

**ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA:
MODELO DE POINCARÉ Y TRANSFORMADA DE MÖBIUS**

WILMER LEONEL LEGARDA YANDAR

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO**

2017

**ASPECTOS HISTÓRICOS DE LA GEOMETRÍA HIPERBÓLICA:
MODELO DE POINCARÉ Y TRANSFORMADA DE MÖBIUS**

WILMER LEONEL LEGARDA YANDAR

**Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Licenciado en Matemáticas**

**Asesor
ERDULFO ORTEGA PATIÑO
Magister en Educación**

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
UNIVERSIDAD DE NARIÑO
SAN JUAN DE PASTO**

2017

Nota de Responsabilidad

Todas las ideas y conclusiones aportadas en el siguiente trabajo son responsabilidad exclusiva del autor.

Artículo 1^{ro} del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966 emanado por el Honorable Consejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de aceptación

VICENTE ERDULFO ORTEGA PATIÑO

Director.

ANDRÉS CHAVES BELTRÁN

Jurado 1.

JOSE FRANCISCO OCAÑA

Jurado 2.

San Juan de Pasto, Octubre 26 de 2017

*Este trabajo está dedicado a
mi madre Carmen Ofelia Yandar, que ha estado presente en el camino para su
desarrollo, agradeciéndole por sus comentarios, ánimos y valiosos consejos, que me
inspiran a seguir adelante.*

Agradecimientos

Primeramente quiero dar Gracias a DIOS, por su amor, sus bendiciones, por brindarme la fortaleza y la sabiduría a lo largo de este proceso y que me permitió crecer como persona y como profesional y de esta manera alcanzar mis metas propuestas para mi vida.

Así mismo agradezco a mi madre Ofelia Yandar por ser la principal promotora de mis sueños, gracias a ella por confiar y creer en mí, siendo mi apoyo incondicional, mi motivación y mi fortaleza para no dejarme vencer ante los obstáculos de la vida, gracias por cada consejo que me dio pues sentó en mi las bases de responsabilidad y deseos de superación y lograr mi meta como profesional.

A mi padre Wilson Gonzalez, por siempre desear y anhelar lo mejor para mi vida y apoyarme en este proceso. A mis hermanas Paola y Juliana quienes siempre han estado incondicionalmente conmigo y me animan a seguir luchando por mis sueños.

Igualmente agradezco a mi novia Maritza Portilla, por estar dispuesta a acompañarme cada larga y agotadora noche de estudio, por brindarme de sus conocimientos, por estar presente en esta etapa tan importante de mi vida y en cada momento ofreciéndome lo mejor y buscando lo mejor para mí, en las que su compañía fueron mi fortaleza y motivación constante para la construcción de mi vida profesional.

Y finalmente agradezco a mi asesor de tesis Erdulfo Ortega y el profesor Andrés Chaves por confiar en mí, por su ayuda y dedicación, asesoramiento y disponibilidad para guiarme en la elaboración de esta tesis y culminación de este proceso que fue gratificante para mí porque me deja enseñanzas y aprendizajes para mi vida profesional y personal.

Resumen

Se presenta una monografía que aborda aspectos histórico epistemológicos del origen de las Geometrías no Euclidianas, en concreto se abarca un recorrido histórico del problema del quinto postulado de Euclides, que comienza con el mismo Euclides, y luego se recorre los aportes de varios autores, que intentaron demostrar el quinto Postulado de Euclides a partir de los primeros cuatro, por métodos directos e indirectos de razonamiento. Así mismo se ponen de manifiesto aportes de los fundadores de la primera geometría no euclidiana. Posteriormente se presenta el modelo del disco de Poincaré, donde se interpretarán los cuatro primeros postulados de Euclides y la negación del quinto que da inicio a la geometría hiperbólica. Por último, se estudia ciertas propiedades de la Transformada de Möbius y la relación que se hay con las rectas hiperbólicas en un nuevo modelo euclidiano que es el modelo del semiplano superior de Poincaré.

Abstract

This is a research paper about epistemological historical aspects of the origin of non-Euclidean geometries. Specifically, this is a historical study of the Euclid's fifth postulate problem which starts with the same Euclides and after that, it continues with the contributions of several authors who try to demonstrate The Euclid's fifth postulate taking into account the first four postulates through direct and indirect reasoning methods and contributions of the first non- Euclidean geometry founders. Nextly, it is presented The Poincaré Disk Model, the which interpret the first four Euclides postulates and the denial of the fifth postulate for the beginning of the Hyperbolic Geometry. Finally, it is studied certain properties of the Mobjus Transformation and the relationship with the hyperbolic lines in a new Euclidean model which is The Poincare Upper Half-Plane model.

Índice general

Introducción	IX
1. Recorrido historiográfico del problema del quinto postulado de Euclides.	1
1.1. Proposiciones equivalentes al quinto postulado de Euclides . . .	1
1.2. Algunos intentos de demostración del quinto postulado de Euclides hasta el siglo XVII por metodo directo de razonamiento	2
1.3. Demostradores del quinto postulado de Euclides por método indirecto de razonamiento (reducción al absurdo)	11
1.4. Fundadores de la geometría hiperbólica	15
2. Disco de Poincaré y geometría hiperbólica	18
2.1. Construcciones con regla y compás	18
2.2. Modelo del disco de Poincaré	27
2.2.1. Postulado I	29
2.2.2. Postulado II	31
2.2.3. Postulado III	37
2.2.4. Postulado IV	46
2.2.5. Postulado hiperbólico	47
3. Transformada de Möbius y geometría hiperbólica	49
3.1. Transformaciones de Möbius	49
3.2. Algunas expresiones para rectas y circunferencias en el plano complejo	52

3.2.1.	Ecuación de una recta en el plano complejo	53
3.2.2.	Ecuación de una circunferencia en el plano complejo . .	53
3.3.	Ángulos entre curvas	56
3.4.	La razón cruzada	57
3.5.	Modelo del semiplano superior de Poincaré	60
3.5.1.	La transformación de Möbius que envía el semiplano superior al disco de Poincaré	62
3.5.2.	Rectas hiperbólicas en el semiplano superior de Poincaré	63
3.5.3.	Ángulos hiperbólicos	65
3.5.4.	Rectas paralelas en el semiplano superior de Poincaré .	67
4.	Conclusiones y/o comentarios	69
	Bibliografía	71

Introducción

Este trabajo de grado se enmarca en el estudio de la historia de las geometrías no euclidianas; en concreto se relaciona el origen de estas con el modelo de Poincaré y la Transformada de Möbius, desde un enfoque netamente internalista, puesto que en el desarrollo del proyecto, se realizará una investigación de carácter histórico epistemológico, que nos permita identificar los conceptos fundamentales de la geometría hiperbólica.

Los objetivos general y específicos para el desarrollo de este trabajo de grado son:

Objetivo general

Realizar un estudio histórico epistemológico del surgimiento de la Geometría hiperbólica.

Objetivos específicos

1. Presentar un recorrido historiográfico del problema del quinto postulado de Euclides.
2. Interpretar los cuatro primeros postulados de Euclides, y la negación del quinto, que da pie, a la geometría hiperbólica, en el modelo del disco de Poincaré .
3. Describir matemáticamente algunos aspectos de la relación entre transformada de Möbius y las rectas de la geometría hiperbólica.

En el siglo III a.C, el matemático griego Euclides escribió su obra principal, *Los Elementos*, un extenso tratado de matemáticas compuesto por 13 volúmenes sobre materias tales como geometría plana, proporciones en general, propiedades de los números, magnitudes inconmensurables y geometría del espacio. Euclides estudió en Atenas y posteriormente fundaría una escuela de matemáticas en Alejandría. Hay discusión sobre la atribución de algunas obras tales como: Cálculos (una colección de teoremas geométricos), los Fenómenos (una descripción del firmamento), la óptica, la División del canon (un estudio matemático de la música), entre otros. También se cuestiona la originalidad de algunas de sus aportaciones. Probablemente las secciones geométricas de los *Elementos* fueron, en principio, una revisión de las obras de matemáticos anteriores, como Eudoxo, pero se considera que Euclides hizo diversos descubrimientos originales en la teoría de números.

En la época de Euclides, la Geometría era un conjunto de resultados empíricos utilizados para medir y dibujar figuras. Los *Elementos* de Euclides se utilizaron como texto durante 2000 años, e

incluso hoy, una versión modificada de sus primeros libros forma la base de la enseñanza de la geometría plana en las escuelas secundarias. La primera edición impresa de esta obra de Euclides que apareció en Venecia en 1482, fue una traducción del árabe al latín. En ella se presentan además de 23 definiciones, varias suposiciones implícitas, que expresan ideas familiares al alcance de cualquier persona, Euclides dedujo la mayor parte de los resultados sobre la geometría del plano a partir de cinco postulados:

- I Dados dos puntos, siempre existe una recta que pase por ellos.
- II Toda recta puede extenderse indefinidamente en la misma dirección.
- III Con un punto como centro y cualquier radio dado se puede trazar una circunferencia.
- IV Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
- V Si una recta, que corta a otras dos, forma, del mismo lado, ángulos interiores que suman menos de dos ángulos recto; al prolongar indefinidamente las dos rectas, éstas se cortan del lado en que los ángulos interiores suman menos de dos ángulos rectos.

El quinto postulado de la serie anterior causó mucha polémica, pues para muchos matemáticos no fue tan evidente como para ser llamado postulado. Mucho esfuerzo y tiempo se ocupó para descifrar la naturaleza de este postulado, entender si realmente era independiente, o bien si podía ser deducido de los anteriores. Hubo quienes creyeron haber demostrado el quinto postulado, sin embargo, sus demostraciones incluían versiones alternativas del quinto postulado, por lo que, en su demostración implícitamente ocupaban aquello que querían demostrar. Otros en cambio, quisieron demostrarlo por reducción al absurdo y lograr encontrar así contradicciones, a las cuales no llegaron.

Fueron muchos los matemáticos que trataron de probar o de simplificar este postulado, como muestra tenemos a: Ptolomeo (S; IIa:c); Proclus (412-485); Nadir-al-din-al-Tusi (1201-1274); Saccheri (1667 - 1733); Lambert (1728 - 1777); D'Álembert (1717 - 1783); Lagrange (1736 - 1813); Legendre (1752 - 1833); Playfair (1748 - 1819); Laplace (1749 - 1827); Farkas Bolyai (1775 - 1856); Wachter (1792 - 1818); Schweikart (1780 - 1859); Taurinus (1794 - 1874).

Hoy en día, utilizamos como quinto postulado el enunciado equivalente. reencontrado por Playfair en el Siglo *XVII* (Proclus ya lo había utilizado). Este dice: *Por un punto dado exterior a una recta sólo puede trazarse otra (única) recta paralela a ella.*

Es el quinto postulado de Euclides uno de los aspectos más importantes de los *Elementos*, ya que el estudio de éste, a través de los siglos, acumuló un entendimiento profundo de la geometría euclidiana. De esta manera, solo hasta principios del siglo *XIX* se obtuvo un entendimiento sobre el quinto postulado y los intentos de su demostración da razón fundamental por el cual no se podía demostrar radicaba en que el quinto postulado era independiente de los otros cuatro.

La negación del quinto postulado de Euclides dio lugar a dos posibles alternativas:

1. En un un plano, dada una recta y un punto exterior a ella, por ese punto no pasa ninguna paralela a la recta dada.

2. Dada una recta y un punto exterior a ella, por ese punto pasan al menos dos paralelas a la recta dada.

Los primeros cuatro postulados junto con la alternativa 1 dieron lugar a la geometría elíptica, mientras que los primeros cuatro postulados junto con la alternativa 2 dieron lugar a la geometría hiperbólica, en la cual nos centraremos.

Los principales precursores y los más significativos en el descubrimiento de la Geometría Hiperbólica fueron Karl Friedrich Gauss (1777 – 1855), Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793 – 1856) y Janós Bolyai (1802 – 1860); pero los únicos que publicaron resultados sobre esta geometría fueron los dos últimos puesto que Gauss nunca hizo publicaciones sobre este tema aunque en algunas cartas enviadas a su amigo Wolfgang Bolyai, en 1832, menciona que trabajó sobre él alrededor de 30 a 35 años. Los trabajos de Bolyai y Lobachevski no tuvieron un reconocimiento inmediato, esta geometría quedó validada a finales del siglo XIX cuando E. Beltrami (1835-1900) demostró la consistencia de la Geometría Hiperbólica en un modelo euclidiano con Geometría no Euclidiana. Aunque J. Gray (nacido el 25 de abril de 1947), en la segunda edición de su libro *Ideas de Espacio* en 1992, duda que Beltrami haya sido quien consolidó esta idea, ya que F. C. Klein (1849-1925), dio la interpretación proyectiva de la Geometría Hiperbólica que ya se tenía por consistente; incluso Gray se atrevió a decir que fue R. Bonola (1874-1911), en su libro *Geometrías no Euclidianas* de 1923 quien dió un planteamiento claro de la consistencia de este problema. De todas formas los resultados de Beltrami y Klein prueban que la Geometría Hiperbólica es tan consistente como la Geometría Euclidiana; así, si la Geometría Hiperbólica lleva a alguna contradicción, entonces la geometría Euclidiana también.

Dar un modelo de una geometría consiste en definir y describir cuáles serán los puntos, las rectas, las circunferencias, los ángulos, etc., es decir dar el conjunto de conceptos que permitirán ilustrar y entender con claridad ideas que quizá sean muy abstractas. Posterior al desarrollo de los cimientos de la geometría hiperbólica y a su aceptación, grandes matemáticos distinguidos, se dieron a la tarea de encontrar un modelo que lograra representar el plano hiperbólico. Hoy en día, existen diversos de estos modelos, que se relacionan unos con otros mediante proyecciones biyectivas. De hecho, para cada dos de ellos, existe una función que nos permite utilizarlos indistintamente. A continuación se presentarán algunos, que si bien no son los únicos, han sido las herramientas más frecuentes debido a lo descriptivos y accesibles que son.

Algunos de los modelos para representar el plano hiperbólico son:

- El modelo de Klein.
- El modelo de Lorentz o hiperboloide.
- El modelo del semiplano de Poincaré.
- El modelo del disco de Poincaré.

En este caso nos centraremos en el último modelo, en el cual el espacio subyacente está contenido en \mathbb{C} .

Además la geometría hiperbólica se puede abordar de manera analítica a través de transformaciones de variable compleja que son las transformaciones de Möbius, estas son funciones que van del plano complejo ampliado al plano complejo ampliado que preservan objetos geométricos hiperbólicos.

Este trabajo de grado esta conformado por tres aspectos que son: la parte histórica, la parte geométrica y la parte matemática. En la parte histórica se hablará sobre el recorrido historiográfico del problema del quinto postulado de Euclides, sus equivalentes, ciertos personajes que intentaron demostrarlo por métodos directos e indirectos y aportes de los fundadores de la geometría hiperbólica. En la parte geométrica se realizarán construcciones con regla y compás utilizando un ambiente de geometría dinámico y se planteará un modelo Euclidiano que es el disco de Poincaré, donde se construirán los cuatro primeros postulados de Euclides y el postulado hiperbólico¹. Finalmente se abordará aspectos básicos de la geometría hiperbólica a través de las transformaciones de Möbius y se presentará un nuevo modelo que es el semiplano superior de Poincaré.

Este trabajo de grado tiene origen en el curso de época contemporánea del programa de licenciatura en matemáticas, a partir de una exposición sobre las geometrías no euclidianas y tuvo como apoyado el seminario de historia de las matemáticas, en el cual se presentaron avances mientras se desarrollaba, cada uno de los temas a los cuales hacen alusión los objetivos específicos planteados anteriormente.

¹El postulado hiperbólico es el siguiente: *Existen una recta l y un punto A que no le pertenece, tales que por A pasan al menos dos rectas que no cortan a l*

Capítulo 1

Recorrido historiográfico del problema del quinto postulado de Euclides.

Las imágenes propuestas para el desarrollo de este capítulo fueron tomadas del libro [Bonola, 1923].

1.1. Proposiciones equivalentes al quinto postulado de Euclides

Los numerosos intentos de poder demostrar el quinto postulado de Euclides han proporcionado una gran variedad de enunciados equivalentes al propio postulado. Algunas equivalencias son las siguientes:

1. La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos ¹.
Elementos, I, 32. (Proposición ya conocida en tiempos de Aristóteles, siglo IV a. C.).
2. Las rectas paralelas son equidistantes (atribuido a Posidonio, siglos I-II a. C.).
 - En [Bonola, 1923], refiere Proclo, por ejemplo, cómo en el siglo I antes del nacimiento de Jesucristo, Posidonio, intentando resolver la cuestión, propuso definir las rectas paralelas como rectas coplanarias y equidistantes, concepto que no es equivalente a la definición de Euclides, pues son dos hechos que pueden presentarse separadamente, y Proclo refiriéndose a Gemino (siglo 1 antes de C.), aduce a este propósito que existen curvas como la hipérbola o la conoide, que son paralelas a sus respectivas asíntotas según la definición euclidiana, pero no lo son según la definición de Posidonio.

¹En éste trabajo de grado se denotara a la medida de un ángulo cómo ángulo recto, 90° o $\frac{\pi}{2}$ (que indican lo mismo en cuanto a medida).

3. Todos los puntos equidistantes de una línea recta, situados a un lado determinado de ella, constituyen una línea recta (Clavio, 1574).
4. En todo cuadrilátero que tenga tres ángulos rectos, el cuarto ángulo también es recto (Clairaut, 1741; Lambert, 1766).
5. La suma de los ángulos de cualquier triángulo es igual a dos ángulos rectos (Saccheri, 1733, aunque ya era conocida la relación con el postulado en tiempos de Aristóteles).
6. Sobre un segmento siempre se puede construir un triángulo semejante a uno dado (Wallis, 1663; Legendre, 1824).
7. Se puede construir un triángulo cuya área sea mayor que cualquier área dada (Gauss, 1799).
8. Dados tres puntos no alineados, siempre es posible construir un círculo que pase por todos ellos (Legendre, 1824; Bolyai, 1832).
9. A Proclo (410-485) se le atribuye tres proposiciones equivalentes al quinto postulado de Euclides, que son:
 - Si una recta encuentra a una de dos paralelas encuentra también a la otra.
 - Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
 - Por un punto exterior a una recta pasa una sola paralela a esta recta²).

1.2. Algunos intentos de demostración del quinto postulado de Euclides hasta el siglo XVII por método directo de razonamiento

Los intentos por deducir el postulado de las paralelas como un teorema a partir de los cuatro primeros postulados de Euclides, tuvo ocupados a los geómetras por más de dos mil años, culminando, como se verá, en algunos de los desarrollos de más largo alcance de las matemáticas modernas. Muchas “demostraciones” del postulado fueron ofrecidas, pero con la misma velocidad, más o menos tarde, se descubría que cada una de ellas se basaba en una suposición tácita equivalente al propio postulado, violando la regla lógica que impide el razonamiento circular. Aquí algunos intentos, fallidos naturalmente.

²Conocido ahora como el Postulado de Playfair John Playfair (1748 – 1819) fue un científico escocés y matemático, profesor de filosofía en la Universidad de Edimburgo. En el libro de Playfair *Elements of Geometry* hizo una breve expresión del postulado paralelo de Euclides.

1. Ptolomeo (siglo II después de C.)

Ptolomeo escribió un libro sobre el quinto postulado, incluido una prueba de éste. Proclo, en su *Comentario al libro I de Euclides*³, criticó el quinto postulado del siguiente modo:

Debe ser borrado por completo de los postulados porque se trata de un teorema henchido de dificultades, que Tolomeo se puso a resolver en un libro, y su demostración requiere varias definiciones y teoremas. Más aún: La proposición converso es efectivamente demostrada por el propio Euclides como un teorema. [Euclides, 1999, p. 198].

Proclo no reproduce la prueba de Ptolomeo, pero, por sus comentarios, se deduce que intentó resolver la cuestión con el siguiente razonamiento:

Sean las rectas AB y CD paralelas; la recta EF , una transversal, formando los ángulos como se presenta en la figura 1.1

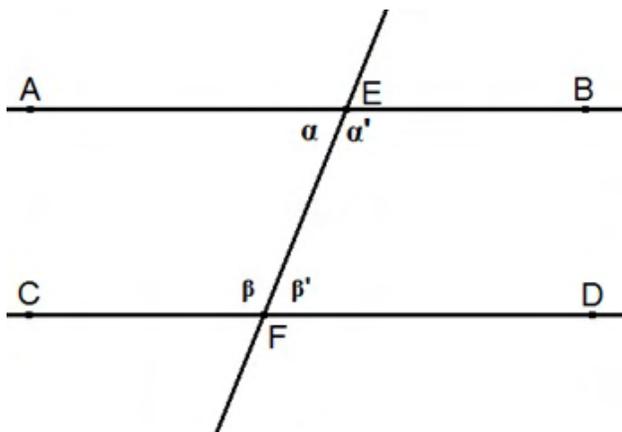


Figura 1.1: Ptolomeo

Sean α y β ángulos internos a la izquierda de la recta transversal EF y α' y β' ángulos internos a la derecha de la recta transversal EF .

Considerando que $\alpha + \beta$ puede ser mayor, menor o igual que dos ángulos rectos y suponiendo que $\alpha + \beta > \pi$ se cumple para un par de paralelas, esto mismo debe cumplirse para

³Para cuando se relaciona con el texto de Proclo se refiere a la edición dirigida por G. Friedlein. *Procli Diadochi in primum Euclidis elementorum librum commentarii* (Leipzig, Teubner, 1873).

otro par cualquiera. Entonces como las rectas EB y FD son paralelas entre sí, como también las rectas del otro lado, EA y FC , luego si $\alpha + \beta > \pi$ se deduce que: $\alpha' + \beta' > \pi$. Por lo que $\alpha + \beta + \alpha' + \beta' > 2\pi$, lo que es ilógico. Del mismo modo se demuestra que no puede ser que $\alpha + \beta < \pi$. Así $\alpha + \beta = \pi$.

De este resultado se puede obtener el postulado de Euclides. Proclo señala una falacia en la demostración de Ptolomeo, ya que éste supone que a través de un punto se puede dibujar un sola recta paralela a la otra dada y esto es equivalente a considerar el quinto postulado. (Esta suposición la hace Ptolomeo al considerar que las rectas EA y EB son una misma recta paralela a la recta CD).

2. Proclo (410-485)

El propio Proclo después de haber criticado la demostración de Ptolomeo, intento realizar el mismo razonamiento por otro camino. En [Bonola, 1923] la demostración de Proclo se basa en la siguiente proposición, que para él es evidente: *La distancia entre dos puntos situados sobre dos rectas que se cortan puede hacerse tan grande como se quiera, prolongando suficientemente las dos rectas*⁴. De ésta se deduce el lema:

Una recta que encuentra a una de dos paralelas encuentra necesariamente también a la otra.

Para la demostración del lema Proclo se apoya en dos afirmaciones, que son las siguientes:

- i.* La distancia entre dos rectas secantes crece y excederá cualquier magnitud. [Gray, 1992, p. 60]
- ii.* La distancia entre dos rectas es finita. [Bonola, 1923, p. 10]

Luego, sean las rectas m y n paralelas y l una recta que corta a m en el punto P , como se muestra en la figura 1.2

⁴Esta proposición, considerada como evidente, Proclo lo atribuye a una proposición del primer libro de Aristóteles, en su obra *De caelo*.

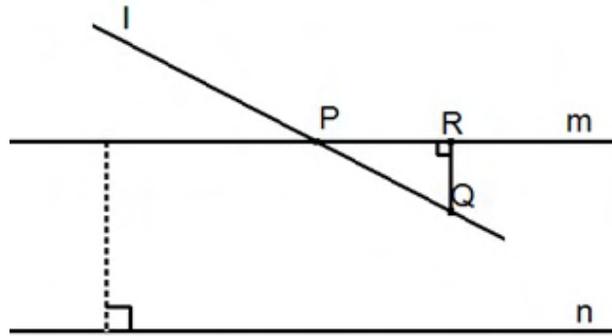


Figura 1.2: Proclo

Considerando el punto Q sobre la recta l se toma el punto R sobre m que esta sobre la perpendicular del segmento \overline{RQ} , si la longitud del segmento \overline{RQ} se incrementa (a proporción que la recta l crece) indefinidamente, este será mayor que la distancia entre las dos rectas paralelas ya que esta distancia es “finita”. Por lo tanto la recta l deberá cortar a m .

Se destacan dos claros errores en la demostración anterior que presentó Proclo. En primer lugar, una magnitud puede crecer indefinidamente sin rebasar un tope prefijado. Y en segundo lugar, no se puede presuponer que la distancia entre las rectas m y n es constante. Si se dice que son paralelas, se deduce que no se cortarán.

En [Gray, 1992] se menciona que: las paralelas están siempre a la misma distancia. Sin embargo, al igual que se ha visto con ciertas curvas, una aproximación constante no implica necesariamente que las líneas tengan que cortarse. Hay un ingenioso razonamiento clásico que pretende demostrar que dos rectas a y b tales como se muestran en la figura 1.3 no se cortan. El intento de Proclo por demostrar el quinto postulado de Euclides, puede resumirse de la siguiente manera: *dos rectas cortadas por una tercera no se encuentran, aun cuando la suma de los ángulos internos de un mismo lado sea menor que dos ángulos rectos.*

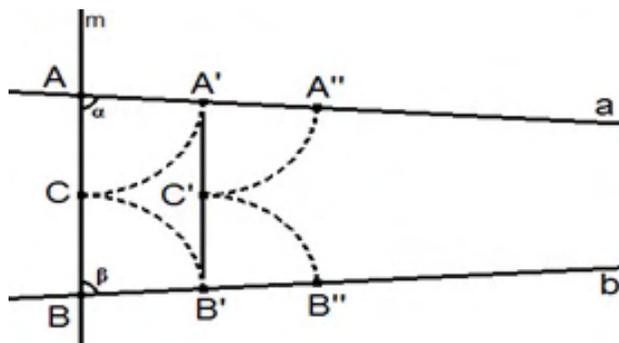


Figura 1.3: Proclo

Sean a y b dos rectas cortadas por una recta c , en los puntos A y B respectivamente, formando algunos internos a la izquierda α y β tales que $\alpha + \beta < 180^\circ$. El razonamiento tiene como fin demostrar que a y b no se cortan.

Se toma el punto medio C de AB para determinar A' y B' sobre a y b respectivamente, tal que

$$AA' = AC = AB = BB' \quad \text{en longitud}$$

Las rectas a y b no pueden cortarse entre A y A' ni entre B y B' ya que si esto sucede se formaría un triángulo (de vértice en los puntos A , B y en el punto de corte de AA' con BB') y el lado AB sería igual a la suma de los otros dos lados AA' y BB' , lo que es imposible ya que contradice a la proposición 20 del primer libro de Euclides. Por tanto, las rectas a y b no se cortan en los puntos A' y B' . Siguiendo se traza el segmento $\overline{A'B'}$ y se determina el punto medio C' , para determinar A'' sobre a y B'' sobre b , tal que

$$A'A'' = A'C' = C'B' = B'B'' \quad \text{en longitud, igual que antes}$$

De igual manera, las rectas a y b no pueden cortarse en los puntos A'' y B'' . Así se puede seguir una secuencia indefinidamente generando una secuencia de puntos C'' , A''' , B''' ... En conclusión, a y b nunca pueden llegar a cortarse porque hay una secuencia infinita de segmentos entre A y cualquier punto de corte que se pueda pensar.

En [Gray, 1992, p. 60], dice: la falsedad, por supuesto, proviene de que la secuencia infinita de puntos así creados converge, pero esto no es lo que realmente interesa, sino lo que Proclo tiene que decir al respecto es aún más interesante. Se tomó que $\alpha + \beta < 180^\circ$, y se supuso que a y b no se cortaban, entonces, se une A con un punto arbitrario B' de b , de manera que

$\sphericalangle BAB' = \theta$. Evidentemente, como θ es menor que α , $\theta + \beta < 180^\circ$. Por lo tanto, es falso, que cualesquiera sean los ángulos que dos rectas formen con una tercera, con tal de que la suma sea menor de 180° , las rectas no puedan cortarse, ya que AB' y b lo hacen.

3. Aganis (siglo VI)

Al- Nirizi (Siglo IX) quien reproduce una demostración al quinto postulado de Euclides, que se atribuye al matemático Aganis y que aparece en la obra *Introducción al Libro I de Euclides* de Simplicio, un comentador de Aristóteles, amigo de Aganis, que vivió en el siglo VI. En esta obra se expresan ideas semejantes a las de Gemino Y Posidonio, afirmando que el V Postulado no es evidente Y refiriendo la demostración de su compañero Aganis. [Bonola, 1923, p. 13]

Aganis, centrándose en la misma idea de Posidonio acerca de las rectas paralelas como equidistantes, tiene como propósito construir el punto de encuentro de dos rectas no equidistantes; que en otras palabras al determinar este punto de encuentro, demostraría el quinto Postulado de Euclides. En [Bonola, 1923, pp. 13-13], se muestra como Aganis construye el punto de encuentro de dos rectas que no son equidistantes, como se ve en la figura 1.4:

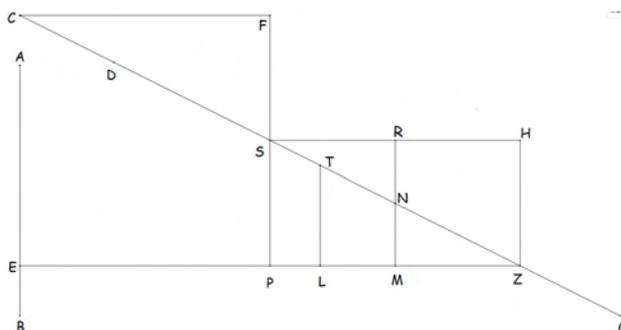


Figura 1.4: Aganis

Sea AB y GD dos rectas cortadas por la transversal EZ y tales que la suma de los ángulos internos $\sphericalangle AEZ$, $\sphericalangle EZD$ sea menor que dos rectos. Sin restar nada a la generalidad de la figura, se puede suponer que $\sphericalangle AEZ$ sea recto.

Fíjese ahora sobre ZD un punto arbitrario T , desde el cual se traza TL perpendicular a ZE ; después divídase por el punto P el segmento EZ en dos partes iguales: luego, por el punto M , el segmento PZ en dos partes iguales, y así sucesivamente MZ , en dos partes iguales, etc..., hasta que uno de los puntos medios P, M, \dots caiga en el segmento LZ . Si éste, por ejemplo, es el punto M , trácese por M la recta perpendicular a EZ , que encontrará en N a la ZD . Constrúyase finalmente sobre ZD el segmento ZC , múltiplo de ZN , como ZE es múltiplo de

ZM . En nuestro caso es: $ZC = 4 \cdot ZN$. El Punto C así obtenido es el punto de encuentro de las dos rectas AB y GD (ver figura 4).⁵

4. Nasir Eddin (1201 - 1274)

Nasir Eddin fue un astrónomo y matemático persa, editor de una versión de *Elementos de Euclides*, en árabe, escribió un tratado sobre los postulados de Euclides⁶, el cual adaptándose al criterio seguido por Aganis, observó por primera vez la importancia del teorema de la suma de los ángulos de un triángulo en relación al quinto postulado de Euclides. En su intento de prueba, se encuentra el gen de ideas importantes que serían desarrolladas mucho después de su tiempo.

En la demostración de dependencia del quinto postulado, Nasir Eddin se apoya en el siguiente principio: Si dos rectas r y s , son la primera perpendicular y la segunda oblicua al segmento \overline{AB} , los segmentos de perpendiculares trazados desde s sobre r , son menores que \overline{AB} en la región donde \overline{AB} forma con s ángulo agudo, y mayores que \overline{AB} en la región donde \overline{AB} forma con s ángulo obtuso. [Bonola, 1923, p. 15]

Con la anterior afirmación se garantiza que un cuadrilátero tiene sus cuatro ángulos rectos y los lados opuestos iguales. De este resultado Nasir Eddin obtiene fácilmente que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos. Con lo anterior el geómetra árabe demuestra el *postulado Euclidiano* de la siguiente manera:

Sean AB y CD dos rectas, una oblicua y otra perpendicular a una tercera AC . Sobre AB tómese un segmento \overline{AH} y desde H bájese la perpendicular $\overline{HH'}$ sobre AC . Si H' coincide con C o bien en la región opuesta a A , las dos rectas AB y CD se encuentran y por tanto se demuestra el quinto postulado de Euclides. Si H' cae entre A y C , trácese el segmento \overline{AL} perpendicular a la recta AC e igual a HH' , así $HL = AH'$, tómese el segmento \overline{HK} tal que $AH = HK$ y desde K bájese la perpendicular $\overline{KK'}$ a la recta AC , tómese el segmento $\overline{K'L'}$, tal que $K'L' = H'H = AL$, y únase L' con H , de esta manera los cuadriláteros $\square K'H'HL'$ y $\square H'ALH$ son rectángulos, donde los puntos L', H, L están en línea recta. Se sigue que $\sphericalangle L'HK = \sphericalangle AHL$, luego $\triangle AHL \cong \triangle KHL'$, así $HL = HL'$, como $H'A = HL = L'H = K'H'$ se tiene que $H'A = K'H'$.

Sea $KM = HK$, desde M bájese el segmento $\overline{MM'}$ perpendicular a la recta AC , por un razonamiento igual al anterior se demuestra que $M'K' = K'H'$. (Ver figura 1.5)

⁵Bonola termina señalando que, lo ultimo se cumple, al probar que los segmentos consecutivos e iguales $ZN, NS\dots$, de la recta DZ tienen proyecciones iguales sobre la EZ .

⁶Cfr. *Euclidis elementorum libri XII studio Nassiredini* (Roma, 1594). Esta obra, escrita en árabe, fué reproducida en 1657, 1801. No existe ninguna traducción de ella en otra lengua.

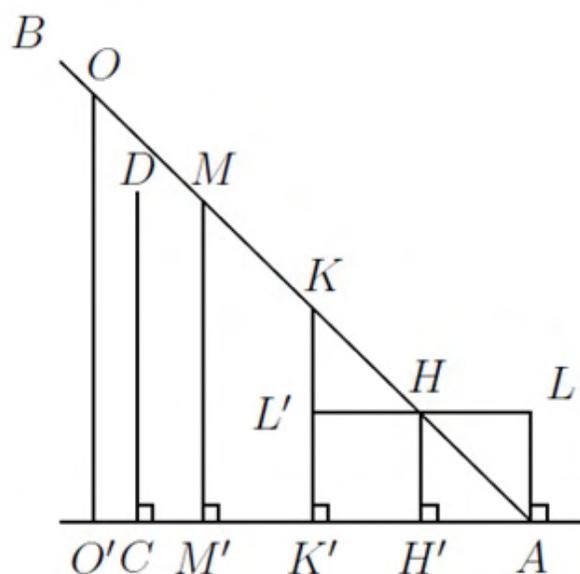


Figura 1.5: NasirEddin

Tómese un múltiplo del segmento $\overline{AH'}$ mayor que AC (postulado de Arquímedes⁷) sea este $AO' = 4AH' > AC$, constrúyase sobre la recta AB , $AO = 4AH$ y desde O bájese la perpendicular a la recta AC , esta perpendicular será el segmento $\overline{OO'}$. En el triángulo $\triangle AO'O$ la recta CD es perpendicular al segmento $\overline{O'A}$ y no puede encontrar al segmento $\overline{OO'}$, de lo contrario se contradice la proposición 17 del libro I de Euclides, por consiguiente, encuentra únicamente a la recta OA , demostrándose así el quinto postulado de Euclides.

5. John Wallis (1616 - 1703)

Este matemático inglés profesor de la universidad de Oxford, abandona el concepto de equidistancia, explotado inútilmente por los precedentes geómetras, da una nueva demostración del quinto postulado de Euclides, fundándose en la noción común: *De toda figura existe una semejante de magnitud arbitraria*. [Bonola, 1923, p. 20]

El razonamiento de Wallis es, en síntesis, el siguiente: Sean dos rectas a y b cortadas por una recta transversal c en los puntos A y B respectivamente, y formando ángulos internos α y β de un mismo lado de la recta c , talque $\alpha + \beta < \pi$. (Ver figura 1.6)

⁷Sean A, B, C, D cuatro puntos distintos, y A_1, A_2, \dots, A_n un conjunto finito de puntos distintos sobre el rayo AB , tales que $A = A_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n = CD$, existe un n , para el cual $AA_n > AB$.

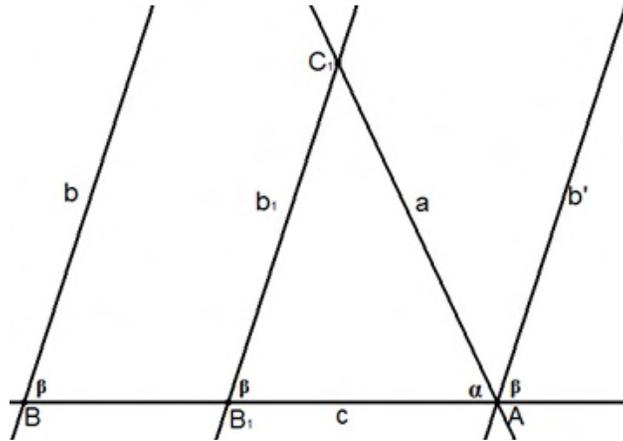


Figura 1.6: Wallis

Wallis quiere probar que sobre las rectas a y b se puede construir un punto C , mostrando así que ambas rectas se cortan. Trácese por el punto A una recta b' de modo que b y b' formen con la recta c ángulos correspondientes iguales. Ahora deslícese la recta b sobre el segmento \overline{AB} , manteniendo todo el tiempo el ángulo β formado con la recta c . La recta b , antes de alcanzar la posición final b' , cortará a la recta a en algún punto. Luego por la recta b_1 se determinarán los puntos B_1 y C_1 de las rectas c y a respectivamente. Ahora, se puede considerar un triángulo $\triangle B_1AC_1$ con los ángulos α y β en los vértices A y B_1 respectivamente. Pero, por la hipótesis de Wallis existe un triángulo $\triangle BAC$ semejante a $\triangle B_1AC_1$ y entonces el punto C debe pertenecer a las rectas a y b , como se quería probar.

Wallis justifica su razonamiento observando que Euclides al postular la existencia de un círculo de centro y radio dados (Postulado III), admite la semejanza para los círculos.

[Bonola, 1923, p. 21]

En su demostración, Wallis usa la existencia de triángulos semejantes, lo cual es equivalente al quinto postulado de Euclides, incurriendo en la misma falla de los geómetras anteriores.

6. Giordano Vitale (1633 - 1711)

Este matemático italiano retoma el concepto de equidistancia formulado por Posidonio e igual que Proclo, plantea la necesidad de rechazar que las paralelas de Euclides puedan comportarse de un modo asintótico. A este fin define las paralelas como dos rectas equidistantes, y trata de probar que el lugar de los puntos equidistantes de una recta es una recta. La demostración

reposa sobre el siguiente razonamiento: *Si una curva equidistante de una línea recta no es ella misma recta, esta debe ser cóncava o convexa hacia la línea recta dada.*

Sea la recta dada AB , y la curva cóncava o convexa DC hacia la recta AB , donde los segmentos \overline{AD} y \overline{BC} son perpendiculares a la recta AB e iguales entre sí. (Ver figura 1.7)

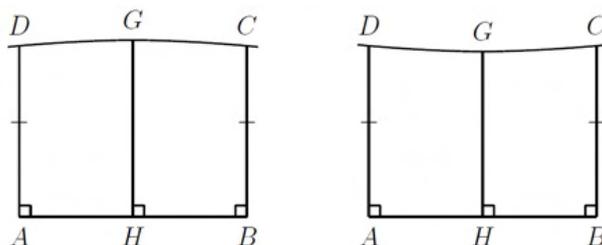


Figura 1.7: Curva cóncava o convexa respectivamente

Sea H un punto sobre la recta AB , tal que H este entre A y B , y un punto G que pertenezca a la curva DC , talque el segmento \overline{HG} sea perpendiculares a la recta AB , Vitale demuestra que:

- (i) Los ángulos $\sphericalangle ADC$ y $\sphericalangle BCD$ son iguales.
- (ii) Si el segmento $\overline{HG} = \overline{AD} = \overline{BC}$, los dos ángulos $\sphericalangle ADC$ y $\sphericalangle BCD$ son rectos y la curva DC equidistantes a la recta AB .

Con este razonamiento Vitale reduce la cuestión de las rectas equidistantes a demostrar la existencia de un punto G sobre la curva DC , cuya distancia a la recta AB sea igual a los segmentos $\overline{AD} = \overline{BC}$. Bonola [Bonola, 1923, p. 20], dice: *Este es uno de los resultados más notables obtenidos hasta aquella época respecto a la teoría de las paralelas.*

1.3. Demostradores del quinto postulado de Euclides por método indirecto de razonamiento (reducción al absurdo)

Después de que algunos personajes intentaran demostrar el quinto postulado de Euclides por métodos directos, con los siguientes personajes se busca establecer la verdad del quinto postulado y de la Geometría Euclidiana por métodos indirectos⁸. Aunque no se logra demostrar el quinto postulado, se obtuvo avances que posteriormente se reflejaron en las Geometrías no Euclidianas.

⁸Se realizará unos breves aportes de ciertos personajes que prevalecieron al intentar demostrar el quinto postulado de Euclides por este método.

- Gerolamo Saccheri (1667 - 1733)

El matemático y jesuita italiano Gerolamo Saccheri en su obra *Euclides ab omni naevo vindicatus*⁹ (Reivindicar a Euclides de toda mancha) trata en su mayor parte a la demostración de el quinto postulado de Euclides. La idea directriz de sus investigaciones geométricas es el método de reducción al absurdo el que utiliza, en su intento de demostrar la validez del quinto postulado de Euclides. Bajo esta idea, toma como datos los cuatro primeros postulados, las primeras 28 proposiciones de Euclides¹⁰, y supone como hipótesis que el quinto postulado es falso; esperando, como consecuencia, encontrar una contradicción que le autorice la validez del postulado en sí.

Saccheri parte de un cuadrilátero $ABCD$ de ángulos rectos en A y B , y los lados AD y BC iguales, entonces demostró que los ángulos D y C son iguales. (Ver figura 1.8)

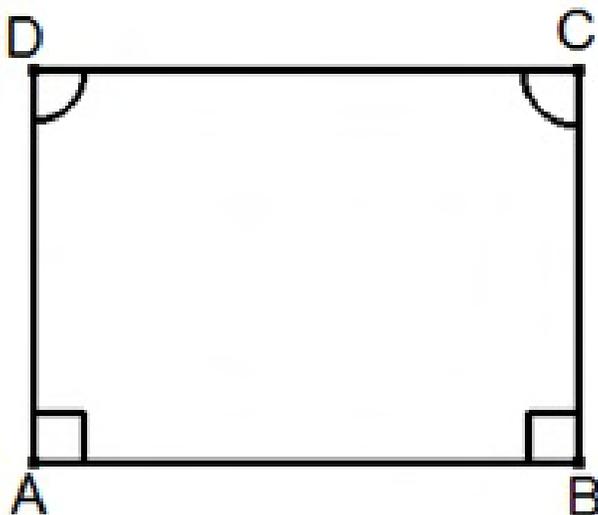


Figura 1.8: Cuadrilátero de Saccheri

En consecuencia de lo anterior se puede considerar tres posibilidades: los ángulos D y C son iguales y agudos, iguales y rectos, o iguales y obtusos. Estas tres hipótesis fueron denominadas por Saccheri la hipótesis del ángulo agudo, la hipótesis del ángulo recto y la hipótesis del ángulo obtuso respectivamente. Su objetivo era utilizar el método de reducción al absurdo

⁹El título completo del libro es: *Euclides ab omni naevo vindicatu: sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universae geometriae principia*, publicado en 1733.

¹⁰Aunque Euclides introduce las paralelas en el libro I, 27, no hace uso del postulado hasta la proposición 29, así que las primeras 28 proposiciones son independientes de éste.

para descartar las hipótesis de los ángulos agudo y obtuso. Saccheri eliminó fácilmente la hipótesis del ángulo obtuso, pero no pudo destruir la hipótesis del ángulo agudo. Después de obtener muchos de los teoremas hoy clásicos de la Geometría Hiperbólica, Saccheri obtuvo incorrectamente una contradicción no convincente. En palabras de Saccheri:

La hipótesis del ángulo agudo es absolutamente falsa, porque repugna a la naturaleza de la línea recta. [Bonola, 1923, p. 44]

- Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777)

Este matemático suizo escribió su libro *Teoría de las paralelas*¹¹, la cual fue publicada después de su muerte por Johann Bernoulli III en 1786. examina críticamente la “demostrabilidad” del postulado de las paralelas e intenta a su vez demostrarlo a partir de las bases euclidianas. En [Bonola, 1923] se menciona que la obra de Lambert está dividida en tres partes; la primera de naturaleza crítica y filosófica, expone la doble cuestión que podemos proponernos sobre el quinto postulado de Euclides; esto es, si puede demostrarse con el simple auxilio de los precedentes, o si, por el contrario, no se exige el empleo de alguna otra hipótesis. La segunda parte está dedicada a la exposición de varias tentativas, en las que el postulado se reduce a proposiciones sencillas, las cuales, sin embargo, deberían ser a su vez demostradas. La tercera contiene un sistema de investigaciones semejantes a las de Saccheri, por ejemplo, su figura fundamental es un cuadrilátero con tres ángulos rectos e igual que Saccheri analiza las tres hipótesis sobre el cuarto ángulo. (Ver figura 1.9)

¹¹Su título original es *Theorie der Parallellinien*.

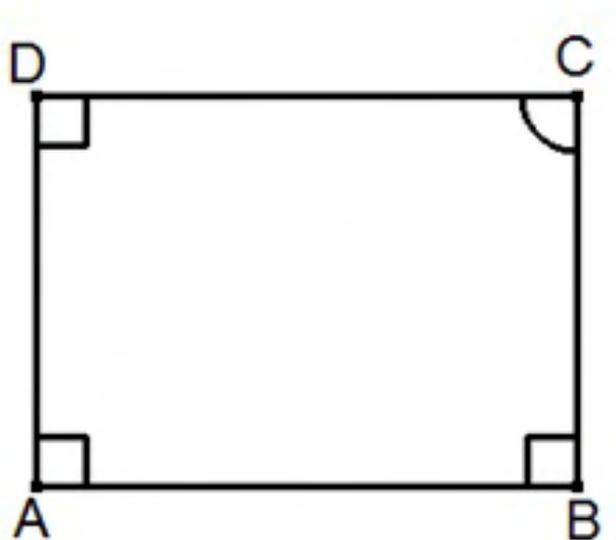


Figura 1.9: Cuadrilátero de Lambert

Al igual que Saccheri, Lambert es considerado uno de los precursores de las geometrías no euclidianas, descubriendo varios teoremas que hoy en día subyacen en esta.

- **Adrian M. Legendre (1752 - 1833)**

Este matemático francés también trató de demostrar el quinto postulado de Euclides por reducción al absurdo, formulándolo como teorema. Legendre demostró teoremas conocidos con anterioridad por Saccheri, y al igual que éste sus intentos descansan sobre las hipótesis de la suma de los ángulos internos de un triángulo. Sus resultados se conocen con el nombre de teoremas de Legendre, aunque fueron conocidos por otros antes que por él. En el llamado *primer teorema*¹², demostró que la suma de los ángulos de un triángulo no puede ser mayor que dos ángulos rectos.

La obra de Legendre no añade nada nuevo al material ni a las convicciones ganadas por sus predecesores, su mérito está en la sencillez y elegancia que supo dar a sus investigaciones y es por eso que la difusión de su obra contribuyó al aumento del círculo de cultivadores de estas nuevas ideas, que entonces estaban formándose.

- **Wolfgang Bolyai (1775-1856)**

Este geómetra húngaro también se ocupó en la demostración del quinto postulado de Euclides desde la época que estudiaba en Gotinga (1796 - 1799), probablemente impulsado por Kaestner

¹²Muchos de sus teoremas se encuentran en su obra *Eléments de géométrie* (1794 - 1823).

y de K. F. Seyffer. En 1804, envió a Gauss una tentativa para demostrar la existencia de rectas equidistantes, donde Gauss rechazó esta demostración.

Posteriormente Wolfgang reúne sus ideas acerca de los principios de las matemáticas en la obra *Tentamen* (1832 - 1833), y en particular sus investigaciones sobre el *axioma XI*. Un notable postulado, del que Wolfgang deduce el de Euclides, es el siguiente: *Tres puntos no en línea recta yacen siempre sobre una esfera*, o lo que es lo mismo: *tres puntos no en línea recta pertenecen siempre a una circunferencia*.

1.4. Fundadores de la geometría hiperbólica

- Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

En [Bonola, 1923] se dice que fue Gauss el primero en tener una visión clara de una geometría independiente del quinto postulado de Euclides, visión que durante 50 años permaneció en la mente del ilustre geómetra y que dio a luz solamente después de las obras de Lobachevsky y J. Bolyai.

Los documentos que permitieron una reconstrucción aproximada de las investigaciones realizadas por Gauss sobre el quinto postulado, son las correspondencia de Gauss con W. Bolyai, Olbers, Schumacher, Gerling, Taurinus y Besel (1799 - 1844). AL igual que Saccheri y Lambert, Gauss abordó el quinto postulado de Euclides tomando como hipótesis su falsedad.

Apuntes encontrados entre las cartas de Gauss, muestran que procedió al desarrollo de los teoremas fundamentales de una nueva geometría, que el llamaba *antieuclediana* (carta con Wachter); después *geometría astral* (carta con Schweikart) y finalmente *geometría no euclidianda* (carta con schumacher). Llega así a adquirir la certeza que las geometrías no euclidianas no llegan a ninguna contradicción. Sin embargo Gauss no dejó publicar todo lo que había descubierto al abordar el quinto postulado de Euclides por la seguridad de no ser comprendido (carta a Besel).

- Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793 - 1856)

Este matemático ruso estudió en la universidad de Kazán, bajo la dirección del alemán J. M. C. Bartels (1769 - 1836), amigo y compatriota de Gauss. En 1815, Lobachevsky ya realizaba algunas tentativas para la demostración del quinto postulado de Euclides, e investigaciones semejantes a la de Legendre. Fue sólo después de 1823 que obtuvo la *Geometría Imaginaria* que resulta de un tratado sobre la geometría elemental, donde dice que no se posee demostración alguna del quinto postulado de Euclides pero que tal demostración no debe ser imposible.

Lobachevsky, informó por primera vez, de su nueva geometría independiente de la hipótesis de Euclides en la sección físico-matemática de la universidad de Kazán en 1826, donde ahí expone que por un punto pasan dos paralelas a la recta dada y donde la suma de los ángulos internos de un triángulo es menor que dos ángulos rectos¹³.

En 1829 - 1830 las ideas de Lobachevsky sobre los principios de dicha geometría de manera escrita, se establecieron en una memoria *Sobre los fundamentos de la geometría*.

- Janós Bolyai (1802 - 1860)

Este matemático húngaro junto con Lobachevsky comparte la gloria del descubrimiento de la geometría no euclidiana. La vida y obra de Janós están estrechamente relacionadas con las de su padre Wolfgang Bolyai. La teoría de las paralelas fue la ocupación favorita del joven matemático durante su estancia en la real Academia de Ingenieros en Viena (1817 - 1822).

En 1820 mediante una carta informa a su padre de la tentativa de demostrar el quinto postulado de Euclides, en lo que él le trata de disuadir para no seguir de esa inútil y estéril tentativa. A pesar de todo Janós siguió trabajando y en 1826 presentó tal trabajo a J. Walter von Eckwehr (1789 - 1857) profesor suyo de la Academia militar, y en 1829 remitió el manuscrito a su padre, quién no llegó a comprenderlo en su totalidad. Sin embargo, padre e hijo se entendieron para publicar tal manuscrito como apéndice al primer volumen del *Tentamen* la nueva teoría del espacio.

Wolfgang en 1832 envió el trabajo de su hijo a Gauss, con el fin de que lo leyera y le diera su opinión. Gauss al leerlo, le responde en pocas palabras de la siguiente manera: alabar a tu hijo es como elogiarme a mi mismo, porque el contenido de la obra de él, coinciden con los resultados que yo mismo he logrado hace unos 35 años. Wolfgang comunicó esta carta a su hijo, añadiendo la respuesta de Gauss. Janós no podía ni quería convencerse de que otro, antes e independientemente de él, hubiese llegado a la geometría no euclidiana.

La obra de Janós Bolyai, en términos generales, es muy parecida a la escrita por el matemático ruso Lobachevsky. Algunos de sus resultados mas importantes son:

- Definición de las paralelas y sus propiedades independientes del postulado euclideo.
- Círculo y esfera de radio infinito. La Geometría sobre la esfera de radio infinito es idéntica a la Geometría plana ordinaria.
- La trigonometría esférica es independiente del postulado de Euclides. Demostración directa de las fórmulas.

¹³Hipótesis de ángulo agudo de Saccheri y Lambert.

- Trigonometría plana en el caso no euclídeo. Aplicaciones al cálculo de las áreas y de los volúmenes.
- Problemas resolubles elementalmente. Construcción de un cuadrado equivalente a un círculo, en la hipótesis de la falsedad del quinto postulado.

Capítulo 2

Disco de Poincaré y geometría hiperbólica

Para el desarrollo de este capítulo es importante tener en cuenta algunas nociones de la Geometría Euclidiana, como algunas definiciones y construcciones que se basan a través de la regla y el compás. A continuación se presentan algunas construcciones de la Geometría Euclidiana que serán de mayor utilidad en la construcción de la Geometría Hiperbólica dentro del Modelo del Disco de Poincaré. Los documentos de guía son [Goodman-Strauss, 2001], [De Souza, 2014] y [Rodríguez, 2012].

2.1. Construcciones con regla y compás

Para realizar las construcciones se utilizará el ambiente de Geometría Dinámico *Cabri Geometry II plus* con el cual se realizará las figuras geométricas (las figuras propuestas en este capítulo son de mi autoría) que servirán para su mejor visualización.

Construcción 2.1.1 (Mediatriz.) Es la recta perpendicular que pasa por el punto medio a un segmento dado. Sea el segmento \overline{AB} entonces:

1. Se traza una circunferencia con centro en A y radio \overline{AB} .
2. Similarmente con el punto B Se traza una circunferencia con centro en A y radio \overline{AB} y determinamos los puntos C y D que son los puntos de intersección de las dos circunferencias.
3. Trazamos la recta que pase por los puntos C y D la cual será la mediatriz buscada.

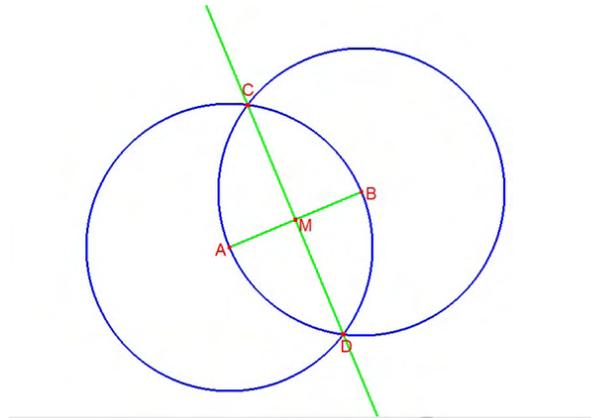


Figura 2.1: Mediatriz de un segmento.

Construcción 2.1.2 (Circunferencia que pasa por tres puntos no colineales y coplanares.) Sea los puntos A, B y C no colineales, entonces:

1. Se traza los segmentos \overline{AB} y \overline{BC} .
2. Se construye la mediatriz de los segmentos \overline{AB} y \overline{BC} .
3. El punto O es la intersección de las dos mediatrices y de ahí trazamos una circunferencia con centro en O y radio \overline{OA} . Esa es la circunferencia buscada.

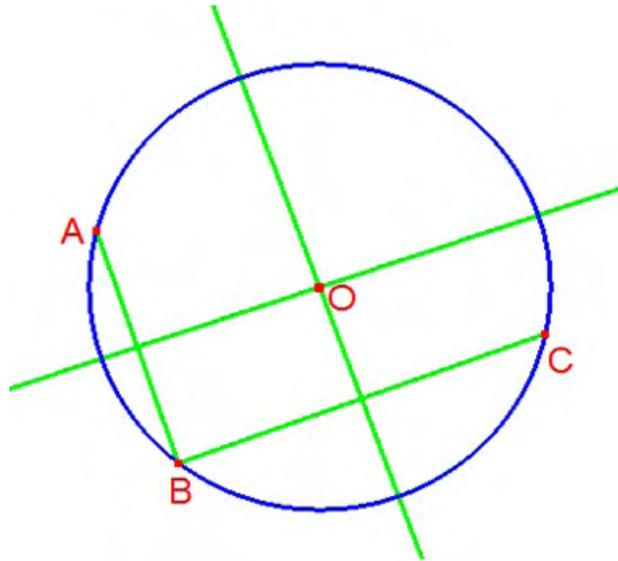


Figura 2.2: Circunferencia que pasa por tres puntos no colineales.

Construcción 2.1.3 (Tangentes a una circunferencia desde un punto exterior). Sea una circunferencia c_1 con centro O y radio r , y un punto P exterior a la circunferencia, entonces:

1. Hallamos el punto medio M del segmento \overline{OP} .
2. Ahora trazamos una circunferencia c_2 con centro en M y radio \overline{OM} .
3. Los puntos Q y J son la intersección de las circunferencias c_1 y c_2 , así trazamos una recta que pase por P y Q , y de manera similar otra recta que pase por P y J , la cual serán las rectas tangentes buscadas.

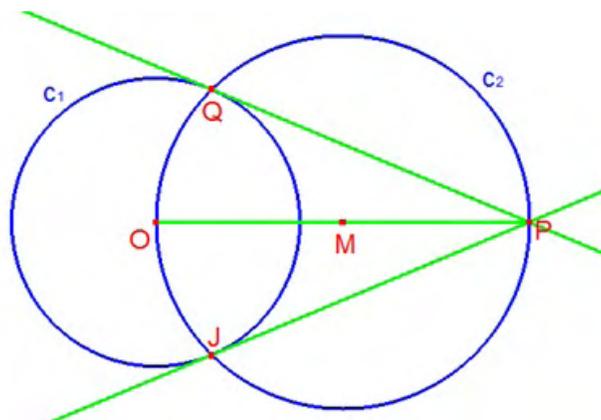


Figura 2.3: Tangentes de un punto exterior a una circunferencia.

Inversión. La inversión es uno de los principales recursos en las construcciones con regla y compás en la Geometría Hiperbólica; esto es por la facilidad con la que se pueden construir circunferencias ortogonales, además es uno de los requisitos que servirá para la interpretación de los cinco postulados de Euclides en el Modelo del Disco de Poincaré.

Nota: La distancia entre dos puntos A y B , se denotará como $d(A, B)$.

Definición 1. Sea c una circunferencia de centro O y radio r (en este trabajo se denotará a la circunferencia de inversión como $c(O, r)$) y un punto A que pertenece al plano euclidiano, donde $A \neq O$, el inverso de A con respecto a la circunferencia c es el punto A' en \overrightarrow{OA} tal que $d(OA)d(OA') = r^2$.

Para realizar esta construcción hay dos casos, cuando el punto está adentro de la circunferencia o cuando el punto está afuera, se realizará el primer caso.

Construcción 2.1.4. Inversión de un punto con respecto a una circunferencia c con centro en O .

1. Sea O el centro de la circunferencia y un punto cualquiera A que está en el interior de la circunferencia donde $O \neq A$.
2. Se traza el rayo \overrightarrow{OA} .
3. Por el punto A se traza la perpendicular a \overrightarrow{OA} .

4. Sea P el punto de intersección de la perpendicular que pasa por A y la circunferencia c .
5. Se traza el segmento \overline{OP} y la recta perpendicular a \overline{OP} que pase por P .
6. El punto A' , que es la intersección del rayo \overrightarrow{OA} con recta perpendicular al segmento \overline{OP} , que sería el inverso de A .

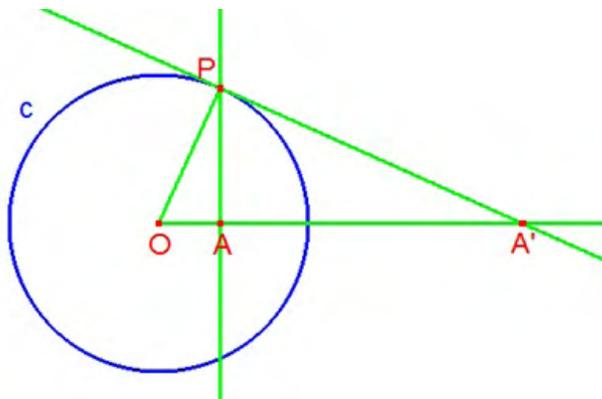


Figura 2.4: Inversión de un punto respecto a una circunferencia.

Segundo caso, cuando el punto se encuentra en el exterior de la circunferencia.

Construcción 2.1.5. Inversión de un punto con respecto a una circunferencia c con centro en O .

1. Sea O el centro de la circunferencia y un punto cualquiera B que está en el exterior de la circunferencia.
2. Se traza el segmento \overline{OB} y hallamos la recta tangente a una circunferencia dado el punto exterior B .
3. Llamamos P al punto donde se toca la circunferencia con una de las rectas tangente.
4. Trazamos una perpendicular al segmento \overline{OB} que pase por P y así hallamos B' que es el punto inverso de B .

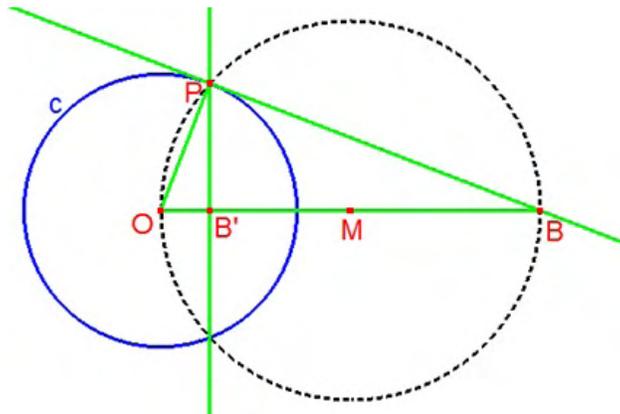


Figura 2.5: Inversión de un punto exterior respecto a una circunferencia.

Definición 2. En el plano euclidiano, dos circunferencias c_1 y c_2 son ortogonales entre sí, cuando, en los puntos de intersección, la recta tangente de uno de ellos forma un ángulo recto con la recta tangente del otro.

Lema 1. Sean dos circunferencias $c_1(O, r)$ y $c_2(O', r')$ en el plano euclidiano. Entonces c_1 y c_2 son ortogonales si y solo si $r^2 + r'^2 = [d(O, O')]^2$. (Ver figura 2.6)

Demostración:

\Rightarrow) Si $c_1 \perp c_2$, se puede utilizar el Teorema de Pitágoras donde $r^2 + r'^2 = [d(O, O')]^2$.

\Leftarrow) Sea P uno de los puntos de intersección de las circunferencias c_1 y c_2 , si $r^2 + r'^2 = [d(O, O')]^2$ entonces el triángulo $\triangle OPO'$ es rectángulo, con el ángulo $\sphericalangle OPO'$ recto y por lo tanto c_1 y c_2 son ortogonales.

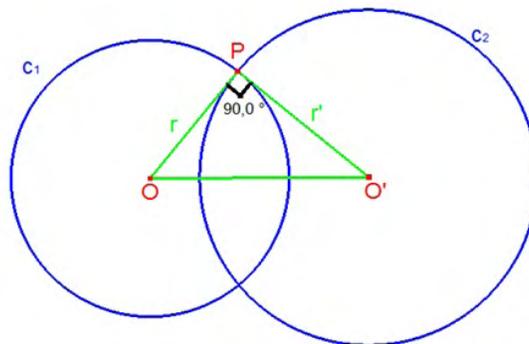


Figura 2.6: Circunferencias ortogonales.

Lema 2. Sea P un punto exterior a la circunferencia $c(O, r)$ en el plano euclidiano. Sean C y D los puntos de intersección de la recta que pasa por \overline{OP} con la circunferencia c . Considérese cualquier recta que pase por P (posiblemente coincidente con la recta \overline{OP}) y que interseque a la circunferencia en los puntos E y F . Entonces $d(P, F)d(P, E) = [d(P, O)]^2 - r^2$. (Ver figura 2.7)

Demostración: Los triángulos $\triangle PFC$ y $\triangle PDE$ son semejantes (por el caso de dos ángulos congruentes) ya que el $\sphericalangle FPC \cong \sphericalangle EPD$ y además (por un teorema que dice *La medida de un ángulo inscrito en una circunferencia es igual a la mitad de la medida del arco interceptado*) $\sphericalangle EFC \cong \frac{m(\widehat{EC})}{2} \cong \sphericalangle EDC$, entonces por la semejanza tenemos que

$$\frac{d(PF)}{d(PD)} = \frac{d(PC)}{d(PE)}$$

Así,

$$d(P, F)d(P, E) = d(P, C)d(P, D) = [d(P, O) - r][d(P, O) + r] = [d(P, O)]^2 - r^2$$

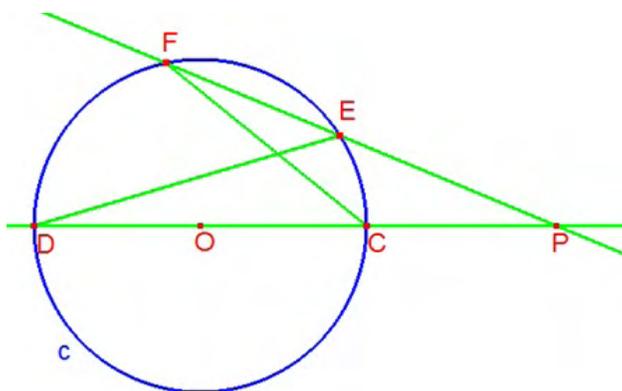


Figura 2.7: Lema 2.

Teorema 1. Si dos puntos distintos A y A' son inversos entre sí respecto a una circunferencia $c_1(O, r)$ en el plano euclidiano, entonces toda circunferencia o recta que pase por ambos es ortogonal a c_1 . (Ver figura 2.8)

Demostración: Sean A y A' dos puntos que se encuentran en un mismo rayo que parte de O , uno dentro y el otro fuera de c_1 . Si $c_2(O', r')$ es una circunferencia que pasa por A y A' , entonces O queda fuera de c_2 ; así, por el **Lema 2** y dado que $d(O, A)d(O, A') = r^2$ se tienen las siguientes igualdades:

$$d(O, A)d(O, A') = [d(O, O') - r'][d(O, O') + r'] = [d(O, O')]^2 - r'^2 = r^2$$

de la última igualdad se tiene q que $r^2 + r'^2 = [d(O, O')]^2$ y por el **lema 1** se concluye que c_1 es ortogonal a c_2 . Luego recta que pasa por AA' pasa por O por lo que es ortogonal a c_1 .

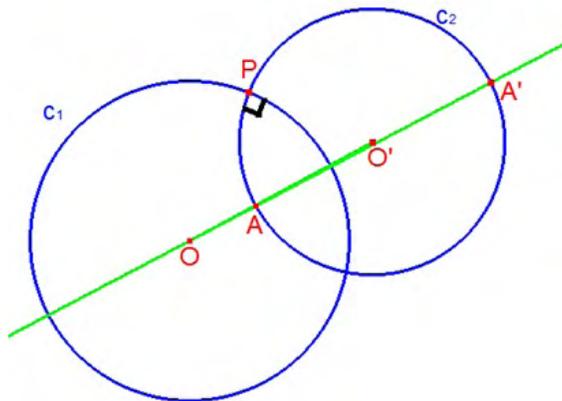


Figura 2.8: Circunferencia y recta ortogonal.

Lema 3. Sean c_1 y c_2 circunferencias ortogonales y sea A un punto sobre c_2 . Entonces la inversa de A respecto a c_1 también está sobre c_2 . De manera similar, si A y A' son inversos respecto a c_1 y están sobre c_2 , entonces c_1 y c_2 son ortogonales. (Ver figura 2.9)

Demostración: Para la primera parte se sigue como consecuencia del **Lema 1**. Para la segunda parte se tiene el **Teorema 2**, donde dice que toda circunferencia que pase por dos puntos inversos es ortogonal a la circunferencia de inversión.

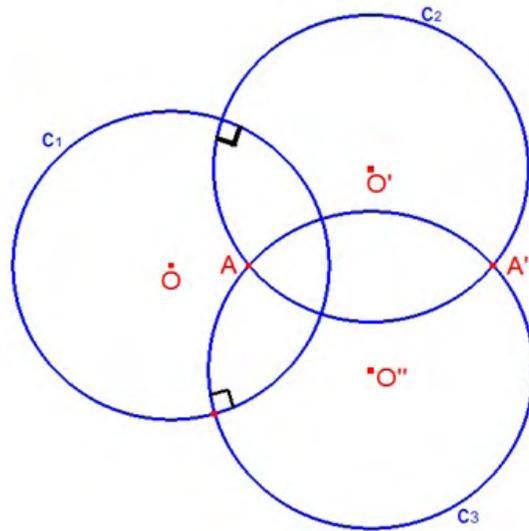


Figura 2.9: Circunferencias ortogonales e inversos.

Lema 4. Sea c una circunferencia con centro en O y radio r . Sea A un punto distinto de O . Entonces, el lugar geométrico de los centros de todas las circunferencias que pasan por A y que son ortogonales a c es una línea recta (Figura 2.10). Si A está en el interior (o sobre o en el exterior) de c entonces la línea estará en el exterior (tangente a en el exterior) de c . Finalmente, cualquier línea en el exterior de, o tangente a c es tal lugar geométrico.

Demostración: Cualquier circunferencia que pase por A y sea ortogonal a c debe pasar por su inverso A' respecto a c . En consecuencia, si A y A' son puntos distintos (es decir no están sobre c) el centro de la circunferencia se debe encontrar en la mediatriz de $\overline{AA'}$, la cual está en el exterior de c . Inversamente, cualquier circunferencia con centro en la mediatriz que pasa por A y A' es ortogonal a c . Si A está en c , entonces el lugar geométrico es la recta tangente a c en A . Es trivial mostrar que cualquier recta en el exterior de o tangente a c es tal lugar geométrico.

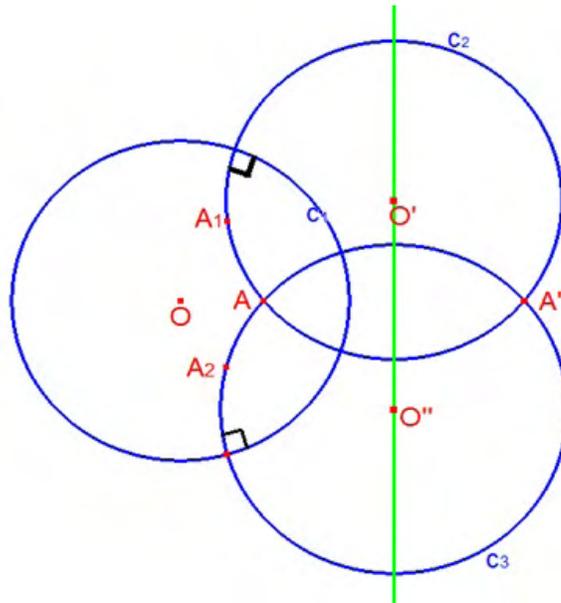


Figura 2.10: Lugar geométrico de los centros de las circunferencias ortogonales.

Teorema 3. Sea $I(O, r)$ una inversión, entonces la inversa de una circunferencia S que no pasa por O es una circunferencia S' que no pasa por O .

Teorema 4. Sea c una circunferencia de inversión de centro O y radio r , el inverso de una circunferencia c_1 , ortogonal a c , es la propia circunferencia c_1 y el arco formado por todos los puntos de c_1 en el interior de c es inverso al arco formado por todos los puntos de c_1 exterior a c .

Demostración: Consideremos, sin pérdida de generalidad, un punto arbitrario A de c_1 en el interior de c y un punto B en la intersección de c con c_1 . Como c_1 es ortogonal a c y A es un punto de c_1 y por el teorema, el inverso de A , A' es la intersección entre la recta \overline{OA} y la circunferencia c_1 , que, por la definición de punto inverso, es exterior a c , de este modo, cada punto de c_1 , interior a c está asociado a un punto de c_1 , exterior a c . Además, el inverso de B es el mismo, puesto que $\overline{OB} = r$.

2.2. Modelo del disco de Poincaré

El Disco de Poincaré es un modelo de geometría hiperbólica que representa al plano como el interior de un círculo fijo en el plano euclidiano, donde las rectas hiperbólicas son cualquier diámetro del círculo o cualquier trozo de arco de circunferencia ortogonal a la circunferencia borde contenida

en esta. Además Poincaré define puntos, segmentos, ángulos, circunferencias etc. que son ciertos objetos geométricos euclidianos.

Se introducirá la siguiente definición, que hace uso de notación de variable compleja. LLamaremos al **Disco de Poincaré** como el disco conformado por los puntos interiores de la circunferencia unitaria ω :

$$\Delta^2 = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

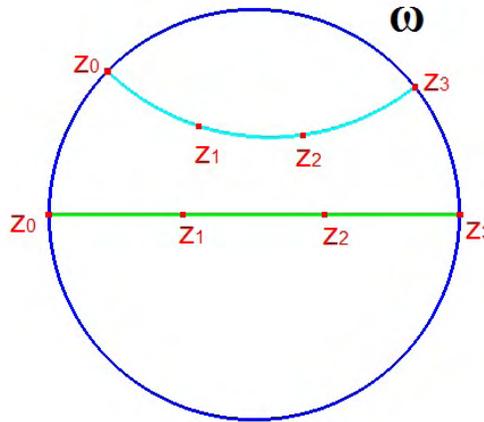


Figura 2.11: Disco de Poincaré.

Definido con la métrica hiperbólica

$$d(z_1, z_2) = Ln \left| \frac{\overline{z_0 z_2} \cdot z_3 z_1}{z_0 z_1 \cdot \overline{z_3 z_2}} \right|$$

donde $\overline{z_0 z_2}$, $\overline{z_0 z_1}$, $\overline{z_3 z_1}$ y $\overline{z_3 z_2}$ representan la medida euclidiana de los respectivos segmentos. Además z_0 y z_3 son los puntos de intersección con ω con el único arco de circunferencia ortogonal que pasa por z_1 y z_2 . Esta definición (debida a Cayley) verifica las propiedades de una métrica y modeliza perfectamente la idea de que la distancia aumenta cuanto más vaya acercándose uno de los puntos al borde del disco, siendo finalmente infinita la distancia de cualquier punto a dicho borde (por eso la utilización del logaritmo: al ir acercándose el cociente a cero, el logaritmo tiende a menos infinito, positivo gracias al valor absoluto).

Aunque los objetos definidos en este modelo son objetos geométricos euclidianos, tienen distinta representación, como es el caso de los segmentos, rectas y demás objetos geométricos que se

trabajarán en la interpretación de los cuatro postulados de Euclides y la negación del quinto postulado que da origen a la geometría hiperbólica. Ya definido el modelo, veremos como se satisfacen los cinco postulados de la siguiente manera: se tomará como modernamente se conocen los cinco postulados.

2.2.1. Postulado I

Dados dos puntos, siempre existe una única recta que pase por ellos. Este postulado dentro del Disco de Poincaré se establece en el siguiente teorema:

Teorema 5. Dos puntos distintos en Δ^2 determinan una y solo una recta hiperbólica.

Demostración: Para probar este teorema se demostrará primero la unicidad y luego la existencia. Para la unicidad, sean A y B puntos distintos que pertenezcan a Δ^2 que se encuentran sobre la recta hiperbólica l . Por definición $l = \Delta^2 \cap c$ para alguna circunferencia o recta hiperbólica c ortogonal a ω . Uno de los puntos es distinto del origen, por ejemplo A . Sea I la inversión respecto a ω en el plano euclidiano. Como $A \in c$ está dentro de ω y es distinto del origen, se sabe que $I(A) = A'$ existe, queda sobre c y se encuentra fuera de ω . De este modo A, B y $A' \in c$ son tres puntos distintos por los cuales no puede pasar otra circunferencia o recta hiperbólica. La circunferencia c es única y por lo tanto l .

Para la existencia, si A, B y O son puntos colineales entonces la recta \overline{AB} contiene un diámetro de ω que pertenece a Δ^2 y es la recta hiperbólica. Ahora suponga que A, B y O son no colineales. Se tiene que $I(A) = A'$ existe, además A, A' y B son no colineales, por lo que se puede trazar una circunferencia. Como c contiene a los puntos A y A' entonces c es ortogonal a ω . Por lo tanto, el arco de circunferencia es la recta hiperbólica que es $\Delta^2 \cap c$ y que pasa por A y B .

Construcción 2.2.1 (recta hiperbólicas). Como se había mencionado anteriormente las rectas hiperbólicas del disco, son los diámetros o los arcos de circunferencias \widehat{AB} (interiores) ortogonales al disco, por lo tanto se construirá sólo lo segundo, para eso se relajarán los siguientes pasos:

1. Se tomará los puntos A y B cualesquiera en el interior del disco (diferentes del origen y además no colineales) y además $A \neq B$.
2. Se halla A' que es el inverso de A con respecto al disco (también se podría hallar el inverso de B).

3. Trazamos la mediatriz de AB y de AA' y además se encuentra P que es el punto de intersección de las mediatrices.
4. Se traza la circunferencia con centro en P y que pase por A , B y A' , donde se encontrará \widehat{AB} que será la recta hiperbólica deseada.

El **Lema 3** asegura que $\omega \perp c$ y además que el inverso de B esté sobre c .

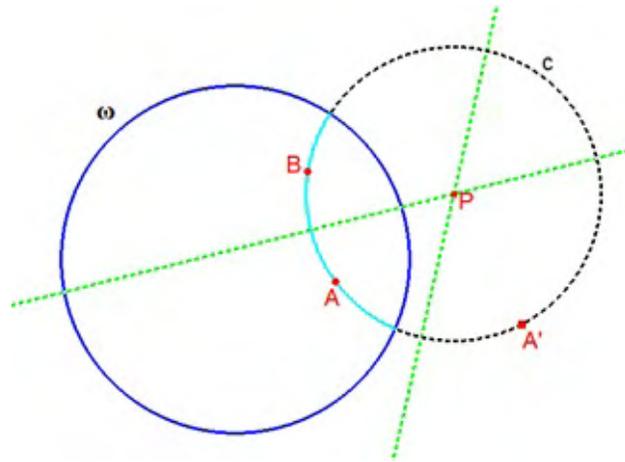


Figura 2.12: Recta hiperbólica en el Disco de Poincaré.

Un caso particular de construir la recta hiperbólica es la construcción de la semirrecta hiperbólica que pase por dos puntos A y B en el interior de ω . Para construirla se hacen los mismos pasos anteriores, solo que se tomara el arco de circunferencia que inicie en A , B y la intersección de c con ω en C .

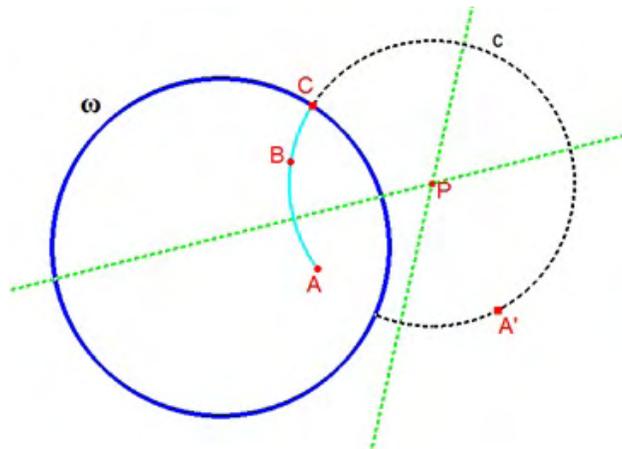


Figura 2.13: Semirrecta hiperbólica en el Disco de Poincaré.

Y el segmento hiperbólico solo será el arco de circunferencia que pase por A y B y no se interseque en la frontera de ω con c .

2.2.2. Postulado II

Se puede prolongar una línea recta indefinidamente a partir de una recta finita. En el modelo del disco de Poincaré, se observa que la recta hiperbólica tiende a intersecar el disco para poder extenderse indefinidamente, pero como se está definido el modelo, la longitud de la recta hiperbólica crece entre más se vaya acercando sus extremos a la frontera del disco sin que esta lo traspase. Para ver como funciona esta recta hiperbólica dentro del disco se estudiará los **espacios métricos de Barbilian** que en consecuencia servirá para estudiar la métrica hiperbólica.

2.2.1. Métrica hiperbólica en el disco de Poincaré

En este capítulo se conocerá la métrica hiperbólica por medio de una métrica más general conocida como métrica de Barbilian. Se parte de una curva de Jordan y se busca una función para puntos interiores de la curva, que cumpla con las propiedades de métrica. Se define las rectas hiperbólicas y se deduce que la métrica en el disco de Poincaré es un caso particular de la de Barbilian. Se utilizará [Mendoza, 2011] de guía

2.2.2. Espacios métricos de Barbilian

Un espacio métrico es un conjunto de puntos no vacío tales que a cada par de puntos a, b en dicho conjunto se le asigna un d que es una función, llamada distancia o métrica, y que satisface las siguientes propiedades:

- 1) $d(a, b) \geq 0$.
- 2) $d(a, b) = 0$ si y solo si $a = b$.
- 3) $d(a, b) = d(b, a)$.
- 4) $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c)$.

es decir;

- 1) Las distancias son no negativas.

- 2) el único punto a distancia cero de a es el mismo a .
- 3) La distancia es una función simétrica.
- 4) la distancia satisface la desigualdad triangular: la longitud de un lado de un triángulo es menor que la suma de las longitudes de los otros dos lados

Sea K el interior de una curva de Jordan J en el plano euclidiano y d la métrica usual en ese espacio. Se quiere encontrar una métrica para puntos en K . Para ello se fijan A y B en K y sea X un punto cualquiera sobre J . De aquí, las distancias $d(X, A)$ y $d(X, B)$ varían continuamente y asumen un valor máximo y un mínimo en algún punto $X \in K$. De hecho, cualquier función continua de $d(X, A)$ y $d(X, B)$ cumple esta propiedad. Se busca una función, para un par de puntos en K , que satisfaga las propiedades de espacio métrico. En particular se elegirá el máximo de alguna función continua.

Para hallar una función de tal características se tomará la siguiente razón

$$\frac{d(X, A)}{d(X, B)} \quad \forall \quad X \in J$$

- Si $A = B$ entonces la razón es 1 para todo X en J .
- Si $A \neq B$ entonces la razón vale 1 en los puntos de intersección de J con la mediatriz de A y B , la cual permite separar puntos de J , dependiendo si están más cerca o lejos relativamente de A que de B .

Así, para los puntos X sobre J que se encuentran del lado de A (Figura 2.14), se tiene que

$$\frac{d(X, A)}{d(X, B)} < 1$$

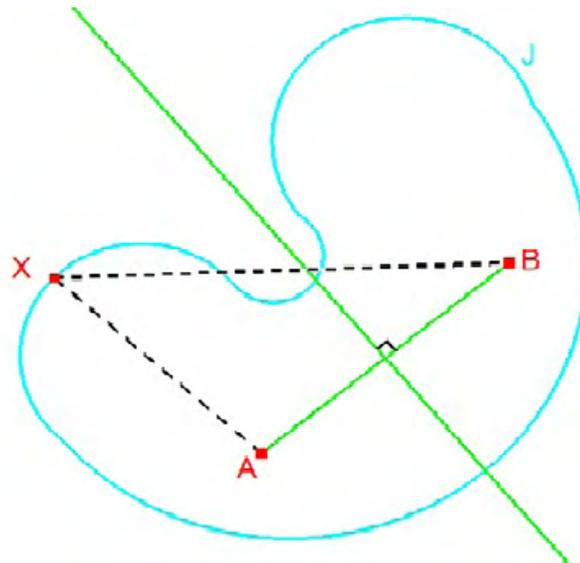


Figura 2.14: X al lado de A.

Y sí, para los puntos X sobre J que se encuentran del lado de B (Figura 2.15), se tiene que

$$\frac{d(X, B)}{d(X, A)} > 1$$

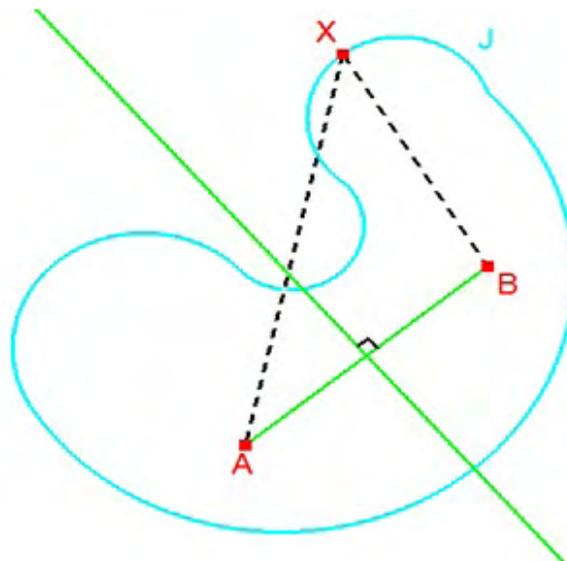


Figura 2.15: X al lado de B.

Así, la función

$$\begin{aligned} f : J &\longrightarrow (0, \infty) \\ X &\longrightarrow \frac{d(X, A)}{d(X, B)} \end{aligned}$$

permite identificar que puntos sobre la curva se encuentran relativamente más cerca de A o de B . En el espacio euclidiano, esta función es continua, positiva y con dominio compacto. Por lo tanto, f alcanza su valor máximo y mínimo en J .

Se define la siguiente función

$$M(A, B) = \max \left\{ \frac{d(X, A)}{d(X, B)} : X \in J \right\}$$

Sí $A = B$, entonces $M(A, B) = 1$, y si $A \neq B$, entonces $M(A, B) > 1$. En general $M(A, B) \neq M(B, A)$. Así que r no puede ser la métrica que se busca, por lo tanto para lograr arreglarla se debe tener en cuenta lo siguiente:

$$\text{Ln}M(A, B) = 0 \quad \text{si} \quad A = B. \quad (2.2.1)$$

$$\text{Ln}M(B, A) = 0 \quad \text{si} \quad B = A. \quad (2.2.2)$$

Sumando (2,2,1) y (2,2,2) se tiene que

$$\text{Ln}M(A, B) + \text{Ln}M(B, A) = 0$$

y para la simetría se obtiene la siguiente expresión

$$\text{Ln}M(A, B) + \text{Ln}M(B, A) = \text{Ln}[M(A, B)M(B, A)]$$

Definición 3. Sea J una curva de Jordan en el plano euclidiano; la métrica de Barbilian se define como

$$d(A, B) = \text{Ln}[M(A, B)M(B, A)]$$

para A y B dos puntos cualesquiera al interior de J .

Teorema 6. La $d(A, B)$ es una métrica.

Demostración:

1) $d(A, B) \geq 0$.

$$M(A, B) \geq \frac{d(X, A)}{d(X, B)} \quad \forall X \in J \quad (2.2.3)$$

$$M(B, A) \geq \frac{d(X, B)}{d(X, A)} \quad \forall X \in J \quad (2.2.4)$$

Multiplicando (1,2,3) con (2,2,4) se tiene

$$M(A, B)M(B, A) \geq \frac{d(X, A)}{d(X, B)} \frac{d(X, B)}{d(X, A)} \geq 1$$

Tomando el logaritmo a ambos lados se obtiene que $d(A, B) \geq 0$.

2) $d(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$.

\Rightarrow) Suponga que $d(A, B) = 0$, entonces por definición tenemos que

$$\text{Ln}[M(A, B)M(B, A)] = 0$$

$$M(A, B)M(B, A) = 1$$

Pero sabemos que

$$M(A, B) \geq 1 \quad \text{y} \quad M(B, A) \geq 1$$

por lo tanto, para que se cumpla la igualdad $A = B$.

\Leftarrow) Si $A = B$ entonces $M(A, B) = 1$ y $M(B, A) = 1$, luego

$$M(A, B)M(B, A) = 1$$

$$\text{Ln}[M(A, B)M(B, A)] = 0$$

y por definición $d(A, B) = 0$.

3) $d(A, B) = d(B, A)$.

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \text{Ln}[M(A, B)M(B, A)] \\ &= \text{Ln}M(A, B) + \text{Ln}M(B, A) \\ &= \text{Ln}M(B, A) + \text{Ln}M(A, B) \\ &= \text{Ln}[M(B, A)M(A, B)] \\ &= d(B, A) \end{aligned}$$

$$4) d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$$

$$M(A, B) \geq \frac{d(X, A)}{d(X, B)} \quad \forall X \in J \quad (2.2.5)$$

$$M(B, C) \geq \frac{d(X, B)}{d(X, C)} \quad \forall X \in J \quad (2.2.6)$$

multiplicando (2,2,5) y (2,2,6) tenemos

$$M(A, B)M(B, C) \geq \frac{d(X, A)}{d(X, B)} \frac{d(X, B)}{d(X, C)}$$

$$M(A, B)M(B, C) \geq \frac{d(X, A)}{d(X, C)}$$

lo que implica que

$$M(A, B)M(B, C) \geq M(A, C) \quad (2.2.7)$$

de manera similar

$$M(B, A)M(C, B) \geq M(C, A) \quad (2.2.8)$$

multiplicando (2,2,7) y (2,2,8) obtenemos

$$M(A, B)M(B, C)M(B, A)M(C, B) \geq M(A, C)M(C, A)$$

organizando los términos

$$M(A, B)M(B, A)M(B, C)M(C, B) \geq M(A, C)M(C, A)$$

tomando logaritmo queda

$$d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C).$$

En el plano euclidiano la desigualdad triangular se transforma en igualdad precisamente cuando los puntos están alineados, es decir, cuando la recta hiperbólica de mínima longitud pasa por ellos. Cabe preguntarse entonces cómo es la colinealidad en el sentido de Barbilian.

Dado que existe un punto $P^* \in J$, no necesariamente único, que es el más cercano relativamente a B que a A , se puede escribir

$$M(A, B) = \frac{d(P^*, A)}{d(P^*, B)} \quad (2.2.9)$$

mientras que existe $Q^* \in J$, el punto más cercano relativamente de A que de B , por lo que

$$M(B, A) = \frac{d(Q^*, B)}{d(Q^*, A)} \quad (2.2.10)$$

Si P^* y Q^* son los puntos relativamente más cercanos a B y a A respectivamente, entonces multiplicando las ecuaciones (2,2,9) y (2,2,10) y sacando logaritmo tenemos que

$$d(A, B) = \ln \left[\frac{d(P^*, A)d(Q^*, B)}{d(P^*, B)d(Q^*, A)} \right].$$

2.2.3. Postulado III

Es posible trazar una circunferencia dados un centro y un radio. Para la validez de éste postulado dentro del disco de Poincaré se construirá la circunferencia hiperbólica que se define como: el lugar de los puntos cuya distancia hiperbólica a un punto fijo llamado centro es constante, que es igual como en el caso de la circunferencia euclidiana.

Construcción 2.2.1 (circunferencia hiperbólica). Primero se construirá una circunferencia hiperbólica dado dos puntos A y B , en el interior del disco, donde el centro de la circunferencia será en A y que pasa por B .

1. Se traza la recta hiperbólica que pase por A y B .
2. Se traza un rayo que inicie en el origen O del disco y pase por A (el centro de la circunferencia hiperbólica estará sobre este rayo).
3. Trazamos una recta tangente a la recta hiperbólica en el punto B .
4. El punto Q es la intersección de la recta tangente en el punto B con el rayo \overrightarrow{OA} .
5. Se traza la circunferencia con centro en Q y que pase por B , es la circunferencia hiperbólica buscada.

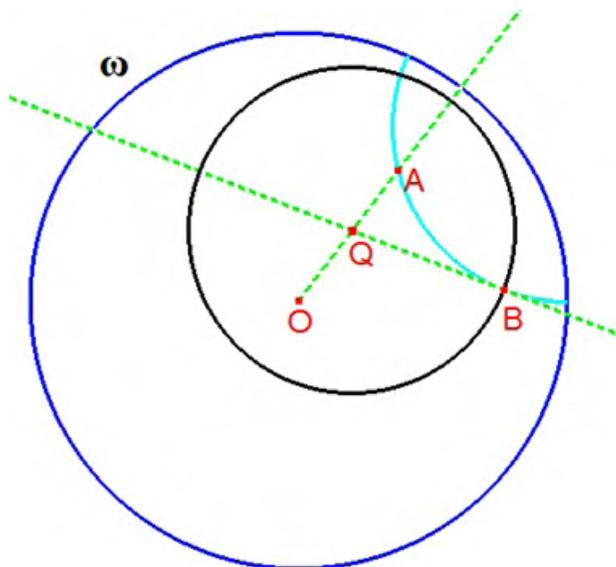


Figura 2.16: Circunferencia hiperbólica en el disco de Poincaré.

Toda recta hiperbólica que pase por A es ortogonal a la circunferencia hiperbólica y similarmente el rayo \overrightarrow{OA} . Si el centro de la circunferencia hiperbólica está en el origen del disco, es nada más que una circunferencia euclidiana.

En [Bennett, 2005] se asegura que una circunferencia hiperbólica tiene la misma forma de una circunferencia euclidiana, sin embargo el centro euclidiano de esa circunferencia no coincide con su centro hiperbólico. En lo que sigue, se propone determinar el centro hiperbólico de una circunferencia, y determinar que tan distante está de su centro euclidiano.

Se planteará un disco de Poincaré sobre el plano cartesiano, donde se definirá una circunferencia hiperbólica, y con la métrica de Barbilian se hallará su centro hiperbólico C . Para ello se tomará que los puntos A y B de la circunferencia estén sobre un diámetro de ésta. Para facilitar los cálculos, se tendrá como referente el plano cartesiano, y el disco de Poincaré con centro en el origen y radio igual a 7 (se tomará ese radio y se asumirá que las coordenadas de A y B sean enteras), todos los puntos dados tendrán su valor en la abscisa y el valor de la ordenada será 0.

Se tomará los puntos E , A , C , B y F con las coordenadas $(-7, 0)$, $(3, 0)$, $(x, 0)$, $(6, 0)$ y $(7, 0)$ respectivamente. Asumiendo que C es el centro hiperbólico de la circunferencia, el propósito es hallar su coordenada $(x, 0)$ y verificar que tan desplazado está del centro euclidiano C' . Luego

$d(A, C) = d(C, B)$ y por definición de métrica hiperbólica se tiene que:

$$\ln \left(\frac{\overline{AF} \cdot \overline{CE}}{\overline{CF} \cdot \overline{AE}} \right) = \ln \left(\frac{\overline{CF} \cdot \overline{BE}}{\overline{BF} \cdot \overline{CE}} \right)$$

$$\frac{\overline{AF} \cdot \overline{CE}}{\overline{CF} \cdot \overline{AE}} = \frac{\overline{CF} \cdot \overline{BE}}{\overline{BF} \cdot \overline{CE}}$$

Para hallar el centro hiperbólico $(x, 0)$ de la circunferencia, se utilizará la definición de distancia euclidiana $\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, donde P tiene coordenadas (x_1, y_1) y Q tiene coordenadas (x_2, y_2) , así se tiene:

$$\frac{\sqrt{(7-3)^2} \cdot \sqrt{(-7-x)^2}}{\sqrt{(7-x)^2} \cdot \sqrt{(-7-3)^2}} = \frac{\sqrt{(7-x)^2} \cdot \sqrt{(7+6)^2}}{\sqrt{(7-6)^2} \cdot \sqrt{(7+x)^2}}$$

$$\frac{4}{|7-x|} \cdot \frac{|7+x|}{10} = \frac{|7-x|}{1} \cdot \frac{13}{|7+x|}$$

$$4(7+x)^2 = 130(7-x)^2$$

$$2(49 + 14x + x^2) = 65(49 - 14x + x^2)$$

$$98 + 28x + 2x^2 = 3185 - 910x + 65x^2$$

organizando y operando términos semejantes queda la siguiente ecuación de segundo grado igualada a cero

$$63x^2 - 938x + 3087 = 0$$

las soluciones aproximadas de ésta ecuación son:

$$x_1 \approx 4,9107$$

$$x_2 \approx 9,9781$$

luego, el centro hiperbólico es $(x_1, 0)$ y el centro euclidiano es $(4,5, 0)$, para ver que tan desplazado está el centro hiperbólico del euclidiano. (Ver figura 2.17)

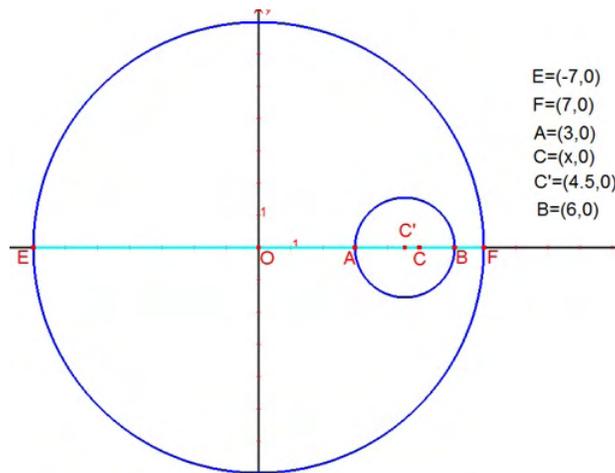


Figura 2.17: Circunferencia hiperbólica en el plano cartesiano.

Ahora se construirá la mediatriz hiperbólica (que es similarmente a construir la mediatriz euclidiana) para posteriormente construir una circunferencia hiperbólica dado un radio y un centro.

Construcción 2.2.2 (mediatriz hiperbólica). Dado dos puntos A y B en el interior del disco, construir la mediatriz hiperbólica al segmento hiperbólico \widehat{AB} .

1. Se traza una recta hiperbólica que pase por A y B .
2. Trazamos la circunferencia c_1 con centro en A y que pase por B y otra circunferencia c_2 con centro en B y que pase por A .
3. Hallamos los puntos de intersección C y D de las circunferencias c_1 y c_2 .
4. Finalmente trazamos la recta hiperbólica que pase por C y D que es la mediatriz hiperbólica buscada.

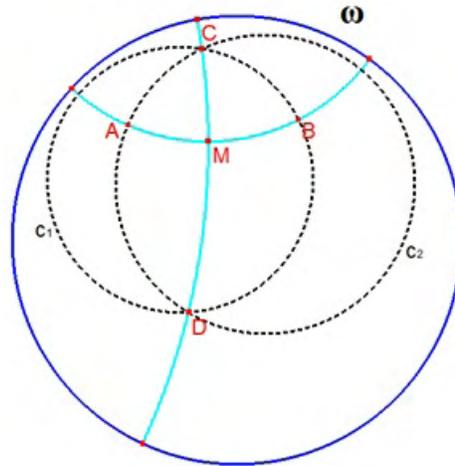


Figura 2.18: Mediatriz hiperbólica en el disco de Poincaré.

Construcción 2.2.3 (Circunferencia dado un radio). Dado los puntos A , B y C en el interior del disco, construir una circunferencia hiperbólica con centro en A y radio congruente al segmento hiperbólico \widehat{BC} .

1. Dados los puntos A , B y C en Δ^2 , trazamos la mediatriz hiperbólica del segmento hiperbólico \widehat{AB} .
2. Encontramos C' que es el inverso de C respecto a la mediatriz hiperbólica.
3. Trazamos la circunferencia hiperbólica con centro en A y que pase por C' .

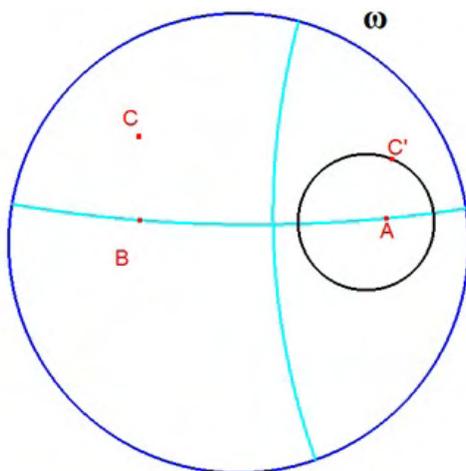


Figura 2.19: Circunferencia hiperbólica con radio congruente a un segmento hiperbólico.

De la **figura 2.19** se quiere ver que relación puede tener C' con C respecto a un punto cualquiera sobre la mediatriz o cualquier recta hiperbólica que los genere, para esto se planteará una proposición donde se pueda ver más detalladamente como se pueden relacionar dos puntos inversos en el interior del disco. Se utilizará [1] de guía.

Proposición 1. Considere $A, A' \in \Delta^2$ dos puntos simétricos en relación con una recta hiperbólica l_h , entonces para todo punto M sobre la recta hiperbólica l_h , $d(A, M) = d(M, A')$.

Demostración: Dados dos puntos $A, A' \in \Delta^2$ y una recta hiperbólica $l_h \in \Delta^2$, donde $M \in l_h$, se va a probar que:

$$d(A, M) = d(M, A')$$

donde A' es el inverso de A respecto a l_h en el interior del disco, para probar esto, vamos a considerar dos casos:

Caso 1. La recta hiperbólica l_h es un diámetro del disco.

En Δ^2 sea A' el inverso de A respecto a l_h donde l_h pasa por O que es el origen del disco ω . Sea M un punto cualquiera sobre l_h . Se determina la recta hiperbólica que pasa por A y M , y otra que pase por M y A' , sea B y C los puntos de intersección de \widehat{AM} con ω , B' y C' los puntos de intersección de $\widehat{MA'}$ con ω . Se puede ver que la de M sobre l_h es el mismo M , así como l_h pasa por O entonces l_h divide a ω en dos semi-circunferencias donde una de ellas es simétricamente igual a

la otra (pasa igual que en el caso euclidiano). Por lo que B y C son simétricos a B' y C' (ya que \widehat{AM} pasa por tres puntos simétricos a tres puntos de $\widehat{MA'}$), respectivamente, en relación a l_h . Por lo tanto se puede tomar las siguientes relaciones:

$$AC = A'C' \quad (2.2.11)$$

$$AB = A'B' \quad (2.2.12)$$

$$MB = MB' \quad (2.2.13)$$

$$MC = MC' \quad (2.2.14)$$

Multiplicando (2,2,11) y (2,2,13) se tiene que

$$AC \cdot MB = MB' \cdot A'C' \quad (2.2.15)$$

Multiplicando (2,2,14) y (2,2,12) se tiene que

$$MC \cdot AB = A'B' \cdot MC' \quad (2.2.16)$$

Dividiendo (2,2,15) entre (2,2,16) queda

$$\frac{AC}{MC} \cdot \frac{MB}{AB} = \frac{MB'}{A'B'} \cdot \frac{A'C'}{MC'}$$

Tomando logaritmo y por definición queda

$$d(A, M) = d(M, A').$$

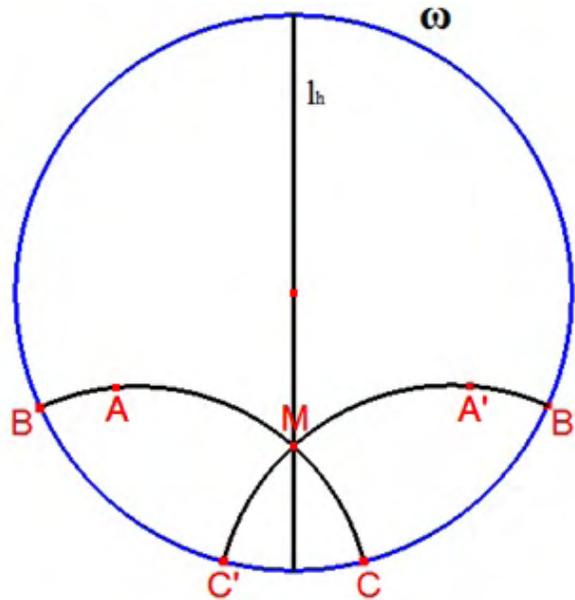


Figura 2.20: Inversión de un punto cuando la recta hiperbólica pasa por O .

Caso 2. La recta hiperbólica l_h no es un diámetro del disco.

En Δ^2 sea A' el inverso de A respecto a l_h , y sea M un punto arbitrario en l_h , se tiene que M' es el inverso de M respecto a ω , l_h divide a ω en dos arcos r y s , sean c_1 y c_2 las circunferencias que me determinan las rectas hiperbólicas \widehat{AM} y $\widehat{MA'}$ respectivamente en Δ^2 , B y C son los puntos de intersección de \widehat{AM} con ω y, B' y C' los puntos de intersección de $\widehat{MA'}$ con ω , ahora consideremos la circunferencia c_3 que me genera la recta hiperbólica l_h dentro del disco. El inverso de M respecto a l_h es el mismo M , el inverso de M respecto a ω es M' y como c_3 pasa por M , también pasa por M' (**Teorema 1**), luego el inverso de M' es el mismo M' respecto a c_3 y por hipótesis tenemos que A' es el inverso de A respecto a c_3 . Como c_1 pasa por A , M y M' , su inverso c'_1 pasará por los inversos de estos puntos A' , M y M' respectivamente. Como c_1 es una circunferencia que no pasa por el origen de la circunferencia de inversión c_3 , entonces c'_1 tampoco pasa por el origen de c_3 (**Teorema 2**). Luego como tres puntos determinan una única circunferencia, y como por A' , M y M' pasa c_2 , entonces $c'_1 = c_2$. Además como c_1 se intercepta con ω en los puntos B y C . Luego c'_1 y ω' inversos de c_1 y ω respectivamente, se interceptan en los puntos B^* y C^* inversos de B y C , entonces por el **Teorema 3** r y s son inversos respecto a c_3 ya que $c_3 \perp \omega$, luego $\omega' = \omega$ (porque ω es ortogonal a c_3), además c_1 y c_2 son inversos, y como c_2 se intercepta con ω en B' y C' , se tiene que $B^* = B'$ y $C^* = C'$.

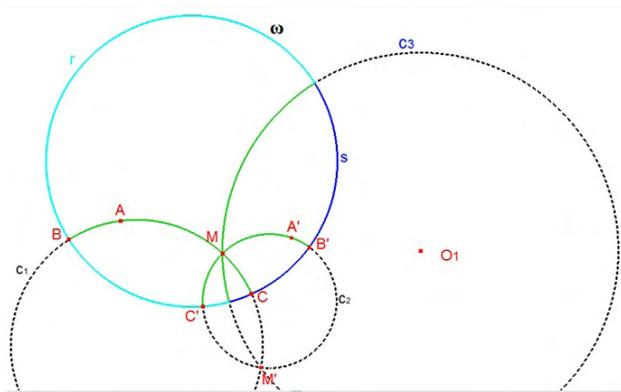


Figura 2.21: Inversión de un punto cuando la recta hiperbólica no pasa por O .

Consideremos el $\triangle AO_1C$ y $\triangle A'O_1C'$, estos triángulos son semejantes por el caso L-A-L, análogamente, probamos que el $\triangle AO_1B$ y $\triangle A'O_1B'$ son semejantes, así mismo para el $\triangle MO_1C$ con el $\triangle MO_1C'$ son semejantes y por último, el $\triangle MO_1B$ y el $\triangle MO_1B'$ son semejantes.

Así por la semejanza de los $\triangle MO_1C$ y $\triangle MO_1C'$ se tiene

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}} = \frac{\overline{MO_1}}{\overline{C'O_1}} \Rightarrow \overline{MO_1} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}} \cdot \overline{C'O_1} \quad (2.2.17)$$

de los $\triangle AO_1C$ y $\triangle A'O_1C'$ se tiene

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} = \frac{\overline{O_1A}}{\overline{C'O_1}} \Rightarrow \overline{C'O_1} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} \cdot \overline{O_1A} \quad (2.2.18)$$

Multiplicando (2.2.17) con (2.2.18) queda

$$\overline{MO_1} \cdot \overline{C'O_1} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}} \cdot \overline{C'O_1} \cdot \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} \cdot \overline{O_1A} \quad (2.2.19)$$

$$\frac{\overline{MO_1}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}} \cdot \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} \quad (2.2.20)$$

por otro lado, de los $\triangle MO_1B$ y $\triangle MO_1B'$ se tiene

$$\frac{\overline{MB'}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{MO_1}}{\overline{BO_1}} \Rightarrow \overline{MO_1} = \frac{\overline{MB'}}{\overline{MB}} \cdot \overline{BO_1} \quad (2.2.21)$$

Por último de los $\triangle AO_1B$ y $\triangle A'O_1B'$ se tiene

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{BO_1}} \Rightarrow \overline{BO_1} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \cdot \overline{O_1A'} \quad (2.2.22)$$

Multiplicando (2.2.21) con (2.2.22) queda

$$\overline{MO_1} \cdot \overline{BO_1} = \frac{\overline{MB'}}{\overline{MB}} \cdot \overline{BO_1} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \cdot \overline{O_1A'} \quad (2.2.23)$$

$$\frac{\overline{MO_1}}{\overline{O_1A'}} = \frac{\overline{MB'}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \quad (2.2.24)$$

como $\overline{O_1M}$ es el radio de la circunferencia c_3 , se tiene

$$\overline{O_1M}^2 = \overline{O_1A} \cdot \overline{O_1A'} \Rightarrow \frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_1A}} = \frac{\overline{O_1A'}}{\overline{O_1M}}$$

se sabe que

$$\frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_1A}} = \left(\frac{\overline{O_1M}}{\overline{O_1A'}} \right)^{-1}$$

luego de (2.2.20) y (2.2.24) se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}} \cdot \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} &= \left(\frac{\overline{MB'}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \right)^{-1} \\ \frac{\overline{MC}}{\overline{MC'}} \cdot \frac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}} &= \frac{\overline{MB}}{\overline{MB'}} \cdot \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \end{aligned}$$

acomodando la igualdad queda

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{MB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{MB'}}{\overline{A'B'}} \cdot \frac{\overline{A'C'}}{\overline{MC'}}$$

tomando logaritmo y por definición de métrica hiperbólica queda que

$$d(A, M) = d(M, A').$$

2.2.4. Postulado IV

Todos los ángulos rectos son iguales entre sí. En el modelo del Disco de Poincaré la medida de los ángulos hiperbólicos, en ese modelo, coincide con la medida del ángulo en el sentido euclidiano, obedeciendo así a todos los axiomas relativos a la medición. La siguiente definición muestra como están formados los ángulos en el interior del disco.

Definición 4. El ángulo entre dos rectas hiperbólicas concurrentes es la medida del ángulo entre las dos rectas euclidianas tangentes en el punto común de esas rectas hiperbólicas.

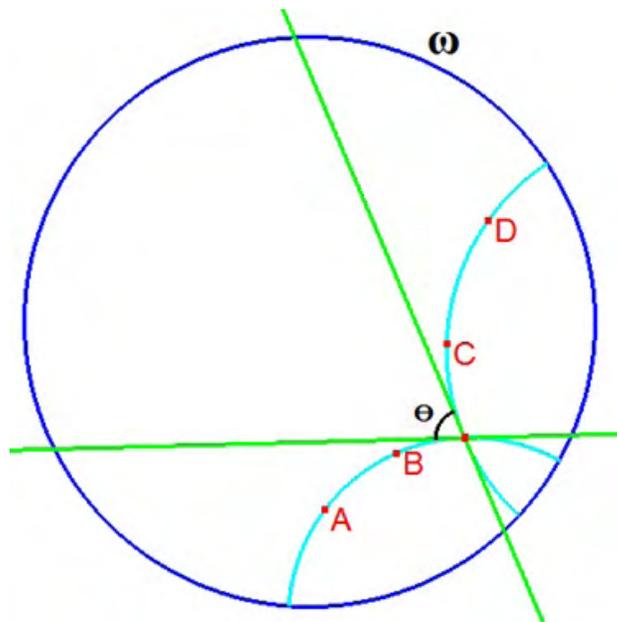


Figura 2.22: Ángulo entre dos rectas hiperbólicas concurrentes.

Para la validez del cuarto postulado de Euclides en el interior del disco de Poincaré, se tomará dos rectas hiperbólicas en el interior de éste, donde $\widehat{AP} \perp \widehat{PB}$ y además P es el punto de corte de

ambas rectas hiperbólicas, se definirán C, E y D, F que son los puntos de corte de \widehat{AP} y \widehat{PB} con ω respectivamente. Entonces se aplica una transformación euclidiana a las tangentes que se cortan en el punto P en el interior del disco y como estas transformaciones ya sea traslaciones, rotaciones, reflexiones etc, conservan rectas y ángulos el ángulo recto θ no va a cambiar en cuanto a su medida. Por lo que se trazarán las rectas hiperbólicas $\widehat{A'P}$ y $\widehat{PB'}$, como se hizo una transformación en el interior del disco $\widehat{AP} \cong \widehat{A'P}$ y $\widehat{PB} \cong \widehat{PB'}$, por lo tanto $\widehat{AP'} \perp \widehat{PB'}$. Así se puede verificar que los ángulos rectos en el interior del disco siguen siendo iguales cuando se aplica alguna transformación. (Ver figura 2.23)

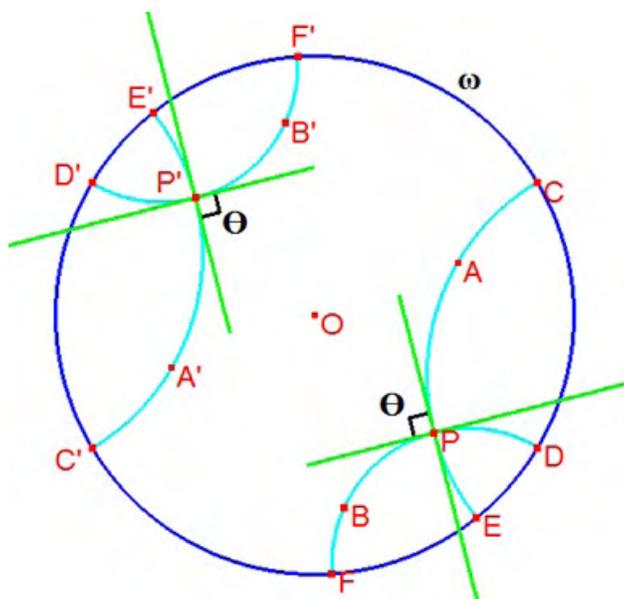


Figura 2.23: Rectas hiperbólicas perpendiculares en el disco de Poincaré.

2.2.5. Postulado hiperbólico

En la geometría euclidiana el quinto postulado como modernamente se lo conoce dice: Por un punto dado exterior a una recta sólo puede trazarse otra (única) recta paralela a ella. Pero cómo se dijo anteriormente la negación de este postulado (Dada una recta y un punto exterior a ella, por ese punto pasan al menos dos paralelas a la recta dada) es la que generó lo que hoy se conoce como **Geometría Hiperbólica**, por eso veremos como funciona éste en el interior del Disco de Poincaré.

En el modelo del disco de Poincaré se define las rectas paralelas de manera análoga al caso euclidiano, es decir, dos rectas son paralelas si no se cortan al prolongarlas indefinidamente. Se hará

la distinción entre rectas que se intersecan en la frontera del disco, las cuales se llamarán **paralelas** y rectas que no se intersecan para nada, se denotarán **ultraparalelas**. A continuación se observará en la parte superior del disco a las rectas hiperbólicas que son paralelas entre sí, donde se puede deducir que por un punto en la frontera pasan mas de una paralela en cada sentido de la recta y en la parte inferior del disco por el punto R mas de una ultraparalela las rectas hiperbólicas PQ .

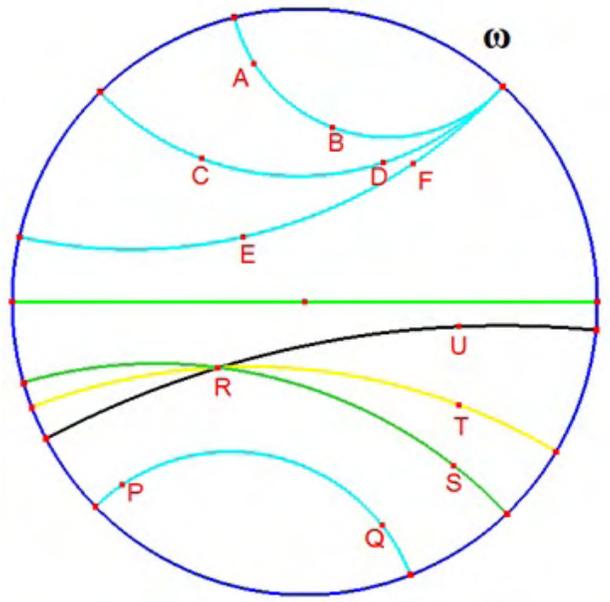


Figura 2.24: Paralelas y Ultraparalelas.

Capítulo 3

Transformada de Möbius y geometría hiperbólica

En el capítulo anterior a través de técnicas de la Geometría Euclidiana se ha explorado algunas propiedades del modelo del disco de Poincaré. Sin embargo, no es la única manera de abordar la geometría hiperbólica. El Modelo de Poincaré se puede estudiar analíticamente por medio de transformaciones de variable compleja. En este capítulo las imágenes propuestas son de mi autoría.

3.1. Transformaciones de Möbius

Existen funciones que van de \mathbb{C} en \mathbb{C} que preservan las circunferencias y las rectas. Además de que se puedan caracterizar las isometrías y trabajarlas con estructura de grupo. Tales transformaciones resultan ser las transformaciones de Möbius¹.

Las fuentes principales para el desarrollo de este capítulo son [Suarez, 2017] y [Rodríguez and Luque, 2008], donde el objetivo del presente capítulo es, por un lado, estudiar las principales propiedades de las transformaciones de Möbius, y describir aquellas transformaciones que preservan las rectas hiperbólicas y ángulos entre ellas. Se menciona también otro modelo donde se puede construir la geometría hiperbólica: el semiplano superior de Poincaré y se muestra que es equivalente al disco mostrando la transformación que cambia un modelo al otro, esto es, la transformación de Cayley. De esta manera, las propiedades válidas en el semiplano, lo serán también en el disco.

Definición 5. Los puntos del plano complejo junto con un punto que se denotará por ∞ forman el

¹En este trabajo de grado no se trabajarán las transformaciones de Möbius como estructura de grupo.

plano complejo ampliado denotado por \mathbb{C}_∞ ². Sobre el conjunto \mathbb{C}_∞ , se define las transformaciones de la forma:

$$T : \mathbb{C}_\infty \longrightarrow \mathbb{C}_\infty$$

$$z \longrightarrow w = T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ y además $ad - bc \neq 0$. Estas son llamadas Transformaciones de Möbius. Con la forma en que operamos con ∞ obtenemos que:

Si $c = 0$ entonces $T(\infty) = \infty$; si $c \neq 0$ entonces $T(-\frac{d}{c}) = \infty$ y $T(\infty) = \frac{a}{c}$.

Algunas transformaciones de Möbius en particular son:

- **Traslaciones.** Son transformaciones de la forma

$$L(z) = z + a \quad a \in \mathbb{C}$$

corresponden a un movimiento, que a cada punto del plano lo traslada por la trayectoria del vector determinado por a . Si la parte imaginaria de a es igual a cero ($Im(a) = 0$), entonces la traslación es paralela al eje real. Si la parte real de a es igual a cero ($Re(a) = 0$), la traslación es paralela al eje imaginario.

- **Rotaciones.** Son una transformación del tipo

$$R(z) = az \quad a \in \mathbb{C}$$

Si a está en coordenadas polares $a = e^{\alpha i}$ y si tenemos $w = ze^{\alpha i}$ en el plano w tendremos una rotación de los ejes de α radianes en sentido contrario de las manecillas del reloj que respetará la magnitud, es decir, sólo rotará los ejes.

- **Homotecias.** Sea la transformación

$$H(z) = bz, |b| > 0 \quad a \in \mathbb{C}$$

en coordenadas polares $b = ne^{\alpha i}$ y $z = me^{\theta i}$. Entonces, $w = (nm)e^{i(\alpha+\theta)}$. Tenemos una rotación del vector que representa a z por un ángulo $\phi = \alpha + \theta$. Pero además, vemos una homotecia de dicho vector, que aumenta o disminuye según su módulo $n = |b|$, sea mayor o menor que 1, respectivamente.

² \mathbb{C}_∞ , se denominará el plano complejo ampliado o compactificado.

- **Inversión.** Sea la transformación

$$I(z) = \frac{1}{z}$$

Esta transformación es una inversión con respecto a la circunferencia unidad, la cual hace que a todo punto en el exterior de dicha circunferencia le corresponda uno en su interior y viceversa, y los puntos sobre la circunferencia se corresponden a sí mismos.

La inversión puede escribirse como:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}z, \quad \text{donde } |z|^2 = z\bar{z}$$

Lo cual nos muestra que equivale a una inversión respecto a la circunferencia unidad y una reflexión axial respecto al eje real, donde de forma particular $T(0) = \infty$ y $T(\infty) = 0$.

Proposición 2. Dadas dos transformaciones de Möbius T_1 y T_2 , su composición $T_1 \circ T_2$ es también una transformación de Möbius.

Demostración:

Sea $T_1(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$ y $T_2(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ con $a'd' - b'c' \neq 0$ entonces:

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(z) &= T_2(T_1(z)) = \frac{a'(\frac{az+b}{cz+d}) + b'}{c'(\frac{az+b}{cz+d}) + d'} \\ &= \frac{a'az + a'b + b'cz + b'd}{c'az + c'b + d'cz + d'd} \\ &= \frac{(a'a + b'c)z + (a'b + b'd)}{(c'a + d'c)z + (c'b + d'd)} \end{aligned}$$

Ahora hay que probar que $(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) \neq 0$, luego

$$\begin{aligned} (a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'd)(c'a + d'c) &= a'ad'd + b'cc'b - a'bd'c - b'dc'a \\ &= ad(a'd' - b'c') - bc(a'd' - b'c') \\ &= (a'd' - b'c')(ad - bc) \end{aligned}$$

Como $ad - bc \neq 0$ y $a'd' - b'c' \neq 0$, entonces $(a'd' - b'c')(ad - bc) \neq 0$. Por lo tanto la composición de transformaciones de Möbius es una transformación de Möbius.

Proposición 3. Una transformación de Möbius con $c \neq 0$, puede representarse como la composición de traslaciones, una inversión, una rotación y homotecia.

Demostración: Si $c \neq 0$, entonces

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az + b}{cz + d} = \frac{c(az + b) + ad - ad}{c(cz + d)} = \frac{acz + ad + bc - ad}{c(cz + d)} \\ &= \frac{a(cz + d) + (bc - ad)}{c(cz + d)} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c} \cdot \frac{1}{cz + d} \end{aligned}$$

Esta expresión es la secuencia de las siguientes funciones:

$$f_1(z) = z + \frac{a}{c} \quad (\text{Traslación})$$

$$f_2(z) = \frac{bc - ad}{c^2} z \quad (\text{Rotación y Homotecia})$$

$$f_3(z) = \frac{1}{z} \quad (\text{Inversión})$$

$$f_4(z) = z + \frac{d}{c} \quad (\text{Traslación})$$

La composición que debe realizarse para llegar a la transformación de Möbius es:

$$T(z) = (f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4).$$

La inversa de la transformación de Möbius, es también una transformación de Möbius, y viene dada por:

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \Rightarrow z = \frac{-dw + b}{cw - a}$$

así

$$T^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}$$

3.2. Algunas expresiones para rectas y circunferencias en el plano complejo

En la geometría euclidiana, las traslaciones, rotaciones y homotecias transforman circunferencias en circunferencias y rectas en rectas. Además, las inversiones, según se cumplan ciertas condiciones, transforman circunferencias y rectas en circunferencias o rectas. En esta sección, se podrá ver como son transformadas estos objetos geométricos por las transformaciones de Möbius.

3.2.1. Ecuación de una recta en el plano complejo

La ecuación general de una recta en el plano cartesiano viene dada por $ax + by + c = 0$, donde a, b y $c \in \mathbb{R}$. Si $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ y $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, entonces

$$a \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + b \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + c = 0$$

operando y agrupando queda

$$\bar{z} \left(\frac{a + ib}{2} \right) + z \left(\frac{a - ib}{2} \right) + c = 0$$

luego

$$\bar{z}(a + ib) + z(a - ib) + 2c = 0$$

Sea $\alpha = (a + ib) \in \mathbb{C}$ y $2c \in \mathbb{R}$, entonces la ecuación de la recta es:

$$z\bar{\alpha} + \bar{z}\alpha + 2c = 0$$

3.2.2. Ecuación de una circunferencia en el plano complejo

La ecuación general de una recta en el plano cartesiano viene dada por $x^2 + y^2 + bx + cy + d = 0$, donde a, b, c y $d \in \mathbb{R}$. Si $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ y $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, además $x^2 + y^2 = |z|^2 = z\bar{z}$, entonces

$$a|z|^2 + b \left(\frac{z + \bar{z}}{2} \right) + c \left(\frac{z - \bar{z}}{2i} \right) + d = 0$$

operando y agrupando queda

$$az\bar{z} + z \left(\frac{b - ic}{2} \right) + \bar{z} \left(\frac{b + ic}{2} \right) + d = 0$$

Sea $\alpha = \left(\frac{b+ic}{2} \right) \in \mathbb{C}$ y $a = A, d = D \in \mathbb{R}$, Entonces la ecuación de la circunferencia es:

$$Az\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + D = 0$$

Estas caracterizaciones permite ver que las rectas y circunferencias euclidianas son ambas de la forma

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

Si $a \neq 0$, resulta una circunferencia euclidiana, y si $a = 0$, es una recta euclidiana. Si $d = 0$, obtenemos una circunferencia o una recta que pasa por el origen, caso contrario si $d \neq 0$.

Proposición 4. Las traslaciones, rotaciones y homotecias transforman rectas en rectas y circunferencias en circunferencias.

Demostración: Se probará sólo que las traslaciones, rotaciones y homotecias transforman rectas en rectas, ya que de manera similar se puede probar que estas transformaciones envían circunferencias en circunferencias.

1. Una recta se transforma mediante una traslación, en una recta.

La ecuación de una recta en forma compleja es $z\bar{\alpha} + \bar{z}\alpha + 2c = 0$ y sea la traslación $w = z + a \Rightarrow z = w - a$, de manera similar $\bar{z} = \bar{w} - \bar{a}$, y reemplazando z y \bar{z} en la ecuación de la recta, se tiene que

$$(w - a)\bar{\alpha} + (\bar{w} - \bar{a})\alpha + 2c = 0$$

operando y agrupando queda

$$w\bar{\alpha} + \bar{w}\alpha + 2[-\operatorname{Re}(a\alpha) + c] = 0$$

haciendo $C = -\operatorname{Re}(a\alpha) + c$, se tiene

$$w\bar{\alpha} + \bar{w}\alpha + 2C = 0$$

Por lo tanto las traslaciones envían rectas en rectas.

2. Una recta se transforma mediante rotación en otra recta.

La ecuación de una recta en forma compleja es $z\bar{\alpha} + \bar{z}\alpha + 2c = 0$ y sea la rotación $w = ze^{i\theta} \Rightarrow z = we^{-i\theta}$, de manera similar $\bar{z} = \overline{(we^{-i\theta})}$, y reemplazando z y \bar{z} en la ecuación de la recta, se tiene que

$$we^{-i\theta}\bar{\alpha} + \overline{(we^{-i\theta})}\alpha + 2c = 0$$

operando

$$w(\overline{\alpha e^{-i\theta}}) + \bar{w}(\alpha e^{i\theta}) + 2c|e^{i\theta}|^2 = 0$$

haciendo $\beta = \alpha e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ y $C = c|e^{i\theta}|^2 \in \mathbb{R}$

$$w\bar{\beta} + \bar{w}\beta + 2C = 0$$

Por lo tanto las rotaciones envían rectas en rectas.

3. Una recta se transforma mediante una homotecia en otra recta.

Se realiza de manera similar a la rotación ya que $w = bz$ donde $|b| > 1$, (en la rotación el módulo era igual a 1).

Proposición 5. Las transformaciones de Möbius envían rectas y circunferencias en rectas o circunferencias.

Demostración: Como la transformación de Möbius es la composición de dos traslaciones, una rotación-homotecia y una inversión y por la **Proposición 4.** se sabe que las traslaciones, rotaciones y homotecias envían rectas en rectas y circunferencias en circunferencias, sólo basta probar en que condiciones las inversiones envían rectas y circunferencias en rectas o circunferencias.

Las rectas y circunferencias euclidianas son ambas de la forma

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

En forma compleja esta ecuación se convierte en

$$Az\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + D = 0$$

considerando la transformación $w = I(z) = \frac{1}{z}$ y despejando z se tiene $z = \frac{1}{w}$, además $\bar{z} = \frac{1}{\bar{w}}$, reemplazando z y \bar{z} en la ecuación en forma compleja de la circunferencia se tiene

$$A\frac{1}{w}\frac{1}{\bar{w}} + \bar{\alpha}\frac{1}{w} + \alpha\frac{1}{\bar{w}} + D = 0$$

operando se obtiene

$$A + \bar{\alpha}\bar{w} + \alpha w + Dw\bar{w} = 0$$

luego $A + \bar{\alpha}\bar{w} + \alpha w + Dw\bar{w} = 0$ tiene la misma forma que la ecuación $Az\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + D = 0$. De aquí se deduce que:

1. Si $A \neq 0$ y $D \neq 0$, entonces es una circunferencia que no pasa por el origen, que es aplicada en una circunferencia que no pasa por el origen.
2. Si $A \neq 0$ y $D = 0$, tenemos una circunferencia que pasa por el origen, cuya imagen es una recta que no pasa por el origen.
3. Si $A = 0$ y $D \neq 0$, una recta que no pasa por el origen tiene por imagen una circunferencia que pasa por el origen.

4. Si $A = 0$ y $D = 0$, una recta que pasa por el origen es enviada en una recta que pasa por el origen.

Queda demostrado que la inversión envía rectas y circunferencias en rectas o circunferencias. De ahí se sigue que $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ envía rectas y circunferencias en rectas o circunferencias.

3.3. Ángulos entre curvas

Otro objeto de estudio que no cambia al aplicarse una transformación de Möbius es el ángulo determinado por dos curvas. Cuando una transformación conserva ángulos euclidianos es llamada una Transformación conforme. Por tanto se comprobará que las transformaciones de Möbius son conformes.

Definición 6. Si $f(t)$ y $g(t)$ son curvas diferenciables en \mathbb{C} que se intersecan en un punto $z_0 = f(t_0) = g(t_0)$, se llama ángulo formado por f y g en z_0 al ángulo determinado por los vectores tangentes a $f'(t_0)$ y $g'(t_0)$. Es decir, el ángulo θ de terminado por las curvas f y g en z_0 es

$$\theta = \arg \frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$$

Si se tiene una curva f tal que $f(t_0) = \infty$, ésta es diferenciable si la curva $\frac{1}{f(t)}$ evaluada en el punto t_0 lo es. De esta forma, se puede extender la noción de ángulo entre dos curvas si éstas se intersecan en el punto del infinito.

Proposición 6. Las transformaciones de Möbius preservan ángulos entre curvas.

Demostración: Sean dos curvas $f(t)$ y $g(t)$, que se cortan en el punto z_0 y forman un ángulo θ . Se quiere probar que dada una transformación de Möbius T , $T(f(t))$ y $T(g(t))$ forman el mismo ángulo θ en el punto $T(z_0)$. Para esto se quiere ver que si las traslaciones, rotaciones, homotecias y las inversiones conservan los ángulos, las transformaciones de Möbius también los conservan.

1. **Traslaciones:** Sea la traslación $L(z) = z + a$, donde a es una constante. Aplicando la traslación a las curvas f y g se obtiene

$$f(t) + a \quad \text{y} \quad g(t) + a$$

El ángulo determinado entre estas dos curvas viene dado por

$$\arg \frac{(g(t) + a)'}{(f(t) + a)'}$$

derivando se obtiene

$$\arg \frac{g'(t) + a'}{f'(t) + a'} = \arg \frac{g'(t)}{f'(t)} = \theta$$

- 2. Rotación y homotecia:** Sea la transformación $G(z) = az$, donde a es una constante. Aplicando esta transformación a f y g se obtiene

$$af(t) \quad \text{y} \quad ag(t)$$

El ángulo determinado entre estas dos curvas viene dado por

$$\arg \frac{(ag(t))'}{(af(t))'} = \arg \frac{ag'(t)}{af'(t)} = \arg \frac{g'(t)}{f'(t)} = \theta$$

- 3. Inversión:** Sea la inversión $I(z) = \frac{1}{z}$. Aplicando esta transformación a f y g se obtiene

$$\frac{1}{f(t)} \quad \text{y} \quad \frac{1}{g(t)}$$

El ángulo determinado entre estas dos curvas viene dado por

$$\arg \frac{\left(\frac{1}{g(t)}\right)'}{\left(\frac{1}{f(t)}\right)'} = \arg \frac{\frac{-g'(t)}{g^2(t)}}{\frac{-f'(t)}{f^2(t)}} = \arg \frac{g'(t)}{f'(t)} = \theta$$

Ya que en el punto de corte f y g tienen el mismo valor, así mismo para f^2 y g^2 .

3.4. La razón cruzada

Al aplicar una transformación de Möbius, ésta actúa de forma particular sobre ciertos puntos. Algunos de ellos son su propia imagen, algunos conservan proporciones particulares. En esta sección, se estudiará este tipo de propiedades de estas transformaciones.

Con respecto a los puntos fijos, las transformaciones de Möbius satisfacen:

Proposición 7. Una Transformación de Möbius tiene a lo sumo dos puntos fijos, a menos que sea la identidad

Demostración: Sea la transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

donde $a, b, c, y d \in \mathbb{C}$ y $ad - bc \neq 0$. Se observa que $T(\infty) = \infty$ sí y sólo si $c = 0$ (tiene un punto fijo en ∞). Sea z un punto fijo de $T(z)$ en \mathbb{C} esto implica que:

$$\frac{az + b}{cz + d} = z$$

operando y agrupando

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0$$

Ya que toda ecuación polinomial compleja tiene ceros y a lo más tiene tantos ceros como su grado, así la transformación de Möbius tiene dos y sólo dos puntos fijos, aunque puede aparecer un único punto fijo doble.

Definición 7. Sean z_1, z_2, z_3 y $z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ tales que $z_1 \neq z_2$ y $z_3 \neq z_4$. La razón

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z_4 - z_2}{z_4 - z_3}$$

es llamada la *razón cruzada* de z_1, z_2, z_3 y z_4 .

Teorema 7. Toda transformación de Möbius se puede expresar como la razón cruzada de una variable z y tres puntos dados.

Demostración: Dados tres puntos z_2, z_3 y $z_4 \in \mathbb{C}_\infty$ diferentes, una transformación de Möbius que a una tripla ordenada $\{z_2, z_3, z_4\}$ la transforme en la tripla ordenada $\{0, 1, \infty\}$ es:

$$S(z) = \left(\frac{z - z_2}{z - z_3} \right) \left(\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \right)$$

se denotará a S por $S(z) = [z, z_2, z_3, z_4]$, donde S esta determinada por $\{z_2, z_3, z_4\}$. Luego si

$$\begin{aligned} S(z) &= \left(\frac{z - z_2}{z - z_3} \right) \left(\frac{z_4 - z_3}{z_4 - z_2} \right) = \frac{az + b}{cz + d} \\ \frac{zz_4 - zz_3 - z_2z_4 + z_2z_3}{zz_4 - zz_2 - z_4z_3 + z_2z_3} &= \frac{az + b}{cz + d} \\ \frac{z(z_4 - z_3) + z_2(z_3 - z_4)}{z(z_4 - z_2) + z_3(z_2 - z_4)} &= \frac{az + b}{cz + d} \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} a &= (z_4 - z_3) \\ b &= z_2(z_3 - z_4) \\ c &= (z_4 - z_2) \\ d &= z_3(z_2 - z_4) \end{aligned}$$

Por lo tanto, toda transformación de Möbius se puede expresar de la forma $S(z) = [z, z_2, z_3, z_4]$. Además, su representación es única.

Teorema 8. Dadas dos ternas de puntos $\{z_1, z_2, z_3\}$ y $\{w_1, w_2, w_3\}$, existe una única transformación de Möbius T , tal que $T(z_i) = w_i$, para $i = 1, 2, 3$.

Demostración: Dados los puntos z_1, z_2, z_3 , sea la transformación de Möbius

$$H(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

Esta transformación aplica los puntos z_1, z_2 y z_3 en los puntos 0, 1 y ∞ , respectivamente. De la misma manera, se define una transformación de Möbius $J(z)$ que aplique los puntos w_1, w_2 y w_3 en los puntos 0, 1 y ∞ . Así, la transformación de Möbius $T(z) = (J^{-1} \circ H)(z)$ hace corresponder a los puntos z_1, z_2 y z_3 , los puntos w_1, w_2 y w_3 . Esta transformación $T(z)$ es única, ya que si existiera una transformación $S(z)$, tal que $T(z_i) = S(z_i)$, entonces la transformación de Möbius $(T \circ S^{-1})(z)$ tiene tres puntos fijos, luego es la transformación identidad, lo cual prueba la unicidad de $T(z)$.

En el **Teorema 8**, se puede ver que la razón cruzada de 4 puntos permite construir una transformación de Möbius tal que asigne a tres puntos dados, una imagen elegida.

Teorema 9. Las transformaciones de Möbius preservan las razones cruzadas, es decir, si T es una transformación de Möbius y z_1, z_2, z_3 y $z_4 \in \mathbb{C}_\infty$, tales que $z_1 \neq z_2$ y $z_3 \neq z_4$, entonces:

$$[z_1, z_2; z_3, z_4] = [T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)]$$

Demostración: Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, consideremos la razón cruzada $[T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)]$. Entonces

$$[T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)] = \frac{\frac{az_1+b}{cz_1+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}}{\frac{az_2+b}{cz_2+d} - \frac{az_3+b}{cz_3+d}} \frac{\frac{az_4+b}{cz_4+d} - \frac{az_2+b}{cz_2+d}}{\frac{az_4+b}{cz_4+d} - \frac{az_1+b}{cz_1+d}}$$

operando y agrupando

$$[T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)] = \frac{(z_1 - z_3)(ad - bc)(z_4 - z_2)(ad - bc)}{(z_1 - z_2)(ad - bc)(z_4 - z_3)(ad - bc)}$$

y como $ad - bc \neq 0$, se obtiene

$$[T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)] = [z_1, z_2; z_3, z_4].$$

3.5. Modelo del semiplano superior de Poincaré

Como se ha observado las transformaciones de Möbius poseen una gran riqueza geométrica. Sin embargo, los modelos en el plano complejo donde la geometría hiperbólica tiene cabida son determinados subconjuntos. Por lo cual es de particular interés caracterizar aquellas transformaciones de Möbius que preservan dichos conjuntos. Primeramente se describen las transformaciones que preservan otro modelo importante de la geometría hiperbólica: *el modelo del semiplano superior de Poincaré*.

Definición 8. Sea el plano complejo extendido \mathbb{C}_∞ . Este modelo consiste en todos los puntos de el semiplano superior del plano de coordenadas cartesianas (x, y) sin incluir los puntos del eje x . Algebraicamente se define el *modelo del semiplano superior de Poincaré* como

$$\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

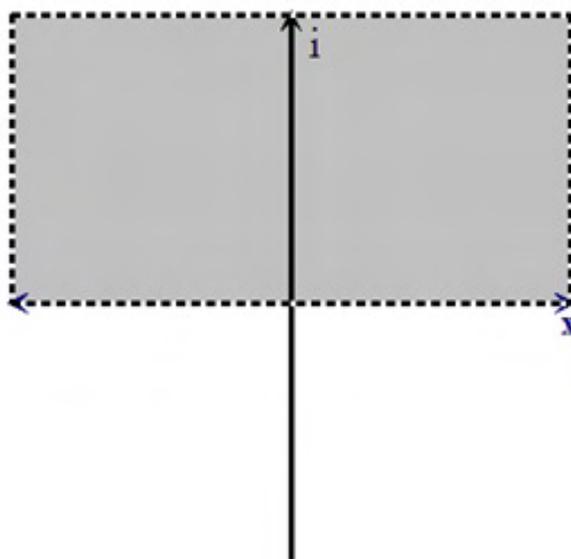


Figura 3.1: Modelo del semiplano superior de Poincaré.

Ahora, se estudiarán algunas de las propiedades invariantes de la geometría hiperbólica en el plano \mathbb{H} a través de las transformaciones de Möbius.

Teorema 10. Las transformaciones de Möbius que preservan el semiplano superior de Poincaré \mathbb{H}

son precisamente aquellas definidas por

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Donde a, b, c y $d \in \mathbb{R}$ y la condición que $ad - bc = 1$.

Demostración: Se debe probar que tomando cualquier punto $z \in \mathbb{H}$, también $T(z) \in \mathbb{H}$ (es decir preserven el semiplano superior). Para esto se considera la transformación

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Donde a, b, c y $d \in \mathbb{R}$ y la condición que $ad - bc = 1$. Aplicando T a un elemento $z = x + iy \in \mathbb{H}$, se tiene

$$\begin{aligned} w = T(x + iy) &= \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d} \\ &= \frac{(ax + b) + i(ay)}{(cx + d) + i(cy)} \\ &= \frac{[(ax + b) + i(ay)] [(cx + d) - i(cy)]}{[(cx + d) + i(cy)] [(cx + d) - i(cy)]} \\ &= \frac{[(ax + b) + i(ay)][(cx + d) - i(cy)]}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \end{aligned}$$

operando y agrupando se tiene

$$w = T(x + iy) = \frac{(ax + b)(cx + d) + (ay)(cy)}{(cx + d)^2 + (cy)^2} + i \frac{(ax + b)(-cy) + (cx + d)(ay)}{(cx + d)^2 + (cy)^2}$$

Para que $w = T(z) \in \mathbb{H}$, se debe verificar que $\text{Im}(w) > 0$. Así

$$\begin{aligned} \text{Im}(w) &= \frac{(ax + b)(-cy) + (cx + d)(ay)}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\ &= \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \\ &= \frac{(ad - bc)\text{Im}(z)}{(cx + d)^2 + (cy)^2} \end{aligned}$$

Luego $(cx+d)^2+(cy)^2 > 0$, y por la condición $ad-bc = 1$, además la parte $\text{Im}(w)$ depende de la parte $\text{Im}(z)$, y dado que $z \in \mathbb{H}$ entonces $w \in \mathbb{H}$, por lo tanto estas son las transformaciones de Möbius que preservan el semiplano superior de Poincaré. Además se debe probar que la recta delimitante del semiplano, también es preservado. Pero como se vio anteriormente las rectas euclidianas que

pasen por el origen de coordenadas son enviadas en rectas euclidianas que pasan por el origen, y ya que las transformaciones de Möbius son conformes, también es invariante la pendiente de esta recta, con lo que vemos que el eje real, es aplicado en el eje real a través de las transformaciones de Möbius.

3.5.1. La transformación de Möbius que envía el semiplano superior al disco de Poincaré

Ahora se quiere encontrar una transformación de Möbius $T(z)$ con $ad - bc = 1$, que envíe el *semiplano superior de Poincaré* al *disco de Poincaré*, o sea que transforme \mathbb{H} en Δ^2 . Puesto que una transformación de Möbius está determinada por 3 puntos y sus imágenes, basta mandar tres puntos distintos de la recta real extendida, a tres puntos distintos del círculo unitario. Una elección, adecuada es enviar los puntos $-1, 0, 1$ a $i, -1, -i$ respectivamente.

Sea $T(z)$ con esa propiedad, luego

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

evaluando en los puntos dados se tiene

$$T(-1) = \frac{-a + b}{-c + d} = i \quad \Rightarrow \quad -a + b = -ic + id$$

$$T(0) = \frac{b}{d} = -1 \quad \Rightarrow \quad b = -d$$

$$T(1) = \frac{a + b}{c + d} = -i \quad \Rightarrow \quad a + b = -ic - id$$

sumando $-a + b = -ic + id$ con $a + b = -ic - id$ se tiene

$$2b = -2ic \quad \Rightarrow \quad b = -ic$$

restando $-a + b = -ic + id$ con $a + b = -ic - id$ se tiene

$$-2a = 2id \quad \Rightarrow \quad a = -id$$

finalmente, si $d = i$ entonces $b = -i$, $a = 1$ y $c = 1$, por lo que la transformación buscada viene dada por:

$$T(z) = \frac{z - i}{z + i}$$

Así, por construcción T envía la recta real al disco unitario, y como $T(i) = 0$, por conexidad se sigue que

$$T(\mathbb{H}) = \Delta^2$$

Esta transformación se conoce con el nombre de Transformada de Cayley.

3.5.2. Rectas hiperbólicas en el semiplano superior de Poincaré

En el modelo del semiplano superior de Poincaré, existen dos tipos de rectas hiperbólicas (como en el caso de las rectas hiperbólicas en el disco de Poincaré), unas son semicírcunferencias euclidianas ortogonales al eje x cuyos centros están sobre éste y las semirrectas euclidianas perpendiculares también al eje real, a las cuales se las consideran como arcos de circunferencias de radio infinito. Se llamará rectas de tipo I a las semicírcunferencias euclidianas y rectas de tipo II a las semirrectas euclidianas. (Ver figura 3.2)

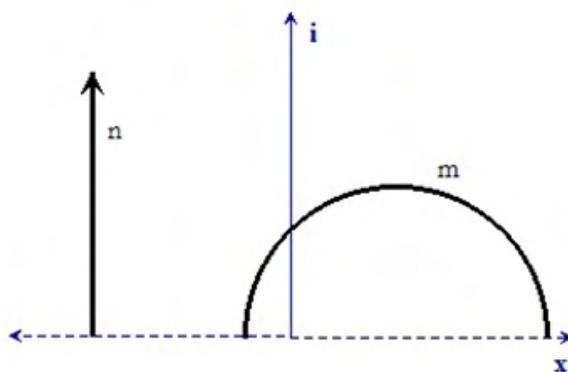


Figura 3.2: La recta m es de tipo I y la recta n de tipo II.

Las rectas hiperbólicas de tipo I se pueden expresar con números complejos en la forma $Az\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + D = 0$ con $A, \alpha, D \in \mathbb{C}$, y $z \in \mathbb{H}$, lo cual haciendo $z = x + iy$, equivale a; $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Por otro lado las rectas hiperbólicas de tipo II se caracterizan con números complejos en la forma $z + \bar{z} = B$, donde $B \in \mathbb{C}$ y $z \in \mathbb{H}$, lo cual haciendo $z = x + iy$, equivale a; $x = b$ donde $b \in \mathbb{R}$, una constante, con $y > 0$.

Las rectas hiperbólicas de tipo II, por como están definidas son perpendiculares al eje real x , para ver si las rectas hiperbólicas de tipo I son ortogonales al eje real, se debe hallar los puntos de corte con éste y evaluar en la primera derivada de la ecuación. La ecuación de la recta hiperbólica de tipo I equivale a la ecuación canónica de la circunferencia con centro sobre el eje x , luego

$$(x - h)^2 + y^2 = r^2$$

Despejando y

$$y = \sqrt{r^2 - (x - h)^2}, \quad \text{se toma la raíz positiva por el modelo}$$

luego se hace $y = 0$ para hallar los puntos de corte con el eje x . Se obtiene una ecuación de segundo grado de la forma

$$x^2 - 2xh + (h^2 - r^2)$$

Las soluciones de la ecuación son $x_1 = h + r$ y $x_2 = h - r$, por lo tanto la circunferencia se interseca con la recta real en los puntos $(h - r, 0)$ y $(h + r, 0)$, estos son llamados *los extremos de la recta hiperbólica*. La derivada de la ecuación anterior es:

$$y' = \frac{-x + h}{\sqrt{r^2 - (x - h)^2}}$$

que evaluando en los puntos de intersección de la recta hiperbólica con el borde del plano resulta en una indeterminación, así las rectas tangentes en esos puntos son perpendiculares al eje real. Por lo tanto se verifica que las rectas hiperbólicas de tipo I son ortogonales con el eje real x .

Con lo anterior se plantea la siguiente proposición.

Proposición 8. Sean A y B dos puntos de \mathbb{H} . Existe una única recta hiperbólica que pasa por A y B .

Demostración: Se toma dos casos para la demostración:

- Caso:** cuando $\text{Re}(A) = \text{Re}(B)$. Sea $A(a, b)$ y $B(a, c)$, con $b, c > 0$, entonces la única posibilidad es tomar la recta hiperbólica $r = \{z \in \mathbb{H} : \text{Re}(z) = \text{Re}(A)\}$.

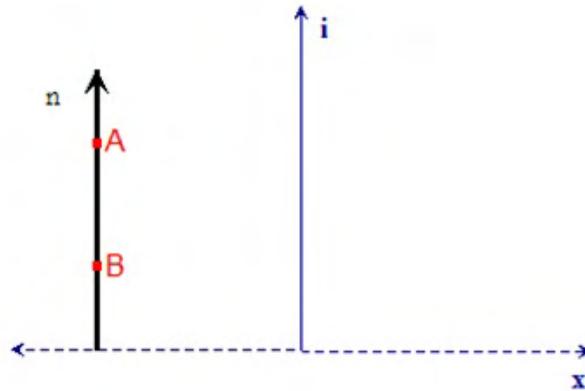


Figura 3.3: Recta hiperbólica cuando $\text{Re}(A) = \text{Re}(B)$.

- Caso:** cuando $\text{Re}(A) \neq \text{Re}(B)$.

Se traza el segmento euclidiano \overline{AB} , luego se halla el punto de intersección C de la mediatriz euclidiana de dicho con el eje real. La recta hiperbólica buscada es la semicircunferencia m de centro C y radio \overline{AC} .

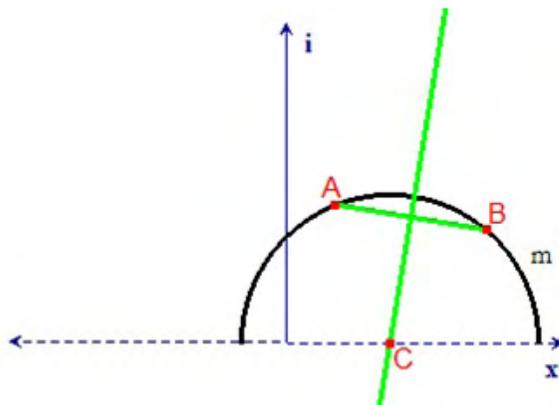


Figura 3.4: Recta hiperbólica cuando $\operatorname{Re}(A) \neq \operatorname{Re}(B)$.

Analíticamente también se puede encontrar la ecuación de la semicircunferencia m , tomando los puntos $A(a, b)$ y $B(c, d)$ donde $a, b, c, d \in \mathbb{H}$ y hallando cada una de las partes anteriormente mencionadas.

Proposición 9. Las rectas hiperbólicas de tipo I y II son invariantes respecto a las de transformaciones de Möbius.

Demostración: Se sigue de la proposición 5 y 6.

3.5.3. Ángulos hiperbólicos

Como anteriormente se habían definido los ángulos hiperbólicos son los ángulos euclidianos que forman las rectas tangentes cuando dos rectas hiperbólicas de tipo I se intersecan en un punto.

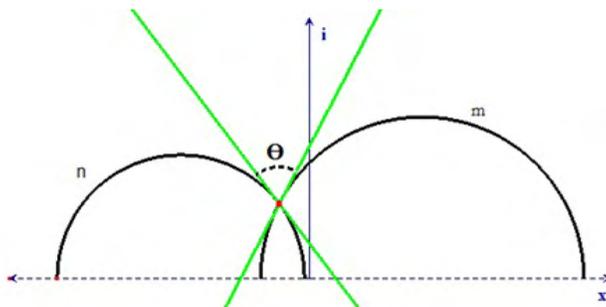


Figura 3.5: Ángulo entre dos rectas hiperbólicas m y n en el semiplano superior.

Y como se vio anteriormente que las transformaciones de Möbius son conformes, se puede concluir que preservan los ángulos en la geometría hiperbólica. Sin embargo se verá como se pueden expresar analíticamente los ángulos cuando dos rectas hiperbólicas de tipo I se intersectan en un punto.

Sean dos rectas hiperbólicas m y n cuyas ecuaciones son $(x - h)^2 + y^2 = r^2$ y $(x - k)^2 + y^2 = s^2$, respectivamente.

Sea $P(a, b)$ el punto de intersección de las rectas hiperbólicas m y n , entonces se hallará la pendiente de la recta tangente a m en el punto P , así

$$y = \sqrt{r^2 - (x - h)^2}$$

derivando se obtiene

$$y' = \frac{h - x}{\sqrt{r^2 - (x - h)^2}}$$

luego la pendiente de la recta tangente es

$$m_m = \frac{h - a}{\sqrt{r^2 - (a - h)^2}} = \frac{h - a}{b}$$

similarmente la pendiente de la recta tangente a la recta hiperbólica n en el punto P es

$$m_n = \frac{k - a}{\sqrt{s^2 - (a - k)^2}} = \frac{k - a}{b}$$

por lo tanto, el ángulo θ formado por las rectas hiperbólicas m y n viene dado por

$$\tan\theta = \frac{m_n - m_m}{1 + m_n \cdot m_m}$$

sustituyendo los valores de m_n y m_m se tiene

$$\tan\theta = \frac{\frac{k-a}{b} - \frac{h-a}{b}}{1 + \frac{k-a}{b} \cdot \frac{h-a}{b}}$$

operando y simplificando queda

$$\tan\theta = \frac{(k-h)b}{b^2 + (k-a)(h-a)}$$

3.5.4. Rectas paralelas en el semiplano superior de Poincaré

Con respecto a las rectas hiperbólicas que se han definido en este modelo, resulta de gran importancia, verificar que cumplen con la negación del quinto postulado de Euclides que admite mas de una paralela, que es justamente el que da principio a la geometría hiperbólica. Esta negación del quinto postulado se puede escribir de la siguiente manera:

Existen una recta l y un punto A que no le pertenece, tales que por A pasan al menos dos rectas que no cortan a l .

En el capítulo anterior se abordó esta negación del quinto postulado al interior del disco de Poincaré, de manera similar se pueden definir estas paralelas en el semiplano superior de Poincaré. Dos rectas son paralelas si no se cortan al prolongarlas indefinidamente. Se hará la distinción entre rectas que se intersecan en el eje real, las cuales se llamarán **paralelas** y rectas que no se intersecan para nada, se denotarán **ultraparalelas**.

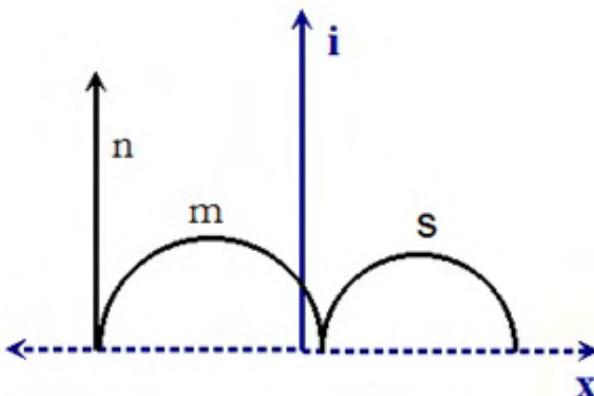


Figura 3.6: Rectas hiperbólicas paralelas.

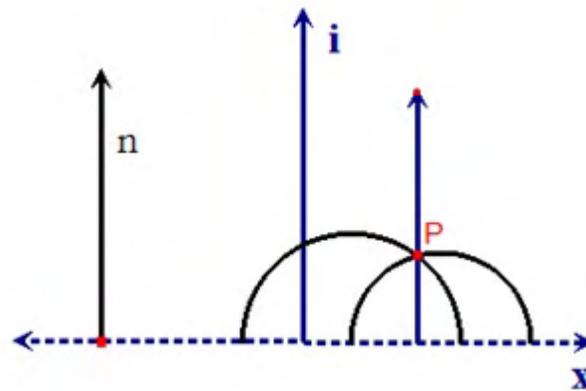


Figura 3.7: Rectas hiperbólicas ultraparalelas a la recta hiperbólica n que pasan por P .

Proposición 10. Las transformaciones de Möbius envían rectas hiperbólicas paralelas en rectas hiperbólicas paralelas.

Esta proposición permite afirmar que la relación de paralelismo es una propiedad geométrica en la geometría hiperbólica, puesto que ésta es preservada por dichas transformaciones.

Capítulo 4

Conclusiones y/o comentarios

Teniendo presente los objetivos propuestos en este trabajo, a continuación se presenta algunas conclusiones y/o algunos comentarios de los capítulos anteriores.

4.1. Capítulo 1

El interés de muchos de los grandes matemáticos durante los veinte siglos posteriores a la aparición de los *Elementos*, fue la solución al problema sobre la dependencia o independencia del quinto Postulado de Euclides con respecto a los otros cuatro, ya que estos intentos influyeron de forma importante para el desarrollo de la matemática de ese periodo. Con el descubrimiento de las geometrías no euclidianas, se descarta que una concepción de las matemáticas antiguas que concebían a los postulados como enunciados autoevidentes mientras que la visión contemporánea se aleja de esa postura y permite una axiomática consistente y que no genere contradicción.

4.2. Capítulo 2

Se exploró un modelo de la geometría no euclidiana, el disco de Poincaré, donde se construyó aspectos básicos de la geometría hiperbólica (que son los cuatro postulados de Euclides y el postulado hiperbólico) a través de la geometría euclidiana, además de presentar la métrica hiperbólica para explorar este modelo de manera analítica. Las construcciones básicas de la geometría hiperbólica dan pie para construir más objetos geométricos hiperbólicos como son triángulos, cuadriláteros y demás, sin embargo no es lo único para explorar, ya que dentro del disco se pueden aplicar ciertas transformaciones a los objetos de estudios sin que estos cambien.

4.3. Capítulo 3

Los elementos de la geometría hiperbólica que se han presentado hasta ahora constituyen razones suficientes para continuar explorando la distancia hiperbólica, las circunferencias, los triángulos y la trigonometría hiperbólica utilizando las transformaciones de Mobius y en particular la construcción de objetos más complejos a partir de los triángulos y circunferencias hiperbólicos como el estudio de su longitud y área, así como para la formulación y prueba de proposiciones y teoremas relativos a los objetos de esta geometría. Sin embargo, estos aspectos se hallan por fuera de los objetivos de este trabajo de grado, ya que el objetivo era proporcionar los elementos básicos para desarrollar la geometría hiperbólica dentro de un nuevo modelo.

Bibliografía

- [Bennett, 2005] Bennett, A. G. (2005). *Hyperbolic Geometry - Circles*. Recuperado de: <https://www.maa.org/press/periodicals/loci/joma/hyperbolic-geometry-circles>.
- [Bonola, 1923] Bonola, R. (1923). *Geometrías No Euclidianas*. Calpe. Traducción del italiano por Luis Gutiérrez de Arroyo.
- [Chaves, 2001] Chaves, B. A. (2001). Versión crítica y comentada de la teoría de paralelas de Lobachevski en español. Tesis de pregrado, Universidad del Valle.
- [De Souza, 2014] De Souza, B. C. (2014). Geometria hiperbólica: Consistencia do modelo de Poincaré. Tesis de maestría, Universidad Federal Rural de Pernambuco, Recife, Pernambuco-Brasil.
- [Espitia, 2009] Espitia, C. (2009). La obra saccheriana en el surgimiento de las geometrías no euclidianas. Tesis de pregrado, Universidad de Nariño.
- [Euclides, 1999] Euclides (1999). *Elementos, traducción y notas de María Luisa Puertas Castaño*. Planeta de Agostini.
- [Goodman-Strauss, 2001] Goodman-Strauss, C. (2001). Compass and Straightedge in the Poincaré Disk. *The American Mathematical Monthly*, 108(1):38–49.
- [Gray, 1992] Gray, J. (1992). *Ideas de Espacio*. Mondadori España. Segunda edición.
- [Lobachevski, 1840] Lobachevski, N. (1840). *Geometrical researches on the theory of parallels*. Véase [Bonola, 1923]. traducción de G. B. Halsted.
- [Mendoza, 2011] Mendoza, R. D. (2011). Teselaciones en el disco de Poincaré. Tesis de pregrado, Universidad Veracruzana, Xalapa, Ver. México.
- [Mosquera and Insuasty, 2015] Mosquera, S. and Insuasty, E. (2015). *Geometría de Transformaciones*. Universidad de Nariño, Pasto, Colombia. (Inédito).

- [Rodríguez and Luque, 2008] Rodríguez, G. D. and Luque, A. C. (2008). La geometría de Lobachevski a partir del grupo de Möbius. *Memorias XVIII Encuentro de Geometría y VI encuentro de Aritmética*, Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional:405–437.
- [Rodríguez, 2012] Rodríguez, T. U. (2012). Herramientas hiperbólicas y proyectivas en geogebra. Tesis de maestría, Universidad de Cantabria, Santander-España.
- [Sánchez and Sigarreta, 2011] Sánchez, P. A. and Sigarreta, A. J. M. (2011). Estudio epistemológico de las geometrías no-euclidianas. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, 14(2):117–132.
- [Suarez, 2017] Suarez, M. (2017). De la trigonometría esférica a la trigonometría hiperbólica: aspectos del surgimiento de las geometrías no euclidianas. Tesis de pregrado. Universidad de Nariño, Pasto-Nariño.