donde reemplazando $\overline{AP}$, $\overline{AB}$ y $\overline{CP}$ y despejando $\overline{DP}$ resulta

$$\overline{DP} = 8.$$

De lo anterior se puede concluir que $\overline{DC} = 3$ al ser D, C y P colineales.

Por otro lado, aplicando la ley del coseno al triángulo BCP, se tiene

$$(\overline{BC})^2 = (\overline{BP})^2 + (\overline{CP})^2 - (2)\overline{BP} \cdot \overline{CP} \cdot \cos 60°.$$

Si se reemplazan los datos que se conocían y se simplifica se encuentra que

$$\overline{BC} = \sqrt{21}.$$

De la primera parte se tiene que $\frac{\overline{AD}}{\overline{BC}} = 2$ y al reemplazar $\overline{DC}$ y despejar $\overline{AD}$ se obtiene

$$\overline{AD} = 2\sqrt{21}.$$

Problema 4.23. Propuesto en esta tesis.

Don Carlos tiene un cultivo de zanahorias, pero debido al cambio climático perdió una parte de la siembra. Él quiere saber el área que no fue afectada, para ello realizó el siguiente dibujo señalando algunos datos que logró identificar (ver Figura 4.33).

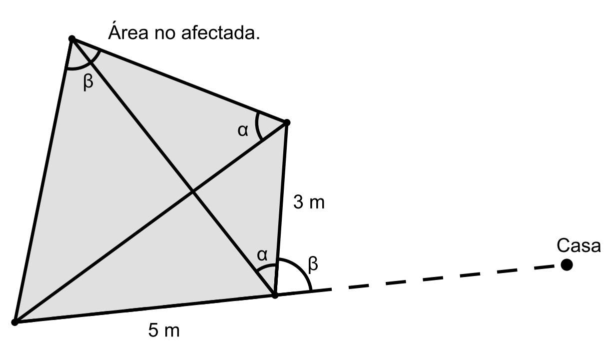

Figura 4.33: Cultivo de don Carlos.

Si la región sombreada es la parte del cultivo no afectada y el producto de las diagonales es 64, ¿cuál es el área de la región sombreada?

Solución. En el dibujo que realizó don Carlos, se denotan los vértices del cuadrilátero como se muestra en la Figura 4.34. Luego como $\measuredangle DAB = \measuredangle ECB = \beta$ entonces por el Corolario 3.2 se tiene que $ABCD$ es cíclico.

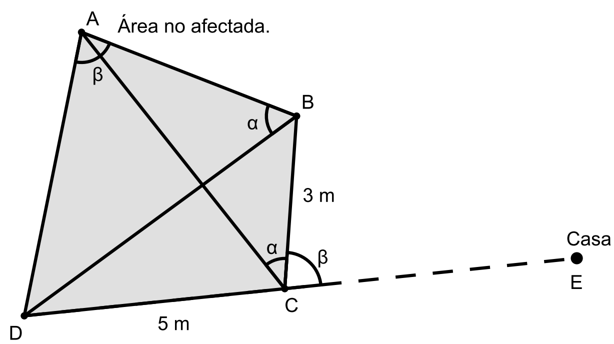

Figura 4.34: Notación del Problema 4.23.

Si se tiene en cuenta que la región sombreada es un cuadrilátero cíclico, se puede utilizar el Teorema 3.8 para calcular su área, para ello se debe conocer la longitud de los lados del cuadrilátero, por eso primero se debe encontrar la $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.
Como $ABCD$ es cíclico por Teorema 3.3 $\measuredangle BDA = \alpha$, así el triángulo ABD es isósceles con

$$\overline{AB} = \overline{AD}, \tag{4.33}$$

Además, por el Teorema 3.6 se cumple

$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = \overline{AB} \cdot \overline{DC} + \overline{AD} \cdot \overline{BC}. \tag{4.34}$$

Ahora, se reemplaza $\overline{AC} \cdot \overline{DB}$, $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ y (4.33) en (4.34)

$$64 = \overline{AB}(5) + \overline{AB}(3),$$

Luego, al factorizar y simplificar, se concluye que $\overline{AD} = 8$ y por tanto $\overline{DB} = 8$.
Finalmente, el semiperímetro del cuadrilátero $ABCD$ es

$$s = \frac{\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{DC} + \overline{AD}}{2},$$

donde al reemplazar las longitudes de los lados y simplificar se tiene que $s = 12$, entonces por el Teorema 3.8

$$A_{ABCD} = \sqrt{(12-8)(12-3)(12-5)(12-8)},$$

de este modo, el área de la región no afectada o sombreada es de $12\sqrt{7}m^2$.

De esta manera, se resalta que los cuadriláteros cíclicos están presentes de manera implícita o explícita en los problemas de olimpiadas matemáticas como también en libros de geometría y sus propiedades son de gran utilidad a la hora de enfrentarse a problemas geométricos.

Por otra parte, se debe tener en cuenta que en las olimpiadas matemáticas no se permite el uso de artefactos tecnológicos, sin embargo es importante que los software de geometría dinámica estén presentes en el proceso de preparación para dichas olimpiadas, pues ayuda a desarrollar la visualización.

Capítulo 5

Problemas Propuestos

En este capítulo, con el fin de que se ponga en práctica las propiedades teóricas presentadas en el Capítulo 3 y la experiencia adquirida con los problemas resueltos que se presentan en el Capítulo 4, se da una recopilación de problemas tomados de diferentes olimpiadas matemáticas y textos de geometría. Se recomienda el uso de un ambiente de geometría dinámica para la visualización y entendimiento de algunas de las hipótesis que se dan en los diferentes problemas. Algunas olimpiadas disponen la solución de los problemas en sus páginas de internet oficiales, sin embargo se espera que esta sea la última alternativa en la búsqueda de la solución de cada problema.

Problema 5.1. Tomado de IMO, año 1985.

Una circunferencia tiene su centro en el lado $\overline{AB}$ del cuadrilátero cíclico $ABCD$, los otros tres lados son tangentes a la circunferencia. Probar que $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB}$.

Problema 5.2. Tomado de OIM, año 1987.

En un triángulo ABC, M y N son los puntos medios respectivos de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, y P el punto medio de intersección de $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$. Demuestre que, si es posible inscribir una circunferencia en el cuadrilátero $AMPN$, entonces el triángulo ABC es isósceles.

Problema 5.3. Tomado de OIM, año 1989.

La circunferencia inscrita en el triángulo ABC, es tangente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en los puntos M y N, respectivamente. Las bisectrices de A y B intersecan a $\overline{MN}$ en los puntos P y Q, respectivamente. Sea O el incentro del triángulo ABC. Probar que $\overline{MP} \cdot \overline{OA} = \overline{BC} \cdot \overline{OQ}$

Problema 5.4. Tomado de OIM, año 1990.

En un triángulo ABC, sean I el centro de la circunferencia inscrita y D, E y F sus puntos de tangencia con los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Sea P el otro punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AD}$ con la circunferencia inscrita. Si M es el punto medio de $\overline{EF}$, demostrar que los cuatro puntos P, I, M y D pertenecen a una misma circunferencia.

Problema 5.5. Tomado de OIM, año 1994.

Sea un cuadrilátero inscrito en una circunferencia, cuyos vértices se denotan consecutivamente por A, B, C y D. Se supone que existe una semicircunferencia con centro en AB, tangente a los otros tres lados del cuadrilátero.

- Demostrar que $\overline{AB} = \overline{AD} + \overline{BC}$.
- Calcular, en función de $x = \overline{AB}$ e $y = \overline{CD}$, el área máxima que puede alcanzar un cuadrilátero que satisface las condiciones del enunciado.

Problema 5.6. Tomado de IMO, año 1994.

Sea ABC un triángulo isósceles con $\overline{AB} = \overline{AC}$. M es el punto medio de $\overline{BC}$ y O es un punto sobre $\overline{AM}$ tal que $\overline{OB}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Q es un punto arbitrario sobre $\overline{BC}$ diferente de B y C. E se encuentra sobre $\overline{AB}$ y F sobre $\overline{AC}$ tal que E, Q y F son distintos y colineaes. Probar que $\overline{OQ}$ es perpendicular a $\overline{EF}$ si y solo si $\overline{QE} = \overline{QF}$.

Problema 5.7. Tomado de Posamentier y Salkin (1996). Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ del cuadrilátero $ABCD$ se cortan en el punto E. Si $\overline{AE} = 2$, $\overline{BE} = 5$, $\overline{CE} = 10$, $\overline{DE} = 4$, y $\overline{BC} = \frac{15}{2}$, encontrar $\overline{AB}$.

Problema 5.8. Tomado de Posamentier y Salkin (1996).

Si el triángulo isósceles ABC (con $\overline{AB} = \overline{AC}$) está inscrito en una circunferencia, y el punto P esta sobre el arco BC, probar que $\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}+\overline{PC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$ es una constante del triángulo dado.

Problema 5.9. Tomado de Posamentier y Salkin (1996).

Si el cuadrado $ABCD$ esta inscrito en una circunferencia, y el punto P esta sobre el arco BC, probar que $\frac{\overline{PA}+\overline{PC}}{\overline{PB}+\overline{PD}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PA}}$.

Problema 5.10. Tomado de Posamentier y Salkin (1996).

El triángulo equilátero ACD esta dibujado externamente sobre el lado $\overline{AC}$ del triángulo ABC. El punto P está sobre el lado $\overline{BD}$. Encontrar $\measuredangle APC$ tal que $\overline{BD} = \overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}$.

Problema 5.11. Tomado de Posamentier y Salkin (1996).

Se dibuja una línea por el vértice A del triángulo equilátero ABC, esta corta a $\overline{BC}$ en D y al circuncírculo en P. Probar que $\frac{1}{\overline{PD}} = \frac{1}{\overline{PB}} + \frac{1}{\overline{PC}}$.

Problema 5.12. Tomado de Posamentier y Salkin (1996).

Se elige un punto P en el interior del paralelogramo $ABCD$ tal que los ángulos $\measuredangle BPA$ y $\measuredangle CPD$ son suplementarios. Probar que $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{BP} \cdot \overline{DP} + \overline{AP} \cdot \overline{CP}$.

Problema 5.13. Tomado de OIM, año 1997.

Con centro en el incentro I de un triángulo ABC se traza una circunferencia que corta en dos puntos a cada uno de los tres lados del triángulo: al segmento $\overline{BC}$ en D y P (siendo D el más cercano a B); al segmento $\overline{CA}$ en E y Q (siendo E el más cercano a C), y al segmento $\overline{AB}$ en F y R (siendo F el más cercano a A). Sea S el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $EQFR$. Sea T el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $DPFR$. Sea U el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero $DPEQ$. Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos FRT, DPU y EQS tienen un único punto común.

Problema 5.14. Tomado de OIM, año 1999.

Un triángulo acutángulo ABC está inscrito en una circunferencia de centro O. Las alturas del triángulo son $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$. La recta $\overleftrightarrow{EF}$ corta a la circunferencia en P y Q.

- Pruebe que $\overline{OA}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$.
- Si M es el punto medio de $\overline{BC}$, pruebe que $(\overline{AP})^2 = (2)\overline{AD} \cdot \overline{OM}$.

Problema 5.15. Tomado de OMCC, año 2000.

Sea ABC un triángulo acutángulo. C_1 y C_2 son circunferencias que tienen a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CA}$ como diámetros, respectivamente. C_2 corta al lado $\overline{AB}$ en el punto F, $(F \neq A)$ y C_1 corta al lado $\overline{CA}$ en el punto E, $(E \neq A)$. Además, $\overline{BE}$ corta a C_2 en P y $\overline{CF}$ corta a C_1 en Q. Demuestra que las longitudes de los segmentos $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ son iguales.

Problema 5.16. Tomado de OMCC, año 2001.

Sea $\overline{AB}$ un diámetro de una circunferencia S con centro O y de radio 1. Sean C y D dos puntos tales que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en un punto Q situado en el interior de S y $\measuredangle AQB = 2\measuredangle COD$. Sea P el punto de corte de las tangentes a S que pasan por los puntos C y D. Determinar la longitud del segmento $\overline{OP}$.

Problema 5.17. Tomado de OIM, año 2001.

La circunferencia inscrita en el triángulo ABC tiene centro O y es tangente a los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en los puntos X, Y y Z, respectivamente. Las rectas $\overleftrightarrow{BO}$ y $\overleftrightarrow{CO}$ intersectan a la recta $\overleftrightarrow{YZ}$ en los puntos P y Q, respectivamente. Demostrar que si los segmentos $\overline{XP}$ y $\overline{XQ}$ tienen la misma longitud, entonces el triángulo ABC es isósceles.

Problema 5.18. Tomado de OIM, año 2002.

En un triángulo escaleno ABC se traza la bisectriz interior $\overleftrightarrow{BD}$, con D sobre $\overline{AC}$. Sean E y F, respectivamente, los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C hacia la recta $\overleftrightarrow{BD}$, y sea M el punto sobre el lado $\overline{BC}$ tal que $\overline{DM}$ es perpendicular a $\overline{BC}$. Demuestre que $\measuredangle EMD = \measuredangle DMF$.

Problema 5.19. Tomado de OMCC, año 2002.

Sean ABC un triángulo, D el punto medio de $\overline{BC}$ y E un punto sobre el segmento $\overline{AC}$ tal que $\overline{BE} = (2)\overline{AD}$ y F el punto de intersección de $\overline{AD}$ con $\overline{BE}$. Si el ángulo $\measuredangle DAC$ mide $60°$, encuentre la medida de los ángulos del triángulo AEF.

Problema 5.20. Tomado de OMCC, año 2003.

Sea S una circunferencia y $\overline{AB}$ un diámetro de ella. Sea t la recta tangente a S en B y considere dos puntos C, D en t tales que B esté entre C y D. Sean E y F las intersecciones de S con $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ y sean G y H las intersecciones de S con $\overline{CF}$ y $\overline{DE}$. Demostrar que $\overline{AH} = \overline{AG}$.

Problema 5.21. Tomado de OMCC, año 2003.

Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sean l_1 y l_2 dos rectas paralelas, tales que:

- l_1 pasa por el punto P e intersecta a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_2 en un punto A_2 distinto de P.
- l_2 pasa por el punto Q e intersecta a S_1 en un punto B_1 distinto de Q y a S_2 en un punto B_2 distinto de Q.

Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen igual perímetro.

Problema 5.22. Tomado de OMPR, año 2003-2004.

Sea ABC un triángulo, y sea D el pie de la altura desde A. Sean E y F puntos diferentes, distintos de D, de modo que:

- La línea determinada por E y F pasa por D.
- El segmento $\overline{AE}$ es perpendicular al segmento $\overline{BE}$.
- El segmento $\overline{AF}$ es perpendicular al segmento $\overline{CF}$.

Demuestre que si M y N son los puntos medios de los segmentos $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$, respectivamente, entonces el segmento $\overline{AN}$ es perpendicular al segmento $\overline{NM}$.

Problema 5.23. Tomado de IMO, año 2004.

En un cuadrilátero $ABCD$ la diagonal $\overline{BD}$ no biseca a $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle CDA$. El punto P esta dentro de $ABCD$ y satisface $\measuredangle PBC = \measuredangle DAB$ y $\measuredangle PDC = \measuredangle BDA$. Probar que $ABCD$ es cíclico si y solo si $\overline{AP} = \overline{CP}$.

Problema 5.24. Tomado de OMPR, año 2004-2005.

El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia y $\overline{BP}$ biseca $\measuredangle ABC$. Si $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 8$ y $\overline{AC} = 7$, calcule $\overline{BP}$.

Problema 5.25. Tomado de OMPR, año 2007.

Considerar el $\triangle ABC$. Sean E y F los pies de las alturas desde C y desde B, respectivamente. Sea H el punto medio de $\overline{EF}$. Demostrar que el segmento perpendicular a $\overline{EF}$ que pasa por H divide al segmento $\overline{BC}$ en dos partes iguales.

Problema 5.26. Tomado de OMM, año 2007.

Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de un cuadrilátero cíclico $ABCD$ se intersectan en el punto E. Dado que $\overline{AB} = 39$, $\overline{AE} = 45$, $\overline{AD} = 60$ y $\overline{BC} = 56$, determine la longitud de $\overline{CD}$.

Problema 5.27. Tomado de OME, año 2007.

Dada una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB} = 2R$, se considera una cuerda $\overline{CD}$ de longitud fija c. Sea E la intersección de $\overline{AC}$ con $\overline{BD}$ y F la intersección de $\overline{AD}$ con $\overline{BC}$. Probar que el segmento $\overline{EF}$ tiene longitud constante y dirección constante al variar la cuerda $\overline{CD}$ sobre la semicircunferencia.

Problema 5.28. Tomado de OMI, año 2007.

Sea ABC un triángulo, G el centroide, M el punto medio de $\overline{AB}$, D un punto en $\overline{AG}$, tal que $\overline{AG} = \overline{GD}$, $A \neq D$, E un punto en $\overline{BG}$ tal que $\overline{BG} = \overline{GE}$, $B \neq E$. Demuestre que el cuadrilátero $BDCM$ es cíclico si y solo si $\overline{AD} = \overline{BE}$.

Problema 5.29. Tomado de OMA, año 2008.

Sea ABC un triángulo, D, E y F los puntos de tangencia de la circunferencia inscrita con $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Sea P el punto de intersección de $\overline{CF}$ con la circunferencia inscrita. Si $ABPE$ es un cuadrilátero cíclico demostrar que $\overline{DP}$ es paralelo a $\overline{AB}$.

Problema 5.30. Tomado de OMCC, año 2008.

Sea ABC un triángulo acutángulo. Tome los puntos P y Q en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tal que $BCQP$ es cíclico. El circuncírculo de $\triangle ABQ$ intersecta a $\overline{BC}$ en S y el circuncírculo de $\triangle APC$ intersecta a $\overline{BC}$ en R, $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ se intersectan en L. Pruebe que la intersección de $\overline{AL}$ y $\overline{BC}$ no depende de la selección de P y Q.

Problema 5.31. Tomado de OME, año 2008.

En un cuadrilátero convexo se trazan las perpendiculares desde cada vértice a la diagonal que no pasa por él. Demostrar que los cuatro puntos de intersección de cada perpendicular con su correspondiente diagonal forman un cuadrilátero semejante al dado.

Problema 5.32. Tomado de OMCC, año 2009.

Dos circunferencias r_1 y r_2 se intersectan en los puntos A y B. Considere la circunferencia r contenido en r_1 y r_2 que es tangente a ambos en D y E, respectivamente. Sea C un punto de intersección de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con r, F la intersección de la recta $\overleftrightarrow{EC}$ con r_2 y G la intersección de la recta $\overleftrightarrow{DC}$ con r_1. Sean H e I los puntos de intersección de la recta $\overleftrightarrow{ED}$ con r_1 y r_2, respectivamente. Pruebe que F, I, G y H están sobre la misma circunferencia.

Problema 5.33. Tomado de OMPR, año 2009.

El cuadrilátero $ABCD$ esta inscrito en una circunferencia y sus diagonales se cortan en Q. El lado $\overline{DA}$ prolongado a partir de A y el lado $\overline{BC}$ prolongado a partir de B se cortan en P. $\overline{CD} = \overline{CP} = \overline{DQ}$, calcular la medida del $\measuredangle CAD$.

Problema 5.34. Tomado de OMCC, año 2010.

Sea ABC un triángulo y L, M y N los puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. La recta tangente al circuncírculo del $\triangle ABC$ intesecta a la recta $\overleftrightarrow{LM}$ en P y a la recta $\overleftrightarrow{LN}$ en Q. Muestre que las rectas $\overleftrightarrow{CP}$ y $\overleftrightarrow{BQ}$ son paralelas.

Problema 5.35. Tomado de OMCS, año 2014.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero inscrito en una circunferencia con centro O tal que O este en el interior del cuadrilátero y $\measuredangle CAB = \measuredangle ODA$. Sea E la intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Sean r y s las rectas perpendiculares a $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. Sea P el punto de intersección de r con $\overline{AD}$ y M la intersección de s con $\overline{BC}$. Sea N el punto medio de $\overline{EO}$. Demostrar que M, N y P son colineales.

Problema 5.36. Tomado de IMO, año 2014.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo tal que $\measuredangle ABC = \measuredangle CDA = 90°$. El punto H es el pie de la perpendicular desde A hasta $\overline{BD}$. Los puntos S y T están sobre $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, tal que H se encuentra dentro del triángulo CST y $\measuredangle CHS - \measuredangle CSB = 90°$, $\measuredangle THC - \measuredangle DTC = 90°$. Pruebe que la recta $\overleftrightarrow{BD}$ es tangente a la circunferencia que inscribe al triángulo HST.

Problema 5.37. Tomado de OMPR, año 2015-2016.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico, sea P la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{AD}$. La recta $\overleftrightarrow{AC}$ corta a la circunferencia circunscrita del triángulo BDP en S y T, con S entre A y C la recta $\overleftrightarrow{BD}$ corta a la circunferencia circunscrita del triángulo ACP en U y V, con U entre B y D. Demostrar que $\overline{PS} = \overline{PT} = \overline{PU} = \overline{PV}$.

Problema 5.38. Tomado de OMI, año 2016.

Sea ABC un triángulo. Sean D y E las proyecciones ortogonales de A sobre las bisectrices de los ángulos $\measuredangle ABC$ y $\measuredangle BCA$, respectivamnete. Demostrar que $\overline{DE}$ es paralelo a $\overline{BC}$.

Problema 5.39. Tomado de IMO, año 2017.

Sean R y S puntos diferentes de la circunferencia C_1 tal que $\overline{RS}$ no es un diámetro. Sea l la recta tangente a C_1 por R. El punto T es tal que S es el punto medio del segmento $\overline{RT}$. El punto J se escoge en el arco más corto de RS. La circunferencia C_2 que inscribe al triángulo JST intersecta a l en dos puntos distintos. Sea A el punto de intersección de C_2 y l más cercano R. La recta $\overleftrightarrow{AJ}$ intersecta a C_1 en K. Pruebe que la recta $\overleftrightarrow{KT}$ es tangente a C_2.

Problema 5.40. Tomado de OMNC, año 2018.

Sea $ABCD$ un cuadrilátero cíclico cuyas diagonales se intersectan en P. La circunferencia que inscribe a $\triangle ADP$ intersecta a $\overline{AB}$ en A y E. La circunferencia que inscribe a $\triangle BCP$ intersecta a $\overline{AB}$ en B y F. Sean I y J los incentros de $\triangle ADE$ y $\triangle BCF$, respectivamente. Sea K el punto de intersección de $\overline{IJ}$ con $\overline{AC}$. Probar que los puntos A, I, K y E están sobre una circunferencia.

Conclusiones

La resolución de problemas desarrolla competencias básicas de razonamiento, argumentación y comunicación de ideas, lo que hace parte fundamental de la formación integral de una persona. Es por ello que resolver un problema por resolverlo no tiene sentido, lo que le da valor es como afirma Polya realizar una mirada retrospectiva, para analizar y reflexionar sobre las estrategias usadas, dando paso a la observación de aciertos y errores, búsqueda de nuevos caminos y creación de nuevos problemas, por ejemplo al realizar una mirada retrospectiva de los problemas resueltos fue posible concluir que existen otros caminos para llegar a la solución, la búsqueda de estos se deja como reflexión al lector. El problema no se acaba con una respuesta sino con más preguntas.

Las olimpiadas matemáticas son un concurso con reconocimiento mundial donde los principales protagonistas son el conocimiento y el ingenio. Estas olimpiadas retan a los participantes a pensar de manera diferente y creativa al enfrentarse a un problema, puesto que los problemas que en estas se plantean generalmente no tienen una resolución común o mecánica, es por ello que se puede llegar a la solución de un problema por diferentes caminos, esto depende de las habilidades y el ingenio que posea cada persona. Cabe resaltar que estas olimpiadas motivan a jóvenes talento en matemáticas y ayudan a descubrir el gusto por las matemáticas.

Por otro lado, aunque la geometría ha sido dejada de lado en el aula de clases, tiene un papel muy significativo en estas olimpiadas, pues los problemas geométricos requieren de la capacidad de visualizar y de la integración de diferentes conocimientos en esta área.

Entre los temas que estudia la geometría los cuadriláteros cíclicos se consideran de un nivel avanzado, sin embargo se pueden enseñar en la educación básica y media, ya que para comprender su definición no se require de tantos prerrequisitos. Además como se observó en el Capítulo 4, estos cuadriláteros son especiales y se pueden usar tanto en la demostración de leyes trigonométricas, como también en diferentes propiedades y teoremas de la geometría elemental, lo que es una buena referencia para trabajarlos y que se usen en el aula de clase.

Se ha observado que actualmente, estudiar cuadriláteros cíclicos es importante por su aplicabilidad en la resolución de problemas geométricos que están presentes en olimpiadas matemáticas nacionales e internacionales, a las cuales se enfrentan estudiantes de diferentes niveles educativos. En dichas olimpiadas los cuadriláteros cíclicos son utilizados tanto para plantear problemas como para resolverlos, convirtiéndose así en una herramienta clave en la resolución de problemas.

Crear problemas es un reto que requiere de conocimientos y dedicación, pues se debe tener en cuenta que las condiciones planteadas sean suficientes para llegar a la solución, que sea coherente, es decir, que no hayan contradicciones. Para proponer problemas geométricos, un buen inicio es apoyarse en un software de geometría dinámica, debido a que estos permiten manipular en tiempo real los objetos geométricos e identificar invariantes, además a través de esta exploración es posible descubrir nuevas propiedades o generalidades.

Por otro lado, con la realización de este trabajo se concluye que aún hay mucho por investigar al rededor de los cuadriláteros cíclicos. Así se considera como trabajo futuro solucionar los problemas que se dejan propuestos e intentar resolver más, incluso a partir de la exploración y la experiencia, se sugiere la creación de nuevos problemas. Además, es importante estudiar la relación y aplicación de los cuadriláteros inscribibles en una circunferencia en diferentes áreas de las ciencias.

Como una consideración final, dado que los cuadriláteros cíclicos son un tema destacado en olimpiadas matemáticas se considera necesario un estudio más profundo con el cual sea posible determinar más propiedades que tengan que ver con dichos cuadriláteros, también es importante difundir la información a las personas que se interesan en el tema.

Referencias

[1] Andreescu, T. y Gelca, R. (2009). *Mathematical olympiad challenges.* Boston, Estados Unidos: segunda edición, Springer Science+Business Media, LLC.

[2] Art Of Problem Solving. (2018). Online. Consultado 2 de noviembre de 2017. Disponible en: https://artofproblemsolving.com/

[3] Barnett, R. (1997). *Geometría.* México D.F, México: segunda edición. McGraw-Hill.

[4] Cáceres, L. (2010). *Congruencia, Semejanza y Concurrencia.* Puerto Rico: CEPA.

[5] Castillo, D., Paz, K., Rúa-Alvarez, C. y Cáceres, L. (2017). *Los cuadriláteros cíclicos como herramienta en la resolución de problemas.* Sometido.

[6] Coxeter, H. y Greitzer, S. (1967). *Geometry Revisite.* Washington, D.C, Estados Unidos: The Mathematical Association of America.

[7] Guzman, M de. (1995). *Para pensar mejor: desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos.* Madrid, España: Ediciones pirámide S.A.

[8] Hemmerling, E. (1971). *Geometría Elemental.* México D.F, México: Limusa Wiley.

[9] Kichenassamy, S. (2010). Brahmaguptas derivation of the area of a cyclic quadrilateral. *Revista Elsevier*, (37), p.28-51.

[10] International Mathematical Olympiad Foundation. (2015). Online. Consultado 2 de diciembre de 2017. Disponible en: http://imof.co/

[11] Marmolejo, G. (2010). La visualización en los primeros ciclos de la educación básica. Posibilidades y complejidad. *Revista Sigma*,10 (2), p.20-26.

[12] Olimpiadas Colombianas de Matemáticas. (2018). Online. Consultado 25 de enero de 2018. Disponible en: http://oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-matematicas/eventos

[13] Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. (2007). Online. Consultado 3 de diciembre de 2017. Disponible en: http://www.oei.es/historico/oim/omcc.htm

[14] Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. (2017). Online. Consultado 3 de diciembre de 2017. Disponible en: http://www.oei.es/historico/oim/reglamento.htm

[15] Canguro Matemático. (2018). Online. Consultado 4 de diciembre de 2017. Disponible en: http://www.canguromat.org.es/

[16] Olimpiadas Matemátias de Puerto Rico. (2018). Online. Consultado 4 de diciembre de 2017. Disponible en: http://ompr.pr/

[17] Olimpiada Matemática Española. (2018). Online. Consultado 4 de diciembre de 2017 Disponible en: http://www.olimpiadamatematica.es/platea.pntic.mec.es/_csanchez/olimmain.html

[18] Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México D.F, México: Trillas.

[19] Posamentier, A. y Salkind, C. (1996). *Challenging problems in geometry*. New York, Estados Unidos: Dover publications, INC.

[20] Santos, L. (2014). *La resolución de problemas matemáticos: fundamentos cognitivos*. México D.F, México: segunda edición, Trillas.

[21] Shoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, Estados Unidos: Academic press.

[22] Zill, D. y Dewar, J. (2012). *Álgebra, trigonometría y geometría analítica*. México D.F, México: tercera edición, McGraw-Hill.