

**ESTUDIO DE LOS ERRORES MÁS FRECUENTES REFERIDOS A LA
COMPRENSIÓN DE LA ARITMÉTICA Y EL USO INAPROPIADO DE FÓRMULAS O
REGLAS DE PROCEDIMIENTO AL INICIAR EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA
(ESTUDIO DE POLINOMIOS) QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO
OCTAVO DE LAS INSTITUCIONES EDUCATIVAS MUNICIPALES TÉCNICO
INDUSTRIAL, FRANCISCO DE LA VILLOTA Y CABRERA, DEL MUNICIPIO DE
PASTO**

**GERMÁN ALBERTO MESÍAS
ANDREA REVELO CEBALLOS**

**UNIVERSIDAD DE NARIÑO
FACULTAD DE EDUCACIÓN
SAN JUAN DE PASTO**

2016

**ESTUDIO DE LOS ERRORES MÁS FRECUENTES REFERIDOS A LA
COMPRENSIÓN DE LA ARITMÉTICA Y EL USO INAPROPIADO DE FÓRMULAS O
REGLAS DE PROCEDIMIENTO AL INICIAR EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA
(ESTUDIO DE POLINOMIOS) QUE PRESENTAN LOS ESTUDIANTES DEL GRADO
OCTAVO DE LAS INSTITUCIONES EDUCATIVAS MUNICIPALES TÉCNICO
INDUSTRIAL, FRANCISCO DE LA VILLOTA Y CABRERA, DEL MUNICIPIO DE
PASTO**

**GERMÁN ALBERTO MESÍAS
ANDREA REVELO CEBALLOS**

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:

Magister en Educación

Asesor:

Luis Felipe Martínez Patiño

Magister en Didáctica de las Matemáticas

UNIVERSIDAD DE NARIÑO

FACULTAD DE EDUCACIÓN

SAN JUAN DE PASTO

2016

NOTA DE RESPONSABILIDAD

Las ideas y conclusiones aportadas en este Trabajo de Grado son Responsabilidad de los autores.

Artículo 1 del Acuerdo No. 324 de octubre 11 de 1966, emanado por el Honorable Concejo Directivo de la Universidad de Nariño.

Nota de Aceptación:

Puntos: 86

Fecha de sustentación: 31 de Mayo de 2016

Magister. LUIS FELIPE MARTÍNEZ PATIÑO

Firma del Presidente del Jurado

Magister. FERNANDO SOTTO AGREDA

Firma del Jurado

Magister. NELSON JARAMILLO

Firma del Jurado

San Juan de Pasto, Mayo de 2016.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad de Nariño y la Facultad de Educación, por abrir estos espacios y oportunidades en la región, fomentando la investigación y el desarrollo.

Al Mg. LUIS FELIPE MARTÍNEZ PATIÑO por su invaluable acompañamiento, sus orientaciones y recomendaciones para llevar a feliz término este trabajo.

A los rectores, docentes y estudiantes de las instituciones Educativas que contribuyeron con el suministro de la valiosa información que sirvió como fundamento para la consolidación de este trabajo.

DEDICATORIA

A Dios, por sus bendiciones diarias en mi vida

A mi Hijo, Juan Felipe, por ser mi motivación constante y mayor bendición

A mi Esposo, Álvaro Alexander, por su paciencia, amor y apoyo incondicional

A mis Padres por ser ejemplo de amor, perseverancia y sacrificio.

A mi Familia por la unión, la complicidad y el respaldo para salir adelante.

Andrea Revelo C.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad de Nariño y la Facultad de Educación, por abrir estos espacios y oportunidades en la región, fomentando la investigación y el desarrollo.

Al Mg. LUIS FELIPE MARTÍNEZ PATIÑO por su invaluable acompañamiento, sus orientaciones y recomendaciones para llevar a feliz término este trabajo.

A los rectores, docentes y estudiantes de las instituciones Educativas que contribuyeron con el suministro de la valiosa información que sirvió como fundamento para la consolidación de este trabajo.

DEDICATORIA

A Dios, por su acompañamiento diario

A mi Esposa, NANCY GAMEZ por su paciencia, amor y cariño incondicional

A mis Hijos, German Roberto Nancy Catalina mi motivación para ser cada día mejor

German Mesías Sánchez

RESUMEN

Esta investigación se dirige tanto a las instituciones en estudio como a la sociedad académica Nariñense, es un aporte útil para las instituciones educativas en conjunto con su personal docente de apoyo, puesto que permite repensar los currículos, mejorar las prácticas de aula, buscar estrategias didácticas diseñadas para superar el error, y enriquecer el quehacer educativo a partir del descubrimiento de los aprendizajes mal adquiridos, los conceptos no elaborados, los automatismos defectuosos y los procesos incompletos en las acciones didácticas orientadas por los docentes del área de matemáticas.

ABSTRACT

This research is aimed at both institutions studied as academic society Nariñense , is a useful contribution to the educational institutions together with their teacher support , since it allows rethink curricula, improve classroom practices , seek teaching strategies designed to overcome the error, and enrich the educational work from the discovery of the misappropriated learning , concepts unprocessed defective and incomplete automatism in teaching activities targeted teachers in the area of mathematical processes.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	21
1. DESCRIPCIÓN ÁREA PROBLEMÁTICA.....	23
2. OBJETIVOS.....	36
2.1 Objetivo General	36
2.2 Objetivos Específicos.....	36
3. JUSTIFICACIÓN.....	37
4. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN	39
4.1 Antecedentes a nivel internacional.....	39
4.2 Antecedentes a nivel nacional.....	42
4.3 Antecedentes a Nivel Regional	43
5. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL	44
5.1 La epistemología Pos positivista y la concepción de error	44
5.2 El conocimiento matemático y la psicología cognitiva.....	46
5.3 El Constructivismo como aporte a la educación matemática.....	47
5.4 Pensamiento variacional.....	52
5.5 Errores en el aprendizaje del álgebra	54
5.5.1 <i>La comprensión de la aritmética por parte del estudiante</i>	55
5.5.2 <i>El uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos</i>	55
5.6 Las situaciones didácticas	56
5.7 Situación a-didáctica	57
6. MARCO CONTEXTUAL	58

6.1 Institución Educativa Municipal Técnico Industrial	58
6.2 Institución Educativa Municipal Francisco de la Villota	60
6.3 Institución Educativa Municipal Cabrera.....	62
7. MARCO LEGAL	65
8. METODOLOGÍA	71
8.1 Naturaleza del estudio	71
8.2 Contexto y participantes.....	71
8.3 Técnicas e instrumentos	72
8.3.1 Cuestionarios	72
8.3.2 Revisión de archivos: Planeación en matemáticas y cuadernos escolares	72
8.4 Diseño y desarrollo de la investigación	72
8.4.1 Etapas de la investigación	72
8.4.1.1 Etapa 1. Construcción y socialización del proyecto:	73
8.4.1.2 Etapa 2. Construcción de instrumentos:	75
8.4.1.3 Etapa 3. Recolección de información:	88
8.4.1.4 Etapa 4. Sistematización, análisis e interpretación:	91
9. ANALISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS.....	92
9.1 Análisis e interpretación de los contenidos de álgebra propuestos y cuadernos del grado octavo en las instituciones educativas.....	92
9.2 Análisis de contenidos de álgebra propuestos para grado octavo	92
9.3 Análisis cuadernos de álgebra grado octavo.	100
9.4 Errores debidos a la comprensión en la aritmética.....	106
9.5 Análisis de los resultados	111
9.5.1 Errores debidos a la comprensión en la aritmética.....	111

9.6 Errores debido al uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento	127
9.7. Análisis de los resultados uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento	134
9.8 Clasificación adicional	149
9.8.1 Errores de interpretación.....	149
9.8.2 Errores semióticos	150
9.8.3 Errores conceptuales	152
9.8.4 Errores procedimentales.....	154
9.8.5 Errores que sorprenden “errores eclécticos”	156
10. PROPUESTA: ESTRATEGIA SITUACIONES DIDÁCTICAS	161
11. CONCLUSIONES	163
12. RECOMENDACIONES	170
BIBLIOGRAFÍA.....	174

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Porcentaje de población estudiantil por institución por debajo del nivel satisfactorio.....	26
Tabla 2. Niveles Prueba Saber grado Noveno.....	28
Tabla 3. Relación de Número de Estudiantes por institución	71
Tabla 4. Etapas y fases de la investigación	73
Tabla 5. Relación de cuestionarios y datos de validación.	79
Tabla 6. Promedio tiempo prueba piloto.	82
Tabla 7. Análisis comparativo de documentos de planeación por instituciones.	94
Tabla 8. Verticalidad estándares del pensamiento variacional, de grados 1°- 9°.....	100

LISTA DE ESQUEMAS

	Pág.
Esquema 1. El Error en el Contexto de la Educación Matemática	48
Esquema 2. Aspectos Asociados al Error:	51
Esquema 3. Variables Intervinientes en el Estudio del Error	52
Esquema 4. Subcategorías de análisis cuestionario 3	106
Esquema 5. Subcategorías de análisis cuestionario 4	128

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Comparativo puntaje promedios Técnico Industrial y otros.....	29
Figura 2. Comparativo puntaje promedios Técnico Industrial y otros teniendo en cuenta Nivel Socio-económico (NSE).....	30
Figura 3. Comparativo porcentaje de estudiantes según niveles de desempeño, IEM Francisco de la Villota y otros.	31
Figura 4. Comparativo porcentaje de estudiantes según niveles de desempeño, IEM Francisco de la Villota y otros teniendo en cuenta Nivel Socio-económico (NSE). 32	32
Figura 5. Competencias evaluadas en matemáticas, IEM Cabrera, grado noveno	33
Figura 6. Componentes evaluados en matemáticas, IEM Cabrera, grado noveno	33
Figura 7. El error en el contexto de la educación matemática.....	44
Figura 8. Planeación I.E.M. Técnico Industrial.....	97
Figura 9. Planeación I.E.M. Cabrera	98
Figura 10. Planeación I.E.M. Francisco De la Villota	98
Figura 11. Cuaderno IEM. Cabrera, conjuntos numéricos.....	101
Figura 12. Cuaderno IEM. Cabrera, lenguaje álgebraico.....	102
Figura 13. Cuaderno IEM. Cabrera, identificación de expresiones algebraicas.	102
Figura 14. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, operaciones con polinomios.	103
Figura 15. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, lenguaje álgebraico.	103
Figura 16. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, actividades.	104
Figura 17. Cuaderno IEM. Técnico Industrial, conjuntos numéricos.	105
Figura 18. Desarrollo No. 1	113

Figura 19.	Desarrollo No. 2.....	113
Figura 20.	Desarrollo No. 3.....	114
Figura 21.	Desarrollo No. 4.....	114
Figura 22 y 23.	Desarrollo No. 5 y 6.....	116
Figura 24.	Desarrollo No. 7.....	116
Figura 25.	Desarrollo No. 8.....	116
Figura 26.	Desarrollo No. 9.....	118
Figura 27.	Desarrollo No. 10.....	118
Figura 28.	Desarrollo No. 11.....	119
Figura 29.	Desarrollo No. 4.....	123
Figura 30.	Desarrollo No. 13.....	124
Figura 31.	Desarrollo No.1 4.....	125
Figura 32.	Desarrollo No. 15.....	126

LISTA DE GRAFICAS

	Pág.
Grafica 1. Resultados Pruebas Saber 2009	26
Grafica 2. Resultado Contexto No. 1	112
Grafica 3. Resultado Contexto No. 2	115
Grafica 4. Resultado Contexto No. 3	117
Grafica 5. Resultado Contexto No. 4.	118
Grafica 6. Resultado Contexto No. 1	120
Grafica 7. Resultado Contexto No. 2	122
Grafica 8. Resultado Contexto No. 1	135
Grafica 9. Resultados Contexto No. 2	136
Grafica 10. Resultados Contexto No. 3	137
Grafica 11. Resultados Contexto No. 4	138
Grafica 12. Resultados Contexto No. 5	139
Grafica 13. Resultados Contexto No. 6	140
Grafica 14. Resultados Contexto No. 1	141
Grafica 15. Resultados Contexto No. 1	143
Grafica 16. Resultados Contexto No. 1	144
Grafica 17. Resultados Contexto No. 2	145
Grafica 18. Resultados Contexto No. 3	146
Grafica 19. Resultados Contexto No. 4	147
Grafica 20. Resultados Contexto No. 5	148

LISTA DE FOTOGRAFIAS

Pág.

Fotografía 1. Aplicación de cuestionarios IEM Francisco de la Villota	89
Fotografía 2. Aplicación cuestionarios IEM Técnico Industrial	90
Fotografía 3. Aplicación IEM Cabrer	90

LISTA DE IMÁGENES

Pág.

Imagen 1. Fachada Institución Educativa Municipal Técnico Industrial	58
Imagen 2. Institución Educativa Municipal Francisco de la Villota	60
Imagen 3. Institución Educativa Municipal Cabrera.....	62
Imagen 4. Ubicación Geográfica de las Instituciones en estudio.....	64
Imagen 5. Marco legal educación matemática Colombiana.....	65

INTRODUCCIÓN

El estudio de los errores cometidos por los estudiantes en matemáticas, es una línea de gran importancia en la educación matemática. Diferentes autores nacionales e internacionales la han abordado desde diferentes campos de investigación, principalmente desde las concepciones del error y la didáctica de la matemática. Existen diversos trabajos relacionados con el estudio de errores y su tipificación, motivados por describir errores y combatir la deserción académica de los estudiantes al iniciar la educación superior. Estos resultados sirven de referentes teóricos para este tipo de investigaciones.

Es de reconocer que el error está presente en los ejercicios de producción a todo nivel en el quehacer educativo, teniendo en cuenta que la ocurrencia de estos errores desencadena múltiples dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas y por ende la imposibilidad de lograr los objetivos propuestos. Se considera que el estudio de errores en álgebra es una fuente de información sobre los procesos de cognición de los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de situaciones con expresiones algebraicas.

El presente trabajo de investigación centra su atención en la detección y clasificación de errores más frecuentes referidos a la comprensión de la aritmética y el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento al iniciar el estudio de las operaciones con polinomios en estudiantes de grado octavo de las instituciones educativas Técnico Industrial, Francisco de la Villota y Cabrera, de la ciudad de Pasto. Se emplean una serie de cuestionarios y revisión de archivos con el fin de analizar la información a la luz de las investigaciones de Martin Socas (2007), Luis Rico (1995), María de las Mercedes Palarea (1994) y el proyecto *Strategies and Errors in Secondary Mathematics (S.E.S.M)*, realizado por Lesley R Booth (1984) y el contraste con la información sobre el pensamiento variacional, propuesto en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional. Posteriormente, con los resultados

obtenidos se plantean algunas recomendaciones metodológicas para mejorar la enseñanza y aprendizaje del álgebra, a partir de la ingeniería didáctica de Artigue (1995).

1. DESCRIPCIÓN ÁREA PROBLEMÁTICA

En la educación matemática, se ha considerado el error como una línea de investigación, donde muchos investigadores han realizado el tratamiento y clasificación de errores. El error no se concibe como algo maligno sino como parte inherente en el proceso de construcción de conocimiento en la ciencia y desde luego en el proceso de conocimiento en el estudiante.

Se considera que detrás de la ocurrencia del error existen factores asociados que afectan los esquemas cognitivos de los estudiantes, no como ausencia de conocimiento, sino como deficiencia en los conocimientos previos, obstáculos a nivel didáctico, limitaciones cognitivas y actitudes que desarrollan en el aprendizaje de matemáticas. Se descarta el error como resultado de la casualidad.

Según Socas, en términos generales para las matemáticas estos errores se los puede tratar desde su génesis y, se deben a:

- “ La complejidad de los objetos de las Matemáticas y procesos de pensamiento de la disciplina;
- Las dificultades en los procesos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas;
- Los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes,
- Las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.” (Socas, 1995)
- Específicamente el error, en las categorías propuestas por Lesley Booth en 1984 para el álgebra hacen referencia a :
- “ La naturaleza y significado de los símbolos y las letras
- El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en el álgebra
- La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes

- El uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimientos”.

Para el presente estudio, nos centraremos en las dos últimas. Las dos primeras fueron desarrolladas por los investigadores Diana Fernanda López y Omar Silva (Udenar 2012).

A partir de las reflexiones sobre la presencia de errores en las producciones de los estudiantes es importante develar que no existen prácticas que conduzcan a tratar los errores como elementos constantes en el aprendizaje del álgebra escolar. No se ha incursionado en el fascinante y oculto campo del error, fascinante porque a través de él se pueden plantear acciones que permitan detectar, analizar, corregir y superar los errores, que vistos de esta manera, pueden ser considerados como elementos de retroalimentación cognitiva y generadores de conocimiento.

Desde el contexto de las instituciones en estudio, se puede observar que no existe un diseño curricular basado en el tratamiento del error en los planes de área y en las programaciones de grado octavo; es importante incluir este aspecto de forma transversal en el área de matemáticas como herramienta que contribuya al progreso escolar en el nivel de secundaria.

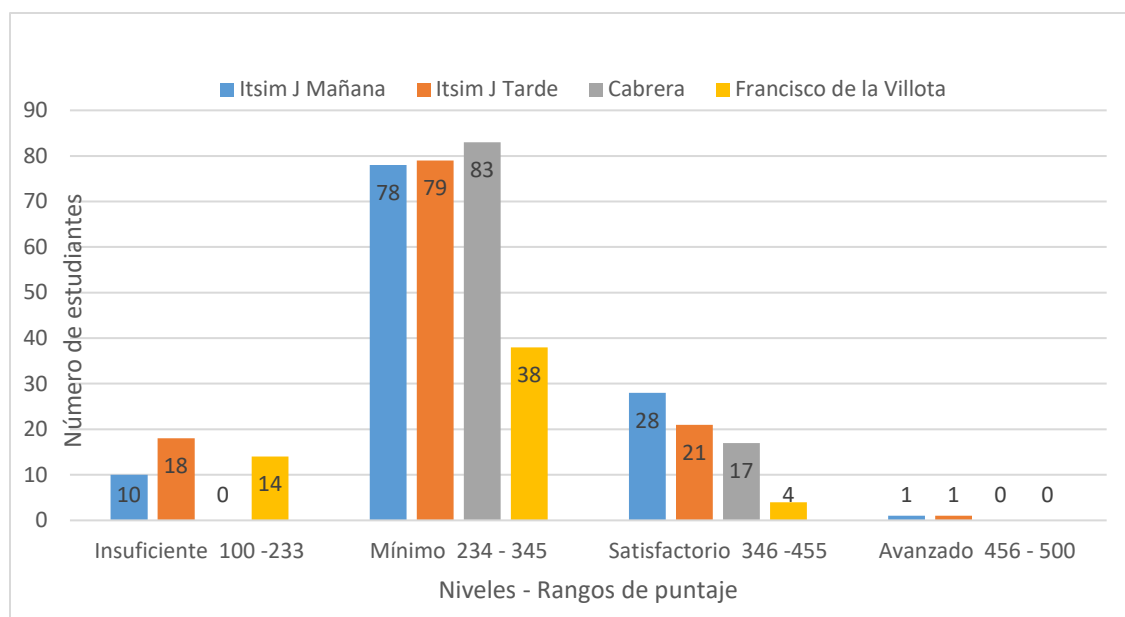
La debilidad en el pensamiento variacional y la falta de tratamiento de errores, imposibilita la comprensión de conceptos trabajados en matemáticas en los grados superiores y se refleja en los resultados académicos. El problema trasciende a otras áreas del conocimiento porque el pensamiento variacional permite darle sentido y significado al contexto, que en Física, Química, Trigonometría y Cálculo diferencial e integral, se trabaja en el manejo de fórmulas. Estas áreas tienen como prerrequisito el manejo conceptual y procedimental álgebraico y presentan un incumplimiento en las programaciones anuales porque deben dedicar mucho tiempo en procesos de nivelación. Al no distinguir el manejo de variables denotadas con letras, se deja de comprender la variabilidad.

Dentro del lenguaje álgebraico, cobra importancia la variabilidad como uno de los aspectos cognitivos en los estudiantes, tanto a nivel operacional como conceptual; pues es

interesante conocer el sentido que se le da a la variable y el manejo operatorio que se realiza con la misma. La variabilidad constituye un tópico sobre el cual se centran algunos errores que se cometen, que al no ser tratados a tiempo, continúan en grados superiores convirtiéndose en un problema para la asimilación de nuevos conceptos de la matemática y otras áreas del conocimiento, así como para la resolución de problemas que implican el uso de procedimientos algorítmicos más complejos. Además, imposibilita al estudiante para modelar matemáticamente fenómenos en las diferentes ciencias que requieran matemáticas.

Este hecho se puede corroborar con la entrevista a docentes de física y matemáticas de la institución Técnico Industrial de los grados superiores, quienes afirman que: “es evidente que existe en los estudiantes de grados noveno, decimo y once dificultades en cuanto a las operaciones suma y resta de fraccionarios, factorización, cálculo del valor numérico, etc.” Estos docentes se enfrentan al conflicto entre el desarrollo de la programación de física, la cual requiere de un mínimo de procedimientos básicos del álgebra, frente a la carencia de estos, razón por la cual se ven obligados a hacer un alto en la programación curricular de física para desarrollar los fundamentos básicos del álgebra.

Producto de todas estas situaciones se obtienen bajos resultados, tanto a nivel interno como en pruebas externas, lo que se puede observar en el gráfico estadístico (1) en el que se presentan los datos de la Prueba Saber.



Grafica 1. Resultados Pruebas Saber 2009

Fuente: Ministerio de Educación Nacional. Pruebas Saber 2009

Los resultados obtenidos se clasifican de acuerdo a los desempeños en el área de matemáticas de los estudiantes de las instituciones incluidas en la investigación, en insuficiente, mínimo, satisfactorio y avanzado, acordes a los rangos establecidos para cada nivel. La siguiente tabla muestra en porcentaje la población estudiantil clasificada por debajo del nivel satisfactorio en cada institución:

Tabla 1.

Porcentaje de población estudiantil por institución por debajo del nivel satisfactorio

Itsim J Mañana		Itsim J Tarde		Cabrera		Francisco de la Villota	
Insuficiente	Mínimo	Insuficiente	Mínimo	Insuficiente	Mínimo	Insuficiente	Mínimo
75,2%		81,5%,		83%		92,8%	

Fuente: La presente investigación

Tomando el nivel mínimo, como tope en cada institución, las tres cuartas partes de los estudiantes presentan dificultades en el área de matemáticas; si se tiene en cuenta la totalidad de la población estudiantil de estas instituciones, el 81,63% se encuentra ubicado por los resultados de esta prueba entre los niveles insuficiente y mínimo.

En la tabla 2 se describen los niveles que ha establecido ICFES en la prueba saber para grado noveno; se puede evidenciar que en los niveles mínimo e insuficiente no existen referentes conceptuales relacionados con expresiones algebraicas, modelación de situaciones de variación, propiedades de potenciación y radicación, que entre otras, son necesarias, para alcanzar los niveles Satisfactorio y Avanzado.

Dichos tópicos se consideran ejes abarcadores de la presente investigación.

Tabla 2.

Niveles Prueba Saber grado Noveno.

Niveles	Rangos de Puntaje	Un estudiante promedio ubicado en el nivel...
Avanzado	456 – 500	Además de lograr lo definido en los dos niveles precedentes, el estudiante promedio de este nivel pasa de la representación álgebraica a las propiedades de una función o sucesión y viceversa, establece equivalencias entre expresiones algebraicas y numéricas, enuncia propiedades relativas a determinados subconjuntos numéricos, caracteriza una figura en el plano que ha sido objeto de varias transformaciones, halla áreas y volúmenes a través de descomposiciones y recubrimientos, usa criterios de semejanza y congruencia, evalúa la correspondencia entre una forma de representación y los datos, y halla probabilidades utilizando técnicas de conteo.
Satisfactorio	346 – 455	Además de lograr lo definido en el nivel precedente, el estudiante promedio de este nivel utiliza las propiedades de la potenciación, radicación y/o logaritmación para solucionar un problema, utiliza expresiones algebraicas y representaciones gráficas para modelar situaciones sencillas de variación, establece relaciones entre los sólidos y sus desarrollos planos, reconoce y aplica movimientos rígidos a figuras planas en un sistema de coordenadas, compara atributos medibles de uno o varios objetos o eventos, hace conjeturas acerca de fenómenos aleatorios sencillos.
Mínimo	234 – 345	El estudiante promedio de este nivel reconoce distintas maneras de representar una función, soluciona problemas en contextos aditivos y multiplicativos, identifica algunas propiedades de figuras planas y sólidos, establece relación es entre dimensionalidad y magnitud, identifica algunos movimientos rígidos en el plano, utiliza formas de representación convencionales para describir fenómenos de las ciencias sociales o naturales.
Insuficiente	100 – 233	El estudiante promedio ubicado en este nivel no supera las preguntas de menor complejidad de la prueba.

Fuente: <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/>

Teniendo en cuenta la información suministrada por ICFES, para cada plantel educativo, se han tomado en cuenta los resultados de la pruebas para determinar la escogencia de las instituciones. La IEM Técnico Industrial, en comparación del puntaje promedio y la desviación estándar del establecimiento educativo con el total de la entidad territorial certificada a la que pertenece (Pasto), el país y por tipos de establecimientos de la entidad territorial certificada en matemáticas para el grado noveno, de donde, el puntaje promedio de la institución es inferior al puntaje promedio de los establecimientos educativos no oficiales de Pasto. (Ver Figura 1)

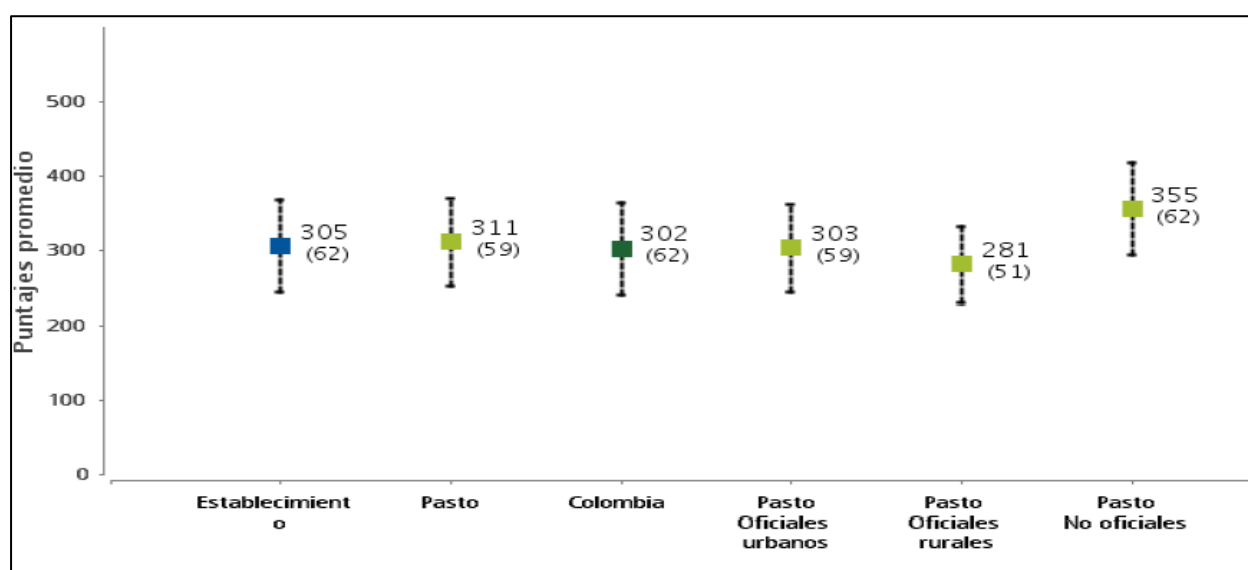


Figura 1. Comparativo puntaje promedios Técnico Industrial y otros.

Fuente: <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/>

Además, en similitud con las otras dos instituciones en estudio, la institución Educativa Municipal Técnico Industrial cuenta con estudiantes ubicados en Niveles Socio-económico (NSE) 1 y 2, y comparando los resultados obtenidos en la prueba, en términos de la desviación estándar son menos homogéneos que los resultados obtenidos por establecimientos con población con las mismas características (NSE) ubicados en la entidad territorial Pasto. (Ver figura 2)

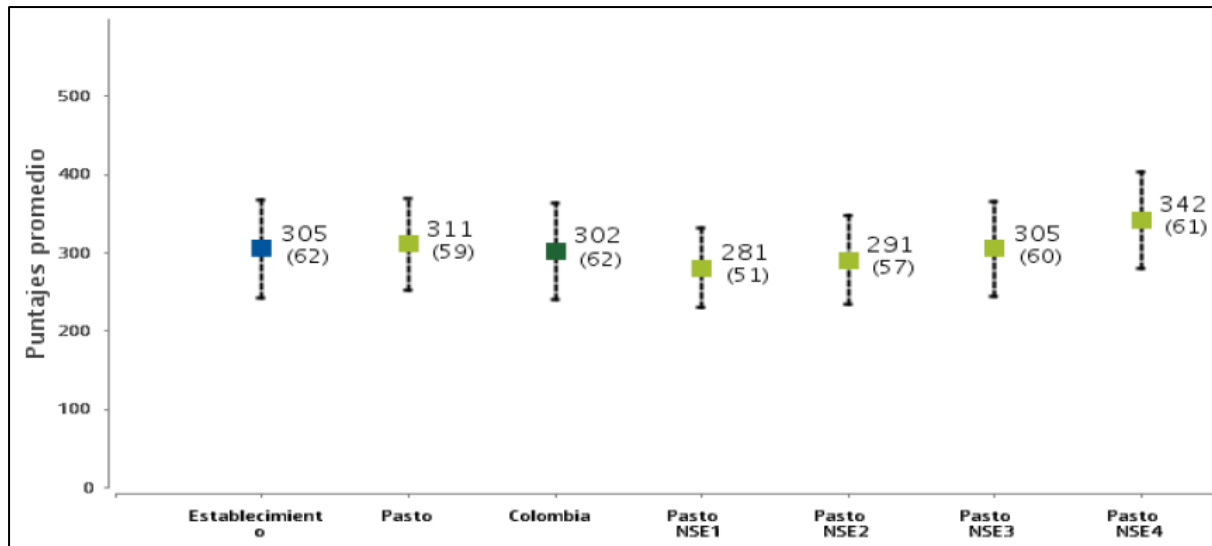


Figura 2. Comparativo puntaje promedios Técnico Industrial y otros teniendo en cuenta Nivel Socio-económico (NSE).

Fuente: <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/>

La Institución Educativa Municipal Francisco de la Villota fue seleccionada teniendo en cuenta los resultados en porcentaje de estudiantes según los niveles de desempeño en comparación con los establecimientos de la entidad territorial certificada. En la figura 3, puede observarse que el 27% de los estudiantes de la institución en mención, se ubican en un nivel insuficiente, que comparado con los establecimientos no oficiales y oficiales urbanos y rurales, es mayor.

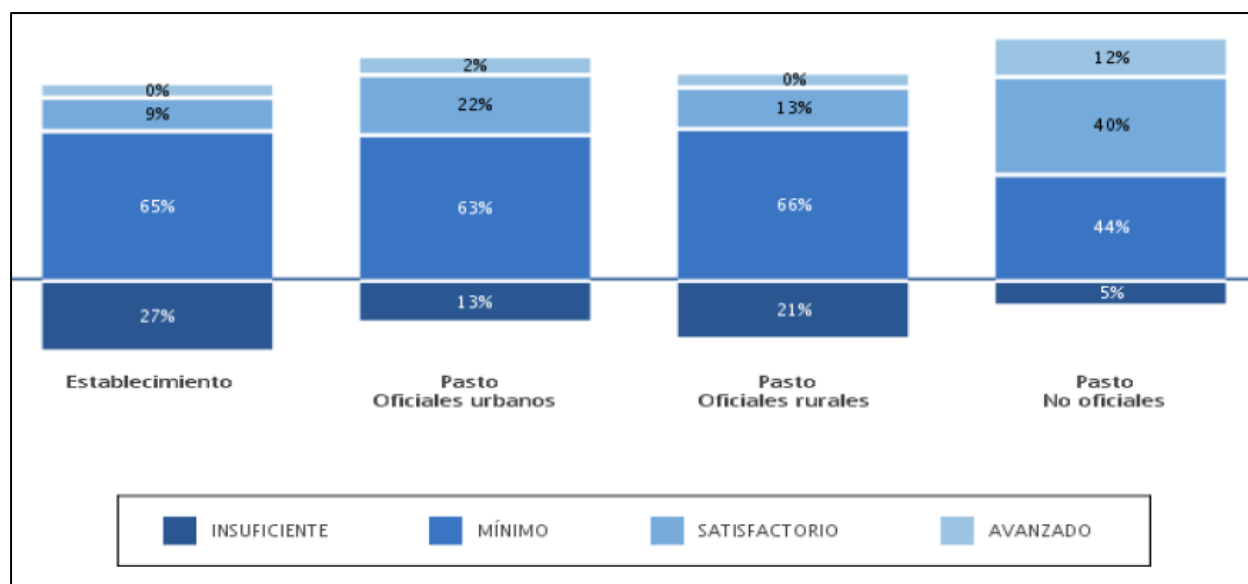


Figura 3. Comparativo porcentaje de estudiantes según niveles de desempeño, IEM

Francisco de la Villota y otros.

Fuente: <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/>

De manera similar, la IEM Francisco de la Villota, es comparada con los establecimientos de Pasto, según el nivel socio-económico (NSE). Teniendo en cuenta los porcentajes de los estudiantes según los niveles de desempeño, puede evidenciarse en la figura 4, que el porcentaje de estudiantes de la institución que se ubican en nivel insuficiente, es mayor que los establecimientos educativos municipales, independientemente del factor socio económico; se considera que esta información es relevante para incluir en el estudio a esta institución.

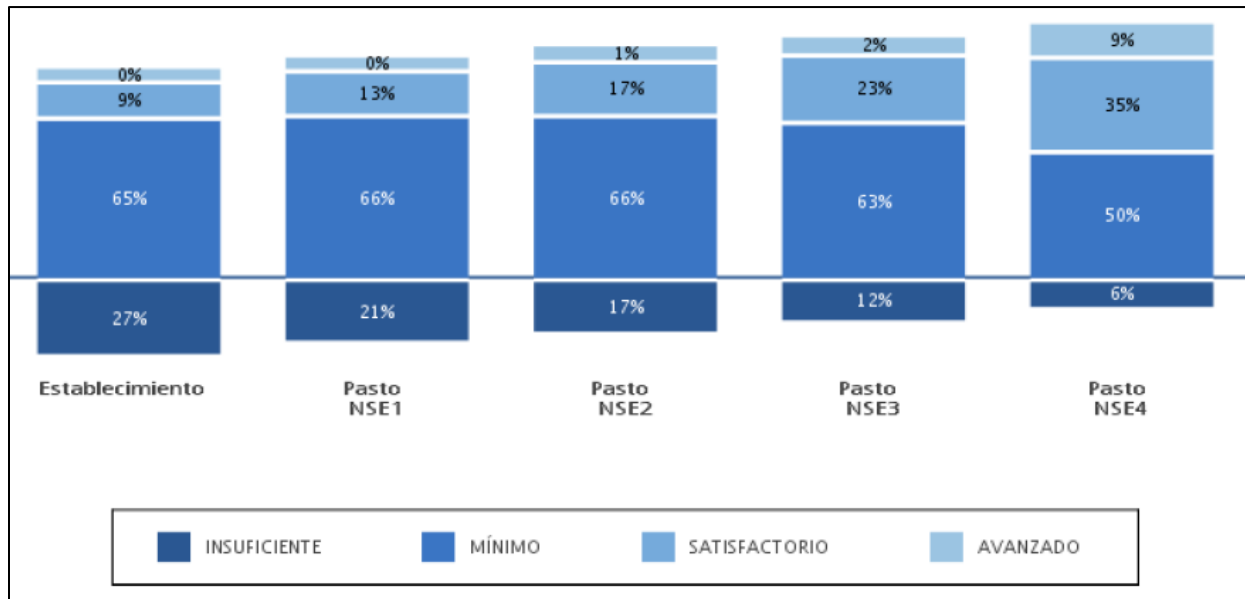


Figura 4. Comparativo porcentaje de estudiantes según niveles de desempeño, IEM Francisco de la Villota y otros teniendo en cuenta Nivel Socio-económico (NSE).

Fuente: <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/>

Por otra parte, las pruebas Saber, han identificado unas competencias a evaluar, organizadas por componentes. En el caso de la Institución Educativa Municipal Cabrera, los resultados obtenidos, muestran debilidades en las competencias de Razonamiento y Comunicación y en el componente numérico variacional, como puede observarse en las figuras 5 y 6



Figura 5. Competencias evaluadas en matemáticas, IEM Cabrera, grado noveno

Fuente: <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/>

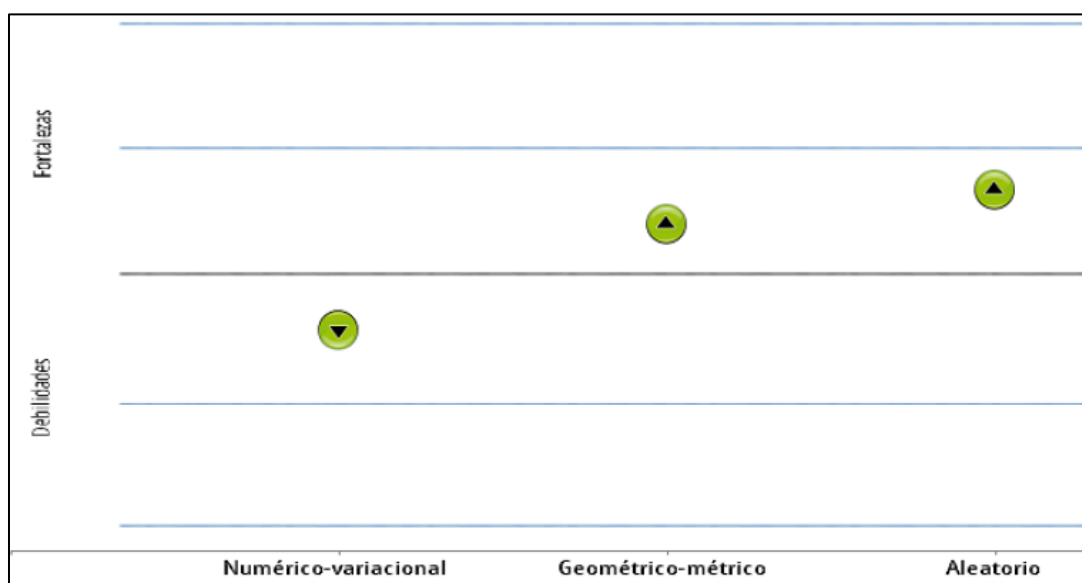


Figura 6. Componentes evaluados en matemáticas, IEM Cabrera, grado noveno

Fuente: <http://www.icfesinteractivo.gov.co/ReportesSaber359/>

Las ideas expuestas anteriormente, proponen los resultados obtenidos en las pruebas Saber como una fuente de información y consolidan la descripción de la problemática existente. La falta de actividades que conlleven al desarrollo del pensamiento variacional, llevan a cometer errores y a hacer un uso inadecuado de fórmulas o reglas de procedimiento. De esta manera, se ratifica la necesidad de una investigación que contribuya a analizar desde el pensamiento variacional las dificultades que conduzcan a corregir y mejorar los procesos de aprendizaje del álgebra.

A través de la presente investigación, se pretende realizar un acercamiento al mundo del pensamiento matemático, visto desde los estudiantes de grado octavo, descubriendo sus necesidades e intereses en torno a el estudio de el álgebra, sus procedimientos algorítmicos y concepciones. Es interesante y necesario conocer y analizar la frecuencia de error en el contexto educativo de la ciudad de San Juan de Pasto para dar respuesta a los bajos niveles en el área de matemáticas (ligados al álgebra) a nivel del país y contribuir al mejoramiento desde una perspectiva didáctica.

Después de los hallazgos, la clasificación y descripción de los errores se deja para próximas investigaciones los factores que influyen para estudiar estos errores, la re significación de las programaciones de álgebra y la intervención con los docentes.

En este orden de ideas, la pregunta de investigación se formula de la siguiente manera:

¿Cuáles son los errores más frecuentes referidos a la comprensión de la aritmética y el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento al iniciar el aprendizaje del álgebra (estudio de polinomios), que presentan los estudiantes de grado octavo de las I.E.M Técnico industrial, Cabrera y Francisco de la Villota de la ciudad de Pasto?

Existen preguntas complementarias que surgen a partir de los estudios previos realizados por otros autores que dan paso a la formulación de los objetivos específicos y que orientan el

desarrollo del presente trabajo buscando identificar, describir y categorizar los errores en el aprendizaje del álgebra, en el contexto de la población en estudio, que son los estudiantes de grado octavo de las Instituciones Educativas Municipales Técnico Industrial, Cabrera y Francisco de la Villota, los interrogantes se enuncian a continuación:

- ¿Qué errores se detectan en relación a la comprensión de la aritmética y al uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento en el aprendizaje del álgebra al iniciar su estudio?
- ¿Cuáles son las características de los errores más comunes en el aprendizaje del álgebra al iniciar su estudio?
- ¿Cómo enfrentar desde la didáctica de la matemática, este tipo de errores?

2. OBJETIVOS

2.1 Objetivo General

“Identificar y analizar los errores más frecuentes en el aprendizaje del álgebra (estudio de polinomios) referidos a la comprensión de la aritmética y el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento que presentan los estudiantes del Grado Octavo de las Instituciones Educativas Municipales Técnico Industrial, Francisco de la Villota y Cabrera, del municipio de Pasto y plantear secuencias didácticas que permitan superarlos”.

2.2 Objetivos Específicos

- Determinar los errores referidos a la comprensión de la aritmética y el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento en el aprendizaje del álgebra al iniciar el estudio de polinomios
- Describir los errores más frecuentes referidos a la comprensión de la aritmética y el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento en el aprendizaje del álgebra al iniciar el estudio de polinomios.
- Formular secuencias didácticas que permitan superar algunos errores referidos a las categorías en estudio.

3. JUSTIFICACIÓN

El estudio de errores en matemáticas es importante porque es una fuente inagotable de posibilidades investigativas y aplicativas a diferentes niveles. Permite detectar y analizar las concepciones erróneas, determinar lo que un estudiante sabe, cómo lo interpreta y plasma en sus producciones, y revelar, los que a juicio del estudiante, han sido aprendizajes significativos en su proceso de formación en el campo de las matemáticas hasta el grado octavo.

Además, el desarrollo de esta investigación puede aportar a las instituciones de educación superior en los programas de licenciatura, herramientas de estudio del error como fundamento para el diseño curricular, revelar las concepciones deficientes que los estudiantes adquieren y hacer que las acciones de diagnóstico, estudio y “superación” de errores sean consideradas indispensables en el ejercicio educativo. El error entonces, pasará a tomar un papel importante porque permitirá comprender el conocimiento álgebraico y su naturaleza, dejando el temor y actitudes que desmotivan su estudio, para convertirse en el camino de acercamiento al campo de las matemáticas.

Esta investigación hace parte de un macro proyecto, orientado desde la Secretaría de Educación Municipal, contando con un equipo de investigación interinstitucional formado por docentes de la Universidad de Nariño y las instituciones educativas en mención, es un trabajo novedoso y factible porque se cuenta con los recursos, se conocen los referentes bibliográficos tanto para la elaboración de cuestionarios como para su análisis.

Al no existir estudios relacionados en el contexto Municipal a ningún nivel, se convierte en el pionero y será el inicio de muchas investigaciones que tendrán este trabajo como antecedente y permitirá reconstruir las prácticas relacionadas con la enseñanza y aprendizaje del álgebra, tan necesario e indispensable en los diferentes ciclos de educación, desde la educación básica hasta la educación superior, puesto que se darán ejercicios investigativos importantes de

forma interdisciplinar por el carácter inclusivo del álgebra en el currículo de diversas carreras universitarias.

4. ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN

El estudio de los errores en educación matemática se constituye desde varias décadas atrás como un tema de interés para muchos investigadores, algunos trabajos se han enfocado a diferentes aspectos relacionados con el “error”, no existe una única tendencia pues se han adelantado estudios sobre concepciones, errores cometidos por estudiantes, errores detectados por maestros, son solo algunos casos de los estudios del error efectuados por la comunidad académica. Puede decirse que independientemente de las edades y el nivel educativo de la población en estudio, el tratamiento y análisis de errores ha sido una constante predilección para cuestionar sobre su presencia en cualquier acción de aprender, el interés va desde conocer sus causas, describir, tipificar hasta la búsqueda de estrategias para eliminarlos y hacer reformas en términos del currículo de matemáticas, sin dejar de ser un elemento de reflexión en otras áreas.

4.1 Antecedentes a nivel internacional

Existen estudios desde Weiner, citado por Del Puerto y otros (2004), quien desde 1922 es considerado el fundador de la investigación didáctica orientada al estudio de errores por sus investigaciones en Alemania, con su aporte se pueden establecer patrones de errores en todas las materias y en todos los grupos de edades.

Por otra parte, Lesley Booth, en *Strategies and Errors in Secondary Mathematics (S.E.S.M)* llevado a cabo en el Reino Unido entre 1980 y 1983, clasifica los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes en el aprendizaje del álgebra. Estos errores hacen referencia: al significado de los símbolos, la naturaleza de las respuestas en el álgebra, la aritmética como preconcepto y el uso inapropiado de fórmulas. Dichos aportes hacen parte de las fuentes más relevantes en la presente investigación.

En España, los estudios de Luis Rico, en “Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas”, permite identificar la línea de investigación en esta temática; Martín Socas, en “Dificultades, obstáculos y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria”, hace una conceptualización desde la educación matemática sobre el error, los anteriores autores conjuntamente hacen parte del grupo Azarquiel en el que a través de la investigación aportan para describir los procesos de iniciación al álgebra y son fuente de la mayoría de trabajos académicos, cabe anotar que estos estudios fueron realizados desde 1995 hasta la actualidad y toman como referencia los trabajos de Lesley Booth.

Raquel M. Ruano, Martín Socas y M. Mercedes Palarea, en “Análisis y Clasificación de Errores Cometidos por Alumnos de Secundaria en los Procesos de Sustitución formal, Generalización y Modelización en Álgebra”, hace un estudio sobre tres procesos específicos del lenguaje algebraico a partir de las respuestas a un cuestionario. Se realiza una clasificación de los errores cometidos y sus posibles causas. Finalmente se formulan algunas recomendaciones didácticas a partir de estos errores. Es un estudio bastante afín a la presente investigación.

Elsa Malisani, que hace parte del Grupo de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas en el Departamento de Matemáticas y sus aplicaciones, de la Universidad Palermo – Italia, hace referencia en sus estudios a los “obstáculos epistemológicos” en el desarrollo del pensamiento algebraico desde una visión histórica, estudia la construcción del lenguaje algebraico, con su ambigüedad semántica y su riqueza de significados, en relación a la evolución de los métodos y de las estrategias de resolución de ecuaciones en los dos períodos históricos anteriores a la formalización: retórico y sincopado.

En México, Vicente Carrión Miranda, en “Análisis de errores de Estudiantes y Profesores en expresiones Combinadas con números naturales”, enfatiza su estudio con profesores y estudiantes de nivel básico, medio y universitario. El objetivo es clasificar errores en

matemáticas, interpretar y analizar las posibles causas que los provocan. Aporta la conceptualización del error desde el punto de vista matemático, sin embargo no enfatiza en el álgebra. José García Suarez (2010) en su tesis plantea el problema de analizar los errores y dificultades al resolver tareas álgebraicas que aparecen en las respuestas de una prueba departamental realizada por alumnos de primer curso a nivel de Licenciatura del Centro Universitario de la Costa Sur de la Universidad de Guadalajara, México, donde describe y realiza un análisis estadístico de los hallazgos.

A nivel de Latinoamérica existen otras obras, todas ellas desarrolladas en diferentes lugares de Argentina, que también son fuente de consulta. Silvia Mónica del Puerto y Claudia Lilia Minnaard, en su libro: “Análisis de los Errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las matemáticas”, aunque se enfocan en estudiantes de Argentina que cursan los últimos años de escuela media y que comienzan estudios universitarios, aporta su estudio a la formulación del plan de área de matemáticas basado en el estudio de errores.

Los estudios de Silvia Caronia y otros, hacen referencia al análisis de errores en álgebra que han sido detectados en estudiantes de universidad durante los primeros años en carreras de Ingeniería, Profesorado de Matemáticas, Química y Genética haciendo un estudio comparativo, de manera similar Gladis Saucedo centra su atención investigativa en los estudiantes que a la universidad haciendo un tratamiento y categorización de errores álgebraicos. Pochulu (2005) describe en su trabajo las características de los errores de los estudiantes afirmando que todo proceso de instrucción es potencialmente generador de errores por diversas causas. De la Torre (2004) en su libro “Aprender de los errores, el tratamiento didáctico de los errores como estrategias innovadoras”, *expone una nueva concepción del error entendido como desajuste conceptual o de ejecución y propone la incorporación como estrategia didáctica.*

Adriana Engler, María Inés Gregorini, Daniela Müller, Silvia Vrancken y Marcela Hecklein, en la Universidad Nacional del Litoral de Argentina refieren sus investigaciones en torno a los errores en matemática y realizan una revisión bibliográfica sobre la evolución del estudio de errores, características, categorización y clasificación.

4.2 Antecedentes a nivel nacional

Existen también otros trabajos de índole nacional, en relación a los errores de estudiantes de los primeros semestres de Educación Superior, como los realizados por Patricia López S. y Marysol Rodríguez B, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Cooperativa de Colombia, sede Bogotá, sobre los errores frecuentes que cometen los estudiantes ingresantes en sus producciones algebraicas. La información fue obtenida a partir de las concepciones que tienen los docentes sobre los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes para posteriormente realizar la identificación de los errores que cometen los estudiantes cuando trabajan con expresiones algebraicas y a través de la contrastación de la información obtenida en los momentos anteriores obtener las deducciones sobre las posibles causas que originan el error.

En la misma línea de acción, Guillermo Cervantes Campo y Rafael Martínez Solano (2007), en la Universidad del Norte describen algunos tipos de errores que, con mayor frecuencia, presentan los alumnos en los primeros cursos de pre-grado cuando pretenden solucionar ejercicios que requieren manipulaciones algebraicas.

En el campo de la educación básica secundaria, existen estudios como los de Leonardo Quintero y Héctor Guatibonza, quienes desde la Universidad del Valle, en el marco del programa de capacitación y acompañamiento a docentes de Cundinamarca y Duitama para el desarrollo de los niveles de competencia de matemáticas y diseño de secuencias didácticas a partir de las experiencias significativas de los maestros, realizan un estudio en relación a las causas asociables

a los errores en el desarrollo del pensamiento numérico, de los estudiantes de grado sexto y octavo del Colegio Boyacá de Duitama.

En Boyacá, a través de la UTPC, Yenny Cardozo y Darío Meza en sus investigaciones, realizan un diagnóstico sobre errores en el aprendizaje de conceptos y procedimientos previos a la factorización, trabajo en el que se evidencia que los estudiantes cometen los errores que citan las investigaciones de Socas y otros (1995) referentes al mal uso del signo menos y de la propiedad distributiva. Se detectan vacíos en las operaciones aritméticas específicamente en la adición, sustracción y potenciación de números racionales que son necesarios para la comprensión de conceptos y procedimientos algebraicos.

Javier Mendoza, Arturo Páez, Eduardo Salamanca (2009), en Barranquilla, puntualizan el estudio de errores en el aprendizaje de la adición de fraccionarios aritméticos positivos, tomando como referencia los errores que comete un estudiante de una Institución Educativa de Cartagena destacando el uso del error como mediador cognitivo.

4.3 Antecedentes a Nivel Regional

En este campo, el estudio realizado por Diana Fernanda López M. y Omar Silva C., integrantes del grupo de investigación que conjuntamente con los autores del presente trabajo y con la asesoría del Magister Luis Felipe Martínez Patiño, desarrollan paralelo a la presente investigación, el trabajo enfocado a la identificación de los errores más frecuentes referidos a la naturaleza y significado de símbolos y el objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en álgebra, que presentan los estudiantes del Grado Octavo de las I.E.M Técnico Industrial, Francisco de la Villota y Cabrera de la Ciudad de Pasto.

5. MARCO TEÓRICO CONCEPTUAL

El estudio del error, se encuentra inscrito para la presente investigación, en el ámbito de la educación matemática que vista de forma interdisciplinar, se fundamenta en la epistemología pos-positivista, la psicología cognitiva y el álgebra como pensamiento variacional. (Ver Figura 7)

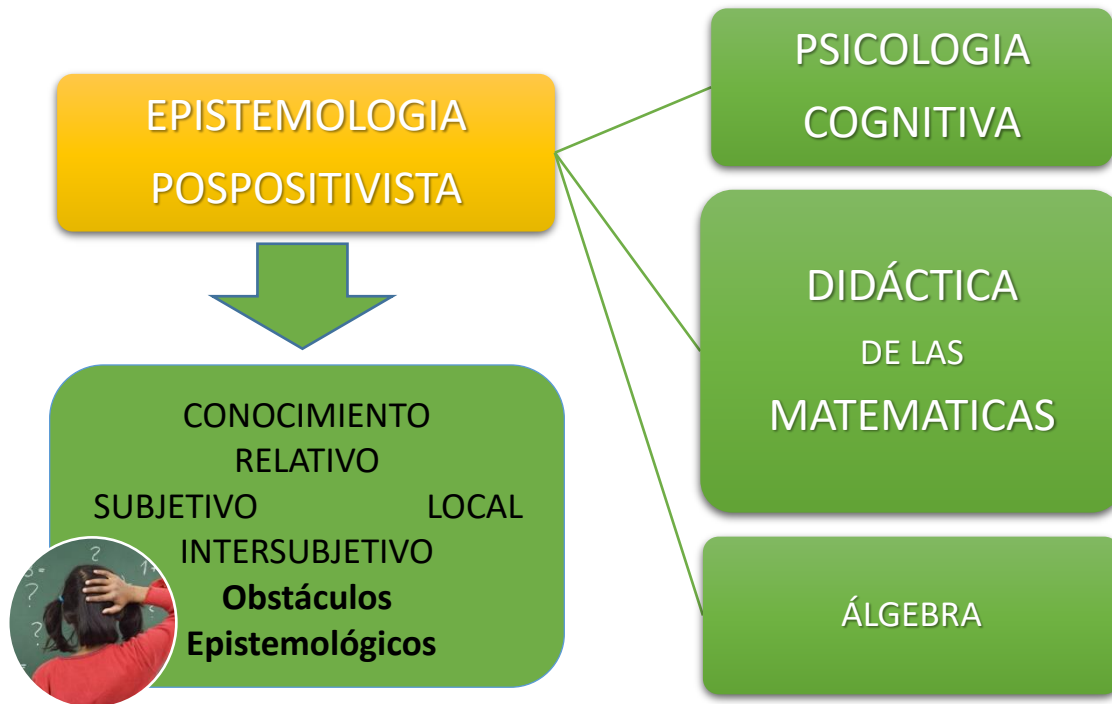


Figura 7. El error en el contexto de la educación matemática

Fuente: La presente investigación

5.1 La epistemología Pos positivista y la concepción de error

Desde las dimensiones de la epistemología pos positivista, el conocimiento es relativo no absolutizado, la realidad es local, los fenómenos son particulares no generalizados, el conocimiento es objetivista flexibilizado (subjetivo), existen verdades probables, así mismo, se defiende la idea de que existen formas de conocimiento no estrictamente experimentales. A

diferencia del positivismo donde se busca explicar, predecir y controlar se traducen estas acciones en comprender, dar significado y actuar.

Habermas, afirma que el conocimiento es comprendido como el consenso de la comunidad que considera al objeto de estudio, por esto, no se podría considerar la objetividad y, mucho menos, “la verdad”, de algo sin describir el punto de vista desde el cual se percibe, ya que lo que se considera como conocimiento se ha construido de conformidad en un contexto social e históricamente determinado. Así, se atribuye el carácter intersubjetivo al conocimiento, éste, es el resultado de una interacción, de una dialéctica, o diálogo, entre el que conoce y el objeto conocido. Que más allá de la simple relación sujeto objeto intervienen otros aspectos psicológicos, culturales etc., que influyen en la conceptualización del objeto.

Desde el post positivismo, pese a la existencia de un plano real causado de forma natural, es ilusorio ser percibido y por lo tanto aprehendido en su totalidad puesto que los mecanismos intelectuales y sensoriales del hombre son imperfectos. De esta manera, los hechos pueden ser explicados a partir de la interpretación.

La perspectiva interpretativa, orientada a la búsqueda del significado personal de los hechos, da cabida a las diversas interpretaciones, diversos lenguajes, válidos, considerando el error desde esta visión, como una interpretación, a partir de una adquisición del conocimiento “propio” adquirido a partir de la observación y construido sobre el interés y necesidad desde su contexto.

La epistemología pos-positivista permite dilucidar el concepto de error como algo sistemático e inherente a la naturaleza del conocimiento, al considerar verdades probables, se espera entren en diálogo, conjuntamente con los pensamientos, actitudes y percepciones, las interacciones entre los humanos y su entorno, y con la existencia de la diversidad de lenguajes, es

inevitable la presencia del error, de tal manera que se reconoce la falibilidad de cualquier interpretación.

La investigación sobre los errores cometidos por estudiantes en matemáticas, se ubica dentro de la epistemología pos-positivista, quien considera el conocimiento, subjetivo, relativo, no acabado y local, a diferencia de la corriente epistemológica positivista que asume el conocimiento como absoluto, universal y objetivo. En este orden de ideas, se asume el error como parte inherente en la construcción del conocimiento al asumir el enfoque epistemológico pos-positivista, el cual tiene implicaciones en el punto de vista psicológico y didáctico. De ahí que la investigación se fundamenta en los principios de la psicología cognitiva y el constructivismo metodológico, quienes asumen la existencia de estructuras cognitivas capaces de incorporar y re significar los nuevos conocimientos y la información recibida. En este proceso de construcción constante, es donde se cometen errores, y es también, donde se encuentran barreras, denominadas por Gastón Bachelard, “Obstáculos Epistemológicos”. Desde lo didáctico, se deben considerar los errores más comunes cometidos por los estudiantes para la re significación del currículo de matemáticas, y más específicamente, replantear las planeaciones del álgebra, cuestión que involucra nuevas actitudes y concepciones por parte del docente.

5.2 El conocimiento matemático y la psicología cognitiva

Partiendo del concepto de adquisición de conocimiento, anteriormente descrito, la investigación conduce a aceptar que cada estudiante construye, de un modo activo, el conocimiento a través de la interacción con el contexto (entorno inmediato e individuos con los que tiene relación) y el arreglo los constructos mentales propios. Godino (2010) afirma que: “Aunque la instrucción afecta claramente a lo que el niño aprende, no determina tal aprendizaje. El niño no es un receptor pasivo del conocimiento; lo interpreta, lo estructura y lo asimila a la luz de sus propios esquemas mentales.”

La psicología cognitiva centra sus estudios en los procesos mentales como el pensamiento, el aprendizaje entre otros, hace referencia a las actividades mentales que dan resultados como conocer y comprender. La información que un individuo percibe en la mente se procesa, es decir, se organiza, se tiene presente y se emplea cuando sea necesario.

Los principales autores que orientaron sus estudios en esta línea son: Piaget, Bruner y Ausubel, que resaltan la interacción entre los contenidos de la enseñanza, los procesos y las habilidades del estudiante para lograr un aprendizaje. Como lo afirma Godino (2010), en estas corrientes se inscriben "... las teorías instruccionales que subrayan el hecho de que la instrucción es básicamente un intercambio de información, en su acepción más amplia, que se produce entre profesores y alumnos y que debe ejercerse en condiciones lo más óptimas posibles para que el objetivo principal, que el alumno consiga una asimilación de la información correcta, se realice."

5.3 El Constructivismo como aporte a la educación matemática.

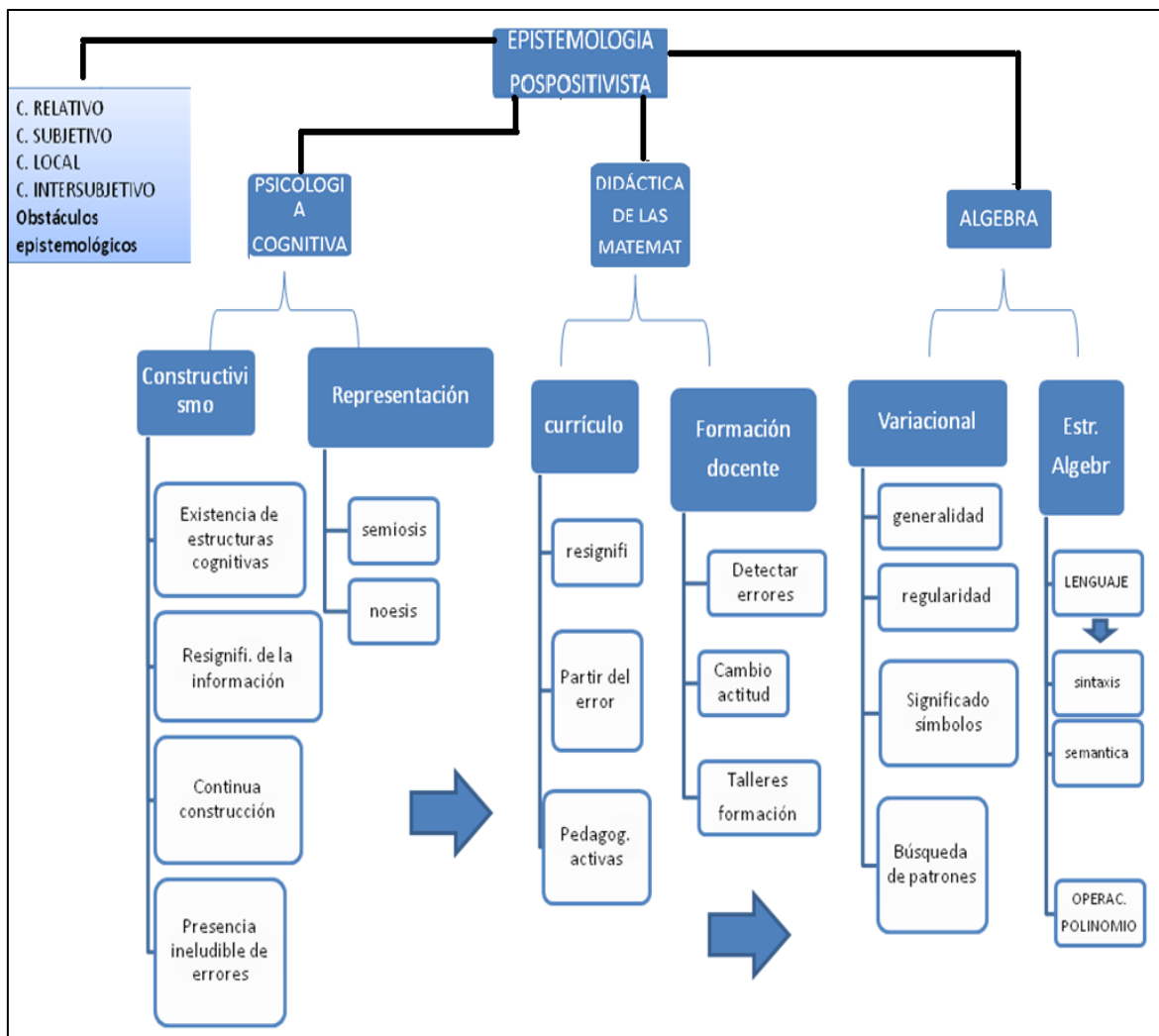
Una orientación constructivista en la educación matemática, no sólo permite señalar las dificultades que pueden tener los estudiantes para aprender, en la presente investigación, catalogados como errores comunes en álgebra, sino también representa un panorama interesante para desarrollar estrategias de enseñanza y aprendizaje más eficientes, en el que se considere los intereses, las necesidades y habilidades para aprender del estudiante, entendido como el actor principal del proceso educativo,

El constructivismo como postura epistemológica también se encuentra en la Matemática Educativa. Kilpatrick (1995) hace referencia a algunas características de interés:

- El conocimiento matemático es construido, al menos en parte, a través de un proceso de abstracción reflexiva.
- Existen estructuras cognitivas que se activan en los procesos de construcción.

- Las estructuras cognitivas están en desarrollo continuo. La actividad con propósito induce la transformación de las estructuras existentes.

Así, se puede decir que el conocimiento es construido activamente por el estudiante, no existe una recepción pasiva, adquirir conocimiento es un proceso de adecuación donde parte de una organización de lo que por experiencia conoce, es decir, lo que conoce es exterior a las estructuras mentales existentes (previas), por lo tanto es independiente.



Esquema 1. El Error en el Contexto de la Educación Matemática

Fuente: La presente investigación

El álgebra es parte del pensamiento variacional, el cual es concebido dentro de los lineamientos curriculares del Ministerio de Educación Nacional como un pensamiento que recorre toda la educación básica y media; solo que en el desarrollo curricular del álgebra se enfatiza mucho más los aspectos propios del pensamiento variacional, tales como, el manejo de símbolos, el lenguaje común y algebraico, las operaciones con expresiones algebraicas, los casos de factorización, la formulación y resolución de ecuaciones y el manejo de fórmulas y procedimientos. Esta investigación se limita solo a las operaciones básicas entre polinomios (suma, resta, multiplicación, división).

El error

Los errores que cometen los estudiantes en el álgebra es un problema no solo de estas instituciones, sino, nacional y mundial. Esto se evidencia con los estudios de muchos investigadores en torno a esta temática; por ejemplo; Davis (1984) elaboró una teoría de esquemas que le permitió tipificar e interpretar los inconvenientes más comunes en los estudiantes, destacando la falta de recuperación de un esquema previo y la inadecuada interpretación de propiedades aritméticas.

Martin Socas, refiriéndose a la investigación elaborada por el “grupo de álgebra del proyecto Strategies and Errors in Secondary Mathematics (S.E.S.M)” llevada a cabo en el Reino Unido entre 1980 y 1983 (Booth 1984), clasifica estos errores en cuatro categorías:

- “La naturaleza y significado de los símbolos y las letras.
- El objetivo de la actividad y la naturaleza de las respuestas en el álgebra.
- La comprensión de la aritmética por parte de los estudiantes.
- El uso inapropiado de “fórmulas” o “reglas de procedimientos”.

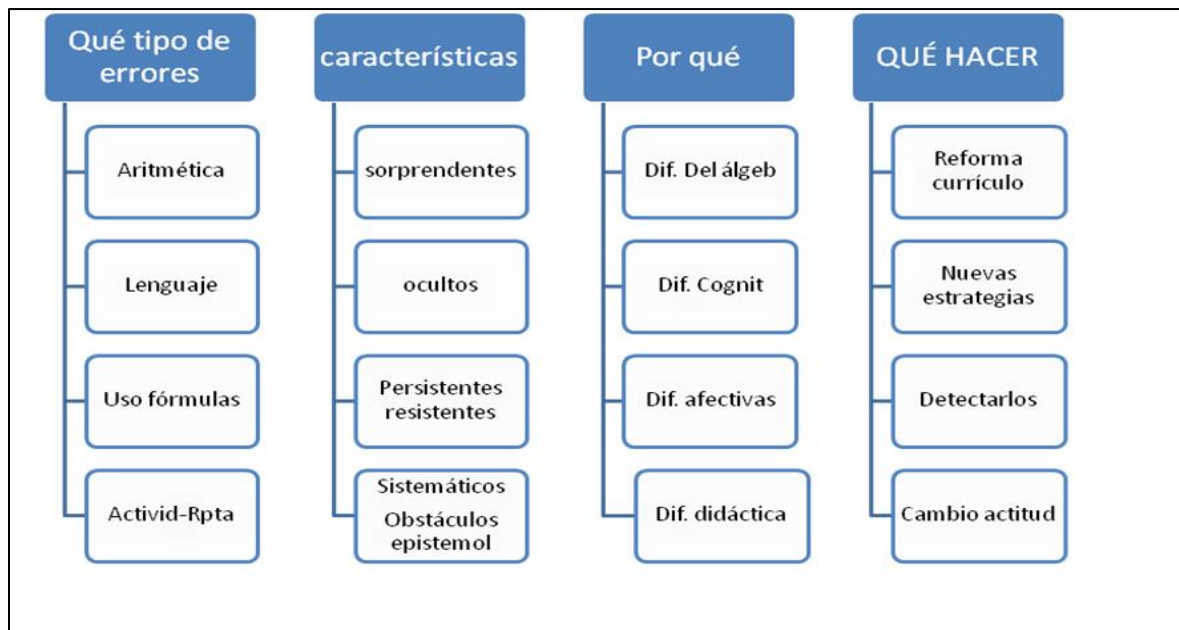
(Socas, Martin. Iniciación al álgebra. Ed. Síntesis 1996. pág. 96-97)

Estas cuatro categorías contemplan los diferentes errores que los estudiantes de octavo pueden llegar a cometer, siendo las dos últimas, los criterios de esta investigación para la organización de los mismos.

Martín Socas atribuye las causas de los errores (Rico, 1997): La complejidad de los objetos de las Matemáticas y procesos de pensamiento como propias de la matemática; las dificultades en los procesos de enseñanza de las Matemáticas; los procesos de desarrollo cognitivo de los estudiantes, y las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

Por otro lado, Luis Rico (1995), propone tres líneas de investigación en torno a los errores: “a. Estudios sobre análisis, causas, elementos y taxonomías de clasificación de los errores; b. Trabajos acerca del tratamiento curricular de los errores; c. Estudios relativos a la formación de los docentes en cuanto a la capacidad para detectar, analizar, interpretar y tratar los errores de sus estudiantes. Cada una de estas líneas es un campo bastante amplio de investigación, por ejemplo en la primera línea, se pueden contemplar las referidas a los procesos de enseñanza, los procesos de pensamiento matemático, la complejidad de conceptos matemáticos, las asociadas a las actitudes afectivas y emocionales y las asociadas al desarrollo cognitivo del estudiante” (Errores y Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas.).

El esquema 2 permite visualizar los diferentes aspectos asociados al error cometidos por los estudiantes en matemáticas, donde se plantea el tipo de error que puede cometerse en álgebra, las cualidades generales por las que se caracteriza un error, las causas o dificultades que posee un estudiante y unas acciones curriculares que se pueden realizar partiendo del error.

**Esquema 2. Aspectos Asociados al Error:**

Fuente: La presente investigación

Existen diferentes factores que influyen para que un estudiante cometa errores en el álgebra. Unos ya están determinados anteriormente por Martín Socas desde lo didáctico, la complejidad de la misma álgebra, la actitud del estudiante y dificultades cognitivas, pero otros tienen que ver con la familia y el medio sociocultural en el que está inmerso el estudiante. Esta idea se visualiza en el esquema 3.



Esquema 3. Variables Intervinientes en el Estudio del Error

Fuente: La presente investigación

Brousseau, Davis y Werner (Citados en Rico , 1995) expresan: Los estudiantes piensan frecuentemente acerca de sus tareas matemáticas de un modo muy original, bastante diferente de lo que esperan sus profesores. Cuando esta vía de pensamiento original se muestra inesperadamente útil, admiramos su poder y decimos que el estudiante ha tenido una comprensión inusual; pero cuando, por el contrario, este modo personal de pensamiento omite algo que es esencial, decimos usualmente que el 25 estudiante ha cometido un error. De hecho, ambos casos tienen mucho en común, en particular el dato de que las ideas en la mente del alumno no son las que el profesor espera. (p. 7).

5.4 Pensamiento variacional

Desde la concepción de los lineamientos curriculares, el pensamiento variacional es uno de los cinco pensamientos que presupone superar la enseñanza por contenidos y fragmentada de la matemática a una concepción holística que permita analizar, organizar, y modelar

matemáticamente situaciones de variación de su entorno, de las ciencias y de las mismas matemáticas a través de expresiones algebraicas.

En este sentido, para formar al estudiante dentro de este pensamiento, debe ampliarse su desarrollo a toda la educación básica y media. Es más, históricamente, el estudio de la variación se remonta a las tablas babilónicas, luego continúa en el renacimiento con las fórmulas algebraicas y posteriormente, con el estudio del movimiento, se configura el cálculo diferencial e integral como uno de los estadios más altos del pensamiento variacional.

Según el MEN algunos núcleos conceptuales donde hace presencia la variación, son:

- “ El continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
- La función como dependencia y modelos de función;
- Las magnitudes;
- El álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
- Modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado. ”(minieducación.gov.co.lineamientos)

En los contextos de la vida cotidiana, la variación se presenta en su interdependencia de unas medidas con otras: precio versus artículos, lado del cuadrado relacionado con su área, velocidad en relación con el tiempo, etc.

Si se abordan los contenidos antes mencionados en contextos de variación, con seguridad que se desarrolla el pensamiento variacional desde los grados inferiores. Sin embargo, este pensamiento es expresado mediante los sistemas de representación. De esta manera tenemos los

enunciados verbales, las representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, las representaciones pictóricas e icónicas, las fórmulas y las expresiones analíticas.

5.5 Errores en el aprendizaje del álgebra

En el diccionario Larousse se define error como opinión o juicio falso. Según Vicente Carrión “se considera que el error es un conocimiento deficiente, insuficiente, imperfecto, defectuoso, escaso o incompleto; una desviación de un conocimiento establecido. Siempre existe la posibilidad de la presencia, la permanencia y la persistencia de errores en la adquisición, desarrollo y consolidación del conocimiento científico”. (Carrión, 2007).

En esta investigación se asume el error como una falencia cometida de forma sistemática, frecuente y no ocasional (a diferencia de un error momentáneo, ocasional, no frecuente), que hace presencia al resolver problemas o situaciones que involucran procesos algebraicos en el contexto del pensamiento variacional. Se los considera como algo inherente al proceso de aprendizaje; son sorprendentes, resistentes y se ocultan a la vista de los docentes. Según Socas (1997), es un esquema cognitivo inadecuado.

Asumir los procesos algebraicos desde el pensamiento variacional significa asumir las expresiones algebraicas que involucren situaciones de cambio y generalización. Sin embargo, estas sólo tienen sentido cuando se interrelaciona con los lenguajes icónico, gráfico y simbólico. Por tanto, el punto de llegada es la sintaxis de las reglas del álgebra y no su punto de partida. Así, el álgebra se convierte en una nueva forma de pensar la matemática, es la expresión de la generalidad.

“La expresión de la generalidad forma la raíz básica del álgebra porque ésta les da significado a los símbolos que después hay que manipular. Expresar la generalidad que uno percibe es tanto un placer como un esfuerzo.” (Mason, 1999)

La cita anterior convida a los docentes de álgebra a crear espacios y situaciones contextuales que permitan determinar las cantidades constantes y variables y establecer las relaciones entre ellas a partir de las expresiones algebraicas. Es en este contexto del álgebra donde se analizarán las dos categorías de errores:

5.5.1 La comprensión de la aritmética por parte del estudiante

En cierta forma el álgebra es la representación simbólica de generalizaciones de cantidades expresadas inicialmente a través de números que muestran un comportamiento de variaciones regular. Por eso es que se necesita que los procesos y relaciones que se establecen con magnitudes expresadas en cantidades numéricas sean asimilados primero en aritmética para que sean luego de fácil comprensión cuando se presentan algebraicamente.

El álgebra y la aritmética conservan una estrecha relación en el acto de enseñar y aprender.

El poseer vacíos conceptuales y procedimentales en la aritmética aumenta la probabilidad de cometer errores en el álgebra.

“A veces las dificultades que los estudiantes presentan en álgebra no son tanto dificultades en el álgebra como problemas que se quedan sin corregir en aritmética”
Martin Socas

5.5.2 El uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimientos

Algunos errores se deben a que los estudiantes usan inadecuadamente una fórmula o regla conocida que han extraído de un prototipo o libro de texto y que usan tal cual la conocen o adaptan incorrectamente a una situación nueva. Tienden así un puente para cubrir el vacío entre reglas conocidas y problemas no familiares. La mayoría de estos errores se originan como falsas generalizaciones sobre operadores o sobre números. (Booth, 1984)

5.6 Las situaciones didácticas

La teoría de las situaciones didácticas, concepción de Brousseau (1.986), afirma:

” El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba de aprendizaje “.

Una situación didáctica es una puesta en escena de un ambiente de trabajo planificado, diseñado y construido por un docente para que sus estudiantes adquieran un saber, un concepto o unas destrezas determinadas, utilizando materiales de cualquier índole, textos, papel, juegos; se definen las reglas de interacción con el contexto creado, cuando se coloca en funcionamiento el contexto, sus normas y relaciones, el estudiante interactúa en él, se adapta a él, se produce un efecto de enseñanza en el estudiante al adaptarse al medio creado y si manifiesta otras relaciones, otros conceptos; se ha producido en el alumno un cambio, se producido un aprendizaje.

La situación didáctica creada es un modelo de la interacción del estudiante con el medio, es una situación creada y manipulada por el maestro para que sus discípulos aprendan, para que se involucren en el medio y compartan, analicen y discutan sus ideas con sus compañeros.

El conocimiento matemático sigue este camino, es independizado del contexto por el matemático puro, que lo modela y expresa en el lenguaje técnico que maneja para su generalización.

El docente con sus recursos, libros y demás materiales, lo contextualizan para presentarlo a los estudiantes de una manera clara y lo más amena posible, sin entrar en la vulgaridad. (Etapas de formulación de la situación didáctica y generación entre estudiantes y profesor del contrato didáctico, que se puede dar implícita o explícitamente, en esta etapa, se presentan las actividades a realizar y como se va a desarrollar el trabajo)

Para generar un conocimiento, es importante que el alumno muestre interés en la solución de la situación planteada; el estudiante, entra en ese contexto creado por el profesor y al entender patrones y relaciones entre los elementos del medio, es guiado por el profesor, sin intervenir en la solución del problema, (etapa de acción), el momento cuando el estudiante es quien asume como propio el problema, generando una acción autónoma se presenta una situación a- didáctica, momento donde el profesor hace una devolución de la situación al alumno y es él quien tiene la responsabilidad de resolver la situación.

Ahora, es el estudiante quien busca la solución, expresa en palabras su hipótesis y operaciones desarrolladas y permite la discusión y validación de sus conjeturas por los demás compañeros.(etapa de validación o sanción), después de poner en orden las ideas e hipótesis de todo el grupo, se descontextualizan y si es posible se modelan matemáticamente y se enuncian como conocimientos matemáticos por los estudiantes o por el profesor, (etapa de institucionalización), el objetivo o fin de la secuencia didáctica se ha cumplido.

5.7 Situación a-didáctica

La situación a-didáctica es una etapa de la situación didáctica, donde el estudiante se independiza del profesor, para realizar sus propias conjeturas y observar desde su punto de vista las relaciones del medio creado para el aprendizaje de un tópico dado, en este momento es donde se da el aprendizaje, la situación didáctica elegida por el docente debe despertar interés, curiosidad y plantearse como un reto, para que se den en el alumno las adaptaciones deseadas, de manera que pueda resolverla actuando, hablando, reflexionando, discutiendo y analizando,

6. MARCO CONTEXTUAL

Para realizar la detección de errores frecuentes cometidos por estudiantes de grado octavo en el aprendizaje del álgebra, se ha considerado como contexto particular a los estudiantes de tres Instituciones Educativas Municipales: Técnico Industrial, Cabrera y Francisco de la Villota.

Al respecto de los estudiantes de grado octavo, hacen parte de la edad escolar entre los 12 y 14 años, que pertenecen a la educación básica secundaria establecida por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y que de acuerdo a los Lineamientos Curriculares y Estándares básicos de Competencias, participan en los procesos de enseñanza-aprendizaje del álgebra en sus respectivas instituciones.

6.1 Institución Educativa Municipal Técnico Industrial



Imagen 1. Fachada Institución Educativa Municipal Técnico Industrial

Fuente: La presente investigación

La I.E.M. Técnico Industrial, es una institución del sector oficial del Municipio de San Juan de Pasto, identificada ante el MEN con el código DANE 152001001064 pertenece a la zona urbana y se encuentra ubicada en la Carrera 27 No 4-35. Está ubicada en un sector en el que se

encuentran otras instituciones educativas: la Escuela Normal Superior de Pasto y Antonio Nariño. La población estudiantil atendida se ubica en los niveles socio-económicos de estrato 1 y 2. La I.E.M. Técnico Industrial está integrada por la Sede Central, las Sedes de San Vicente 1 y 2, y la Sede Rural Mapachico. Bajo la dependencia administrativa y económica del Municipio de Pasto.

En la actualidad el ITSIM ofrece las siguientes modalidades: Informática, Mecánica Automotriz, Mecánica Industrial, Electricidad, Industria de la Madera, Dibujo Técnico.

Misión: La I.E.M. Técnico Industrial, desde los niveles de preescolar, básica primaria, secundaria y media, crea ambientes educativos fortalecidos en la práctica de principios morales, valores humanos y el respeto por la diferencia, teniendo en cuenta su entorno sociocultural. En esta Institución se orientan los conocimientos de manera idónea y pertinente, y se fortalecen las habilidades y destrezas concernientes a la formación técnica industrial en las modalidades de: Dibujo Técnico, Electricidad, Industria de la Madera, Mecánica Industrial, Mecánica Automotriz e Informática. Se busca la formación integral de los estudiantes a través del desarrollo de competencias, habilidades y capacidades que les permita el buen y productivo uso de las tecnologías, contribuyendo con el desarrollo de su comunidad, ofreciendo servicio e investigación con pensamiento crítico y reflexivo.

Visión: Al 2020 la I.E.M. Técnico Industrial es reconocida como una institución altamente tecnificada, con personal docente cualificado, con currículo pertinente, articulada a la competitividad y sostenibilidad del sector productivo, certificada en procesos de calidad, brindando a la población estudiantil a nivel municipal y departamental la mejor opción en educación, para enfrentar su entorno laboral y emprendimientos, con una preparación técnica calificada y orientada hacia la preservación del medio ambiente.

6.2 Institución Educativa Municipal Francisco de la Villota



Imagen 2 Institución Educativa Municipal Francisco de la Villota

Fuente: La presente investigación

La I.E.M. Francisco de la Villota, es una institución del sector oficial del Municipio de San Juan de Pasto, identificada ante el MEN con el código DANE 252001003096 pertenece a la zona rural y se encuentra ubicada en el corregimiento de Genoy por la vía que conduce al Municipio de Nariño.

El Corregimiento de Genoy, se encuentra ubicado en el Departamento de Nariño al sur del País a 13 Km de la ciudad capital, muy cercano al Volcán Galeras, su temperatura es de 8 A 15°C, por lo tanto se puede gozar de dos climas el frio y el templado su altura es de 2700 m.s.n.m., posee 9 veredas: Genoy Centro (Donde se ubica la institución en estudio), El Edén, La Cocha, Pullitopamba, Aguapamba, Castillo Loma, Nueva Campiña, Charguayaco y Bella vista.

Los límites de este corregimiento son: Por el norte con el Municipio de Nariño, y el Corregimiento de la Caldera por el sur con el corregimiento de Mapachico, por el oriente con el corregimiento de Morasurco y por el occidente con el Municipio de Nariño.

La población estudiantil atendida se ubica en el nivel socio-económico 1. La I.E.M. Francisco de la Villota está integrada por la Sede Central y las Sedes Escuela Nueva de Changuayaco, Escuela Nueva Pulitopamba, Villa Maria, Escuela Integrada Genoy.

El profesor Arturo Muñoz describe algunos aspectos de interés de la institución en estudio: “La Institución Educativa Municipal Francisco de la Villota nace mediante Decreto 0360 del 26 de Agosto del 2003, como una estrategia Municipal de Pasto de organización del sector educativo para garantizar la prestación de una educación continua, articulada y vertical que facilite la educación por logros, favorecer la planeación, capacidad de gestión, auto control y el soporte físico y tecnológico del servicio educativo en el corregimiento de Genoy.

La Institución lleva su nombre en memoria del padre Francisco de la Villota y Barrera, quien Nació el 2 de enero de 1790 y era considerado el guía espiritual de Pasto. Hijo de Don Crisanto de la Villota y Doña María Ana de la Barrera, solía de niño jugar a celebrar la Misa y enseñaba a sus amigos el modo de realizar oración mental. Los estudios secundarios y parte de los profesionales los realizó con padres franciscanos. En la noche negra del 24 de Diciembre de 1822, cuando el batallón rifles entra en la ciudad de Pasto, y masacra de la manera más vil a cientos de ciudadanos pastusos, el padre de la Villota es sacado de la ciudad en un costal, por un campesino. El padre era considerado como un incitador y un peligro para los propósitos de los republicanos.”

Misión: Formar seres humanos en su pensamiento, gestores de desarrollo activos, participativos, afectivos, con la capacidad de reconocer, valorar y promover su identidad cultural, constructores y transformadores del mundo económico, cultural, natural y social, que

crean en sí mismas y en los valores de la vida en la familia en comunidad. Responsables autónomos, solidarios y activos. Fuentes vitales en la búsqueda de soluciones a los problemas y no partes residuales de ellas.

La misión de la institución es dirigida a formar al hombre que la sociedad requiere.

Visión: La IEM Francisco de la Villota, será una institución, promotora de desarrollo con un papel protagónico en la construcción de la sociedad, generadora de procesos nuevos asociados a los retos que impone la modernidad, será la cuna de los nuevos hombres de Genoy que requiere para que su cultura no se muera en el olvido. (Recuperado de <http://fransiscovillota.blogspot.com/>)

6.3 Institución Educativa Municipal Cabrera



Imagen 3. Institución Educativa Municipal Cabrera

Fuente: La presente investigación

La I.E.M. Cabrera, es una institución del sector oficial del Municipio de San Juan de Pasto, identificada ante el MEN con el código DANE 252001000500 pertenece a la zona rural y se encuentra ubicada al oriente de la ciudad de Pasto, en el corregimiento que tiene su mismo nombre, por la vía que conduce al Departamento de Putumayo. La población estudiantil atendida se ubica en el nivel socio-económico 1.

El corregimiento de Cabrera, se encuentra ubicado en el departamento de Nariño al sur del país al oriente de la ciudad de Pasto, a 4 Km de distancia, tiene una temperatura de 11°C y una altura de 2820 m.s.n.m., su territorio es de 19 Km², posee 5 veredas: Cabrera centro, donde se encuentra la institución educativa en estudio, Duarte, La paz, Purgatorio y Buenavista.

Los límites del corregimiento de Cabrera son:

Al nororiente con el Municipio de Buesaco, al noroccidente con el corregimiento de Buesaquillo, al sur con el corregimiento de San Fernando, al sur-oriente con el corregimiento de la Laguna.

La población estudiantil atendida se ubica en el nivel socio-económico 1. La I.E.M. Cabrera es de modalidad comercial, por lo que su educación está orientada al emprendimiento y al comercio.

Misión: La institución Educativa Municipal Cabrera tiene como misión formar estudiantes en el ser, el saber y el hacer, como agentes transformadores para mejorar la calidad de vida personal, familiar y social.

EN EL SER: Estudiantes honestos, responsables y líderes dinámicos.

EN EL SABER: Trabajo y producción en el cognitivo, en la investigación, en la aplicación de nuevas tecnologías de información y la comunicación.

EN EL HACER: Competencias ciudadanas, científicas y laborales aplicadas a la vida productiva a nivel local, regional y nacional.

Visión: La Institución Educativa Municipal Cabrera, será el eje en el desarrollo académico, productivo y social garantizando cobertura y permanencia de sus estudiantes desde preescolar hasta el grado once, impulsando su continuidad en la educación técnica o superior preparándolos para el liderazgo social y en el mundo laboral actual.

A continuación, se puede observar la ubicación geográfica de las Instituciones que hacen parte de la presente investigación.



Imagen 4. Ubicación Geográfica de las Instituciones en estudio

Fuente: <http://www.pasto.gov.co/index.php/nuestro-municipio/mapas-de-pasto>

7. MARCO LEGAL

En Colombia, la educación es concebida como un proceso de formación permanente, personal cultural y social que se fundamenta en una concepción integral de la persona humana, de su dignidad, de sus derechos y de sus deberes.

El estudio de errores más frecuentes cometidos por estudiantes de grado octavo en el aprendizaje del álgebra, se enmarca en la normatividad colombiana que define, regula y da pautas para el desarrollo de los procesos educativos en los establecimientos educativos, el marco legal se sintetiza en la Imagen que se presenta a continuación:

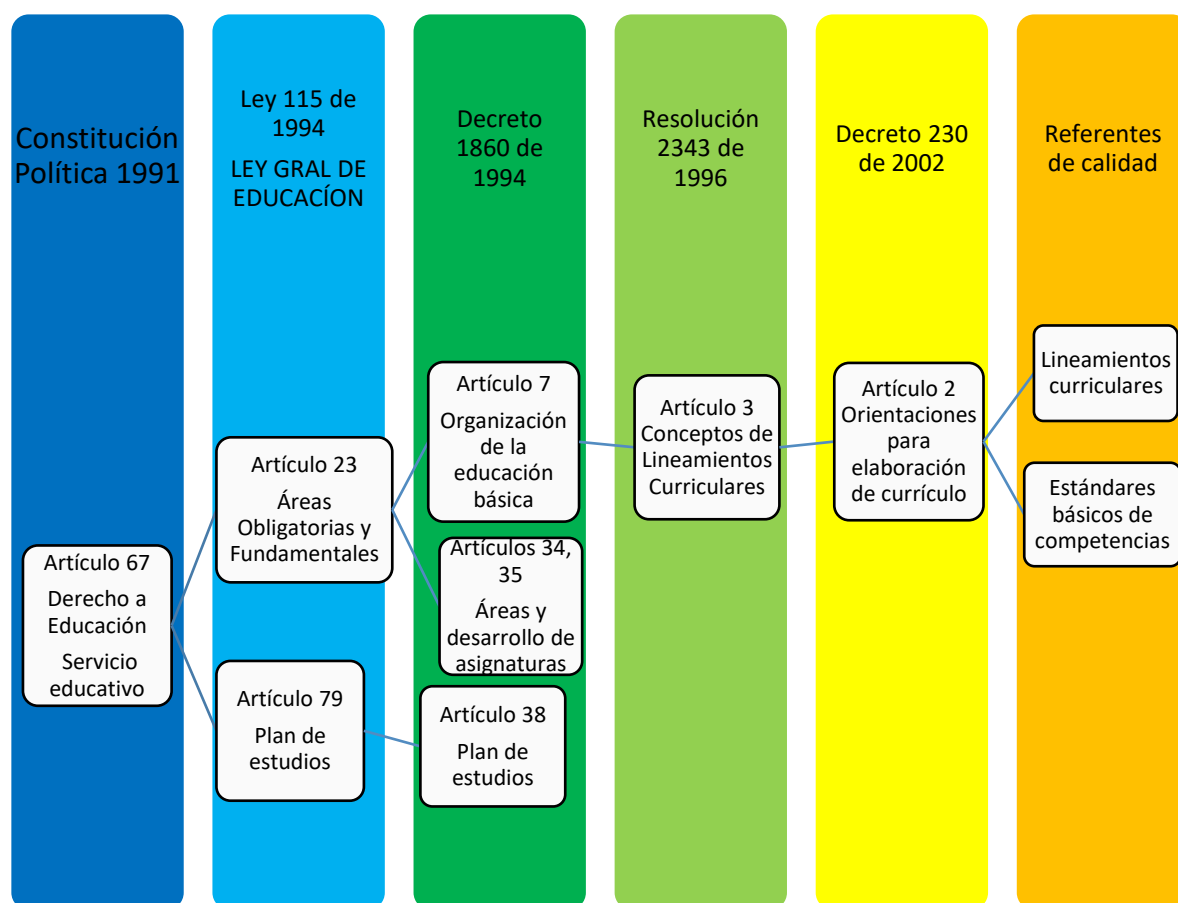


Imagen 5. Marco legal educación matemática Colombiana.

Fuente: La presente investigación

La Educación colombiana se contempla desde su máxima norma, la **Constitución Política de 1991**, en ella se describe en el Artículo 67 el derecho a la educación y las características fundamentales del servicio educativo:

“ARTICULO 67. La educación es un derecho de la persona y un servicio público que tiene una función social; con ella se busca el acceso al conocimiento, a la ciencia, a la técnica, y a los demás bienes y valores de la cultura.

La educación formará al colombiano en el respeto a los derechos humanos, a la paz y a la democracia; y en la práctica del trabajo y la recreación, para el mejoramiento cultural, científico, tecnológico y para la protección del ambiente.

El Estado, la sociedad y la familia son responsables de la educación, que será obligatoria entre los cinco y los quince años de edad y que comprenderá como mínimo, un año de preescolar y nueve de educación básica.

La educación será gratuita en las instituciones del Estado, sin perjuicio del cobro de derechos académicos a quienes puedan sufragarlos.

Corresponde al Estado regular y ejercer la suprema inspección y vigilancia de la educación con el fin de velar por su calidad, por el cumplimiento de sus fines y por la mejor formación moral, intelectual y física de los educandos; garantizar el adecuado cubrimiento del servicio y asegurar a los menores las condiciones necesarias para su acceso y permanencia en el sistema educativo.

La Nación y las entidades territoriales participarán en la dirección, financiación y administración de los servicios educativos estatales, en los términos que señalen la Constitución y la ley.”

Teniendo en cuenta que por disposiciones constitucionales es responsabilidad de la sociedad, la familia y el estado, velar por el ofrecimiento de una educación de calidad y equidad,

en el Estado los organismos legisladores y reguladores, (Congreso de la República, Ministerio de Educación Nacional y los entes territoriales), con el fin de velar por la calidad de la educación, por el cumplimiento de sus fines y por la mejor formación moral, intelectual y física de los educandos en la llamada “reforma educativa” emiten y reglamentan la Ley 115 de 1994 o Ley General de Educación, en la que se regula la política educativa publica en el nivel básica y media y se propone una renovación curricular en las áreas encaminada al mejoramiento de la calidad.

La **Ley 115 de 1994**, de conformidad con el artículo 67 de la Constitución Política, define y desarrolla la organización y la prestación de la educación formal y la educación superior, no formal e informal.

La educación formal se organiza en tres niveles: a) el preescolar, que comprenderá mínimo un grado obligatorio, b) la educación básica, con una duración de nueve grados que se desarrollará en dos ciclos: La educación básica primaria de cinco grados y la educación básica secundaria de cuatro grados y , c) la educación media con una duración de dos grados.

En el contexto de la investigación, el álgebra es una asignatura adscrita en el área de Matemáticas en la educación básica secundaria, en grado octavo de las instituciones en estudio, motivo por el cual es de importancia destacar que en la Ley 115 En el Artículo 23 define las áreas obligatorias y fundamentales, en las que se encuentra el área de Matemáticas.

ARTÍCULO 23. ÁREAS OBLIGATORIAS Y FUNDAMENTALES. Para el logro de los objetivos de la educación básica se establecen áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento y de la formación que necesariamente se tendrán que ofrecer de acuerdo con el currículo y el Proyecto Educativo Institucional.

Los grupos de áreas obligatorias y fundamentales que comprenderán un mínimo del 80% del plan de estudios, son los siguientes:

- *Ciencias naturales y educación ambiental.*

- *Ciencias sociales, historia, geografía, constitución política y democracia.*
- *Educación artística y cultural.*⁺
- *Educación ética y en valores humanos.*
- *Educación física, recreación y deportes.*
- *Educación religiosa.*⁺⁺
- *Humanidades, lengua castellana e idiomas extranjeros.*
- *Matemáticas.*
- *Tecnología e informática.*

Por otra parte, toda Institución Educativa Municipal, en cumplimiento de las normas, debe organizar el currículo para orientar las prácticas pedagógicas, el artículo 79 de la Ley 115, define el plan de estudios y describe la estructura básica del mismo:

+Numeral 3 modificado por el artículo 65 de la Ley 397 de 1997, publicada en el Diario Oficial No. 43.102 del 7 de agosto de 1997. Texto original numeral 3), artículo 23 de la Ley 115 de 1994: 3. Educación artística.

++Numeral 6o. declarado EXEQUIBLE por la Corte Constitucional mediante la Sentencia C-555-94 del 6 de diciembre de 1994, Magistrado Ponente Dr. Eduardo Cifuentes Muñoz.

ARTÍCULO 79. PLAN DE ESTUDIOS. Es el esquema estructurado de las áreas obligatorias y fundamentales y de áreas optativas con sus respectivas asignaturas, que forman parte del currículo de los establecimientos educativos.

En la educación formal, dicho plan debe establecer los objetivos por niveles, grados y áreas, la metodología, la distribución del tiempo y los criterios de evaluación y administración, de acuerdo con el Proyecto Educativo Institucional y con las disposiciones legales vigentes

El **Decreto 1860 de 1994**, reglamenta parcialmente la ley 115 en aspectos pedagógicos y organizativos generales. En el artículo 7, se normaliza la organización de la educación básica como prerrequisito para la educación media y superior, los artículos 34,35 y 38, Redefinen las áreas, el desarrollo de las asignaturas y el plan de estudios considerando aspectos que como mínimo debe abordar cada institución, con este decreto, se otorga autonomía a las instituciones para incluir grupos de áreas o asignaturas con el fin de lograr los objetivos del Proyecto Educativo Institucional, la aplicación de estrategias y métodos pedagógicos conducentes a mejorar el desarrollo cognitivo y fortalecer la capacidad crítica, reflexiva y analítica de los estudiantes.

Posteriormente, atendiendo el principio constitucional de propender por la unidad nacional, y dando respuesta a los artículos 78 (Regulación del currículo) y 148 (Funciones del Ministerio de Educación Nacional, numeral 1, literal b) se definen los lineamientos e indicadores de logros curriculares para que en todas las instituciones educativas del país, se asegure la formación integral de los educandos dentro de la caracterización y particularidad de cada proyecto educativo institucional, a través de la **Resolución 2343 de 1996**, en el artículo 3, donde proporciona el concepto de lineamientos curriculares.

En el **Decreto 230 de 2002**, artículo 2, literales a, b y c, reglamenta los parámetros a tenerse en cuenta en el currículo, a saber:

“a) Los fines de la educación y los objetivos de cada nivel y ciclo definidos por la Ley 115 de 1994;

b) Las normas técnicas, tales como estándares para el currículo en las áreas obligatorias y fundamentales del conocimiento, u otros instrumentos para la calidad, que defina y adopte el Ministerio de Educación Nacional;

c) Los lineamientos curriculares expedidos por el Ministerio de Educación Nacional

De esta manera, propendiendo por el mejoramiento de la calidad fueron ajustados los llamados “referentes de calidad” conformados por la serie **Lineamientos Curriculares**, publicada a finales de 1998, concebidas como las orientaciones que el Ministerio de Educación Nacional define a nivel epistemológico, pedagógico y curricular para respaldar los procesos de fundamentación y planeación de las áreas, empleadas por las instituciones como referentes, y los **Estándares Básicos de Competencia**, como los criterios que determinan el grado de cumplimiento de las expectativas comunes de calidad por parte de los estudiantes y las instituciones, son los “aprendizajes que se espera que aprendan los estudiantes”, y se han especificado por grupos de grados (1 a 3, 4 a 5, 6 a 7, 8 a 9, y 10 a 11).

Por lo tanto, los estándares básicos de competencias, se constituyen en una guía para el diseño del currículo, el plan de estudios y el trabajo de enseñanza en el aula que se tienen en cuenta en la presente investigación.

Por otra parte, los estándares, por su carácter de criterios comunes son referentes para la formulación, aplicación de las evaluaciones externas, (Pruebas SABER) y el análisis de sus resultados, permite establecer comparaciones a nivel regional y nacional, convirtiéndose en fuente de investigación para el presente estudio.

8. METODOLOGÍA

8.1 Naturaleza del estudio

Es una investigación **mixta**, es de tipo **cuantitativa** por cuanto el tratamiento a la información recolectada de los estudiantes de octavo es estadística. Sin embargo, también tiene elementos **cualitativos** en cuanto a que se hace una interpretación y comprensión de sentido a las justificaciones expresadas en lenguaje escrito por parte de los estudiantes a cada una de las preguntas del cuestionario. Es una investigación de tipo **descriptivo**.

8.2 Contexto y participantes

La población en estudio son los 335 estudiantes pertenecientes a las instituciones Técnico Industrial, Francisco de la Villota y Cabrera, equivalente al 100%. Ver tabla 3.

Tabla 3.

Relación de Número de Estudiantes por institución

INSTITUCION EDUCATIVA MUNICIPAL	NUMERO DE CURSOS	NUMERO ESTUDIANTES JORNADA MAÑANA	NUMERO ESTUDIANTES JORNADA TARDE	TOTAL NUMERO DE ESTUDIANTES
Técnico Industrial	8	135	110	245
Francisco de la Villota	2	54	0	54
Sede Cabrera	1	28	0	26
TOTAL				335

Fuente: Secretaría de Educación Municipal de Pasto

La aplicación de cuestionarios se realizó con la totalidad de Francisco de la Villota y Cabrera y 228 estudiantes asistentes en el momento de la aplicación de los cuestionarios (de 245 matriculados) de la I.E.M Técnico Industrial para un total de 308 estudiantes.

Estas instituciones fueron seleccionadas por la secretaria de Educación Municipal en convenio con la Universidad de Nariño teniendo en cuenta los bajos resultados de las pruebas Saber aplicados en el grado noveno en el año 2009.

8.3 Técnicas e instrumentos

Las técnicas usadas en esta investigación son: el cuestionario de preguntas, la revisión de archivos (las planeaciones de matemáticas del grado octavo por cada institución y los cuadernos de estudiantes).

8.3.1 Cuestionarios

Teniendo en cuenta las dos categorías de análisis que se plantean para desarrollar esta investigación: “la comprensión de la aritmética” y “el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento en el aprendizaje del álgebra al iniciar su estudio”, se elaboró un cuestionario para cada una de ellas, ver (Anexo1). Dicho cuestionario plantea preguntas abiertas y semi-abiertas. Cada cuestionario se aplicó a 308 estudiantes pertenecientes a las instituciones ya mencionadas.

8.3.2 Revisión de archivos: Planeación en matemáticas y cuadernos escolares

El trabajo con estos dos instrumentos permitió dar una visión más amplia de la situación académica en cuanto a contenidos para cada institución, contrastando las planeaciones de matemáticas con los contenidos registrados en los cuadernos de los estudiantes, con el fin de diseñar cuestionarios acordes a los conceptos trabajados en el aula de clase.

8.4 Diseño y desarrollo de la investigación

8.4.1 Etapas de la investigación

Para llevar a cabo la investigación, se definieron 4 etapas cada una con sus fases de desarrollo que condujeron a realizar de una forma organizada el proceso investigativo, esta información se presenta en la siguiente tabla:

Tabla 4.

Etapas y fases de la investigación

ETAPAS	FASES
ETAPA 1. CONSTRUCCIÓN Y SOCIALIZACIÓN DEL PROYECTO	a) Revisión bibliográfica.
	b) Estructuración y sensibilización del anteproyecto.
	c) Reajuste y elaboración del Proyecto
	d) Socialización del Proyecto.
ETAPA 2. CONSTRUCCION DE INSTRUMENTOS	a) Revisión Bibliográfica
	b) Condiciones actuales del desarrollo de la programación de álgebra
	c) Diseño de los cuestionarios
	d) Validación de los cuestionarios
ETAPA 3. RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN	a) Revisión de los cuestionarios
	b) Aplicación de los cuestionarios
	c) Instrumentos de sistematización.
ETAPA 4. SISTEMATIZACIÓN, ANALISIS E INTERPRETACIÓN	a) Análisis e interpretación de resultados a las programaciones
	b) Análisis e interpretación de resultados a los cuestionarios
	c) Elaboración del informe final y socialización.

Fuente: La presente investigación

8.4.1.1 Etapa 1. Construcción y socialización del proyecto:

Esta etapa comprendió la búsqueda de información en diferentes fuentes y referentes bibliográficos sobre la temática y la creación de las primeras ideas que permitieron un acercamiento al problema de investigación y los objetivos, así como la estructuración de un marco teórico y metodológico. Bajo esta primera concepción, como hilo conductor del proyecto, los representantes de las entidades oferentes: Subsecretaría de Calidad Educativa del Municipio de Pasto, el Departamentos de Matemáticas y Estadística de la Universidad de Nariño y la I.E.M Técnico Industrial, en constantes reuniones de trabajo, procedieron a la selección de cuatro Instituciones Educativas Municipales para aplicar el Estudio, atendiendo a los resultados del nivel

de bajo logro obtenido por los estudiantes en el área de matemáticas en las pruebas Saber 9 aplicadas en el año 2009. Estas instituciones Educativas Municipales fueron: Francisco de la Villota, Cabrera, Antonio Nariño y la Institución Técnico Industrial. Seguidamente se procedió a sensibilizar a los directivos de cada una de ellas para que faciliten las diferentes actividades investigativas. Como resultado final, la I.E.M Antonio Nariño desistió del Proyecto argumentando el escaso tiempo para el desarrollo de las actividades curriculares por una gran cantidad de Proyectos de otro tipo que se están ejecutando en la misma. Por esta razón, la investigación mencionada sólo se llevará a cabo con estudiantes del grado octavo en las tres instituciones restantes. Esta etapa tuvo las siguientes fases:

a) Revisión bibliográfica. Es una fase presente en todo el proceso de construcción y desarrollo del Proyecto, puesto que el papel que juega la teoría en la investigación permite identificar el problema, construir el enfoque metodológico y contribuir al análisis de los resultados.

b) Estructuración y sensibilización del anteproyecto. En esta fase, una vez estructurado el anteproyecto, se procedió a presentarlo a la Subsecretaría de Calidad de la Educación del Municipio de Pasto, para su revisión y aceptación. Seguidamente se acordaron reuniones de trabajo para la selección de las Instituciones Educativas, objetos de estudio. Posteriormente se programó una reunión en la I.E.M Técnico Industrial donde se realizó la fase de sensibilización. A ella asistieron: Maricel Cabrera Rosero, como subsecretaria de Calidad Educativa del Municipio de Pasto; Nelson Achicaiza, como Rector de la Institución Técnico Industrial; Alberto Moncayo, como coordinador académico de la Institución Técnico Industrial, los profesores del área de matemáticas de la jornada de la mañana de la Institución Técnico Industrial y los investigadores en calidad de presentadores del anteproyecto. Las observaciones pertinentes se retomaron para su perfeccionamiento y posterior redacción del Proyecto.

c) Reajuste y elaboración del Proyecto. Bajo la lectura de los libros: “Iniciación al álgebra” de Martín M. Socas Robayna y “Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas” de Luis Rico R. y las observaciones realizadas en la reunión de sensibilización, permitieron la redacción del Proyecto, el cual fue socializado en la siguiente fase.

d) Socialización del Proyecto. Ya estructurado y teniendo en cuenta las observaciones, el proyecto se socializó en la Biblioteca de la Institución Técnico Industrial, con participación de la subsecretaria de Calidad del Municipio, La universidad de Nariño, los Rectores de las Instituciones Técnico Industrial y Francisco de la Villota, algunos coordinadores y docentes del área de matemáticas y humanidades. En esta reunión se acordó que la IEM Técnico Industrial sea la sede del Proyecto para lo cual se asignó una oficina.

En la Institución Educativa Cabrera se llevó a cabo la socialización con participación de todos los docentes en el salón de actos. En la Institución Francisco de la Villota se llevó a cabo con participación de los docentes de matemáticas y el rector de la institución.

8.4.1.2 Etapa 2. Construcción de instrumentos:

Esta etapa hace referencia a la construcción de instrumentos de recolección de información, la cual se clasifica en dos partes: la información que caracteriza la situación del álgebra en cuanto a su programación y desarrollo hasta el Segundo Periodo, y la información que permite identificar los errores cometidos por los estudiantes al iniciar el aprendizaje del álgebra. En este sentido, la etapa comprende tres fases:

a) Revisión Bibliográfica. En esta fase son fundamentales las lecturas de los libros: “*Álgebra: Children’s Strategies and Errors*”, de Lesley Booth (1984). “Análisis y Clasificación de errores” de Martín Socas (1996), «La adquisición del lenguaje álgebraico y la detección de errores comunes cometidos en álgebra por alumnos de 12 a 14 años» de María de las Mercedes

Palarea Medina (1998), puesto que proporcionan pautas para elegir criterios de clasificación de errores.

b) Condiciones actuales del desarrollo de la programación de álgebra del grado octavo. En esta fase se construyó un instrumento que cruza las variables: institución, contenidos álgebraicos programados para el año 2011, avance en el desarrollo de la Programación, enfoque del área y tipo de problemas. El conocimiento de estas categorías permitió el diseño de los cuestionarios. (Ver Anexo A)

c) Diseño de los cuestionarios de preguntas en relación a las siguientes categorías: *la comprensión de la aritmética y el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento*. Se formularon dos cuestionarios, uno por categoría, cada cuestionario está compuesto de 4 y 9 preguntas respectivamente, cada pregunta se elaboró teniendo en cuenta los cuestionarios de la investigación *Álgebra: Children's Strategies and Errors* (Booth, 1984), adecuando al contexto local.

d) Validación de los cuestionarios. Teniendo en cuenta que en el proceso de enseñanza aprendizaje hay esencialmente dos partes constitutivas, que mediante actividades de conocimiento comparten saberes, para el estudio de los errores más frecuentes cometidos por estudiantes de grado octavo al iniciar el aprendizaje del álgebra (estudio de polinomios), se hace necesario validar la información de los cuestionarios desde dos perspectivas, la de los docentes y profesionales a fines, y desde la perspectiva de los estudiantes. Para cada caso se han determinado instrumentos y aspectos de validación en relación con la experiencia cognitiva con el álgebra escolar, que contribuyen a verificar la validez a través de la triangulación de las técnicas empleadas.

Validación por parte de los docentes y profesionales a fines.

Por una parte, para la validación desde la primera perspectiva, se seleccionó a cinco (5) profesionales, con conocimientos y experiencia de gran aporte para la investigación, estos colaboradores son: la doctora Alejandra Ordoñez López, psicóloga; el ingeniero de sistemas Fidel Alfonso Zambrano y los docentes de matemáticas: Laura Karola Salazar Paz, Romel Alfredo Riascos y Rafael Bastidas, con experiencia en secundaria y educación superior, quienes evaluaron la información presentada en los 4 cuestionarios.

Para llevar a cabo el proceso de validación de los cuestionarios elaborados, se consideró adecuado diseñar un formato cerrado con *seis aspectos* a evaluar por parte de los profesionales, estos aspectos son: 1) *redacción*, con el fin de verificar las instrucciones estipuladas como preguntas y literales de cada uno de los cuestionarios. 2) *la claridad de los datos de la pregunta*, aspecto que conjuntamente permite unificar el grado de comprensión de la información suministrada.

En cada cuestionario se delimitaron ciertas temáticas consideradas como imprescindibles en el proceso de enseñanza – aprendizaje del álgebra inicial que se trabaja en el grado octavo, esencialmente en el manejo del lenguaje álgebraico, operaciones básicas con expresiones álgebraicas, monomios, binomios y algunos polinomios. Teniendo en cuenta los estudios realizados por Socas (1995), existen algunas variables en cada categoría de análisis que se denominan para la presente investigación como subcategorías y que encierran un grupo de preguntas alusivas a las mismas, de esta manera, se pretende que los colaboradores profesionales evalúen también la 3) *pertinencia de las preguntas en relación a la temática* (subcategoría) y 4) *la pertinencia de las mismas en relación con la categoría*.

Por otra parte, es importante que los profesionales valoren el grado de 5) *contextualización de la pregunta*, teniendo en cuenta que los cuestionarios fueron elaborados con base en los ya existentes en el Reino Unido aplicados en el estudio “*Álgebra: Children’s Strategies and Errors*” de Lesley Boot(1984) y fueron adecuados al contexto de la educación colombiana y en especial al micro contexto del aula que se desarrolla en las instituciones de estudio.

Considerando que los profesionales seleccionados para validar los cuestionarios conocen el campo álgebraico, su lenguaje, sus procesos de solución, los profesionales evalúan también, 6) *el tiempo estipulado* para cada cuestionario verificando si es apropiado y acorde con el grado de dificultad y la edad de los estudiantes que desarrollan los mismos.

Todos los aspectos mencionados se evalúan de acuerdo a una escala de puntuación de 1 a 5, siendo 1 el menor grado de medición y 5, el mayor.

Una vez diligenciados los formatos de validación se procedió a sistematizar las puntuaciones para determinar si cada pregunta cumple con el ochenta por ciento (80%) de aprobación para ser aplicada y si en conjunto el cuestionario es validado con un promedio de puntuación igual o superior a cuatro (4.0). Ver anexo B: Validación profesionales, para observar las puntuaciones por pregunta en cada cuestionario. Los resultados generales se presentan a continuación:

Tabla 5.

Relación de cuestionarios y datos de validación.

CUESTIONARIO	PROMEDIO GENERAL	PORCENTAJE	VALIDADO
3	4,36666667	87%	SI
4	4,46153846	89%	SI

Fuente: La presente investigación

Como se observa en la Tabla 5, cada cuestionario cumple las condiciones de validación, razón por la cual dichos formatos de preguntas se consideran apropiados para el presente estudio.

Adicionalmente, se realizaron sugerencias por parte de los profesionales, para la reestructuración de los cuestionarios, la información se describe para cada cuestionario en el siguiente cuadro comparativo en el que se observa la recomendación a la respectiva pregunta, los cambios en relación se subrayan en cada pregunta:

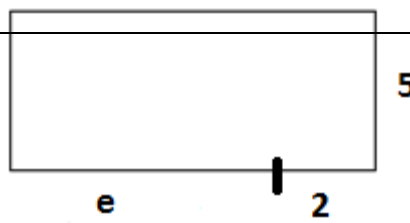
- Cuestionario Número 3 **LA COMPRENSIÓN DE LA ARITMÉTICA POR PARTE DE LOS ESTUDIANTES.**

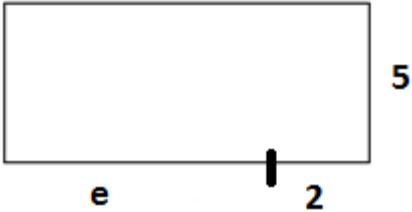
PREGUNTA	SUGERENCIA
1) Realiza las siguientes operaciones: c) $\frac{3}{5}b$ por $\frac{7}{3}b =$ d) $\frac{4}{7}c / \frac{5}{9}c =$	Revisar la conveniencia de emplear estos símbolos. También en el cuestionario 4 $\frac{3}{5}b \cdot \frac{7}{3}b =$ $\frac{4}{7}c \div \frac{5}{9}c =$
1. a) Como se puede escribir la siguiente expresión $-(a + b)$. Escoge la respuesta correcta, de no existir escríbela.	Es importante unificar el tipo de pregunta para no confundir al estudiante podría ser: Los puntos o preguntas 2 y 3 , presentan un

• $-a + b$ • $a - b$ • $a + b$ • ¿Otra? ¿Cuál?	enunciado y tres opciones de respuesta correcta, si entre ellas consideras que no está, escribe tu respuesta. 2. a) Como se puede escribir la siguiente expresión $-(a + b)$. • $-a + b$ • $a - b$ • $a + b$ • ¿Otra? ¿Cuál? De la misma manera para 3 y 4.
Marca la respuesta correcta para la expresión $(-1)^4$	En redacción: <u>La expresión</u> $(-1)^4$ <u>es igual a</u>

- Cuestionario Número 4 **USO INAPROPIADO DE FÓRMULAS O REGLAS DE PROCEDIMIENTO**

PREGUNTA	SUGERENCIA
1. Como se puede escribir la siguiente expresión $a \cdot (b + c)$. Escoge la respuesta correcta. • $ab + c$ __ • $b + ca$ __ • $(b + c) \cdot a$ __ • $a + b + c$ __ • ¿Otra? ¿Cuál?	Unificar las opciones de respuesta (literales) y el tipo de pregunta. Para los puntos 1,2 y 3 Señalar la respuesta correcta 4, 5 y 6 Señalar o proponer la respuesta correcta
4. ¿Cuál de las siguientes expresiones se puede escribir para el área de este rectángulo? Marca la respuesta que consideres correcta.	Marca la respuesta correcta. La expresión que determina el área del rectángulo es:



	
6. Si $\frac{A+B}{c} = \frac{A}{c} + \frac{B}{c}$ que puedes escribir de la siguiente expresión $\frac{x}{y+z}$. Escoge la respuesta correcta.	Redactar mejor... Si $\frac{A+B}{c} = \frac{A}{c} + \frac{B}{c}$ entonces $\frac{x}{y+z}$ es igual a:

Validación por parte de los estudiantes

Para validar los cuestionarios desde las perspectiva de los estudiantes, el 9 de septiembre del 2011 se aplicaron, a manera de prueba piloto, 83 cuestionarios en los grados octavos de la jornada de la mañana de la Institución Educativa Municipal INEM de Pasto; así: cuestionario número tres, grado 8-1 con 22 estudiantes; cuestionario número cuatro, en el grado 8-3 con 26 estudiantes; cabe anotar que los cuestionarios se aplicaron en horas de clase, con la orientación del grupo investigador y el acompañamiento de los docentes de matemáticas de la institución INEM.

Los aspectos que se tuvieron en cuenta en la validación de los cuestionarios son:

- **El tiempo** estimado para el desarrollo de cada cuestionario confrontado con el tiempo real de ejecución en la prueba piloto.
- **El lenguaje.** Si la redacción de la pregunta es adecuada para la comprensión de los estudiantes.

- **La ocurrencia de error por pregunta.** Número de estudiantes con respuestas correctas y respuestas incorrectas.

Para determinar **el tiempo** empleado en la solución de los cuestionarios se tuvo en cuenta los siguientes datos:

- La hora de inicio de la prueba.
- La hora de entrega por parte del estudiante, la cual se subraya en la parte superior de cada cuestionario.

Tabla 6.

Promedio tiempo prueba piloto.

Cuestionario	Hora de inicio	Promedio tiempo empleado en minutos
3	07:00 a.m.	63,91
4	08:20 a.m.	39,58
	Promedio general	51,75

Fuente: La presente investigación

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos, se determinó que el tiempo para que el estudiante desarrolle cada cuestionario de la presente investigación, sea de una hora y quince minutos (1:15).

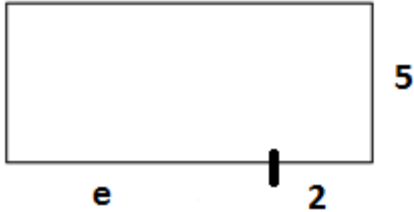
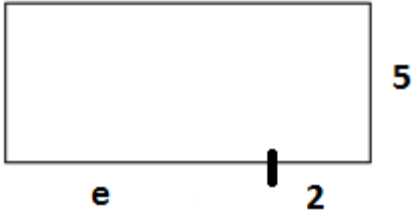
Para determinar si el lenguaje empleado en los cuestionarios es el adecuado, es decir, que las instrucciones y simbología sean claras y comprensibles para los estudiantes, se usó la técnica de observación, en la cual, se consignó en un cuaderno de observaciones las inquietudes de algunos estudiantes. Se evidenció algunos errores de redacción que conducían a faltas de comprensión de la pregunta; en consecuencia se reformularon algunos términos utilizados en las preguntas. Estos cambios se presentan a continuación.

MODIFICACIONES A LOS CUESTIONARIOS

CUESTIONARIO NUMERO 3	
PREGUNTA DE PRUEBA PILOTO	PREGUNTA MODIFICADA
1. ¿Qué puedes escribir de las siguientes expresiones?	1. Realiza las siguientes operaciones Se eliminó de este punto el literal a) y paso a ser el numeral d) del punto cuatro (4)
2. a) Como se puede escribir la siguiente expresión $-(a+b)$. Escoge las respuestas correctas.	a) Como se puede escribir la siguiente expresión $-(a+b)$. Escoge la respuesta correcta, de no existir escríbela.
b) Como se puede escribir la siguiente expresión $-\frac{a+b}{c}$. Escoge las respuestas correctas. • $\frac{-(a+b)}{c}$ — • $\frac{a+b}{-c}$ — • $\frac{-a-b}{c}$ — • ¿Otra? ¿Cuál?	b) Como se puede escribir la siguiente expresión $-\frac{a+b}{c}$. Escoge la respuesta correcta. • $\frac{-(a+b)}{c}$ — • $\frac{a+b}{-c}$ — • $\frac{-a-b}{c}$ — Se eliminó la última opción
3. a) Cuáles son los resultados para la expresión $(-1)^4$. Marca las respuestas correctas. • 4 • -4 • -1 • 1 • ¿Otra? ¿Cuál?	3. a) Marca la respuesta correcta para la expresión $(-1)^4$. • 4 • -4 • -1 • 1 Se eliminó la última opción
b) Cuáles son los resultados para la expresión	b) Marca la respuesta correcta para la

$(-1)^3$. Marca las respuestas correctas. • 3 • -3 • 1 • -1 • ¿Otra? ¿Cuál?	expresión $(-1)^3$. • 3 • -3 • 1 • -1 Se eliminó la última opción
4. Que puedes escribir sobre las siguientes expresiones: a) $a^3 * a^2$? b) $c^3 + d^2$? c) $b^2 + c^2$	5. Realiza las siguientes operaciones: a) a^3 <i>por</i> $a^2 =$ b) $c^3 + d^2 =$ c) $b^2 + c^2 =$ d) $\frac{c^5}{c^2} =$

CUESTIONARIO NUMERO 4	
PREGUNTA DE PRUEBA PILOTO	PREGUNTA MODIFICADA
1. Como se puede escribir la siguiente expresión $a \cdot (b + c)$. Escoge las respuestas correctas. • $ab + c$ __ • $b + ca$ __ • $(b + c) \cdot a$ __ • $a + b + c$ __ • ¿Otra? ¿Cuál?	2. Como se puede escribir la siguiente expresión $a \cdot (b + c)$. Escoge la respuesta correcta . • $ab + c$ __ • $b + ca$ __ • $(b + c) \cdot a$ __ • $a + b + c$ __ • ¿Otra? ¿Cuál?

2. Escoja las respuestas para la expresión $(a + b)^2$. • $a^2 + b^2$ __ • $a + b^2$ __ • $2ab$ __ • $a^2 + b^2 + 2ab$ __ • $b^2 + a^2 + 2ab$ __ • ¿Otra respuesta? ¿cuál?	3. Escoja la respuesta que considere correcta para la expresión $(a + b)^2$. • $a^2 + b^2$ __ • $a + b^2$ __ • $2ab$ __ • $a^2 + b^2 + 2ab$ __
4. Como se puede escribir la expresión $\sqrt{a + b}$. Escoge las respuestas correctas. • $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ __ • $\sqrt{a} + b$ __ • $a + \sqrt{b}$ __ • $\sqrt{a + b}$ __ • ¿Otra? ¿Cuál?	3. Como se puede escribir la expresión $\sqrt{a + b}$. Escoge la respuesta correcta. • $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ __ • $\sqrt{a} + b$ __ • $a + \sqrt{b}$ __ • $\sqrt{a + b}$ __
4. ¿Cuál de las siguientes expresiones se puede escribir para el área de este rectángulo? Marca las respuestas que consideres correctas.  • $5 \times e + 2$ __	4. ¿Cuál de las siguientes expresiones se puede escribir para el área de este rectángulo? Marca la respuesta que consideres correcta. 

• $5 \times (e + 2)$__ • $10e$__ • $5 \times e^2$__ • $5 (e + 2)$__ • $e + 2 \times 5$__ • ¿Otra respuesta? ¿cuál?	• 5 por $e + 2$ __ • 5 por $(e + 2)$__ • 5 por e^2__ • $e + 2$ por 5__
4. Señale las respuestas que correspondan a la situación $e+2$ multiplicado por 3. • $e+6$__ • $3 \times (e+2)$ __ • $3 \times e^2$ __ • $3 (e + 2)$ __ • $3e + 6$ __ • $e + 2 \times 3$__ • ¿Otra respuesta? ¿Cuál?	5. Señale la respuesta que corresponda a la situación $e+2$ multiplicado por 3. • $e+6$__ • 3 por $(e+2)$ __ • 3 por e^2 __ • $3e + 6$ __ • $e + 2$ por 3__
6. a) Si $\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$ que puedes escribir de la siguiente expresión $\frac{x}{y+z}$. Escoge las respuestas correctas. • $\frac{x}{y} + z$ __ • $y + \frac{x}{z}$ __ • $\frac{x}{y} + \frac{x}{z}$ __ • ¿Otra? ¿Cuál?	6. Si $\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$ que puedes escribir de la siguiente expresión $\frac{x}{y+z}$. Escoge la respuesta correcta. • $\frac{x}{y} + z$ __ • $y + \frac{x}{z}$ __ • $\frac{x}{y} + \frac{x}{z}$ __ • ¿Otra? ¿Cuál?

8. a) Si $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = a + b$ entonces la expresión $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ se escribe: • $\frac{1}{a+b}$ — • $\frac{2}{a+b}$ — • $\frac{2}{ab}$ — • $\frac{1}{a.b}$ — • ¿Otra? ¿Cuál?	7. Si $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = a + b$ entonces la expresión $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ se escribe: • $\frac{1}{a+b}$ — • $\frac{2}{a+b}$ — • $\frac{2}{ab}$ — • $\frac{1}{a.b}$ — • ¿Otra? ¿Cuál?
9.a) Si $\frac{a.\cancel{x}}{b.\cancel{x}} = \frac{a}{b}$ entonces la expresión $\frac{ax+by}{x+y}$ es equivalente con: • $a + b$ — • $ax + by$ — • $\frac{ax+by}{x}$ — • $\frac{a+by}{y}$ — • ¿Otra? ¿Cuál?	8. Si $\frac{a.\cancel{x}}{b.\cancel{x}} = \frac{a}{b}$ entonces la expresión $\frac{ax+by}{x+y}$ es equivalente con: • $a + b$ — • $ax + by$ — • $\frac{ax+by}{x}$ — • $\frac{a+b}{2}$ — • ¿Otra? ¿Cuál?
10. ¿Qué puedes escribir de las	9. Realiza las siguientes operaciones y

siguientes expresiones?	encuentra el resultado
a) $\frac{1}{a} * a?$	a) $\frac{1}{a}$ <i>por</i> $a =$
b) $a + (-a)?$	b) $a + (-a) =$
c) $a * 1?$	c) a <i>por</i> $1 =$
d) $a + 0?$	d) $a + 0 =$
e) $a * 0?$	e) a <i>por</i> $0 =$

Se eliminaron de la prueba piloto las preguntas 6b, 7, 8b, 8c, 9b por que no suministran información relacionada con la categoría y subcategoría respectivamente. Y se añadieron encabezados por grupos de preguntas para responder a las necesidades de claridad en el lenguaje por parte de los estudiantes. Ver anexos cuestionarios finales.

8.4.1.3 Etapa 3. Recolección de información:

En esta etapa distinguen las siguientes fases:

a) Revisión Bibliográfica. En esta fase se destacan las lecturas de “Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales” de Vicente Carrión Miranda; “Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas” de Silvia Mónica del Puerto y Claudia Lilia Minnard, puesto que permiten una guía en la construcción de los instrumentos para la sistematización de los datos.

b) Aplicación de los cuestionarios a los estudiantes de grado octavo de cada una de las instituciones en estudio. La aplicación se realizó en horas de clase, facilitadas por los docentes de matemáticas de grado octavo y quienes acompañaron durante la prueba. Hay dos momentos, la presentación del cuestionario por parte de los investigadores y el desarrollo el cuestionario. En la

presentación, se resaltan aspectos que los estudiantes deben tener en cuenta para la resolución del cuestionario, estos aspectos se enumeran a continuación:

- El cuestionario no tiene calificación, se resalta que el cuestionario no es un examen, se realiza con el fin de observar los procesos usados para llegar a la respuesta.
- Todas las preguntas deben ser resueltas y argumentadas, se pide a los estudiantes explicar cada respuesta, de acuerdo a conceptos adquiridos en clase.
- El cuestionario es personal, se solicita resolver de forma individual. El grupo de investigación, supervisó el desarrollo del cuestionario, en consecuencia no existió ningún tipo de copia.
- Resaltar el objetivo del cuestionario, explicando la finalidad de la investigación, la cual es encontrar los errores más frecuentes del álgebra, para mejorar el aprendizaje de la misma.



Fotografía 1. Aplicación de cuestionarios IEM Francisco de la Villota

Fuente: La presente investigación



Fotografía 2. Aplicación cuestionarios IEM Técnico Industrial

Fuente: La presente investigación



Fotografía 3. Aplicación IEM Cabrera

Fuente: La presente investigación

c) Instrumentos de sistematización. Paralelamente a la elaboración de los cuestionarios, se construyeron los instrumentos estadísticos para el procesamiento de la información.

8.4.1.4 Etapa 4. Sistematización, análisis e interpretación:

Consiste en pasar la información recolectada a las tablas elaboradas en la última fase de la Etapa 3, con el fin de observar la frecuencia de error; esta información permite el análisis y la interpretación de resultados. Las fases de esta etapa son:

a) Análisis e interpretación a los resultados de las programaciones se realiza la revisión de archivos institucionales relacionados con las programaciones del área para el año 2011 para grado octavo.

b) Análisis e interpretación de resultados a los cuestionarios análisis de las dos categorías, las cuales se estructuran mediante la descripción de los cuestionarios aplicados a la población, el planteamiento de las subcategorías, las preguntas y la descripción de los errores encontrados en cada una de las respuestas dada por los estudiantes y sus respectivas evidencias.

c) Elaboración del informe final y socialización

9. ANALISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

9.1 Análisis e interpretación de los contenidos de álgebra propuestos y cuadernos del grado octavo en las instituciones educativas.

Mediante la triangulación de las programaciones y los cuadernos de trabajo del estudiante se realizó el análisis y la interpretación de los datos, con base en algunos criterios, que permitieron obtener los resultados adecuados para la construcción de las preguntas de los cuestionarios. (Ver anexo A)

9.2 Análisis de contenidos de álgebra propuestos para grado octavo

Teniendo en cuenta los lineamientos curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional para el área de Matemáticas, se propone estructurar el currículo de matemáticas de acuerdo a tres dimensiones o aspectos dinámicos que se relacionan y deben estar presentes en todo acto educativo; estos son: los conocimientos básicos, relacionados con procesos específicos que desarrollan el pensamiento y sistemas propios de la matemática, como: el pensamiento numérico y los sistemas numéricos, el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, el pensamiento métrico y los sistemas de medida, el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos, y el pensamiento aleatorio y los sistemas de datos; los procesos generales, ligados al aprendizaje en las matemáticas, como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación, la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, y por último, el contexto, enmarcado en la solución de situaciones problemáticas que se generan en los ambientes de aprendizaje del estudiante para dar sentido a las matemáticas y está relacionado con el diseño y ejecución de experiencias que pueden involucrar situaciones originadas desde las mismas matemáticas, desde la vida diaria y a partir de otras ciencias.

Para realizar el análisis comparativo de las planeaciones de matemáticas de grado octavo presentadas por las tres instituciones participantes, se hacen las observaciones abordando las tres dimensiones, dando privilegio a la relación entre los “conocimientos básicos” y “los procesos generales” planteados en los lineamientos curriculares de matemáticas del Ministerio de educación Nacional.

La interrelación existente entre los “pensamientos” y “sistemas” en matemáticas, se observaron en las programaciones la relación entre los pensamientos variacional, geométrico y métrico.

Paralelamente, en los procesos generales, por el carácter del presente estudio se da relevancia al análisis de la comunicación matemática, ofreciendo la posibilidad de adentrarse en el estudio del lenguaje álgebraico. Finalmente, dentro del contexto, se tiene en cuenta el micro mundo del aprendizaje que se establece en cada institución y centra la atención en la solución de situaciones problemáticas relacionadas exclusivamente con la geometría como contexto de múltiples aplicaciones.

En la tabla 7, se expone la información suministrada por las instituciones, Técnico Industrial, Cabrera y Francisco de la Villota, relacionada con las programaciones de matemáticas para el primer periodo académico, interpretando el desarrollo de las tres dimensiones mencionadas anteriormente, con el fin de visualizar el estado actual de las condiciones curriculares en los procesos de enseñanza aprendizaje de las matemáticas de las instituciones en estudio.

Tabla 7.

Análisis comparativo de documentos de planeación por instituciones.

DIMENSIONES	ITSIM	CABRERA	FRANCISCO DE LA VILLOTA
CONOCIMIENTOS BÁSICOS	Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos. UNIDAD UNO: • Conjuntos numéricos • Números naturales • Números enteros • Números racionales • Números Irracionales • Números Reales Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos. UNIDAD DOS: • Expresiones algebraicas • Lenguaje algebraico • Monomios • Polinomios UNIDAD TRES: • Operaciones con expresiones algebraicas • Suma y resta de polinomios • Multiplicación de polinomios • División de polinomios	Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos. • Conjuntos numéricos • Números naturales • Números enteros • Números racionales • Números Irracionales • Números Reales Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos. • Expresiones algebraicas • Valor numérico • Operaciones con monomios • Suma y resta de polinomios • Producto de polinomios • Aplicación del álgebra a la geometría. Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos.	Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos. - Números reales - Expresiones decimales - Números irracionales - Operaciones con números reales - Notación científica - Ecuaciones con más operaciones. - Problemas de aplicación Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos. - Polinomios - Expresiones algebraicas - Polinomios - Adición de polinomios - Sustracción de

Tabla 7. (Continuación).

		• Polígonos • Clasificación de polígonos • Construcción de polígonos	polinomios 2.5. Multiplicación de polinomios 2.6. Cuadrado de un binomio 2.7. Suma por diferencia de un binomio 2.8. Producto de dos binomios con término común 2.9. Cubo de la suma y la diferencia de un binomio 2.10. Triángulo de Pascal 2.11. División de polinomios 2.12. División sintética 2.13. Cocientes notables
PROCESOS	Se contempla la comunicación matemática, específicamente el lenguaje álgebraico porque se proponen competencias, logros e indicadores de logro que permiten evidenciar el interés por desarrollar este importante proceso. Se describen las estrategias metodológicas propuestas para desarrollar los conocimientos básicos, el razonamiento, entre	Esta información no se hace evidente en la documentación suministrada por la institución, se limita únicamente a establecer contenidos a desarrollar durante el grado octavo en la asignatura de álgebra.	Esta información no se hace evidente en la documentación suministrada por la institución, se limita únicamente a establecer contenidos a desarrollar durante el grado octavo en la asignatura de álgebra.

Tabla 7. (Continuación).

	otros procesos a través del juego y la manipulación de materiales con el fin de enriquecer el pensamiento álgebraico en los estudiantes.		
CONTEXTO	Se presentan competencias relacionadas con el saber hacer, en las cuales se proponen actividades de aplicación en los campos geométrico, variacional y métrico como también situaciones de la cotidianidad en las que se desarrollan tipos de pensamiento matemáticos. A través de los indicadores de logro se especifica la evaluación que se planea.	Esta información no se hace evidente en la documentación suministrada por la institución, se limita únicamente a establecer contenidos a desarrollar durante el grado octavo en la asignatura de álgebra.	Esta información no se hace evidente en la documentación suministrada por la institución, se limita únicamente a establecer contenidos a desarrollar durante el grado octavo en la asignatura de álgebra.

Fuente: La presente investigación

Teniendo en cuenta que la estructura de las programaciones de matemáticas es diferente en cada institución, en los conocimientos básicos se toma textualmente los contenidos temáticos propuestos. Las instituciones Técnico Industrial y Cabrera conservan un grado de similitud al presentar los conocimientos básicos en el marco de los pensamientos numérico y variacional con sus respectivos sistemas numéricos, álgebraicos y analíticos. En la institución educativa Francisco de la Villota, no se especifican dichos pensamientos, sin embargo, se puede intuir que parte del numeral 1 hace alusión al pensamiento numérico y sistemas numéricos y que el numeral 2 contempla tópicos que pertenecen al pensamiento variacional y sistemas álgebraicos y analíticos.

Por otra parte, en lo que hace relación a los procesos generales y el contexto, no se tiene una información que permita comparar el desarrollo de los mismos, debido a que únicamente la institución educativa Técnico Industrial posee una programación en la que se relacionan aspectos como, objetivos, estándares, competencias con el saber, saber hacer y ser; estrategias metodológicas, recursos, la evaluación a través de logros e indicadores de logros, como elementos constitutivos del currículo, que permiten dar una visión global de los procesos y el contexto, como se puede observar en la siguiente figura.

INSTITUCIÓN EDUCATIVA MUNICIPAL TÉCNICO INDUSTRIAL DE PASTO PLANEAMIENTO INSTITUCIONAL AÑO LECTIVO 2011							
AR EA: MATEMÁTICAS				PERIODO 1 UNIDAD 1 2 y 3		GRADO: OCTAVO	
ESTANDAR	COMPETENCIAS			ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS	RECURSOS	EVALUACIÓN	
	SABER	SABER HACER	SER			LOGROS	INDICADORES DE LOGRO
PENSAMIENTO NUMERICO Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de	UNIDAD 1 CONJUNTOS NUMERICOS * Números naturales ■ Números enteros ■ Números racionales ■ Números irracionales ■ Números reales	INTERPRETATIVA 1. Identifi car la función de las variables dentro del contexto algebraico (como número generalizado, como objeto concreto, como elemento cambiante). 2. Reconocer, en situaciones concretas, el concepto de variación entre objetos matemáticos. 3. Establecer	Autoestima Persistencia Solidaridad. Competencia ciudadana. Tolerancia. Competencia ciudadana. Tolerancia. Competencia ciudadana. Respeto por las ideas ajenas. Competencia ciudadana. Persistencia.	Las estrategias metodológicas utilizadas para esta unidad son: La exposición clara, magistral motivada por historias y anécdotas en la construcción de los sistemas de numeración. Los estudiantes realizarán un mapa conceptual cada	Los recursos utilizados para esta unidad son: a) los utilizados por el estudiante como el cuaderno, las escuadras, el compás para representar los irracionales en la recta. b) los utilizados por el docente, como los	Identifica las características de un número dado. Representa números en la recta numérica.	Determina la pertenencia de un número a un conjunto numérico. • Reconoce las diferencias entre números que pertenecen a un otro conjunto numérico Identifica entre qué números racionales se puede encontrar otro número dado. • Realiza correctamente la construcción de un número irracional. • Establece relaciones de orden entre los elementos de un determinado conjunto numérico

Figura 8. Planeación I.E.M. Técnico Industrial.

Fuente: La presente investigación

Las instituciones educativas Cabrera y Francisco de la Villota sólo presentan ejes temáticos y contenidos. Esta información se considera insuficiente frente a la institución Técnico Industrial en lo que concierne a las planeaciones. Dichas listas temáticas se distribuyen en periodos o numerales, que sirven como herramienta orientadora para los docentes y estudiantes, quienes consignan en sus cuadernos dichas programaciones al inicio del año escolar. En la figura 9 y 10 no se observan logros, indicadores de logros o estándares, sin embargo estos contenidos conservan una relación que permite comparar el avance en las tres instituciones en estudio.

EJES TEMATICOS Y CONTENIDOS ASIGNATURA: MATEMATICAS OCTAVO		
PENSAMIENTO	CONTENIDO	PERIODO
NUMERICO SISTEMAS NUMERICOS	Y Conjuntos numéricos: Números naturales. ✓ Los números enteros. ✓ Números racionales. ✓ Números irracionales. ✓ Números reales. ✓	1º.
	Expresiones algebraicas. ✓ Valor numérico. ✓ Operaciones con monomios. ✓ Suma y resta de polinomios. ✓ Producto de polinomios. ✓ Productos notables. ✓	1º. 1º. 1º. 2º.
VARIACIONAL SISTEMAS ALGEBRAICOS ANALITICOS	Y División de polinomios. ✓ Y Cocientes notables. ✓ Factorización de polinomios. ✓ Fracciones algebraicas. ✓ Operaciones con fracciones algebraicas. ✓ Ecuaciones de primer grado con una incógnita. ✓ Inecuaciones. ✓ Función lineal. ✓ Aplicación del algebra a la geometría. ✓	2º. 2º. 2º. 3º. 3º. 3º. 3º. 1º. 2º. 3º. 4º.
ESPACIAL SISTEMAS GEOMETRICOS	Y Ángulos. Generalidades Triángulos. Clasificación de los triángulos. Construcción de triángulos rectángulos. Polígonos. Clasificación de polígonos. Construcción de polígonos.	3º. 3º. 3º. 3º. 1º. 1º.-2º.

Figura 9. Planeación I.E.M. Cabrera

Fuente: La presente investigación

Programacion grado octavo	
1. numeros reales	
1.1 expresiones decimales	
1.2 numeros irracionales	
1.3 operaciones con numeros reales	
1.4 notacion cientifica	
1.5 ecuaciones con mas operaciones	
1.6 problemas de aplicacion	
2. Polinomios	
2.1 expresiones algebraicas	
2.2 Polinomios	
2.3 adicion de Polinomio	
2.4 sustraccion de polinomios	
2.5 multiplicacion de Polinomios	
2.6 cuadrado de un binomio	
2.7 suma por diferencia de un binomio	
2.8 producto de dos binomios que tienen un termino comun	

Figura 10. Planeación I.E.M. Francisco De la Villota

Fuente: La presente investigación

En la historia del álgebra, se puede observar que no solo los símbolos forman parte de ella. Han sido, la geometría y la aritmética, quienes los utilizaron para dar respuesta a la necesidad de trascender de lo concreto a la generalización, constituyéndose en una piedra angular para el desarrollo del álgebra.

Estos aspectos deben tenerse en cuenta para desarrollar el “pensamiento variacional” en las instituciones de educación básica, puesto que no son las estructuras algebraicas la pretensión de su enseñanza en los grados anteriores al grado octavo sin una preparación desde el sistema variacional, permitiendo una mejor comprensión a la intencionalidad de la verticalidad de los estándares.

En la tabla 8, que se presenta a continuación se puede apreciar cómo un estándar del pensamiento variacional del grado primero a tercero es continuado verticalmente hasta el grado noveno.

Tabla 8.

Verticalidad estándares del pensamiento variacional, de grados 1°- 9°.

	PRIMERO A TERCERO	CUARTO A QUINTO	SEXTO A SEPTIMO	OCTAVO A NOVENO
REGULARIDADES Y SECUENCIAS	Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, geométrico, musical entre otros)	Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales.	Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas).	Usar procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas.
SECUENCIAS	Construir secuencias numéricas y geométricas, utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.	Construir secuencias numéricas y geométricas utilizando propiedades de los números y de las figuras geométricas.	Identificar las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc.) en relación con la situación que representan.	
RAZONES Y PROPORCIONES	Describir cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráfica.	Describir e interpretar variaciones representadas en gráficas. Analizar y explicar relaciones de dependencia en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.	Analizar las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos. Reconocer el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio(variación).	Modelar situaciones de variación con funciones polinómicas.
ECUACIONES	Reconocer y generar equivalencias entre expresiones numéricas.	Construir igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.	Utilizar métodos informales (ensayo y error, complementación) en la solución de ecuaciones.	Identificar relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.

Fuente: La presente investigación

9.3 Análisis cuadernos de álgebra grado octavo.

El análisis detallado de los cuadernos de matemáticas de estudiantes de grado octavo, describe el progreso en cuanto a contenidos, actividades y recursos que el docente emplea en el desarrollo de sus clases de matemáticas. Estos cuadernos fueron facilitados por estudiantes de cada institución, quien a criterio del docente, se destaca por su puntualidad, organización y responsabilidad. Este instrumento se adquirió en una misma fecha (16/08/2011) para las tres instituciones.

A continuación se realiza el estudio de dichos cuadernos de acuerdo a tres aspectos: Descripción de contenidos, procesos generales ligados al aprendizaje de las matemáticas y el contexto enmarcado en la solución de situaciones problemáticas que se generan en los ambientes de aprendizaje del estudiante. Estos aspectos fueron tomados de la propuesta realizada por el Ministerio de Educación Nacional para los lineamientos de matemáticas. (minieducación.gov.co.lineamientos-).

En el cuaderno de la I.E.M. Cabrera, se encuentran los contenidos como: conjuntos numéricos; se describe brevemente algunos conjuntos como los números naturales y enteros, (fig. 4), no se profundiza como se tenía estipulado en la programación, en la cual se planteaba trabajar además con los números racionales, irracionales y reales. Expresiones algebraicas: monomios, tipo de monomios, suma y resta de monomios, polinomios, suma y resta de polinomios, multiplicación y productos notables; estos contenidos se trabajaron de acuerdo a la programación, se hace un estudio detallado y completo para cada uno de ellos.

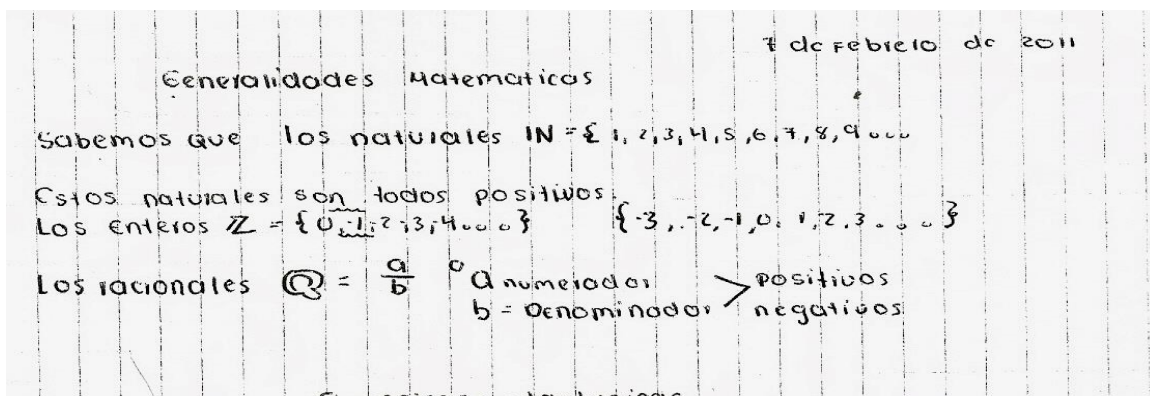


Figura 11. Cuaderno IEM. Cabrera, conjuntos numéricos.

Fuente: La presente investigación

El lenguaje algebraico se aborda mediante definiciones relacionadas a conceptos de álgebra, y luego, explicadas con ejemplos. Realiza descripción de las partes constitutivas de las expresiones algebraicas pertinentes. (Fig.12). No se encontraron registrados ejercicios

metodológicos que ayuden en la comprensión del significado de variable para la construcción futura de su concepto; solo la denomina como letra o parte literal.

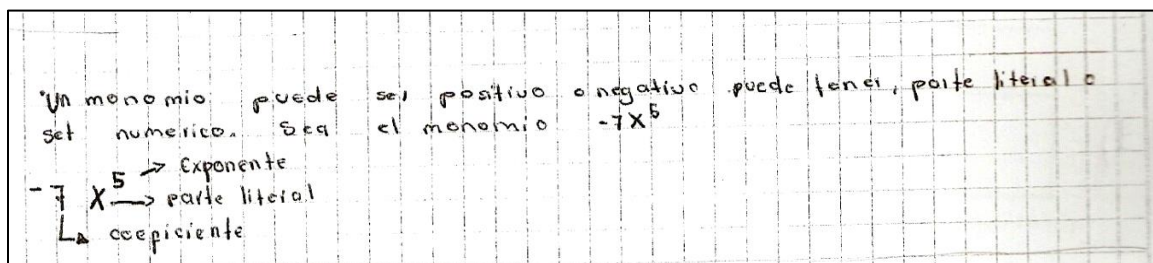


Figura 12. Cuaderno IEM. Cabrera, lenguaje álgebraico

Fuente: La presente investigación

El docente plantea actividades de tipo geométrico, en la cual se pone en práctica la suma, resta y producto de polinomios; por ejemplo, hallar el área y perímetro de figuras planas. Mediante tablas, identifica las partes de expresiones algebraicas y desarrolla ejercicios mecánicos con polinomios. fig. 13.

1 completa la siguiente tabla

Monomio	coeficiente	parte literal	grado absoluto	grado con respecto a =
$5m^3np^2$	5	mnp	6	a m = 3
$\frac{4a^2b^3c^5}{5}$	$\frac{4}{5}$	abc	13	a b = 2
$m^3n^6p^2$	1	mnp	14	a n = 6
-4^3x^2y	1	xy	5	a y = 1
$13a^4b^5c$	13	abc	10	a b = 9
$-p^2r^5q^3$	1	pqr	10	a q = 3
$\frac{-3mno^6}{4}$	$-\frac{3}{4}$	mno	8	a o = 6
$\frac{x^2y^3m^6}{2}$	$\frac{1}{2}$	xym	11	a y = 3

Figura 13. Cuaderno IEM. Cabrera, identificación de expresiones algebraicas.

Fuente: La presente investigación

En la I:E:M: Francisco de la Villota, se trabajó los siguientes contenidos: números reales: operaciones y propiedades de los números naturales, enteros y racionales; función generatriz de

un decimal, números irracionales, expresiones algebraicas: polinomios, orden en los polinomios, tipo de polinomios, valor numérico, operaciones con polinomios. (fig. 14)

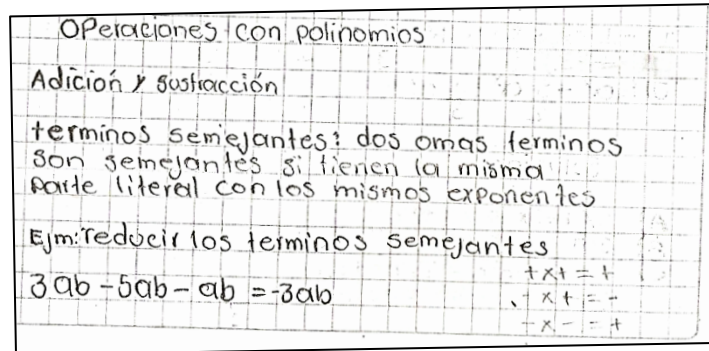


Figura 14. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, operaciones con polinomios.

Fuente: La presente investigación

En el proceso de comunicación, da una definición aproximada de conceptos de álgebra y luego lo explica con ejemplos; realiza una descripción de las partes constitutivas de las expresiones algebraicas pertinentes. Tampoco se encontró registrado situaciones que permitan acercarse a la noción de variable para una construcción futura de su concepto. Lo denomina como letra, pero se observa que en algunos conceptos matemáticos realiza definiciones utilizando la palabra variable. (Fig. 15)

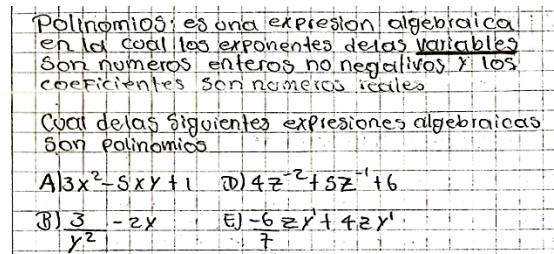
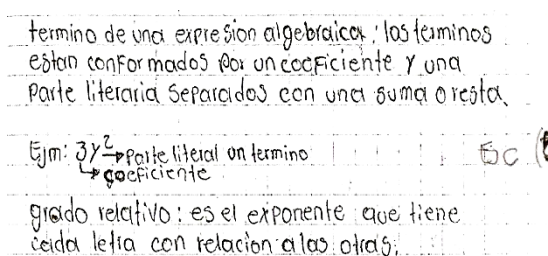


Figura 15. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, lenguaje algebraico.

Fuente: La presente investigación

Realiza actividades de tipo geométrico para poner en práctica conceptos algebraicos. Por ejemplo: hallar el área y el perímetro de figuras planas. Realiza ejercicios mecánicos con polinomios. (fig.16)

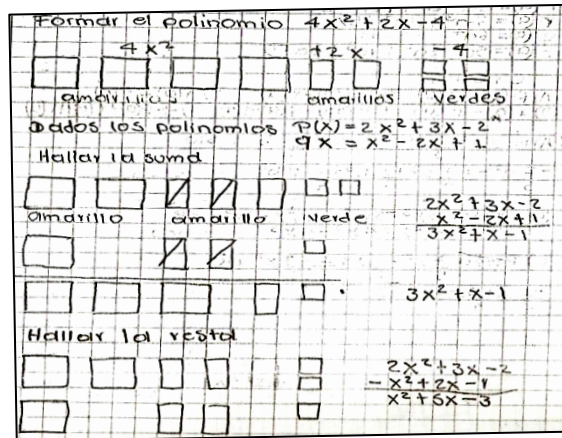


Figura 16. Cuaderno IEM. Francisco de la Villota, actividades.

Fuente: La presente investigación

En la I.E.M. Técnico Industrial, se desarrolló los contenidos: conjuntos numéricos (números naturales, números racionales y propiedades, números irracionales y propiedades), relación entre los tres conjuntos, (Fig. 17); expresiones algebraicas: lenguaje algebraico, definición e identificación de partes de expresiones algebraicas, propiedades y tipos de monomios, polinomios, características y propiedades, y operaciones con polinomios: suma, resta, multiplicación de polinomios. Todos los contenidos se trabajaron de acuerdo a la programación establecida, se profundizo y se ejercitó cada uno de ellos.

Conjuntos Numéricos...

Números Naturales $\mathbb{N}$
 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, +\infty\}$

Números Enteros $\mathbb{Z}$
 $\mathbb{Z} = \{-\infty, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, +\infty\}$
 $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \dots, +\infty\}$
 $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots, -\infty\}$
 $\{0\}$

Números Racionales $\mathbb{Q}$
 son $\mathbb{Z}$ y fracciones.
 $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \text{ donde } a, b \text{ son } \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0\}$
 $\frac{3}{0}$ no existe
 $\frac{10}{5} = 2 = \mathbb{Z}$
 $\frac{9}{5} = 2,25 = \text{fracc. } 2,25 \text{ decim exacto}$
 $\frac{1}{3} = 0,3 = \text{fracc. } 0,3 \text{ decim Periódico.}$

2do Nivel

Multiplicación de polinomio por polinomio.
 $Ej: (a+b) \cdot (a+b) = a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b)$
 $= a \cdot a + a \cdot b + b \cdot a + b \cdot b$
 $= a^2 + ab + ba + b^2$
 $= a^2 + 2ab + b^2$

Significado geométrico:
 $(a+b) \cdot (a+b) = (a+b)^2$



2 Multiplicar $x+1$ por $x+2$
 $(x+1)(x+2) = x(x+2) + 1(x+2)$
 $= x^2 + x \cdot 2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2$
 $= x^2 + x \cdot 2 + 1 \cdot x + 1 \cdot 2$
 $= x^2 + 2x + x + 2$
 $= x^2 + 3x + 2$

Lenguaje Común	Lenguaje algebraico Variables
1, 2, 3, 4, ...	1 $\#^o$ $\mathbb{N}$
1 $\#^o$ $\mathbb{N}$ sumado 8.	$n+8$
1 $\#^o$ de 2 $\#^os$ consecutivos	$x+y$
1 $\#^o$ de 2 $\#^os$	$a-c$
1 $\#^o$ de 2 $\#^os$ de 12 - 5	$(A-C)-5$
1 $\#^o$ Par	$2n$
1 $\#^o$ Par $\div 3$	$2n \div 3$ o $\frac{2n}{3}$
1 $\#^o$ impar	$2n-1$
2 $\#^os$ $\mathbb{Z}$ consecutivos	$n, n+1$
1 $\#^o$ de 3 $\mathbb{Z}$ consecutivos	$n, (n+1), (n+2)$
1 $\#^o$ de 1 $\#^o$	$\sqrt{x}$ $x = \#^o$
1 $\#^o$ de la suma de 2 $\#^os$	$\sqrt{x+y}$

El doble de un $\#^o$	$2 \cdot n$
El triple de un $\#^o$	$3 \cdot n$
El cuádruple de un $\#^o$	$4 \cdot n$
mitad de un $\#^o$	$\frac{1}{2} n$ o $\frac{n}{2}$
la tercera parte de un $\#^o$	$\frac{1}{3} n$ o $\frac{n}{3}$
El cuadrado de un número	x^2
La suma de los cuadrados de 2 $\#^os$	$x^2 + y^2$
El cuadrado de la suma de 2 $\#^os$	$(x+y)^2$

Figura 17. Cuaderno IEM. Técnico Industrial, conjuntos numéricos.

Fuente: La presente investigación

El lenguaje algebraico, en esta institución, aparece explícito a través de situaciones que permiten comparar el lenguaje algebraico y el aritmético para establecer diferencias. Mediante tablas se explica dicho lenguaje, se describen algunos conceptos de álgebra, se explican con ejemplos y se realiza la descripción de las partes constitutivas de expresiones algebraicas. En esta institución se encontró registrados ejercicios y tablas que permitan acercarse a la noción de variable para una construcción futura de su concepto.

Con el análisis realizado al plan de área de matemáticas para el grado octavo de cada institución, contrastado con la observación de los contenidos registrados en los cuadernos, permitió concluir que en las tres instituciones educativas se estudiaron los contenidos: suma, resta, multiplicación y división de polinomios; reforzados con ejercicios desde el contexto geométrico; mediante el uso de áreas y perímetros de figuras planas (contenidos contemplados para esta investigación). Bajo estos insumos, se inició la construcción del cuestionario para cada categoría de análisis, partiendo de algunas preguntas diseñadas por Booth (1984), y preguntas propias del grupo de investigación. De esta manera se obtuvo, los instrumentos necesarios para identificar los errores más frecuentes al iniciar el aprendizaje del álgebra.

9.4 Errores debidos a la comprensión en la aritmética

El álgebra, entendida como una generalización de la aritmética, representa un amplio campo de aplicación de los conceptos, propiedades, algoritmos y demás tópicos que son determinantes en la aritmética. Existen algunos procedimientos que se han catalogado como fundamentales en el estudio de errores; estos están ligados a procesos de pensamiento matemático concreto, específicamente trabajado en las **subcategorías** relacionadas en el Esquema 4:



Esquema 4. Subcategorías de análisis cuestionario 3

Fuente: La presente investigación

a) **El uso de las fracciones**

Cuando se aborda el trabajo práctico escolar con números fraccionarios, es importante hacer énfasis en las definiciones que se proponen y la constante retroalimentación de estos conceptos en el desarrollo de las actividades de aprendizaje; porque es ahí donde se fundamentan las operaciones. La definición de fracciones homogéneas, por ejemplo, es indispensable para lograr una mejor comprensión de las situaciones aditivas que las involucren; es el caso de ejercicios como

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2},$$

donde es común que los estudiantes olviden las instrucciones del docente de aritmética que en clases frecuentemente expresa: “para sumar fracciones homogéneas, se mantiene (deja), el denominador y se suman los numeradores entre sí”.

En álgebra, la situación puede tornarse compleja para el estudiante, si **1)** no distingue cuál es el numerador y cuál es el denominador, **2)** no comprende la operación entre los numeradores al reducir términos semejantes, **3)** confunde el proceso para sumar o restar fracciones heterogéneas, entre otras causas que ocasionan errores en la soluciones de este tipo.

Caso similar, es el que ocurre cuando se propone una adición de fracciones heterogéneas, que se ejemplifica en el ejercicio uno propuesto en el cuestionario tres, que se observa a continuación:

$$\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x =$$

Aquí, el estudiante, al no dominar las definiciones, utiliza la información que ha sido proporcionada durante sus primeros años de escolaridad, sin detenerse a reflexionar si el proceso

empleado es apropiado para determinado problema o si existen otros procesos que arrojen los mismos resultados siendo menos extensos y concretando para generalizar operaciones.

Por otra parte, situaciones multiplicativas con números fraccionarios, generan también errores porque existe inseguridad al emplear algoritmos para sumar, restar, multiplicar o dividir, y revelan la confusión real existente en los estudiantes y la enmarañada y pobre estructura conceptual en torno al desarrollo de operaciones básicas.

En el presente estudio, se hace alusión a este tipo de errores, enunciando en el cuestionario aplicado los ejercicios:

$$\frac{3}{5}b \cdot \frac{7}{3}b = \quad y \quad \frac{4}{7}c / \frac{5}{9}c =$$

Habitualmente, en el contexto de las instituciones educativas municipales que participan en la presente investigación, se trabajan las operaciones con números fraccionarios en dos momentos importantes, la primera, en la básica primaria en los grados de tercero a quinto (VER TABLA DE ESTANDARES) y la segunda, al inicio de la enseñanza media hasta el grado séptimo; la diferencia es la ampliación y profundidad, y los campos numéricos que van desde los naturales hasta los racionales.

La metodología empleada por el docente y los recursos en el proceso de enseñanza aprendizaje cobran también un papel relevante y determinan de algún modo el éxito escolar, sin embargo, estas reflexiones no son objeto del presente estudio.

b) Manejo de Signos

En aritmética, es importante el reconocimiento de las operaciones asociado con el manejo de signos; en el caso del álgebra, los signos, al hacer parte de las expresiones algebraicas, evidencian las concepciones erróneas de los estudiantes de grado octavo, relacionadas específicamente, para el presente estudio, con **1)** “la destrucción de paréntesis”, aspecto que

desde la aritmética se trabaja con especial atención en grado séptimo, considerando la solución de polinomios aritméticos como un prerrequisito para el aprendizaje del álgebra; en el cuestionario se relaciona con el ejercicio:

Como se puede escribir la siguiente expresión $-(a + b)$ Escoge la respuesta correcta, de no existir escríbela.

- $-a + b$
- $a - b$
- $a + b$
- ¿Otra? ¿Cuál? _____

En las opciones de respuesta se evidencia que distribuir el signo es un aspecto que genera múltiples tipos de errores que se describen más adelante; por otra parte, 2) “la asignación de un signo en un fraccionario”, desde la fundamentación en las clases iniciales de aritmética, es importante definir conceptualmente las partes de una fracción, para que en grado séptimo, la comprensión del conjunto de los números racionales, como conjunto abarcador de los números enteros sea asimilable con facilidad, el ejercicio propuesto para analizar esta condición es:

Como se puede escribir la siguiente expresión $-\frac{a+b}{c}$. Escoge la respuesta correcta.

- $\frac{-(a+b)}{c}$ —
- $\frac{a+b}{-c}$ —
- $\frac{-a-b}{c}$ —

Se considera relevante proponer este tipo de respuestas, puesto que, es en este campo donde se presentan dificultades, al distribuir el signo en el numerador, en el denominador, en los dos simultáneamente o existen dudas para dejar el signo junto al separador en el caso de una fracción negativa.

c) Manejo de Potencias básicas

En aritmética, la potenciación, como operación anexa a las operaciones básicas, posibilita profundizarlas y comprenderlas. Sin embargo, cuando se abordan las propiedades de la potenciación en el álgebra, emergen los errores ligados a las dificultades de comprensión en aritmética, relacionados principalmente con la confusión conceptual que tienen los estudiantes cuando se enfrentan a ejercicios que involucran variables, exponentes y operaciones.

Los casos en estudio para la presente subcategoría son: **1)** potencias con bases negativas, que en el cuestionario se presentan en los ejercicios para encontrar el resultado de: $(-1)^4$ y $(-1)^3$, ejercicios en los que además de verificar la propiedad que tienen las potencias con bases negativas de acuerdo a la condición de ser par o impar en sus exponentes, se analizan los algoritmos para resolver potencias; características que conjuntamente permiten observar resultados erróneos en los desarrollos presentados por los estudiantes. Son también objeto de estudio, las **2)** propiedades de las potencias, tópico de especial importancia al trabajar con potencias con igual base y operaciones de multiplicación y división que requieren a su vez operar los exponentes. Para ello se proponen los siguientes ejercicios:

$$a^3 \cdot a^2 = \text{ y } \frac{c^5}{c^2} =$$

Finalmente, se han incluido dos ejercicios en los cuales se evidenciará los conocimientos que los estudiantes poseen para resolver operaciones con potencias de diferente base y su capacidad para argumentar sus respuestas, estos son:

$$c^3 + d^2 = \text{ y } b^2 + c^2 =$$

El estudio de esta categoría es importante por su implicación en álgebra y en procesos escolares superiores tanto de matemáticas como de otras asignaturas (geometría, física, química entre otras).

9.5 Análisis de los resultados

9.5.1 Errores debidos a la comprensión en la aritmética

La presente investigación, hace parte del macro proyecto sobre estudio de errores planteado desde la SEM, se analizan 4 categorías, las dos primeras fueron desarrolladas por Diana Fernanda López y Omar Silva, empleando los cuestionarios 1 y 2 para su análisis. Para el presente estudio, se tienen en cuenta los cuestionarios 3 y 4 relacionadas con las dos últimas categorías.

Teniendo en cuenta que el álgebra y la aritmética conservan una estrecha relación en el acto de enseñar y aprender, es importante hacer una reflexión en torno a los resultados que se obtuvieron con la aplicación del cuestionario 3, que hace referencia a la categoría descrita anteriormente en el presente estudio.

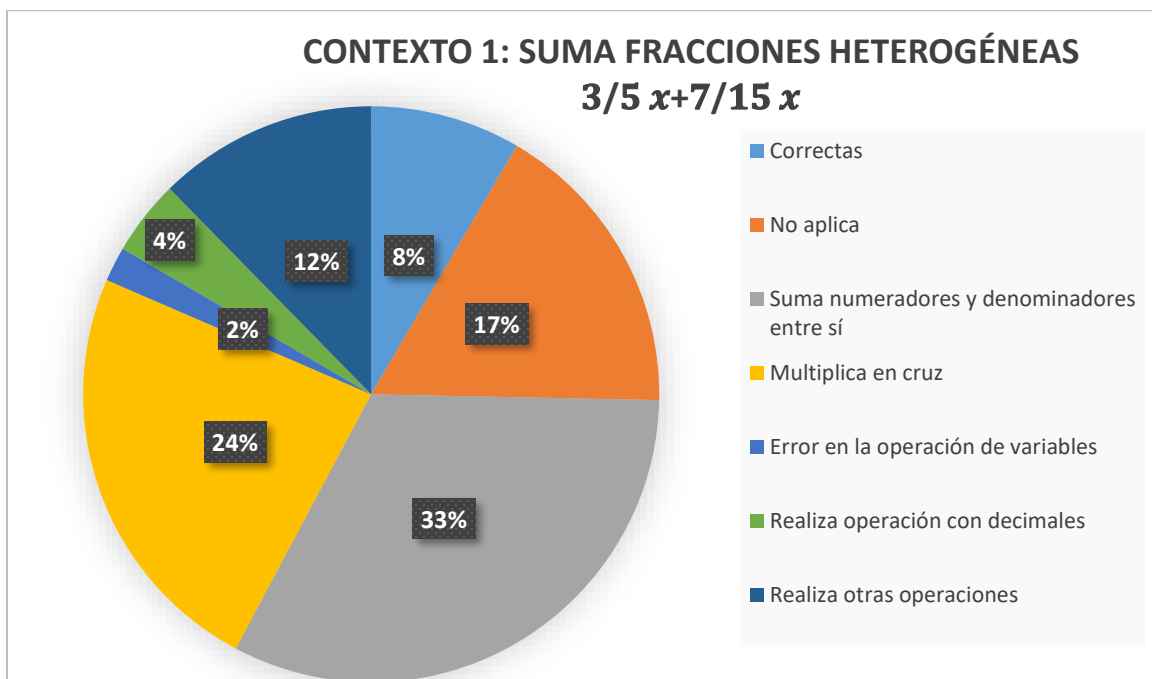
En cierta forma, el álgebra es la representación simbólica de generalizaciones de cantidades expresadas inicialmente a través de números que muestran un comportamiento de variaciones o regularidades. Se observará que los estudiantes necesitan de los procesos y relaciones que se establecen con magnitudes expresadas en cantidades numéricas trabajados en aritmética como insumo facilitador para la comprensión, cuando se presentan álgebraicamente.

Los ejercicios que se presentan a continuación, dejan entrever que los obstáculos epistemológicos en aritmética, suelen repercutirse en el álgebra.

Para la descripción de los hallazgos, se recuerda la estructura del cuestionario que se enmarca en tres Subcategorías:

- Uso de fracciones
- Manejo de signos
- Manejo de potencias

En la subcategoría, *uso de fracciones*, se han considerado 4 contextos. El primero de ellos tiene que ver con la adición de fracciones heterogéneas.

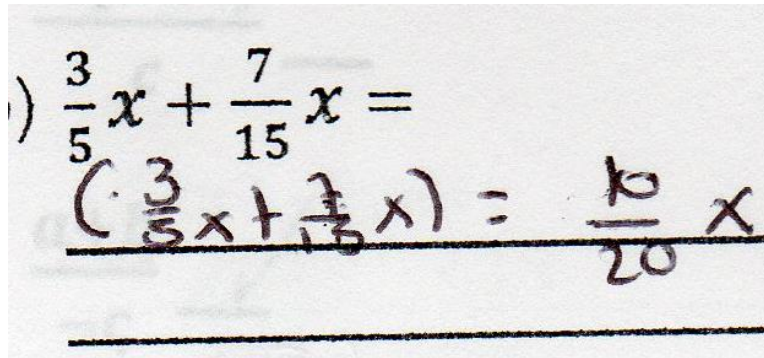


Grafica 2. Resultado Contexto No. 1

Fuente: La presente investigación

Como se puede observar en la gráfica contexto1, los errores más frecuentes referidos a la suma de expresiones algebraicas, donde intervienen fracciones heterogéneas, se cometen por los estudiantes al operar los datos. Solo el 8% proporciona una respuesta correcta. Por otra parte, el

33% efectúa la operación sumando los numeradores y denominadores entre sí, como puede observarse en la Figura 18.

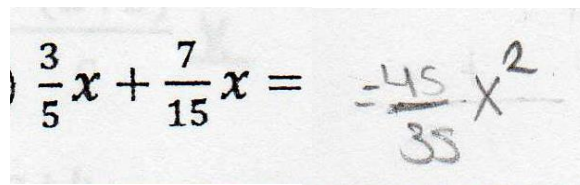


Handwritten mathematical work showing the addition of two fractions with different denominators. The first line is $\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x =$. The second line shows the incorrect result: $(\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x) = \frac{10}{20}x$. The student has added the numerators (3+7) and denominators (5+15) separately.

Figura 18. Desarrollo No. 1

Fuente: La presente investigación

El 24% de los estudiantes, confunden los procedimientos algorítmicos de la suma de fracciones heterogéneas con los de la división. Este error se evidencia en la Figura 19.

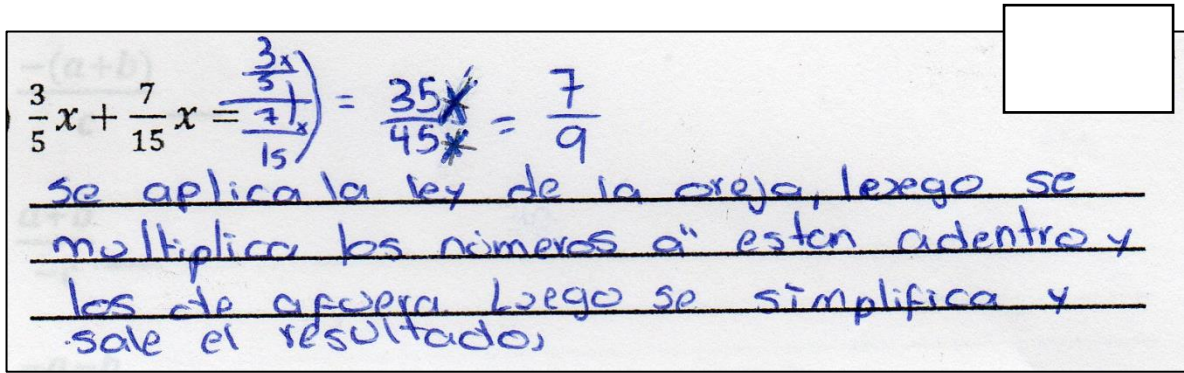


Handwritten mathematical work showing the addition of two fractions with different denominators. The first line is $\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x =$. The second line shows the incorrect result: $\frac{-45}{35}x^2$. The student has performed a division-like operation, possibly multiplying the numerators and denominators incorrectly.

Figura 19. Desarrollo No. 2

Fuente: La presente investigación

Una variación de este error, que en concepto es el mismo, se presenta cuando el estudiante multiplica extremos sobre producto de medios para sumar fracciones heterogéneas. Este caso se presenta en la Figura 20, donde el estudiante argumenta los procedimientos que dieron lugar a encontrar este resultado



$$\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x = \frac{3+7}{5+15}x = \frac{10}{45}x = \frac{2}{9}x$$

se aplica la ley de la cresta, luego se multiplica los números a" están adentro y los de afuera luego se simplifica y sale el resultado,

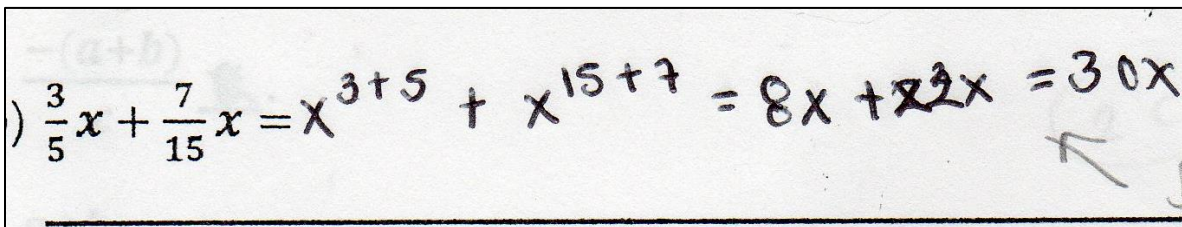
Figura 20. Desarrollo No. 3

Fuente: La presente investigación

Análisis datos preguntas 2a – 4c

Propiedad distributiva

Existen algunos tipos de errores que se han catalogado como sorprendentes por las características presentadas en el desarrollo de los ejercicios planteados. Como el estudiante está en un proceso de aprendizaje, aun no existe un proceso claro de conceptualización. Para los estudiantes, el resolver este tipo de ejercicios, es proponer nuevas situaciones en las que toman los procedimientos, propiedades, leyes matemáticas, características de los números y los convierten en arreglos cargados de imaginación que dejan entrever las dudas, inquietudes que quedaron sin resolver y los errores que de no corregirse se seguirán produciendo cada vez a mayor escala, en la Figura 21, se puede observar un ejemplo de ello.



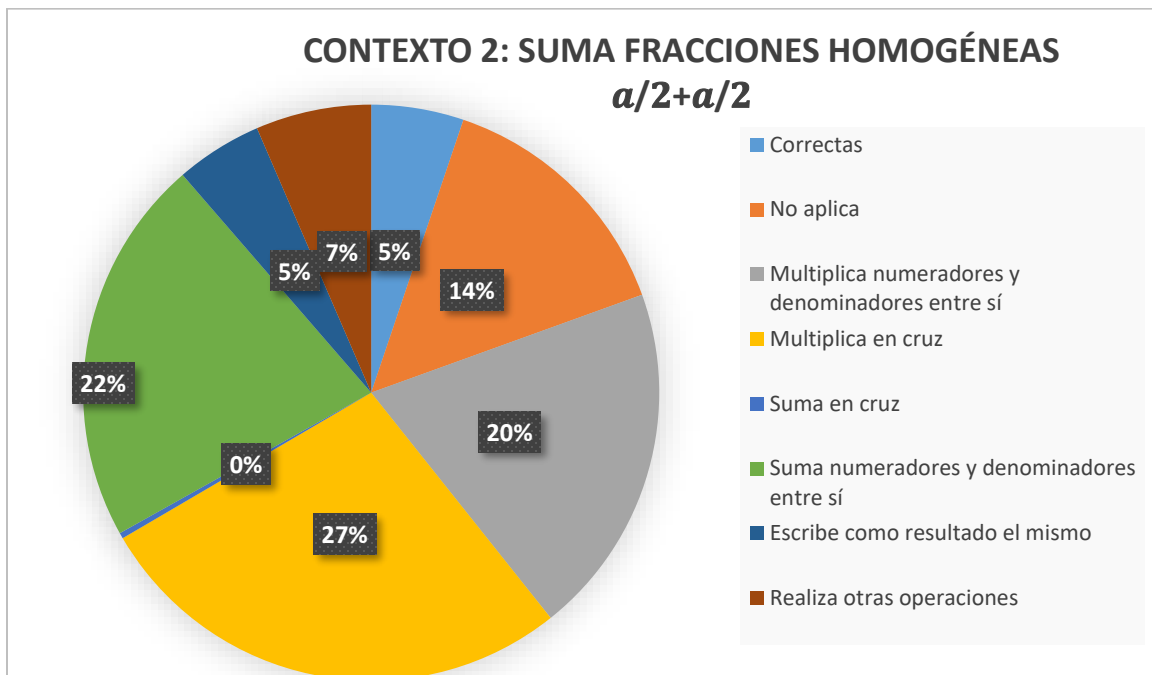
$$\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x = x^{3+5} + x^{15+7} = 8x + 22x = 30x$$

Figura 21. Desarrollo No. 4.

Fuente: La presente investigación

El desarrollo propuesto es la conversión de una suma de fracciones en una adición de términos semejantes que resultó de la combinación de números y letras “acomodadas” para obtener un resultado.

El segundo contexto, en la subcategoría uso de fracciones, está relacionada con la adición de fracciones homogéneas, en la cual los errores más frecuentes cometidos por los estudiantes, están relacionados con la operatoria básica. Los datos se relacionan en la gráfica contexto 2.



Gráfica 3. Resultado Contexto No. 2

Fuente: La presente investigación

El 20% de la población encuestada, multiplica numeradores y denominadores entre si y obtiene el resultado que se observa a continuación en la Figura 22. De igual forma, con un porcentaje de 27%, el error más frecuente cometido en el mismo ejercicio, es el multiplicar en cruz y sumar los resultados como se observa en la Figura 23.

Figure 22 shows the equation $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a^2}{4}$. Figure 23 shows the equation $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = 2a + 2a = 4a$.

Figura 22 y 23. Desarrollo No. 5 y 6.

Fuente: La presente investigación

De la misma manera, hay errores que se destacan en esta categoría con especial atención; estos muestran los procesos de cancelación y los argumentos que los estudiantes exponen para desarrollar esta adición, que puede considerarse de nivel de dificultad bajo, pero para un estudiante puede tener diferentes connotaciones en sus esquemas cognitivos previos, como se puede ver a continuación en la figura 24 y 25 como

Figure 24 shows the equation $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} =$ followed by the text "Como tienen el mismo denominador y numerador sigue siendo el mismo RTA $\frac{a}{2}$ ".

Figura 24. Desarrollo No. 7.

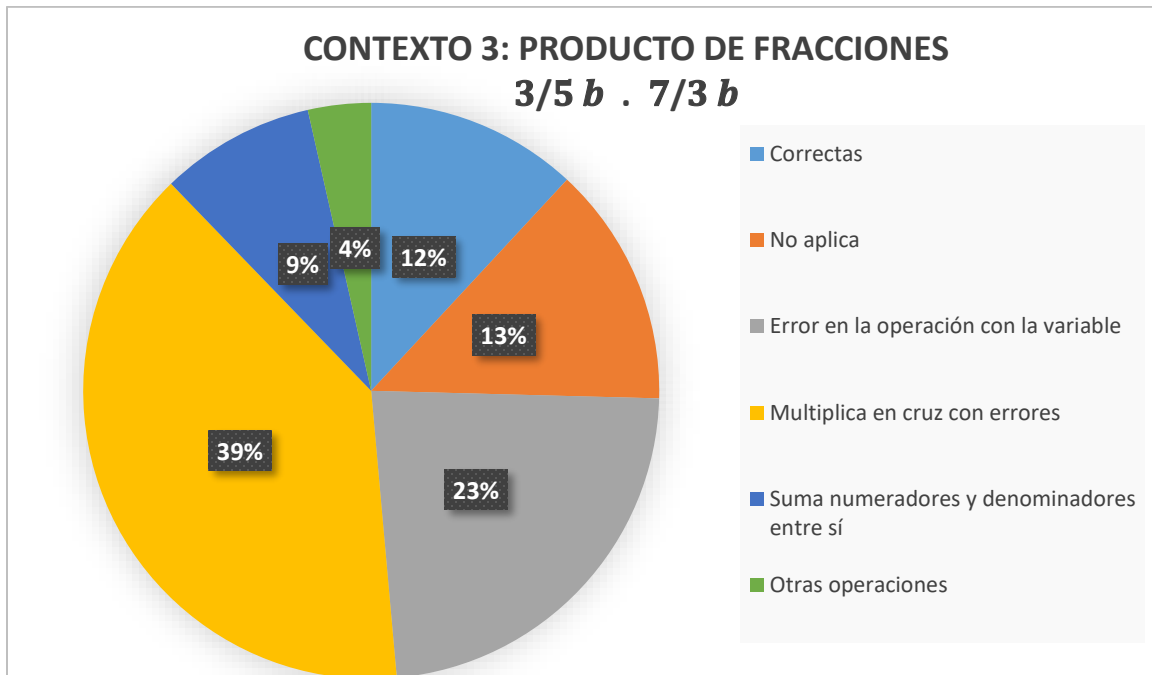
Fuente: La presente investigación

Figure 25 shows the equation $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} =$ followed by the text "($\frac{a}{2} + \frac{a}{2}$). Se cancela."

Figura 25. Desarrollo No. 8.

Fuente: La presente investigación

Un tercer contexto tiene que ver con el producto de fracciones, operación que para ser desarrollada adecuadamente, se debe multiplicar numeradores y denominadores entre sí, solo el 12% resuelve correctamente el ejercicio.



Grafica 4. Resultado Contexto No. 3

Fuente: La presente investigación

Para los estudiantes en estudio, en un 23%, esta operación se resuelve con error al multiplicar las variables, (Ver Figura 26). Se evidencia que en aritmética, lo numérico, se comprende, sin embargo el álgebra presenta ciertas tensiones ocasionadas por las dificultades en el trabajo con letras. Por otra parte, el error más frecuente, se da en el 39% de los estudiantes, que convierten el producto en una suma de fracciones heterogéneas alterando el ejercicio propuesto como se observa a continuación. (Figura 27).

$$\frac{3}{5}b \text{ por } \frac{7}{3}b = \frac{21b}{15b} = \frac{21b}{15}$$

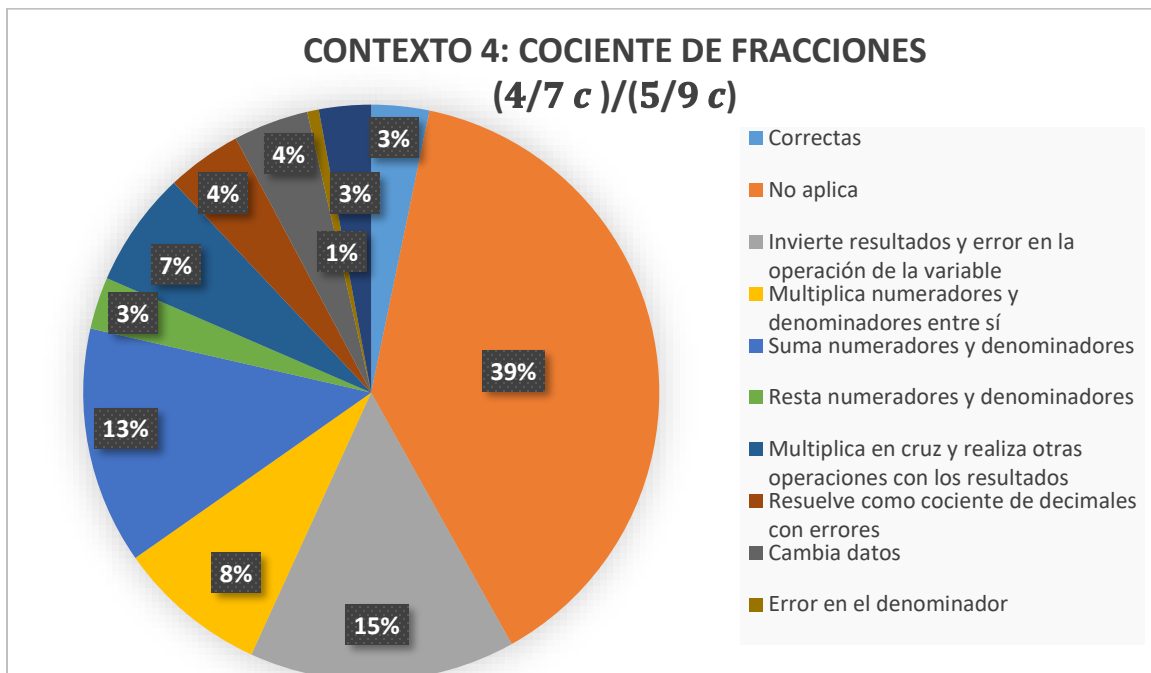
Figura 26. Desarrollo No. 9.

Fuente: La presente investigación

$$\frac{3}{5} \div \frac{7}{3} = \frac{9 + 35}{15} = \frac{44}{15}b^2$$

Figura 27. Desarrollo No. 10

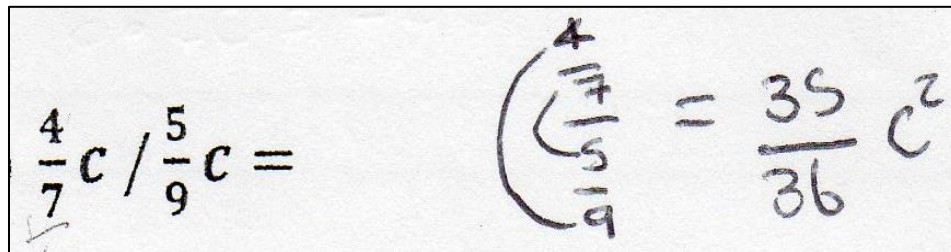
Fuente: La presente investigación



Grafica 5. Resultado Contexto No. 4.

Fuente: La presente investigación

Finalmente, el cuarto contexto, en relación a las fracciones, presenta un cociente con la misma variable, tanto en el numerador, como en el denominador. Es el contexto con más diversidad de errores. En el análisis de los datos del presente estudio, se considera la descripción “no aplica” para los ejercicios que no han sido resueltos o dan respuestas incompletas, por lo que se considera que el error más frecuente, lo cometen el 15% de los estudiantes, quienes resuelven empleando el algoritmo correcto; sin embargo, al organizar el resultado, invierten los valores en el numerador y denominador; además, multiplican las variables proponiendo una solución como lo indica la figura 28.



$$\frac{4}{7}c \div \frac{5}{9}c = \left(\frac{7}{4} \times \frac{9}{5} \right) = \frac{35}{36} c^2$$

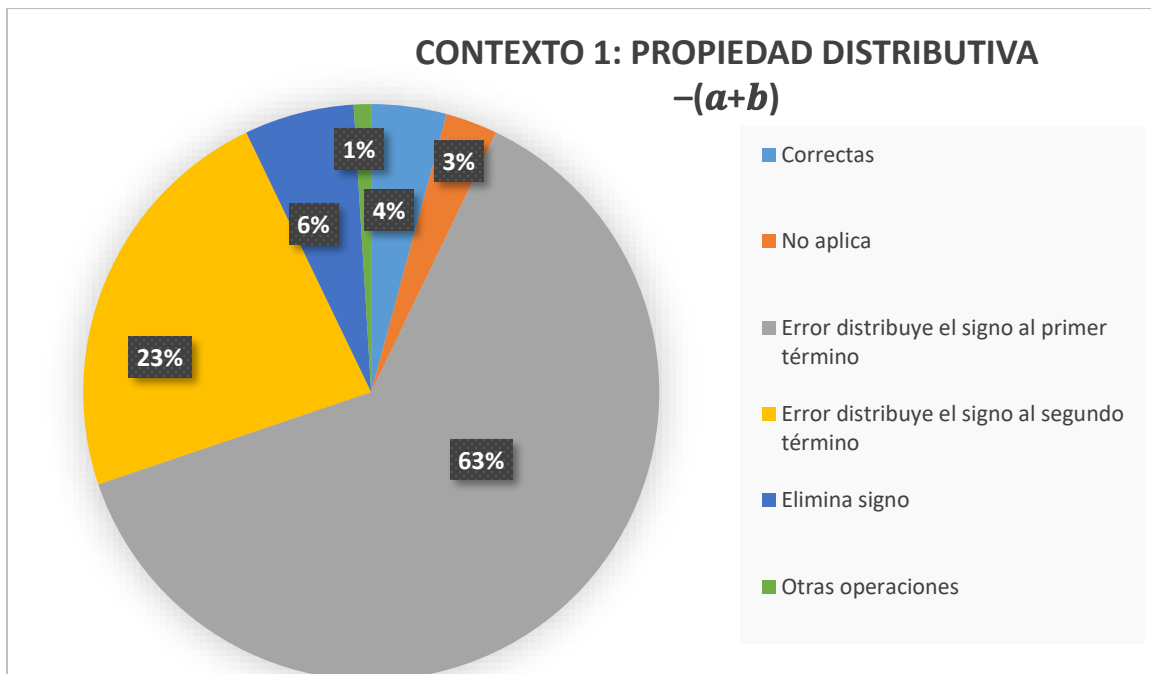
Figura 28. Desarrollo No. 11.

Fuente: La presente investigación

De esta manera, se evidencia la relación entre aritmética y álgebra, como afirma Socas (1995): “A veces las dificultades que los estudiantes presentan en álgebra no son tanto dificultades en el álgebra como problemas que se quedan sin corregir en aritmética”.

Manejo de Signos

En esta subcategoría, se proponen dos contextos relacionados con la propiedad distributiva y un signo: $-(a+b)$ y $-(a+b)/c$. Cuando se aborda ejercicios relacionados con números reales, se presentan dificultades al resolver polinomios aritméticos, especialmente, la dificultad radica en la asimilación del concepto de la propiedad distributiva de un signo negativo (-), ubicado antes de una operación agrupada mediante paréntesis. Es el caso del contexto 1 presentado en el cuestionario 3.



Grafica 6. Resultado Contexto No. 1

Fuente: La presente investigación

A partir del análisis de la información, solo un 4% de la población estudiantil de las tres instituciones en estudio, aplica correctamente dicha propiedad.

Los errores más frecuentes en relación a esta situación, se clasifican de acuerdo a la ubicación del signo en la expresión.

Por una parte, el 63% de los estudiantes, cometen el error al distribuir el signo negativo (-) únicamente al primer término, pareciera que aplican en parte la propiedad distributiva, pero olvidan el segundo término como parte constitutiva del ejercicio planteado. $-a + b$

De manera similar, pero en un menor porcentaje, existe un grupo que distribuye el signo negativo (-) únicamente al segundo término; quizá pretendiendo cambiar el signo que indica operación, considerándolo como único signo y totalizante del ejercicio $a - b$. Este error lo comete un 23% de estudiantes de grado octavo de las tres instituciones.

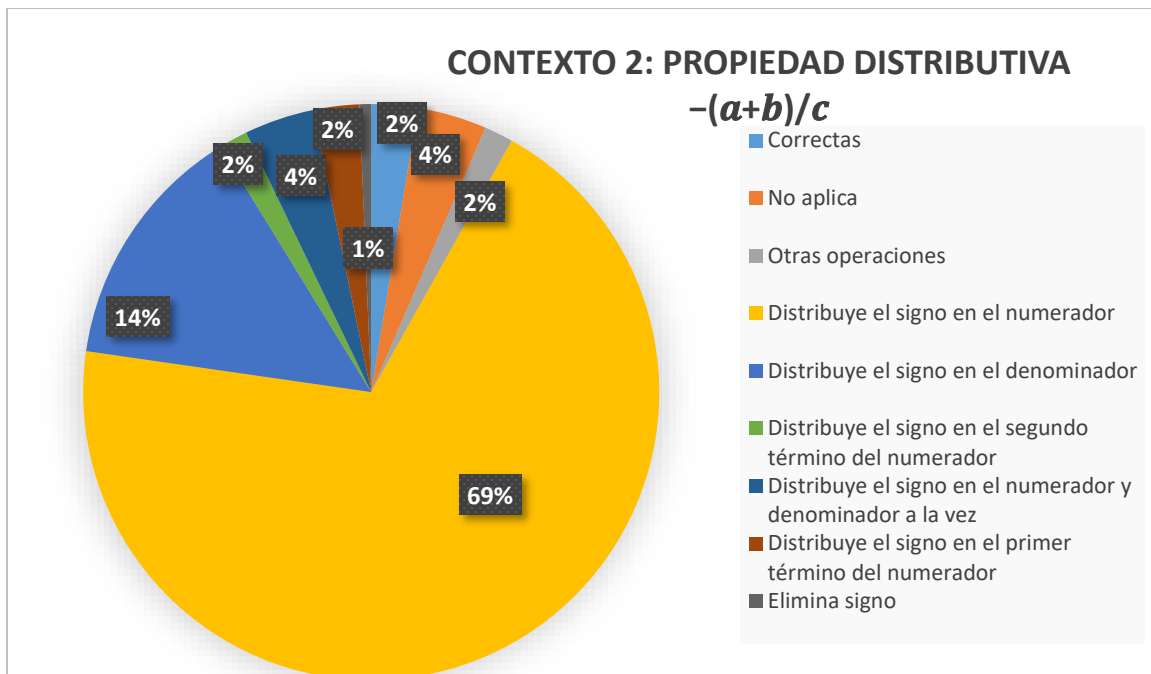
Por otra parte, existe un 6% de la población que eliminan el signo y equiparan las expresiones $-(a+b)$ y $a+b$. Aunque no es un error cometido por una gran cantidad de estudiantes, se considera importante para la presente investigación, porque en esta categoría se está relacionando el error cometido en álgebra asociado con la falta de comprensión de conceptos aritméticos. En este caso concreto, en relación al signo menos (-) que hace parte de los elementos básicos para desarrollar ejercicios de aplicación de las operaciones aritméticas.

Aunque se considera que los números enteros son tópicos que se abordan en grados de enseñanza secundaria, cabe resaltar que existe un alto grado de dificultad relacionado con la operatoria básica, que de acuerdo a los lineamientos curriculares y estándares establecidos por el MEN, debe trabajarse con especial atención desde los primeros grados de enseñanza primaria.

La dificultad presentada al distribuir un signo, se incrementa al involucrar en las operaciones números racionales. Es el caso que se evidencia al analizar los datos suministrados por la población en estudio al resolver el contexto 2 del cuestionario 3, que implica un doble

ejercicio relacionado con la propiedad distributiva como se puede observar:

$$\frac{-(a+b)}{c}$$



Grafica 7. Resultado Contexto No. 2

Fuente: La presente investigación

Aquí, los datos se encuentran más dispersos en relación con la multiplicidad de errores cometidos, razón por la cual se destacan los errores más frecuentes. Es así, como un 69% de los estudiantes, distribuyen el signo al numerador sin contemplar otras posibilidades de respuesta; un 14%, considera apropiado (correcto) distribuir el signo únicamente para el denominador.

Cabe aclarar, que en este ejercicio, existe la posibilidad de señalar más de una opción como respuesta correcta, ejercicio propuesto con la intención de verificar que los estudiantes conozcan que en el concepto de fracción negativa, es válido que el signo sea distribuido en el numerador, denominador o se ubique en el centro de la fracción. Nuevamente, el concepto abarcador del signo negativo (-), se vislumbra como una dificultad en los procesos de aprendizaje del álgebra escolar en relación con la aritmética, es tal la dificultad, que tan solo un 2% de la población en estudio considera las tres opciones mencionadas anteriormente como correctas.

Existe otro grupo de estudiantes (el 4%) que distribuye el signo en el numerador y denominador, de forma simultánea (Figura 29).

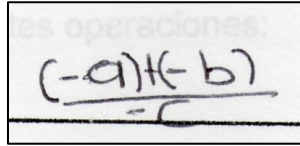


Figura 29. Desarrollo No. 4.

Fuente: La presente investigación

Si se analiza este tipo de respuesta, representa un material de especial importancia, debido a que se considera como un error representativo para este estudio, puesto que, se da lugar a que el estudiante argumente y/o proponga otras posibles soluciones, entre las cuales consideran tomar el signo en cada parte de la fracción, sin tener en cuenta que aritméticamente, el resultado se altera equiparando una fracción negativa con una fracción positiva, es decir, para estos estudiantes es igual $-\frac{a+b}{c}$ **que** $\frac{a+b}{c}$, error que en álgebra, puede ocasionar mayores dificultades en la solución de operaciones con polinomios.

Manejo de potencias

En relación a este importante tema, en el cuestionario tres, se han dispuesto seis contextos que buscan analizar los errores asociados al manejo de potencias básicas.

Los ejercicios 3a y 3b (contextos 1 y 2) propician información relacionada con la propiedad para potencias con bases negativas en relación con el tipo de exponente (par o impar); los ejercicios 4a y 4d (contextos 3 y 6), suministran información sobre la comprensión de las operaciones y/o algoritmos que se aplican para multiplicar y dividir potencias con igual base, y los ejercicios 4b y 4c (contextos 4 y 5), dan lugar a indagar sobre el conocimiento de los procesos en los que intervienen potencias con bases diferentes.

Para el primer caso, el 88,96% de la población en estudio, comete el error más frecuente, al multiplicar la base y el exponente de la potencia; al resolver el ejercicio $(-1)^3$, (un 42,21%) y al resolver el ejercicio $(-1)^4$, (un 46,75%). Estos dos ejercicios, han sido analizados de manera conjunta por la similitud de resultados en esta misma subcategoría, con un 42,20%, 30,19% y 12,01%, en los mismos ejercicios el error radica en la operatoria del signo que corresponde a la respuesta correcta. Cabe destacar, que en estos ejercicios hay menos ocurrencia de error y los porcentajes de aciertos son de 21,10% y 34,42% respectivamente.

Se debe tener en cuenta que existe un alto grado de dificultad en el concepto de potenciación, independientemente de la propiedad con bases negativas y exponentes pares o impares.

Existe un error al confundir los siguientes procesos:

$$(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) \text{ con } (-1) \times 3$$

Es importante aclarar, que cuando se aborda la potenciación, previamente se trabaja las operaciones básicas, haciendo énfasis en la multiplicación, reiterando que la potenciación es una operación abreviada, motivo por el cual se presenta este error con mayor frecuencia en los estudiantes en estudio, como se puede observar en la figura 30, donde se argumenta dicho error.

La expresión $(-1)^3$ es igual a: -3

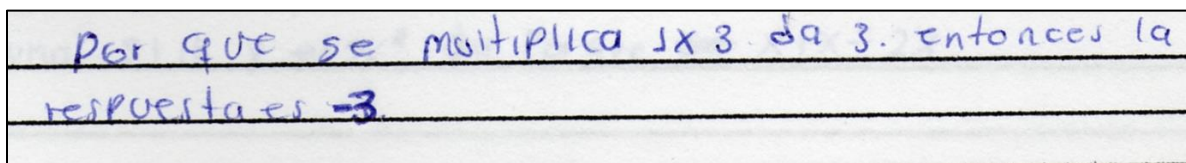


Figura 30. Desarrollo No. 13.

Fuente: La presente investigación

En el cuestionario 3, en una de las subcategorías, se hace referencia al manejo de potencias, en el numeral 4 se propuso también ejercicios relacionados con la aplicación de las propiedades de potencias al efectuar operaciones como la multiplicación y división con potencias de igual base y la suma de potencias, para determinar la comprensión que los estudiantes tienen sobre estos importantes temas.

En los grados de enseñanza primaria, es fundamental de acuerdo a los estándares básicos de competencias en matemáticas propuestos por el MEN, el trabajo de potencias, sus propiedades y aplicaciones en el contexto de las operaciones con números naturales, trabajo previo de aritmética para el desarrollo de los procesos algebraicos en años escolares superiores.

A continuación, se presentan los errores más comunes que en relación a los desarrollos de los numerales 4a, 4b, 4c y 4d, cometen los estudiantes de grado octavo de las instituciones en estudio.

Cuando se trata de resolver ejercicios algebraicos, en los que intervienen operaciones de potencias de igual base, los estudiantes, suelen confundir la operación ligada a los exponentes, en el numeral 4a, donde se pide a los estudiantes que resuelvan la operación:

$$a^3 \cdot a^2 =$$

El 32,79% de ellos, al observar el producto de potencias, lo relacionan con el producto de exponentes, como puede evidenciarse en la siguiente solución propuesta por los estudiantes (Figura 31)

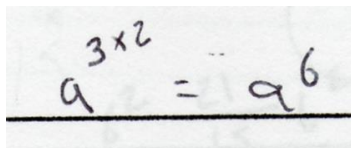
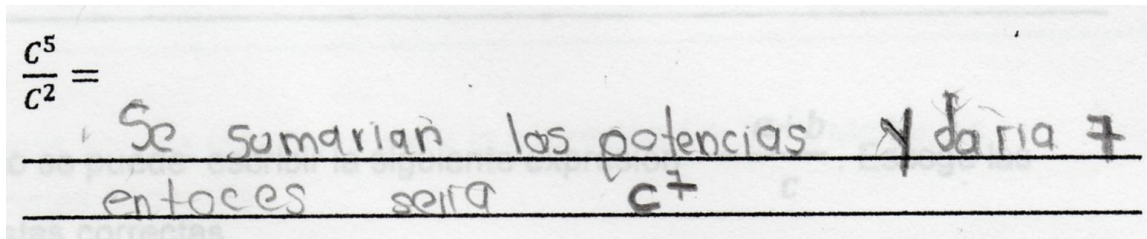


Figura 31. Desarrollo No.1 4.

Fuente: La presente investigación

De la misma forma, al no tener claridad en la operación a efectuar con los exponentes, un 7,47% resuelve el ejercicio empleando OTRAS operaciones con los exponentes.

De manera similar, al resolver el ejercicio propuesto en el numeral 4d, que corresponde al cociente de potencias con igual base, $\frac{c^5}{c^2} =$, los estudiantes en un 22%, dejan la misma base y suman los exponentes, siendo este el error más frecuente, seguido de un 17% que representa a los errores relacionados con la solución, efectuando diversas operaciones con los exponentes. Ver figura 32.



Handwritten student work for the problem $\frac{c^5}{c^2} =$. The student has written "Se sumarian los potencias y daria 7" and "entonces seria c^7".

Figura 32. Desarrollo No. 15.

Fuente: La presente investigación

De aquí, que se pueda evidenciar la dificultad que representa para los estudiantes, la solución de ejercicios que involucran operatoria básica en los que se “afectan” los exponentes.

Finalmente, en los numerales 4b y 4c se formularon ejercicios complementarios a dichas temáticas, obteniendo los siguientes resultados.

Cuando se propone resolver: $c^3 + d^2 =$, el 42, 21% de la población en estudio multiplica variables y suma los exponentes, sin tener en cuenta que es una adición en la que no existen términos semejantes, ni se efectuaría operación alguna, solo el 14,29%, manifiestan que la operación debe quedar indicada, o escriben nuevamente el ejercicio, dando a entender que no existen operaciones adicionales que simplifiquen el ejercicio propuesto.

En este mismo contexto, el 11.36% resuelve el ejercicio como producto de términos, eliminando el signo de la adición propuesta (+) y dejando como respuesta la expresión c^3d^2 .

Por otra parte, en el ejercicio propuesto en el numeral 4c, $b^2 + c^2$, los errores más frecuentes están ligados a multiplicar variables y sumar exponentes, $(bc)^4$ (37,66%), mientras que el 16,88% de estudiantes, resuelve el ejercicio como producto de términos, b^2c^2 . Un 7,14% considera que es correcto resolver sumando los exponentes y un 5,84% asocia la suma de estos términos con el cuadrado de un binomio, expresando la solución así:

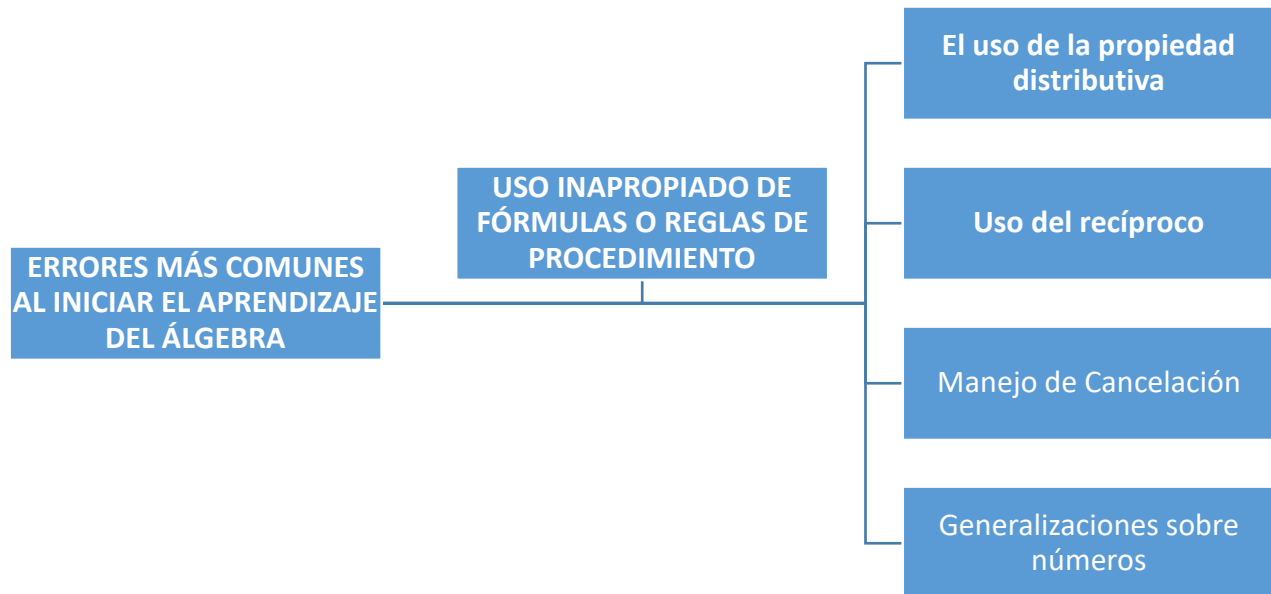
$$b^2 + c^2 = (b + c)^2$$

El 87,69% tiene una concepción errónea que no le permite contemplar un ejercicio álgebraico que se enfrenta desde la operatoria aritmética, pero que requiere de la aplicación de las propiedades y características de las expresiones algebraicas que lo conforman.

9.6 Errores debido al uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento

Las matemáticas, poseen un conjunto diverso de reglas y procedimientos que permiten resolver situaciones en contextos específicos, estas expresiones, conocidas por muchos como fórmulas, se emplean para facilitar la obtención de resultados particulares y para dar lugar a la generalización matemática, que particularmente en el álgebra, ha sido estudiada ampliando su concepto, que está más allá de los patrones o leyes numéricos y geométricos, que giran en torno a las relaciones matemáticas. El grupo Azarquié manifiesta: “se generaliza cuando se transfieren a situaciones propiedades que se cumplen en otras y en general, cuando se amplía el ámbito de definición de una ley”(1993:30), además, se hace énfasis en la reflexión en este proceso y en estudiar los errores que se presentan en el mismo. Para el presente estudio, se distinguen cuatro campos, en los que se considera preciso enmarcar los errores más comunes cometidos por los

estudiantes al iniciar el estudio de el álgebra escolar, para ello se proponen las **subcategorías**, relacionadas en el Esquema 5:



Esquema 5. Subcategorías de análisis cuestionario 4

Fuente: La presente investigación

a) El uso de la propiedad distributiva

En la enseñanza de las matemáticas, desde el nivel de básica primaria, el trabajo de la propiedad distributiva entre otras propiedades, está presente en las programaciones y desarrollos curriculares, sin embargo, es común encontrar dificultades en su aplicación, en el cuestionario 4 aplicado a los estudiantes de las instituciones en estudio, se hace referencia a este tema y se lo cataloga como subcategoría de estudio, para ello se han propuesto seis situaciones en diferentes contextos del álgebra inicial, en el primero de ellos, se plantea la importancia del empleo de simbología en matemáticas, para este caso en particular el correcto uso del paréntesis y del punto como signo del producto. La característica a estudiar es la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la adición en combinación con la propiedad conmutativa de la

multiplicación. Planteado en un ejercicio con una pregunta de selección múltiple, que ofrece al estudiante la posibilidad de proponer una situación diferente a las estipuladas como solución, como se puede observar a continuación:

Como se puede escribir la siguiente expresión **$a \cdot (b + c)$** .

- a) **$ab + c$** __
- b) **$b + ca$** __
- c) **$(b + c) \cdot a$** __
- d) **$a + b + c$** __
- e) **¿Otra? ¿Cuál?**

En el segundo y tercer ejercicio propuesto, se hace referencia a los que se denominan falsos homomorfismos, que son regularidades incorrectas, que se hacen sobre propiedades de expresiones algebraicas. En el cuestionario cuatro, se plantean situaciones con el fin de determinar el incorrecto uso de la propiedad distributiva, estos ejercicios de selección múltiple permiten en el primero de ellos, verificar el conocimiento relacionado con el producto notable del cuadrado de un binomio así: La expresión.

$(a + b)^2$ es equivalente a:

- a) **$a^2 + b^2$** __
- b) **$a + b^2$** __
- c) **$2ab$** __
- d) **$a^2 + b^2 + 2ab$** __

Generalmente, se emplea incorrectamente la propiedad distributiva, generalizando el efecto de “repartir”, empleado en las clases de enseñanza habitual y es quizá, la relación que se

hace con las reiterativas explicaciones con ejercicios rutinarios que suelen recordarse al resolver ejercicios como el siguiente:

Como se puede escribir la expresión $\sqrt{a + b}$.

a) $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ __

b) $\sqrt{a} + b$ __

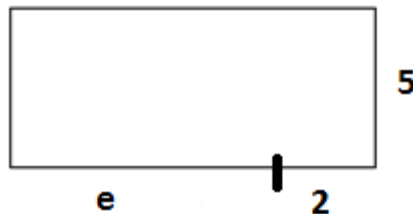
c) $a + \sqrt{b}$ __

d) $\sqrt{a + b}$ __

Esta situación planteada en el presente estudio, es también un caso particular en el que la propiedad distributiva puede emplearse de manera incorrecta.

La geometría, como campo de aplicación y fuente de demostraciones numéricas y algebraicas, posibilita el estudio de la propiedad distributiva, cuando se busca el área de una región rectangular cuyos lados son expresiones algebraicas, como se observa en el ejercicio 5 del cuestionario, relacionado con el uso inadecuado de fórmulas o reglas de procedimiento que se relaciona a continuación:

La expresión que determina el área del rectángulo es:



a) $5 \cdot e + 2$ __

b) $5 \cdot (e + 2)$ __

c) $5 \cdot e^2$ __

d) $e + 2.5$ __

En este ejercicio de selección múltiple, se puede observar la importancia del uso del paréntesis, el empleo de signos, el punto para el producto y la capacidad de análisis del estudiante, para expresar álgebraicamente una situación gráfica planteada.

Por otra parte, en el numeral 5, se pretende visualizar la transposición que el estudiante puede realizar con una expresión escrita empleando el álgebra, la propiedad distributiva, su notación, simbología y propiedades se ven afectadas cuando su aplicación no es correcta y estos errores no han sido detectados para minimizar su impacto en los ambientes educativos. La situación planteada es:

La expresión que corresponde a **$e+2$ multiplicado por 3** es:

$e+6$ __

a) $3.(e+2)$ __

b) $3.e2$ __

c) $3e + 6$ __

d) $e + 2.3$ __

Finalmente, para estudiar los errores referidos al uso inadecuado de la propiedad distributiva, se propone una situación en la cual se plantea la descomposición de una fracción en dos fracciones homogéneas, a manera de distribución del denominador; dicho ejercicio hace parte de los seis contextos en estudio de esta subcategoría, como puede observarse a continuación:

Si $\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$ entonces $\frac{x}{y+z}$ es equivalente a:

a) $\frac{x}{y} + z$ __

b) $y + \frac{x}{z}$ __

c) $\frac{x}{y} + \frac{x}{z} \text{ —}$

d) ¿Otra? ¿Cuál?

b) **Uso del recíproco**

En el estudio de las relaciones numéricas, es interesante el estudio de el inverso multiplicativo, recíproco o inverso de un número; particularmente para esta investigación se tiene en cuenta el recíproco de una fracción y el manejo de los procedimientos para efectuar operaciones con números racionales. A continuación se observa el ejercicio propuesto, que requiere seleccionar o proponer una solución correcta en caso de no existir a juicio del estudiante.

Si $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = a + b$ entonces la expresión $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ se escribe:

a) $\frac{1}{a+b} \text{ —}$

b) $\frac{2}{a+b} \text{ —}$

c) $\frac{2}{ab} \text{ —}$

d) $\frac{1}{a.b} \text{ —}$

e) ¿Otra? ¿Cuál?

c) **Manejo de Cancelación**

Esta subcategoría de análisis, indaga sobre las reglas de procedimiento para la generalización de cancelación de cantidades efectuada al desarrollar ejercicios como el propuesto en el numeral 8:

Si $\frac{a.x}{b.x} = \frac{a}{b}$ entonces la expresión $\frac{ax+by}{x+y}$ es equivalente con:

a) $a + b$ —

b) $ax + by$ —

c) $\frac{ax+by}{x}$ —

d) $\frac{a+b}{2}$ —

e) ¿Otra? ¿Cuál?

Como puede observarse, se presenta una regla de procedimiento válida, la simplificación de los valores que son iguales en el numerador y denominador, el hecho de cancelar sólo es válido cuando los elementos simplificados hacen parte de un producto (factores). Posteriormente, se plantea una situación en la que interviene una adición tanto en el numerador como en el denominador, se espera que el estudiante efectúe los procedimientos adecuados y simplifique si es posible la expresión propuesta.

El lenguaje que se emplea en los ambientes escolares, al momento de resolver situaciones o problemas matemáticos, la utilización de palabras como “tachar”, “quitar”, “eliminar”, deberían estar fundamentadas teóricamente, para ser tomados por los estudiantes como procedimientos de demostración, más que una simple eliminación ligera de términos algebraicos.

d) **Generalizaciones sobre números**

Al respecto de la generalización, Mason (1,999) afirma que “la generalidad es la vida de las matemáticas y que el álgebra es el lenguaje con el que se expresa dicha generalidad”. En esta última categoría, se hace referencia a números específicos, sus relaciones, propiedades y operaciones. Se han propuesto cinco situaciones, donde se analiza procesos para resolver el producto de un número y su recíproco o inverso multiplicativo, la adición de un número y su opuesto o inverso aditivo, donde intervienen los conceptos de elemento neutro para las

operaciones aditivas y multiplicativas, como son, el cero (0) y el uno (1), que en los numerales 9c, 9d y 9e se integran como factores o sumandos con un número cualquiera.

Ejercicios como, $\frac{1}{a} \cdot a = ?$, $a + (-a) = ?$, $a \cdot 1 = ?$,

$a + 0 = ?$ y $a \cdot 0 = ?$, considerados por muchos como elementales o fáciles por

las características de sus elementos, suelen ser el origen de dificultades que generan errores, que pueden desencadenar otros que podrían considerarse de un mayor nivel.

9.7. Análisis de los resultados uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento

Para el análisis y clasificación de los errores, se han seleccionado ejemplos de fórmulas o reglas de procedimiento que se desarrollan al inicio del trabajo algebraico en grado octavo. Se incluyen aplicaciones de productos, desde la multiplicación por un binomio, cálculo del área, desarrollo del binomio de Newton, potenciación, radicación, operaciones con fracciones y reglas generales sobre operaciones básicas y números como el cero y uno.

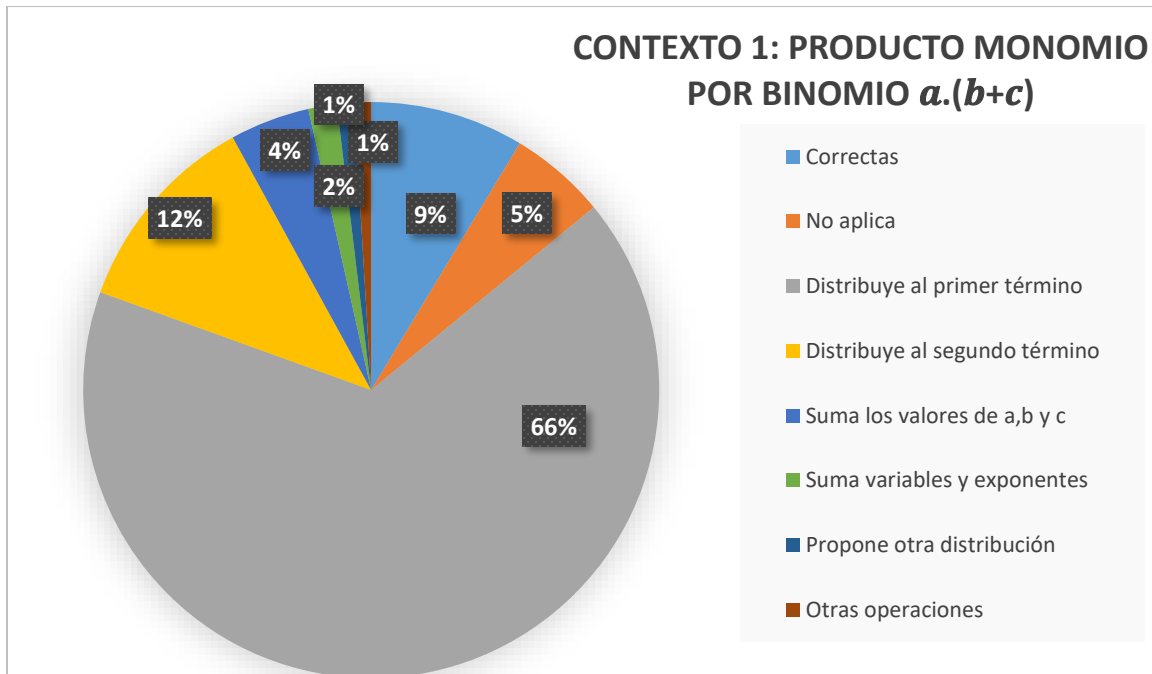
Las categorías que se trabajan en el cuestionario cuatro son:

- El uso de la propiedad distributiva
- El uso del recíproco
- Manejo de cancelación
- Generalizaciones sobre números

Teniendo en cuenta las categorías para cada uno de los contextos propuestos en el presente estudio, se presentan algunas opciones de respuesta permitiendo al estudiante escoger la respuesta que considere correcta o agregar otra.

En relación con ***el uso de la propiedad distributiva***, se proponen seis contextos: el producto monomio por binomio, desarrollo de binomio elevado al cuadrado, desarrollo de la raíz de un binomio, expresión para el área de un rectángulo, expresión para

$(e+2) \cdot 3$ y equivalencia entre expresiones. los resultados en la población en estudio pueden observarse a continuación:

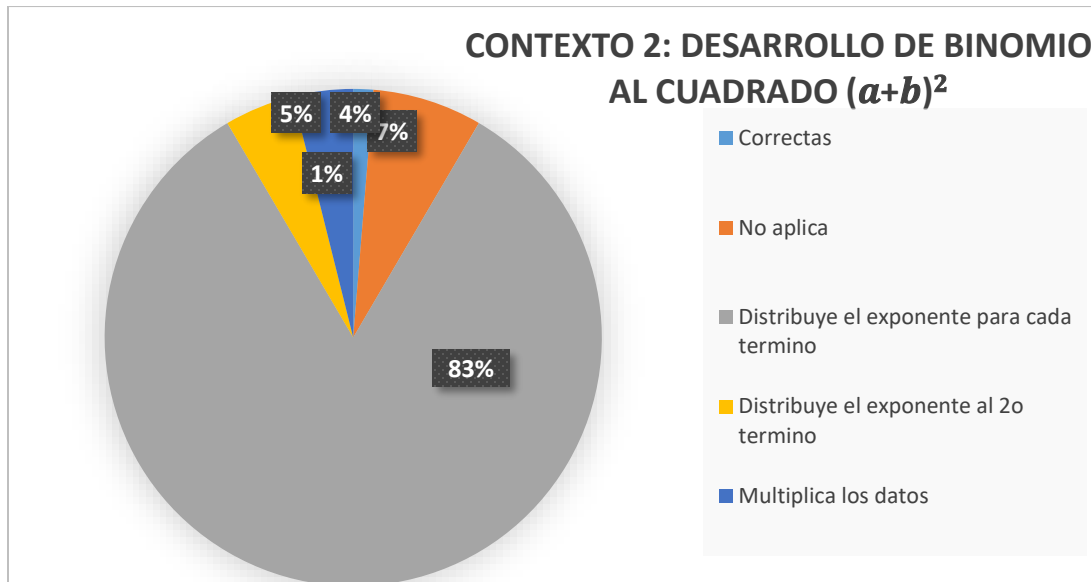


Grafica 8. Resultado Contexto No. 1

Fuente: La presente investigación

El error más frecuente corresponde a la distribución de la multiplicación únicamente al primer término del binomio, con un 67,53% seguida de un 11,69% de la población, quienes distribuyen la multiplicación del monomio al segundo término del binomio.

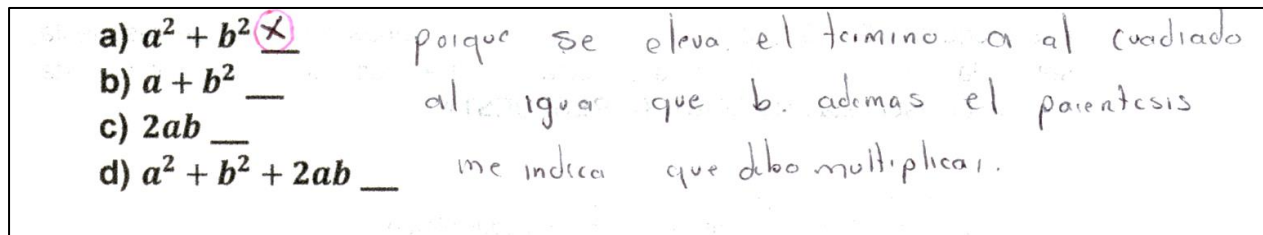
Para el segundo contexto, la propiedad distributiva se ve utilizada inapropiadamente al desarrollar un binomio al cuadrado, donde el 83,12% de la población, distribuye el exponente para cada término y tan solo un 1,3% responde correctamente a esta regla de procedimiento, tan utilizada y aplicada en la actividad matemática.



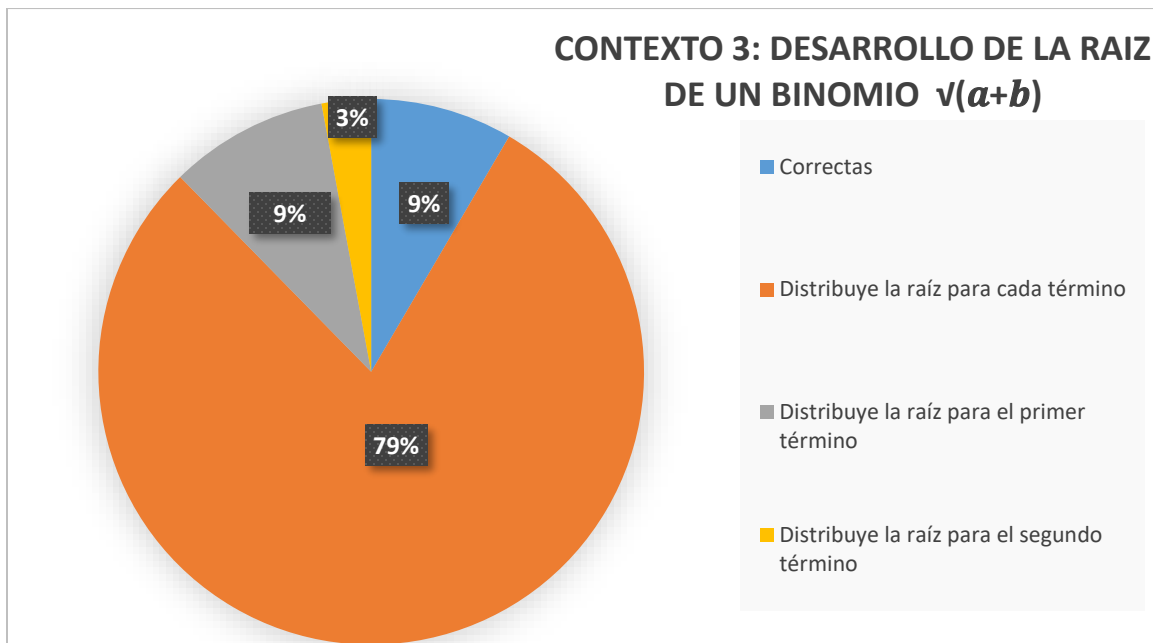
Grafica 9. Resultados Contexto No. 2

Fuente: La presente investigación

A continuación se puede observar el argumento que un estudiante da a su respuesta errónea.



Al resolver situaciones problema, en las que intervienen las raíces, también es común encontrar errores relacionados con la propiedad distributiva. En el siguiente contexto se propuso desarrollar la raíz de un binomio, y el error más frecuente (79,22%) fue presentado por los estudiantes que distribuyen la raíz para cada término. La información se encuentra recopilada en la siguiente gráfica.



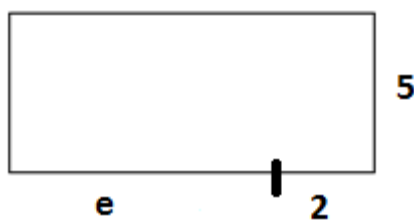
Grafica 10. Resultados Contexto No. 3

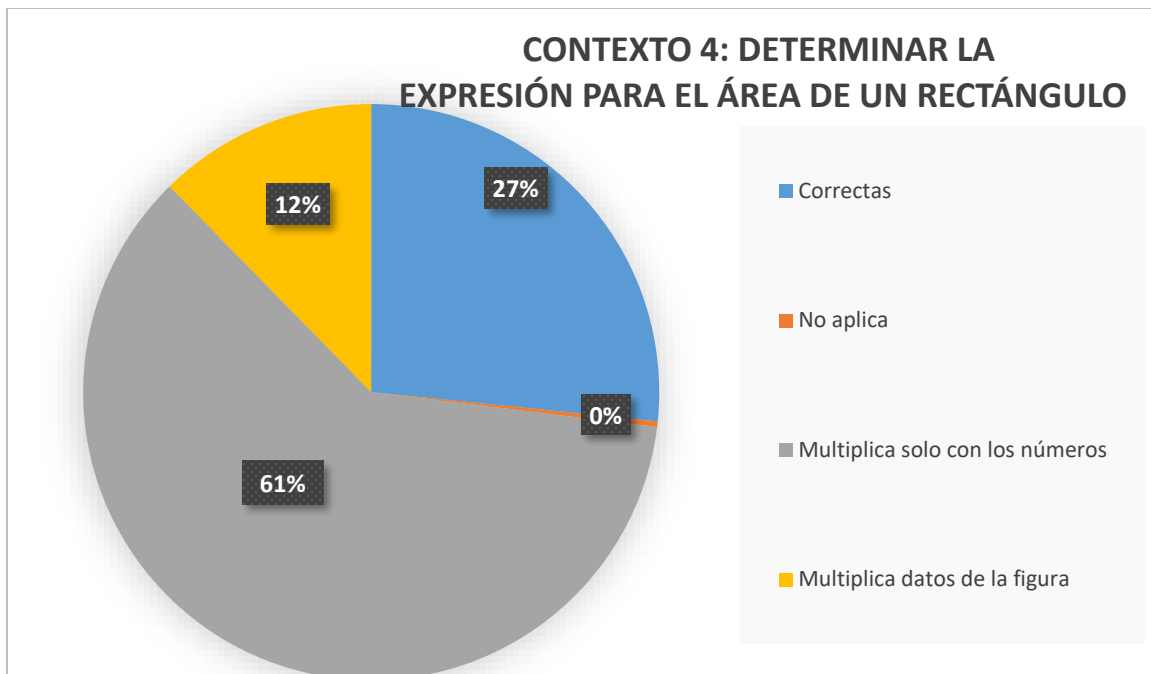
Fuente: La presente investigación

La inadecuada utilización de la propiedad distributiva, también se pudo evidenciar, en el desarrollo propuesto por los estudiantes para el contexto relacionado con el área de un rectángulo, conociendo los valores de la base y altura. En este caso, teniendo en cuenta, que los valores no eran únicamente numéricos, el 63,31% multiplica los números que es lo que reconoce y deja expresada la suma con la “letra”.

$$e + 2.5$$

Para este contexto en particular, se puede observar que los estudiantes no dan la importancia a los signos de agrupación, como los paréntesis para indicar multiplicación, razón por la cual el 12,34% multiplica indistintamente los datos proporcionados en la imagen, donde se pide hallar el área del rectángulo. **Respuesta área = 5.e2**

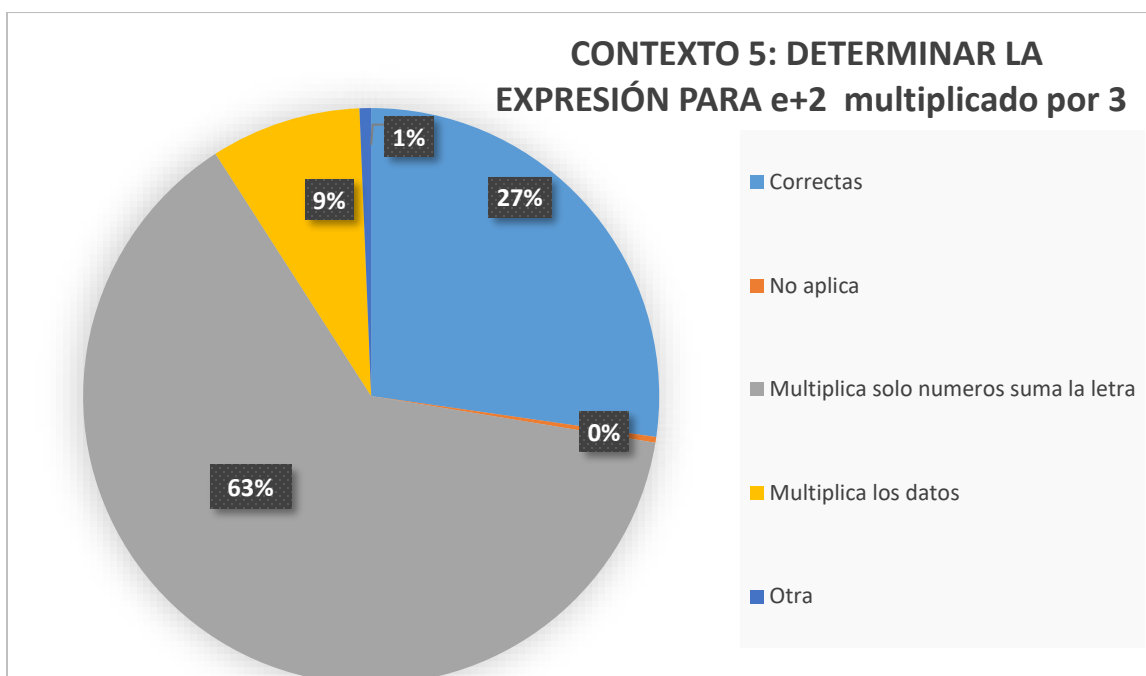




Grafica 11. Resultados Contexto No. 4

Fuente: La presente investigación

También para esta categoría, se propone, un contexto en el que se pide a los estudiantes determinar la expresión que corresponde a **$e+2$ multiplicado por 3**, con el fin de establecer el grado de comprensión de un enunciado y su expresión algebraica. Para este caso, el error más frecuente es cometido por 195 estudiantes que corresponden a un 63,31% de la población en estudio, quienes dan como respuesta la opción **$e+6$** , seguido de un 8,44% que multiplica todos los datos, es evidente, que una parte significativa de los estudiantes no tienen claridad del correcto uso de la propiedad distributiva.



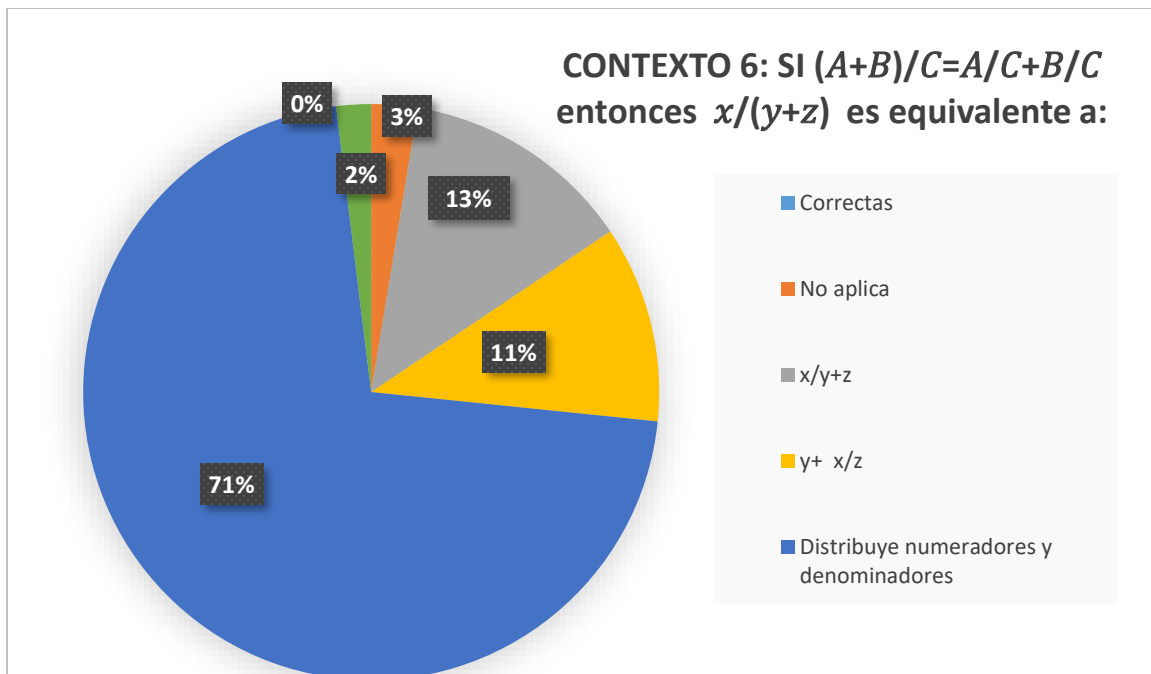
Grafica 12.Resultados Contexto No. 5

Fuente: La presente investigación

Para el último contexto propuesto para esta subcategoría, el 71,43% de los estudiantes, cometen error al resolver la situación planteada, distribuyendo los numeradores y denominadores, como se muestra a continuación:

$$\text{Si } \frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C} \text{ entonces } \frac{x}{y+z} \text{ es equivalente a } \frac{x}{y} + \frac{x}{z}$$

Otros resultados se presentan a continuación:



Grafica 13.Resultados Contexto No. 6

Fuente: La presente investigación

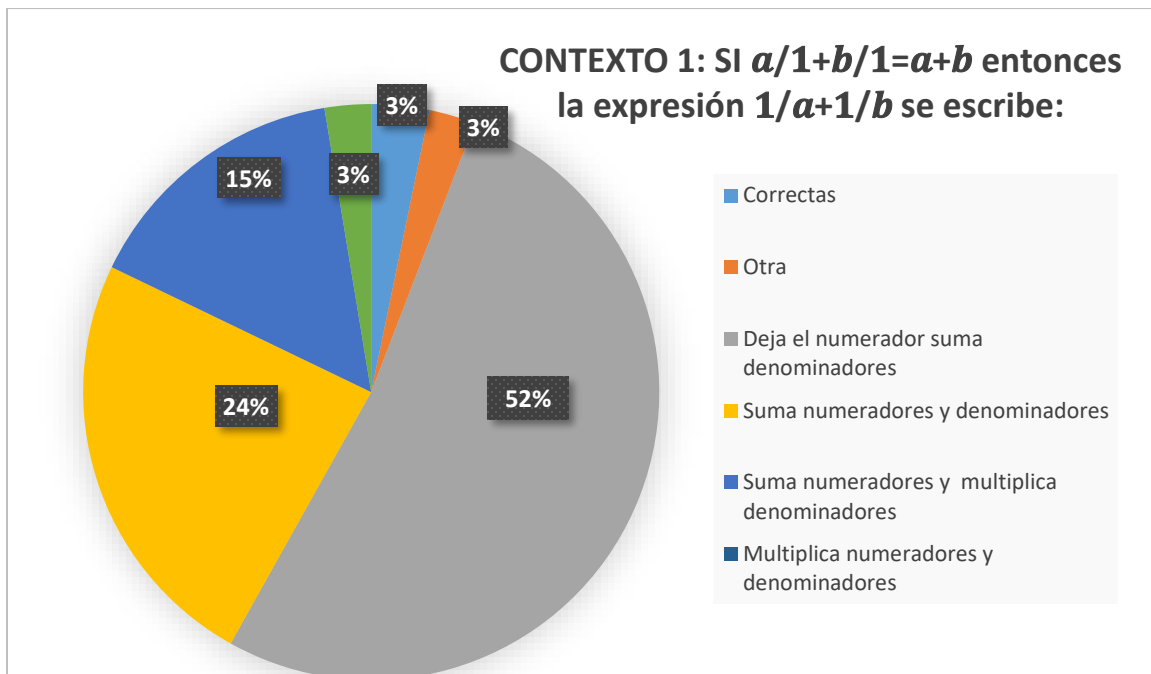
USO DEL RECIPROCO

Para esta subcategoría, se propuso un único contexto, Si $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = a + b$ entonces la

expresión $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ se escribe (...), los resultados fueron los siguientes: un 52,27% deja como numerador el 1 y suma los denominadores así:

$$\frac{1}{a + b}$$

Por los resultados obtenidos, se puede asegurar, que existe gran confusión en el manejo del recíproco, pues otros estudiantes, realizan diferentes operaciones aritméticas con los datos, pero que arrojan un resultado igualmente erróneo, como se puede evidenciar en la siguiente gráfica:



Grafica 14.Resultados Contexto No. 1

Fuente: La presente investigación

Este estudiante propone una nueva solución argumentando que uno de los valores se cancela:

$$\frac{1}{a+b}$$

e) ¿Otra?
¿Cuál? Sería $a+b$. porque el uno se cancela.

ó otro estudiante que propone lo siguiente

e) ¿Otra?
¿Cuál? $1+1$, LOS NUMERADORES DEBEN DE SUMARSE

MANEJO DE LA CANCELACIÓN

Se planteó un único contexto para el presente estudio, sin embargo, en relación a esta subcategoría existen muchos otros contextos que ejemplifican la ocurrencia de error con mucha frecuencia. Se propuso la siguiente situación:

Si $\frac{a \cdot x}{b \cdot x} = \frac{a}{b}$ entonces la expresión $\frac{ax+by}{x+y}$ es equivalente con, siendo $a + b$, la opción de

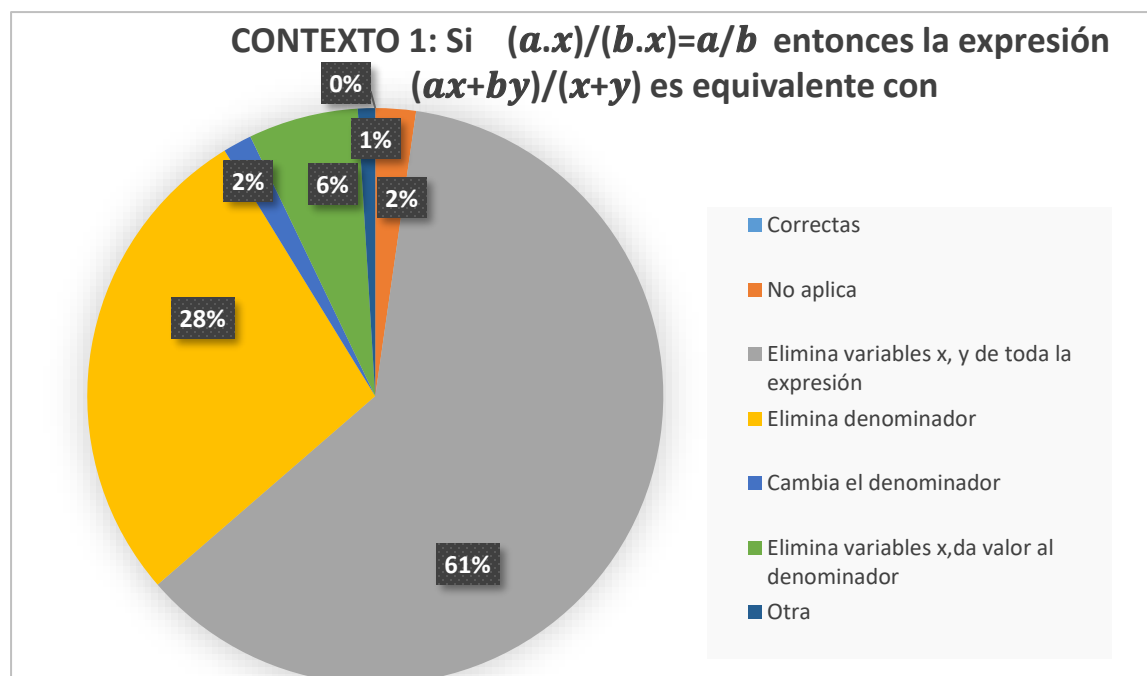
respuesta con mayor frecuencia, con un 61,36%, un estudiante selecciona esta opción y asegura la propiedad de cancelación. Ver figura

(a) $a + b$ — Por que se los cancelan

Un 27,60% de los estudiantes, eliminan o cancelan el denominador,

e) ¿Otra? ¿Cuál?
 porque $ax + by$ es igual a la respuesta

Otros resultados se presentan a continuación:



Grafica 15.Resultados Contexto No. 1

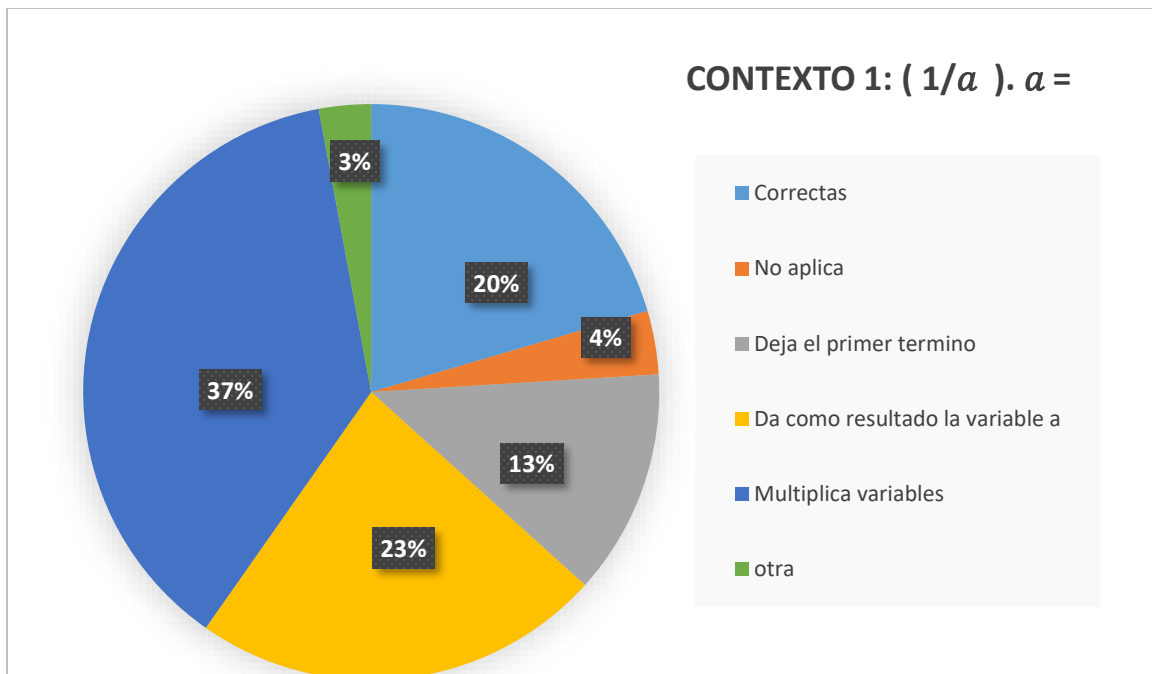
Fuente: La presente investigación

GENERALIZACIONES DE NÚMEROS

Para esta subcategoría se propusieron cinco contextos: Multiplicación de un numero por su inverso multiplicativo, suma de un numero con su inverso aditivo, multiplicación por uno, suma con cero y multiplicación por cero.

En el primer contexto, el 37,34% da como resultado a^2 . A continuación se observa el argumento de un estudiante:

porque 1 multiplicado por a es igual a 1.a y a
por a es igual a a^2 .



Grafica 16.Resultados Contexto No. 1

Fuente: La presente investigación

El segundo contexto propone la suma de un número con su inverso aditivo

$$a + (-a) =$$

El error más frecuente (48,05%) relaciona la ley de signos y deja la variable negativa. A continuación se ilustra la respuesta de uno de los 148 estudiantes que afirman que $a + (-a) = -a$

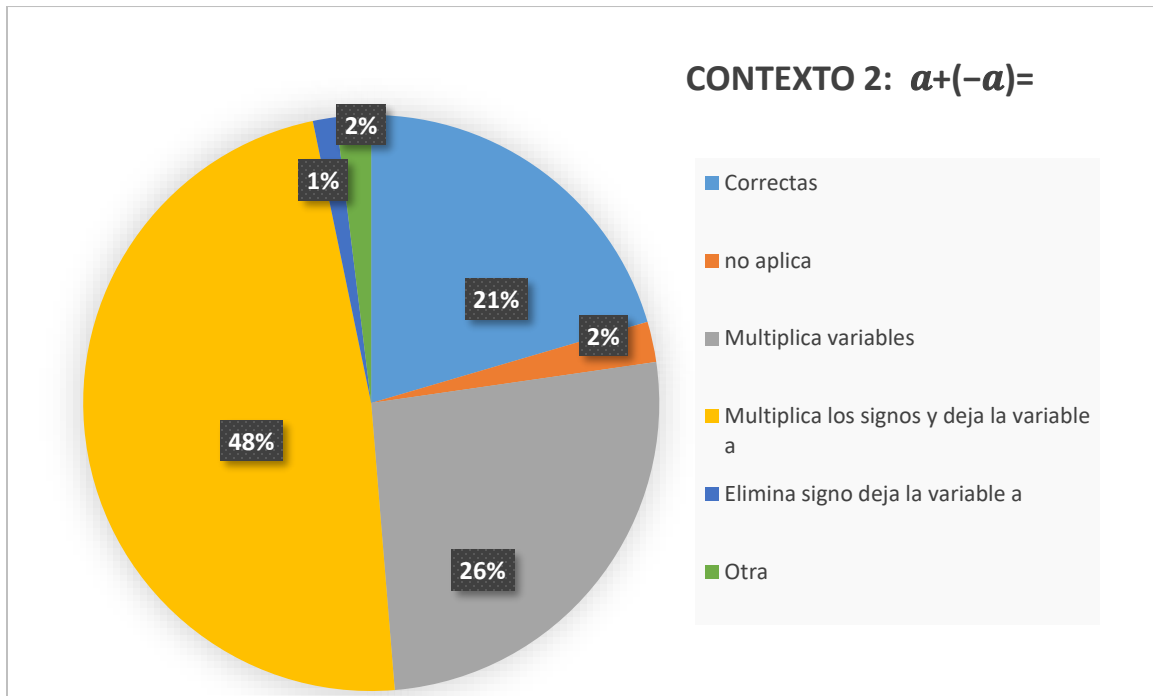
porque a positivo y a negativo tienen ley de signos
entonces $+$ - es igual a $-a$.

Otro estudiante en su respuesta, hace referencia a la utilización de signos de agrupación:

$$a + (-a) = -a$$

Por que el PARENTESIS INDICA
MULTIPLICACION

Otros resultados se presentan en la siguiente gráfica:

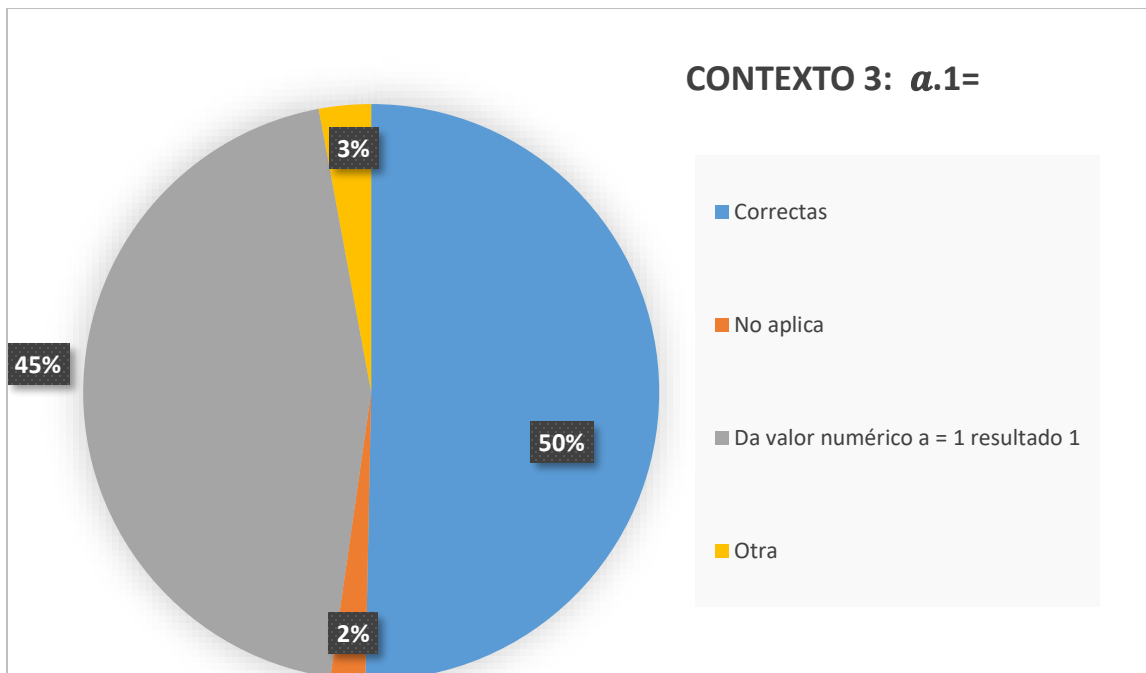
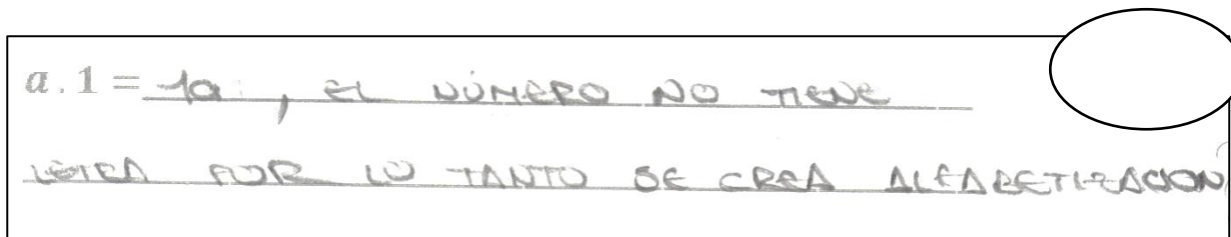


Grafica 17.Resultados Contexto No. 2

Fuente: La presente investigación

Para continuar con estas generalizaciones de números, el contexto 3 propone la multiplicación por uno. Aquí el error más frecuente cometido por el 44,81% de los estudiantes es asignar un valor numérico a la variable igual a 1 y obtener como resultado la unidad, Cabe destacar que en este contexto el 50% da una respuesta correcta.

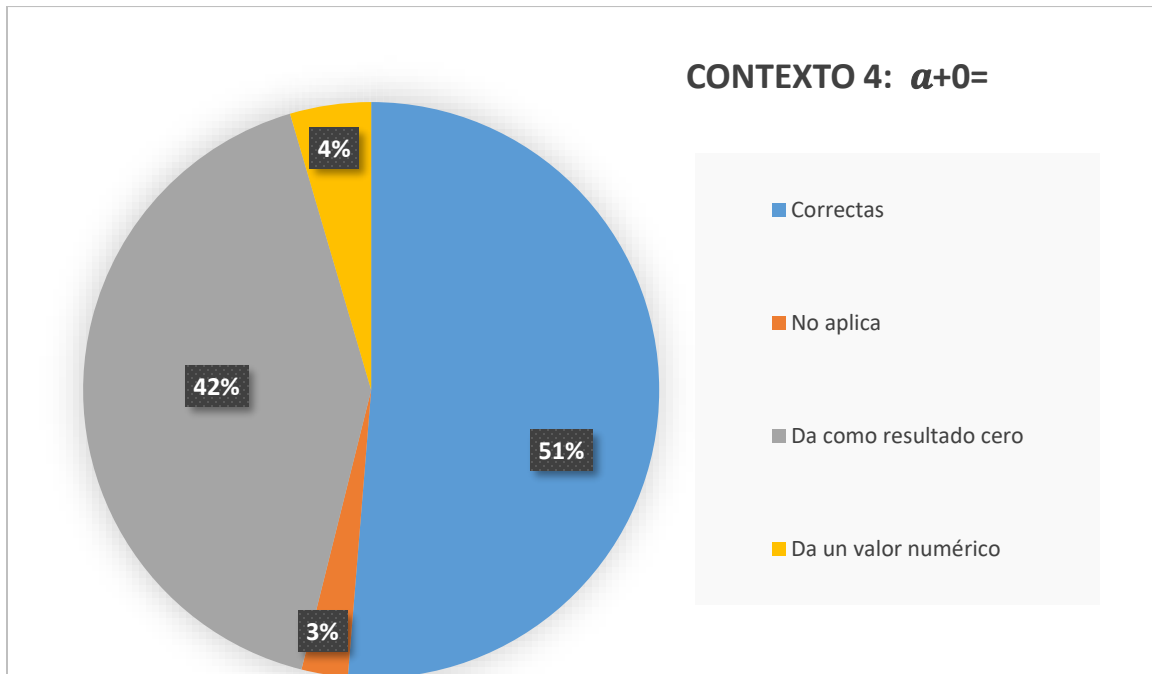
Una respuesta, por lo sombrero de ella, se deja para la reflexión del lector...



Grafica 18.Resultados Contexto No. 3

Fuente: La presente investigación

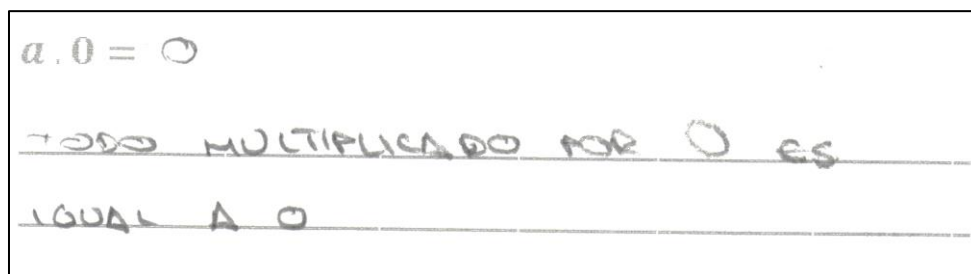
En contexto cuatro, en el que se propone la suma de un número con el cero, el cero es tomado como elemento totalizante en esta operación, se confunde con la multiplicación con el cero y su función anuladora, un 41,56% da como resultado cero, mientras que el 51% tiene claridad de este número como elemento neutro de la suma. En la siguiente gráfica se observan los resultados consolidados del estudio.

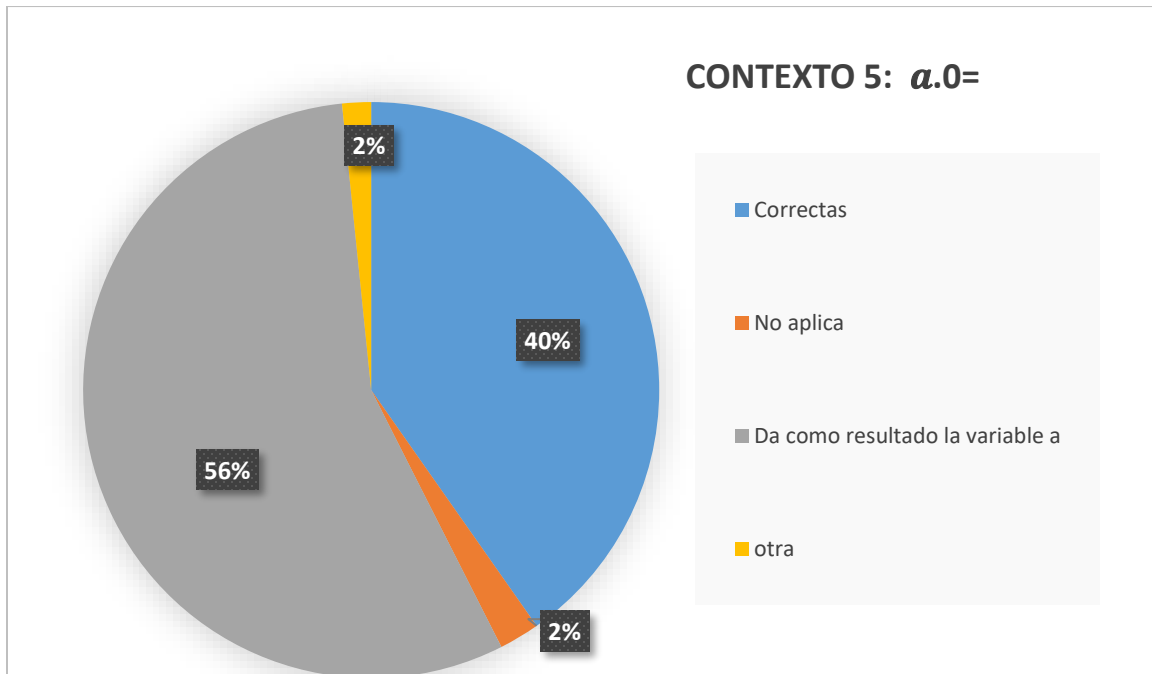


Grafica 19.Resultados Contexto No. 4

Fuente: La presente investigación

Finalmente, el contexto cinco confronta al estudiante con sus conocimientos previos al multiplicar un número con cero. Un 40,26% proporciona una respuesta correcta argumentando “que todo número multiplicado por cero da como resultado cero”. La siguiente imagen da cuenta de ello,

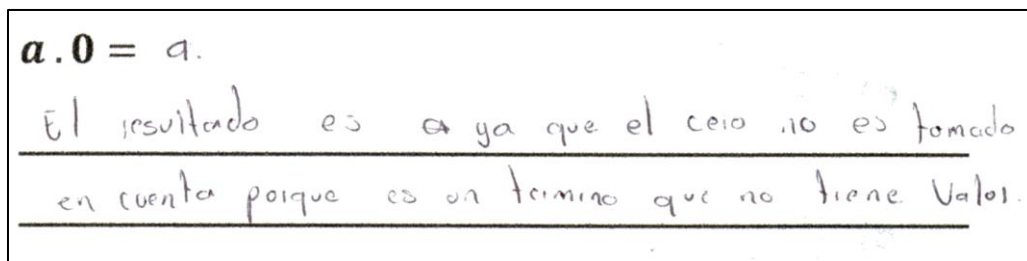




Grafica 20.Resultados Contexto No. 5

Fuente: La presente investigación

Un 55,84% de la población en estudio, da como resultado la variable a , como se observa en la imagen, en la que se presentan argumentos para su respuesta:



Después de observar y analizar las respuestas de los estudiantes, se puede develar que todos podemos cometer errores, pero los aprendizajes mal adquiridos, las dificultades inmersas en el compartir de saberes, la utilización del lenguaje y un sinnúmero de factores que interfieren en la correcta utilización de fórmulas y reglas de procedimiento, hacen del error en la clase de matemáticas, un factor a tener en cuenta, para la planeación y diseño de los planes de aula y para el currículo general de la asignatura.

9.8 Clasificación adicional

A partir de este primer análisis se realiza una segunda clasificación sobre los errores más frecuentes que cometen los estudiantes en los contextos propuestos. Se consideran las siguientes categorías: Errores de interpretación, errores semióticos, errores conceptuales, errores procedimentales y errores que sorprenden.

9.8.1 Errores de interpretación

Se catalogan como errores de interpretación, aquellos en los que los estudiantes realizan un análisis y comprensión equivocada de los enunciados en las situaciones planteadas. Se agrupan algunos de los errores cometidos por los estudiantes en estudio en la siguiente tabla:

Error frecuente, ejemplo ilustrativo	Descripción
$-(a+b) = -a+b$ $-(a+b) = a - b$	Dificultades en el empleo de los signos y expresiones. Existe una pérdida del significado de los símbolos en este caso el paréntesis precedido del signo menos. Error al interpretar la propiedad distributiva de -1 por un binomio.
$a(b+c) = ab + c$ $(e + 2)$ multiplicado por 3 = $e + 6$	Existe dificultad en la interpretación de una operación combinada y el manejo de los signos de agrupación. Error en la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma.
Si $\frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$	

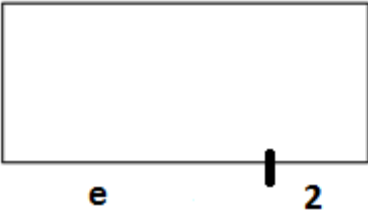
entonces $\frac{x}{y+z}$ es equivalente a $\frac{x}{y} + \frac{x}{z}$	
Si $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = a + b$ entonces la expresión $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ se escribe $\frac{1}{a+b}$	Realizan un razonamiento por analogía. Aplican reglas similares en contenidos diferentes. Error de interpretación de las reglas.
$\frac{1}{a} \cdot a = a^2$ “porque 1 multiplicado por a es igual a 1a y a por a es igual a a²” argumento de estudiante	Error de interpretación de la propiedad del inverso multiplicativo. Adapta reglas que se usan habitualmente a situaciones distintas sin comprobar su validez, (Pérdida del 1 como numerador, elemento invisible, linealidad de la fracción)
$a \cdot 0 = a$ “El cero no es tomado en cuenta porque es un término que no tiene valor” Argumento de estudiante	Error debido a interpretar el cero como elemento neutro de la multiplicación.

9.8.2 Errores semióticos

Para clasificar los errores cometidos por los estudiantes en estudio, se tienen en cuenta los aportes para la didáctica de la matemática realizados por Raymond Duval, quien reconoce la importancia de abordar semióticamente la comunicación y señala que en las matemáticas, toda iniciación, requiere la apropiación individual de sistemas semióticos de representación.

La comprensión de las diferentes representaciones de un objeto dado y del objeto mismo, aluden a las nociones de semiosis y de noesis, caracterizables de acuerdo a Duval (2004), como: “aprehensión o producción de una representación semiótica” para la semiosis, y los “actos cognitivos como aprehensión conceptual de un objeto” para la noesis.

A continuación, presentamos los errores más frecuentes que están relacionados con la semiosis como la representación del objeto mediante signos. Más adelante, se trataran los errores que hacen referencia a la noesis como adquisición conceptual de un objeto, denominados errores conceptuales para nuestro trabajo.

Error frecuente, ejemplo ilustrativo	Descripción
$-\frac{a+b}{c} = \frac{a+b}{c}$ $-\frac{a+b}{c} = \frac{(-a)+(-b)}{-c}$	Dificultades en el empleo de los signos en una fracción algebraica, interpretación incorrecta de la propiedad y expresiones. Errores derivados del mal uso de los símbolos y términos matemáticos, debido a su inadecuado aprendizaje, específicamente error al representar un fraccionario negativo.
La expresión que determina el área del rectángulo es: e+10 	El trabajo del área para algunos estudiantes se reduce a fórmulas como $A = b \times h$; tratando las letras en ecuaciones como incógnitas con un valor fijo y no como números generalizados o como variables. Error de representación del área de un rectángulo.

$a + (-a) = -a$ “porque el paréntesis indica multiplicación” Argumento de estudiante	Los estudiantes usan reglas aprendidas con anterioridad sin tener conciencia de su significado. Error por manejo incorrecto de convenciones, notación en el lenguaje matemático y propiedades.
$a. 1 = 1$	Los estudiantes presentan la necesidad de hallar una respuesta numérica ante una expresión (situación) álgebraica propuesta. Error al asignar un valor numérico para hallar solución.
$a + 0 = 0$	

9.8.3 Errores conceptuales

En esta categoría se clasifican los errores originados por un aprendizaje deficiente de los prerrequisitos, deficiencias en el manejo de conceptos y contenidos para las tareas matemáticas.

En la solución de situaciones, intervienen actividades cognitivas, relacionadas con la “noesis”. A continuación se agrupan los errores que se consideran han sido producidos por una dificultad en los procesos de aprehensión de los objetos matemáticos.

Aquí, se pueden observar las múltiples interpretaciones a un concepto matemático, así como también el desconocimiento u olvido de las posibilidades y restricciones del mismo.

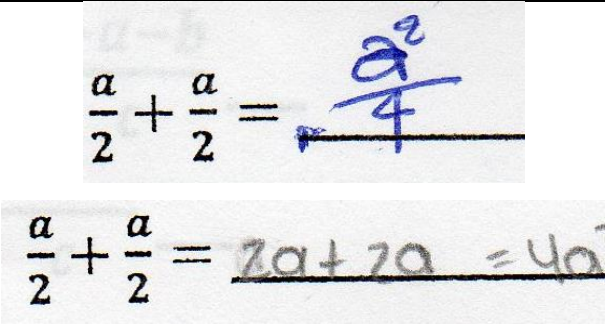
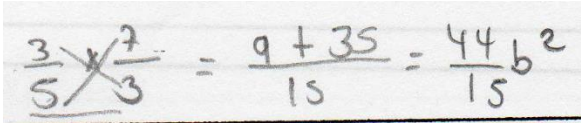
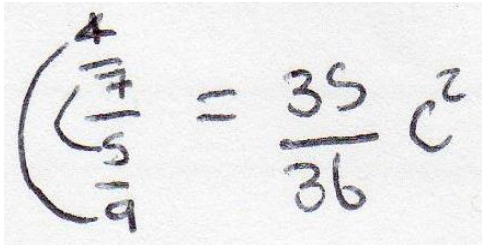
Error frecuente, ejemplo ilustrativo	Descripción
$\frac{3}{5}b \cdot \frac{7}{3}b = \frac{21b}{15b} = \frac{21}{15}b$	Concepto erróneo del producto de potencias de igual base. Confunde la regla del manejo de letras en la adición de términos semejantes con el producto de la parte literal.
$(-1)^4 = -4$	Concepto erróneo de la propiedad de las potencias para las bases negativas y exponente par o impar. Error al multiplicar la base por el exponente.
$(-1)^3 = -3$	
$a^3 \cdot a^2 = a^{3 \times 2} = a^6$	Concepto erróneo de la propiedad del producto de potencias con igual base.
$\frac{c^5}{c^2} = c^7$	Concepto erróneo de la propiedad del cociente de potencias con igual base.
$b^2 + c^2 = (b + c)^2$ $(a + b)^2 = a^2 + b^2$	Particularmente en este tipo de ejercicios presentan conceptos erróneos del desarrollo de un binomio de Newton y la raíz de un binomio. Error al aplicar la propiedad distributiva: extiende la aplicación de la multiplicación a la suma.
$\sqrt{a + b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$	

$a + (-a) = -a$ “porque a positivo y a negativo tienen ley de signos entonces +.- es igual a -a” Argumento de estudiante	Los estudiantes aplican preconceptos sin tener conciencia de su significado. No comprender el uso de una letra para representar un número generalizado (variable). Concepto erróneo de la suma de un número con su inverso aditivo.
Si $\frac{a.x}{b.x} = \frac{a}{b}$ entonces la expresión $\frac{ax+by}{x+y}$ es equivalente con: $a + b$	Razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares. Concepto erróneo de la cancelación. Generalización equivocada de la misma.

9.8.4 Errores procedimentales

Dentro de esta clasificación, se han organizado los errores más frecuentes que se presentan cuando los estudiantes realizan una generalización equivocada de procedimientos aritméticos. En muchas ocasiones, el aprender a pensar y operar con símbolos numéricos, durante los primeros años de escolaridad dificulta la comprensión de la operación con letras y las reglas de operación en las ecuaciones.

La confianza en métodos intuitivos y que se centran en conseguir “de alguna forma” la respuesta, va en contra de que vean las relaciones, propiedades y características del problema y confundan su método algorítmico de solución.

Error frecuente, ejemplo ilustrativo	Descripción
$\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x = \frac{10}{20}x$ $\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x = \frac{45}{35}$	Suma de fracciones heterogéneas, en ambos ejemplos no hay claridad en el procedimiento. Confunden reglas o algoritmos que habitualmente se trabajan con fraccionarios.
	Suma de fracciones homogéneas, pese a su trabajo y aparente bajo grado de dificultad, estos errores son persistentes. Existe confusión para resolver este tipo de ejercicios.
$\frac{3}{5}b \cdot \frac{7}{3}b =$ 	Procedimiento erróneo al resolver un producto de fracciones. En el ejemplo se ve el procedimiento que algunos maestros enseñan para sumar fracciones heterogéneas.
$\frac{\frac{4}{7}c}{\frac{5}{9}c} =$ 	En el caso del cociente de fracciones el error más frecuente es invertir los resultados de la multiplicación de los valores de medios, extremos y multiplicar variables. Como se puede observar el trabajo de las fracciones es un campo en el que se detectan muchos errores a diferentes escalas.

9.8.5 Errores que sorprenden “errores eclécticos”

Dentro de esta categoría se han agrupado, los errores que aunque no son frecuentes, han llamado la atención por la composición de operaciones o por los argumentos que los estudiantes aplican para dar solución a situaciones planteadas.

Se puede observar a continuación, que este tipo de errores se caracterizan por una interpretación equivocada de la concatenación de términos algebraicos, por inferencias no validas lógicamente, por teoremas o definiciones deformadas, por el empleo incorrecto de propiedades y definiciones, por el uso parcial de la información, la deducción incorrecta de la información, la invención de datos a partir de las situaciones, todas estas dificultades debidas quizá a un aprendizaje incompleto o erróneo de propiedades, conceptos y algoritmos matemáticos.

Ejemplo ilustrativo

$$\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x = \frac{\frac{3x}{5} + \frac{7x}{15}}{15} = \frac{35x}{45} = \frac{7}{9}$$

se aplica la ley de la creja, luego se multiplica los números q' estan adentro y los de afuera luego se simplifica y sale el resultado,

$$\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x = x^{3+5} + x^{15+7} = 8x + 22x = 30x$$

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \text{Como tienen el mismo denominador y numerador}$$

$$\text{sigue siendo el mismo RTA } \frac{a}{2}$$

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \right) \text{ se cancela.}$$

Si $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = a + b$ entonces la expresión $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ se escribe

Sería $a + b$. porque el uno se cancela.

Si $\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = a + b$ entonces la expresión $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ se escribe

$1 + 1$, LOS NUMERADORES DEBEN DE SUMARSE

$$\frac{C^5}{C^2} =$$

$$\frac{C^5}{C^2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 20$$

$a \cdot 1 = 1a$, el número no tiene
letra por lo tanto se crea alfabetización

$$\frac{c^5}{c^2} = \frac{c^{10}}{c^4}$$

$$\frac{c^5}{c^2} = \frac{c^3 \cdot c^2}{c^2} = \frac{c^3}{1}$$

$$\frac{c^5}{c^2} = \left(\left(\frac{c}{c} \right)^5 \right)^2 = \left(\frac{c}{c} \right)^3 = \frac{c^3}{c^3}$$

c) $a \cdot 1 = 2$, porque cualquier término multiplicado por
1 es igual a 2.

$$\frac{3}{5}b \cdot \frac{7}{3}b = \frac{3+7}{5+3} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

$$\frac{c^5}{c^2} = c = \frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{5}b \cdot \frac{7}{3}b = \frac{9b \times 35b}{5 \times 3} = 315b^2$$

$$\frac{4}{7}c / \frac{5}{9}c =$$

$$= \frac{4}{7} \cdot \frac{9}{5} = \frac{36}{35} = 1.02857$$

$$\frac{3}{5}b \cdot \frac{7}{3}b =$$

$$= \frac{6}{12} = 0.5$$

$$\frac{c^5}{c^2} = \frac{c^{25}}{c^4}$$

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{a+2}{a+2} = \frac{a^2}{a^2}$$

$$\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x = \frac{3x+7x}{5x+15x} = \frac{10x}{20x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x = \frac{10}{20}x \cdot \frac{5}{10} = \frac{105}{120}x$$

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2} =$$

es el por tener la a en comun solo se o por tener los iguales o a el mismo resultado $\frac{a}{2}$.

$$\frac{c^5}{c^2} = c^{2/5}$$

Porque creo que "c" es una cantidad y se divide entre si da siempre uno.

$$\frac{3}{5}b \text{ por } \frac{7}{3}b = \frac{(21)(35)(9)}{15} = \frac{56(9)}{15} = \frac{63}{15}$$

$\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x = \frac{26}{15}x$ <u>Lo que yo hice fue sumar las fracciones y sumar las x</u>	
$\frac{4}{7}c / \frac{5}{9}c = \frac{0,8}{0,7}c^2$	$\frac{40}{100} \quad \frac{70}{100}$
$\frac{4}{7}c / \frac{5}{9}c = \frac{28}{63} / \frac{45}{63} = \frac{17}{63}$	
$b^2 + c^2 = (bc)^4$	
$\frac{4}{7}c / \frac{5}{9}c = \frac{17 + 18}{12} = \frac{35}{12}$	
$\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x = \frac{45 + 35}{x} = \frac{80}{x}$	
$\frac{3}{5}x + \frac{7}{15}x = \frac{21}{60} = \frac{x}{x} = \frac{22}{61}$ <u>se multiplica y luego se suma</u>	

10. PROPUESTA: ESTRATEGIA SITUACIONES DIDÁCTICAS

SECUENCIAS DIDÁCTICAS

11. CONCLUSIONES

Se cumplieron los objetivos propuestos de descripción y clasificación de los errores, posteriormente se propuso una estrategia de situaciones didácticas con el fin de contribuir a superarlos, planificar la enseñanza a partir de los errores más frecuentes y pensar en nuevas experiencias de aula que enriquezcan la labor educativa.

El estudio de errores en los procesos educativos es el insumo para realizar continuos ciclos de diagnóstico, corrección y superación de errores. En cualquier momento del aprendizaje los errores aparecen, son persistentes pero, una vez comprobada la presencia del error, se pueden reorganizar las prácticas de enseñanza, es la oportunidad de repensar las estrategias pedagógicas e incluso, es oportuno reformar el currículo. El error debe dejar su carácter sancionatorio y convertirse en la fuente de información y una ruta hacia donde debe orientarse el proceso de enseñanza.

Es útil inspeccionar las producciones del estudiante para la detección y tratamiento de errores, se pueden encontrar más alternativas para enriquecer el trabajo y desarrollar los procesos de pensamiento en matemáticas como son: formular y resolver problemas, modelar, comunicar, razonar y ejercitar procedimientos y algoritmos. En el pensamiento variacional, entendido como sistema es necesario tener en cuenta las nuevas directrices del MEN para el trabajo de las matemáticas en todos los grados, con los Derechos Básicos de aprendizaje se tienen claros los desempeños elementales que todo estudiante debe aprender y sobre ellos cimentar nuevas estrategias didácticas.

Los errores más frecuentes, referidos a la comprensión de la aritmética, detectados en el contexto del presente estudio, permiten demostrar que es importante además del dominio aritmético operacional, el conocimiento de las propiedades y relaciones de las operaciones para lograr un dominio álgebraico. Estos hallazgos se resumen a continuación:

Subcategoría	Contexto	Error más frecuente
Uso de fracciones	Suma de fracciones heterogéneas	Suma numeradores y denominadores entre si
	Suma de fracciones homogéneas	Multiplicar en cruz y reducir términos semejantes
	Producto de fracciones	Resolver como una suma de fracciones heterogéneas
	Cociente de fracciones	Invertir los resultados en el numerador y denominador y resolver el cociente de las variables como producto
Manejo de signos	Propiedad distributiva $-(a+b)$	Distribuye el signo al primer término únicamente “-a+b”
	Propiedad distributiva $-\frac{a+b}{c}$	Asignar el signo a un término del numerador $\frac{-a+b}{c}$
Manejo de potencias	Potencias con base negativa y exponente par o impar	Multiplicar la base y el exponente
	Producto de potencias con igual base	Multiplicar exponentes
	Cociente de potencias con igual base	Sumar exponentes
	Operatoria con potencias de bases diferentes	Resolver como un producto de potencias con bases iguales

Los errores en las tres subcategorías están ligados al manejo aritmético previo, aquellos que no se corrigen en aritmética repercuten también en el álgebra, para el caso de las fracciones y las potencias, los errores están caracterizados por arreglos en los que se combinan algoritmos aprendidos. Aquí se develan los vacíos conceptuales en la solución de este tipo de ejercicios. Para el trabajo con los signos exclusivamente tratado en relación a la distribución del signo negativo, los errores están asociados al trabajo escaso de los polinomios aritméticos en los que se tenga en cuenta el signo menos como elemento que precede y su relación con la propiedad distributiva.

A continuación, se presentan los errores más frecuentes en relación a la segunda categoría de estudio, el uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento:

Subcategoría	Contexto	Error más frecuente
Uso de la propiedad distributiva	Producto de monomio por binomio $a(b+c)$	Distribuir únicamente al primer término $ab + c$
	Desarrollo del cuadrado de un binomio	Distribuir el exponente para cada término del binomio
	Desarrollo de la raíz de un binomio	Distribuir la raíz para cada término
	Determinar la expresión para el área de un rectángulo	Invisibilidad de la letra para operar, solo resuelve con números
	Determinar la expresión para $e+2$ multiplicado por 3	
Uso de la propiedad distributiva	Comparar dos expresiones para distribuir si es posible	Resolver análogamente situaciones planteadas sin reflexión
Uso del recíproco		
Manejo de cancelación	Simplificar si es posible una expresión algebraica en la que intervienen dos binomios	Cancelar variables en el numerador y denominador sin tener en cuenta que hay

	como numerador y denominador respectivamente	adición entre los términos
Generalizaciones sobre números	Producto de un número y su inverso multiplicativo	Resuelve el producto linealmente, “olvida” el primer factor (fracción) $\frac{1}{a} \cdot a = a^2$
	Suma de un número con su inverso aditivo	Resuelve como producto, multiplica signos y deja la variable $a + (-a) = -a$
	Multiplicación de una variable por uno	Conceptualización errónea del módulo de la multiplicación $a \cdot 1 = 1$
	Suma de una variable con cero	Conceptualización errónea del módulo de la adición $a + 0 = 0$
	Multiplicación de una variable por cero	Conceptualización errónea del cero como elemento absorbente en la multiplicación $a \cdot 0 = a$

Los errores debidos al uso inapropiado de fórmulas o reglas de procedimiento, están ligados a la generalización de reglas para adecuar los conocimientos previos a nuevas situaciones

y a la necesidad de obtener una respuesta numérica. Se percibe un alto grado de desconocimiento de la notación y lenguaje matemático útil en la solución de situaciones en álgebra y estrechamente relacionado con lo aprendido en aritmética. La introducción al método álgebraico se hace la mayoría de veces con demasiada rapidez y sin valorar de forma adecuada las dificultades que conlleva su correcta asimilación.

Se observó que los estudiantes tienden a emplear reglas de procedimiento, (propiedad distributiva) para resolver situaciones planteadas independientemente del contexto. Hacen uso de la “repartición” de signos, números y letras para resolver y simplificar procesos, sin detenerse a analizar las posibilidades y restricciones de las reglas. De manera similar, resuelven situaciones de cancelación y uso del recíproco para proporcionar una respuesta simplificada.

En el caso de los números generalizados, existen vacíos conceptuales relacionados con las propiedades de los números como el cero y uno en las operaciones básicas. Su función neutra o totalizante (de acuerdo a la situación propuesta) se pierde en los desarrollos presurosos de los estudiantes. Por otra parte, los errores detectados en esta subcategoría, permiten develar el “olvido” de las propiedades en relación a los inversos aditivos y multiplicativos, todos útiles en la construcción de conocimiento matemático necesario para el álgebra escolar y matemáticas superiores.

A partir del primer análisis, se realizó una segunda clasificación, sobre los errores más frecuentes que cometen los estudiantes en los contextos propuestos, se propusieron cinco categorías. Por una parte, los errores de interpretación, errores semióticos, errores conceptuales y errores procedimentales, agrupación de errores que permitió insistir sobre la importancia del estudio minucioso en álgebra escolar de los procesos de generalización y simbolización, de entender los conceptos de variabilidad, puesto que, se encontraron producciones ausentes de uso y significado de los símbolos, signos y propiedades de los números. Por otra parte los errores

sorprendentes “eclécticos”, permiten valorar el álgebra como lenguaje, aquel que maneja lo desconocido, ve lo general en lo particular, el que permite observar la reversibilidad de las operaciones y que cobra sentido cuando el estudiante toma “consciencia matemática” de los procedimientos realizados.

En los errores denominados en el presente estudio como sorprendentes “eclécticos”, se destacan las producciones cargadas de arreglos con signos y notación matemática convencional carente de sentido y escasa *sintaxis álgebraica*, entendida como la “reunión” de reglas a que han de someterse los símbolos (signos, letras y números) para formar frases álgebraicamente correctas. Quizá debido a los limitados procesos de interiorización y la necesidad de cumplir los planes institucionales para el área de matemáticas.

Se puntualiza en el presente estudio en el carácter del error, como un elemento presente, necesario, importante y orientador en los procesos de construcción de conocimiento, se proponen situaciones didácticas con el fin de superar los errores detectados. Se determinan pero no existe “garantía” de eliminar por completo el error, puesto que, siempre se manifestará, como error persistente o como una transformación del error debido a los nuevos conceptos adquiridos. El estudio del error impulsa a la práctica del control y a la autocorrección, necesaria para incursionar en los campos de conocimiento.

Entre las limitaciones detectadas en el estudio se pueden mencionar:

Por la cantidad de estudiantes que participaron en la presente investigación, no fue posible controlar la multiplicidad de errores, hubo muchos estudiantes que no dieron solución a algunos contextos por lo que en los resultados se catalogaron como “no aplica”.

Las categorizaciones realizadas son empíricas por lo que se debe tener en cuenta las limitaciones del modelo, sin embargo, se fundamentan desde la práctica y son de utilidad para los

docentes, las instituciones educativas y todos los interesados en el diagnóstico, tratamiento y superación de errores.

Se planteó la estrategia pero no se aplicaron las situaciones didácticas para verificar la eficacia de las mismas.

Quedan aún muchos interrogantes por resolver, que son nuevas vías de investigación: ¿Qué hace que la comprensión del álgebra escolar sea una tarea difícil para la mayoría de los estudiantes?, ¿Por qué los estudiantes recurren a memorizar las fórmulas o reglas de procedimiento?, ¿Cuáles son las causas de la ocurrencia de error?, ¿Son las metodologías de enseñanza del álgebra parte del problema?, ¿Cuáles son las prácticas en el proceso de transición del aritmética al álgebra?, ¿Es inapropiado el acercamiento de los estudiantes a las tareas algebraicas?

12. RECOMENDACIONES

El álgebra no puede enseñarse de manera aislada, ni tiene un punto de inicio después del final de unos contenidos (programaciones), porque el pensamiento variacional se debe desarrollar en forma continua y paralela desde los primeros años de inicio de la aritmética y geometría . Se debe tener en cuenta el modelo sistémico propuesto en las orientaciones del MEN, trabajando el pensamiento variacional, no como una asignatura independiente. Así, se deben trabajar conceptos y procesos matemáticos respetando las etapas de desarrollo que se dan en los sistemas de representación cognitiva.

En todos los procesos educativos matemáticos, se recomienda asegurarse de que los objetos matemáticos del sistema antiguo de signos no presenten dificultades. Si se hace referencia a la aritmética, realizar las fases que desde la ingeniería didáctica propone Brousseau, (acción, formulación, validación e institucionalización). Asegurarse que los sentidos de un objeto matemático estén diferenciados y no precipitar el aprendizaje de un nuevo objeto. Evitar que los estudiantes desarrollen situaciones particulares que tiendan a generalizar, se busca suprimir en ellos, la fijación numérica que fue creada en el transcurso escolar previo al trabajo algebraico.

Evitar una innecesaria complejidad de los signos matemáticos. Las mejores experiencias de enseñanza se dan en los momentos en los que se reconoce una conexión de un concepto matemático con otros. Se debe propender para que los estudiantes dominen las técnicas, algoritmos y propiedades, para ello se propondrán actividades que no deben ser usadas ocasionalmente sino convertirse en una forma de ver el mundo que nos rodea. Hay que valorar los momentos en los que algo inesperado ocurre o se presentan errores para replantear las situaciones y lograr aprendizajes con significado para los estudiantes.

A partir de los errores detectados y descritos, se recomienda familiarizar a los estudiantes con la terminología algebraica, con los símbolos y letras, para que puedan detectar sus

diferencias. Se debe enfatizar sobre la importancia del manejo de signos de agrupación, su aplicación, el empleo de propiedades, evitando la omisión de signos o el problema de caer en la aplicación de la regla de signos en la solución de situaciones aditivas.

Se debe invitar a la reflexión, revisión y validación de las producciones de los estudiantes, solicitar que en sus respuestas existan procesos comunicativos para argumentar, hacer aclaraciones, proponer hipótesis y realizar observaciones, conducirlos para que se evidencien progresos en relación a la profundidad de sus análisis. Para ello, se sugiere reforzar la lectura comprensiva en todos los niveles educativos y desarrollar las competencias matemáticas.

Teniendo en cuenta que estos errores se presentan en todos los niveles, se recomienda realizar procesos de nivelación en los primeros semestres universitarios, para ello se presenta a continuación una propuesta:

CURSO DE NIVELACIÓN DE MATEMÁTICAS.

Ejes problema a los que responde el curso de nivelación:

- ¿Soluciona problemas utilizando las diferentes operaciones definidas en cada uno de los conjuntos numéricos?
- ¿Aplica la definición de función, para comprender, analizar y modelar una situación real en la solución de problemas?
- ¿Modela situaciones reales con diferentes tipos de ecuaciones y propone diferentes alternativas de solución para situaciones específicas?

Objetivo general:

Nivelar al estudiante que ingresa a la universidad en los conocimientos básicos de matemáticas y proponer una metodología de estudio para su carrera universitaria.

Objetivos específicos.

- Desarrollar en el estudiante que ingresa a la universidad:
- Una cultura de responsabilidad y compromiso hacia su formación.
- Brindar una metodología de estudio que le muestre el camino para enfrentar con éxito su formación profesional.
- Fortalecer los conceptos matemáticos que trae el estudiante enriqueciendo su lógica, razonamiento y comunicación matemática.

Estándares básicos:

Modelo situaciones problemáticas de ecuaciones lineales, de sistemas de ecuaciones, de funciones reales, determino en qué conjunto numérico se pueden dar su solución (Dominio del modelo) su aplicabilidad a diferentes contextos.

Desarrollo conceptos de operatividad de números reales para comprender las operaciones con polinomios y expresiones algebraicas, su factorización y simplificación, Comprendo el concepto de función, su dominio, rango y gráfica, lo aplico a diferentes contextos de la matemática y de otras ciencias.

Temática.

- Para que, donde y como estudiar, metodología y horario de estudio. Secuencia didáctica: Como optimizar mi tiempo de estudio.
- Operaciones básicas, propiedades y aplicaciones, secuencia didáctica: Operaciones con números (Naïpe: juegos de operatividad y memoria), Propiedad distributiva,
- Operaciones con fracciones, porcentaje, secuencia didáctica: práctica de operaciones con fracciones
- Conceptos geométricos, perímetros, área y volúmenes. Secuencia didáctica: Práctica del desarrollo del concepto de variable tangram, cálculo de perímetros, áreas y volúmenes.

- Solución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, secuencia didáctica: practica de modelos matemáticos.
- Expresiones algebraicas, operaciones, factorización y operatividad de fracciones racionales. Secuencia didáctica: caja de polinomios.
- El concepto de función, función lineal, función cuadrática. Exponencial, logarítmica, secuencia didáctica: construyendo un corral, relaciones y funciones,
- Funciones trigonométricas, identidades y ecuaciones. Secuencia didáctica: Un recorrido por el mundo del triángulo.

Duración:

El curso se ha programado para un mes, con una intensidad de 2 horas diarias con el profesor y 2 horas de trabajo de los estudiantes,

Metodología:

Partiendo de una evaluación diagnóstica en cada tema se programa que conceptos y nivel de complejidad se deben trabajar. La explicación didáctica y metodológica del profesor guiará la toma de apuntes y participación activa de los estudiantes. En sus horas de trabajo

El estudiante desarrolla las secuencias didácticas y talleres programados, en la clase siguiente se resuelven las dudas y se exponen las soluciones e ideas novedosas que plantearon los estudiantes.

Evaluación:

Los estudiantes evaluarán su interés, su actitud hacia el estudio, reflexionando y retroalimentando su quehacer diario, sus trabajos y aportes al ambiente de trabajo del curso.

BIBLIOGRAFÍA

- Alonso, F. et al. (1993). *Ideas y Actividades para enseñar álgebra*. Madrid: Síntesis.
- Booth, L. R. (1984). *Álgebra: Children's Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Londres: NFER-NELSON.
- Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la Didáctica de la Matemática*. Córdoba: Universidad Nacional de Córdoba, Facultad de Matemática Astronomía y Física, Serie B, Trabajos de Matemática, No. 19 (versión castellana 1993).
- _____. (1994). Los diferentes roles del maestro. En Parra, C., y Saiz, I. *Didáctica de Matemáticas: Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós Educador.
- Caronía, S. y otras. (s.f.). *Un Análisis Desde La Didáctica De La Matemática Sobre Algunos Errores En El Álgebra*. Argentina: Facultad de Ciencias Exactas Químicas y Naturales. Universidad Nacional de Misiones. (27-35). Recuperado en Junio 12 de 2009 de <http://www.soarem.org.ar/Documentos/39%20Caronia.pdf>
- Cervantes, G. y Martínez, R. (2007). *Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos*. Zona Próxima, (8), 34-41. Recuperado en mayo 2, 2009 de <http://www.uninorte.edu.co/divisiones/basicas/upload/arti2.pdf>
- De La Torre, Saturnino (2004). *Aprender de los errores: El tratamiento didáctico de los errores como estrategias innovadoras*. Argentina: Magisterio Río de la Plata.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano, registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali: MERILIN I.D.
- Godino, J. D. y Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Bogotá: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de las Matemáticas.. ISBN: 84-932510-7-0. [61 páginas; 1,8 MB] Recuperado de <http://www.ugr.es/local/jgodino/>

- Kieran, C. (s.f.), *The learning and teaching of school álgebra: Una empresa docente, Universidad de los Andes*. (17), 1-24. Recuperado mayo 5 de 2009 de [http://www.prof.uniandes.edu.co/dependencias/una-empresa-docente/serv/doc/resumenes/brousseau\(86\)/brousseau\(86\).pdf](http://www.prof.uniandes.edu.co/dependencias/una-empresa-docente/serv/doc/resumenes/brousseau(86)/brousseau(86).pdf)
- Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (1998). *Educación Matemática. Errores y Dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación Historia. Una Empresa Docente*. Bogotá: Universidad de los Andes.
- Mason, J. y otros. (1999). *Rutas hacia el / Raíces del Álgebra* [traducción al castellano: Cecilia Agudelo] Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Miranda, V. C. (2007). *Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. Iberoamericana de Educación Matemática*, 19-57. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/11/Union_011_007.pdf
- Otros, S. V. (1997). *Procesos de construcción teórica, métodos y técnicas en la investigación social módulo 2*. Manizales: CINDE.
- Panizza, M. (2003). *Conceptos básicos de la teoría de Situaciones didácticas*. Recuperado de http://crecerysonreir.org/docs/Matematicas_teorico.pdf
- Pérez, L., López, P., Rodríguez, M. y Gil, J. (2010). *Investigaciones sobre imaginarios, actitudes y rendimiento académico en matemáticas*. Memorias del segundo congreso nacional, I internacional. Innovación e investigación en ciencias básicas: un reto para la educación básica, media y superior. Bogotá: Universidad Manuela Beltrán.
- Rainmundo Olfos, E. V. (2001). *Actividades Lúdicas y Juegos en la Iniciación al Álgebra*. *Integra* (1), 1-13.
- Rojas, P. y otros. (2002). *La transición Aritmética-Álgebra*. Grupo Pretexto. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Colección Didáctica de las Matemáticas.

- Rico, L. (1995). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. *Revista Andaluza de Educación Matemática*, 125-154.
- Saucedo, G. (2007). *Categorización de errores algebraicos en alumnos ingresantes a la Universidad*. En *Itinerarios Educativos*, 1(2), 22-43.
- Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis.
- _____. (1995). *Iniciación al álgebra*. Barcelona: Síntesis.
- _____. (1997). *Dificultades, Obstáculo y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria*. Barcelona: Horsori.
- _____. (2007). *Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico*. *Investigación en Educación Matemática XI*. 19-52. Recuperado julio 2, 2009 de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2696955>